FISICA I CON LABORATORIO

27/02/2024

Sia A una grandezza fisica e u la sua unità di misura.
La scelta dell' unità di misura è arbitraria

$$A = A_u \cdot u$$

A_u: numero puro che esprime il rapporto tra la grandetta misurata e l' unità di misura

È necessario che le **grandezze fisiche fondamentali** riescano a descrivere tutti i fenomeni relativi a una branca della fisica

Per la MECCANICA sono

- LUNGHEZZA (m)
- MASSA (Kg)
- TEMPO (s)

Grandezze derivate: velocità $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ $\frac{m}{s}$

accelerazione $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $\frac{m}{s^2}$ ...

I campioni delle unità di misura devono essere
- inalterabile
- riproducibile con elevata precisione

Il metro

- **1791** (Assemblea Nazionale Francese)
  $\frac{1}{10^7}$ della distanza Polo - Equatore misurata sul meridiano passante per Parigi
- **1889**
  Venne fissato con due incisioni su una ~~bass~~ barra di platino iridio alla temperatura di 0 gradi.
  (riproducibilità molto migliore)
- **1960**
  1 metro = 1 650 763,73 volte la lunghezza d'onda della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli atomici dell' atomo di cripton-86
- **1983**
  1 metro = distanza percorsa dalla luce nel vuoto in

  $$\frac{1}{299792458}\ s$$

  (questo fissa la velocità della luce a un certo valore)

La massa

- Campione cilindrico di platino iridio $\sim$ massa di 1 l d'acqua

In chimica: $1\,\text{UMA} = \frac{1}{12} M_a(^{12}C) = 1{,}660 \cdot 10^{-27}$ Kg

UMA: unità di massa atomica

$M_a(^{12}C)$: massa atomica del carbonio-12

Anche questa è stata cambiata recentemente, sfruttando la costante di Planck

Tempo

$$1 \text{ sec} = \frac{1}{86400} \text{ giorno solare medio}$$

$\Rightarrow$ Troppo poco accurata per la fisica moderna

(variabile nel tempo: $\dot{P} = \frac{1.7 \cdot 10^{-3}\, s}{100\, yr}$)

$\dot{P}$: variazione del periodo di rotazione della terra rispetto al tempo

- 1967

$$1 \text{ sec} = 9{,}192631770 \cdot 10^{9}\, T(^{133}Cs)$$

$T(^{133}Cs)$: periodo di oscillazione di una certa transizione atomica del cesio-133

GRANDEZZE FISICHE
- scalari
- vettoriali
- tensoriali

Grandezza scalare

Esprimibile mediante VALORE NUMERICO + UNITÀ DI MISURA

es. Temperatura $T = 29\ °C$

Pressione $P = 10^5$ Pa

$$1 \text{ Pa (Pascal)} = \frac{N}{m^2} = \frac{Kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m^2} = \frac{Kg}{m \cdot s^2}$$

Grandezze vettoriali

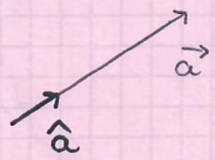
3 proprietà
- modulo $v \equiv |\vec{v}| \geq 0$ "intensità" della grandezza
- direzione retta
- verso uno dei due versi con i quali ci si può spostare su una retta

es. spostamento $\vec{s}$, velocità $\vec{v}$, forza $\vec{F}$

Matematicamente sono elementi di uno spazio vettoriale (hanno tutte le prop. che già conosciamo degli sp. vettoriali)

$\vec{a} = a \cdot \hat{a}$

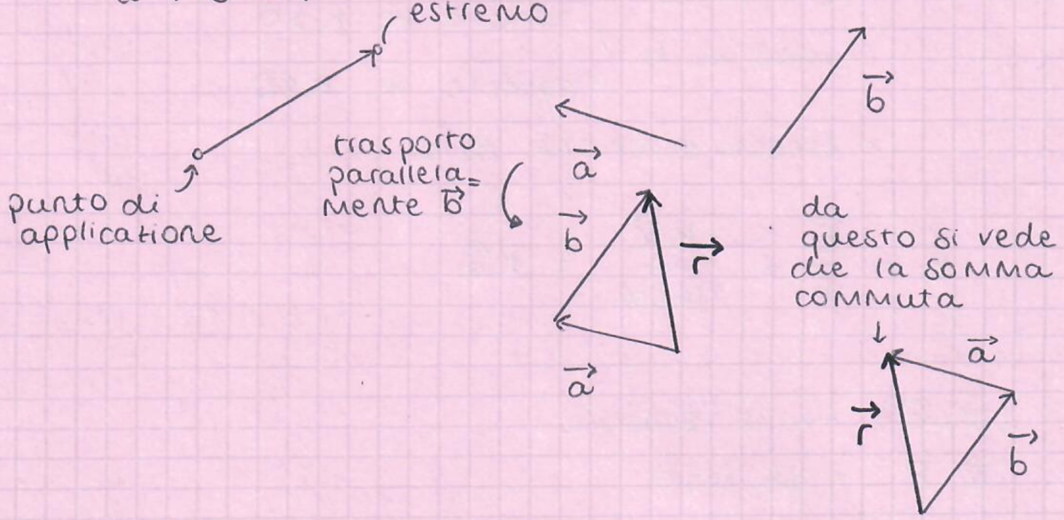
$\hat{a}$ ↓ VERSORE
| modulo unitario



$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a} \Rightarrow \hat{a} \text{ è } \underline{\text{adimensionale}}$$

Somma di vettori (metodo geometrico)

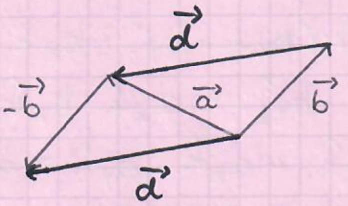
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{r}$



da questo si vede che la somma commuta

Differenza di 2 vettori:

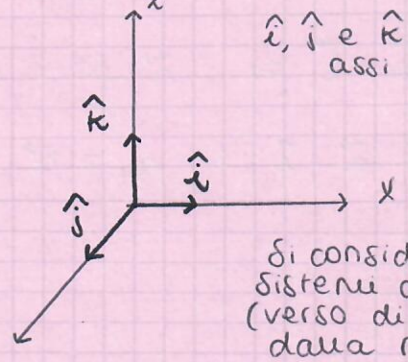
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$
↓
verso opposto rispetto a $\vec{b}$



Componenti cartesiane di un vettore

$\vec{a} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$



$\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ versori degli assi cartesiani

$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

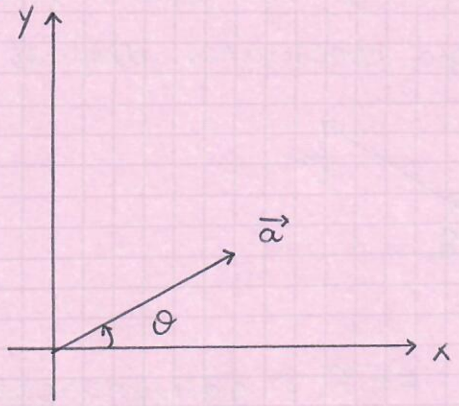
sia $\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$

Si considerano sempre sistemi destrorsi (verso di z individuato dalla regola della mano DX)

↳ Quindi l'ho disegnato male !! ☺

Coordinate polari (in $\mathbb{R}^2$)



$\vec{a} \equiv (a_x, a_y) \rightarrow$ cartesiane

$\vec{a} \equiv (a, \theta) \rightarrow$ polari

$a_x = a \cos\theta$

$a_y = a \sin\theta$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_y}{a_x}$

$\vec{b} = k\vec{a}$

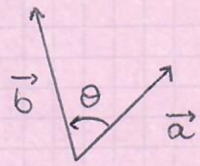
- $b = |k|\, a$
- verso di b / come a se $k>0$ \ opposto se $k<0$
- stessa direzione di a

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{b} = \frac{k\vec{a}}{|k|\,a} = \pm\hat{a}$$

Prodotto scalare

$(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow s$ scalare

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$



$\vec{a} \perp \vec{b} \longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{b}\cdot\vec{a} = ba\cos(2\pi - \theta) = ab\cos\theta = \vec{a}\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow$ commuta

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) =$$

$$\underset{\text{prop. distributiva}}{=} a_x\hat{\imath}\cdot b_x\hat{\imath} + a_x\hat{\imath}\cdot b_y\hat{\jmath} + a_x\hat{\imath}\cdot b_z\hat{k} + a_y\hat{\jmath}\cdot b_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}\, b_y\hat{\jmath} +$$

$$+ a_y\hat{\jmath}\cdot b_z\hat{k} + a_z\hat{k}\cdot b_y\hat{\imath} + a_z\hat{k}\cdot b_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\, b_z\hat{k} =$$

i termini $\perp$ si annullano

$$= \mathbf{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

se $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2 \Rightarrow \vec{a}^{\,2} = a^2$

$a_x = \vec{a}\cdot\hat{\imath} \qquad a_y = \vec{a}\cdot\hat{\jmath} \qquad a_z = \vec{a}\cdot\hat{k}$

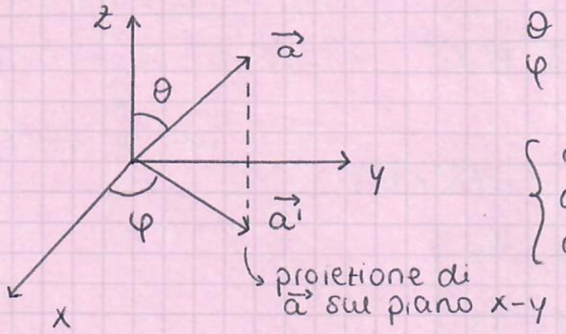
Teorema di Carnot 28/02/2024

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{c}^{\,2} = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^{\,2} - \vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a} + \vec{b}^{\,2} =$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2$

Coordinate nello spatio (SFERICHE)



$\theta \Rightarrow$ angolo polare

$\varphi \Rightarrow$ angolo atimutale (della proietione su x-y)

$$\begin{cases} a_x = \overbrace{a\sin\theta}^{\vec{a}'}\cos\varphi \\ a_y = a\sin\theta\sin\varphi \\ a_z = a\cos\theta \end{cases}$$

Prodotto vettoriale

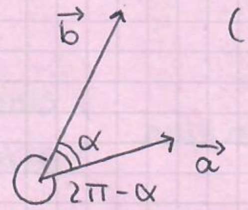
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ — <u>modulo</u>: $c = ab\sin\alpha$

angolo tra due vettori, il più piccolo dei due $(0 \leq \alpha \leq \pi)$

ciò garantisce $c \geq 0$

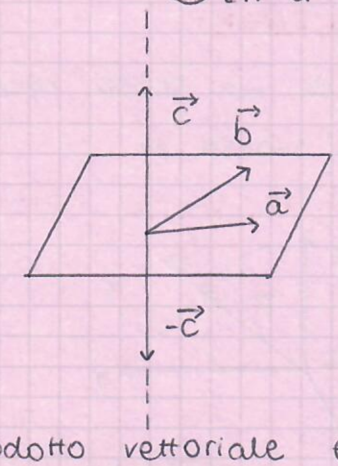
<u>diretione</u>: $\perp$ al piano individuato dai due vettori

<u>verso</u>: individuato dalla regola della mano DX



$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$

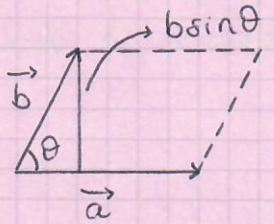
"anticommuta"



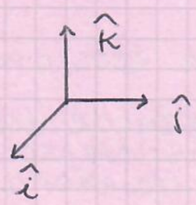
$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ab$

Geometricamente il modulo del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$



<u>PRODOTTO VETTORIALE IN COORDINATE</u>



$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$; $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

$\hat{i} \times \hat{i} = 0 = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k}$

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) \underset{\text{prop. distributiva}}{=}$

$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} =$
$= -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) =$
$= -(\vec{c} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{c} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$
↓
non è associativo

Triplo prodotto vettoriale

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Prodotto misto

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

↓
± volume del parallelepipedo individuato da $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$

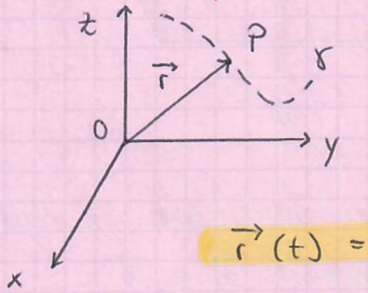
CINEMATICA

Meccanica
- cinematica → descrizione del moto senza cause
- dinamica → analisi delle cause del moto

PUNTO MATERIALE:

Astrazione di un corpo reale considerato senza estensione ma con una certa massa m (dimensioni trascurabili)

Cinematica del punto materiale



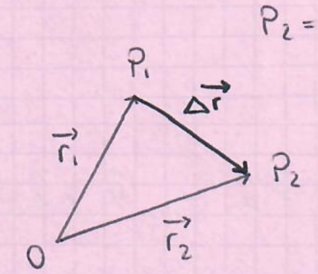
$\vec{r} = \vec{OP}$ => vettore posizione del punto materiale

γ => traiettoria del punto materiale nello spazio

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ => LEGGE ORARIA

Supponiamo di conoscere la posizione in due istanti di tempo P_1 e P_2

$P_1 = P(t_1)$
$P_2 = P(t_2)$



$t_2 = t_1 + \Delta t$

$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ => vettore spostamento

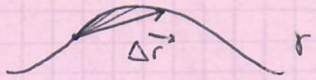
(non dipende dal sistema di riferimento scelto o dalla traiettoria tra P_1 e P_2)

$\boxed{\text{Velocità media}}$

$$\vec{v}_{med}(t, t+\Delta t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Velocità istantanea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ (limite della velocità media)



La velocità istantanea è tangente alla traiettoria

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

la derivata di un vettore è un vettore che ha per componenti le derivate delle componenti

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$$

Ascissa curvilinea

se conosciamo γ conosciamo anche la direzione della velocità istante per istante

$s = \overline{\Omega P}$ = lunghezza del tratto di curva tra Ω e P

↓

è una coordinata intrinseca chiamata <u>ascissa curvilinea</u>

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \qquad \begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= z(s) \end{aligned}$$

$s = s(t)$ => LEGGE ORARIA

Velocità scalare

$$v_s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Relazione tra $\vec{v}$ e v_s

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad v_s = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \qquad s = s(t)$$

Cioè posso scrivere r in funzione di s e poi s in funzione di t

$$\vec{r} = \vec{r}(s(t))$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} v_s = \hat{\tau} v_s \qquad \hat{\tau} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds}$$

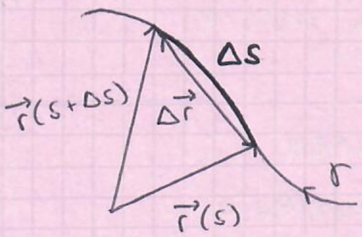
$$\vec{v} = v_s \hat{\tau}$$

↓

$\vec{v} \parallel \hat{\tau}$ $\qquad$ $\hat{\tau}$ tangente a γ

$$\hat{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s}$$

Vogliamo dimostrare che $\hat{\tau}$ è un versore



$$|\hat{\tau}| = \left| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = 1$$

$\hat{\tau}$ è costante in modulo ma cambia continuamente direzione

$$\vec{v} = v\hat{v} = v_s \hat{\tau}$$

sono // ma non hanno necessariamente verso concorde

$$v_s = v \cdot \underbrace{\hat{v} \cdot \hat{\tau}}_{\pm 1} = \pm v \qquad \left(\begin{array}{l} \hat{v} = \hat{\tau} \\ \hat{v} \overset{opp.}{=} -\hat{\tau} \end{array} \right.$$

dipende dal segno di Δs (cioè da come ho orientato la curva)

29/02/2024

Accelerazione

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$ accelerazione media

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$ accelerazione istantanea

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

$$a_x = \frac{d}{dt} v_x = \ddot{x}$$

$$\vec{v} = v_s \hat{\tau} \qquad v_s = \frac{ds}{dt}$$

$\hat{\tau}$ → versore tg alla traiettoria

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_s\hat{\tau}) = \underbrace{\frac{dv_s}{dt}}_{\text{accelerazione scalare } (a_s)} \hat{\tau} + v_s \frac{d\hat{\tau}}{dt} \; ; \quad \vec{a} = a_s\hat{\tau} + v_s \frac{d\hat{\tau}}{dt}$$

derivata del prodotto

accelerazione tg alla curva

termine legato alla variazione della direzione di $\hat{\tau}$

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}(s(t))$$

ora considero solo il termine $\frac{d\hat{\tau}}{dt}$

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\hat{\tau}(s(t))}{dt} = \frac{d\hat{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v_s \frac{d\hat{\tau}}{ds}$$

$$\vec{a} = a_s\hat{\tau} + v_s^2 \underbrace{\frac{d\hat{\tau}}{ds}}$$

dimensionalmente: $[m^{-1}]$

→ vogliamo mostrare che è una prop. intrinseca della curva

(≡ descrive una caratteristica della curva)

Mostriamo che $\frac{d\hat{\tau}}{ds} \perp \hat{\tau}$

$$\hat{\tau} \cdot \hat{\tau} = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\hat{\tau} \cdot \hat{\tau}) = 0$$

(la derivata del prodotto scalare è come la derivata del prodotto)

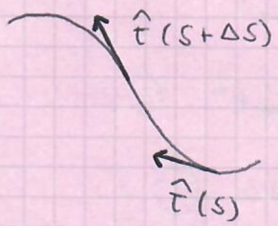
MODULO DI τ AL QUADRATO

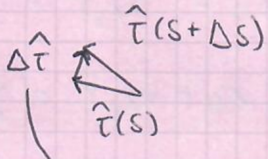
$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} \circ \hat{\tau} + \hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\tau}}{ds} = 2 \frac{d\hat{\tau}}{ds} \circ \hat{\tau} \Rightarrow \frac{d\hat{\tau}}{ds} \perp \hat{\tau}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a \perp b$

$|\vec{a}| \neq 0 \neq |\vec{b}|$

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\hat{\tau}(s+\Delta s) - \hat{\tau}(s)}{\Delta s}$$



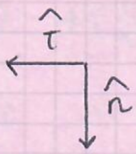


geometricamente si vede che al limite è $\perp$ alla curva

$$\frac{1}{\rho} \equiv \left| \frac{d\hat{\tau}}{ds} \right|$$

ρ = raggio di curvatura della curva in quel punto

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \hat{n}$$



$\Rightarrow$ individuano il "piano oscuratore" della curva nello spazio

piano in cui la curva giace localmente

$$\vec{a} = \underbrace{a_s \hat{\tau}}_{\equiv \text{ accelerazione tangenziale}} + \underbrace{\frac{v_s^2}{\rho} \hat{n}}_{\equiv \text{ accelerazione centripeta}}$$

$(v_s^2 = v^2)$

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{cost} \equiv \vec{v}$$

$v_x = cost$
$v_y = cost$
$v_z = cost$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Voglio ricavare la legge oraria $\vec{r} = \vec{r}(t)$

(in coord. cartesiane $x = x(t)$)

$$dx = v_x \, dt$$

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x \, dt \qquad t_0 = 0$$

$$x(t) - x_0 = v_x t \; \cancel{t_0} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_x t$$

cost. di integrazione

analogamente per le altre componenti

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v} t$$

costante in modulo, direzione e verso

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\vec{a}(t) = \overrightarrow{cost} \equiv \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$a_x = \frac{dv_x}{dt}$

$$\int_{t_0}^{t} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x \, dt \qquad t_0 = 0$$

$$v_x(t) - v_{x_0} = a_x t$$

$$v_x(t) = v_{x_0} + a_x t \quad (1)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_x(t)\,dt = dx$$

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} (\underbrace{v_x(t)}_{= v_{x_0} + a_x t})\,dt$$

$$\Rightarrow \quad x(t) - x_0 = v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (2)$$

$(1) \Rightarrow \quad a_x = \frac{v_x(t) - v_{x_0}}{t}$ sostituendo nella (2) :

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_x(t) - v_{x_0}}{\cancel{t}} \, t^{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x_0} + v_x)\,t \quad (3)$$

Ricavando dalla (1) il tempo e sostituendo nella (3) si ottiene

$\hookrightarrow t = \frac{v_x(t) - v_{x_0}}{a_x(t)}$

$$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (4)$$

Queste equazioni descrivono completamente la cinematica del moto unif. accelerato. (valgono analoghe per le altre componenti)

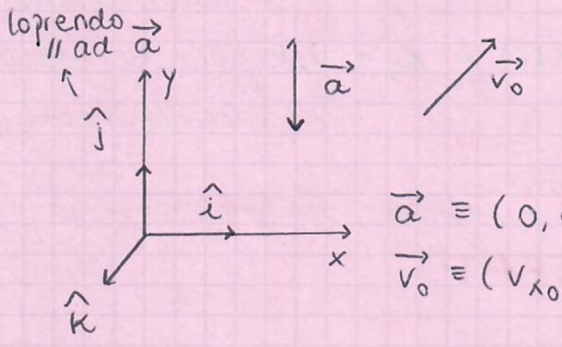
$$\left.\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v_0} + \vec{a}t \\ \vec{r}(t) &= \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{aligned}\right]$$

LEGGE ORARIA

La traiettoria Γ è piana

voglio dimostrare che è una parabola

Piano x-y contenente $\vec{a}$ e $\vec{v_0}$



$\vec{a} \equiv (0, a_y, 0)$

$\vec{v_0} \equiv (v_{x_0}, v_{y_0}, 0)$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{x_0} t \\ y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ z = z_0 \end{cases}$$

$\downarrow$

EQ. PARAMETRICA DI UNA PARABOLA

(basta eliminare t dalla 2ª eq.)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v})\, t \qquad (3')$$
$$\vec{v}^{\,2} = \vec{v}_0^{\,2} + 2\vec{a} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) \qquad (4')$$

MOTO DI CADUTA LIBERA DI UN CORPO

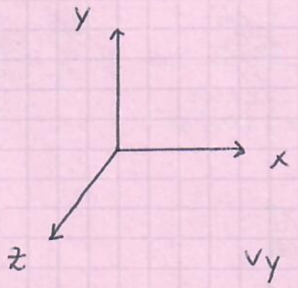
$\downarrow \vec{g}$

$g = g(h)$ altitudine

$g = g(\ell)$ latitudine

ma noi la assumiamo costante !!

$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$



$\downarrow \vec{g}$

$\vec{g} = (0, -g, 0)$

$\vec{g} = -g\hat{j}$

$\vec{v}_0 \parallel \vec{g}$

$$v_y = v_{y0} - gt \qquad (a)$$
$$y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (b)$$

TEMPO DI CADUTA LIBERA (τ_{ff}) ($v_0 = 0$, da altezza h al suolo)

ff = free fall

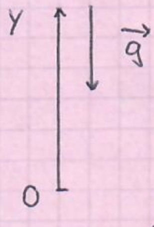
$v_{y0} = 0 \qquad y_0 = h$

$y(\tau_{ff}) = 0$

$0 = h - \frac{1}{2} g \tau_{ff}^2 \implies \tau_{ff} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ dalla (2)

VELOCITÀ DI CADUTA (velocità che ha il corpo quando tocca il suolo)

(a) $\implies v_y(\tau_{ff}) = -g\tau_{ff} = -\sqrt{2gh}$ dalla (1)



Ora supponiamo di sparare il corpo verso l'alto

$y_0 = h_0 \qquad v_{y0} > 0$

TEMPO DI SALITA τ_S

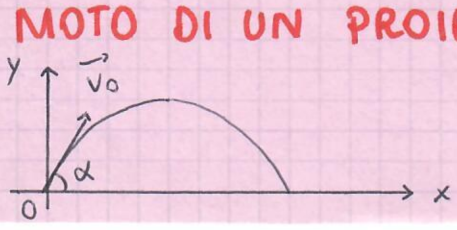
$v_{y0} > 0$

$v_y(\tau_S) = 0 = v_{y0} - g\tau_S \implies \tau_S = \frac{v_0}{g}$

QUOTA MASSIMA

$h_{max} = h_0 + \overset{v_{0y}}{v_0}\tau_S - \frac{1}{2}g\tau_S^2 \implies h_{max} = h_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$

MOTO DI UN PROIETTILE



$$\begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$x(t) = v_{x0} t = v_0 \cos\alpha \, t$

$y(t) = v_0 \sin\alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2$

ottenuta sostituendo $t = \frac{x(t)}{v_0 \cos\alpha}$

$$y = tg\alpha \, x - \frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2} x^2$$ → EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA

QUOTA MASSIMA

$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha)$

ascissa del punto di altezza massima (la posso ricavare dall'eq. della traiettoria derivandola e ponendola = 0)

$$\left[\; y' = tg\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^* \qquad x^* = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}} = \frac{v_0^2}{g} \underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{= \frac{\sin 2\alpha}{2}} \; \right]$$

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{1}{2} g T_s^2$$

sostituisco x^* nella traiettoria

GITTATA (R)

$y(R) = 0$

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$ (doppio di x^*) (*)

l'angolo di tiro migliore è $\frac{\pi}{4}$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

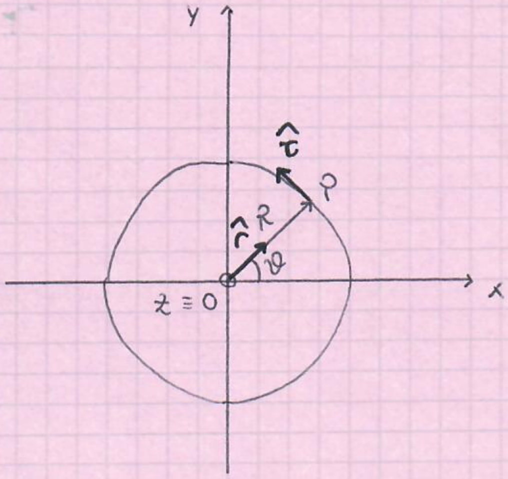
- Dimostrare che:
  - $R(\frac{\pi}{2} - \alpha) = R(\alpha)$ e $x^*(\frac{\pi}{2} - \alpha) = x^*(\alpha)$
  - $h_{max}(\frac{\pi}{2} - \alpha) + h_{max}(\alpha) = h_{max}(\frac{\pi}{2})$
  - $v^2 = v_0^2 - 2gh$

- $R(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha = R(\alpha)$
- $\underset{R/2}{x^*}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{v_0^2}{2g} \sin(\pi - 2\alpha) = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha = x^*(\alpha)$
- $h_{max}(\frac{\pi}{2} - \alpha) + h_{max}(\alpha) = \frac{v_0^2 \sin^2(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} =$
  $= \frac{v_0^2}{2g} \cancel{(\cos^2(\alpha) + \sin^2\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g} = h_{max}(\frac{\pi}{2})$
-

(*) $0 = tg\alpha \cancel{R} - \frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2} R^{\cancel{2}} \rightarrow R = tg\alpha \frac{2(v_0\cos\alpha)^2}{g} =$
$= \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$

MOTO CIRCOLARE (vario)

12/03/2024



$$\begin{cases} x(t) = R\cos\vartheta(t) \\ y(t) = R\sin\vartheta(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$ LEGGE ORARIA

$R \rightarrow$ raggio circolare

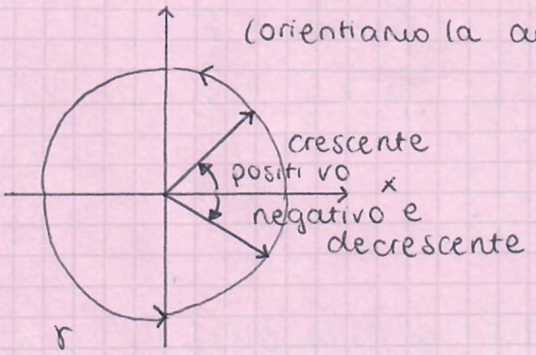
adimensionale e di modulo 1 $\Rightarrow$ versore

$$\vec{P}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} = R\left[\cos\vartheta(t)\hat{\imath} + \sin\vartheta(t)\hat{\jmath}\right]$$

$$= R\,\hat{r}(t)$$ versore radiale

$$\hat{r}(t) = \cos\vartheta(t)\hat{\imath} + \sin\vartheta(t)\hat{\jmath}$$

(orientiamo la curva)



Introduciamo anche un'ascissa curvilinea

Ω

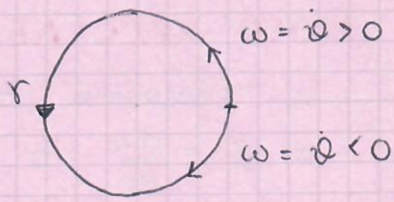
$$\boxed{s(t) = R\,\vartheta(t)}$$

$\vartheta(t) = \frac{s(t)}{R}$ (in radianti)

Velocità:

$$v_x(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -R\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta(t)$$

$$v_y(t) = \frac{d}{dt}y(t) = R\frac{d\vartheta}{dt}\cos\vartheta(t)$$



Velocità angolare:

$$\omega(t) = \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta} \qquad [\omega] = \frac{rad}{s}$$

$$s(t) = R\,\vartheta(t) \Rightarrow v_s = \frac{ds}{dt} = R\dot{\vartheta}(t) = R\omega$$

$$v_x(t) = -R\omega(t)\sin\vartheta(t)$$

$$v_y(t) = R\omega(t)\cos\vartheta(t)$$

$$\vec{v}(t) = v_s(t)\hat{\tau} = R\omega\hat{\tau}$$

PSEUDOVETTORE

Vettore velocità angolare:

$\vec{\omega}$

(i) modulo $|\vec{\omega}| = \left|\frac{d\vartheta}{dt}\right| = |\omega|$

(ii) direzione di $\vec{\omega} \Rightarrow \perp$ al piano che contiene la curva

(iii) "regola della vite destrorsa" (come per il campo magnetico)

$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\hat{k}$ $\quad$ $\hat{\omega}$ può essere concorde o discorde a $\hat{k}$

$$\Rightarrow \hat{\omega} = \underbrace{\frac{\dot{\vartheta}}{|\dot{\vartheta}|}\hat{k}}_{}$$

vettore di modulo 1

$$\vec{v}(t) = R\dot{\vartheta}\left[-\sin\vartheta(t)\hat{\imath} + \cos\vartheta(t)\hat{\jmath}\right]$$

$$\vec{v} = |\vec{v}|\hat{v} = v_s\hat{\tau} \qquad v_s = R\dot{\vartheta}$$

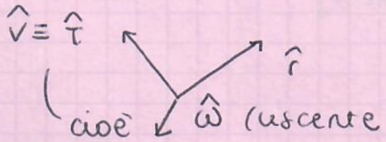
$$\hat{\tau}(t) = -\sin\vartheta(t)\hat{\imath} - \cos\vartheta(t)\hat{\jmath}$$

se $\dot{\vartheta} > 0$ $\quad \hat{v} = \hat{\tau}$

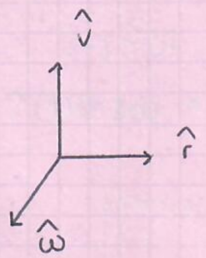
se $\dot{\vartheta} < 0$ $\quad \hat{v} = -\hat{\tau}$

$$\vec{v} = v_s\hat{\tau} = \omega R\hat{\tau}$$

$$|\vec{v}| = R|\vec{\omega}|$$



cioè prendo il caso $\dot{\vartheta} > 0$



$(\hat{r}, \hat{v}, \hat{\omega})$ costituiscono una terna destrorsa

$$\hat{r} \wedge \hat{v} = \hat{\omega}$$
$$\hat{v} \times \hat{\omega} = \hat{r}$$
$$\hat{\omega} \times \hat{r} = \hat{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \hat{\omega} \times \hat{r}$$

Accelerazione :

$$a_x(t) = \frac{d}{dt}\overbrace{v_x(t)}^{-R\,\omega(t)\sin\vartheta(t)} = -R\left[\dot{\omega}(t)\sin\vartheta(t) + \omega^2(t)\cos\vartheta(t)\right]$$

$$a_y(t) = \frac{d}{dt}\overbrace{v_y(t)}^{R\omega(t)\cos\vartheta(t)} = R\left[\dot{\omega}(t)\cos\vartheta(t) - \omega^2(t)\sin\vartheta(t)\right]$$

dove $\omega = \dot{\vartheta}$ e $\dot{\omega} = \ddot{\vartheta}$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

v_s = costante $\longleftrightarrow$ $\dot{\omega} = \ddot{\vartheta} = 0$ cioè $\omega = \dot{\vartheta}$ = costante

$$\Rightarrow \ddot{s} = \frac{dv_s}{dt} = 0 \qquad \dot{\omega} = \ddot{\vartheta} = 0$$

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \text{cost} \; ; \quad d\vartheta = \omega\, dt \qquad t_0 = 0 \quad \vartheta_0 = \vartheta(t_0)$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$$

basta sostituire le nuove condizioni nelle eq. + generali di prima

velocità :

$$\Rightarrow v_x(t) = -R\omega\sin(\omega t + \vartheta_0)$$
$$v_y(t) = R\omega\cos(\underbrace{\omega t + \vartheta_0}_{\vartheta(t)})$$

$\Rightarrow$ da qui si deduce che il moto è periodico di periodo

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

accelerazione:

$$a_x(t) = -R\omega^2\cos\vartheta(t)$$
$$a_y(t) = -R\omega^2\sin\vartheta(t) \qquad \vartheta(t) = \omega t + \vartheta_0$$

$\Downarrow$

come lo avevamo chiamato nella scorsa lezione

$\hat{r} = -\hat{n}$

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2\left[\cos\vartheta(t)\hat{\imath} + \sin\vartheta(t)\hat{\jmath}\right] = -R\omega^2\hat{r} = -\omega^2\vec{r}(t)$$

L' unica componente dell' acc. che sopravvive è quella centripeta

Esercizio

$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)$

Ricavare da questa espressione la formula vettoriale dell'accelerazione (HINT: deve venire un triplo prodotto vettoriale)

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{\omega}(t) = \overrightarrow{cost}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{=0\ (\omega \text{ costante})} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

Nel nostro caso $\left.\begin{array}{l} \vec{A} = \vec{B} \equiv \vec{\omega} \\ \vec{C} \equiv \vec{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} = (\cancel{\vec{\omega} \cdot \vec{r}})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}$ $\perp$

$\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}(t)$

ACCELERAZIONE PER IL MOTO CIRCOLARE VARIO

$\vec{\omega}(t) = \dot{\theta}(t)\hat{k} = |\dot{\theta}|\hat{\omega}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\vec{r} =$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + (-\omega^2 \vec{r}(t))$$

Calcoliamo $\dot{\vec{\omega}}$

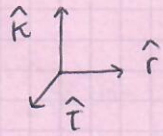
$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d}{dt}\vec{\omega} = \frac{d}{dt}(\omega\hat{k}) = \dot{\omega}\hat{k}$$

$\hat{k} \perp \hat{r} \Rightarrow \sin \widehat{\hat{k}\hat{r}} = 1$

$\vec{r}(t) = R\hat{r}(t)$

$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \dot{\omega}\hat{k} \times R\hat{r}(t) = \dot{\omega}R(\hat{k} \times \hat{r}(t))$

$\hat{k} \times \hat{r} \perp \hat{k} \Rightarrow$ giace nel piano x-y



$\hat{k} \times \hat{r} = \hat{\tau}$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \dot{\omega}R\hat{\tau} - \omega^2 R\underbrace{\hat{r}}_{=-\hat{n}} = \underbrace{\dot{\omega}R\hat{\tau}}_{\text{acc. tangenziale}} + \underbrace{\omega^2 R\hat{n}}_{\text{acc. centripeta}}$$

DINAMICA

13/03/2024

↳ studio del moto dei corpi

"STATO NATURALE" del moto di un corpo : QUIETE O MOTO RETTILINEO UNIFORME

CAUSA DELLA VARIAZIONE DEL MOTO: le FORZE

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$$

$\vec{F}$ ↙ descrive l'interazione tra corpo e ambiente

m ↓ prop. intrinseca del corpo

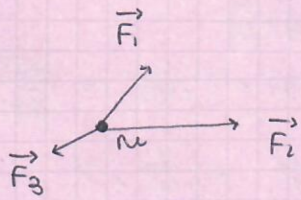
$a \propto F$

INTERAZIONI FONDAMENTALI
- gravitazione
- elettro-magnetica
- nucleare forte – "tiene insieme il nucleo"
- nucleare debole – spiega il decadimento β

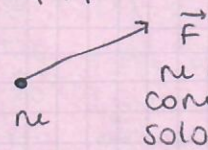
Tutte le forze che si manifestano a livello macroscopico hanno origine elettro-magnetica

Proprietà delle forze:

1) Additività

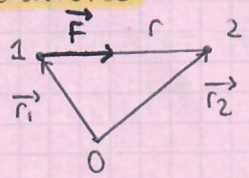


$F = \sum_i \vec{F_i}$



m si muove come se subisse solo la forza risultante

2) Interazione



$r = |\vec{r}| = |\vec{r_2} - \vec{r_1}|$

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, \underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots}_{\text{prop. intrinseche dei corpi}})$$

$\vec{v}$ ↑ può dipendere dalla vel. relativa tra i due corpi

3) $r \to \infty \Rightarrow \vec{F} \to 0$

$$\vec{F} \sim \frac{1}{r^n} \qquad n \geq 2$$

Empiricamente si trova

$F_g \sim \frac{1}{r^2}$; $F_{Coul} \sim \frac{1}{r^2}$

(F_g: gravitazionale)

UNITÀ DI MISURA DELLA FORZA

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad [F] = kg \cdot \frac{m}{s^2} \qquad 1N = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

(N: Newton)

MASSA → prop. intrinseca del corpo

In meccanica classica è uguale in tutti i sistemi di riferimento

Costante di proporzionalità tra forza e accelerazione

$$m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} > 0$$

- Additività $\quad M = \sum_i m_i \quad$ vale con buona approssimazione in meccanica classica, in condizioni particolari

Esempio in cui non vale:
Nucleo atomico, Z protoni, N neutroni

$$M_{nucleo} = Zm_p + Nm_n - \frac{B}{c^2}$$

↳ difetto di massa

$$\frac{\Delta M}{M_{nucleo}} = \frac{B}{M_{nucleo}c^2} \sim 0{,}001 = 1‰$$

PRINCIPI DELLA DINAMICA

1) un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di quiete o moto rettilineo uniforme

2) $\vec{F} = m\vec{a}$

Sistemi di riferimento inerziali (SRI)

⇒ sistemi in cui vale il I principio

cioè un sistema in cui un corpo non soggetto a forze non varia moto

un corpo non è soggetto a forze quando è ISOLATO

distante da tutti gli altri corpi (prop. 3 delle forze)

I sistemi di riferimento che si muovono a vel. costante rispetto a un SRI sono a loro volta SRI

Serve un SRI di partenza ⇒ in senso moderno un sistema di riferimento è inerziale se lo spazio è OMOGENEO e ISOTROPO

OMOGENEO: non ci sono punti privilegiati

ISOTROPO: non ci sono direzioni privilegiate

legate a invarianze rotazionali e traslazionali

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

Caso unidimensionale:

$\vec{F} = (F_x, 0, 0)$

$\vec{F}(x, \dot{x})$

$m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ ⇒ eq. differenziale del 2° ordine

↳ la soluzione ci dà la legge oraria (dipendente dalle condizioni iniziali, in questo caso servono 2 costanti)

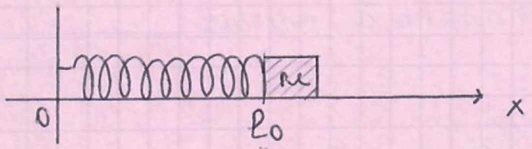
$$x = x(t)$$

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ x_0 = x(t_0) \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0) \end{cases}$$

note queste 2 (vel. e posizione iniziale) possiamo predire futuro e passato

FORZA ELASTICA

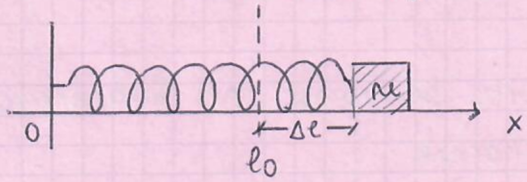
Oscillatore armonico



ℓ_0 = lungh. della molla a riposo

$x \equiv \Delta\ell = \ell - \ell_0$

$x \equiv \Delta\ell > 0$



legge di Hooke

$|x| \equiv |\Delta\ell| \ll \ell_0 \Rightarrow \vec{F} = -K\vec{x} = -Kx\hat{i}$

cioè la legge vale solo quando l'elongazione è molto minore della lung a riposo

$K > 0$

costante elastica della molla

$[K] = \frac{\text{forza}}{\text{lunghezza}} = \frac{N}{m}$

MOLLA IDEALE:
- massa nulla

$m_{molla} = 0$

- lunghezza a riposo nulla

$\ell_0 = 0$

$m\ddot{x} = -Kx$

$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \qquad \omega^2 = \frac{K}{m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$

$v_x(t) = \dot{x}(t) = -c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t)$

CONDIZIONI INIZIALI

$t_0 = 0 \qquad x_0 = x(t_0) \qquad v_0 = \dot{x}(t_0) \Rightarrow c_1 = x_0 \qquad c_2 = \frac{v_0}{\omega}$

$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$ oppure $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ *

A = ampiezza del moto; φ = fase

* $v_x(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$c_1 = A\cos\varphi$

$c_2 = -A\sin\varphi$

$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{x_0^2 + \frac{m v_0^2}{K}}$

$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{v_0}{x_0\omega} = -\frac{v_0}{x_0}\sqrt{\frac{m}{K}}$

Tutorato: giovedì 14.00 / 16.00 (aula N_1)
↳ tranne oggi che è in aula N

OSCILLATORE ARMONICO

$\vec{F} = -Kx\hat{i}$ $\quad K = \text{costante} > 0$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\longrightarrow$ p. di elongazione massima: $\omega t + \varphi = K\pi \quad K \in \mathbb{Z}$

$v_x = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ $\Rightarrow v = 0$

$$\left.\begin{array}{l} t_0 = 0 \\ x_0 = x(t_0) \\ v_{x0} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad tg\,\varphi = -\frac{v_0}{x_0\omega}$$

$$a_x(t) = \dot{v}_x(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

PUNTI DI ELONGAZIONE MASSIMA

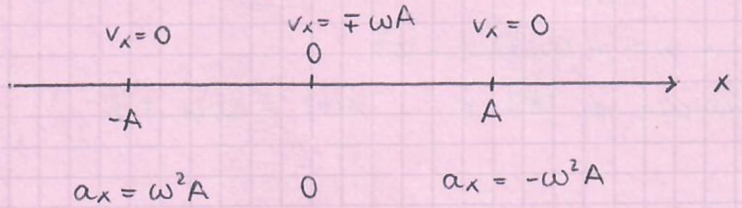
$x = \pm A \Rightarrow v_x = 0$

$\Rightarrow a_x = \pm\omega^2 A$ (è massima)

PUNTI DI ELONGAZIONE NULLA

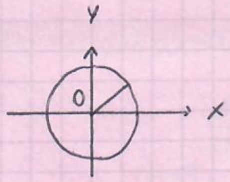
$x = 0 \Rightarrow v_x = \pm\omega A$

$\Rightarrow a_x = 0$



$x(t) = R\cos(\omega t + \vartheta_0)$

$y(t) = R\sin(\omega t + \vartheta_0)$



$\Rightarrow$ posso pensare al moto armonico come proiezione su un diametro del moto circolare uniforme

Punto di equilibrio $\rightarrow$ punto P dello spazio t.c. posto in P un punto materiale con vel. nulla questo ci permane indefinitivamente.

$\vec{F}(\vec{r}_0, \vec{v}=0) = 0 \implies$ le sol. sono i punti di equilibrio associati alla forza

PUNTI DI EQUILIBRIO

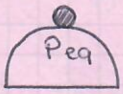
STABILE:

$\downarrow \vec{g}$

P_{eq}

Se lo sposto tende a tornare nella posizione precedente

INSTABILE:



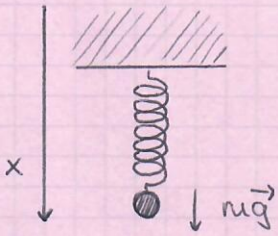
$\downarrow \vec{g}$

Una perturbazione fa allontanare il corpo dalla posizione di equilibrio

Supponiamo che l'oscillatore armonico sia soggetto a una forza costante

$$\vec{F} = (-kx + F_0)\,\hat{\imath}$$

$\llcorner$ componente positiva o negativa



$$m\ddot{x} = -kx + F_0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \qquad (*)$$

$\downarrow$

omogenea associata:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Una soluzione particolare di $(*)$ è $\quad x(t) = \text{cost} \equiv \bar{x}$

$$\implies \bar{x} = \frac{F_0}{k}$$

$$x(t) = \bar{x} + A\cos(\omega t + \varphi)$$

(oscilla rispetto a una nuova posizione di equilibrio $\bar{x}$)

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{F_0}{k}\right)$$

Cambio di variabile $\quad x \to \xi \qquad \xi = x - \frac{F_0}{k} = x - \bar{x}$

$$\implies \ddot{\xi} = -\frac{k}{m}\xi \implies \qquad \ddot{\xi} = \ddot{x}$$

$$\implies \xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \implies x(t) = \bar{x} + A\cos(\omega t + \varphi)$$

Piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile

$$F = F(x)$$

x_0 posizione di eq. stabile $\implies F(x_0) = 0$

$$F(x) = \underbrace{\cancel{F(x_0)}}_{0} + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$

(sviluppo in serie di Taylor)

$$F'(x_0) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} < 0$$

perché il punto di equilibrio è stabile

$$K \equiv - \left.\frac{dF}{dt}\right|_{x_0}$$

$F(x) \cong -K(x-x_0)$

fermandosi al 1° termine di Taylor

(la forza (qualunque) applicata a un corpo in un punto di eq. stabile al 1° ordine si comporta come una forza elastica.

VINCOLI, REAZIONI VINCOLARI

pallina forata in un filo di ferro $\Rightarrow$ VINCOLO

esercita sulla pallina REAZIONI VINCOLARI

$\downarrow$

si ricavano a posteriori quantificando le limitazioni imposte al moto

(Nel pendolo semplice il filo è il vincolo, che esercita una reazione vincolare detta TENSIONE che costringe la pallina a muoversi su un arco di circonferenza)

$\vec{F} = m\vec{a}$

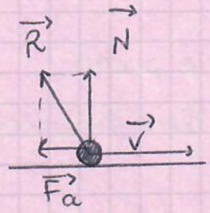
$\vec{F}_{att} + \vec{F}_R$

f. attiva — reazioni vincolari

VINCOLI
- LISCI (la superficie di contatto tra corpo e vincolo è senza attrito $\Rightarrow$ localmente la reazione vincolare è sempre $\perp$ alla sup. del vincolo)
- SCABRI (la sup. di contatto ha attrito $\Rightarrow$ la reazione vincolare ha una componente $\perp$ e una $//$ al piano)

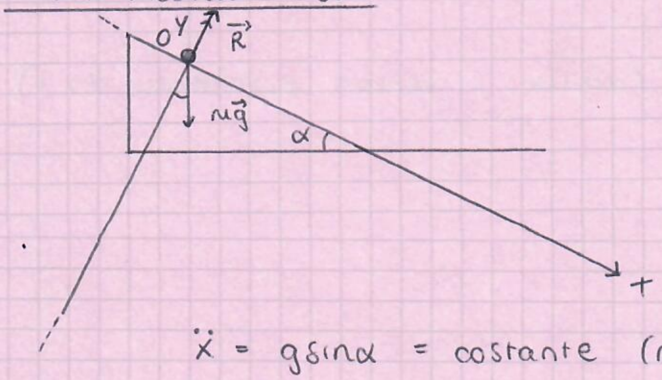
$\Downarrow$

FORZA DI ATTRITO



$\vec{R} = \vec{F_a} + \vec{N}$

Piano inclinato liscio



$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$

$\cancel{m}\ddot{x} = \cancel{m}g\sin\alpha$

$m\ddot{y} = R - mg\cos\alpha = 0$

$\Downarrow$

$R = mg\cos\alpha$

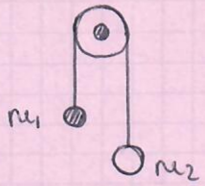
$\ddot{x} = g\sin\alpha = \text{costante}$ (moto uniformemente accelerato)

$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2$

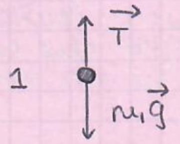
FUNE (O CAVO) IDEALE ⟨ massa nulla / indeformabile

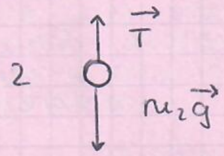
esercitano forze chiamate TENSIONI, tangenti al filo

carrucola ⟨ massa nulla / ruota senza attrito



$m_1 \leqslant m_2$





$$m_1\ddot{y}_1 = T - m_1 g$$
$$m_2\ddot{y}_2 = T - m_2 g$$
$$\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$$
$$\Rightarrow \ddot{y}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad \text{(costante)}$$

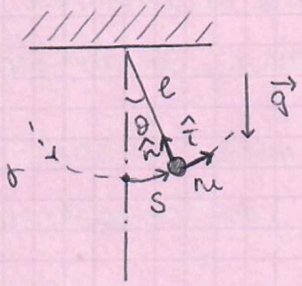
moto uniformemente accelerato

$$T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \xrightarrow[\text{se } m_1 = m_2 = m]{} T = mg \quad e \quad \ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0$$

Permette di stimare g perché si può allungare molto il tempo di caduta

19/03/2024

PENDOLO SEMPLICE



Filo ideale

$t_0 = 0$

$\vec{v}_0 = 0$

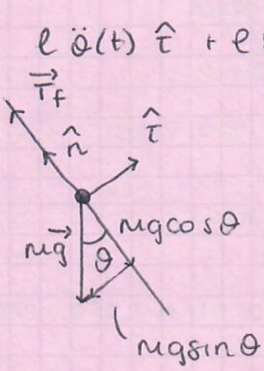
Se $\vec{v}_0 \neq 0$ ma $v_{\tau 0} = 0$ ⇒ il moto è piano

La traiettoria del corpo è un arco di circonferenza

$s(t) = \ell\theta(t)$ $\quad v_s(t) = \dot{s}(t) = \ell\dot{\theta}(t)$

$a_s(t) = \dot{v}_s(t) = \ell\ddot{\theta}(t)$

$\vec{a}(t) = \ell\ddot{\theta}(t)\hat{\tau} + \ell\dot{\theta}^2(t)\hat{n}$ (anche i versori dipendono da t)



$(\hat{\tau}) \quad m\ell\ddot{\theta}(t) = -mg\sin\theta(t)$

$(\hat{n}) \quad m\ell\dot{\theta}^2(t) = T_f - mg\cos\theta(t)$

Dalla 2ª eq: $T_f = mg\cos\theta(t) + ml\dot{\theta}^2(t) = mg\cos\theta(t) + m\frac{v^2}{l}$

Dalla 1ª eq: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta \overset{*}{=} 0$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow$ costante

Piccole oscillazioni

$\theta(t) \ll 1 \qquad [\theta] = \text{rad}$

Possiamo usare l'espansione in serie di Taylor del seno

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$\sin\theta \simeq \theta$ (per piccole oscillazioni)

$* \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ (stessa eq. dell'oscillatore armonico)

$\theta(t) = \Theta\sin(\omega t + \varphi_0)$

$t_0 = 0$

$\left.\begin{array}{l}\theta_0 = \theta(t_0)\\ \dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(t_0)\end{array}\right\}$ dalla conoscenta di queste due si ricavano Θ e φ_0

$s(t) = l\Theta\sin(\omega t + \varphi_0)$

$v_s(t) = l\omega\Theta\cos(\omega t + \varphi_0)$

MOTO PERIODICO

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

⇓

Posso usarlo come strumento per ricavare g

- le piccole oscillazioni sono <u>isocrone</u>

⇓

IL PERIODO NON DIPENDE DALL'AMPIEZZA

- Il periodo non dipende dalla massa ed è inversamente proporzionale a $l^{1/2}$

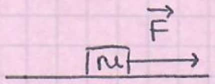
$l = 1\,m$

$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ $\Rightarrow T = 2{,}006\ s$ (Calcolare il periodo dello stesso pendolo sulla Luna)

$\rightarrow g = 4\pi^2\frac{l}{T^2}$

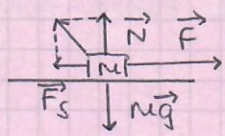
VINCOLI SCABRI: ATTRITO STATICO

- (a) caso ideale (vincolo liscio)



$\vec{F} \Rightarrow a = \frac{F}{m}$ (anche una forza infinitesima fa partire il corpo)

(b) caso reale (vincolo scabro, f. di attrito)



La reazione vincolare si scompone in $\vec{N} + \vec{F_s}$

Se $F \leq F_{min}$ il corpo resta fermo

In condizioni statiche: $\begin{cases} \vec{F} + \vec{F_s} = 0 \\ \vec{N} + m\vec{g} = 0 \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se $F \leq F_{min}$ allora $\vec{F_s} = -\vec{F}$

Se $F > F_{min}$ il corpo inizia a muoversi

empiricamente si vede che

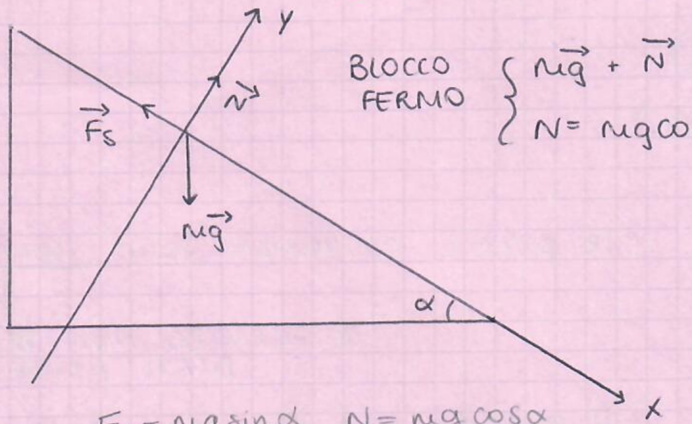
$F_s = |\vec{F_s}| \leq \underbrace{\mu_s}_{\text{COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO (adimensionale)}} N \rightarrow$ valore limite (minimo della f. esterna) max dell'attrito statico

$F_s \leq \mu_s N = F_s^{max} = F_{min}$

ACHTUNG!!!
E' una <u>disugualianza</u>!!!

$\mu_s \Rightarrow$ dipende dai materiali di corpo e superficie

PIANO INCLINATO SCABRO



BLOCCO FERMO $\begin{cases} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_s} = 0 \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$

$F_s = mg\sin\alpha \quad N = mg\cos\alpha$

$\Downarrow$

$\frac{F_s}{N} = \tan\alpha; \; F_s = N\tan\alpha$

$F_s = tg\alpha\, N \leq \mu_s N$

$tg\alpha \leq \mu_s$

$\alpha \leq arctg(\mu_s) = \alpha^*$

$\begin{cases} \text{se } \alpha < \alpha^* \Rightarrow \text{il blocco rimane fermo} \\ \text{se } \alpha > \alpha^* \Rightarrow \text{il blocco comincia a scendere} \end{cases}$

F. DI ATTRITO DINAMICO

Empiricamente si vede che $|\vec{F_d}| = \mu_d |\vec{N}|$
↳ coeff. di attrito dinamico

$\mu_d \leq \mu_s$

$\vec{F_d} = -\mu_d N \hat{v} \qquad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$

La forza di attrito dinamico, al contrario della f. di attrito statico, si manifesta anche in assenza di forze esterne

FORZE VISCOSE

20/03/2024

Moto di un corpo in un mezzo viscoso

Proprietà delle forze viscose

- $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v})$ (dipende dalla velocità)
- Assumendo che il fluido sia omogeneo, $\vec{F}$ non dipende dalla posizione
- $\vec{F}$ ha direzione della velocità $\vec{v}$ e verso opposto
- Empiricamente si trova che se $v < v_{critica}$ =>

$$\Rightarrow -\vec{F} = \beta\vec{v}$$ **Legge di Stokes**

β → costante positiva $[\beta] = \dfrac{Kg\frac{m}{s^2}}{\frac{m}{s}} = \dfrac{Kg}{s}$

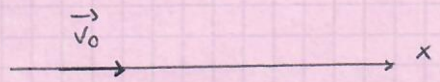
dipende da:
- Proprietà del fluido (viscosità)
- Dimensioni e forma del corpo (aerodinamicità)

Studiamo il <u>moto di un corpo sul quale agisce esclusivamente la forza viscosa</u>

$t_0 = 0$

$\vec{v}_0 \neq 0$

$\vec{F} = -\beta\vec{v}$ (moto unidimensionale)



$$m\vec{a} = -\beta\vec{v} \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} \; ; \; m\frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x$$

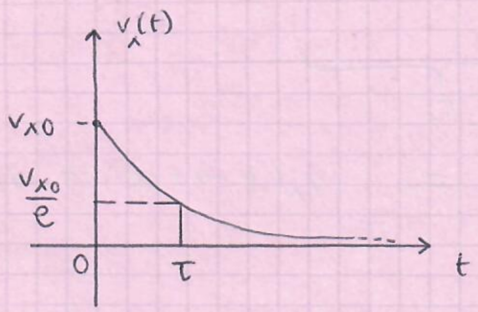
$$\tau \equiv \frac{m}{\beta} \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\tau}v_x$$

τ → costante > 0

$[\tau]$ = tempo

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{1}{\tau}dt \; ; \; \int_{v_{x0}}^{v_x}\frac{1}{v_x'}dv_x' = -\frac{1}{\tau}\int_{t_0=0}^{t}dt' \; ; \; \log v_x - \log v_{x0} = -\frac{1}{\tau}t$$

$$\log\frac{v_x}{v_{x0}} = -\frac{1}{\tau}t \; ; \; \frac{v_x}{v_{x0}} = e^{-\frac{1}{\tau}t} \; ; \; v_x(t) = v_{x0}e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (1)$$



τ è un tempo caratteristico del sistema

Se $t = \tau$

$v_x(\tau) = \dfrac{v_{x0}}{e}$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x}e^{-\frac{1}{\tau}t} \; ; \; dx = v_{x0}e^{-\frac{1}{\tau}t}dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0=0}^{t} v_{x0}\, e^{-\frac{1}{\tau}t}\, dt \implies \underline{x(t) = x_0 + v_{x0}\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \quad (2)$$

$t \to +\infty \qquad x(t \to +\infty) - x_0 = v_{x0}\tau$

Eliminando t dalla (1) e dalla (2)

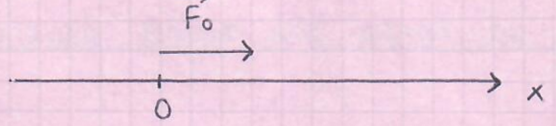
$$\underline{v_x(x) = v_{x0} - \frac{1}{\tau}(x - x_0)}$$

Moto di un corpo in un <u>fluido viscoso e soggetto a una forza costante</u>

$$\vec{F_v} = -\beta\vec{v}$$

$$\vec{F} \equiv \vec{F_0} \qquad (\text{p. es. } \vec{F_0} = m\vec{g})$$

Sia $\vec{v_0} \parallel \vec{F_0} \implies$ moto unidimensionale



$\vec{F_0} = F_0\hat{i} \qquad F_0 > 0$ (per costruzione)

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\beta v_x + F_0 \qquad \left(\tau = \frac{m}{\beta}\right)$$

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\tau}v_x = \frac{F_0}{m}$$

$\downarrow$

Abbiamo già la soluzione dell'omogenea associata, una soluzione particolare è una soluzione costante

$$v_x(t) = \frac{F_0}{\beta} = \frac{F_0}{m}\tau \implies v_{lim}, \text{ velocità limite}$$

$$\text{se } F_0 = mg \implies v_{lim} = \frac{mg}{\beta} = \tau g$$

SOLUZIONE GENERALE:

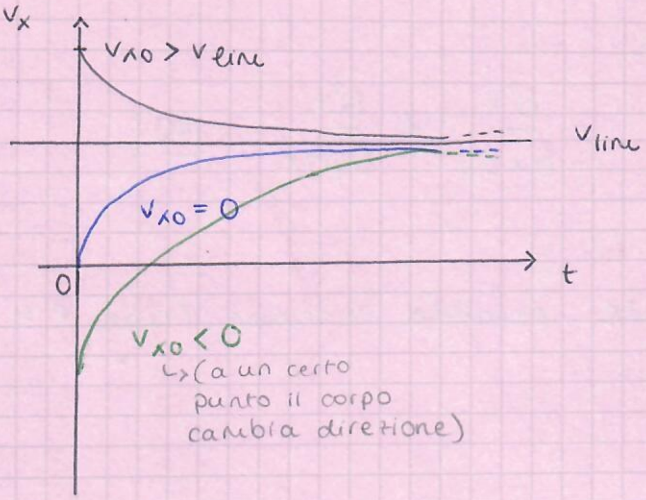
$$v_x(t) = Ce^{-t/\tau} + \frac{F_0}{\beta}$$

possiamo ricavare C dalle cond. iniziali

$$t_0 = 0 \qquad v_{x0} \equiv v_x(t_0)$$

$$\implies v_x(t) = \underbrace{(v_{x0} - v_{lim})}_{C}\, e^{-t/\tau} + \overbrace{\frac{F_0}{\beta}}^{v_{lim}}$$

$$t \to +\infty \implies v_x(t \to +\infty) = v_{lim}$$



Consideriamo il caso

$$t \ll \tau$$

supponiamo inoltre che $|v_{x0}| \ll v_{lim} = \frac{F_0}{m}\tau$

$$x \equiv \frac{t}{\tau} \ll 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-t/\tau} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$$

$$v_x(t) \simeq (v_{x0} - v_{lim})\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + v_{lim}$$

trascurando v_{x0} rispetto a v_{lim} $\Rightarrow$ $v_x(t) \simeq v_{x0} + \underbrace{v_{lim}}_{=\frac{F_0}{m}\tau}\frac{t}{\tau} = v_{x0} + \frac{F_0}{m}t$

Se $F_0 = mg$ $\Rightarrow$ $\underline{v_x(t) = v_{x0} + gt}$

$$a_x = \dot{v}_x = g = \text{costante}$$

$\boxed{\text{Funzione di una variabile}}$

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f = f(x)$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\boxed{\text{Funzioni di } n \text{ variabili}}$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$n = 3$ $\quad f(x, y, z)$

DERIVATE PARZIALI DI $f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \dots \quad \text{etc.}$$

Derivate seconde miste:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{?}{\neq} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \underline{\text{NO!}}$$

Teorema di Schwarz

Se f ammette derivate seconde continue (cioè $f \in C^2(\Omega)$)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

26/03/2024

DIFFERENZIALE ESATTO

$$A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$$

è una forma differenziale esatta sul dominio $D \subset \mathbb{R}$ se $\exists$ una funzione scalare $Q = Q(x,y,z)$ |

$$dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z} d\cancel{z}^{\,x} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dz = A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

$\downarrow$

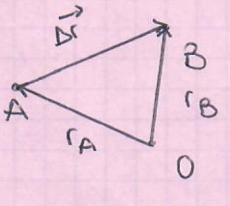
chiamata POTENZIALE

Lavoro

• m $\qquad \vec{F_1}, \vec{F_2}, \dots, \vec{F_n}$

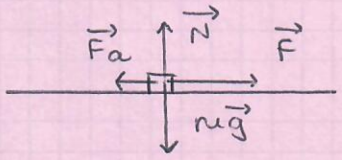
$\vec{F_i} \equiv \vec{F}$

(a) $\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ non dipende da $\vec{r}$
campo uniforme

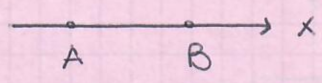


$\vec{\Delta r} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$

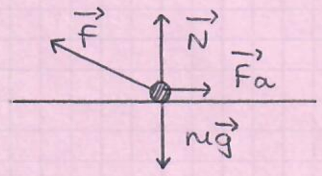
$L_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$

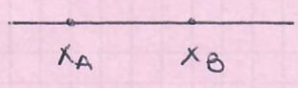


$\vec{\Delta r} = x_B - x_A$



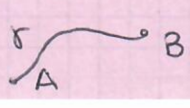
$L_{AB} = F(x_B - x_A) > 0$ (lavoro motore)





$L_{AB}(\vec{F}) = F(x_B - x_A)\cos\vartheta < 0$ (lavoro resistente)

LAVORO DI UNA FORZA, def. generale $\quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$



$\gamma \Rightarrow$ traiettoria del corpo
dovuta a tutte le forze che agiscono sul corpo

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

Supponiamo di approssimare γ con una spezzata γ_{sp}

$$L_{\gamma_{sp}}(A,B) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(r_i^*) \cdot \Delta\vec{r}_i$$

se non è cost. uso il valore medio

$[\vec{r}_i \,,\, \vec{r}_i + \Delta\vec{r}_i]$

intervallino della curva spezzata → se è abbastanza piccolo posso considerare ~~il lavoro~~ la forza su di esso costante (così come considero costante l'ang. tra f e spostamento)

$N \to \infty$

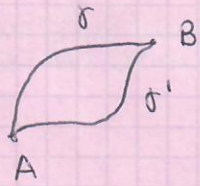
LAVORO ELEMENTARE

$$dL = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$d\vec{r}$: spostamento infinitesimo

$$\boxed{L_{\gamma(A,B)} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

int. di linea



In generale il lavoro dipende dalla curva γ

$$L_{\gamma(A,B)} \neq L_{\gamma'(A,B)}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\hat{i} + F_y(x,y,z)\hat{j} + F_z(x,y,z)\hat{k}$$

$$d\vec{r} = \hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz$$

$$L_{\gamma(A,B)} = {}_\gamma\!\int_{x_A}^{x_B} F_x\,dx + {}_\gamma\!\int_{y_A}^{y_B} F_y\,dy + {}_\gamma\!\int_{z_A}^{z_B} F_z\,dz$$

$${}_\gamma\!\int_{x_A}^{x_B} F_x\,dx \equiv \int_{x_A}^{x_B} F_x(x, y(x), z(x))\,dx$$

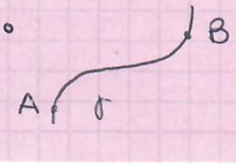
$$\begin{cases} x \in [x_A, x_B] \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$) equazione di γ

Proprietà del lavoro

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$\vec{F}$: risultante

- $$L_{\gamma(A,B)}(\vec{F}) = \int_{\gamma(A,B)} \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma(AB)} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} L_{\gamma(AB)}(\vec{F}_i)$$

- 

$$L_{\gamma(A,B)} = -L_{\gamma(B,A)}$$

se cambio gli estremi solo $d\vec{r}$ cambia segno

$$L_{\gamma(BA)} = \int_{\gamma(BA)} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$= -\int_{\gamma(AB)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

TEOREMA DELLE FORZE VIVE (o dell'energia cinetica)

$\vec{F}$ risultante delle forze su m

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \gamma$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$dL = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt$$

commuta

Consideriamo $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$

$$dL = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} v^2\, dt = \frac{1}{2} m\, d(v^2) = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) (\equiv dK)$$

costanti

ENERGIA CINETICA
DEL PUNTO MATERIALE

Def. energia cinetica

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2$$

$dL = dK \Rightarrow$ teo. delle f. vive espresso in forma differenziale

$$L_{\gamma(A,B)} = \frac{1}{2} m \int_{v_A}^{v_B} d(v^2) = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2)$$

$$L_{\gamma(AB)} = K_B - K_A$$

UNITÀ DI MISURA DI LAVORO E ENERGIA CINETICA

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$[L] = \text{forza} \cdot \text{lung.} = \frac{\text{massa} \cdot \text{lung.}}{(\text{tempo})^2} \cdot \text{lung.} = \text{massa}\left(\frac{\text{lung.}}{\text{tempo}}\right)^2$$

$$[L] = [K]$$

Nel S.I (MKS)

$$1\,J = 1 \cdot N \cdot m = 1\,kg\left(\frac{m}{s}\right)^2$$

Joule

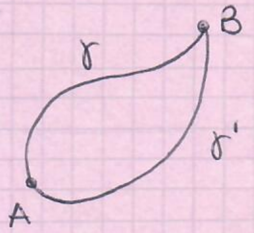
Sist. cgs

$$1\,erg = 1\,dyne \cdot cm = 1\,g\left(\frac{cm}{s}\right)^2 \qquad 1\,J = 10^7\,erg$$

In termodinamica

$$1 \text{ caloria} = 4.186\,J$$

FORZE CONSERVATIVE



In generale

$$L_{\gamma(AB)} \neq L_{\gamma'(AB)}$$

una f. è conservativa quando il lavoro che essa compie su un punto materiale dipende solo da posizione iniziale e finale e non dalla traiettoria

$$L(\vec{F})_{\gamma(AB)} = L(\vec{F})_{\gamma'(AB)}$$

(TEO)

Si può dimostrare che se $\vec{F}$ è conservativa $\Longleftrightarrow$ dL è un differenziale esatto, cioè esiste $U(x,y,z)$ detta energia potenziale per la quale

$$dL = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) = -dU$$

$$dL = F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz$$

$$dL = -dU$$

Integriamo tra A e B $\Rightarrow$ $L_{AB}(\vec{F}) = -(U_B - U_A)$

non servono riferimenti a γ

$$U_B - U_A = -L_{AB}(\vec{F}) = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U(\vec{r_B}) - U(\vec{r_A}) = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ (possiamo ricavare solo la variazione di en. potent.)

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r_0}) = -\int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

↳ Si sceglie il valore dell'energia potenziale in un punto di riferimento

$$U(\vec{r_0}) = U(x_0, y_0, z_0) \equiv U_0$$

($\Rightarrow$ l'en. potenziale è definita a meno di una costante additiva.)

27/03/2024

Affinché una forza sia conservativa:

$$F_x(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}$$

$$F_y(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$F_z(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Operatore differenziale GRADIENTE $\vec{\nabla}$

"nabla"

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Metodo alternativo per capire se una forza è conservativa in base alle sue proprietà locali

Rotore di un vettore $(\vec{\nabla}\times)$

Sia $\vec{F}$ un vettore

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Sia ora $\vec{F}$ una forza conservativa $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla} U = -\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial k} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= -\hat{i}\overbrace{\left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial y}}_{\text{commutano per il teo di Swartz}}\right]}^{=0} - \hat{j}\underbrace{\left[\dots\right] + \hat{k}}_{\text{si annullano per lo stesso motivo}}\left[\dots\right]$$

$\vec{F}$ conservativa $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ $\qquad \vec{F}: D \subset \mathbb{R}^3$

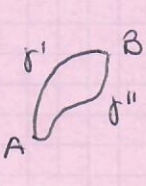
"semplicemente connesso"

viceversa

$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}$ conservativa

$\vec{F}$ è conservativa

$$L_{\gamma'(AB)} = L_{\gamma''(AB)}$$



γ

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{se } \vec{F} \text{ è conservativa}$$

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{f}}_{\text{conservativa}} + \vec{F}' \qquad \vec{F}' = \sum_i F_i$$

(conservative o non conservative)

$$L_{\gamma_0 (P_0, P)}(\vec{F}) = K_P - K_{P_0}$$

↳ traiettoria da P_0 a P

$$L_{\gamma_0}(\vec{F}) = L_{\gamma_0}(\vec{F}') + L_{\gamma_0}(\vec{f})$$

$$\vec{f} \text{ cons.} \Rightarrow L_{\gamma_0}(\vec{f}) = U_{P_0} - U_P$$

$$L_{\gamma_0}(\vec{F}) = U_{P_0} - U_P + L_{\gamma_0}(\vec{F}')$$

$$U_{P_0} - U_P + L_{\gamma_0}(\vec{F}') = K_P - K_{P_0}$$

Supponiamo $\Delta K \equiv K_P - K_{P_0} = 0$

$$U_P = U_{P_0} + L_{\gamma_0 (P_0 P)}(\vec{F}')$$

ENERGIA MECCANICA

$$m \qquad \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}$$

↳ tutte conservative

$$L_{\gamma(P_0 P)}(\vec{F}) = K_P - K_{P_0}$$

$$U_P^{(i)} - U_{P_0}^{(i)} = - L_{\gamma(P_0 P)}(\vec{F_i})$$

$$U_P - U_{P_0} \equiv \sum_i (U_P^i - U_{P_0}^i) = - L_\gamma(\vec{F})$$

$$\underset{\substack{\text{teo. delle} \\ \text{forze vive}}}{\Rightarrow} K_P - K_{P_0} = U_{P_0} - U_P \qquad \boxed{K_P + U_P = K_{P_0} + U_{P_0}} \, *$$

se ci sono SOLO FORZE CONSERVATIVE

$$\forall\, \vec{r} \equiv \vec{OP} \quad (P \in \gamma)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$
$$\vec{v} = \vec{v}(t)$$

Energia MECCANICA $\quad E = K + U = \frac{1}{2} m v^2(t) + U(\vec{r}(t))$

- * l'en. meccanica del sistema è una costante (che dipende però da dove ho posto lo zero del potenziale)

En. meccanica in presenza di forze non-conservative

$$\vec{F} = \vec{F_c} + \vec{F_{nc}}$$

$$L_\gamma(\vec{F}) = L_\gamma(\vec{F_c}) + L_\gamma(\vec{F_{nc}}) = U_{P_0} - U_P + L_\gamma^{(nc)}$$

Dal teo. delle forze vive

$$K_P - K_{P_0} = U_{P_0} - U_P + L_r^{(nc)}$$

$$E = K + U$$

$$\Rightarrow K_P + U_P = K_{P_0} + U_{P_0} + L_r^{(nc)}$$

$$\Rightarrow \Delta E = L_r^{(nc)}$$

ES. DI CAMPI DI FORZA CONSERVATIVI

(1) <u>Campo di forza uniforme</u>

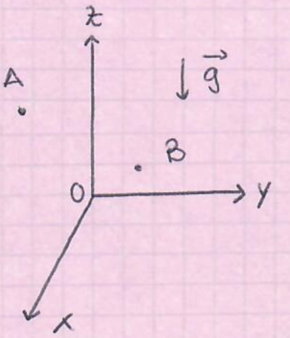
$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

$\underbrace{F_x \quad F_y \quad F_z}_{\text{costanti}}$ $\Rightarrow$ quando le derivo fanno 0

(2) ES.

<u>Campo gravitazionale</u>



$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad m\vec{g} = -mg\hat{k}$$

$$L_{AB} = -\int_A^B mg\hat{k} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = \hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz$$

$$L_{AB} = -mg(z_B - z_A)$$

$$U_B - U_A = -L_{AB} = mg(z_B - z_A)$$

$z_A = 0$ (quota di riferimento)

$U_A = 0$

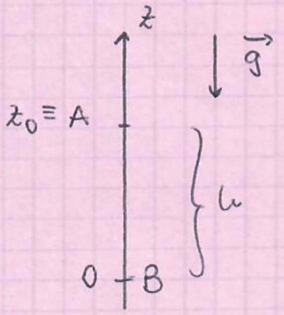
se B è un punto generico $\quad U = U(z) = mgz$

28/03/2024

$\vec{F} = m\vec{g}$ CONSERVATIVA

$U(z) = mgz$

$z = 0 \qquad U(z=0) = 0$



$z_0 = z(t_0 = 0) = z_A \equiv h$

$\tau \equiv$ tempo di caduta libera

$z_B = z(\tau)$

$v_B = v_z(\tau)$

$z(t) = z(t_0) + \underbrace{v_z(t_0)}_{=0} t - \frac{1}{2} g t^2$

$v_z(t) = \underbrace{v_z(t_0)}_{=0} - gt$

$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$

$v_z(t) = -gt$

$z(\tau) = 0 = h - \frac{1}{2} g \tau^2 \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v_z(\tau) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$ → verso il basso

Metodo alternativo: conservazione dell'energia meccanica

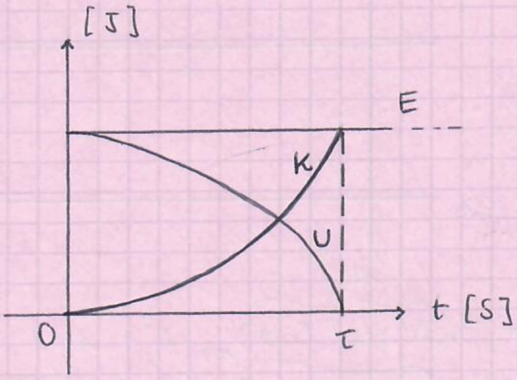
$E = \frac{1}{2} mv^2 + mgh = cost$

$E_A = E_B$

$E_A = mgh \qquad E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad ; \quad mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = -\sqrt{2gh}$

$K = \frac{1}{2} m \underbrace{g^2 t^2}_{v^2} \qquad U = E - \underbrace{\frac{1}{2} m g^2 t^2}_{K} = E_A - K = mgh - \frac{1}{2} m g^2 t^2$

$E = mg\left(h - \frac{1}{2} g t^2\right)$



FORZA ELASTICA

$\vec{F} = -k\vec{r}$ ⇒ FORZA CENTRALE

k costante > 0

dipendente da $\vec{r}$

0 $\quad \vec{r}$

centro del campo

$\vec{F}(\vec{r}) = -k r \hat{r}$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (-k\vec{r}) =$

$= -k \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} =$

$$= -K\hat{i}\left[\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right] + \dots = 0$$
$$\overset{\shortparallel}{0}$$

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -K\int_A^B x\, dx$$

$$U_B - U_A = -L_{AB} = \frac{1}{2}K(x_B^2 - x_A^2)$$

$x_A = 0$

$U_A \equiv U(x_A) = 0$

$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$

OSCILLATORE ARMONICO

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$\downarrow$

$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -a\omega\sin(\omega t + \varphi)$

Condizioni iniziali: $t_0 = 0$

$x(t_0) = a$

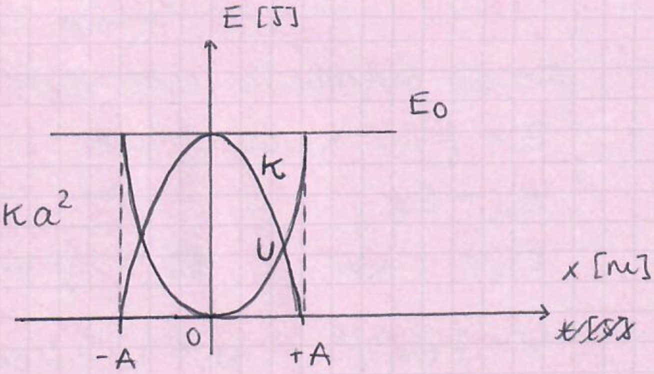
$\dot{x}(t_0) = 0$

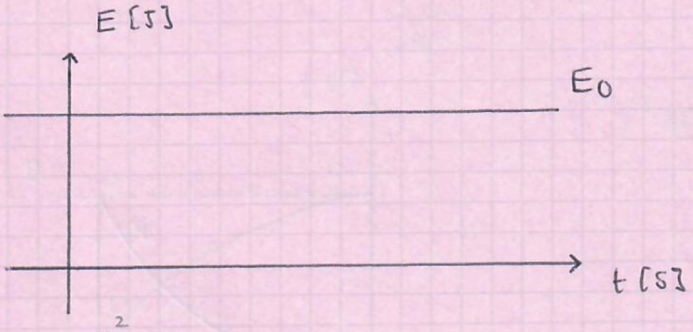
$x(t_0) = a \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$

$K(x) = \underset{\text{cost}}{E_0} - U(x) \qquad E_0 = \frac{1}{2}Ka^2$

$\underline{\quad} = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2)$





$U(t) = \frac{1}{2}K\overbrace{A^2\cos^2(\omega t)}^{x(t)^2}$

$K(t) = \frac{1}{2}K\overbrace{A^2\sin^2(\omega t)}$

$A^2 - x(t)^2$

$A^2 - A^2\cos^2(\omega t) =$

$= A^2\sin^2(\omega t)$

. $K + U = E = \text{cost}$

$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = E \; ; \quad \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \frac{2E}{m} = \text{cost}$

$E = E(x, \dot{x})$ equazione differenziale del 1° ordine non lineare

derivata

$2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega^2 x\dot{x} = 0$

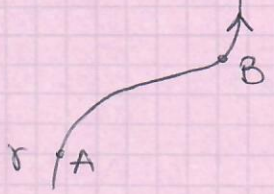
$\dot{x}(\cancel{2}\ddot{x} + \cancel{2}\omega^2 x) = 0 \quad \xRightarrow{\text{soluzioni}} \quad \dot{x}(t) = 0 \;\; \vee$ equazione dell'oscillatore armonico

Lavoro forze non conservative

$\vec{F} = -\mu_d N \hat{v}$ ↳ versore della velocità $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

supponiamo che sia lo stesso su tutta la traiettoria della particella

rimane costante durante il moto



$$L_{\gamma(AB)} = \int_{\gamma(AB)} (-\mu_d N \hat{v}) \cdot d\vec{r} = -\mu_d N \int_{\gamma(AB)} \hat{v} \cdot \vec{v} dt$$

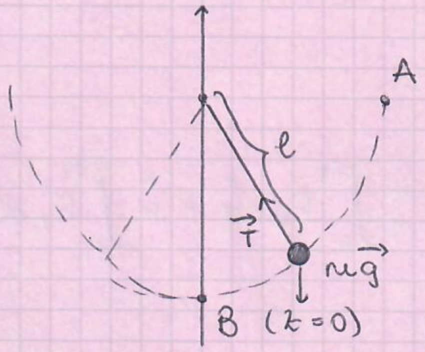
$$\vec{v} = |\vec{v}|\hat{v} = v_s \hat{\tau} \qquad v_s = \frac{ds}{dt}$$

nel nostro caso $\hat{v} = \hat{\tau}$

$$L_{\gamma(AB)} = -\mu_d N \int_{\gamma(AB)} v_s \, dt = -\mu_d N \int_{\gamma(AB)} ds$$

$$\ell_{\gamma(AB)} = \int_{\gamma(AB)} ds$$ lunghezza della curva γ tra i punti A e B

$$L_{\gamma(AB)} = -\mu_d N \ell_{\gamma(AB)} < 0$$ => l'attrito è una forza dissipativa e non conservativa (compie sempre lavoro resistente)



m, ℓ

$z_B = 0 \qquad U_B = 0$

$z_A = \ell$

$m\vec{g}$ è conservativa e $\vec{T}$ non compie lavoro

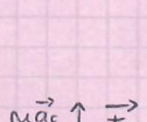
=> l'energia meccanica si conserva

$U(z) = mgz$

$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$ (A) $E_A = mg\ell$

(B) $E_B = \frac{1}{2}mv_B^2$

$$E_A = E_B \Rightarrow v_B = \sqrt{2g\ell}$$

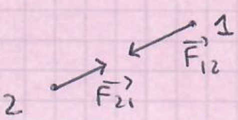


=> $T = mg + ma_c$
accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{v_B^2}{\ell} = \frac{(\sqrt{2g\ell})^2}{\ell}$$

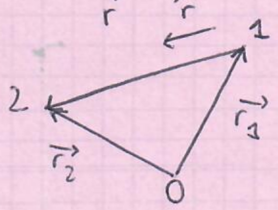
$$T = 3mg$$

3ª LEGGE DI NEWTON: PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE



(a) $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

m_1, m_2 (b) diretta lungo la congiungente



$$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$
$$\vec{r} = |\vec{r_2} - \vec{r_1}|\,\hat{r}$$

$$F = |\vec{F_{12}}| = |\vec{F_{21}}|$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{F_{12}} = \pm F\hat{r} \\ \vec{F_{21}} = \mp F\hat{r} \end{array}\right\} \text{3}^a \text{ legge di Newton}$$

(attrazione o repulsione)

Quantità di moto

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

2^a legge di Newton:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

(def. + generale usata da Newton nei Principia)

<u>m = costante</u>:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} m\vec{v}$$

$$\vec{F} = m\frac{d}{dt}\vec{v} = m\vec{a}$$

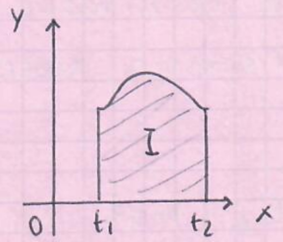
invece se $m = m(t)$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

Def. <u>IMPULSO DI UNA FORZA</u>

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \Rightarrow \vec{I}_{(t_1 t_2)} = \hat{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt + \hat{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt + \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt$$



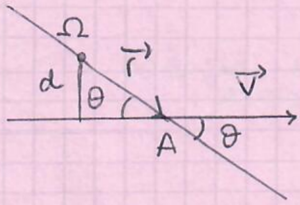
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} \Rightarrow \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \sum_i I_i(t_1 t_2)$$

Teorema dell'impulso (o teo della quantità di moto)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{F}\,dt = d\vec{P}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{I}_{(t_1, t_2)} = \int_{P(t_1)}^{P(t_2)} d\vec{P} = \Delta\vec{P}$$

MOMENTO DI UN VETTORE APPLICATO

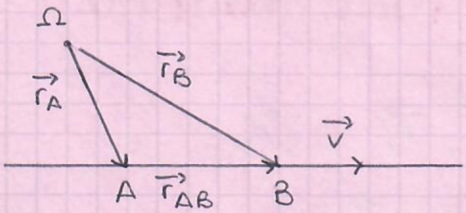


$\Omega \equiv$ polo

$\vec{r} = \overrightarrow{\Omega A}$

$\vec{M}_\Omega = \vec{r} \times \vec{v}$ $\quad |\vec{M}_\Omega| = rv\sin\theta$

$d = r\sin\theta \Rightarrow |\vec{M}_\Omega| = dv$



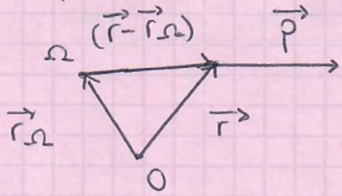
$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}$

$\vec{M}_\Omega = \vec{r}_B \times \vec{v} = \vec{r}_A \times \vec{v} + \underbrace{\vec{r}_{AB} \times \vec{v}}_{//} \Rightarrow \vec{r}_{AB} \times \vec{v} = 0$

$\Rightarrow \vec{r}_A \times \vec{v} = \vec{r}_B \times \vec{v}$

MOMENTO ANGOLARE (momento della quantità di moto)

$\vec{p} = m\vec{v}$



$\vec{\ell}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p}$

$\frac{d}{dt}\vec{\ell}_\Omega = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{p} + (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \frac{d\vec{p}}{dt} =$

$= (\vec{v} - \vec{v}_\Omega) \times \vec{p} + (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\quad \vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$

polo fisso

$\vec{\tau}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}$

→ MOMENTO DELLA FORZA RISULTANTE F

[La derivata rispetto al tempo del momento della q. di moto, se il polo è fisso, è il momento della forza risultante

$\frac{d\vec{\ell}_\Omega}{dt} = -\vec{v}_\Omega \times \vec{p} + \vec{\tau}_\Omega$

In particolare se $\vec{v}_\Omega = 0$ oppure se $\vec{v}_\Omega // \vec{p}$

$$\frac{d\vec{\ell}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega \quad ⊛$$

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ $\quad \vec{\tau}_\Omega = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F} = (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i =$

$= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_\Omega^{(i)}$

$(*) \Rightarrow \vec{\tau}_\Omega \, dt = d\vec{\ell}_\Omega$

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\vec{\tau}_\Omega}_{\text{momento risultante}} dt = \vec{\ell}_\Omega(t_2) - \vec{\ell}_\Omega(t_1) \quad \Big\} \text{ teo. dell' impulso angolare}$$

IMPULSO ANGOLARE

se $\vec{\tau}_\Omega(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \vec{\ell}_\Omega(t) = \vec{\ell}_\Omega(t_0)$ costante

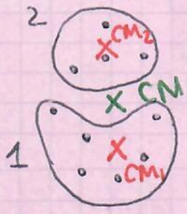
DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

$m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$

$\delta \equiv (O, x, y, t)$ (O: origine) $\qquad \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N$

↳ sistema di riferimento

CENTRO DI MASSA $\quad \vec{R}_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad M = \sum_i m_i$ massa totale

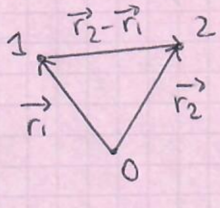


$N = N_1 + N_2$ (# di punti materiali)

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} m_i \vec{r}_i + \sum_i^{N_2} m_i \vec{r}_i}{M_1 + M_2} =$$

$$= \frac{\dfrac{M_1 \sum_i^{N_1} m_i \vec{r}_i}{M_1} + \dfrac{M_2 \sum_i^{N_2} m_i \vec{r}_i}{M_2}}{M_1 + M_2} \Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{M_1 \vec{R}_{CM_1} + M_2 \vec{R}_{CM_2}}{M_1 + M_2}$$

CM per un sistema di due corpi



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 = \frac{M - m_2}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2$$

$$\vec{R}_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$\Rightarrow$ il centro di massa è sulla retta che congiunge i due corpi ed è più prossimo al corpo di massa maggiore

Quantità di moto per un sistema di punti materiali

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

MOTO DEL CM : $\vec{R}_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \qquad m_i$ costante

$$\frac{d}{dt} \vec{R}_{CM} = \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

$\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$ **1° teo del centro di massa**

$$\vec{P} = \sum^{N} \vec{p_i}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_1^{N} \frac{dp_i}{dt} = \sum_1^{N} \vec{F_i} = \vec{F}$$

$\vec{F_i}$ risultante di tutte le forze che agiscono sull'i-esimo punto materiale

$$\vec{F_i} = \vec{F_i}^{(int)} + \vec{F_i}^{(est)}$$

$$\vec{F_i}^{(int)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F_{ij}}^{(int)} \qquad \vec{F}_{int} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}^{(int)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F_{ij}}^{(int)}$$

↳ tutte le possibili interazioni con gli altri corpi del sistema

Dalla 3ª legge di Newton $F_{ij}(int) = -F_{ji}^{(int)} \Rightarrow \vec{F}_{int} = 0$

$\Rightarrow$ la variazione della q. di moto totale dipende solo dalle f. esterne

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{est}$$

1ª eq. della dinamica dei sistemi di punti materiali

$$\vec{F}_{est}\, dt = d\vec{p}$$

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{est}\, dt}_{\vec{I}(t_1, t_2)} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

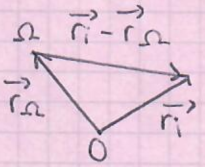
(impulso)

$$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{F}_{est} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d}{dt}\vec{v}_{CM} = M\vec{a}_{CM}$$

2° teo del centro di massa

MOMENTO ANGOLARE PER N PUNTI MATERIALI



$$\vec{r_i}^* = \vec{r_i} - \vec{r_\Omega}$$

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \vec{\ell}_{i\Omega}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\vec{\ell}_{i\Omega} = \sum \frac{d}{dt}\left[(\vec{r_i} - \vec{r_\Omega}) \times \vec{p_i}\right] =$$

$$\vec{\ell}_{i\Omega} = (\vec{r_i} - \vec{r_\Omega}) \times \vec{p_i}$$

$$= \sum_i \left[(\vec{v_i} - \vec{v_\Omega}) \times \vec{p_i} + (\vec{r_i} - \vec{r_\Omega}) \times \vec{F_i}\right] = -\vec{v_\Omega} \times \sum_i \vec{p_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i\Omega}}_{=\vec{\tau}_\Omega}$$

$$\vec{\tau}_{i\Omega} = (\vec{r_i} - \vec{r_\Omega}) \times \vec{F_i} \qquad \vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{v_\Omega} \times M\vec{v}_{CM} + \vec{\tau}_\Omega^{(int)} + \vec{\tau}_\Omega^{(est)}$$

↳ $= \sum_i (\vec{r_i} - \vec{r_\Omega}) \times F_i^{(est)}$

$$\vec{\tau}_\Omega^{(int)} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{ij}^{(int)}$$

$$\vec{\tau}_{(i+j)} = (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_j - \vec{r}_\Omega) \wedge \vec{F}_{ji} =$$
$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \wedge \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_\Omega - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} =$$
$$= \underbrace{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}}_{\parallel} = 0$$

(III legge di Newton)

$$\Rightarrow \vec{\tau}_\Omega^{(int)} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = -\vec{v}_\Omega \wedge M\vec{v}_{CM} + \vec{\tau}_\Omega^{(est)}$$

se $\vec{v}_\Omega = 0$ (polo fisso)

se $\Omega = \Omega_{CM}$

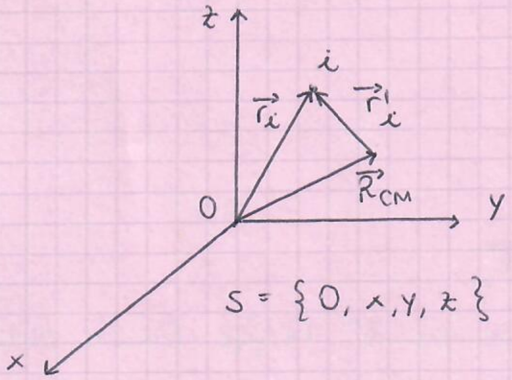
$$\Rightarrow \frac{dL_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{(est)}$$

2^a eq. della dinamica dei sistemi di punti materiali

DINAMICA DEI SISTEMI DI N PUNTI MATERIALI

1 $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(est)}$

2 $\dfrac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{(est)} - \vec{v}_\Omega \times M\vec{v}_{CM}$



$S = \{O, x, y, z\}$

$\vec{r}\,'_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$

$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}\,'_i + \vec{R}_{CM}) \times \vec{p}_i =$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}\,'_i \times \vec{p}_i) = \vec{L}_{\Omega CM}$

m. angolare calcolato prendendo come polo il centro di massa (1° contributo)

$\Omega \equiv \Omega_{CM}$

$\Rightarrow \vec{L}_O = \vec{L}_{\Omega CM} + \underbrace{\vec{R}_{CM} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}$

(2° contributo)

quantità di moto totale

3 $\vec{L}_O = \vec{L}_{\Omega CM} + \vec{R}_{CM} \times \vec{P}$, $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$

3° teo del centro di massa

1, 2 e 3 sono dette EQUAZIONI CARDINALI della meccanica di sistemi di N punti materiali

Def. SISTEMA FISICO ISOLATO

$m_i \quad i = 1, \dots, n$

Un sistema è detto isolato se $\vec{F}_i^{(est)} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \vec{F}^{(est)} = 0$

risultante di tutte le forze esterne

$\Rightarrow \vec{\tau}_{i,\Omega}^{(est)} = (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i^{(est)} = 0$

$\Rightarrow \vec{\tau}_\Omega^{(est)} = 0$

momento risultante

$\vec{F}^{(est)} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(est)} = 0$

$\Rightarrow \vec{P}(t) = \vec{P}(t_0)$ costante

$\vec{\tau}_\Omega^{(est)} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{(est)} = 0$

$\Rightarrow \vec{L}(t) = \vec{L}(t_0)$ costante

Conservazione della q. di moto e 3ª legge di Newton

Consideriamo un sistema isolato

$\vec{F}_i^{(est)} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \vec{F}^{(est)} = 0$

$$\vec{\tau}_{i\Omega}^{(est)} = (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i^{(est)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_\Omega^{(est)} = 0$$

$\vec{P} = \vec{cost}$ (per ipotesi)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\underbrace{\vec{F}^{(est)}}_{=0} + \vec{F}^{(int)} \Rightarrow \vec{F}^{(int)} = 0$$

$$\vec{F}^{(int)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}^{(int)}$$

$\boxed{n=2}$

$$\vec{F}_{int} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

per ottenere la 3ª legge basta ora dimostrare che sono lungo la congiungente:

$$\vec{L}_\Omega = \vec{cost}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 = \cancel{\vec{\tau}_\Omega^{(est)}} + \vec{\tau}_\Omega^{(int)}$$

$$\vec{\tau}_\Omega^{(int)} = 0$$

$\boxed{n=2}$

$$\vec{\tau}_\Omega^{(int)} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{12} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{21} =$$

ma $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$= (\vec{r}_1 - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{12} - (\vec{r}_2 - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F}_{12} \parallel \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

(Abbiamo ricavato la 3ª legge di Newton) :)

CORPI MACROSCOPICI COME SISTEMI DI PUNTI MATERIALI: limite del continuo

1) $N >> 1$ (# di atomi)

goccia di acqua $N = 10^{21}$

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$

2) Meccanica classica $\Rightarrow$ Meccanica quantistica

mini-volumetto

ΔV; Δm_i

$N = \frac{V}{\Delta V}$

DENSITÀ MEDIA: $\rho_m(\vec{r}_i) = \frac{\Delta m_i}{\Delta V}$

$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \rightarrow$ massa totale

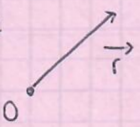
Passare al limite del continuo significa far tendere ΔV a zero

$$\Delta V \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

$dm = \rho(\vec r)\, dV$

$M = \int dm = \int_V \rho(\vec r)\, dV$

se



densità in un punto dello spazio

$\underline{\rho(\vec r) = \rho(r)}$ corpo isotropo, simmetria sferica

dipende solo dalla distanza da O

se

$\underline{\rho(\vec r) = \rho_0}$ corpo omogeneo

costante

$[\rho] = \dfrac{\text{massa}}{\text{lungh}^3} = \dfrac{kg}{m^3}$ sistema cgs: $\dfrac{g}{cm^3}$

Def. <u>DENSITÀ SUPERFICIALE</u>

$$\sigma = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{ds} \qquad g/cm^2$$

Def. <u>DENSITÀ LINEARE</u>

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl} \qquad g/cm$$

Grandezze fisiche per i sistemi continui

- CENTRO DI MASSA

$$\vec R_{CM} = \frac{\int \vec r\, dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec r \rho(\vec r)\, dV}{M} = \frac{1}{M}\int_V \vec r \rho(\vec r)\, dV$$

- QUANTITÀ DI MOTO

$$\vec P = \int \vec v\, dm = \int \vec v \rho\, dV$$

- MOMENTO ANGOLARE

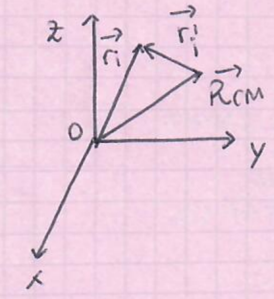
$$\vec L_\Omega = \int (\vec r - \vec r_\Omega) \wedge d\vec p = \int (\vec r - \vec r_\Omega) \wedge \vec v \rho\, dV$$

- EN. CINETICA

$$K = \frac{1}{2}\int v^2\, dm = \frac{1}{2}\int v^2 \rho\, dV$$

Sistema di riferimento del centro di massa

11/04/2024



$S = \{O, x, y, z\}$ SRI

$S' \equiv \{O' \equiv \Omega_{CM}, x', y', z'\}$

$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$

$S: \vec{R}_{CM} = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$

$S': \vec{R}'_{CM} = 0 \quad (O' \equiv \Omega_{CM})$

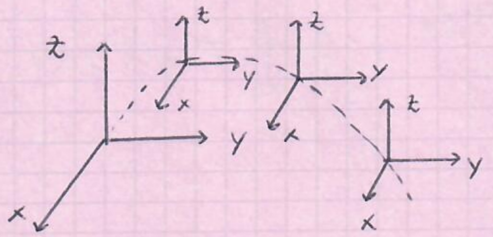
$\vec{R}'_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 \implies \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$

$\downarrow d/dt$

$\sum_i m_i \frac{d\vec{r}'_i}{dt} = \sum_i m_i \vec{v}'_i = \sum_i \vec{p}'_i = \vec{P}' = 0$

(È un altro modo di definire il centro di massa $\implies$ SRI nel quale si ha P (q. di moto totale) nulla)

Supponiamo che S' si muova di moto traslatorio rispetto a S



$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$

$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{V}_{CM}$

da 2 segue dalla 1 se si fa l'hp. che il moto è traslatorio

In generale

$\vec{v} = \vec{v}' + \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times (\vec{r}' - \vec{R})$

nel sistema fisso — nel sistema mobile

$\vec{R} = \overline{OO'}$

$\vec{\omega} \equiv$ vel. angolare di S' rispetto ad S

In particolare

$\vec{R} = \vec{R}_{CM} \qquad \omega = 0$

TEO DI KÖNIG PER IL MOMENTO ANGOLARE

$m_1, \dots, m_N$

SRI $\quad S = \{O, x, y, z\}$

$S' \quad S' = \{O' = \Omega_{CM}, x', y', z'\} \rightarrow$ trasla rispetto ad S

$\vec{L}'_{\Omega_{CM}} = \vec{L}_{\Omega_{CM}}$

$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM} \implies \vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{V}_{CM} \qquad \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$

moto puramente traslatorio

$$\vec{L}'_{CM} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{CM}) = \sum_i r_i' \times m_i \vec{v}_i - \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM}$$

$$= \sum_i r_i' \times m_i \vec{v}_i - \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times m_i \vec{v}_i + - \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right)}_{= 0} \times \vec{V}_{CM} =$$

$$= \vec{L}_{\Omega_{CM}}$$

Usando il III TEO DEL CENTRO DI MASSA

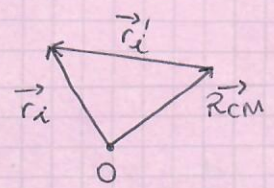
$$\vec{L}_0 = \underbrace{\vec{L}_{\Omega_{CM}}}_{\text{oss. fisso, polo nel CM}} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{L}_0 = \vec{L}'_{\Omega_{CM}} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}$$

En. cinetica per N punti materiali

$S \qquad S' \equiv \{O' \equiv \Omega_{CM}, x', y', z'\}$

S' moto traslatorio rispetto ad S



$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}_{CM}$$
$$\vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_i' + \vec{V}_{CM})^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right) \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i 2\vec{v}_i' \vec{v}_{CM} =$$

$$= K' + \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \cancel{\sum_i m_i \vec{v}_i'} \cdot \vec{V}_{CM}$$

$\sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$

nel CM $\vec{P}' = 0$

$K = K' + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$ → **TEO DI KÖNIG PER L'EN. CINETICA**

Lavoro ed energia per un sistema di punti materiali:

TEOREMA DELLE FORZE VIVE

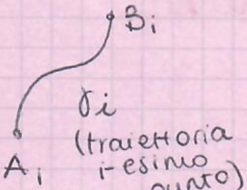
N punti materiali

$$dL_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \ldots = dK_i$$

$dL_i = dK_i$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(est)}$$

↳ risultante sul punto materiale i-esimo



$$dL = \sum_i dL_i = \sum_i dL_i^{(est)} + \sum_i dL_i^{(int)} = \sum_i dK_i = dK$$

$$\{A\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \qquad \{B\} = \{B_1, \ldots, B_n\}$$

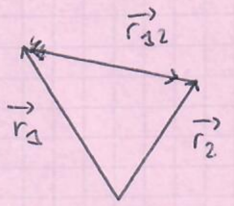
$L_{\{A\}\{B\}} = K_{\{B\}} - K_{\{A\}}$

↳ configurazione iniziale A

↳ configurazione finale B

$\vec{F}^{(int)} = 0 \Rightarrow$ Possiamo concludere che il lavoro delle forze interne è nullo?

Sia $N=2$



$\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\vec{r}_{12} = r_{12}\hat{r}_{12}$

$r_{12} = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

$dL^{int} = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2$

3ª legge di Newton $\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \parallel \vec{r}_{12}$

$dL^{int} = \vec{F}_{21} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_{12}$

$d\vec{r}_{12} = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1$

$\vec{F}_{21} = F\hat{r}_{12} \qquad \vec{F}_{12} = -F\hat{r}_{12}$

$dL^{int} = F\hat{r}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \qquad \frac{d}{dt}\vec{r}_{12} = \frac{d}{dt}(r_{12}\hat{r}_{12}) = \left(\frac{d}{dt}r_{12}\right)\hat{r}_{12} + r_{12}\frac{d\hat{r}_{12}}{dt}$

$\frac{d\hat{r}_{12}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{\tau} \qquad \hat{\tau} \perp \hat{r}_{12} \qquad |\hat{\tau}| = 1$

↳ vel. angolare con cui $\hat{r}_{12}$ varia la sua direzione nel tempo

$\frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \left(\frac{dr_{12}}{dt}\right)\hat{r}_{12} + r_{12}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\tau}$

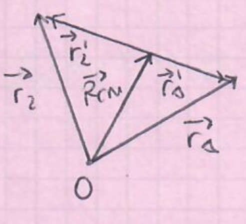
$dL^{int} = F\hat{r}_{12} \cdot \left[\frac{dr_{12}}{dt}\hat{r}_{12} + \cancel{r_{12}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\tau}}\right] dt$

$\hat{r}_{12} \perp \hat{\tau}$

$dL^{int} = F\frac{dr_{12}}{dt}dt = F\,d(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \Rightarrow$ in generale è $\neq 0$

Le forze interne in generale compiono lavoro tranne quando le posizioni relative dei punti rimangono fisse (è il caso del corpo rigido)

SISTEMA DI DUE P. MATERIALI



$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

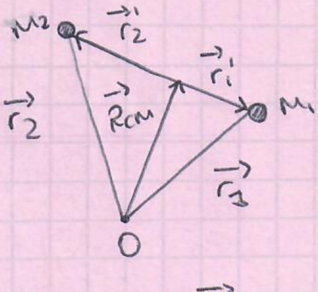
$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R}_{CM} \qquad \vec{r}' = \vec{r}$

$S' \equiv \{O' \equiv \Omega_{CM}, x', y', z'\} \qquad \vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{R}_{CM} \qquad \vec{r}' = \vec{r}_2' - \vec{r}_1'$

SISTEMA DI DUE PUNTI MATERIALI

17/04/2024



$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$S' \equiv \{O' \equiv CM,\ x', y', t'\} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{CM} \underbrace{- \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}}_{\vec{r}_1'}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{CM} \underbrace{+ \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}}_{\vec{r}_2'}$$

Def. MASSA RIDOTTA: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{r}_1' &= -\frac{\mu}{m_1}\vec{r}\\ \vec{r}_2' &= +\frac{\mu}{m_2}\vec{r}\end{aligned}}$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0 \iff m_1 = m_2$$

S' trasla rispetto a S

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} \qquad \vec{a}_1' = \vec{a}_1 - \vec{a}_{CM}$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} \qquad \vec{a}_2' = \vec{a}_2 - \vec{a}_{CM}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_2' - \vec{v}_1' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1\\ \vec{a} &= \vec{a}_2' - \vec{a}_1' = \vec{a}_2 - \vec{a}_1\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_1' &= -\frac{\mu}{m_1}\vec{v} & \vec{a}_1' &= -\frac{\mu}{m_1}\vec{a}\\ \vec{v}_2' &= \frac{\mu}{m_2}\vec{v} & \vec{a}_2' &= \frac{\mu}{m_2}\vec{a}\end{aligned}} \qquad \frac{v_2'}{v_1'} = \frac{a_2'}{a_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

Quantità di moto in S'

$$\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1' = -\mu\vec{v}$$

$$\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2' = \mu\vec{v} \qquad \vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$$

Energia cinetica in S'

$$K' = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}\left(m_1\frac{\mu^2}{m_1^2}v^2 + m_2\frac{\mu^2}{m_2^2}v^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu^2 v^2 \overbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}^{=\frac{1}{\mu}} = \frac{1}{2}\mu v^2$$

Usando il teo. di Konig per ricavare l'energia cinetica nel sistema S

$$K = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}\overbrace{(m_1+m_2)}^{=M} v_{CM}^2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad m_1 \gg m_2 \qquad x \equiv \frac{m_2}{m_1} \ll 1$$

$$\mu = \frac{m_2}{1+x} = m_2 (1+x)^{-1}$$

ho diviso per m_1 num. e denom.

Taylor

$$\mu(x) = m_2 \left[1 - \frac{m_2}{m_1} + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + \dots \right]$$

al primo ordine in x $\Rightarrow$ $\mu \simeq m_2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)$

Momento angolare

Per il teo. di König per il momento angolare

$$\vec{L_0} = \vec{L'}_{CM} + \vec{R}_{CM} \times (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{L'}_{CM} = \vec{r'_1} \times \vec{p'_1} + \vec{r'_2} \wedge \vec{p'_2} = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r} \times (-\mu \vec{v}) + \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \times \mu \vec{v} =$$

$$= \mu \vec{r} \times \mu \vec{v} \left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right] = \vec{r} \times \mu \vec{v}$$

$$\boxed{\vec{L'}_{CM} = \vec{r} \times \mu \vec{v}}$$

$$\vec{L_0} = \vec{r} \times \mu \vec{v} + \vec{R}_{CM} \times (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}$$

URTI ELASTICI SU UNA RETTA

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} &= \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{aligned} \right.$$

1) $\underline{m_1 = m_2}$ $\Rightarrow$ $v_{1f} = v_{2i}$, $v_{2f} = v_{1i}$

2) $\underline{v_{2i} = 0}$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad v_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

3) $\underline{v_{2i} = 0 \quad m_2 \gg m_1}$

$$x \equiv \frac{m_1}{m_2} \ll 1$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Taylor

$$\frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)\left(1 - \frac{m_1}{m_2} + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + \dots\right)$$

$$v_{1f} = -v_{1i} + 2 \frac{m_1}{m_2} v_{1i} + \dots$$

$$v_{2f} = 2 \frac{m_1}{m_2} v_{1i} + \dots$$

4 $v_{2i} = 0 \qquad m_1 >> m_2$

$$v_{1f} = v_{1i} - 2\frac{m_2}{m_1} v_{1i} + \dots$$

$$v_{2f} = 2v_{1i} - 2\frac{m_2}{m_1} v_{1i} + \dots$$

24/04/2024

DERIVATA DI UN VETTORE RISPETTO AL TEMPO

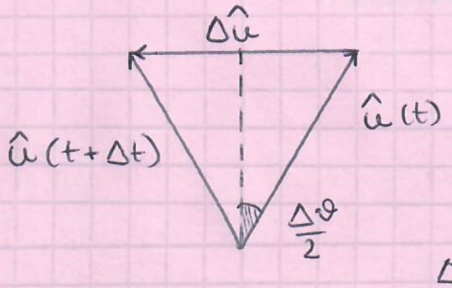
$\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ DIMOSTRIAMO CHE $\dfrac{d\hat{u}}{dt} \perp \hat{u}$

$|\hat{u}| = 1 \qquad \hat{u}^2 = 1$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\hat{u}\cdot\hat{u}) = 0 = \frac{d}{dt}\hat{u}\cdot\hat{u} + \hat{u}\cdot\frac{d}{dt}\hat{u} = 2\frac{d}{dt}\hat{u}\cdot\hat{u} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\hat{u} \perp \hat{u}$$



$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{2} = \sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$$

$$\Delta\hat{u} = \underbrace{|\Delta\hat{u}|}_{\text{modulo}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta\hat{u}}{|\Delta\hat{u}|}}_{\text{versore}}$$

$$\frac{\Delta\hat{u}}{dt} = \frac{|\Delta\hat{u}|}{dt}\cdot\frac{\Delta\hat{u}}{|\Delta\hat{u}|} \quad (*)$$

$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{dt} \to \frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\Delta t}$$

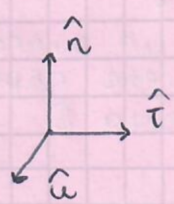
$\Delta t \to 0 \quad \Delta\theta \to 0$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\Delta\vartheta}\cdot\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

$$\frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\Delta\vartheta} \to 1 \qquad \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} \to \frac{d\theta}{dt}$$

$$\hat{\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\hat{u}}{|\Delta\hat{u}|}$$

Allora dalla $(*)$ $\quad \dfrac{d\hat{u}}{dt} = \dfrac{d\vartheta}{dt}\hat{\tau}$



$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{n} = \dot{\vartheta}\hat{n}$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \dot{\vartheta}\hat{\tau} = \dot{\vartheta}(\hat{n}\times\hat{u}) = \vec{\omega}\times\hat{u}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}\hat{n} = \dot{\vartheta}(\hat{u}\times\hat{\tau}) = \hat{u}\times\dot{\vartheta}\hat{\tau} = \hat{u}\times\frac{d\hat{u}}{dt}$$

Allora tornando alla derivata di un generico vettore

$$\vec{u}(t) = u(t)\hat{u}(t)$$

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \frac{du}{dt}\hat{u}(t) + \vec{\omega}\times\vec{u}$$

VEL. E ACC. DEI MOTI RELATIVI

$S = \{O, x, y, t\}$ SRI

$S' = \{O', x', y', t'\}$ non necessariamente inerziale

$\vec{R} = \vec{OO'}$ $\quad \vec{r'} = \vec{r} - \vec{R}$

$\vec{r'}$: vett. posizione in S'

$\vec{r}$: vett. posizione in S

$\vec{u}(t) = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$

$= u_{x'} \hat{i}' + u_{y'} \hat{j}' + u_{z'} \hat{k}'$

i versori del sistema S fisso sono costanti, quelli di S' cambiano continuamente direzione

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \left.\frac{du_x'}{dt}\right|_S \hat{i}' + u_{x'} \left.\frac{d\hat{i}'}{dt}\right|_S + \dots$$

così per tutte le altre componenti

$$\left.\frac{d\hat{i}'}{dt}\right|_S = \vec{\omega} \times \hat{i}'$$

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$ RELAZIONE DI POISSON

TRASFORMAZIONE DELLE VELOCITÀ

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$

$$\vec{v} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S + \underbrace{\left.\frac{d\vec{r'}}{dt}\right)_S}$$

$\left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S = \vec{V}$ velocità di O' misurata in S

usando la rel. di Poisson

$$\left.\frac{d\vec{r'}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

$\left.\frac{d\vec{r'}}{dt}\right)_{S'} = \vec{v}'(t)$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{V} + \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v_\tau} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r'} = \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$$ $\rightarrow$ velocità di trascinamento

$\downarrow$

è la velocità di un punto solidale a S' (cioè in quiete rispetto a S') misurata nel sistema S

MOTO TRASLAZIONALE: $\vec{\omega}(t) = 0 \;\; \forall t \Rightarrow \vec{v_\tau} = \vec{V}$

MOTO DI ROTAZIONE PURA: $\vec{V}(t) = 0 \Rightarrow \hat{v}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$

TRASFORMAZIONE DELL' ACCELERAZIONE

$\vec{a} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S \qquad \vec{a} = \vec{a'} + \vec{a_\tau} + \vec{a}_{co}$

$\vec{a'} = \left.\frac{dv'}{dt}\right)_{S'}$

$\vec{a_\tau} = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})]$

$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$

30/04/24

Cinematica dei corpi rigidi

$S' \equiv \{O', x', y', z'\} \to$ sistema solidale al corpo rigido

$S \Rightarrow \vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$

$\vec{v} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}_{CM})$

MOTO TRASLATORIO PURO $\Rightarrow \vec{v}_i = \vec{V}_{CM} \quad \forall i$

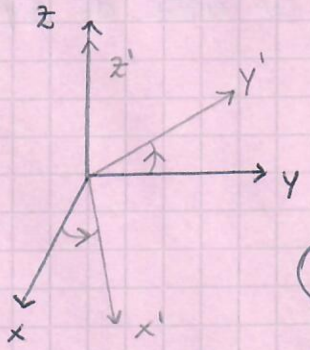
$\vec{F}^{est} = M\vec{a}_{CM} \to$ II teo. del CM

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = (\sum m_i)\vec{V}_{CM} = M\vec{V}_{CM} \to$ I teo. del CM

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{I teo di König}}}{\vec{L}_{\Omega CM} = \vec{L}'_{\Omega CM}} = \sum_i r_i \times \underbrace{m_i \vec{v}'_i}_{=0} = 0$

$\vec{L}_O = \cancel{\vec{L}_{\Omega CM}} + \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}_{CM}$

MOTI ROTATORI ATTORNO A UN ASSE FISSO



$\vec{v}'_i = 0 \quad \forall i$

$z \equiv z'$

$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{k}$

S $\quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

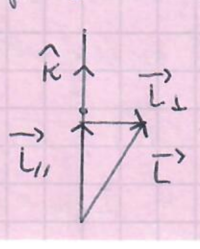
$\vec{P} = M\vec{V}_{CM} = M(\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM})$ se il CM si trova sull'asse $z \Rightarrow$

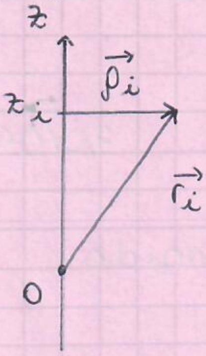
$\Rightarrow \vec{P} = 0$

$\vec{P} = 0 \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prima cardinale}}}{\frac{dP}{dt}} = \vec{F}^{est} = 0$

Momento angolare totale per il moto di un corpo rigido attorno ad un asse fisso

Dimostriamo in generale che $\vec{L}$ ha una componente $\parallel$ a $\vec{\omega}$ e una $\perp$





$$\vec{r}_i = z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i \qquad \vec{\rho}_i \perp \hat{k}$$
$$\vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}$$

S $\quad \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$

$$= \sum_i (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i(\underbrace{\vec{\omega} \times (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i)}) =$$

$$= \sum_i (z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) =$$

$$= \sum_i m_i z_i\, \hat{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) + m_i\vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) =$$

formula del triplo prodotto vettoriale $\quad = \cancel{m_i z_i \rho_i \omega} \underbrace{- m_i z_i \omega \vec{\rho}_i}_{\vec{L}_\perp} + \underbrace{m_i \rho_i^2 \vec{\omega}}_{\vec{L}_{/\!/}}$

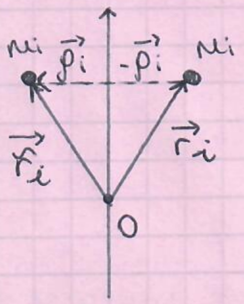
$$\vec{L} = \vec{L}_\perp + \vec{L}_{/\!/} \qquad -\vec{L}_\perp = \sum m_i z_i \omega \vec{\rho}_i$$
$$\vec{L}_{/\!/} = \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega}$$

Def. MOMENTO DI INERZIA

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \qquad \vec{L}_{/\!/} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_\perp = -\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i$$

Supponiamo che l'asse di rotazione sia un asse di symm. del corpo

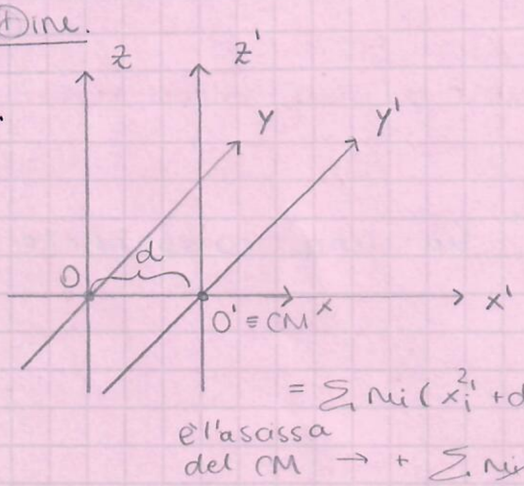


$$m_i z_i \vec{\rho}_i + m_i z_i(-\vec{\rho}_i) = 0$$
$$\Rightarrow \vec{L}_\perp = 0$$

HUYGENS - STEINER

$$I = I_{CM} + Md^2$$

Dim.



$$\begin{cases} x_{CM} = d \\ y_{CM} = 0 \\ z_{CM} = 0 \end{cases}$$

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) =$$
$$= \sum_i m_i ((x_i' + d)^2 + y_i^2) =$$
$$= \sum_i m_i (x_i'^2 + d^2 + 2dx_i' + y_i'^2) = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_i m_i d^2 +$$

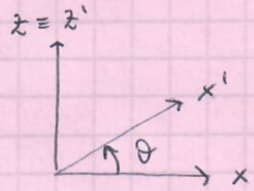
è l'ascissa del CM $\rightarrow$ $+ \sum_i \cancel{m_i 2d x_i'} = I_{CM} + Md^2$ $\square$

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_i^2 \Rightarrow \int r^2 \, dm = \int r^2 \rho(\vec{r}) \, dV$$

07/05/2024

DINAMICA DEI CORPI RIGIDI IN MOTO ATTORNO AD UN ASSE FISSO

II eq. cardinale $\longrightarrow$ $\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^{\,est} - \cancel{v_\Omega \times M\vec{v}_{CM}}$



$$\vec{\tau}_\Omega^{\,est} = \tau_\Omega^{est} \cdot \hat{k} = \frac{d\vec{L}}{dt}\hat{k} = \frac{d}{dt}(\vec{L} \cdot \vec{k})$$

$L_z = \vec{L} \cdot \hat{k} \Rightarrow$ mom. angolare assiale

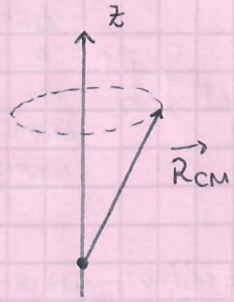
$\vec{L} = I\vec{\omega} + \vec{L}_\perp \qquad \vec{L}_\perp \perp \hat{k}$

$\vec{L}_z = I\vec{\omega} \qquad \vec{\tau}_z^{\,est} = \frac{d}{dt} L_z$

I è costante nel tempo perché il corpo considerato è rigido

$$\tau_z^{est} = I \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \alpha \equiv \ddot{\theta}$$

$$\boxed{\tau_z^{est} = I \frac{d^2}{dt^2}\theta}$$



$\vec{F}^{est} = M\vec{a}_{CM}$

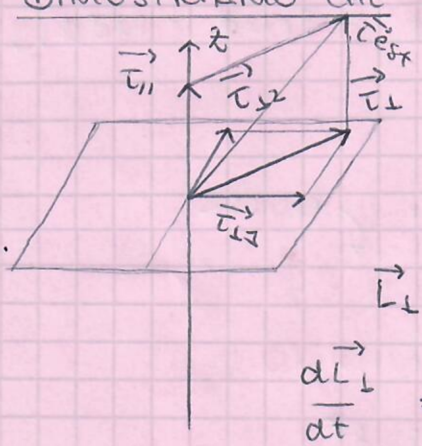
$\vec{\tau}_{est} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{L} = I\vec{\omega} + \vec{L}_\perp$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{est} = \underbrace{I\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{=\vec{\tau}_{//}^{\,est}} + \underbrace{\frac{d\vec{L}_\perp}{dt}}_{=\vec{\tau}_\perp^{\,est}} = \vec{\tau}_{//}^{\,est} + \vec{\tau}_\perp^{\,est}$$

$$\vec{\tau}_{//}^{\,est} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}\hat{k} = \frac{dL_z}{dt}\hat{k}$$

DIMOSTRIAMO CHE

$$\boxed{\vec{\tau}_\perp^{\,est} \equiv \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_\perp + \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp}$$



$\vec{\tau}_{\perp 1} = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_\perp$

$\vec{\tau}_{\perp 2} = \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp$

$\vec{L}_\perp = -\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i \qquad \vec{r}_i = z_i\hat{k} + \vec{\rho}_i$

$$\frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i\right) = \circledast$$

SOLO in modulo!

CORPO RIGIDO $\Rightarrow \frac{dm_i}{dt} = 0 \quad \frac{dz_i}{dt} = 0 \quad \frac{d|\vec{\rho}_i|}{dt} = 0$

$$\circledast \; \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\left(-\sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i\right) + \left[-\omega \sum_i m_i z_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt}\right]$$

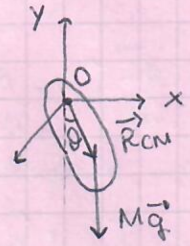
$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_\perp + \left[-\omega \sum_i m_i t_i (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}_i)\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_\perp + \vec{\omega} \wedge \underbrace{\sum_i - m_i t_i \omega \vec{\rho}_i}_{\vec{L}_\perp} \Rightarrow \vec{\tau}^{est}_\perp = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\vec{L}_\perp + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_\perp$$

PENDOLO FISICO

$\vec{g} = -g\hat{j}$



$\vec{R}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM} = 0)$

$|\vec{R}_{CM}| = d$

$$\vec{\tau}^{est} = \vec{R}_{CM} \wedge M\vec{g} \qquad \tau_z = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{\tau}^{est} = -Mgd\sin\theta\,\hat{k} \qquad \tau_z = -Mgd\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{Md}{I} g \sin\theta$$

Per piccole oscillationi $\theta(t) \ll 1$ rad $\sin\theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = \theta \sin(\omega t + \varphi)$$

MOTO ARMONICO CON PERIODO T

ho posto $\omega \equiv \sqrt{\frac{Md}{I} g}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

LUNGHEZZA RIDOTTA DEL PENDOLO FISICO $\rightarrow \ell^* \equiv \frac{I}{Md} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^*}{g}}$

il periodo di oscillazione è come quello di un pendolo semplice di lungh. ℓ^*

Da Huygens-Steiner $I = I_{CM} + Md^2$

$$\Rightarrow \boxed{\ell^* = \frac{I_{CM}}{Md} + d}$$

$\Rightarrow$ i periodi relativi alla stessa distanza dal CM sono uguali

Il periodo di oscillazione per due assi // passanti per due punti P e P_1 distanti d e d_1 dal CM è uguale $\Leftrightarrow$

$$\frac{I_{CM}}{Md} + d = \frac{I_{CM}}{Md_1} + d_1 \; ; \quad I_{CM} d_1 + Mdd_1^2 = I_{CM} d + Mdd_1^2 \; ;$$

$$I_{CM}(d_1 - d) = Mdd_1(d_1 - d)$$

SOLUZIONI:
(1) $d = d_1$
(2) $d \neq d_1 \wedge I_{CM} = Mdd_1$ ellisse

$$d_1 = \frac{I_{CM}}{Md} \Rightarrow \boxed{d_1 = \ell^* - d} \qquad d + d_1 = \ell^*$$

CALCOLIAMO IL PERIODO DI OSCILLAZIONE MINIMO

Esso corrisponde al valore minimo di ℓ^*

$$\ell^* = \frac{I_{CM}}{Md} + d \qquad \frac{\partial \ell^*}{\partial t} = \frac{I_{CM}}{M}\left(-\frac{1}{d^2}\right) + 1$$

$$d = \sqrt{\frac{I_{CM}}{M}} \Rightarrow \ell^*_{min} = 2\sqrt{\frac{I_{CM}}{M}}$$

$$T_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{g}\sqrt{\frac{I_{CM}}{M}}}$$

14/05/24

ENERGIA CINETICA DI UN CORPO RIGIDO

$S = \{O, x, y, t\}$

$S' = \{O' \equiv \Omega_{CM}, x', y', t', \vec{v}_i' = 0 \ \forall i\}$

$$\vec{v}_i = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vel. di} \\ \text{trascinamento}}}{\vec{v}_t} = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega}' \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})$$

$$\Rightarrow K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})\right]^2 =$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left\{ V_{CM}^2 + (\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}))^2 + 2\vec{V}_{CM} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})] \right\}$$

3° termine: $\sum_i m_i \vec{V}_{CM} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM})] =$

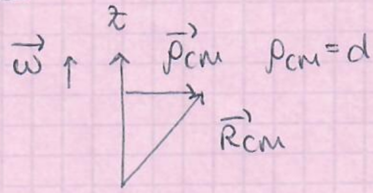
$$= \vec{V}_{CM} \cdot [\vec{\omega} \times \cancel{(\sum_i m_i \vec{r}_i - M\vec{R}_{CM})}] = 0$$

2° termine: $\sum_i \frac{1}{2} m_i \underbrace{(\vec{\omega}' \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}))^2}_{=\ \vec{\omega}' \times \vec{r}_i' \ =\ \vec{\omega} \times \underbrace{(z_i \hat{k}'}_{0} + \vec{\rho}_i') \ =\ \vec{\omega}' \times \vec{\rho}_i'} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 \rho_i'^2 = \frac{1}{2} \underset{\substack{I_{CM} \\ \uparrow}}{I} \omega^2$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Per un corpo rigido che ruota (senza traslare) attorno a un asse NON passante per il suo CM si ha

$K = \frac{1}{2} I \omega^2$ ← si trova ponendo $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



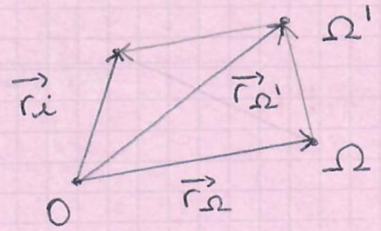
Da H.S. $\Rightarrow I = I_{CM} + Md^2$

$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 \qquad \omega^2 d^2 = (\vec{\omega}' \times \vec{R}_{CM})^2 = V_{CM}^2$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

LAVORO DELLE F. ESTERNE SU UN CORPO RIGIDO

TEO: IL MOMENTO TOTALE NON DIPENDE DALLA SCELTA DEL POLO Ω (CORPO RIGIDO)



$\vec{r}_i - \vec{r}_{\Omega'} = \vec{r}_i - \vec{r}_\Omega - \overrightarrow{\Omega\Omega'}$

HP: $\sum_i \vec{F}_i = 0$

$$\vec{\tau}_{\Omega'} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{\Omega'}) \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times F_i - \sum_i \overrightarrow{\Omega\Omega'} \times \vec{F}_i =$$

$$= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_\Omega) \times \vec{F}_i - \Omega\Omega' \times \cancel{\sum_i \vec{F}_i} = \vec{\tau}_\Omega$$

GRAVITAZIONE

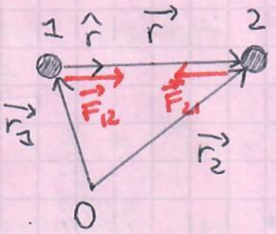
Leggi di Keplero

1. Le orbite sono ellissi delle quali il sole occupa uno dei fuochi
2. VEL. AEROLARE : $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$ = costante
3. $T^2 = K a^3$

T → periodo di rivoluzione

a → semiassi maggiori

$\boxed{\text{Legge di gravitazione universale}}$



$$-\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

PER CORPI ESTESI:

$$\vec{F}_{21} = -G\sum_i\sum_j \frac{\Delta m_{1i}\,\Delta m_{2j}}{r_{ij}^2}\hat{r}_{ij}$$

$$\vec{F}_{21} = -G\int_{m_1}\int_{m_2}\frac{dm_1\, dm_2}{r^2}\hat{r}$$

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA TRA MASSA INERZIALE E GRAVITAZIONALE

$$a = g \qquad F = m_I a = +G\frac{M_T m_G}{R_T^2} \Rightarrow a = \frac{F}{m_I} = \frac{G M_T}{R_T^2}\cdot\frac{m_G}{m_I}$$

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \left(\frac{m_G}{m_I}\right)_1 = \left(\frac{m_G}{m_I}\right)_2 \Rightarrow \frac{m_G}{m_I} = K \text{ cost}$$

Se una forza $F(\vec{r})$ posizionale è tale che $F(\vec{r}) = \underbrace{F(r)}_{\text{modulo}}$

allora è detta CENTRALE O A SIMMETRIA SFERICA

$$\vec{F} = F(r)\hat{r}$$

LE FORZE CENTRALI SONO CONSERVATIVE

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\hat{r}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{r} \quad \perp \hat{r}$$

$$\Rightarrow dL = F(r)\hat{r}\cdot\left(dr\,\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}dt\right) = F(r)\,dr = -dU \qquad \square$$

$$L_{AB} = \int_A^B F(r)\,dr = U_A - U_B \qquad U(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

LEGGE DI GRAVITAZIONE ⇒ II LEGGE DI KEPLERO

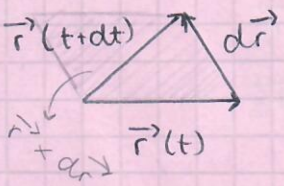
$M+m \simeq M \qquad M \gg m$

$$\mu = \frac{Mm}{M+m} \simeq m$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{r} \times F(r)\hat{r} = 0$$

$$\tau = \frac{d\vec{l}}{dt} \Rightarrow \vec{l}(t) = \vec{cost} = l_0\hat{k}$$

Area spazzata da $\vec{r}$ nel tempo infinitesimo dt



$$d\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r} = \underbrace{\frac{1}{2}\vec{r} \wedge \vec{v}}_{\frac{1}{2}\vec{l}/m}\, dt$$

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{A}}{dt} \rightarrow \text{vel. areolare}$$

allora $\vec{\sigma} = \dfrac{\vec{l}}{2m} \Rightarrow$ costante □

LEGGE DI GRAVITAZIONE ⇒ III LEGGE DI KEPLERO

Caso di orbite circolari

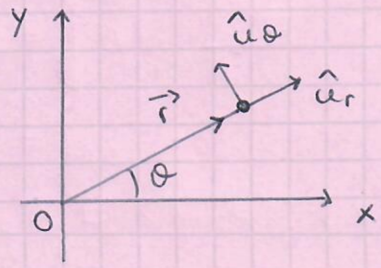
$$a = \frac{F(r)}{m_I} = \frac{GMm_G}{r^2} \cdot \frac{1}{m_I} = \frac{GM}{r^2}$$

$$r(t) = d \qquad a = \frac{GM}{d^2} \qquad a = \frac{v^2}{d} = \frac{GM}{d^2} \qquad \frac{v^2}{d} = \omega^2 d = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 d$$

↑ perche' è l'accelerazione centripeta

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} d^3$$ □

Moto di un corpo in un campo centrale → si conservano momento ang. e energia meccanica



$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + \dot{\theta}r\hat{u}_\theta$$

$$\vec{l} = \underbrace{\vec{r} \times m(\dot{r}\hat{u}_r}_{0} + \dot{\theta}r\hat{u}_\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{l} = r\hat{u}_r \times m\dot{\theta}r\hat{u}_\theta = mr^2\dot{\theta}\hat{k}$$

ENERGIA MECCANICA

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$$

$$v^2 = (\dot{r}\hat{u}_r + \dot{\theta}r\hat{u}_\theta)^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 r^2 + U(r)$$

$$\downarrow$$

$$\ell = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 r^2 = \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}}_{\text{potenziale efficace } (U_{eff})}$$

Energia potenziale centrifuga

$E=0 \rightarrow$ parabola } stato NON legato
$E>0 \rightarrow$ iperbole

ORBITE CIRCOLARI $\Rightarrow \dfrac{dU_{eff}}{dr} = 0$

$$-\frac{\ell^2}{m r^{\cancel{3}}} + \frac{GMm}{\cancel{r^2}} = 0$$

$$-\frac{\ell^2}{m} = -GMm\,r \Rightarrow r = \frac{\ell^2}{GMm^2}$$

$$\ell = mrv \rightarrow v = \frac{\ell}{mr} \quad \text{ma } r = \frac{\ell^2}{GMm^2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{m}\frac{\ell^{\cancel{2}}}{GMm^{\cancel{2}}}} = \frac{GMm}{\ell} = \frac{\alpha}{\ell} \qquad \alpha = GMm$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{GMm}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\alpha}{\ell}\right)^2$$

$$K = \frac{\ell^2}{2mr^2} \quad (\dot{r}=0)$$

$$U(r) = -\frac{GmM}{r} = -\frac{\ell^2}{mr^2} = -2K \Rightarrow K = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

$$E = -K = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = -\frac{\ell^2}{2mr^2}$$

VARIAZIONE DI g CON L'ALTEZZA

- $F = G\dfrac{Mm}{R^2} = ma$

$g_0 = \dfrac{GM_T}{R_T^2} \rightarrow$ al livello del mare

$g(h) = \dfrac{GM_T}{(R_T+h)^2} \qquad h \ll R_T \qquad \dfrac{h}{R_T} \ll 1$

$$g(h) = GM_T\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2} = GM_T\left[1 - 2\frac{h}{R_T} + 3\left(\frac{h}{R_T}\right)^2 + \dots\right]$$

Ricaviamo la traiettoria del corpo

$$m\frac{d\vec v}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat u_r = -\frac{\alpha}{r_2}\hat u_r \qquad \alpha := GMm$$

$$\frac{d\hat u_\theta}{dt} = -\dot\theta\,\hat u_r$$

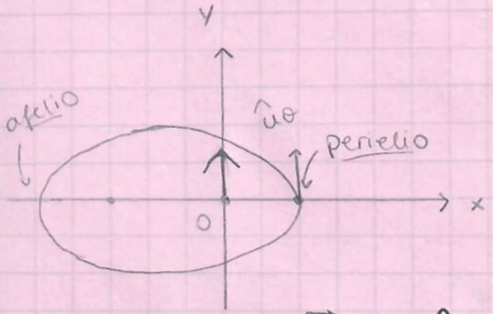
$$\hat u_r = -\frac{1}{\dot\theta}\frac{d\hat u_\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow m\frac{d\vec v}{dt} = \frac{\alpha}{r^2}\cdot\frac{1}{\dot\theta}\frac{d\hat u_\theta}{dt} \ ; \quad \frac{d\vec v}{dt} = \frac{\alpha}{mr^2\dot\theta}\frac{d\hat u_\theta}{dt} \ ; \quad \frac{d\vec v}{dt} - \frac{\alpha}{mr^2\dot\theta}\frac{d\hat u_\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\vec v - \frac{\alpha}{\ell}\hat u_\theta}_{\text{costante}}\Big) = 0$$

$$\vec e := \frac{\ell}{\alpha}\vec v - \hat u_\theta \Rightarrow \vec{cost}$$

$$\vec v = \dot r\,\hat u_r + r\dot\theta\,\hat u_\theta \Rightarrow \vec e = \frac{\ell}{\alpha}\dot r\,\hat u_r + \left(\frac{\ell}{\alpha}r\dot\theta - 1\right)\hat u_\theta$$



al perielio: $r = r_{min}$, $\dot r = 0$, $\hat u_\theta = \hat j$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec e}_{\text{al perielio}} = \left(\frac{\ell}{\alpha}r_{min}\dot\theta - 1\right)\hat j = \left(\frac{\ell^2}{m\alpha r_{min}} - 1\right)\hat j$$

$$\vec e(t)\cdot\hat u_\theta = e\hat j\cdot\hat u_\theta$$

$$\frac{\ell}{\alpha}r\dot\theta - 1 = e\cos\theta$$

$$\frac{\ell^2}{m\alpha r} - 1 = e\cos\theta \Rightarrow \boxed{r = \frac{\ell^2}{m\alpha}\cdot\frac{1}{1+e\cos\theta}}$$

equazione della traiettoria

- $0 \leq e < 1$ ellisse ($e=0$ circonferenza)
- $e = 1$ parabola
- $e > 1$ iperbole

Energia al perielio:

$$E = \frac{\ell^2}{2mr_{min}^2} - \frac{\alpha}{r_{min}} \qquad r_{min} = \frac{\ell^2}{m\alpha}\cdot\frac{1}{1+e}$$

...

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{m\alpha^2}}$$

$E = E_e \Rightarrow e = 0$ circonferenza

$E_e < E < 0 \Rightarrow e < 1$ ellisse

$E = 0 \Rightarrow e = 1$ parabola

$E > 0 \Rightarrow e > 1$ iperbole

ORBITE ELLITTICHE

$\theta = 0$, $r_p \equiv r_{min} = \frac{\ell^2}{m\alpha}\cdot\frac{1}{1+e}$ $\qquad$ $\theta = \pi$, $r_a = r_{max} = \frac{\ell^2}{m\alpha}\cdot\frac{1}{1-e}$

$a \Rightarrow$ semi-asse maggiore

$b \Rightarrow$ semi-asse minore

$$2a = r_p + r_a = \frac{\ell^2}{m\alpha} \cdot \frac{1}{1-e^2} \cdot 2 \qquad \begin{matrix} r_p = a(1-e) \\ r_a = a(1+e) \end{matrix}$$

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

$b = a\sqrt{1-e^2} \rightarrow$ si ricava con considerationi geometriche

$$\boxed{b = \frac{\ell^2}{m\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \qquad a = \frac{\ell^2}{m\alpha} \cdot \frac{1}{1-e^2}}$$

$$E = \frac{-1}{2} \frac{\alpha}{a}$$

DIMOSTRAZIONE III LEGGE DI KEPLERO

$$\sigma \equiv \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{\ell}}{2m} = \vec{cost}$$

vel. areolare

$\Delta t = T \rightarrow$ periodo orbitale

$$A = \pi a b \qquad b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$\sigma = \frac{A}{T} = \frac{\pi a b}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{T} = \frac{\ell}{2m}$$

$$\frac{A^2}{T^2} = \underbrace{\frac{\pi^2 a^4 (1-e^2)}{T^2} = \frac{\ell^2}{4m^2}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\ell^2}{4m^2} \cdot \frac{1}{\pi^2 a (1-e^2)}$$

$$a = \frac{\ell^2}{m\alpha} \cdot \frac{1}{1-e^2} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\cancel{\ell^2}}{4m^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{\pi^2 \frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{m}\alpha} \cdot \frac{1}{\cancel{1-e^2}} \cancel{(1-e^2)}}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

$\square$