SPAZI PROIETTIVI

Sia V sp. vett. su $\mathbb{K}$. Lo sp. proiettivo associato a V è

$$\mathbb{P}(V) = {V \setminus \{0\}}/{\sim} \quad \text{dove}$$

$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid v = \lambda w \iff v, w$ lin. dipendenti

↳ potrei mettere $\mathbb{K}^*$ ma è indifferente perché ho tolto lo zero

OSS. $\sim$ è una rel. di equivalenza

Perciò i punti di $\mathbb{P}(V)$ sono in bigezione naturale con le rette di V

$$\mathbb{P}(V) \to \{\text{rette di } V\}$$
$$[v] \longmapsto \text{Span}(v)$$

$$\pi(r \setminus \{0\}) \longleftarrow \text{retta } r$$

↓

$\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ è la proiezione al quoziente

Def. $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$

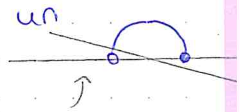
Def. (convenzione) $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

Esempi: • $V = \{0\} \Rightarrow \mathbb{P}(V) = \emptyset$ e $\dim \emptyset = -1$

- Se $\dim V = 1 \Rightarrow$ tutti i vettori di V sono equivalenti, per cui $\mathbb{P}(V) = \{*\}$ è un punto.
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to$ spazio delle rette di $\mathbb{R}^2$
  Un insieme di rappresentanti è dato, ad esempio dai vettori di norma 1 di argomento θ con $0 \leq \theta < \pi$

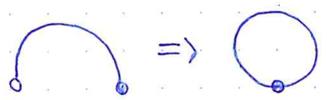
↓

ottengo una semicirc. chiusa in un estremo e aperta nell'altro



queste due rette sono vicine ma non hanno rappresentanti vicini (ho fatto una scelta arbitraria scegliendo estremo vuoto e estremo pieno)

$\Rightarrow$ Una rappresentazione più accurata di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è



TRASFORMAZIONI PROIETTIVE

Su $\mathbb{P}(V)$ non è definita alcuna operazione

Def. $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è una trasformazione proiettiva se $\exists \varphi : V \to W$ lineare t.c.
$$f([v]) = [\varphi(v)] \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$$

In tal caso si dice che φ induce f e si scrive $f = [\varphi]$

PROPOSIZIONE Una mappa lineare $\varphi: V \to W$ induce una trasf. proiettiva $\iff \varphi$ è iniettiva

DIM. ($\Rightarrow$) φ non iniettiva $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \neq \{0\}$

$\exists\, v \in V \setminus \{0\} \mid \varphi(v) = 0 \Rightarrow f([v]) = [\varphi(v)] = [0]$ ↯

($\Leftarrow$) φ iniettiva, pongo $f([v]) = [\varphi(v)]$ e devo controllare che questa sia una buona def.

$\operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \Rightarrow \forall\, v \in V \setminus \{0\}$ $[\varphi(v)]$ è un punto di $\mathbb{P}(V)$

BUONA DEFINIZIONE $\Big($ $v \sim v' \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $v = \lambda v' \Rightarrow \varphi(v) = \lambda\varphi(v') \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(v) \sim \varphi(v')$ per cui f è ben def.

$\square$

Corollario ogni trasformazione proiettiva è iniettiva

DIM. $[\varphi(v)] = [\varphi(v')] \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $\varphi(v) = \lambda\varphi(v') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(v) = \varphi(\lambda v') \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ iniettiva}}}{\Rightarrow} v = \lambda v' \Rightarrow [v] = [v']$$

$\square$

PROPOSIZIONE $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasf. pr.
Sono fatti equivalenti

1. f surgettiva
2. f bigettiva
3. $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$
4. f invertibile e f^{-1} trasf. pr.

DIM.

$f = [\varphi]$ $\varphi: V \to W$ iniettiva

1 ⇒ 2 Ovvio (f necessariamente iniettiva)

2 ⇒ 3 f big. $\Rightarrow \varphi$ big
Sappiamo già che φ è iniettiva.

Sia $w \in W$ se $w = 0$ $\varphi(w) = 0$
se $w \neq 0$ per suriettività di f
$\exists\, v \in V \setminus \{0\}$ t.c. $f([v]) = [w]$
$[\varphi(v)] = [w] \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $\varphi(v) = \lambda w \Rightarrow \varphi(\lambda^{-1} v) = w$

Dunque φ è surg. e dall'algebra lineare $V \cong W \Rightarrow \dim V = \dim W$

$\Rightarrow \dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$

3 ⇒ 4 $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) \Rightarrow \dim V = \dim W$
inoltre, φ è iniettiva per cui è un isomorfismo

Dunque $\varphi^{-1}: W \to V$ isomorfismo $\Rightarrow$ induce una trasf. pr.
$g: \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$

$$g(f([v])) = g([\varphi(v)]) = [\varphi^{-1}(\varphi(v))] = [v]$$

analogamente $f(g([v])) = [v]$ $\forall [v] \in \mathbb{P}(W) \Rightarrow g = f^{-1}$

4 => 1 ovvio

PROPOSIZIONE i • $Id: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è una trasf. pr.
ii • la composizione di trasf. pr. è una trasf. pr.

i) $Id: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è indotta da $Id: V \to V$

ii) $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ $\quad g: \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(H)$
$f = [\varphi]$ $\quad g = [\psi]$

$\Rightarrow g \circ f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(H)$ è indotta da $\psi \circ \varphi$

Infatti $\forall v \in V \setminus \{0\}$

$$g(f([v])) = g([\varphi(v)]) = [\psi(\varphi(v))]$$ $\square$

27/09/24

Def.

$f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tr. proiettiva è un ISOMORFISMO se $\exists$
g tr. proiettiva $g: \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ | $f \circ g = Id_{\mathbb{P}(W)}$ $\quad g \circ f = Id_{\mathbb{P}(V)}$

equivalente a f bigettiva o $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$ (visto ieri)

Se $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(W)$ f si dice PROIETTIVITÀ (equivalente all'automorfismo per spazi vettoriali)

L'insieme delle proiettività è un gruppo con la composizione

che si chiama $\mathbb{P}GL(V)$

OSS. $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ $\quad f = [\varphi]$
Allora $P \in \mathbb{P}(V)$ è un punto fisso di f SSE $P = [v]$, v autovettore di φ

Infatti $f(P) = P \iff [\varphi(v)] = [v] \iff \varphi(v) = \lambda v$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow$ i punti fissi di f sono in big. con le rette di autovettori di φ

Corollario: se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\mathbb{P}(V) \neq \emptyset$ ogni proiettività

$f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ ha almeno un punto fisso

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\dim \mathbb{P}(V)$ è pari vale la stessa
$\Downarrow$
conclusione $\quad \dim V$ dispari | perché il polinomio caratteristico di φ (che induce f) sarà dispari quindi avrà almeno una sol. reale

In $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ la rotazione di $\pi/2$ in $\mathbb{R}^2$ induce una proiettività

senza punti fissi (quella di π è l'identità)

Def. SOTTOSPAZI

$S \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un ssp. se $\exists$ un ssp. vettoriale $W \subseteq V$ tale che

$S = \pi(W \setminus \{0\})$
↳ proiezione al quoziente

In tal caso si scrive $S = \mathbb{P}(W)$ e $\dim S = \dim W - 1$

È una buona def. (di dim.) perché se $S = \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W')$ allora $W = W'$.

Vale più in generale che si ha una biq. tra ssp. vettoriali di V e ssp. proiettivi di $\mathbb{P}(V)$

$$\{\text{ssp. di } V\} \longleftrightarrow \{\text{ssp. di } \mathbb{P}(V)\}$$

$$W \xmapsto{\varphi} \mathbb{P}(W) = \pi(W \setminus \{0\})$$

$$\pi^{-1}(S) \cup \{0\} \xleftarrow{\psi} S$$

- $\varphi(\psi(\mathbb{P}(W))) = \varphi(\pi^{-1}(\mathbb{P}(W)) \cup \{0\}) = \varphi(W \setminus \{0\} \cup \{0\}) = \varphi(W) = \mathbb{P}(W)$
- $\psi(\varphi(W)) = \psi(\mathbb{P}(W)) = \pi^{-1}(\mathbb{P}(W)) \cup \{0\} = W \setminus \{0\} \cup \{0\} = W$

È facile verificare che φ e ψ sono una l'inversa dell'altra.

Seguono alcuni fatti elementari sui ssp:

1) S_1, S_2 ssp. di $\mathbb{P}(V)$

Se $S_1 \subseteq S_2$ allora $\dim S_1 \leq \dim S_2$ e se $S_1 \subseteq S_2$ e $\dim S_1 = \dim S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$

2) Se S_i, $i \in I$ è una famiglia qualsiasi di sottospazi anche $\bigcap_{i\in I} S_i$ è un ssp. Infatti, se $S_i = \mathbb{P}(W_i)$ si verifica che

$$\bigcap_{i\in I} S_i = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} W_i\Big)$$

3) S_1, S_2 ssp. proiettivi, non è detto che $S_1 \cup S_2$ lo sia (lo è SSE $S_1 \subseteq S_2 \vee S_2 \subseteq S_1$)

Def. $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ sottoinsieme. Allora il sottospazio generato da A è il più piccolo ssp. proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ che lo contiene.

Si denota con $L(A)$

Buona def. per il punto 2) di sopra che ci permette di definire

$$L(A) = \bigcap \{S \mid S \text{ ssp. proiettivo che contiene } A\}$$

è il più piccolo perché $A \subseteq S \Rightarrow L(A) \subseteq S$

Notazione: S_1, S_2 ssp., si pone $L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2)$

PROPOSIZIONE $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ $S_2 = \mathbb{P}(W_2) \Rightarrow L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

DIM

$\subseteq$ $W_1 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow S_1 = \mathbb{P}(W_1) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ e analog.

$S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2) \Rightarrow S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2) \Rightarrow L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(W_1 + W_2)$

② $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W)$ $\leftarrow$ ssp. vett.

dalla bigezione vista prima

allora $\underset{\mathbb{P}(W_1)}{S_1} \subseteq \mathbb{P}(W) \Rightarrow \pi^{-1}(S_1) \subseteq W \Rightarrow W_1 \subseteq W$

analogamente $W_2 \subseteq W$

Ma allora per def. di somma di ssp. vettoriali $W_1 + W_2 \subseteq W \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(W_1 + W_2) \subseteq \mathbb{P}(W) = L(S_1, S_2)$

TEOREMA - (Formula di Grassmann)

S_1, S_2 ssp. di $\mathbb{P}(V)$. Allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

DIM

$S_1 = \mathbb{P}(W_1) \quad S_2 = \mathbb{P}(W_2)$

$S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$ e $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$ per quanto già visto

$\Rightarrow \dim L(S_1, S_2) = \dim(W_1 + W_2) - 1 \underset{\substack{\text{Grassmann} \\ \text{vettoriale}}}{=} \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) - 1 =$

$= (\dim S_1 + \cancel{1}) + (\dim S_2 + \cancel{1}) - (\dim(S_1 \cap S_2) + \cancel{1}) - \cancel{1} =$

$= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$ □

Terminologia: un (sotto)-spazio proiettivo di dim 1 si chiama retta, dim 2 piano, dim $(\dim \mathbb{P}(V) - 1)$ iperpiano

Corollario: S_1, S_2 ssp. di $\mathbb{P}(V)$.

Se $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V) \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

DIM.

$\dim S_1 \cap S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq$

i punti hanno dimensione 0

$\geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(V) \underset{\text{per hp.}}{\geq} 0 \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ □

Corollario: r_1, r_2 rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \Rightarrow r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$

DIM. $1 + 1 \geq 2$ □

Esercizio: siano r_1, r_2 rette di $\mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = 3$ e $r_1 \cap r_2 = \emptyset$

Sia $P \in \mathbb{P}(V) \setminus (r_1 \cup r_2)$

Allora $\exists!$ retta $r \in \mathbb{P}(V) \mid P \in r$, $r \cap r_2 \neq \emptyset$ $r \cap r_1 \neq \emptyset$

DIM. Cerchiamo di capire chi deve essere r (che ci darà l'unicità)

$S_1 = L(P, r_1)$ $\quad \dim S_1 = \dim P + \dim r_1 - \dim(P \cap r_1) =$
$= 0 + 1 - (-1) = 2 \rightarrow S_1$ piano

Se r risolve il problema, r contiene P e $Q_1 \in r_1$ $(Q_1 \neq P)$

$r = L(P, Q_1)$: infatti $\dim L(P,Q_1) = 0+0-(-1) = 1 \Rightarrow$ retta

Inoltre $P, Q_1 \in r \Rightarrow L(P,Q_1) \subseteq r$, perciò vale l'uguaglianza

$P, Q_1 \in P \cup r_1 \subseteq S_1 = L(P, r_1) \Rightarrow r = L(P,Q_1) \subseteq S_1$

Analogamente, se $S_2 = L(P, r_2) \Rightarrow r \subseteq S_2$, dunque $r \subseteq S_1 \cap S_2$

$\dim S_1 = \dim S_2 = 2$, vediamo ora che $S_1 \cap S_2$ è una retta

$S_1 \neq S_2$ in quanto altrimenti r_1 ed r_2 sarebbero complanari e si intersecherebbero. Ma allora $L(S_1, S_2)$ è un ssp. che contiene propriamente S_1 e S_2, dunque $\dim L(S_1, S_2) > 2$ $(=3)$

$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(V)$ dunque $\underbrace{\dim S_1 \cap S_2 = 1}_{\text{retta}}$

$r \subseteq S_1 \cap S_2 \Rightarrow$ necessariamente $r = S_1 \cap S_2 \rightarrow \square$ (unicità)

$r = L(P, r_1) \cap L(P, r_2)$

Per l'esistenza vediamo che questa scelta funziona

$r : S_1 \cap S_2$

1) r è davvero una retta (visto)

2) $P \in r$ $(P \in L(P, r_1)$ $P \in L(P, r_2))$

3) $r \cap r_1 \neq \emptyset$ in quanto per costruzione r e r_1 giacciono sul piano $S_1 = L(P, r_1)$

due rette complanari si intersecano sempre nello sp. proiettivo

4) $r \cap r_2 \neq \emptyset$, $r \cup r_2 \subseteq S_2$

01/10/2024

(Talpo)

Riferimenti proiettivi

non "linearmente indipendenti" chiaramente

Def. $P_1, \dots, P_K \in \mathbb{P}(V)$ si dicono indipendenti se presi $v_i \in V$ t.c. $P_i = [v_i]$ $\forall i$, si ha che i v_i sono lin. indipendenti in V.

OSS: è una buona definizione

v_i' nuovi rappresentanti dei $P_i \Rightarrow v_i' = \lambda_i v_i$, per qualche $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$

v_i' indipendenti $\Leftrightarrow$ lo sono i v_i

OSS: $P_1, \dots, P_K \in \mathbb{P}(V)$ indipendenti $\Leftrightarrow \dim L(P_1, \dots, P_K) = K-1$

In particolare, se $n = \dim \mathbb{P}(V)$ e $P_1, \dots, P_K$ indipendenti $\Rightarrow$

$\Rightarrow K \leq n+1$.

Def $P_1, \dots, P_K$ sono in posizione generale se qualsiasi sottoinsieme costituito da h punti, $h \leq n+1$, è indipendente

OSS: in altre parole, se $K \leq n+1$, è equivalente chiedere che siano indipendenti, se $K > n+1$, è equivalente chiedere che tutte le $(n+1)$-uple siano indipendenti

Esempio:
- $\dim \mathbb{P}(V) = 1$
  $P_1, \dots, P_K$ in posizione generale SSE sono distinti
- $\dim \mathbb{P}(V) = 2$
  $P_1, \dots, P_K$ in posizione generale SSE sono a tre a tre non allineati

Def. Un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, con $n = \dim \mathbb{P}(V)$ è $(n+2)$-upla $\mathcal{R} = (P_0, P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ di punti di $\mathbb{P}(V)$ in posizione generale.

P_{n+1} si chiama PUNTO UNITÀ di $\mathcal{R}$, $P_0, \dots, P_n$ si chiamano PUNTI FONDAMENTALI

Def. $\mathcal{R}$ riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, una base normalizzata di V associata ad $\mathcal{R}$ è una base di V, $(v_0, \dots, v_n)$ t.c.

$[v_i] = P_i$ per $0 \leq i \leq n$, e $P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$

"base" "normalizzata"

TEOREMA $\mathcal{R}$ riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

1) Esiste base normalizzata $(v_0, \dots, v_n)$ di V rispetto a $\mathcal{R}$

2) Se $(v_0', \dots, v_n')$ è un'altra base normalizzata, allora $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid$ $v_i' = \lambda v_i \ \forall i$ → è lo stesso λ per tutti gli indici

("la" base normalizzata è unica a meno di riscalamento simultaneo)

<u>DIM.</u> 1) $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$

Scegliamo $v_i \in V \ \forall i \mid 0 \leq i \leq n$ t.c. $[v_i] = P_i$, noto che $(v_0, \dots, v_n)$ sono una base di V, visto che $\{P_0, \dots, P_n\}$ indipendenti. Sia $v_{n+1} \in V \mid [v_{n+1}] = P_{n+1}$.

Si ha che $v_{n+1} = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$ dove $a_i \in \mathbb{K}$ sono unici.

Mostriamo che $a_i \neq 0 \ \forall i$

Supponiamo $a_i = 0$ per un certo i, allora seguirebbe che $v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{n+1}$ sono lin. dipendenti, il che contraddice l'ipotesi che $\mathcal{R}$ sia un riferimento.

Pongo $v_i' = a_i v_i$. $a_i \neq 0 \ \forall i \Rightarrow (v_0', \dots, v_n')$ è ancora una base di V, si ha $[v_i'] = [a_i v_i] = P_i$ e inoltre

$P_{n+1} = [v_{n+1}] = [v_0' + \dots + v_n'] \Rightarrow (v_0', \dots, v_n')$ base normalizzata.

2) $(v_0'', \dots, v_n'')$ un'altra base normalizzata di V rispetto a $\mathcal{R}$

$[v_i'] = P_i = [v_i''] \quad 0 \leq i \leq n \Rightarrow v_i'' = \lambda_i v_i' \quad \lambda_i \in \mathbb{K}^*$

Inoltre, $[v_0' + \dots + v_n'] = P_{n+1} = [v_0'' + \dots + v_n'']$

$v_0'' + \dots + v_n'' = \lambda (v_0' + \dots + v_n'), \ \lambda \in \mathbb{K}^*$

$\lambda_0 v_0' + \dots + \lambda_n v_n' = \lambda v_0' + \dots + \lambda v_n' \Rightarrow \lambda = \lambda_i \ \forall i \mid 0 \leq i \leq n$

perché $(v_0', \dots, v_n')$ è una base. $\square$

TEOREMA $f, g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tr. proiettive e $\varphi, \psi : V \to W$ t.c. $[\varphi] = f$, $[\psi] = g$. Sia $\mathcal{R}$ riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

TFAE: "the following are equivalent"

1) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$, t.c. $\varphi = \lambda \psi$

2) $f = g$

3) $f(P) = g(P) \quad \forall P \in R$

DIM. $1 \Rightarrow 2$ $\quad \varphi = \lambda \psi$, allora $f(P) = [\varphi(v)]$ dove $P = [v]$

$$\| \qquad [\lambda\psi(v)] = [\psi(v)] = g(P)$$

$2 \Rightarrow 3$ ovvio

$3 \Rightarrow 1$ Fissiamo una base normalizzata $(v_0, \dots, v_n)$ rispetto a $R = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$

Per ipotesi $[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)] \quad 0 \leq i \leq n$

$\Rightarrow \varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i), \quad \lambda_i \in \mathbb{K}^*$ e inoltre

$[\varphi(v_0 + \dots + v_n)] = f(P_{n+1}) = g(P_{n+1}) = [\psi(v_0 + \dots + v_n)]$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \lambda\psi(v_0 + \dots + v_n) = \varphi(v_0 + \dots + v_n)$

$\varphi(v_0) + \dots + \varphi(v_n) = \lambda\psi(v_0) + \dots + \lambda\psi(v_n)$

$\lambda_0\psi(v_0) + \dots + \lambda_n\psi(v_n) = \lambda\psi(v_0) + \dots + \lambda\psi(v_n)$

ψ iniettiva e $v_0, \dots, v_n$ base $\Rightarrow \psi(v_0), \dots, \psi(v_n)$ lin. indipendenti

e dunque posso concludere $\lambda_i = \lambda, \quad 0 \leq i \leq n$

Quindi $\varphi(v_i) = \lambda\psi(v_i) \quad 0 \leq i \leq n$

$(v_0, \dots, v_n)$ base $\Rightarrow \varphi = \lambda\psi$ $\square$

Corollario: $\mathbb{P}GL(V) \rightarrow$ gruppo delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ (gruppo con la composizione)

$\mathbb{P}GL(V) \cong GL(V)/N$ dove $N \triangleleft GL(V)$ è il sottogruppo $N = \{\lambda Id_V \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$

DIM. $GL(V) \rightarrow \mathbb{P}GL(V)$

$\varphi \mapsto [\varphi]$ $\qquad [\varphi \circ \psi] = [\varphi] \circ [\psi]$

Questo è un omomorfismo (suriettivo per def. di $\mathbb{P}GL(V)$)

Il kernel è proprio N per il teorema appena visto.

Dal 1° teo di omomorfismo $GL(V)/N \cong \mathbb{P}GL(V)$ $\square$

Notazione: $V = \mathbb{K}^{n+1} \rightsquigarrow \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$\mathbb{P}GL(\mathbb{K}^{n+1})$ = proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ si indica con $\mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K})$

taglia delle matrici...

es. proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$: $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{K})$ proiettivizzato dello spazio di automorfismi di uno spazio di dimensione 2

TEOREMA (fondamentale delle trasformazioni proiettive)

$\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(W)$ sp. proiettivi $n = \dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$, R, R' rif. proiettivi

Allora $\exists !$ trasf. proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ che manda (ordinatamente) il rif. R nel rif. R'

DIM. unicità di f è chiara dal teo. precedente. $f = g \iff f(P) = g(P)\ \forall P \in R$

Per l'esistenza fissiamo basi normalizzate

$(v_0, \ldots, v_n)$ di V rispetto a R e $(w_0, \ldots, w_n)$ di W rispetto a R'

Sappiamo che $\exists ! \ \varphi : V \to W$ t.c. $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i \mid 0 \leq i \leq n$.

$f = [\varphi] : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ $\quad R = \{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$ $\quad R' = \{Q_0, \ldots, Q_{n+1}\}$

$f(P_i) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = Q_i \quad 0 \leq i \leq n$

$f(P_{n+1}) = [\varphi(v_0 + \ldots + v_n)] = [w_0 + \ldots + w_n] = Q_{n+1}$

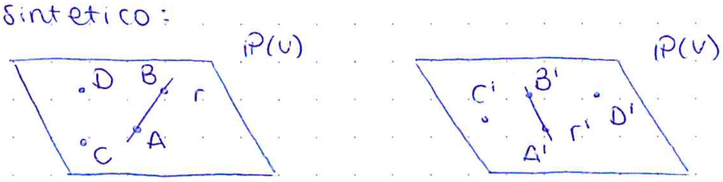
$f = [\varphi]$ soddisfa la richiesta. $\square$

Esempio: $\mathbb{P}(V)$ piano proiettivo ($\dim \mathbb{P}(V) = 2$) e r, r' due rette in $\mathbb{P}(V)$.

$\exists f \in \mathbb{P}GL(V)$ t.c. $f(r) = r'$

Possibili modi → passare al vettoriale
↘ cercare una "soluzione sintetica"

Modo sintetico:



Prendiamo due rif. proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, R e R', scegliendo due punti distinti su r e completando (scegliendo $C \notin r$ e $D \notin r \cup L(B,C) \cup L(A,C)$) e facendo lo stesso in arrivo
(esiste...) esercizio 1 della prima settimana

(A, B, C, D) e (A', B', C', D') sono rif. proiettivi, per il teo. fondamentale $\exists ! \ f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ t.c. $f(R) = R'$ e dunque $f(r) = f(L(A,B)) =$

$= L(f(A), f(B)) = L(A', B') = r'$

Coordinate omogenee

Caso tautologico: $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} /_{\sim} = \{[(x_0, \dots, x_n)] \mid x_i \text{ non tutti nulli}\}$

$[(x_0, \dots, x_n)] = [(y_0, \dots, y_n)] \iff x_i = \lambda x_i \quad \forall\, 0 \leq i \leq n, \ \lambda \in \mathbb{K}^*$

Def. Il punto $[(x_0, \dots, x_n)] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha coordinate omogenee $[x_0, \dots, x_n]$ (opp. $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$) rispetto al riferimento proiettivo standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

(il rif. standard è quello indotto dalla base canonica, cioè

$P_i = [0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posto } i\text{-esimo}}}{1}, \dots, 0] \quad 0 \leq i \leq n$)

$P_{n+1} = [1, \dots, 1, \dots, 1]$

Oss: • le coordinate om. di un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sono uniche soltanto a meno di riscalamento simultaneo.

$[2, 1, 3] = [4, 2, 6] = \dots$

• $[0, 0, \dots, 0]$ non rappresenta alcun punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

03/10/2024
Talpo

Recap- COORDINATE OMOGENEE

In $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ le coordinate omogenee di $[(x_0, \dots, x_n)]$ sono $[x_0 \cdots x_n]$ e sono ben definite solo a meno di riscalamento simultaneo.

Caso generale: Su $\mathbb{P}(V)$, di dim. n un riferimento proiettivo $R = (P_0, \dots, P_{n+1})$ induce delle coordinate omogenee

① So che $\exists!\ f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ che manda il riferimento R nel riferimento standard di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$P_i = [0 \cdots \underset{\text{posto } i\text{-esimo}}{1} \cdots 0]$

$P_{n+1} = [1 1 \cdots 1 1]$

$\Rightarrow$ le coordinate omogenee di P rispetto a R sono quelle di $f(P) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

② (equivalentemente) $(v_0, \dots, v_n)$ base normalizzata di V rispetto a R, dato $P \in \mathbb{P}(V)$ e scelto $v \in V$ t.c. $[v] = P$, posso scrivere $v = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$ $a_i \in \mathbb{K}$ in modo unico. le coordinate om. di P risp. a v. sono date da $[a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

(l'equivalenza è chiara, il punto è che la f in ① è indotta dall'isomorfismo $\varphi: V \to \mathbb{K}^{n+1}$, che discende dalla scelta della base normalizzata)

OSS. Nel caso vettoriale fissare una base di V è eq. a fissare un iso. lineare con $\mathbb{K}^{n+1}$ $(\dim V = n+1)$

analogamente, in $\mathbb{P}(V)$ fissare un rif. proiettivo è equivalente a fissare un isom. proiettivo con $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

Usando le coordinate omogenee si rappresentano trasf. proiettive e sottospazi usando matrici ed equazioni.

Trasformazioni proiettive

$f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ trasf. proiettiva. R, R' rif. proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ e basi normalizzate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

$\varphi: V \to W$ | $f = [\varphi]$, posso rappresentare φ con una matrice M (rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$) $\Rightarrow$ M "rappresenta anche f" nel senso che

$$[f(P)]_{R'} = M \cdot [P]_R$$

coord. om. di $f(P)$ rispetto a R'

con abuso di notazione

$$= [M \cdot (v)_{\mathcal{B}}]$$

scritto meglio

$P = [v]$

OSS la matrice M che rappresenta f non è unica, ma lo è a meno di multipli scalari

OSS M avrà taglia $(m+1) \times (n+1)$ dove $n = \dim \mathbb{P}(V)$, $m = \dim \mathbb{P}(W)$

Sottospazi

- RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA (tramite eq.)

$S \subseteq \mathbb{P}(V)$ ssp. proiettivo $\Rightarrow S = \mathbb{P}(W)$, W ssp. vett. di V

Se $n = \dim \mathbb{P}(V)$, $k = \dim S$ $(\Rightarrow \dim V = n+1$, $\dim W = k+1)$

allora fissato un rif. proiettivo $\mathcal{R}$ di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathcal{B}$ base normalizzata

W è il luogo delle soluzioni di $(n+1)-(k+1) = n-k$ eq. lineari

omogenee nelle coordinate indotte da $\mathcal{B}$

$\{f_1 = \dots = f_{n-k} = 0\}$

Queste eq. descrivono anche $S \subseteq \mathbb{P}(V)$, nel senso che

$P \in \mathbb{P}(V)$ sta in S SSE le sue coord. omogenee rispetto a $\mathcal{R}$

soddisfano $f_1(P) = \dots = f_{n-k}(P) = 0$

↳ f_i calcolato nelle coord. om.

OSS f polinomio lineare omogeneo e $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, la scrittura $f(P)$ non è ben definita, cioè il risultato dipende dal rappresentante vett. scelto ma la condizione $f(P) = 0$ è ben posta.

ES. $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ $P = [a_0, a_1, a_2]$

$f(x_0, x_1, x_2) = 3x_0 + 2x_1 + 4x_2$

$f([1\ 1\ 1])$ non ha senso: $f(1,1,1) = 9$, $f(-1,-1,-1) = -9$

la condizione $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ su $[x_0, x_1, x_2]$ è ben posta

perché $[a_0, a_1, a_2]$ soddisfa $f(a_0, a_1, a_2) = 0$

$$\Rightarrow f(\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) = 0$$
$$\parallel$$
$$\lambda f(a_0, a_1, a_2)$$

OSS le eq. lineari non omogenee non definiscono luoghi nel proiettivo, perché il loro annullarsi dipende dalla scelta di un rappresentante

ES. l'eq. $x_0 + x_1 - x_2 = 1$ non descrive un luogo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

↳ soddisfatta da $(1,1,1)$ ma non da $(2,2,2)$

ma $[1,1,1] = [2,2,2]$

• RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA: descrive $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ come immagine di una trasf. proiettiva (o, nei vett., come span di un insieme di vettori)

esempio: in $\mathbb{K}^3$ $\quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$ si può descrivere come $\mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ e quindi il suo vett. generico si scrive (unicamente in questo caso)

$$v = t_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_1\\t_1+t_2\\t_2\end{pmatrix} \qquad (t_1, t_2) \in \mathbb{K}^2$$

Il ssp. proiettivo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ corrispondente si può descrivere in modo parametrico come $\{[t_1, t_1+t_2, t_2] \mid (t_1,t_2) \neq (0,0)\}$
si scrivono in riga

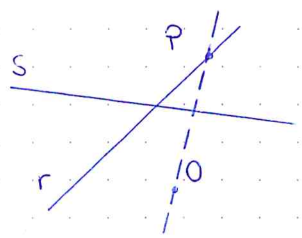
OSS la coppia (t_1, t_2) può essere effettivamente pensata come un punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, che vi sta "parametrizzando" il ssp. proiettivo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ descritto (che è una retta proiettiva)

OSS $t_1[1,1,0] + t_2[0,1,1]$ non ha senso come scrittura
Quella corretta è $[t_1(1,1,0) + t_2(0,1,1)]$ $\quad (t_1,t_2) \neq (0,0)$

Def Un IPERPIANO in $\mathbb{P}(V)$ è un ssp. proiettivo di co-dimensione 1 (è quindi descritto in coord. da una singola eq. non banale lineare omogenea, unica a meno di moltiplicazione per scalare $\neq 0$)

PROSPETTIVITÀ

Siano r ed s in un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ e fissiamo $O \in \mathbb{P}(V) \setminus (r \cup s)$



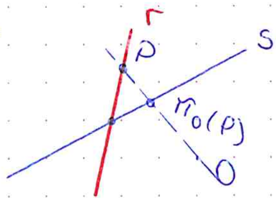
Definisco $\pi_O : r \to s$

$$\pi_O(P) = L(O,P) \cap S$$

Proposizione: π_O è ben definita ed è una trasformazione proiettiva e si chiama prospettività di centro O.

Prospettività

$\mathbb{P}(V)$ sp. proiettivo $O \in \mathbb{P}(V) \setminus \{r \cup s\}$ rette distinte



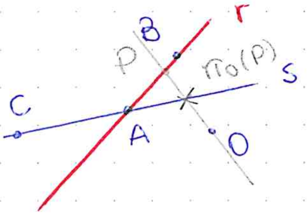
Consideriamo $\pi_O : r \to s$
$P \mapsto L(O,P) \cap s$

Prop. π_O ben definita ed è una trasf. proiettiva

DIM. Vediamo che è indotta da una appl. lineare

$V_r \to V_s$, $V_r \subseteq V$ ssp. vett. che corrisponde a r (idem V_s)

Fisso un riferimento proiettivo "comodo"



$A = r \cap s$, $B \in r \setminus \{A\}$

$C \in s \setminus (\{A\} \cup L(O,B))$

$R = \{A, B, C, O\}$ è un rif. proiettivo. Usiamo le coord. indotte.

In queste coordinate

$A = [1,0,0]$ $B = [0,1,0]$, $C = [0,0,1]$, $O = [1,1,1]$

La retta r ha eq. $x_2 = 0$ e s ha eq. $x_1 = 0$

$r = \{[x_0, x_1, 0] \mid [x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$

Questo da delle coordinate omogenee sulla retta r

(la funzione $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è un iso proiettivo)
$[x_0, x_1] \mapsto [x_0\ x_1\ 0]$

Analogamente $s = \{[x_0\ 0\ x_2] \mid [x_0, x_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$

Scrivo $\pi_O : r \to s$ in queste coordinate.

Dato $P \in r$, $P = [a, b, 0]$ calcolare l'eq. della retta $L(O,P)$ e poi intersecare con s

[è chiaro che π_O è ben definita: $P \neq O \Rightarrow L(O,P)$ è una retta

$\wedge$ $L(O,P) \neq s$ perché $O \notin s$ $\Rightarrow$ l'intersezione è un punto]

L'eq. di $L(O,P)$ si calcola imponendo che (x_0, x_1, x_2) sia comb. lineare di $[(1,1,1)]$ "O" e $[(a,b,0)]$ "P", cioè

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$x_0(-b) - x_1(-a) + x_2(b-a) = 0$

Intersecano con s

$$\begin{cases} -bx_0 + ax_1 + (b-a)x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -bx_0 + (b-a)x_2 = 0$$

L'unica soluzione "proiettiva" è $x_2 = b$, $x_0 = b-a$

$\Rightarrow \pi_0(P) = [b-a, 0, b]$

$$\underbrace{\pi_0([a,b])}_{\text{coord. su } r \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{K})} = \underbrace{[b-a, b]}_{\text{coord. su } s}$$

è invertibile (mi serve iniettiva)

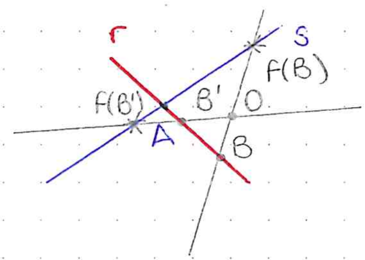
È una trasf. proiettiva data dalla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

<u>OSS</u> $\pi_0(A) = A$

Teorema r, s rette distinte in un piano $\mathbb{P}(V)$ e $f: r \to s$ trasf. proiettiva. f prospettività $\Leftrightarrow$ $f(A) = A$ dove $A = r \cap s$

<u>DIM</u> $(\Rightarrow)$ OK!

$(\Leftarrow)$ Cerco il centro della prospettività che coincide con f.



Dato $B \in r \setminus \{A\} \Rightarrow$ il centro O deve stare su $L(B, f(B))$ ($B \neq f(B)$ perché c'è un solo punto in $r \cap s$ che è A)

Preso un secondo punto B', $B' \neq A, B$

$\Rightarrow L(B, f(B)) \cap L(B', f(B')) =: O$

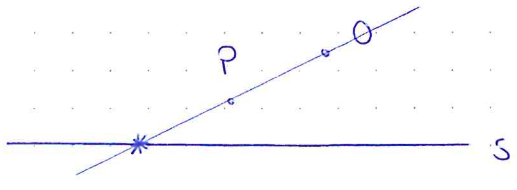
$f = \pi_0$

Questo segue dal fatto che (A, B, B') è un rif. proiettivo di $\underline{r}$ in partenza e f e π_0 coincidono su questi punti. $\square$

<u>OSS</u> in realtà π_0 è la restrizione di una funzione

$$\mathbb{P}(V) \setminus \{O\} \to s$$
$$P \mapsto L(O, P) \cap s$$

Trasformazione proiettiva DEGENERE: indotta da una trasf. lineare con Ker non banale ($\Rightarrow$ non può essere definita su tutto $\mathbb{P}(V)$)



Carte affini e punti all'infinito

In $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, se $i=0,\dots,n$ c'è un "iperpiano coordinato" $H_i = \{x_i = 0\}$

Denotiamo $U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i = \{[x_0,\dots,x_n] \mid x_i \neq 0\}$

Come spazi proiettivi, $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

Definisce $j_i : \mathbb{K}^n \to U_i$ l'i-esima carta affine

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto [\overset{x_0}{x_1},\dots,\overset{x_{i-1}}{},\underset{\hookrightarrow \text{posto i-esimo}}{1},\dots,\overset{x_n}{x_n}]$$ (sto aggiungendo una coordinata)

è l'inversa, ora lo verifichiamo. $\hookrightarrow$ $j_i^{-1} : U_i \to \mathbb{K}^n$

$$[x_0 \dots x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\widehat{\frac{x_i}{x_i}},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)$$

($x_i \neq 0$ in U_i) ben definita perché cambiando rappresentante in $[\lambda x_0,\dots,\lambda x_n]$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'immagine diventa

$$\left(\frac{\lambda x_0}{\lambda x_i},\dots,\widehat{\frac{\lambda x_i}{\lambda x_i}},\dots,\frac{\lambda x_n}{\lambda x_i}\right) = \left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\widehat{\frac{x_i}{x_i}},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)$$

Prop: j_i e j_i^{-1} sono effettivamente inverse

DIM. $j_i^{-1} \circ j_i(y_1,\dots,y_n) = j_i^{-1}[y_1,\dots,1,\dots y_n] = (y_1,\dots,y_n)$

$j_i \circ j_i^{-1}[x_0 \cdots x_n] = j_i\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right) = \left[\frac{x_0}{x_i},\dots,1,\dots\frac{x_n}{x_i}\right] =$

$= [x_0,\dots,x_i,\dots,x_n]$ riscalando per x_i $\square$

Quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_i \cup H_i \cong \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

può essere pensato come "ampliamento" di $\mathbb{K}^n$ a cui viene aggiunto un $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

Es. $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^1 \cup pt$

D'ora in poi useremo la carta j_0 per identificare $\mathbb{K}^n$ con $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

Def. i punti di H_0 si chiamano PUNTI ALL'INFINITO (o punti impropri) di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, e H_0 si chiama iperpiano all'infinito.

Def / PROP

① $K \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ssp. proiettivo, non contenuto in H_0, $j_0^{-1}(K \cap U_0) \subseteq \mathbb{K}^n$ è un ssp. affine di $\mathbb{K}^n$ e si chiama parte affine di K.

la sua dim. affine coincide con la dim. proiettiva di K

② $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ ssp. affine $\neq \emptyset \Rightarrow Z$ è la parte affine di un unico ssp. proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, che denotiamo con $\overline{Z}$ e si chiama chiusura proiettiva di Z

$\Rightarrow j_0$ induce una biG. tra ssp. affini di $\mathbb{K}^n$ di dim. K e ssp. proiettivi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ di dim K, non contenuti in H_0

DIM ① $k = \dim K$ → sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

K insieme di soluzioni di un sistema di eq. lin. om.

di rango $(n+1)-(k+1) = n-k$

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-k,0}x_0 + \dots + a_{n-k,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Quando $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ sta in $j_0^{-1}(U_0 \cap K)$?

Quando $j_0(y_1, \dots, y_n) \in U_0 \cap K$, cioè vale:

$\overset{\parallel}{[1, y_1, \dots, y_n]}$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n = -a_{10} \\ \vdots \\ a_{n-k,1}y_1 + \dots + a_{n-k,n}y_n = -a_{n-k,0} \end{cases} \quad (*)$$

$\Rightarrow j_0^{-1}(U_0 \cap K)$ è un ssp. affine di $\mathbb{K}^n$

quella con i termini noti

Notare che la matrice completa ha ancora rg $n-k$ e visto che $K \cap U_0 \neq \emptyset$ il sistema $(*)$ ha almeno una soluzione

Per Rouché-Capelli, anche la matrice dei coeff. ha rg $n-k$

$$\begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-k,0} & \cdots & a_{n-k,n} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ il ssp. affine definito dal sistema ha dim k.

② Rovesciando il procedimento precedente: dato $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ ssp. affine definito da un sistema lin. non om.

$\underset{(n-k)\times n}{A} \cdot y = b \qquad \text{rg}A = n-k$

considero il ssp. proiettivo $\bar{Z}$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ definito dal sist. lin. om.

$$\underbrace{(-b|A)}_{\substack{(n-k)\times(n+1)\\ \text{di rango } n-k}} \cdot \underset{\substack{\| \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}}{x} = 0 \quad \Rightarrow \text{"omogeneizzazione"}$$

Per Rouché-Capelli, perché sto supponendo $Z \neq \emptyset$

$$rk(-b|A) = rk(A|b) = rk A$$

$\Rightarrow$ $\bar{Z}$ ha dim. proiettiva k.

È chiaro da quanto visto che la parte affine di $\bar{Z}$ è proprio Z — segue che $\dim \bar{Z}' = k$

UNICITÀ: $\bar{Z}'$ un altro ssp. proiettivo la cui parte affine è Z, se per assurdo $\bar{Z} \neq \bar{Z}'$ $\Rightarrow$ $\bar{Z} \cap \bar{Z}'$ ssp. proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ di dim. $< k$.

La parte affine dell'intersezione è $j_0^{-1}(U_0 \cap (\bar{Z} \cap \bar{Z}')) =$

$$= j_0^{-1}(U_0 \cap \bar{Z}) \cap j_0^{-1}(U_0 \cap \bar{Z}') = Z \cap Z = \underset{\text{dim } k}{Z} \quad \lightning$$

$\square$

Def. $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ ssp. affine, $\bar{Z} \cap H_0$ si chiamano punti all'∞ di Z

Dalla dimostrazione precedente si vede che la chiusura proiettiva dell'iperpiano affine di eq. $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = b$ è data dall'eq.

$$-b x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \quad \text{"}y_i = \frac{x_i}{x_0}\text{"}$$

si ottiene "omogeneizzando" l'eq. affine

<u>Esempio</u> in $\mathbb{K}^2$, la retta affine di eq.

$$a y_1 + b y_2 + c = 0$$

ha chiusura proiettiva di equazione

$$c x_0 + a x_1 + b x_2 = 0$$ Il punto all'∞ di questa retta si trova imponendo $x_0 = 0$ (= intersecando con H_0)

ed è $[0, -b, a]$

↳ vett. direzione della retta.

Quindi due rette parallele in $\mathbb{K}^2$ si "intersecano all'∞"

08/10/2024

Frigerio

Affinità e proiettività

Abbiamo visto che $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \underset{\substack{\cong \mathbb{K}^n \\ \text{affine}}}{U_0} \cup \underset{\substack{\text{iperpiano} \\ \text{all'infinito} \\ \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})}}{H_0}$

TEOREMA

Sia $G \subset \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K})$ (= proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$)

$$G = \{ f \in \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K}) \text{ t.c. } f(H_0) = H_0 \} \text{ per cui } G = \{ f \in \mathbb{P}GL_{n+1}(\mathbb{K}) \mid f(U_0) = U_0 \}$$

Fissata l'identificazione $j_0 : \mathbb{K}^n \to U_0$, la mappa

$$G \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$$

$$f \longmapsto f|_{U_0} \quad \text{è un isomorfismo di gruppi}$$

DIM.

Buona definizione: $f \in G \Rightarrow f|_{U_0}$ è una affinità?

$f = [\varphi]$, $\varphi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ lineare invertibile.

Allora $\varphi = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & A \end{array}\right)$ $\quad a \in \mathbb{K}$, A matrice $n \times n$

$f(H_0) = H_0 \iff \varphi$ preserva l'iperpiano vettoriale $\{x_0 = 0\} \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline v \end{array}\right) = \begin{pmatrix} b \cdot v \\ A \cdot v \end{pmatrix} \quad \text{che è della forma } \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$$

SSE $b \cdot v = 0$. Perciò, voglio $b \cdot v = 0 \ \forall v \in \mathbb{K}^n \iff b = 0$

Dunque $f(H_0) = H_0 \iff \varphi = \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline c & A \end{array}\right)$ dato che è invertibile

$a \neq 0$ e $\det A \neq 0$, cioè $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Posso assumere

$$\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline c & A \end{array}\right)$$

questa scelta mi da un rappresentante canonico di f in $GL_{n+1}(\mathbb{K})$

Come agisce f su $U_0 \cong \mathbb{K}^n$?

$$j_0^{-1}(f(j_0(v))) = j_0^{-1}(f([1, v])) = j_0^{-1}([\varphi(1, v)]) = j_0^{-1}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}\right]\right) =$$

$$= j_0^{-1}\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ Av + c \end{matrix}\right]\right) = Av + c \qquad A \in GL_n(\mathbb{K}),\ c \in \mathbb{K}^n$$

$\Rightarrow f|_{U_0}$ è una affinità di $\mathbb{K}^n \cong U_0$ tramite j_0

φ è chiaramente un omomorfismo, se $f(U_0) = U_0$ e $g(U_0) = U_0$,

allora $f \circ g|_{U_0} = f|_{U_0} \circ g|_{U_0}$

<u>Surgettività</u>: data l'affinità $v \overset{\alpha}{\longmapsto} A \cdot v + c$ posto $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & A \end{pmatrix}$ e $f = [\varphi]$ si ha che $f \in G$ e $f|_{U_0} = \varphi$

<u>Iniettività</u>: se $f \in G$ e $f|_{U_0} = Id$ mostro che il Ker è banale, posso farlo perché ho già osservato che ψ è omo

$f = [\varphi]$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & A \end{pmatrix}$ $f|_{U_0}(v) = Av + c$. $f|_{U_0} = id \iff A = id, c = 0$

$\iff \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_0 \end{pmatrix} = Id \Rightarrow f = Id$ □

DUALITÀ

V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $V^* = \{\varphi : V \to \mathbb{K}, \varphi \text{ lineare}\}$

$\dim V < +\infty \Rightarrow V^* \cong V$ (non canonicamente)

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V \Rightarrow$ esiste la base duale $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^* | $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ $\forall i, j$

Si pone $\mathbb{P}(V)^* = \mathbb{P}(V^*)$
↳ spazio proiettivo duale di $\mathbb{P}(V)$

$\mathbb{P}(V)^*$ è isomorfo a $\mathbb{P}(V)$ (non canonicamente)

C'è una bigezione

$$\psi : \mathbb{P}(V)^* \longrightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}$$
$$\psi([\varphi]) = \mathbb{P}(\operatorname{Ker}\varphi)$$

<u>DIM</u>. ψ ben definita. Se $\varphi \in V^* \setminus \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi$ è davvero un iperpiano di V e $\mathbb{P}(\operatorname{Ker}\varphi)$ è un iperpiano di $\mathbb{P}(V)$

Inoltre, se $[\varphi] = [\varphi']$, $\varphi = \lambda\varphi'$, $\lambda \neq 0$

$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi' \Rightarrow \psi$ ben definita (es. di algebra lineare)

ψ iniettiva $\mathbb{P}(\operatorname{Ker}\varphi) = \mathbb{P}(\operatorname{Ker}\varphi') \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi' \Rightarrow \varphi = \lambda\varphi'$

ψ surgettiva perché ogni iperpiano di V è il Ker di qualche funzionale. □

15/10/2024

$V = \mathbb{K}^{n+1}$, $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ la base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$ induce la base duale canonica di $(\mathbb{K}^{n+1})^*$, $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ t.c. $\varphi_i(e_s) = \delta_{is}$ ($e_0, \dots, e_n$ base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$)

$\varphi = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$

Dato $\varphi \in (\mathbb{K}^{n+1})^*$, $\varphi = \varphi(x_0, \dots, x_n) = a_0x_0 + \dots + a_nx_n$

$a_i \to$ coordinate di φ rispetto alla base canonica duale, per cui in coord. la bigezione della scorsa volta diventa

$$\underset{[\varphi]}{\mathbb{P}(V)^*} \longleftrightarrow \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}\ \ \text{Ker}\,\varphi$$
$$[a_0 \cdots a_n] \longleftrightarrow \{a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0\}$$

Vogliamo generalizzare questa costruzione a sottospazi di dimensione generica. Sia $\dim \mathbb{P}(V) = n$. Ricordiamo che, se $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio di dimensione K, allora $S = \mathbb{P}(W)$, con $W \subseteq V$ è un ssp. di dimensione $K+1$ univocamente determinato da S.

Ricordo che:

$\text{Ann}(W) = \{\varphi \in V^* \mid \varphi|_W = 0\}$. Poniamo $\delta_K(S) = \mathbb{P}(\text{Ann}\,W)$ $\quad S = \mathbb{P}(W)$

mappa di dualità

$\dim \text{Ann}(W) = \dim V - \dim W = n+1-(K+1) = n-K$

per cui $\dim \delta_K(S) = \dim \mathbb{P}(\text{Ann}W) = n-K-1$

Abbiamo così costruito $\delta_K : \left\{\begin{array}{c}\text{ssp. proiettivi di}\\ \mathbb{P}(V) \text{ di dim } K\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\text{ssp. proiettivi di}\\ \mathbb{P}(V)^* \text{ di dim. } n-K-1\end{array}\right\}$

$$S = \mathbb{P}(W) \longmapsto \mathbb{P}(\text{Ann}W)$$

Sugli iperpiani, cioè per $K = n-1$, δ_{n-1} è l'inversa della mappa
$\hookrightarrow n-K-1 = n-(n-1)-1 = 0 \to$ punti di $\mathbb{P}(V)^*$
$\mathbb{P}(V)^* \to \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\}$ vista la scorsa volta

TEO $\forall K = 0, \dots, n$, δ_K è una bigezione

Dim. Discende dal fatto di algebra lineare che $W \mapsto \text{Ann}(W)$ è una bigezione tra i ssp. di V di dim $K+1$ e i ssp. di V^* di dim $(n+1)-(K+1)$

(ESERCIZIO: si può fare "concretamente" o osservando che, tramite l'identificazione canonica tra V e V^{**}, $\text{Ann}(\text{Ann}(W)) = W$)

in dimensione finita

$$V \to V^{**}$$
$$v \mapsto \{\varphi \mapsto \varphi(v)\}$$

Indichiamo con $\delta : \{\text{ssp. di } \mathbb{P}(V)\} \to \{\text{ssp. di } \mathbb{P}(V)^*\}$ la mappa di dualità t.c. $\delta(S) = \delta_K(S)$ se $\dim S = K$

Teorema S_1, S_2 ssp. di $\mathbb{P}(V)$, allora:

1) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \delta(S_2) \subseteq \delta(S_1)$

2) $\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$

3) $\delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$

Dim. $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$ $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$

$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow Ann(W_2) \subseteq Ann(W_1)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Ann W) \subseteq \mathbb{P}(Ann W)$ cioè $\delta(S) \subseteq \delta(S)$

2) e 3) dipendono dal fatto che

$Ann(W_1 \cap W_2) = Ann W_1 + Ann W_2$

$Ann(W_1 + W_2) = Ann W_1 \cap Ann W_2$

Per le applicazioni geometriche, poiché $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(V)^*$ possiamo pensarli come a due modelli dello spazio proiettivo di dimensione n.

Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$ abbiamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{K})^*$ con iso canonico dato dalla base canonica, per cui la dualità è "interna".

Ci interesseranno solo le proprietà 1), 2), 3) del teo e il fatto che la dualità scambia ssp. di dim K con ssp. di dim. $n-K-1$

Teorema - PRINCIPIO DI DUALITÀ

P proposizione che riguarda intersezioni, "somme" e contenimenti di sottospazi di uno spazio proiettivo di dim. n. Sia P^* la PROPOSIZIONE DUALE ottenuta da P con le seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} \subseteq &\rightarrow \supseteq \\ \supseteq &\rightarrow \subseteq \\ \circ \cap \circ &\rightarrow L(\circ, \circ) \\ L(\circ, \circ) &\rightarrow \circ \cap \circ \\ \dim = K &\rightarrow \dim = n-K-1 \end{aligned}$$

Allora P è vera $\Leftrightarrow$ P^* è vera

($\Rightarrow$)
Dim. Basta applicare δ a tutti gli oggetti di $\mathcal{P}$

($\Leftarrow$) $(\mathcal{P}^*)^* = \mathcal{P}$

Esempi

1) $\mathcal{P}$ = "In un piano proiettivo due rette distinte si intersecano esattamente in un punto"

$\mathcal{P}$ = "$\dim \mathbb{P}(V) = 2$ (ambiente) ℓ_1, ℓ_2 ssp. di dim. 1 | $\ell_1 \neq \ell_2$, allora $\exists! \, P \in \mathbb{P}(V) \mid P = \ell_1 \cap \ell_2$"

Dualizzando ottengo $\mathcal{P}^*$

$\dim \ell_1 = 1 \Rightarrow \dim \delta(\ell_1) = 0$ dunque nel piano i duali delle rette sono punti

$\ell_1 \neq \ell_2 \Leftrightarrow \delta(\ell_1) \neq \delta(\ell_2)$

il duale $\delta(P)$ di un punto ha dim. $2-0-1 = 1$ ed è una retta.

$\mathcal{P}^*$ = "In un piano proiettivo (sarebbe $\mathbb{P}(V)^*$), dati due punti Q_1 e Q_2 distinti, esiste un'unica retta $s \mid s = L(Q_1, Q_2)$"

2) "In uno sp. proiettivo 3-dimensionale, siano ℓ_1 e ℓ_2 due rette e Q piano tali che $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ e $\ell_1 \not\subseteq Q$, $\ell_2 \not\subseteq Q$

Allora $\exists!$ retta $s \mid s \subseteq Q$ e $s \cap \ell_1 \neq \emptyset$ e $s \cap \ell_2 \neq \emptyset$" = $\mathcal{P}$

Dimostriamo che $\mathcal{P}$ è vera.

$\ell_1 \cap Q \neq \emptyset$ (corollario di Grassmann)
$\ell_2 \cap Q \neq \emptyset$

Se fosse $\dim \ell_1 \cap Q = 1 \Rightarrow \ell_1 \cap Q = \ell_1 \subseteq Q$ ↯

$\ell_1 \cap Q = \{A_1\}$ $\ell_2 \cap Q = \{A_2\}$ $A_1 \neq A_2$

Per costruzione $s = L(A_1, A_2)$ verifica le condizioni ed è l'unica perché qualsiasi retta che giace su Q e interseca ℓ_1 deve contenere A_1 (analogamente deve contenere A_2). $\Rightarrow \mathcal{P}$ vera.

Dualizziamo $\mathcal{P}$. $n=3 \Rightarrow$ il duale di una retta è una retta.

mentre il duale di un piano ha dim $3-2-1=0 \to$ punto.

$\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset \Rightarrow \delta(\ell_1 \cap \ell_2) = \delta(\emptyset) \Rightarrow L(\delta(\ell_1), \delta(\ell_2)) = \mathbb{P}^3$ sp. proiett. qualsiasi di dim. 3

"Date due rette $\ell_1, \ell_2 \mid \ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$" $\Rightarrow$ "Date due rette ℓ_1^*, ℓ_2^* con $L(\ell_1^*, \ell_2^*) = \mathbb{P}^3$"

equivalente a richiedere $\ell_1^* \cap \ell_2^* = \emptyset$

Il piano Q si dualizza in un punto q e $\ell_1 \not\subseteq Q \Rightarrow \ell_1^* \not\supseteq \{q\}$
$\ell_2 \not\subseteq Q \Rightarrow \ell_2^* \not\supseteq \{q\}$

IPOTESI

P^*: "Siano date due rette ℓ_1^* e ℓ_2^* e un punto q in $\mathbb{P}^3$ t.c.

$\ell_1^* \cap \ell_2^* = \emptyset$ e $q \notin \ell_1^* \cup \ell_2^*$"

$s \cap \ell_1 \neq \emptyset \Rightarrow L(s^*, \ell_1^*) \neq \delta(\emptyset)$
$L(s^*, \ell_1^*) \neq \mathbb{P}^3$ cioè $s^* \cap \ell_1^* \neq \emptyset$

$s \subseteq Q \Rightarrow s^* \supseteq \{q\}$ $\quad q \in s^*$

TESI $\to$ "$\exists!$ retta $s^* \mid s^* \cap \ell_1^* \neq \emptyset$, $s^* \cap \ell_2^* \neq \emptyset$ e $q \in s^*$"

SISTEMI LINEARI E FASCI

Prop $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ (ssp.). Allora se identifichiamo gli iperpiani di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V)^*$ con δ_{n-1}, allora $\delta(S) = \{H \subseteq \mathbb{P}(V) \text{ iperpiano}, H \supseteq S\} \subseteq \mathbb{P}(V)^*$

<u>Dim.</u> Poiché ogni punto di $\mathbb{P}(V)^*$ è il duale di un iperpiano

$p \in \delta(S) \iff p = \delta(H)$ e $\{p\} \subseteq \delta(S)$

$\iff p = \delta(H)$ e $\delta(H) \subseteq \delta(S)$

$\iff p = \delta(H)$ e $S \subseteq H$ $\square$

Perciò, ha senso chiamare $\delta(S)$ il "sistema lineare di iperpiani di centro S"

è "l'annullatore" di ...

Poiché ogni ssp. proiettivo di $\mathbb{P}(V)^*$ è il duale di un qualche ssp. proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, ne segue che <u>ogni ssp. proiettivo di $\mathbb{P}(V)^*$ è un sistema lineare di iperpiani di centro S per qualche S</u>, cioè è l'insieme degli iperpiani che contengono un certo S.

Per dualità, se il sistema lineare ha dim K, allora il suo centro S ha dim $n-K-1$. In particolare, un sist. lineare si dice **FASCIO** se ha dim 1, il che equivale ad avere un centro di codimensione 2 in $\mathbb{P}(V)$, ad esempio:

- il fascio delle rette passanti per un punto del piano;
- il fascio dei piani che contengono una retta dello spazio.

Invece, l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}^3$ che passano per un punto è un sistema lineare di dimensione $3-0-1=2$.

17/10/2024

FASCI DI RETTE IN $\mathbb{P}^2$

Ricordiamo che un fascio di iperpiani è un sistema lineare di iperpiani di dim. 1, cioè un ssp. di $\mathbb{P}(V)^*$ ($=\{$iperpiani di $\mathbb{P}(V)\}$) di dim. 1. Se dim $\mathbb{P}(V)=2$, gli iperpiani sono rette.

Abbiamo visto prima che ogni sistema lineare ha un CENTRO, dato dall'intersezione di tutti gli iperpiani del sistema lineare; se dim $\mathbb{P}(V)=n$ $\wedge$ il sist. lineare ha dim K, allora il centro del sistema ha dimensione $n-K-1$

dimensione di $\delta(S)$

$n=2$, $K=1$ (fascio di rette) il centro ha dimensione 0, cioè è un punto.

$\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0$, $\mathcal{F}$ fascio di rette di centro P, allora:

retta all'infinito

carta affine

centro del fascio

① $P \in U_0 \Rightarrow$ ogni retta $r \in \mathcal{F}$, passando per P, interseca U_0, per cui $r \cap U_0$ è una retta affine e $\mathcal{F}' = \{r \cap U_0,\ r \in \mathcal{F}\}$ è l'insieme delle rette affini di $U_0 \cong \mathbb{K}^2$ passanti per P. ("Fascio proprio")

② $P \notin U_0 \Rightarrow P \in H_0$

$\mathcal{F} = \{H_0\} \cup \{r \text{ retta di } \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \text{ passante per } P,\ r \neq H_0\}$

retta all'∞ (non ha parte affine)

mentre l'insieme $\{r \cap U_0,\ r \text{ retta di } \mathbb{P}^2(\mathbb{K}),\ r \neq H_0,\ P \in r\}$ è un insieme di rette // ("Fascio improprio") punto generico in H_0

Esplicitamente, se $P = [0\ a\ b]$, una retta $\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$ *

contiene $P \iff \beta a + \gamma b = 0 \iff [\beta\ \gamma] = [b\ {-a}]$ oppure $\beta = \gamma = 0$

sto riscalando l'equazione *

$\iff$ è della forma $\alpha' x_0 + b x_1 - a x_2 = 0$ o $x_0 = 0$

retta all'∞

retta che come parte affine ha
$\alpha + b x_1 - a x_2 = 0$

Al variare di α in $\mathbb{K}$, le rette $\{\alpha + b x_1 - a x_2 = 0\}$ sono come previsto un fascio di rette parallele in $\mathbb{K}^2$.

PROIETTIVITÀ DUALE

$f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ proiettività. Allora $f = [\varphi]$, $\varphi : V \to V$ iso lineare.

Allora φ induce una mappa duale $\varphi^* : V^* \to V^* \mid \forall \alpha \in V^*$

$\varphi^*(\alpha) = \alpha \circ \varphi$ e φ^* è a sua volta un isomorfismo (poiché lo è φ), poniamo $f^* : \mathbb{P}(V)^* \to \mathbb{P}(V)^*$, $f^* = [\varphi^*]$.

indotta dalla mappa duale o mappa trasposta di

f^* si chiama **PROIETTIVITÀ DUALE** di f. φ, cioè φ^*

$\mathbb{P}(V)^* = \{$iperpiani di $\mathbb{P}(V)\}$, per cui

$f^* : \{$iperpiani di $\mathbb{P}(V)\} \to \{$iperpiani di $\mathbb{P}(V)\}$

Ma se $H \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un iperpiano, anche $f(H) \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un iperpiano, per cui f induce "banalmente"

$f_{ip} : \{$iperpiani di $\mathbb{P}(V)\} \to \{$iperpiani di $\mathbb{P}(V)\}$

Proposizione: $f^* = f_{ip}^{-1}$ (ESERCIZIO 11)

DIM. $H \subseteq \mathbb{P}(V)$ iperpiano. $H = \mathbb{P}(W)$, $W \subseteq V$ iperpiano vettoriale.

Allora, tramite l'identificazione $\mathbb{P}(V)^* = \{$iperpiani di $\mathbb{P}(V)\}$

$\mathbb{P}(W)$ "=" $[\alpha]$ $\quad \ker\alpha = W$, $\alpha \in V^*$

Sia $f = [\varphi]$. Allora

$f^*(H) = f^*([\alpha]) = [\alpha \circ \varphi] = \mathbb{P}(\ker(\alpha \circ \varphi))$

$\ker(\alpha \circ \varphi) = \varphi^{-1}(\ker\alpha)$: $v \in \ker(\alpha \circ \varphi) \iff \alpha(\varphi(v)) = 0 \iff \varphi(v) \in \ker\alpha$

$\iff \varphi^{-1}(\ker\alpha) \ni v$

Dunque $f^*(H) = \mathbb{P}(\ker(\alpha \circ \varphi)) = \mathbb{P}(\varphi^{-1}(\ker\alpha)) = f^{-1}(\mathbb{P}(\ker\alpha)) =$

$= f^{-1}(H)$ $\square$

Concretamente, se $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e $\mathbb{P}(V)^* \underset{\uparrow}{\overset{\sim}{=}} \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$\boxed{\text{isomorfismo lineare}}$ isomorfismo associato alla base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$

Sappiamo che, se $\varphi : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ è la moltiplicazione per la matrice A, allora $\varphi^* : \underset{(\mathbb{K}^{n+1})^*}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{K}^{n+1}}} \to \underset{(\mathbb{K}^{n+1})^*}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{K}^{n+1}}}$

è rappresentato da ${}^tA$.

Esercizio 6

Sia $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la proiettività che porta il riferimento proiettivo standard in $[1,-1,-1]$, $[1\ 3\ 1]$, $[1,1,-1]$, $[1\ 1\ 1]$
Si determino le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ f-invarianti

Cerchiamo una base normalizzata associata ai 4 punti dati nel testo, cioè $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema ottengo $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\alpha = 1$, quindi la base cercata è $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ e una matrice che rappresenta f rispetto alle coordinate standard è

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} = A$$

le rette f-invarianti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ corrispondono ai piani A-invarianti di $\mathbb{R}^3$. Ma le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono iperpiani

$f(r) = r \iff \overset{f^{-1}=f^*}{f^{-1}(r) = r} \iff f^*(\overset{\text{la vedo come punto del duale}}{r}) = r \implies$ posso studiare i "punti" f^*- invarianti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})^*$, cioè i punti fissi di $f^* : \mathbb{P}^2(\mathbb{R})^* \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})^*$

f^* è rappresentata da ${}^tA$, per cui devo trovare gli autovettori di ${}^tA$.

Studiando il pol. caratteristico trovo un autospazio 1-dimensionale relativo a 1 e un autospazio 2-dimensionale relativo all'autovalore 2.

Autosp. 1 dimensionale $\Rightarrow$ da 1 punto fisso in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})^*$
cioè una retta invariante r

Autosp. 2 dimensionale $\Rightarrow$ retta di punti fissi in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})^*$
cioè un fascio di rette invarianti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

(retta in $\mathbb{P}(V)^*$ = fascio di iperpiani).

Perciò le rette f-invarianti sono date da tutte le rette passanti per un certo $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (che danno un fascio) e un'altra retta non passante per P. $\square$

BIRAPPORTO

Sia A^1 una retta affine. Sia P_1, P_2 un riferimento affine di A^1, (n+1)upla di punti
cioè $P_1 \neq P_2$. A tale sistema possiamo associare un'identificazione $\psi : A^1 \to \mathbb{K}$ tale che $\psi(P_1) = 0$ $\psi(P_2) = 1$ (isomorfismo affine)

Dato $P_3 \in A^1$ chiamo **rapporto semplice** di P_1, P_2, P_3 il numero

$$[P_1 \; P_2 \; P_3] = \psi(P_3) \in \mathbb{K}$$

determinato dalla scrittura di P_3 come combinazione affine di P_1 e P_2

Dunque $[P_1 \; P_2 \; P_3] \in \mathbb{K}$ è definito perché $P_1 \neq P_2$

- $P_3 = P_1 \Rightarrow [P_1 \; P_2 \; P_3] = 0$
- $P_3 = P_2 \Rightarrow [P_1 \; P_2 \; P_3] = 1$

e la mappa

$$A_1 \ni P_3 \longrightarrow [P_1 \; P_2 \; P_3] \in \mathbb{K}$$

è una bigezione, in quanto è semplicemente uguale a ψ.

__Fatto:__ $\alpha : A \to B$ iso affine tra rette affini, allora

$$[\alpha(P_1) \; \alpha(P_2) \; \alpha(P_3)] = [P_1 \; P_2 \; P_3] \quad \forall P_1, P_2, P_3 \in A, \; P_1 \neq P_2$$

Cioè: le affinità preservano il rapporto semplice

__DIM__ $\psi : B \to \mathbb{K}$ è l'unica affinità che manda $\alpha(P_1)$ in 0 e $\alpha(P_2)$ in 1, allora $\psi \circ \alpha : A \to \mathbb{K}$ è l'unica affinità che manda P_1 in 0 e P_2 in 1.
NB! Manda un riferimento affine in un riferimento affine

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\psi\circ\alpha"] & \\ B \arrow[r, "\psi"'] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Dunque $[P_1 \; P_2 \; P_3] \overset{def.}{=} (\psi \circ \alpha)(P_3)$

$[\alpha(P_1) \; \alpha(P_2) \; \alpha(P_3)] \overset{def.}{=} \psi(\alpha(P_3))$ $\square$

TEO Siano $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{K}$, $z_1 \neq z_2$. Allora

$$[z_1\ z_2\ z_3] = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\left[z_3 = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \quad \varphi(\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2) = = 1-\lambda = \frac{(z_2 - z_1)(1-\lambda)}{(z_2 - z_1)} = \frac{\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 - z_1}{(z_2 - z_1)} = = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right]$$

DIM. Si potrebbe fare un conto diretto, ma procediamo così:

il rapporto semplice è invariante per affinità.

Vediamo che lo è anche $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

$\psi(z) = ez + b$ affinità di $\mathbb{K}$...

$$\frac{\psi(z_3) - \psi(z_1)}{\psi(z_2) - \psi(z_1)} = \dots = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

(perché in questo caso ψ sarebbe l'identità)

Ora basta vedere che $[z_1, z_2, z_3] = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

$z_1 = 0 \quad z_2 = 1 \Rightarrow [z_1\ z_2\ z_3] = z_3$ (per def.) e

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_3 - 0}{1 - 0} = z_3$$

$\square$

Def. BIRAPPORTO

$P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = 1$ (cioè $\mathbb{P}(V)$ retta) e siano P_1, P_2, P_3 a due a due distinti (in modo da formare un riferimento proiettivo). Siano $[\lambda_4\ \mu_4]$ le coordinate omogenee di P_4 rispetto al riferimento P_1, P_2, P_3. Allora

$$\beta(P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = \frac{\mu_4}{\lambda_4} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

dove intendiamo $\frac{\mu}{0} = \infty$ per $\mu \neq 0$ (μ e λ tanto non possono essere entrambi zero)

È ben definito perché $[\lambda_4\ \mu_4] = [k\lambda_4\ k\mu_4] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{k\mu_4}{k\lambda_4} = \frac{\mu_4}{\lambda_4}$$

18/10/2024

BIRAPPORTO

$P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$, $\dim \mathbb{P}(V) = 1$, P_1, P_2, P_3 distinti

Allora se $[\lambda, \mu]$ è il sistema di coordinate associato a P_1, P_2, P_3

($P_1 = [1\ 0]$, $P_2 = [0, 1]$, $P_3 = [1\ 1]$)

$$\beta(P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = \frac{\mu_4}{\lambda_4} \quad \text{dove } P_4 = [\lambda_4, \mu_4]$$

Fatto: $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}$
$P_4 \mapsto \beta(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$ è una biezione.

Segue dal fatto che i punti di $\mathbb{P}(V)$ sono descritti dalle loro coordinate (la mappa che associa a P le sue coordinate $[\lambda, \mu]$ è una biez. tra $\mathbb{P}(V)$ a $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$)

ho che $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}$
$[\lambda, \mu] \mapsto \mu/\lambda$ è una biezione.

su U_0 è l'inversa della carta affine j_0 e
$[0\ 1] \to \{\infty\}$

iperpiano all'∞ che è un punto

TEOREMA

$P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in \mathbb{P}(W)$

RIFERIMENTO PROIETTIVO

$\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = 1$, P_1, P_2, P_3 distinti, Q_1, Q_2, Q_3 distinti

Allora $\exists$ trasf. proiettiva $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ t.c. $f(P_i) = Q_i$ $\forall i = 1, \dots, 4$

$$\Updownarrow$$

$$\beta(P_1\ P_2\ P_3\ P_4) = \beta(Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4)$$

In particolare, il birapporto è invariante per trasf. proiettive

DIM.

$\exists!\ f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W) \mid f(P_i) = Q_i$ $\forall i = 1, 2, 3$ (perché sono riferimenti proiettivi)
↳ trasf. proiettiva

Nelle coordinate indotte da tali riferimenti, tale f è l'identità, per cui $f(P_4) = Q_4 \iff P_4$ e Q_4 hanno le stesse coordinate (rispetto a P_1, P_2, P_3 e Q_1, Q_2, Q_3 rispettivamente) $\iff \beta(P_1\ P_2\ P_3\ P_4) =$
$= \beta(Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4)$ (per def. di birapporto) $\square$

TEOREMA

Siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(V)$ con P_1, P_2, P_3 a due a due distinti, sia fissato un qualsiasi riferimento su $\mathbb{P}(V)$ (e quindi un sist. di coordinate omogenee) e sia

$P_i = [\lambda_i, \mu_i]$ $\forall i = 1,2,3,4$, allora

l'obiettivo è determinare il birapporto quando i punti considerati NON sono quelli che inducono le coordinate omogenee.

$$\boxed{\beta(P_1, P_2\, P_3\, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}}$$

formula ben definita rispetto a cambi della forma $[\lambda_i\ \mu_i] = [K\lambda_i\ K\mu_i]$

DIM. Come per il rapporto semplice basta verificare che

① le due quantità a sx e a dx dell'uguale sono uguali per una scelta specifica di P_1, P_2, P_3 (prenderemo $P_1 = [1\ 0]$ $P_2 = [0, 1]$ $P_3 = [1\ 1]$)

② le due quantità sono invarianti per trasf. proiettive

Dimostriamo ① Per def. $\beta(P_1\, P_2\, P_3\, P_4) = \frac{\mu_4}{\lambda_4}$, visto che P_1, P_2, P_3 è il rif. proiettivo associato alle coord. omogenee.

Inoltre,
$$\frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_4 \\ 0 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \lambda_4 \\ 1 & \mu_4 \end{vmatrix}} = \frac{\mu_4(-1)}{1 \cdot (-\lambda_4)} = \mu_4/\lambda_4$$

NB! $\begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{vmatrix} = 0 \iff P_i = P_j$ per cui è impossibile avere $\frac{0}{0}$ si annulla al massimo uno dei determinanti perché P_1, P_2, P_3 sono distinti.

② β invariante per trasformazioni proiettive.

Una trasf. proiettiva, in coordinate, è rappresentata da una matrice 2×2 A invertibile, per cui le coordinate dei trasformati di P_1, P_2, P_3, P_4 sono $A\binom{\lambda_1}{\mu_1}, A\binom{\lambda_2}{\mu_2}, A\binom{\lambda_3}{\mu_3}, A\binom{\lambda_4}{\mu_4}$.

Allora la tesi segue dal fatto che

$$\frac{\left| A\binom{\lambda_1}{\mu_1}\ \ A\binom{\lambda_4}{\mu_4} \right| \cdot \left| A\binom{\lambda_3}{\mu_3}\ \ A\binom{\lambda_2}{\mu_2} \right|}{\left| A\binom{\lambda_1}{\mu_1}\ \ A\binom{\lambda_3}{\mu_3} \right| \cdot \left| A\binom{\lambda_2}{\mu_2}\ \ A\binom{\lambda_4}{\mu_4} \right|} = \frac{\left| A\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| A\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \right|}{\left| A\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{pmatrix} \right| \left| A\begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{pmatrix} \right|}$$

e ora si conclude facilmente usando Binet. □

Nella precedente dimostrazione, invece di "spostare i punti" si potevano "cambiare coordinate" (stessa cosa) e verificare che

① l'uguaglianza è vera per le coordinate indotte da P_1, P_2, P_3

② Ambo i membri non dipendono dalle coordinate

Se nessuno dei P_i è all'∞ ($\lambda_i \neq 0 \ \forall i = 1,2,3,4$), allora

$$z_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} \in \mathbb{K} \Rightarrow \beta(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}$$

(basta porre $\lambda_i = 1 \ \forall i$, così $z_i = \mu_i$)

$P_1, P_2, P_3, P_4 \quad Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ in rette proiettive.

abbiamo capito quando le quaterne ordinate dei P_i e dei Q_i sono PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI, cioè possono essere trasformate l'una nell'altra da un iso proiettivo $\Leftrightarrow$ stesso birapporto

Cerchiamo di capire quando gli insiemi (non ordinati)

$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ e $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ sono proiettivamente equivalenti,

cioè $\exists f \mid f(\{P_1 P_2 P_3 P_4\}) = \{Q_1 Q_2 Q_3 Q_4\}$

P_i, Q_i a due a due distinti. (per semplicità analizziamo solo questo caso)

In tal caso mi chiedo cosa accade al birapporto se permuto i P_i

Esempio: $\beta(P_1 P_2 P_3 P_4) = \dfrac{1}{\beta(P_2 P_1 P_3 P_4)}$

($[x_0\ x_1]$ coord. associate a $P_1\ P_2\ P_3 \Rightarrow [x_1\ x_0]$ " " a $P_2\ P_1\ P_3$)

$\beta = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$, al variare di $\sigma \in S_4$ allora

$\beta(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)}, P_{\sigma(4)})$ varia nell'insieme

$$\delta(\beta) = \left\{\beta, \ 1/\beta, \ 1-\beta, \ \frac{1}{1-\beta}, \ \frac{\beta}{\beta-1}, \ \frac{\beta-1}{\beta}\right\} \quad \text{(verifica noiosa)}$$

TEOREMA

il birapporto non assume questi valori se parto da 4 punti distinti

char $\mathbb{K} = 0$ (ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$j : \mathbb{K} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{K}$

$$j(\beta) = \frac{(\beta^2 - \beta + 1)^3}{\beta^2(\beta - 1)^2}$$

Allora $\beta' \in \delta(\beta) \Leftrightarrow j(\beta') = j(\beta)$

DIM. $\Rightarrow$ Calcolo diretto (basta vedere $J(\beta) = J(1/\beta)$ e $J(\beta) = J(1-\beta)$ le altre discendono da queste)

$\Leftarrow$ Fissiamo β e poniamo

Dato β cerco le x tali che $J(\beta) = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}$, cioè gli zeri di questo polinomio $q(x)$

$q(x) = (x^2-x+1)^3 - J(\beta)\, x^2(x-1)^2$

Per costruzione, $J(\beta) = J(\beta') \iff q(\beta') = 0$

Già sappiamo dall'altra implicazione che se $\beta' \in S(\beta)$, allora $q(\beta') = 0$, per cui se sono tutte distinte, poiché $\deg q(x) = 6 \Rightarrow S(\beta)$ sarebbe proprio l'insieme delle radici di $q(x)$

Rimane il caso $|S(\beta)| < 6$

1. $\beta = -1, 2, 1/2 \Rightarrow J(\beta) = 27/4$ e $q(x) = (x+1)^2(x-2)^2(x-1/2)^2$, che ha comunque $S(\beta)$ come insieme di radici
2. $\beta = -\eta$ o $\beta = -\eta^2$ $\quad \eta = e^{\frac{2\pi}{3} i}$ radice terza di -1

$\Rightarrow q(x) = (x+\eta)^3(x+\eta^2)^3$ e vale ancora

$S(\beta) = \{\text{radici di } q(x)\}$ $\square$

Corollario: $\{P_1 P_2 P_3 P_4\}$ proiett. equivalenti a $\{Q_1 Q_2 Q_3 Q_4\}$ NON ordinatamente $\iff J(\beta(P_1 P_2 P_3 P_4)) = J(\beta(Q_1 Q_2 Q_3 Q_4))$

$$\beta(P_1 P_2 P_3 P_4) = \begin{cases} -1 \\ 2 \\ 1/2 \end{cases} \quad \text{o} \quad -\eta, -\eta^2$$

in quanti modi posso mandare una retta in sé stessa permutando 4 suoi punti?

$\Rightarrow \{P_1 P_2 P_3 P_4\}$ ha "più simmetrie" del caso generico (in cui ne ha comunque 4, perché $24:6 = 4$)

ESERCIZI / ESEMPI

PROP: $\dim \mathbb{P}(V) = n$, S sottospazio proiettivo, $\dim S = n-2$

$\mathcal{L}$ = sist. lineare di iperpiani di centro S (fascio)

r retta di $\mathbb{P}(V)$, $r \cap S = \emptyset$

Sia
$$\psi : \mathcal{L} \to r$$
$$H \mapsto r \cap H$$

Allora ψ isomorfismo proiettivo ben definito ← esercizio 13

($n=2 \Rightarrow \mathbb{P}(V)$ piano, $S = \{P\}$, $\mathcal{L}$ = fascio di rette di centro P)

DIM. Conto in coordinate

P_0, P_1 punti indipendenti su r e $P_2, \dots, P_n$ punti indipendenti su S (in un ssp. proiettivo di dim k trovo al max $k+1$ punti indipendenti)

$r \cap S = \emptyset$ $\quad S = \mathbb{P}(W)$, $r = \mathbb{P}(W')$ $\quad W \cap W' = \{0\} \Rightarrow P_0, \dots, P_n$ indipendenti in $\mathbb{P}(V)$, per cui posso scegliere un sist. di coordinate $[x_0, \dots, x_n]$ associato al sistema di riferimento proiettivo $P_0, \dots, P_{n+1}$ con P_{n+1} scelto arbitrariamente.

In queste coordinate S è il ssp. proiettivo generato da

$$\underset{P_2}{[0\,0\,1, 0 \cdots 0]}, \quad \dots, \quad \underset{P_n}{[0 \cdots 0\,1]}$$

e ha eq. $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

Il generico iperpiano $a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$

contiene S SSE contiene $P_n, \dots, P_2 \iff a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$

$\Rightarrow$ <u>$a_0x_0 + a_1x_1 = 0 \to$ eq. di un generico iperpiano di $\mathcal{L}$.</u>

Invece i punti di r, generata da P_0 e P_1 sono della forma

<u>$[t_0, t_1, \dots, 0]$ al variare di $[t_0, t_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$</u>

$H = \{a_0x_0 + a_1x_1 = 0\}$ $\quad \psi(H) = H \cap r = \{[t_0\, t_1\, 0 \cdots 0] \mid \overset{a_0}{a}\, t_0 + \overset{a_1}{b}\, t_1 = 0\}$

$= \{[-b, a, 0 \cdots 0]\}$ $\quad ((a\,b) \neq (0,0)$ perché H iperpiano$)$

$\psi(H)$ è un singolo punto di $r \Rightarrow \psi : \mathcal{L} \to r$ ben def.

Per vedere che è un iso proiettivo, rispetto al riferimento proiettivo duale $P_0, \dots, P_{n+1}$

l'iperpiano $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$ ha coord $[a_0 \cdots a_n]$ e

$\mathcal{L} \subseteq \mathbb{P}(V)^*$ è proprio il ssp. 1 dimensionale (fascio) i cui punti sono di tipo $[a_0\, a_1\, 0 \cdots 0] \Rightarrow [a_0\, a_1]$ coord. omogenee indotte su $\mathcal{L}$ (posso fissare $\mathcal{L}$ in coord. omogenee | alle coord $[a_0\, a_1]$ corrisponde l'iperpiano $a_0x_0 + a_1x_1 = 0$

Su r ho coord. indotte $[t_0\, t_1]$ indotte da $[x_0, \dots, x_n]$

il punto $[t_0\, t_1\, 0 \cdots 0]$ ha coord. $[t_0\, t_1]$

$$\psi([a\, b]) = [-b\; a]$$

$\downarrow$

rappresentato da $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{induce un}}$ iso proiettivo

$\square$

Esercizio 14

$P_1, P_2 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ distinti, $\mathcal{F}_1\, \mathcal{F}_2$ fasci centrati in P_1 e P_2

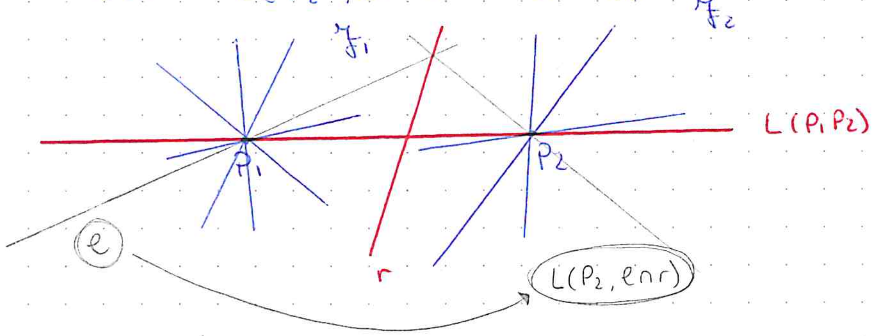
$f: \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ funzione

TFAE

1) f iso. proiettivo | $f(L(P_1 P_2)) = L(P_1, P_2)$

2) $\exists\, r$ retta $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ $P_1 \notin r$ $P_2 \notin r$

$$f(\ell) = L(P_2, \ell \cap r) \quad \forall \ell \quad \mathcal{F}_1$$



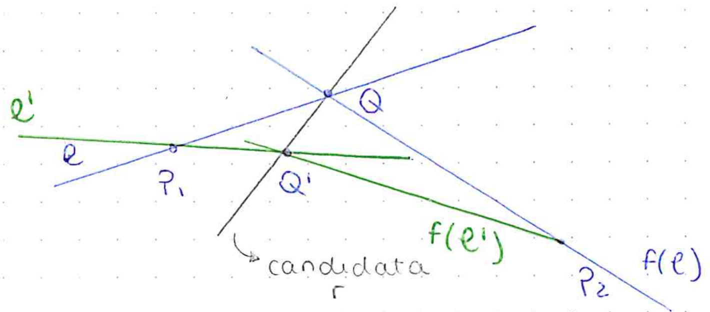
DIM. $2 \Rightarrow 1$ f iso proiettivo segue dall'esercizio precedente

$f = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ $\psi_1: \mathcal{F}_1 \to r$ $\psi_2: \mathcal{F}_2 \to r$ sono le mappe dell'esercizio precedente

Inoltre, per costruzione $f(L(P_1 P_2)) = L(P_1 P_2)$ in quanto

P_1, P_2, $L(P_1,P_2) \cap r$ sono allineati.

<u>1 ⇒ 2</u> Dato l'isomorfismo $f: \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ devo trovare r



e, e' rette distinte in $\mathcal{F}_1 \setminus L(P_1 P_2)$

$Q = e \cap f(e)$ $\quad Q' = e' \cap f(e')$

$\downarrow$

è davvero un punto

$P_1 \in e$ $\quad P_2 \in f(e)$, se fosse $e \cap f(e)$ retta, avrei $e = f(e) = L(P_1,P_2)$ ↯

Analogamente $e' \cap f(e')$ punto. Inoltre $Q \neq Q'$, altrimenti

$e \cap f(e) \cap e' \cap f(e') \neq \emptyset$ ma $e \cap e' = P_1$ $\quad f(e) \cap f(e') = P_2$ e $P_1 \neq P_2$

$r := L(Q, Q')$

Sia $g = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ $\qquad \psi_1 : \mathcal{F}_1 \to r$ $\qquad$ mappe dell'es. precedente

$\psi_2 : \mathcal{F}_2 \to r$

Devo mostrare $f = g$. Per hp. f iso. proiettivo e per l'es. precedente g iso proiettivo ⇒ Mi basta vedere che coincidono su 3 punti distinti (su 3 rette di $\mathcal{F}_1$)

Per costruzione $f(e) = g(e)$, $f(e') = g(e')$ e $f(L(P_1P_2)) = g(L(P_1,P_2))$

□

<u>Esercizio:</u>

"Dualizzando" il teo. sulle prospettività si ottiene questo enunciato (Più precisamente, applicando il Teo sulle prospettività nel contesto $\mathbb{P}(V)^*$)

CONICHE

D'ora in poi $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$

$\mathbb{K}_2[x_0, x_1, x_2] = \{$polinomi in $\mathbb{K}[x_0\, x_1\, x_2]$ omogenei di deg 2$\}$ $\cup \{0\}$ ↳ polinomio nullo

$\mathbb{K}_2[x_0\ x_1\ x_2] = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \langle x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_1x_2, x_0x_2 \rangle$

ha dimensione 6

Def. una **CONICA PROIETTIVA** è un elemento di $\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0\ x_1\ x_2])$,

cioè un polinomio omogeneo (non nullo) di deg. 2 a meno di scalari.

Le coniche formano uno sp. proiettivo di dim 5.

Def. $C=[p]$ conica il **SUPPORTO** di C, indicato con $V(C)$ è

$V(C) = \{[x_0\ x_1\ x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid p(x_0\ x_1\ x_2) = 0\}$

$V(C)$ è ben definito, perche' essendo p omogeneo,

$p(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^2 p(x_0\ x_1\ x_2) \qquad \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$

$p(\lambda x_0\ \lambda x_1\ \lambda x_2) = 0 \iff \lambda^2 p(x_0\ x_1\ x_2) = 0$

(Nel proiettivo $\{x_0 + x_1 + x_2^2 = 0\}$ NON è ben definito

contiene $[-1\ 0\ 1]$ ma non $[-2\ 0\ 2]$ ma questi nel proiettivo sono lo stesso punto !)

$[p]=[p']$ $\quad p' = \lambda p$, $\lambda \neq 0$ e p e p' hanno gli stessi zeri,

per cui $V(C)$ è ben definito.

OSS $\exists C, C'$ coniche distinte con $V(C) = V(C')$

Una conica non è determinata dal suo supporto.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$C = [x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2] \qquad C' = [x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$

$C \neq C'$ ma $V(C) = V(C') = \emptyset$

Su $\mathbb{C}$ il supporto di una conica la identifica.

Def. $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ proiettività rappresentata da $\varphi: \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$

$C = [p]$, si pone $f(C) = [p \circ \varphi^{-1}]$

Esercizio: $f(C)$ ben definita e non dipende dai rappresentanti p, φ scelti.

PROP: $V(f(C)) = f(V(C))$

DIM. $Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $Q = [v]$. Allora $Q \in V(f(C)) \iff p \circ \varphi^{-1}(v) = 0$ $\begin{pmatrix} C = [p] \\ f = [\varphi] \end{pmatrix}$

$\iff [\varphi^{-1}(v)] \in V(C)$

$\iff f^{-1}(Q) \in V(C) \iff Q \in f(V(C))$ $\square$

Esercizio: $f, g : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

Allora $(f \circ g)(C) = f(g(C))$ $\forall$ conica C

EQUIVALENZA PROIETTIVA

24/10/2024
Frigerio

Def. Due coniche C, C' in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ si dicono PROIETTIVAMENTE EQUIVALENTI

se $\exists$ proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ | $f(C) = C'$

$\Rightarrow$ è una rel. di equivalenza

Per classificarle è utile rappresentarle tramite matrici simmetriche come nel caso affine.

$$p(x_0, x_1, x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2 =$$

$$= (x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}/2 & \frac{a_{02}}{2} \\ \frac{a_{10}}{2} & a_{11} & a_{12}/2 \\ a_{20}/2 & a_{21}/2 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

dove ho posto $a_{ij} = a_{ji}$ se $j > 1$

unica a meno di moltiplicazione per scalare $\leftarrow$ "la" matrice simmetrica che rappresenta $[p] = C$

p polinomio omogeneo, la matrice simmetrica A |

$p(x) = {}^t x A x$ è unica

$\Rightarrow C$ rappresentata da un'unica matrice A a meno di scalari non nulli

$C = [A]$

$f = [\varphi]$ $\varphi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ lineare iniettiva

$C = [p]$ $f(C) = [p \circ \varphi^{-1}]$

Voglio vedere come agisce f sulla rappresentazione matriciale di C.

Per def. un rappresentante di $f(C)$ è $p \circ \varphi^{-1} \Rightarrow f(C) = [p \circ \varphi^{-1}]$ e

$c = [A]$ e M che rappresenta φ

$p \circ \varphi^{-1}(x) = {}^t\varphi^{-1}(x) \cdot A \cdot \varphi^{-1}(x) =$

nuovo vettore $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= {}^t(M^{-1}x) A M^{-1}x = {}^tx({}^tM^{-1} A M^{-1})x$

una matrice che rappresenta $f(c)$ è ${}^tM^{-1} A M^{-1}$

Da ciò segue che se $\sim$ è la relazione di equivalenza sulle matrici simmetriche 3×3 | $A \sim A' \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, M \in Gl_3(\mathbb{K})$ t.c.

$A' = \lambda ({}^tM^{-1}) A M^{-1}$ $\quad \lambda\, {}^tMAM^{-1}$

(non serve davvero mettere i -1)

allora

Proposizione $c = [A]$, $c' = [A']$, allora C è proiettivamente equivalente a $C' \iff A \sim A'$ $\square$

(G1) Due matrici simmetriche A e A' si dicono CONGRUENTI se $\exists M \in GL(3, \mathbb{K}) \mid A' = {}^tMAM$

① $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow A \sim A' \iff A$ congruente ad A'

($\Leftarrow$) ovvio

($\Rightarrow$) $\exists M \in Gl(3, \mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}^* \mid A' = \lambda\, {}^tMAM$

$A' = {}^t(\sqrt{\lambda} M) A (\sqrt{\lambda} M) \Rightarrow A'$ congruente ad A

(in $\mathbb{C}$ ogni λ ha una radice quadrata)

② $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow A \sim A' \iff A$ congruente ad A' oppure a $-A'$

($\Leftarrow$) ovvia

($\Rightarrow$) lo stesso conto di sopra con $\sqrt{|\lambda|}$

La classificazione di coniche proiettive reali e complesse si riduce alla classificazione delle matrici simmetriche a meno di congruenze o dei prodotti scalari a meno di isometrie (Teo di Sylvester)

TEOREMA Su $\mathbb{C}$ il rango è invariante completo per congruenza $\Rightarrow \exists^{no}$ 3 classi di coniche proiettive, un insieme di rappresentanti è

① $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (rg 3) NON DEGENERE

② $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (rg 2) DEGENERE

③ $x_0^2 = 0$ (rg 1) DOPPIAMENTE DEGENERE

(scriveremo "$p(x) = 0$" al posto di $[p(x)]$)

$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + i x_1)(x_0 - i x_1)$ la conica degenere ha come supporto due rette distinte, mentre la conica doppiamente degenere ha come supporto una retta ("doppia")

TEOREMA Su $\mathbb{R}$ le coniche sono classificate dalle possibili segnature dei prodotti scalari (Sylvester), a meno del segno. Un insieme di rappresentanti è dato da

① $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ NON DEGENERE, VUOTA (a supporto vuoto)

② $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ NON DEGENERE, NON VUOTA

③ $x_0^2 + x_1^2 = 0$ DEGENERE, con supporto un punto $[0\ 0\ \alpha]$

④ $x_0^2 - x_1^2 = 0$ DEGENERE, supporto unione di due rette distinte

⑤ $x_0^2 = 0$ DOPPIAMENTE DEGERERE supporto una retta ("doppia")

Parte affine di coniche proiettive

$C = [p]$ conica proiettiva, $x_0 \nmid p \Rightarrow p$ non si decompone come x_0 per polinomio di primo grado.

Allora la PARTE AFFINE di C è la conica affine di $\mathbb{K}^2$ di eq. $f(x,y) = p(1,x,y)$ → non si abbassa il grado se $x_0 \nmid p$
↳ polinomio di deg 2, perché $x_0 \nmid p$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0$ $\qquad j_0(x\ y) = [1\ x\ y]$

$$\begin{array}{c} U_0 \\ \uparrow j_0 \\ \mathbb{K}^2 \end{array}$$

<u>Fatto</u>: $V(C) \cap U_0$ è proprio il supporto della parte affine di C

<u>DIM.</u> $(x\ y) \in$ parte affine di $C \iff f(x\ y) = 0 \iff p(1,x,y) = 0$
$\iff [1\ x\ y] \in V(C) \iff j_0(x\ y) \in V(C) \iff (x\ y) \in V(C) \cap U_0$

Esempio: se C ha equazione $x_0^2 + x_1^2 - 6x_2^2 + 4x_0x_2 - 2x_1x_2$ allora la sua parte affine ha equazione

$1 + x^2 - 6y^2 + 4y - 2xy = 0$

Se $x_0 | p$, es. $p(x_0\ x_1\ x_2) = x_0x_1 - x_0x_2$

$f(1\ x\ y) = x - y$ non è una conica affine

Anche nel caso delle coniche posso procedere nel senso opposto data una conica affine di equazione $f(x,y) = 0$, posso "omogeneizzare" f ottenendo $p(x_0\ x_1\ x_2) = x_0^2 f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$

chiamo "chiusura proiettiva" di c la conica proiettiva di eq. $p(x) = 0$

Esempio: la chiusura proiettiva della conica affine

$$1 + x - y + x^2 - 5y^2 = 0 \quad \text{è}$$

$$x_0^2 + x_0x_1 - x_0x_2 + x_1^2 - 5x_2^2 = 0$$

__Fatto:__ parte affine e chiusura proiettiva sono una la costruzione inversa dell'altra, cioè la chiusura proiettiva di una conica affine ha eq. $p(x) = 0$ $x_0 \nmid p(x)$ la cui parte affine è la conica di partenza.

Viceversa, la chiusura proiettiva della parte affine di una conica proiettiva $C = [p]$, $x_0 \nmid p$ è C stessa.

Una conica affine $c + b_1x + b_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 = f(x,y)$

è rappresentata dalla matrice simmetrica

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} c & \frac{1}{2}b_1 & \frac{1}{2}b_2 \\ \hline \frac{1}{2}b_1 & a_{11} & a_{12}/2 \\ \frac{1}{2}b_2 & a_{12}/2 & a_{22} \end{array}\right) \qquad f(x\ y) = (1\ x\ y)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$

$$f(v) = (1, v)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}$$

Ne segue che A rappresenta anche la chiusura proiettiva della carta affine $f(x,y) = 0$

Nella classificazione affine ci sono 3 coniche non degeneri

($\mathrm{rg}\, A = 3$) e non vuote: ellisse ($\det \hat{A} > 0$), parabola ($\det \hat{A} = 0$)

iperbole ($\det \hat{A} < 0$) $\to \left[\begin{array}{c|cc} -1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & -1 \end{array}\right]$ $\quad \left[\begin{array}{c|cc} -1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right]$ $\quad \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & & 1 \end{array}\right]$

La chiusura proiettiva di una qualsiasi di queste coniche, essendo rappresentata dalla stessa matrice è non degenere.

Poiché il supporto della conica affine è contenuto in quello della sua chiusura, tale chiusura è non vuota.

Per il Teo. di classificazione, la chiusura proiettiva di ellissi, parabole e iperboli sono proiettivamente equivalenti.

TEOREMA C affine non degenere. Allora

1. C ellisse $\iff V(\bar{C}) \cap H_0 = \emptyset$
2. C parabola $\iff |V(\bar{C}) \cap H_0| = 1$
3. C iperbole $\iff |V(\bar{C}) \cap H_0| = 2$

l'unica differenza è che per trovare il polinomio di C devo moltiplicare per $(1\ x\ y)$, per quello di $\bar{C}$ devo moltiplicare per $(x_0\ x_1\ x_2)$

DIM. C rappresentata da $A = \begin{pmatrix} c & b \\ {}^t b & \hat{A} \end{pmatrix}$,

$\bar{C}$ è rappresentata da A e se metto a sistema l'equazione ${}^t x A x = 0$ di $\bar{C}$ e $x_0 = 0$

ottengo $(0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} c & b \\ {}^t b & \hat{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$, cioè $(x_1 x_2)\hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

Cerco perciò le rette isotrope del prodotto scalare 2×2 rappresentato da $\hat{A}$. $\det \hat{A} > 0$

($\hat{A}$ simmetrica, $\det \hat{A} > 0 \Rightarrow 2$ autoval. dello stesso segno)

non ci sono rette isotrope.

vedi classificazione delle coniche affini

$\det \hat{A} < 0$, segnatura $(1,1) \Rightarrow$ due rette isotrope, mentre se $\det \hat{A} = 0$ ma $\mathrm{rk}\, \hat{A} = 1$ allora ho una retta isotropa (che è il radicale). $\square$

Esplicitamente: $x^2 + y^2 = 1$ ha chiusura proiettiva $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = x_0^2 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad \text{su } \mathbb{R}: \ x_1 = x_2 = 0$$

$V(\bar{C}) \cap H_0 = \emptyset$ ($[0,0,0]$ N.E.)

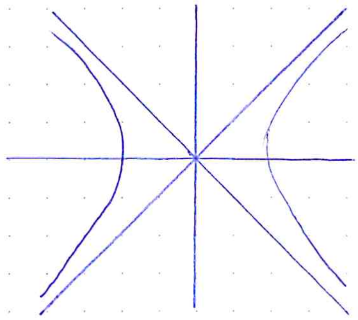
$y - x^2 = 0$ diventa $x_2 x_0 + x_1^2 = 0$,

$$\begin{cases} x_2 x_0 + x_1^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 = 0 .$$

$\Rightarrow [0\ 0\ 1]$ $\qquad |V(\bar{C}) \cap H_0| = 1$

$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = x_0^2 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow [0\ 1\ -1], [0\ 1\ 1] \Rightarrow |V(\bar{C}) \cap H_0| = 2$



25/10/2024

POSIZIONE RETTA - CONICA

r retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di eq. $f(x_0\ x_1\ x_2) = 0$.
$C = [p]$ conica.

Allora si dice che r è una COMPONENTE di C se $f | p$,

cioè $\underset{\text{deg } 2}{p(x_0\ x_1\ x_2)} = \underset{\text{deg } 1}{f(x_0\ x_1\ x_2)} \cdot \underset{\text{deg } 1}{q(x_0\ x_1\ x_2)}$

r componente di $C \Rightarrow r \subseteq V(C)$

è vero anche il viceversa

Se C ammette una retta come componente, si dice che C è RIDUCIBILE, altrimenti è IRRIDUCIBILE.

TEOREMA Sia C una conica e sia r una retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Allora, se $|V(C) \cap r| \geq 3$, allora r è una componente di $V(C)$.

Di conseguenza, se C è irriducibile, allora $|V(C) \cap r| = 0, 1, 2$ e se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora $|V(C) \cap r| \geq 1$

DIM. Siano P e Q punti di r, $P \neq Q$, $P = [v]$ $Q = [w]$

$\Rightarrow r = \{ [\lambda v + \mu w] \mid [\lambda\ \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \}$

Allora, se $C = [p]$, i punti di intersezione di $V(C)$ con r sono in corrispondenza con i $[\lambda\ \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tali che $p(\lambda v + \mu w) = 0$ $(v = (\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2),\ w = (\beta_0\ \beta_1\ \beta_2))$ cioè:

$p(\lambda\alpha_0 + \mu\beta_0,\ \lambda\alpha_1 + \lambda\beta_1,\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2) = G(\lambda, \mu) = 0$

G è un polinomio omogeneo di grado 2 (i cui coefficienti dipendono dagli α_i e da β_i e dai coeff. di p) o il polinomio nullo.

Se G non è nullo, allora $G(\lambda, \mu) = A\lambda^2 + B\lambda\mu + C\mu^2$

$G(\lambda, \mu) = 0$ ha al più due soluzioni $[\lambda, \mu]$ diverse in $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Se $A = 0$, $G(\lambda, \mu) = B\lambda\mu + C\mu^2 \to \mu = 0 \quad [1\ 0]$

$\searrow B\lambda + C\mu = 0 \quad [-C\ B]$

Se $A \neq 0$, $[1\ 0]$ non è soluzione e quindi posso avere solo soluzioni di tipo $[\lambda\ 1]$ per le quali $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$

Ma un polinomio di II grado ha al più 2 soluzioni, dunque $|V(C) \cap r| \leq 2$. Risulta anche che se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, esiste sempre almeno una soluzione $\Rightarrow |V(C) \cap r| \geq 1$

G polinomio nullo $\Rightarrow r \subseteq V(C)$ ($G \equiv 0$ implica che $p(\lambda v + \mu w) = 0 \ \forall [\lambda, \mu]$, cioè ogni punto di r giace in $V(C)$)

Vediamo che vale qualcosa di più, cioè che $f | p$ (r componente di C). Per farlo, scegliamo coordinate in cui $r = \{x_0 = 0\}$ (*) cioè $f(x_0\ x_1\ x_2) = x_0$ (vd. dopo perché si può fare)

$P = [0\ 1\ 0]$, $Q = [0\ 0\ 1]$

$\Rightarrow r = \{[0\ \lambda\ \mu] \mid [\lambda\ \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$

Se $p(x_0\ x_1\ x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{02}x_0x_2$

$G(\lambda, \mu) = p(0, \lambda, \mu) = a_{11}\lambda^2 + a_{22}\mu^2 + a_{12}\lambda\mu$ che è il polinomio nullo $\Longleftrightarrow a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0 \Longleftrightarrow p(x_0\ x_1\ x_2) = a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 =$

$= x_0(a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2) \Longleftrightarrow x_0 | p \Longleftrightarrow r$ è componente di C $\square$

Ho mostrato la controنominale:

Se r non è una componente, allora $|V(C) \cap r| < 3$

Perché ho potuto cambiare coordinate? (*)

$\hookrightarrow$ equivalente ad agire tramite una proiettività.

$q: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ proiettività.

r componente di $C \iff g(r)$ componente di $g(C)$

(in particolare, <u>essere irriducibile è invariante per proiettività</u>).

Infatti, se f è l'eq. di r e $C=[p]$, l'eq. di $g(r)$ è $f \circ \varphi^{-1}$ $(g=[\varphi])$

e quella di $g(C)$ è $p \circ \varphi^{-1}$ e basta osservare che

$f \mid p \iff f \circ \varphi^{-1} \mid p \circ \varphi^{-1}$ $(\varphi^{-1} : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ induce un omomorfismo di anelli sui polinomi)

RIDUCIBILITÀ E DEGENERAZIONE

TEOREMA ① $\mathbb{K}$ quasiasi. riducibile $\Rightarrow$ degenere

matrice singolare

② $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. riducibile $\iff$ degenere

<u>DIM</u> $C=[p]$ riducibile, p prodotto di due fattori lineari, che possiamo scrivere come $x \mapsto {}^t a \cdot x$, $x \mapsto {}^t b \cdot x$, dunque

$$\underset{\mathbb{K}}{\overset{\cap}{p(x)}} = (\underset{\mathbb{K}}{\overset{\cap}{{}^t a \cdot x}}) \cdot (\underset{\mathbb{K}}{\overset{\cap}{{}^t b \cdot x}}) = ({}^t x \cdot a) \cdot (b^t \cdot x) = {}^t x (a b^t) x$$

$\Rightarrow p$ rappresentato dalla matrice $a({}^t b)$, che però non è simmetrica.

È facile osservare che anche ${}^t(a\,{}^t b)$ rappresenta p.

basta trasporre tutto

$$\Rightarrow \frac{a \cdot {}^t b + {}^t(a \cdot {}^t b)^{= b \cdot {}^t a}}{2} = M \text{ rappresenta } p \text{ ed è simmetrica}$$

$\mathrm{rk}\, a \cdot {}^t b = 1$ (righe multiple di b e colonne multiple di a)

$\mathrm{rk}\, {}^t(a \cdot {}^t b) = 1$ $\Rightarrow \mathrm{rk}\, M \leq 2 \Rightarrow C$ degenere

② $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, mi basta vedere degenere $\Rightarrow$ riducibile ma questo è conseguenza del Teorema di classificazione: le coniche degeneri su $\mathbb{C}$ a meno di proiettività sono

$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + i x_1)(x_0 - i x_1)$ e $x_0^2 = x_0 \cdot x_0$. $\square$

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $x_0^2 + x_1^2 = 0$ è degenere ma non riducibile (il suo supporto è un punto, perciò non contiene rette).

RETTA TANGENTE

Def. C conica NON DEGENERE, $Q \in V(C)$. Una retta $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

si dice TANGENTE a C in Q se $V(C) \cap r = \{Q\}$

Per quanto già visto, ciò equivale a dire che Q corrisponde a una radice doppia del polinomio $p(\lambda v + \mu w)$, dove $C = [p]$ e $[\lambda v + \mu w]$ parametrizza r.

↳ se non è un polinomio nullo ha grado 2

In effetti la nozione corretta di tangenza tra C e r in Q è che la "molteplicità di intersezione" tra C e r in Q (molt. di $[\lambda_0, \mu_0]$ come radice di $G(\lambda, \mu)$ quando $Q = [\lambda_0 v + \mu_0 w]$) è almeno 2.

TEOREMA $C = [M]$ non degenere, $Q \in V(C)$, $Q = [v]$

Allora $\exists!$ retta tangente a C in Q, detta T_Q, che ha equazione ${}^t v M x = 0$

DIM r passante per Q. Allora $\exists\, w \in \mathbb{K}^3$ indipendente da v tale che $r = \{[\lambda v + \mu w] \mid [\lambda\ \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})\}$

Le intersezioni di $V(C)$ e r sono date dalle soluzioni di

$${}^t(\lambda v + \mu w) M (\lambda v + \mu w) = 0 \quad ⊛$$

r sarà tg. $\Leftrightarrow$ questa eq. ha come unica soluzione $[1\ 0]$ che corrisponde a $Q = [1 \cdot v + 0 \cdot w]$

$$⊛ \Leftrightarrow \lambda^2 \underbrace{{}^t v M v}_{\substack{\overset{\shortparallel}{0} \\ Q \in V(C)}} + \underbrace{\lambda\mu\, {}^t v M w + \lambda\mu\, {}^t w M v}_{M \text{ simmetrica}} + \mu^2\, {}^t w M w = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda\mu\, {}^t v M w + \mu^2\, {}^t w M w = 0 \Leftrightarrow \mu(2\lambda\, {}^t v M w + \mu\, {}^t w M w) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{mi dà } Q}}{\mu = 0} \ \vee \ 2\lambda\, {}^t v M w + \mu\, {}^t w M w = 0 \ \circledast$$

Se r è tangente, $[w] \notin V(C)$ (altrimenti $|V(C) \cap r| \geq 2$)

allora ${}^t w M w \neq 0$ e $\circledast$ è verificata SSE $\mu = -2 \dfrac{\lambda\, {}^t v M w}{{}^t w M w}$

Poiché l'unica soluzione affinché r sia tg. deve essere $[1, 0]$, ne segue necessariamente $\mu = 0 \Rightarrow {}^t v M w = 0$

Perciò r tangente $\Rightarrow {}^t v M w = 0$

Viceversa, ${}^t v M w = 0 \Rightarrow [1\ 0]$ unica soluzione e r tangente.

$Q = [v]$ $Q' = [w]$ altro punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $Q \neq Q'$

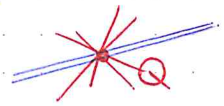
$r = L(Q, Q')$ è tg. a C in $Q \iff {}^t v M w = 0$

Ne segue che l'unica retta tangente è ${}^t v M x = 0$ □

Caso degenere

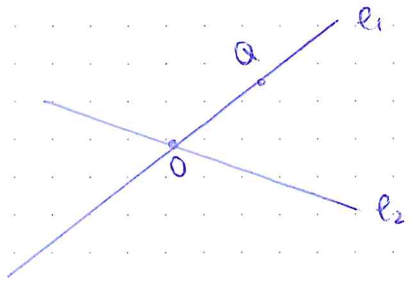
Come detto sopra, la def. corretta di tangente in Q a una conica (anche degenere) imporrebbe che $r \cap C$ abbiano in Q una intersezione "almeno doppia". Si può verificare (esercizio) che nei casi degeneri si ha

① retta doppia (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$)



ogni retta passante per $Q \in V(C)$ è tangente a C in Q

② due rette incidenti (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$)



$Q \in \ell_1 \setminus \ell_2 \Rightarrow$ l'unica tangente a C in Q è ℓ_1 (e viceversa)

Tutte le rette passanti per $O = \ell_1 \cap \ell_2$ sono tangenti a C in O

③ (Solo su $\mathbb{R}$) C degenere e $V(C) = \{Q\}$

$(x_0^2 + x_1^2 = 0) \Rightarrow$ tutte le rette passanti per Q sono tg a C in Q

Lo spazio delle coniche è $\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0\ x_1\ x_2])$

Def. Un SISTEMA LINEARE di coniche è un ssp. proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbb{K}_2[x_0\ x_1\ x_2])$. Se ha dim 1 si chiama fascio.

C_0 e C_1 coniche distinte, $C_0 = [p_0]$, $C_1 = [p_1]$, il fascio da loro generato è l'insieme delle coniche di tipo

$[\lambda p_0 + \mu p_1]$, $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$.

Esercizio: Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in posizione generale

$\Rightarrow$ l'insieme delle coniche passanti per Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 è un fascio generato dalle coniche

$$L(Q_1, Q_2) \cdot L(Q_3, Q_4) \quad e \quad L(Q_1, Q_3) \cdot L(Q_2, Q_4)$$

29/10/2024
Talpo

POLARITÀ (rispetto a una conica non degenere)

C conica non degenere in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, $M \in S_{3\times3}(\mathbb{K})$ mat. simm. associata a C

Def. $P = [v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, la RETTA POLARE DI P RISPETTO A C è la retta $\mathrm{pol}(P) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di equazione

$$^t(Mv)\,\underline{x} = 0 \qquad \underline{x} = (x_0 \; x_1 \; x_2)$$
$$^t v M \underline{x} = 0$$

se P appartiene al supporto pol(P) è esattamente la tg in P

$\mathrm{pol}(P)$ è la retta di coordinate $[Mv]$ nel duale $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$ (rispetto al rif. standard)

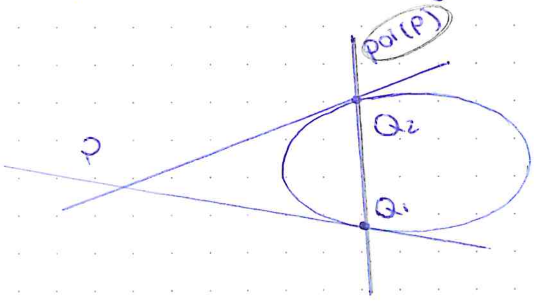
come punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$

C non degenere $\Rightarrow$ <u>M invertibile</u>, dunque <u>ciascuna retta r di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è polare di un unico punto $p_r \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ che si dice il suo POLO rispetto a C.</u> $r = \mathrm{pol}(P_r)$

Proposizione $P, Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, C conica non degenere

1. $P \in \mathrm{pol}(Q) \Rightarrow Q \in \mathrm{pol}(P)$
2. Se $P \in V(C) \Rightarrow \mathrm{pol}(P) = T_P$ — retta tangente a C in P
3. In generale,

$$\mathrm{pol}(P) \cap V(C) = \{Q \in V(C) \mid P \in t_Q\}$$



DIM. 1. $P=[v]$ $Q=[w]$ M matrice associata a C simm.

$pol(P)$ ha eq. ${}^t v M x = 0$

$pol(Q)$ ha eq. ${}^t w M x = 0$

$$P \in pol(Q) \iff {}^t w M v = 0 \underset{\text{trasponendo}}{\iff} {}^t v M w = 0 \iff Q \in pol(P)$$

2. segue direttamente dell'eq. già vista per la retta tangente a una conica non degenere in un suo punto

3. segue dai due precedenti:

$$pol(P) \cap V(C) \ni Q \iff Q \in V(C) \wedge Q \in pol(P)$$
$$\underset{1.}{\iff} Q \in V(C) \wedge P \in pol(Q)$$
$$\underset{2.}{\iff} Q \in V(C) \wedge P \in T_Q \qquad \square$$

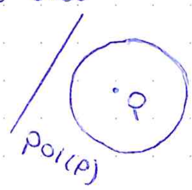
OSS se $|pol(P) \cap V(C)| = 1 \Rightarrow P \in V(C)$ C conica NON degenere!!

Infatti in tal caso seguirebbe che $pol(P) = T_Q$, dove Q è l'unico punto di $pol(P) \cap V(C)$.

Ma $T_Q = pol(Q)$ e da $pol(P) = pol(Q)$ segue che $P = Q$ (perché pol isomorfismo proiettivo) $\Rightarrow P \in V(C)$

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \wedge P \notin V(C) \Rightarrow \exists^{no}$ esattamente 2 rette tg a C e passanti per P.

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \wedge P \notin V(C) \Rightarrow$ può succedere che non ce ne sia neanche una, ad esempio



Consideriamo la funzione (per C conica non degenere)

$$\begin{aligned} V(C) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})^* \\ P &\longmapsto T_P \end{aligned}$$

L'immagine di questa mappa è il supporto di una conica in $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})^*$ che si chiama CONICA DUALE di C.

Segue dal fatto che la funzione di sopra è una restrizione

di pol: $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$ dato che pol è un isomorfismo proiettivo manda coniche in coniche

$P \mapsto pol(P)$

Def.
la conica duale è quindi la conica $\underset{C^*}{pol(C)}$, immagine di C tramite pol

$C = [p]$

$C^* = [p \circ pol^{-1}]$

Prop una mat. simm. 3×3 che corrisponde alla conica duale è M^{-1}, dove M corrisponde a C

DIM. ricordo che se $C = [F]$ $F(\underline{x}) = {}^t\underline{x} M \underline{x}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ ← pol. omogeneo di grado 2

$f: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è una proiettività, $f = [\varphi]$

$f(C)$ è la conica di eq. $[F \circ \varphi^{-1}(\underline{x})]$

Nel mio caso $f = pol: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$ è rappresentata da M perché $[v] \overset{pol}{\longmapsto} {}^t(Mv)\underline{x} \to$ equazione di una retta, i cui coeff. mi danno le coordinate in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$

$[Mv] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$

$\Rightarrow$ l'eq di $pol(C)$ è $F \circ M^{-1}\underline{x} = F(M^{-1}\underline{x}) =$

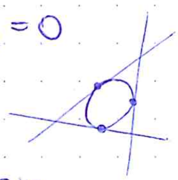
${}^t(M^{-1}\underline{x}) M M^{-1} \underline{x} = {}^t\underline{x} M^{-1} \cancel{M} \cancel{M^{-1}} \underline{x} = {}^t\underline{x} M^{-1} \underline{x}$

Quindi M^{-1} rappresenta la conica duale $pol(C)$ □

Esercizio dal compitino 2022/2023

Si determinino tutte le coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tangenti alle rette di eq.

$x_0 + x_1 + x_2 = 0 \qquad x_0 + x_1 + 2x_2 = 0 \qquad 3x_0 + 3x_1 + 4x_2 = 0$



imporre la tangenza a una retta è fastidioso.

Passando alla conica duale, chiedere che C sia tangente a ℓ corrisponde a chiedere che C^* passi per ℓ (come punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$) ℓ come punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})^*$ è nel supporto di C^* (?)

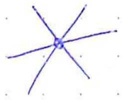
Se C è non degenere C^* è non degenere e sto chiedendo che passi per i 3 punti corrispondenti alle rette date

$[1\ 1\ 1]\ [1\ 1\ 2]\ [3\ 3\ 4]$

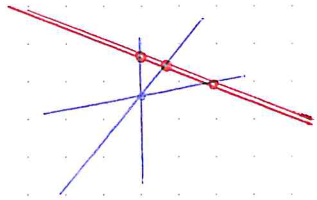
Questi 3 punti sono allineati $\Rightarrow$ non esiste una conica non degenere che passa per tutti e 3

$(3\ 3\ 4) = 2\cdot(1\ 1\ 1) + (1\ 1\ 2)$

Allora basta considerare il caso C degenere

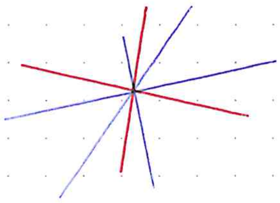
3 punti nel duale allineati $\Rightarrow$ le tre rette di partenza in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ sono incidenti 

Quali sono le coniche degeneri tangenti a tutte e 3 queste rette?



- Tutte le rette doppie vanno bene

Le coppie di rette distinte $\ell_1 \cup \ell_2$ che vanno bene sono esattamente quelle per cui $\ell_1 \cap \ell_2$ coincide con il punto di intersezione delle 3 rette date (sistemare i dettagli per esercizio)

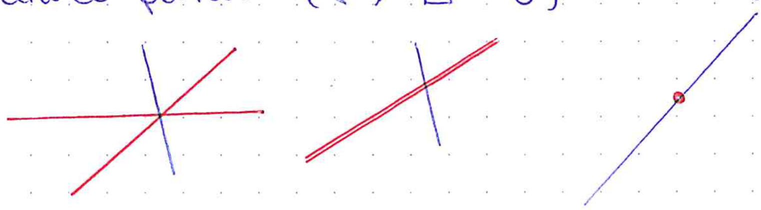


<u>OSS</u> r è tg a una conica C (anche degenere) SSE il Δ dell'eq. di 2° grado che si ottiene mettendo a sistema le due equazioni si annulla.

Infatti, se C è non degenere è chiaro da quanto visto. Se C è degenere distinguiamo due casi

- l'eq del sistema è banale (0 = 0)
  $\Delta = 0$ e c'è la tangenta perché la retta è una componente della conica
- l'eq non è banale.
  Se C è degenere, r è tangente a C $\Leftrightarrow$ $V(C) \cap r$ è un unico punto ($\Leftrightarrow \Delta = 0$)

solo su $\mathbb{R}$ conica con $V(C) = \{pt\}$



Punti complessi di una conica reale

Su $\mathbb{R}$ ci sono coniche C_1, C_2 con $V(C_1) = V(C_2) = \emptyset$

che consideriamo distinte come coniche in $\mathbb{P}^2$, ad esempio

$$[x_0^2 + x_1^2 + x_2^2] \quad e \quad [2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$$

Perché ha senso distinguerle?

Una possibile risposta è perché non hanno gli stessi "punti complessi".

Def. C conica reale, la sua complessificata $C_{\mathbb{C}}$ è la conica complessa data da $[F]$, dove vedo

$$F \in \mathbb{R}[x_0\ x_1\ x_2]_2 \subseteq \mathbb{C}[x_0\ x_1\ x_2]_2$$

Anche se $V(C) = \emptyset$ (su $\mathbb{R}$), si ha sempre che $V(C_{\mathbb{C}})$ è infinito (è vero per qualsiasi conica complessa, segue ad esempio dalla classificazione)

05/11/2024
Talpo

FATTO (caso particolare del "Nullstellensatz")

D e D' coniche complesse e $V(D) = V(D') \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \Rightarrow D = D'$

Quindi, se ad esempio $C_1 = [x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$, $C_2 = [2x_0^2 + x_1^2 + x_2^2]$ sono coniche reali, si ha $V(C_1) = V(C_2) = \emptyset$, ma

$V((C_1)_{\mathbb{C}}) \neq V((C_2)_{\mathbb{C}})$ e questo giustifica il fatto che C_1 e C_2 si ritengono distinte anche su $\mathbb{R}$

ESERCIZIO 7

$j_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con immagine $U_i = \{x_i \neq 0\}$

carte affini $(i = 0, 1, 2)$

1) Trovare due rette r, s t.c.

$$j_0^{-1}(r \cap U_0) \cap j_0^{-1}(s \cap U_0) = \emptyset \iff \text{le parti affini di } r \text{ e } s \text{ in } U_0 \text{ sono } \parallel$$

$$j_1^{-1}(r \cap U_1) \cap j_1^{-1}(s \cap U_1) = \emptyset$$

2) Esistono r, s tali che inoltre,

$j_2^{-1}(r \cap U_2) \cap j_2^{-1}(s \cap U_2) = \emptyset$

SOLUZIONE

1) $j_0^{-1}((r \cap U_0) \cap (s \cap U_0)) = j_0^{-1}((r \cap s) \cap U_0) = \emptyset \iff (r \cap s) \cap U_0 = \emptyset$

analogamente $(r \cap s) \cap U_1 = \emptyset$

In $\mathbb{P}^2$ due rette si intersecano sempre

$r \cap s = P \Rightarrow P \notin U_0 \,,\; P \notin U_1$

$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$P \in H_0 = \{x_0 = 0\} \qquad P \in H_1 = \{x_1 = 0\}$

Cioè necessariamente $P = H_0 \cap H_1 = [0\ 0\ 1]$

Ad esempio posso prendere $r: x_0 + x_1 = 0$
$s: x_0 - x_1 = 0$

Deomogeneizzando nelle carte U_0 e U_1 si vede che le parti affini non si intersecano.

2) La domanda equivale a chiedere se $\exists^{no}$ r, s t.c.

$(r \cap s) \cap U_i = \emptyset \quad \forall i = 0, 1, 2$

questo non è possibile perché $r \cap s \neq \emptyset$ e

$U_0 \cup U_1 \cup U_2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Esercizi settimanali sulle coniche

ES. 17 $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ proiettività

Allora la mappa indotta da f sullo spazio delle coniche è una proiettività

SOLUZIONE: M matrice invertibile 3×3 che rappresenta f

$C = [F] \quad F \in \mathbb{K}_2[x_0\ x_1\ x_2]$ è una conica

$$f(C) = [(F \circ M^{-1})(x)]$$

$\Rightarrow$ funzione dallo spazio delle coniche in sé

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0\ x_1\ x_2]_2) \to \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0\ x_1\ x_2]_2)$$

Facciamo vedere che la funzione

$$\mathbb{K}[x_0\ x_1\ x_2]_2 \to \mathbb{K}[x_0\ x_1\ x_2]_2 \qquad F \mapsto F \circ M^{-1}$$

è lineare invertibile (basta iniettiva)

- $F+G \mapsto F\circ M^{-1} + G\circ M^{-1}$

$$\underset{\text{valutazione}}{(F+G)}(M^{-1}\underline{x}) = F(M^{-1}\underline{x}) + G(M^{-1}\underline{x})$$

- $\lambda F \mapsto \lambda(F\circ M^{-1}) \quad \lambda\in\mathbb{R}$

$$(\lambda F)(M^{-1}x) = \lambda F(M^{-1}x)$$

- l' ~~iniettività~~ invertibilità segue dal fatto che la funzione $F\mapsto F\circ M$ è inversa della funzione scritta sopra.

ES. 18 Siano $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ in posizione generale in $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$. Esiste un'unica conica C passante per P_i $(P_i\in V(C))$ $\forall i = 1,\dots,5$ e inoltre C non degenere

SOLUZIONE: fissiamo coordinate indotte dal riferimento proiettivo $(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$

$P_1 = [1,0,0]$ $\quad P_3 = [0\ 0\ 1]$ $\quad P_5 = [\alpha,\beta,\gamma]$ $\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{K}$ non tutti nulli

$P_2 = [0\ 1,\ 0]$ $\quad P_4 = [1\ 1\ 1]$

P_i posizione generale $\Rightarrow$ | α,β,γ tutti $\neq 0$ e a due a due distinti

$$\begin{cases}\alpha\beta\gamma\neq 0\\ \alpha\neq\beta,\ \beta\neq\gamma,\ \alpha\neq\gamma\end{cases}$$

Imponiamo che la conica generica

$$\cancel{ax_0^2} + \cancel{bx_1^2} + \cancel{cx_2^2} + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_1x_2 = 0$$

passi per i P_i.

$P_1 \in V(C) \iff a = 0$
$P_2 \iff b = 0$
$P_3 \iff c = 0$

$$\begin{matrix}P_4\in V(C) \iff \\ P_5 \in V(C) \iff\end{matrix}\begin{cases} d+e+f = 0\\ d\alpha\beta + e\alpha\gamma + f\beta\gamma = 0\end{cases}$$

Devo vedere che il sistema ha rango 2

i minori 2×2 della matrice $\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 1\\ \alpha\beta & \gamma\alpha\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\ \beta\gamma\end{matrix}\end{pmatrix}$ sono $\neq 0$

esempio $\alpha\gamma - \alpha\beta = \alpha(\gamma-\beta)\neq 0$

$\Rightarrow$ lo spazio delle soluzioni (d,e,f) ha dim. 1 $\Rightarrow$ proiettivamente c'è una sola soluzione

Rimane da vedere che la conica è non degenere

$$d x_0 x_1 + e x_0 x_2 + f x_1 x_2 = 0$$

$$\downarrow$$

la matrice che corrisponde alla conica è: $\begin{bmatrix} 0 & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ il cui determinante è $-d(-ef) + e(df) = 2def$

Se per assurdo questa conica fosse degenere, ad esempio $d=0$ (gli altri casi sono analoghi)

l'eq. diventa $e x_0 x_2 + f x_1 x_2 = (e x_0 + f x_1) \cdot x_2$ che è riducibile.

$V(C)$ è unione di due rette $\lightning$ i P_i sono in posizione generale

(Per il principio dei cassetti almeno 3 dei 5 punti sono sulla stessa retta $\Rightarrow$ NON sono in posizione generale)

Questo ha come COROLLARIO che se P_i, $1 \leq i \leq k$ sono punti in posizione generale, $k \leq 5$, allora il sistema lineare delle coniche passanti per i P_i ha dimenzione $5-k$

Infatti: imporre il passaggio di una conica per un punto da una condizione lineare sui coeff. della conica, quindi determina un ssp. proiettivo dello spazio delle coniche. Dato che il passaggio per 5 punti in pos. generale determina un'unica conica $\Rightarrow$ la dim. deve calare di 1 ogni volta che si impone il passaggio per un nuovo punto. In particolare, il passaggio per 4 punti in posizione generale determina un fascio di coniche.

ES. 19 $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ non allineati

$f: \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ proiettività t.c. $f(P_1) = P_2$, $f(P_2) = P_3$, $f(P_3) = P_1$

(i) $\Lambda \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0\ x_1\ x_2]_2)$ definito dal passaggio per i P_i è un sist. lineare di dim. 2 per quanto appena visto.

(ii) Esiste $C \in \Lambda$ non degenere | $f(C) = C$?

OSS la funzione indotta da f sulle coniche manda Λ in se

$P_i \in V(C)$ $i = 1, 2, 3$ $\Rightarrow$ $f(P_i) \in V(f(C)) = f(V(C))$

e dunque $f(C) \in \Lambda$

$\Rightarrow$ f induce una proiettività $\Lambda \to \Lambda$

Devo far vedere che questa ha un punto fisso che corrisponde a una conica non degenere.

Ho sicuramente un punto fisso (perché sono su $\mathbb{C}$) ma non so se corrisponde a una conica non degenere

Anche f ha almeno un punto fisso. Sia quindi

$P_4 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ | $f(P_4) = P_4$ $P_4 \neq P_i$ $i = 1, 2, 3$ (i P_i non sono pt. fissi)

$(P_1\ P_2\ P_3\ P_4)$ sono in posizione generale

Ad esempio se $P_4 \in L(P_1 P_2) \wedge f(P_4) \in L(f(P_1), f(P_2)) = L(P_2, P_3)$, $f(P_4) = P_4$

$\Rightarrow P_1, P_2, P_3$ allineati ↯

$\Lambda' \subseteq \Lambda$ ssp. proiettivo delle coniche passanti anche per P_4, abbiamo dim $\Lambda' = 1$ e la funt. $\Lambda \to \Lambda$ si restringe a una proiettività $\Lambda' \to \Lambda'$, che come prima ha un pt. fisso.

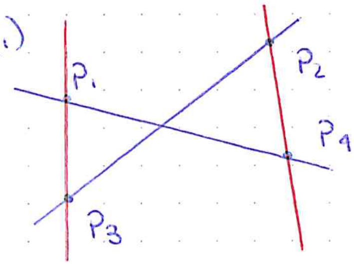
Ora basta vedere che se $C \in \Lambda'$ degenere ($\Leftrightarrow$ riducibile), allora non viene fissata da f.

E' facile vedere che le degeneri passanti per i P_i sono le

ciascuna delle quali contiene due punti tra i P_i
coppie di rette r e nessuna di queste è fissata da f

Esempio:

$$f(L(P_1 P_4) \cup L(P_2 P_3)) = L(f(P_1), f(P_4)) \cup L(f(P_2), f(P_3)) =$$
$$= \underline{L(P_2, P_4) \cup L(P_3, P_1)}$$



e analogamente per le altre

ES. 20

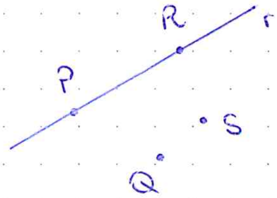
$p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, r retta t.c. $p \in r$

$\Lambda = \{ C$ conica | $p \in V(C)$ e C è tg a $r \}$

è un sist. lineare

SOLUZIONE: scegliamo un rif. proiettivo in modo che

$p = [1, 0, 0]$ e $r = \{x_1 = 0\}$



$P = [1\ 0\ 0]$
$Q = [0\ 1\ 0]$
$R = [0\ 0\ 1]$
$S = [1\ 1\ 1]$

$$\cancel{a x_0^2} + b x_1^2 + c x_2^2 + d x_0 x_1 + e x_0 x_2 + f x_1 x_2 = 0$$

↳ passaggio per P
$\Rightarrow a = 0$

La tangenza a r equivale all'annullarsi del discriminante dell'equazione che risulta dal sistema

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ b x_1^2 + c x_2^2 + \dots = 0 \end{cases}$$

↳ $c x_2^2 + e x_0 x_2 = 0$

(il Δ di $A x_0^2 + B x_0 x_1 + C x_2^2$ è $B^2 - 4AC$)

$$\Delta = 0 \iff e = 0$$

è una condizione lineare $\Rightarrow \Lambda$ sist. lineare di dim. 3