Topologia

introduciamo una particolare classe di spazi topologici:

gli SPAZI METRICI (vd. Analisi 2)

Def. Uno spazio metrico (X,d) è un insieme X dotato di una distanza $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

1) $d(x,x') \geq 0 \quad \forall x,x'$ e $d(x,x') = 0 \iff x = x'$
2) $d(x,x') = d(x',x) \quad \forall x,x' \in X$
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (disuguaglianza triang.)

ESEMPI: 1) $X = \mathbb{R} \quad d(x,y) = |x-y|$

2) $X = \mathbb{R}^n \quad d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ $\quad x = (x_1 \cdots x_n)$, $y = (y_1 \cdots y_n)$

$\downarrow$ DISTANZA EUCLIDEA

3) $X = \mathbb{R}^n \quad d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

4) $X = \mathbb{R}^n \quad d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n\}$

5) I casi 2) e 3) sono casi particolari di

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$$

che è una distanza $p \in \mathbb{R}$ $\forall p \geq 1$ (per $p < 1$ non vale la disuguaglianza triang.)

Se $p \to +\infty$, $d_p \to d_\infty$

ESERCIZIO: verificare che si tratta di distanze.

(meno facile per 2) e 5))

Discendono tutte da norme su $\mathbb{R}^n$, dove

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

(V è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale) è una norma se:

1) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V$

3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v,w \in V$

Una norma induce una distanza ponendo $d(x,y) = \|x-y\|$

Su $\mathbb{R}^n$, $\forall p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ $\quad \|(x_1 \cdots x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$

$$\|(x_1 \cdots x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| \ i = 1, \dots n\}$$

sono norme.

Altri esempi:

1) $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ , \ f \text{ continua}\}$

X è uno sp. vettoriale e anche su X ci sono le norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt}$$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, \ t \in [0,1]\}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \qquad p \geq 1$$

Tutte queste sono effettivamente norme che inducono distanze d_1, d_2, d_∞, d_p su X

cioè inducono la stessa topologia, è spiegato dopo

Fatto: d_1, d_2, d_∞ sono TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI su $\mathbb{R}^n$, ma non su X

separa tutti i punti diversi

Ultimo esempio: la distanza DISCRETA. Qualsiasi sia X posso porre $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad \forall x,y \in X$

È davvero una distanza.

Def. (X,d) metrico, $x_0 \in X$, $R > 0$

la PALLA (aperta) di centro x_0 e raggio R è

$$B(x_0, R) = \{y \in X \mid d(x_0, y) < R\}$$

Siano (X,d) e (Y,d') metrici e sia $f : X \to Y$

Def. $x_0 \in X$. Allora f si dice CONTINUA in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 \mid f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

f si dice CONTINUA se f è continua in x_0, $\forall x_0 \in X$

Def. (X,d) metrico. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice

APERTO se $\forall x_0 \in A \ \exists \delta > 0 \mid B(x_0,\delta) \subseteq A$

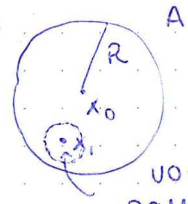
METRICO!

Proposizione in uno sp. metrico le palle (aperte) sono aperte

DIM. $x_0 \in X$, $R > 0$ $A = B(x_0,R)$

Voglio vedere che A è aperto, cioè $\forall x_1 \in A \ \exists \delta > 0$ t.c.

$B(x_1,\delta) \subseteq A = B(x_0,R)$



voglio trovare una palla centrata in x_1 contenuta in A

$x_1 \in B(x_0,R)$

$d(x_1,x_0) < R$

Scegliendo $\delta = R - d(x_0,x_1) > 0$

posso vedere che $B(x_1,\delta) \subseteq B(x_0,R)$

infatti, $y \in B(x_1,\delta) \Rightarrow d(y,x_1) < \delta \Rightarrow d(y,x_0) \leq d(y,x_1) + d(x_1,x_0) <$

$< \delta + d(x_0,x_1) = R - \cancel{d(x_1,x_0)} + \cancel{d(x_1,x_0)} = R$ $\square$

TEOREMA

$f:(X,d) \to (Y,d')$ è continua $\iff \forall A$ aperto di Y, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in X

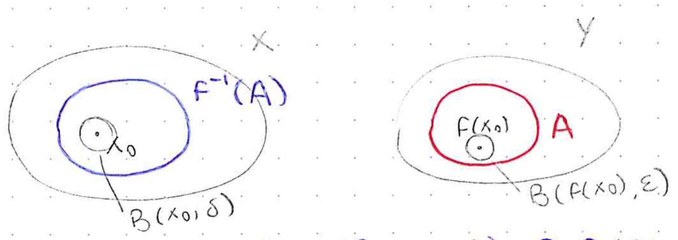
"la controimmagine di aperti è aperta"

DIM. $(\Rightarrow)$

$A \subseteq Y$ aperto. Sia $x_0 \in f^{-1}(A)$

Poiché A aperto, e $x_0 \in f^{-1}(A)$

$\exists \varepsilon > 0 \mid B(f(x_0),\varepsilon) \subseteq A$



f continua $\Rightarrow \exists \delta > 0 \mid f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$

Dunque $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon) \subseteq A$, da cui $B(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(A)$

e $f^{-1}(A)$ aperto

$(\Leftarrow)$ Mostriamo che f è continua in $x_0 \in X$, $\forall x_0 \in X$

Dato $\varepsilon > 0$, $B(f(x_0), \varepsilon)$ è aperto in Y per cui per hp.
$f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ è aperto in X

$\Rightarrow$ visto che $x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$, $\exists \delta > 0 \mid B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$

cioè $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ $\square$

ESEMPIO: Se X ha la distanza discreta, ogni $A \subseteq X$ è aperto: infatti, $x \in A \Rightarrow B(x, 1/2) \subseteq A$

$(B(x, 1/2) = \{x\})$

Perciò, ogni $f: X \to Y$ è continua (Poiché ogni controimmagine è aperta)

Proposizione: (X, d) metrico, $\tau \subseteq P(X)$

$$\tau = \{A \subseteq X, A \text{ aperto}\}$$

1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$

2) $A \in \tau, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$ — l'intersezione di due aperti è aperta $\Rightarrow$ l'intersezione finita di aperti è aperta

3) $A_i \in \tau, i \in I$, allora anche $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \in \tau$ — l'unione arbitraria di aperti è aperta

DIM. 1) Ovvio $\to$ Per $\emptyset$ la definizione di aperto è "vuota"

2) Siano A, B aperti e sia $x_0 \in A \cap B$

$x_0 \in A \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 \mid B(x_0, \delta_1) \subseteq A$

$\quad$ " $\quad$ " $\quad B(x_0, \delta_2) \subseteq B$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ $\quad B(x_0, \delta) \subseteq A \cap B$

3) $x_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i$, allora $\exists i_0 \in I \mid x_0 \in A_{i_0}$

Poiché A_{i_0} è aperto $\exists \delta > 0 \mid B(x_0, \delta) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup A_i$ $\square$

Non è vero che l'intersezione arbitraria di aperti è aperta in $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea

$\bigcap_{n \geq 1} (-1/n, 1/n) = \{0\} \to$ non è aperto

$\quad \llcorner = B(0, 1/n)$ che è aperta.

SPAZI TOPOLOGICI

Def. Uno sp. topologico è una coppia (X, τ), dove X è un insieme e $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi di X, detti **APERTI**, (mentre τ si chiama **TOPOLOGIA**) tale che:

1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$
2) $A \in \tau$, $B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$ (intersezione finita)
3) Se $A_i \in \tau$ $\forall i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ (unione arbitraria)

Def. $C \subseteq X$ si dice **CHIUSO** se $X \setminus C$ è aperto.

Passando al complementare, si vede che

1) $\emptyset$ e X sono chiusi
2) C_1 e C_2 chiusi $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ chiuso
$(X \setminus (C_1 \cup C_2) = ((X \setminus C_1) \cap (X \setminus C_2))$ aperti
3) C_i chiuso $\forall i \in I$, allora $\bigcap_{i \in I} C_i$ è chiuso. il complementare è $\bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i)$

Attenzione: tipicamente, un sottoinsieme generico $\Omega \subseteq X$ non è aperto né chiuso.

Ad esempio, $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ non è aperto né chiuso.

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ non è aperto né chiuso.

ESEMPI: ① Ogni sp. metrico è uno spazio topologico con la topologia τ definita sopra (insieme di tutti gli aperti metrici)

② $\tau = \mathcal{P}(X)$ (cioè ogni sottoinsieme è aperto), τ è una topologia, detta **TOPOLOGIA DISCRETA** (indotta dalla distanza discreta).

③ $\tau = \{\emptyset, X\}$ è una topologia detta **TOPOLOGIA INDISCRETA**

Le topologie indotte da una distanza si dicono **metrizzabili**.

ESERCIZIO: (X, τ) metrizzabile e $x_0 \in X \Rightarrow \{x_0\}$ è chiuso

NB! Nella topologia discreta ogni sottoinsieme è sia aperto che chiuso

DIM d distanza che induce τ. Devo mostrare che $X \setminus \{x_0\}$ è aperto. $y_0 \in X \setminus \{x_0\} \Rightarrow R = d(x_0, y_0) > 0$ e $B(y_0, R) \subseteq X \setminus \{x_0\}$ in quanto $x_0 \notin B(y_0, R)$ $\square$

Corollario: $|X| \geq 2$, la topologia indiscreta su X non è metrizzabile

DIM. I soli chiusi di X sono $\emptyset$ e X e se $x_0 \in X$

$\{x_0\}$ non è chiuso. $\square$

Def. X, Y sp. topologici, $f: X \to Y$.

Allora f si dice CONTINUA se $\forall$ aperto A di Y,

$f^{-1}(A)$ è aperto in X.

(Passando al complementare è equivalente chiedere che $\forall C \subseteq Y$ chiuso, $f^{-1}(C)$ è chiuso)

Proposizione: (X, τ_X) (Y, τ_Y) (Z, τ_Z) sp. topologici

1) $Id: (X, \tau_X) \to (X, \tau_X)$ è continua
2) $f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ $g: (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_Z)$ continue

$\Rightarrow f \circ g: (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ continua

DIM. 1) Ovvio

2) $A \subseteq Z$ aperto $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$

che è aperto perché $g^{-1}(A)$ è aperto in Y per continuità di g e $f^{-1}(g^{-1}(A))$ è aperto in X per continuità di f $\square$

$\Rightarrow$ Gli spazi topologici con le funzioni continue formano una categoria

L'isomorfismo nella categoria degli sp. topologici si chiama OMEOMORFISMO.

$f: X \to Y$ si dice omeomorfismo se è continua, invertibile e l'inversa $f^{-1}: Y \to X$ è continua.

Achtung! se un omomorfismo di gruppi è bigettivo, il suo inverso è automaticamente un omomorfismo (idem per le mappe lineari), per le funzioni continue questo non vale.

ESEMPI

1. Sia $X = \mathbb{R}$, τ_E la top. euclidea (indotta da distanza euclidea) e τ_D la top. discreta. Allora

$$Id: (X, \tau_D) \to (X, \tau_E) \text{ è continua}$$
$$Id^{-1}: (X, \tau_E) \to (X, \tau_D) \text{ NON è continua}$$

CONFRONTO TRA TOPOLOGIE

Su uno stesso insieme possiamo mettere topologie diverse.
La topologia τ_1 su X è MENO FINE della top. τ_2 su X se $\tau_1 \subseteq \tau_2$ o, equivalentemente, se

$$Id: (X, \tau_2) \to (X, \tau_1) \text{ è continua}$$

La relazione di finezza è una relazione d'ordine parziale sulle topologie di X.
Le topologie più fini "distinguono meglio i punti" (cioè "li allontanano").
↳ si capirà meglio con il linguaggio degli intorni

Proposizione: d_1 e d_2 distanze su X che inducono le topologie τ_1 e τ_2. Se esiste $K > 0$ t.c. $d_1(x,y) \leq K \cdot d_2(x,y)$ $\forall x, y \in X$, allora $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

DIM. Sia $A \in \tau_1$. Voglio vedere che A è aperto anche per τ_2.
Sia $x_0 \in A$, poiché $A \in \tau_1$, $\exists R > 0 \mid B_{d_1}(x_0, R) \subseteq A$.

Poiché $d_1 \leq K d_2$, $B_{d_2}(x_0, R/K) \subseteq B_{d_1}(x_0, R)$:

se $d_2(x_0, y) < R/K$ allora $d_1(x_0, y) \leq K d_2(x_0, y) < K \cdot \frac{R}{K} = R$.

$\Rightarrow B_{d_2}(x_0, R/K) \subseteq A$ e A è aperto per τ_2. $\square$

Corollario: se $\exists\, K>0, h>0$ con $d_1 \leq K d_2$ e $d_2 \leq h d_1$, allora $\tau_1 = \tau_2$, cioè (d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti)

Cioè: due distanze Lipschitz-equivalenti inducono la stessa topologia.

Corollario: su $\mathbb{R}^n$ le distanze d_1, d_2, d_∞ inducono la stessa topologia (quella Euclidea).

<u>DIM.</u> d_1, d_2, d_∞ sono indotte dalle norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ in modo che $d_i(x,y) = \|x-y\|_i \quad \forall i = 1, 2, \infty$

la tesi segue da questa catena di disuguaglianze, valida $\forall v \in \mathbb{R}^n$:

$$\|v\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|v\|_2 \leq n\,\|v\|_\infty \leq n\,\|v\|_1$$

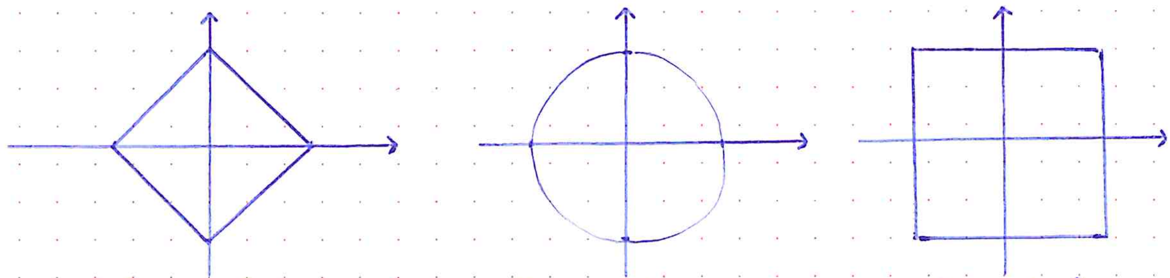
Infatti: per la disuguaglianza tra media aritmetica e media quadratica, $\sum_{i=1}^{n} |v_i|/n \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n}}$, da cui

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{n}\,\|v\|_2$$

Inoltre, $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|v\|_\infty^2} \leq \sqrt{n\|v\|_\infty^2} = \sqrt{n}\,\|v\|_\infty$

e $\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$ è ovvio $\square$

Le palle di raggio 1 centrate nell'origine di $\mathbb{R}^2$ sono



$B_{d_1}(0,1)$ $\qquad$ $B_{d_2}(0,1)$ $\qquad$ $B_{d_\infty}(0,1)$

Su $X = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ continua} \}$ d_1, d_2, d_∞ <u>non</u> sono topologicamente equivalenti.

INTORNI

Sia (X, τ) uno spazio topologico, e sia $x_0 \in X$

Def. un INTORNO di x_0 è un sottoinsieme $U \subseteq X$ tale che $\exists A \in \tau$ con $x_0 \in A \subseteq U$

L'insieme degli intorni di x_0 si indica con $I(x_0)$

Def. $f: X \to Y$ tra spazi topologici, $x_0 \in X$

f si dice CONTINUA in x_0 se $\forall$ intorno V di $f(x_0)$ $\exists$ intorno U di x_0 t.c. $f(U) \subseteq V$

Teorema $f: X \to Y$ è continua $\iff$ f è continua in x_0 $\forall x_0 \in X$

DIM.

$(\Rightarrow)$ Sia V un intorno di $f(x_0)$. Allora $\exists A$ aperto di Y con $f(x_0) \in A \subseteq V$. Ma allora $x_0 \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(V)$.
aperto per continuità di f
Poiché $f^{-1}(A)$ è aperto,
$U = f^{-1}(V)$ è un intorno di x_0, e per costruzione $f(U) \subseteq V$, per cui f è continua in x_0.

$(\Leftarrow)$ Sia A aperto in Y. Devo vedere che $f^{-1}(A)$ sia aperto in X. Mostriamo che $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto. Sia $x_0 \in f^{-1}(A)$. Allora $f(x_0) \in A$, che è aperto. Dunque A è un intorno di $f(x_0)$.
Poiché f è continua in x_0, $\exists$ intorno U di x_0 t.c. $f(U) \subseteq A$, cioè $U \subseteq f^{-1}(A)$. Dunque $\exists$ aperto B di X t.c. $x_0 \in B \subseteq U \subseteq f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(A)$ è un intorno di x_0.
La conclusione segue ora dalla

Proposizione: $A \subseteq X$ è aperto $\iff$ è intorno di ogni suo punto.

DIM. $(\Rightarrow)$ OVVIO: $\forall x_0 \in A$,
$x_0 \in A \subseteq A$

$(\Leftarrow)$ Supponiamo A intorno di ogni suo punto.
Allora $\forall x_0 \in A$ $\exists$ aperto B_{x_0} con $x_0 \in B_{x_0} \subseteq A$
Ma allora $A = \bigcup_{x_0 \in A} B_{x_0}$ è unione di aperti, ed è perciò aperto. □

Dalla caratterizzazione della continuità appena data discende che un intorno di x_0 può essere pensato come un insieme di punti che contiene punti "sufficientemente vicini"

a x_0.
Avere tanti intorni vuol dire dare più restrizioni sulla condizione "essere vicini", cioè vuol dire "distinguere meglio" i punti.
Per "distinguere meglio" bisogna avere "intorni più piccoli", ma è chiaro che se $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $\forall x_0$ gli intorni di x_0 secondo τ_1 saranno tutti intorni di x_0 anche per τ_2 e perciò τ_2 potrebbe avere più intorni di x_0, e dunque intorni "più piccoli".
Gli intorni di x_0 verificano due facili proprietà:

1. Se $U \in I(x_0)$ e $U \subseteq V$, anche $V \in I(x_0)$
2. Se $U, V \in I(x_0)$, anche $U \cap V \in I(x_0)$
   (discende dal fatto che l'intersezione di due aperti è aperta)

CHIUSURA E PARTE INTERNA

Sia $B \subseteq X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico X.
Osserviamo che è ben definito il più piccolo chiuso che contiene B: basta prendere

$$\overline{B} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ B \subseteq C}} C$$

Questa intersezione è chiusa perché intersezione qualsiasi di chiusi è chiusa, ed è chiaramente il chiuso più piccolo che contiene B: se C è chiuso e $B \subseteq C$, per costruzione $\overline{B} \subseteq C$. L'insieme $\overline{B}$ è detto CHIUSURA di B.
Analogamente, esiste il più grande aperto contenuto in B,

$$\operatorname{int}(B) = \mathring{B} = \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq B}} A$$

che si chiama PARTE INTERNA di B.
Fatto: $X \setminus \operatorname{int}(B) = \overline{X \setminus B}$
Esempi: sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia Euclidea

1. $\operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$
2. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (in quanto $\operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$)
3. $\operatorname{int}([0,1]) = (0,1)$

Def. $B \subseteq X$
$x_0 \in X$ si dice PUNTO ADERENTE di B se $\forall$ intorno U

di x_0 si ha $U \cap B \neq \emptyset$

Si dice **DI ACCUMULAZIONE** per B se $\forall$ intorno U di x_0 $(U \cap B) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

I punti aderenti vanno pensati come "infinitamente vicini" a B.

Proposizione: $\overline{B} = \{x_0 \in X \mid x_0 \text{ è aderente a } B\}$

DIM. ($\subseteq$) Sia $x_0 \in \overline{B}$

Prendiamo un intorno U di x_0, e sia A un aperto t.c. $x_0 \in A \subseteq U$

Se per assurdo $A \cap B = \emptyset$, $X \setminus A$ sarebbe un chiuso che contiene B, per cui avremmo $\overline{B} \subseteq X \setminus A$

Ma $x_0 \in \overline{B}$ e $x_0 \notin X \setminus A$, assurdo.

Dunque $B \cap A \neq \emptyset$ e perciò $B \cap U \neq \emptyset$ e x_0 è aderente a B.

($\supseteq$) Viceversa, se x_0 è aderente a B, allora ogni aperto che contiene x_0 interseca B, perciò non esistono aperti che contengono x_0 e siano contenuti in $X \setminus B$, per cui $\operatorname{int}(X \setminus B) \not\ni x_0$,

$X \setminus \operatorname{int}(X \setminus B) = \overline{X \setminus (X \setminus B)} = \overline{B}$

cioè $x_0 \in X \setminus (\operatorname{int}(X \setminus B)) = \overline{B}$ $\square$

$\subset X \setminus \operatorname{int}(B) = \overline{X \setminus B}$

Def. $B \subseteq X$ si dice **DENSO** se $\overline{B} = X$

Questo è equivalente a $\operatorname{int}(X \setminus B) = \emptyset$, cioè ogni aperto non vuoto interseca B.

Esempio: $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Def. Su X, la **TOPOLOGIA COFINITA** è la topologia i cui chiusi sono X stesso e i sottoinsiemi finiti di X

(È immediato vedere che è davvero una topologia)

Analogamente si definisce la **TOPOLOGIA CONUMERABILE** i cui chiusi sono X e i sottoinsiemi al più numerabili.

Esempio: X infinito con la top cofinita e $B \subseteq X$. Allora:

$$\overline{B} = \begin{cases} B & \text{se } B \text{ è finito} \\ X & \text{se } B \text{ è infinito} \end{cases} \Rightarrow \text{allora } B \text{ è denso}$$

TOPOLOGIA GENERATA, BASI E PREBASI

X insieme, $S \subseteq P(X)$ sottoinsieme, $S = \{S_i \mid i \in I\}$

Vogliamo definire la top. su X "generata da S"
↓
top. più piccola per cui gli S_i sono tutti aperti

LEMMA:

τ_j, $j \in J$, topologie su X. Allora

$$\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j \subseteq P(X) \text{ è una topologia su } X$$

DIM 1) $\emptyset \in \tau_j \ \forall j \in J \Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{j \in J} \tau_j$ (idem per X)

2) A_k, $k \in K$ sono elementi di $\tau \Rightarrow A_k \in \tau_j \ \forall k, j$

τ_j è una topologia $\Rightarrow A = \bigcup_{k \in K} A_k \in \tau_j \ \forall j$,

dunque $A \in \tau$

3) Analogo al 2)

$A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

Corollario data una famiglia τ_j come nel lemma, esiste una top. più fine tra tutte le top. meno fini di tutte le τ_j
⇕
(ed è proprio $\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$) equiv. contenute in tutte le τ_j

Corollario data una famiglia $S = \{S_i \mid i \in I\} \subseteq P(X)$ esiste la topologia meno fine che contiene S

DIM Siano $\{\tau_j \mid j \in J\}$ le top. di X che contengono S
$\neq \emptyset$ (perché c'è la top. discreta) $= P(X)$

Per il lemma $\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$ è la top. meno fine che contiene S.

Def. la TOPOLOGIA GENERATA da S è la top. meno fine su X che contiene S
↓
non costruttiva. Def. + pratica usa i concetti di base e prebase.

Def. (X, τ) sp. topologico.

Una base di τ è un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ t.c.

$$\forall A \in \tau \ \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \mid A = \bigcup_{b \in \mathcal{B}'} b$$

OSS (ovvia): $\mathcal{B} = \tau$ è una base di τ. Le basi interessanti hanno "pochi" elementi

$\equiv$ ogni aperto è unione di aperti di base

ES X sp. metrico, una base della top. indotta si ottiene prendendo tutte le palle aperte (per def.)

Lemma: $\Omega \subseteq (0, +\infty)$ un sottoinsieme t.c.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R \in \Omega \mid 0 < R < \varepsilon$$

(ad esempio $\Omega = \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$, $\Omega = \{\frac{1}{n} \mid n > 0, n \in \mathbb{N}\}$

X sp. metrico, sia $Z \subseteq X$ un sottoinsieme denso, allora

la sua chiusura è tutto lo spazio

$$\mathcal{B} = \{B(z, R) \mid z \in Z, R \in \Omega\}$$

è una base della topologia di X

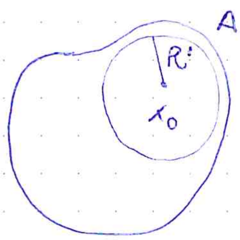
(palle centrate in un denso di raggio arbitrariamente piccolo)

DIM È chiaro che $\mathcal{B} \subseteq \tau$, τ top. indotta dalla distanza.

Sia $A \in \tau$ arbitrario e mostriamo che è unione di el. di $\mathcal{B}$. Basta che mostri che, fissato $x_0 \in A$

$\exists B_{x_0} \in \mathcal{B} \mid x_0 \in B_{x_0} \subseteq A$ (poi $A = \bigcup_{x_0 \in A} B_{x_0}$ e ok)

A aperto $\Rightarrow \exists R' \in (0, +\infty) \mid B(x_0, R') \subseteq A$



Scelgo ora $R \in \Omega \mid 0 < R < \frac{R'}{2}$

Visto che Z è denso, $\exists z \in Z \mid z \in B(x_0, R)$

Vediamo che $B_{x_0} = B(z, R)$ funziona

- $x_0 \in B(z, R)$
- $B(z, R) \subseteq A$: se $y \in B(z, R)$, allora $d(y, z) < R$ e $d(y, x_0) \leq d(y, z) + d(z, x_0) < R + R < R'$

$\Rightarrow y \in B(x_0, R') \subseteq A \Rightarrow B(z, R) \subseteq A$ $\square$

PROPOSITIONE

X insieme. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una base di una qualche topologia su X SSE

1) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \ \exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \mid B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$

OSS: in tal caso, la top. di cui $\mathcal{B}$ è base è unica (per def. di base)

DIM: ($\Rightarrow$) $\mathcal{B}$ base di qualche top. $\tau \Rightarrow X \subset \tau$, quindi deve essere unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Inoltre, se $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \tau \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \tau$ ed è dunque unione di el. di $\mathcal{B}$.

($\Leftarrow$) Supponiamo valgano 1 e 2

Sia $\tau = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \mid \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \right\}$ (è l'insieme di tutti gli insiemi che posso costruire unendo elementi di $\mathcal{B}$) si verifica che questa è una top.

a quel punto è chiaro che $\mathcal{B}$ è una base.

1) $\emptyset \in \tau$ (basta prendere $\mathcal{B}' = \emptyset$)

$X \in \tau$ segue da 1

2) È facile vedere che τ è chiuso per unioni arbitrarie (esercizio)

3) $A_1, A_2 \in \tau$ e $A_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B \quad A_2 = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}_2} B'$

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}$. Allora $A_1 \cap A_2 = (\bigcup B) \cap (\bigcup B') =$

$= \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_1 \\ B' \in \mathcal{B}_2}} (B \cap B')$ e per l'hp. 2, ciascun $B \cap B'$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$, quindi pure $A_1 \cap A_2$ lo è. $\square$

OSS: è chiaro a questo punto che se $\mathcal{B}$ è base di τ, allora la topologia generata da $\mathcal{B}$ è proprio τ

(qualsiasi top. che contiene $\mathcal{B}$ contiene anche unioni arbitrarie di el. di $\mathcal{B}$)

Questo descrive la top. generata, supponendo di partire da un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$ che soddisfi le prop. della proposizione.

Def. (X,τ) sp. topologico

Una prebase $\mathcal{P}$ di τ è un sottoinsieme $\mathcal{P} \subseteq \tau$ |

$\mathcal{B} = \{ P_1 \cap \cdots \cap P_K \mid K \in \mathbb{N},\ P_i \in \mathcal{P} \}$ è

una base di τ.

ESEMPIO $X = \mathbb{R}$ con top. euclidea

Allora $\mathcal{P} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b,+\infty) \mid b \in \mathbb{R}\}$

↳ prebase della topologia di X

Infatti gli el. di $\mathcal{P}$ sono aperti e

$(-\infty, a) \cap (b+\infty) = (b,a)$ $(b \overset{se}{<} a)$

sono una base della top. di X

OSS $\mathcal{B} \subseteq \tau$ base, $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{B}} \subseteq \tau$, allora anche $\tilde{\mathcal{B}}$ è una base.

Idem per le prebasi

non c'è nessun concetto di minimalità come per gli spazi vettoriali

Da questo segue che una base è anche una prebase

PROPOSIZIONE la top. τ generata da $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ha $\mathcal{P} \cup \{X\}$ come prebase, cioè gli el. di τ sono unioni arbitrarie di intersezioni finite di el. di $\mathcal{P} \cup \{X\}$

→ questo NON mi dice che $\mathcal{P}$ è una base

DIM.

$$\tau' = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; A_i \text{ è intersezione finita di elementi di } \mathcal{P} \cup \{X\} \right\}$$

Per come è costruita ha $\mathcal{P} \cup \{X\}$ come prebase

Questa è una topologia su X. Basta controllare che la famiglia delle intersezioni finite di el. di $\mathcal{P} \cup \{X\}$ è una base di una qualche top. Usiamo la caratterizzazione delle basi viste prima

① X intersezione finita di el. di $\mathcal{P} \cup \{X\}$ (ovvio)

② A_1 e A_2 intersezioni finite di el. di $\mathcal{P} \cup \{X\}$, allora $A_1 \cap A_2$ unione di int. finite di el. di $\mathcal{P} \cup \{X\}$, che è ovvio, perché $A_1 \cap A_2$ stesso lo è

τ' è la top. meno fine che contiene $\mathcal{P}$?

Se una top. contiene $\mathcal{P} \Rightarrow$ contiene X, tutte le int. finite di el. di $\mathcal{P}$ e tutte le unioni arbitrarie di tali int. finite $\Rightarrow$ contiene τ' come volevo. □

PROPOSIZIONE $f: X \to Y$, X e Y sp. topologici

Allora TFAE

1) f è continua

2) $f^{-1}(A)$ è aperto in X $\forall A \in \mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ base di Y

3) $f^{-1}(A)$ è aperto in X $\forall A \in \mathcal{P}$, dove $\mathcal{P}$ è una prebase di Y

DIM $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sono ovvie

$3 \Rightarrow 1$ segue dal fatto appena visto che un qualsiasi aperto di Y è unione arbitraria di int. finite di $\mathcal{P} \cup \{X\}$ e f^{-1} commuta con intersezioni e unioni cioè

- $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$ e
- $f^{-1}(P_1 \cap \dots \cap P_k) = f^{-1}(P_1) \cap \dots \cap f^{-1}(P_k)$ □

ASSIOMI DI NUMERABILITÀ

X sp. topologico. U è intorno di x_0 se $x_0 \in \mathring{U}$, cioè $\exists$ A aperto | $x_0 \in A \subseteq U$.

Chiamiamo $I(x_0) = \{U \mid U$ è intorno di $x_0\} \subseteq \mathcal{P}(X)$

Def. un SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI di $x_0 \in X$ è un sottoinsieme $\Omega \subseteq I(x_0)$ che "contiene intorni sufficientemente piccoli" cioè $\forall U \in I(x_0)$ $\exists V \in \Omega \mid V \subseteq U$.

Esempio: X metrico, $x_0 \in X$

$\Omega = \{ B(x_0, R) \mid R > 0 \}$ → sono sist. fond. di intorni di x_0

$\Omega' = \{ B(x_0, \frac{1}{n}) \mid n > 0, n \in \mathbb{N} \}$

SFI

Def. X sp. topologico, X è

1) <u>I-numerabile</u> se ogni $x_0 \in X$ ammette un SFI al più numerabile

2) <u>II-numerabile</u> se ammette una base al più numerabile

3) <u>Separabile</u> se ammette un sottoinsieme al più numerabile e denso

Esempi:

① Tutti gli sp. metrici sono I-numerabili (vedi Ω' dell'esempio precedente)

② $\mathbb{R}$ è separabile, perché $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è numerabile e denso

③ X insieme più che numerabile con la topologia discreta $\Rightarrow$ X è I-num.

(i singoletti $\{x\}$ sono aperti e sono SFI) ma non è II-num. in quanto qualsiasi base di X deve contenere i singoletti

④ X insieme più che numerabile con la topologia conumerabile (basta cofinita)

↳ quella i cui chiusi sono tutto X e i sottoinsiemi al più numerabili

Questa topologia non è neanche I-num.

↓

ESERCIZIO

14/11/2024
Talpo

TEOREMA

① II - numerabile $\Rightarrow$ I - numerabile

② II - numerabile $\Rightarrow$ separabile

③ X metrizzabile, allora separabile $\Rightarrow$ II numerabile

DIM. ① $\mathcal{B}$ base di X al più numerabile

Fisso $x \in X$ e pongo $\Omega_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$

Questa è una famiglia di intorni di x ed è al più numerabile. Vediamo che è un SFI

Prendo quindi $U \in I(x)$ arbitrario e mostro che $\exists B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$ e $B \subseteq U$.

Infatti: $x \in \overset{\circ}{U} \underset{\mathcal{B}\text{ base}}{=} \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ dove $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$

Segue che $\exists \hat{B} \in \mathcal{B}' \mid x \in \hat{B} \subseteq \overset{\circ}{U} \subseteq U$, che è quello che volevo

② Sia $\mathcal{B}$ base al più numerabile di X.

Posso supporre che $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \neq \emptyset$, e dunque per ciascun $B \in \mathcal{B}$ scelgo $x_B \in B$, un punto a caso.

Dico $\{x_B \mid B \in \mathcal{B}\} \subseteq X$ è denso e al più numerabile.

Se $U \subseteq X$ è un aperto $\neq \emptyset$, allora posso scrivere

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \qquad \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$$

Un sottoinsieme è denso
$\Updownarrow$ (non vuoto)
Ogni aperto lo interseca

$\Rightarrow x_B \in B \subseteq U$ per qualsiasi $B \in \mathcal{B}'$

($\mathcal{B}' \neq \emptyset$ poiché $U \neq \emptyset$)

③ X metrizzabile con d distanza che induce la topologia.

Supponiamo $Z \subseteq X$ denso e al più numerabile

Nell'ultima lezione abbiamo visto che le palle

$\{B(z,q)$ dove $z \in Z$, $q \in \mathbb{Q}\}$

danno una base della top. indotta $\mathbb{Z}$ numerabile $\Rightarrow$ questa famiglia è numerabile per cui ho trovato la mia base. $\square$

<u>Esempio</u> (retta di Sorgenfrey)

$X = \mathbb{R}$ come insieme e

$$\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a<b\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

1. $\mathcal{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, sia essa τ
2. τ è strettamente più fine della topologia euclidea
3. $(\mathbb{R},\tau)$ è separabile
4. $(\mathbb{R},\tau)$ non è II-numerabile

(Segue che non è metrizzabile)

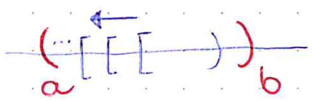
1. Usiamo il criterio visto, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ base per una topologia $\Longleftrightarrow$ $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ e $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ per qualche $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$

È ovvio che $\mathbb{R} = \bigcup_{a<b} [a,b) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1)$

e $[a,b) \cap [c,d) = \begin{cases} [\max\{a,c\}, \min\{b,d\}) \\ \emptyset \end{cases}$

2. "strettamente" è chiaro perché $[a,b)$ sicuramente non è un aperto Euclideo.

Per mostrare che un qualsiasi aperto Euclideo è aperto per τ basta far vedere che tutti gli elementi della base della top. Euclidea $\{(a,b) \mid a<b\}$ sono anche aperti per τ.



$$(a,b) = \bigcup_{a<a'<b} [a',b) \Rightarrow (a,b) \in \tau$$

3. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è denso per τ: dato un aperto $U \neq \emptyset$, dentro

ci trovo un $[a,b)$, che contiene almeno un rationale

④ Mostriamo che se $\mathcal{B}'$ è una qualsiasi base della topologia di Sorgenfrey $(\mathbb{R},\tau)$, allora $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists B\in\mathcal{B}' \mid a=\min(B)$

Questo mostra che $|\mathcal{B}'|\geq|\mathbb{R}|$ e quindi non è al più numerabile

(es. $\mathcal{B}'\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $B\mapsto\inf B$ ha imm. $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$)

Fissato $a\in\mathbb{R}$, prendo $[a,a+1)=\bigcup_{B\in\mathcal{B}''} B$ per un qualche $\mathcal{B}''\subseteq\mathcal{B}'$. Visto che $B\subseteq[a,a+1)$, avrò $\inf(B)\geq a\ \forall B\in\mathcal{B}''$

$a\in[a,a+1)=\bigcup_{B\in\mathcal{B}''} B \Rightarrow \exists\hat{B}\in\mathcal{B}''\mid a\in\hat{B}\Rightarrow a=\min(\hat{B})$ □

ESERCIZI

24. (X,d) metrico e $x_0\in X$

$$\bar{B}(x_0,R)=\{x\in X\mid d(x,x_0)\leq R\}$$

1) Questi sono chiusi

2) Non è sempre vero che $\overline{B(x_0,R)}=\bar{B}(x_0,R)$

Sol. Si può fare a mano facendo vedere che il complementare è aperto.

Oppure: $f(x)=d(x,x_0)$, $f:X\to\mathbb{R}$

Questa f è continua e $\bar{B}(x_0,R)=f^{-1}([0,R])$ che dunque è un chiuso.

Digressione: $f:(X,d)\to(Y,d')$ e $K\in\mathbb{R}_{>0}$

f è K-lipschitziana se $\forall x_1,x_2\in X$

$d'(f(x_1),f(x_2))\leq K\cdot d(x_1,x_2)$

f è K-lipschitziana $\Rightarrow$ f continua — devo vedere che (def. di continuità tra metrici)

per $x_0\in X$ vale che $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\mid d(x,x_0)<\delta\Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

Dato ε, basta prendere $\delta=\varepsilon/2K$ perché per lipschitzianità

$d(f(x),f(x_0))\leq Kd(x,x_0)<K\cdot\varepsilon/2K=\varepsilon/2<\varepsilon$

La $f: X\to\mathbb{R}$, $x\mapsto d(x,x_0)$ è 1-lipschitziana, cioè

$|d(x,x_0) - d(y,x_0)| \leq d(x,y)$

Questo segue immediatamente dalla disuguaglianza triangolare

$$d(x,x_0) \leq d(x,y) + d(y,x_0) \Rightarrow d(x,x_0) - d(y,x_0) \leq d(x,y)$$

e scambiando x e y si ottiene l'altra.

2) prendo X con $|X| > 2$, con la distanza discreta

$d(x,y) = 1 \quad \forall x \neq y$

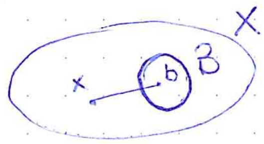
$\overline{B}(x_0,1) = \{x \in X \mid d(x,x_0) \leq 1\} = X$

$B(x_0,1) = \{x_0\}$

$\overline{B(x_0,1)} = \{x_0\}$ (per la top. discreta tutti i sottoinsiemi sono chiusi)

26. (X,d) spazio metrico, $B \subseteq X$ sottoinsieme

$f: X \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \inf\{d(x,b) \mid b \in B\}$



1) f continua

2) $\overline{B} = f^{-1}(0)$

Soluzione: Vediamo che f è 1-lipschitziana

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$$

Fissati x,y
$d(x,b) \leq d(x,y) + d(y,b) \quad \forall b \in B$

Passando all'inf al primo membro trovo

$$f(x) = \inf\{d(x,b) \mid b \in B\} \leq d(x,y) + d(y,b) \quad \forall b \in B$$

Passando all'inf al secondo membro

$$f(x) \leq d(x,y) + f(y)$$

Scambiando x e y trovo $f(y) \leq d(x,y) + f(x)$

che insieme danno la disuguaglianza voluta.

1-lipschitziana $\Rightarrow$ continua

2) È chiaro che $B \subseteq f^{-1}(0)$ e visto che $f^{-1}(0)$ è chiuso in X

($\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso), posso anche dire che $\overline{B} \subseteq f^{-1}(0)$

Notiamo che $x \in \overline{B} \iff \forall U \in I(x)$ si ha $U \cap B \neq \emptyset$
$\iff \forall \varepsilon > 0$ si ha $B(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$

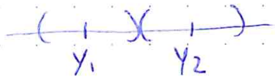
"l'aderenza" si può controllare usando un qualsiasi SFI

$$\iff \underbrace{\inf \{ d(x,b) \mid b \in B \}}_{f(x)} = 0$$

27 Mostrare che se $f : (\mathbb{R}, \tau_{cof}) \to (\mathbb{R}, \tau_{euclid})$ è continua, allora è costante.

1ª soluzione: se una tale f è continua, supponiamo che $y_1 \neq y_2$ nell'immagine, sia $\varepsilon = \frac{|y_1 - y_2|}{2}$

e $A_1 = B(y_1, \varepsilon)$, $A_2 \; B(y_2, \varepsilon)$



$f^{-1}(A_1)$ e $f^{-1}(A_2)$ aperti di $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ non vuoti perché $y_1, y_2 \in \mathrm{Imm}(f)$

e $f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2)$

$\Rightarrow f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) = \emptyset$ ↯ Due aperti non vuoti di $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ non sono mai disgiunti (perché hanno complementare finito)

2ª soluzione: fissato $y \in \mathbb{R}$ nell'immagine di f, $A_n = (y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n})$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{y\}$ e tutti gli A_n sono aperti

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = f^{-1}(y)$$
$$\shortparallel$$
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$$

Ora, $f^{-1}(A_n) \subseteq \mathbb{R}$ è aperto non vuoto per τ_{cof}, quindi ha complementare finito. Segue che $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$ ha complementare al più numerabile (il complementare dell'intersezione è l'unione dei complementari)

$f^{-1}(y)$ ha complementare al più numerabile $\forall y \in \mathrm{Imm}(f)$

Se per assurdo $\exists y_1 \neq y_2$ nell'immagine di f, seguirebbe $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) \neq \emptyset$, perché entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ con complementare al più numerabile.

(si poteva anche dire che $\{y\}$ è chiuso Euclideo, quindi

$f^{-1}(y)$ è chiuso cofinito, cioè finito o tutto lo spazio).

SUCCESSIONI IN SPAZI TOPOLOGICI

Def. Una successione in uno sp. top. X è una funzione $x: \mathbb{N} \to X$ e $x(n)$ si denota con x_n

Def. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X converge a $x \in X$ se $\forall U \in I(x)$ $x_n \in U$ definitivamente

In generale il limite può non esistere o anche non essere unico

Esempio: X insieme con la topologia indiscreta $\{\emptyset, X\}$, allora una qualsiasi successione x_n converge a un qualsiasi punto $x \in X$, visto che l'unico intorno è tutto X

15/11/2024
Talpo

SUCCESSIONI

Esempio: X insieme con la topologia discreta, allora

$x_n \to \bar{x} \iff x_n = \bar{x}$ definitivamente

(perché $\{\bar{x}\} \in I(\bar{x})$)

OSS: in generale, se X è uno spazio topologico e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X e def. costante $=$ a $\bar{x}$, allora $x_n \to \bar{x}$

(ma non è detto che questo sia l'unico limite)

$Y \subseteq X$ sottoinsieme di X sp. topologico

Def. la CHIUSURA PER SUCCESSIONI di Y è $\hat{Y} = \{x \in X \mid \exists \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ t.c. $y_n \to x\}$
$Y \subseteq X$

$Y \subseteq \hat{Y}$ (basta considerare le successioni costanti)

TEOREMA: $\forall Y \subseteq X$, si ha $\hat{Y} \subseteq \bar{Y}$ e se X è primo-numerabile, vale l'uguaglianza

Corollario: X è I-numerabile, $Y \subseteq X$ chiuso $\iff Y = \hat{Y}$

Questo dice che se X è I-numerabile, i limiti delle successioni caratterizzano univocamente la topologia.

DIM $\hat{Y} \subseteq \overline{Y}$: prendo $x \in X$ con $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ t.c. $y_n \to x$

Mostro che $\forall U \in I(x)$ si ha $U \cap Y \neq \emptyset$ $\longrightarrow$ i limiti delle successioni in Y sono punti aderenti a Y

Se $U \in I(x)$, per definizione di convergenza ho che

$y_n \in U$ definitivamente.

$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cap U \neq \emptyset \Rightarrow Y \cap U \neq \emptyset$

Supponiamo X I-numerabile.

Prendo $x \in \overline{Y}$ e costruisco $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y \mid y_n \to x$

Lemma: se $x \in X$ ammette un SFI al più numerabile, allora ne ammette uno $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, costituito da intorni "inscatolati", cioè $U_{i+1} \subseteq U_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

DIM. $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ SFI numerabile di $x \in X$,

poniamo $U_i = \bigcap_{j=1}^{i} W_j$

Questi sono tutti intorni di x in quanto intersezione finita di intorni

$(U, V \in I(x),\ x \in \mathring{U},\ x \in \mathring{V} \Rightarrow x \in \mathring{U} \cap \mathring{V} \subseteq (U \cap V)^\circ)$

Inoltre, $U \in I(x)$, allora $\exists\, i_0 \in \mathbb{N} \mid x \in W_{i_0} \subseteq U$. Ma $U_{i_0} \subseteq W_{i_0}$ e questo conclude

Prendiamo un SFI al più numerabile $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di intorni inscatolati e costruiamo y_n così:

$x \in \overline{Y}$ e $U_n \in I(x)$, segue che $U_n \cap Y \neq \emptyset$ e scelgo

$y_n \in U_n \cap Y$. Vediamo che $\{y_n\}$ converge a x:

se $U \in I(x)$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid U_{n_0} \subseteq U \Rightarrow \underset{\substack{\Downarrow \\ y_n}}{U_n} \subseteq U \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow y_n \in U$ definitivamente $y_n \to x$ e $x \in \hat{Y}$. $\square$

Esistono però sp. topologici X non I-numerabili in cui è vero che $\hat{Y} = \overline{Y}$ $\forall Y \subseteq X$, oppure che Y è chiuso $\Longleftrightarrow Y = \hat{Y}$

(Def. X si dice sequenziale se $Y \subseteq X$ è chiuso SSE $\hat{Y} = Y$

X si dice di Frechét - Urysohn se $\forall Y \subseteq X$ si ha $\hat{Y} = \overline{Y}$)

Proposizione $Y \subseteq X$, allora vale
$x \in \mathring{Y} \Rightarrow \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \to x$ si ha $x_n \in Y$ definitivamente

Se X è I-numerabile vale anche il viceversa

DIM ($\Rightarrow$) segue semplicemente dal fatto che se $x_n \to x$
$x \in \mathring{Y} \Rightarrow \mathring{Y} \in I(x)$ quindi $x_n \to x \Rightarrow x_n \in \mathring{Y} \subseteq Y$ def.

($\Leftarrow$) Usiamo il teo(*) ricordando che
$\mathring{Y} = X \setminus \overline{(X\setminus Y)}$

((*) X I-num, allora $\forall Y \subseteq X$, $\overline{Y} = \hat{Y}$)

Prendo $x \in X$ per cui valga $x_n \to x$, allora
$x_n \in Y$ definitivamente e suppongo per assurdo
che $x \notin \mathring{Y} \Rightarrow x \in \overline{X\setminus Y} = \widehat{X\setminus Y}$

Per il teo. $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X\setminus Y \mid z_n \to x$ ↯
$\Downarrow$
$z_n \notin Y$ (assurdo perché questa successione non è contenuta definitivamente in Y)

$\square$

Def. $f: X \to Y$ continua per successioni (o sequenzialmente continua)
se $x_n \to x$ in $X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ in Y

Proposizione $f: X \to Y$ continua $\Rightarrow$ seq. continua e vale il viceversa se X è I-numerabile

DIM. $f: X \to Y$ continua e prendiamo $x_n \to x$ in X.
Verifichiamo che $f(x_n) \to f(x)$ in Y.
$U \in I(f(x))$. f continua $\Rightarrow f^{-1}(U) \in I(x)$ e quindi
$x_n \in f^{-1}(U)$ definitivamente. Allora $f(x_n) \in U$ definitivamente come volevo.
$\Updownarrow$
$f(x_n) \in U$

Supponendo che X sia I-numerabile
f seq. continua. $A \subseteq Y$ aperto, mostriamo che $f^{-1}(A) \subseteq X$
è aperto. Preso $x \in f^{-1}(A)$, mostriamo che $x \in \mathring{(f^{-1}(A))}$ usando

la prop. precedente.

Verifichiamo quindi che se $x_n \to x$, allora $x_n \in f^{-1}(A)$ def.
f seq. continua, $f(x_n) \to f(x)$ in Y e $A \subseteq Y$ è un intorno di $f(x)$. Segue che $f(x_n) \in A$ definitivamente, cioè $x_n \in f^{-1}(A)$ def. $\square$

Nota: per spazi non I-numerabili ci sono nozioni di "successioni generalizzate" che descrivono bene la topologia.

TOPOLOGIA DI SOTTOSPAZIO

Sia (X,τ) sp. topologico e $Y \subseteq X$ sottoinsieme.

Def. la top. di sottospazio di Y (o top. indotta) è la top. $\tau|_Y$ meno fine tra tutte quelle che rendono l'inclusione $i: Y \to X$ una funz. continua.

OSS è ben definita perché la top. discreta su Y rende l'inclusione continua e intersezione di topologie è una topologia.

Proposizione $\tau|_Y$ coincide con $\{Y \cap A \mid A \subseteq X \text{ aperto}\} \subseteq P(Y)$

DIM. vediamo che questa è una topologia (facile)
Inoltre l'inclusione è continua perché se $A \subseteq X$ aperto, allora $i^{-1}(A) = A \cap Y$, che è aperto.
Se τ' è un'altra topologia su Y che rende $i: Y \to X$ continua allora $A \subseteq X$, $\underset{A \cap Y}{\overset{\shortparallel}{i^{-1}(A)}} \in \tau'$ e da questo segue che la top. dell'enunciato è la meno fine tra quelle che rendono i continua. $\square$

D'ora in poi tutti i sottoinsiemi saranno dotati della top. di sottospazio

OSS Passando ai complementari

$C \subseteq Y$ chiuso $\iff \exists D \subseteq X$ chiuso $\mid C = Y \cap D$

($C \subseteq Y$ chiuso $\iff Y \setminus C$ aperto

$\iff \exists B \subseteq X$ aperto $\mid B \cap Y = Y \setminus C$ e si prende

$D = X \setminus B$ che è chiuso in X e $D \cap Y = C$)

<u>OSS</u> $\mathcal{B}$ base di τ su X, allora $\mathcal{B}' = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base della top. di ssp.

($A \subseteq Y$ aperto $\Rightarrow \exists A' \subseteq X \mid A = A' \cap Y$ e $A' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}''} B$ con $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}$

segue $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}''} (B \cap Y)$)

<u>OSS</u> $A \subseteq Y$ aperto $\not\Rightarrow$ $A \subseteq X$ aperto

Esempio: la top. di ssp. indotta dalla top. euclidea di $\mathbb{R}^2$ su una retta è la top. Euclidea di $\mathbb{R}$ e nessun aperto $\neq \emptyset$ della retta sarà aperto in $\mathbb{R}^2$ (i segmenti non sono aperti in $\mathbb{R}^2$)

È vero però che se $A \subseteq X$ aperto e $A \subseteq Y$, allora A aperto anche in Y perché $A \cap Y = A$

Esempio: $X = \mathbb{R}$ con la top. Euclidea, $Y = [0, 1)$

1) $[0, \frac{1}{2})$ aperto in Y
$\quad = Y \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

2) $[\frac{1}{2}, 1)$ è un chiuso in Y, es. $[\frac{1}{2}, 1) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \cap Y$

Prop. ("proprietà universale della topologia di sottospazio")

X, Z sp. topologici e $Y \subseteq Z$ dotato della top. di sottospazio
Se $i: Y \to Z$ inclusione, $f: X \to Y$ continua $\Leftrightarrow$ $i \circ f: X \to Z$ lo è

(<u>OSS</u> questa proprietà caratterizza univocamente la topologia di sottospazio)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "i \circ f"'] & Y \arrow[r, "i"] & Y \subseteq Z \end{tikzcd}$$

<u>DIM.</u> $i \circ f$ continua $\Leftrightarrow \forall A \subseteq Z$ aperto
$(i \circ f)^{-1}(A) \subseteq X$ aperto
$= f^{-1}(\underbrace{i^{-1}(A)}_{\text{aperto di } Y})$

$\Leftrightarrow \forall B \subseteq Y$ aperto, $f^{-1}(B) \subseteq X$ è aperto

$\Leftrightarrow f$ continua $\square$

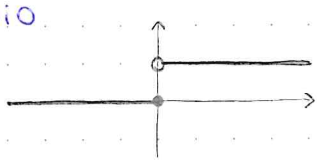
gli aperti $B \subseteq Y$ sono esattamente $i^{-1}(A)$ con $A \subseteq Z$ aperto "la restrizione di una funzione continua è continua"

Proposizione $f: X \to Z$ continua e $Y \subseteq X$ con la top. di ssp. allora $f|_Y : Y \to Z$ continua

DIM. $f|_Y = f \circ i$ e queste sono entrambe continue $\square$

OSS Non è vero il viceversa, ad esempio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$



$f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ è continua, f no

sottoinsieme + top. di ssp. = ssp. topologico

*** Proposizione** X sp. topologico, $Y \subseteq X$ ssp. topologico

1) X è II-numerabile $\Rightarrow$ Y II-numerabile

2) X I-numerabile $\Rightarrow$ Y I numerabile

3) X separabile $\not\Rightarrow$ Y separabile

4) X metrizzabile $\Rightarrow$ Y metrizzabile e la top. di ssp. coincide con quella indotta dalla distanza ristretta

5) X metrizzabile $\wedge$ separabile $\Rightarrow$ Y separabile

19/11/2024
Talpo

Dimostrazione della proposizione *

① Se $\mathcal{B}$ è una base di X, con $|\mathcal{B}| \leq |\mathbb{N}|$, abbiamo visto che $\mathcal{B}' = \{\hat{B} \cap Y \mid \hat{B} \in \mathcal{B}\}$ è una base di Y e chiaramente $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}| \leq |\mathbb{N}|$ e quindi Y è II-numerabile

② Prendo $y \in Y$ e costruisco un SFI di y al più numerabile.
So che $\exists$ un SFI $\Omega \subseteq I(y)$ al più numerabile in X
Considero $\Omega' = \{U \cap Y \mid U \in \Omega\}$ e dico che questo è un SFI di y in Y.
Poi $|\Omega'| \leq |\Omega|$ il che concluderebbe.
Ω' è costituito da intorni di y in Y, perché se $U \in \Omega$, $\exists A \subseteq X$ aperto con $y \in A \subseteq U$ e dunque $y \in \underbrace{A \cap Y}_{\text{aperto in } Y} \subseteq U \cap Y$

Prendo V intorno di y in Y e devo far vedere che contiene un $U \cap Y$ per un certo $U \in \Omega$.

Si ha che $y \in \underbrace{\mathring{V}}_{\text{in } Y}$, che è aperto in Y, quindi $\exists A \subseteq X$ aperto t.c. $\mathring{V} = A \cap Y$.

Ora $A \in I(y)$ in X. Visto che Ω è un SFI in X, $\exists U \in \Omega \mid y \in U \subseteq A$.

A questo punto $y \in \underbrace{U \cap Y}_{\in \Omega'} \subseteq A \cap Y = \mathring{V} \subseteq V$ come volevo.

③ Se X è separabile non è detto che Y lo sia.

Uno spazio Y qualsiasi può sempre essere realizzato come sottospazio di un separabile.

Dato Y sp. topologico, considero $X = Y \cup \{\infty\}$ dove $\infty \notin Y$ e metto su X la topologia i cui aperti sono $\emptyset$ e $A \cup \{\infty\}$ (al variare di A) dove $A \subseteq Y$ è aperto. È facile vedere che questa è una topologia. Il singoletto $\{\infty\}$ è denso, visto che tutti gli aperti $\neq \emptyset$ lo contengono. Rimane da notare che la top di ssp. indotta da $Y \subseteq X$ è la top. originale di Y:

$\emptyset \cap Y = \emptyset$

$(A \cup \{\infty\}) \cap Y = A$ che è aperto in Y per def.

e tutti gli aperti di Y si scrivono come intersezione di un aperto di X con Y, per def. della topologia su X

④ Se X è metrizzabile, con distanza d, allora la top. di ssp. su $Y \subseteq X$ coincide con la top. indotta dalla distanza ristretta.

Chiamo τ' la top. su Y indotta da $d' = d|_{Y \times Y}$ $(d: X \times X \to \mathbb{R})$ e $\tau|_Y$ la top. di ssp.

$\tau' \subseteq \tau|_Y$ basta vedere che le palle aperte di Y sono anche aperti di $\tau|_Y$

in effetti, se $y \in Y$ e $R \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{palla} \\ \text{aperta in } X}}{B_X(y,R)} \cap Y = \underset{\substack{\Downarrow \\ y' \iff d'(y,y') < R}}{B_Y(y,R)} \quad \text{è un aperto di } \tau|_Y$$

contiene $x \iff d(x,y) < R$

Per mostrare che $\tau|_Y \subseteq \tau'$, si può procedere "a mano", oppure si può mostrare che τ' rende l'inclusione continua, che segue dal fatto che è 1-lipschitziana.

$$d(i(y), i(y')) \leq d'(y,y')$$

ma per def. di d' vale "=".

(5) X metrizzabile e separabile $\Rightarrow$ anche Y lo è.

per spazi metrizzabili, separabile $\iff$ II-numerabile

X separabile e metrizzabile $\Rightarrow$ II-numerabile

$\Rightarrow Y$ è II-numerabile $\Rightarrow$ separabile
(1) (e metrizzabile)

$\square$

Abbiamo visto l'esempio di aperti $A \subseteq Y$ di un ssp. che non sono aperti nell'ambiente (e analogamente per i chiusi)

Proposizione

(1) $Y \subseteq X$ aperto in X e $A \subseteq Y$ aperto in Y, allora A è aperto anche in X

("aperto di un aperto è aperto")

(2) $Y \subseteq X$ è chiuso in X, $C \subseteq Y$ chiuso in Y, allora C è chiuso anche in X.

("chiuso di un chiuso è chiuso")

DIM. (1) $A \subseteq Y$ aperto. Per def. di ssp. $\exists B \subseteq X$ aperto t.c. $A = B \cap Y$. Segue che A è aperto in X in quanto intersezione finita di aperti di X.

② $A \subseteq Y$ chiuso $\Rightarrow \exists\, C \subseteq X$ chiuso t.c. $A = C \cap Y$, allora è chiuso in X in quanto intersezione di chiusi in X. $\square$

FUNZIONI APERTE E CHIUSE

Def. $f: X \to Y$ tra sp. topologici si dice

- aperta se manda aperti di X in aperti di Y
  $f(A) \subseteq Y$ è aperto $\forall A \subseteq X$ aperto
- chiusa se $f(C) \subseteq Y$ è chiuso $\forall\, C \subseteq X$ chiuso

Queste due condizioni NON sono equivalenti

ESEMPI: ① f omeomorfismo $\Rightarrow f$ sia aperta che chiusa
(f^{-1} continua, $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$)

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
è chiusa ($\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ chiuso) ma non aperta

③ $i: (0,1) \hookrightarrow \mathbb{R}$ aperta
(per la prop. precedente), ma non è chiusa perchè $(0,1)$ è chiuso in sé stesso e $i(0,1) =$
$= (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ non è chiuso

④ $i: \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ non è né aperta né chiusa

Def. Una funzione $f: X \to Y$ si dice IMMERSIONE TOPOLOGICA se f induce un omeomorfismo $X \to f(X)$, dove $f(X) \subseteq Y$ ha la top. di ssp.

OSS ① Un'immersione topologica è iniettiva

② $f: X \to Y$ è continua e biunivoca
allora f^{-1} è continua $\Leftrightarrow f$ è aperta
$\Leftrightarrow f$ è chiusa
(f^{-1} continua $\Leftrightarrow \underbrace{(f^{-1})^{-1}(A)}_{= f(A)}$ aperto in Y $\forall A \subseteq X$ aperto
idem per i chiusi)

③ $Y \subseteq X$ ssp. topologico, l'inclusione è un'immersione topologica

ESEMPI: ① $Y \subseteq X$ ssp. la cui topologia non sia quella discreta, la funzione

$$i : (Y, \tau_{disc}) \to (X, \tau)$$

è continua e iniettiva ma non è un' immersione topologica

② $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = (\cos t, \sin t)$

L' immagine di f è $S^1 = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1 \}$ ← dotato della top. di ssp. di $\mathbb{R}^2$

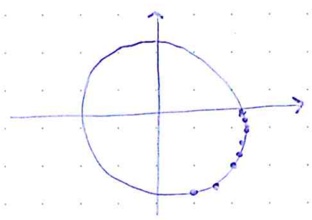
$f : [0, 2\pi) \to S^1$

continua e biunivoca.

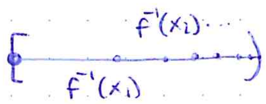
È un' immersione topologica? NO

Ad esempio si può mostrare che $f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$ non è continua

Posso costruire una succ. $\{x_n\}$ in S^1 con coordinata $y < 0$ che convergono a $(1,0)$



$x_n \to (1,0)$. Se f^{-1} fosse continua, seguirebbe che $f^{-1}(x_n) \to f^{-1}(1,0) = 0 \in [0, 2\pi)$



TOPOLOGIA PRODOTTO

Reminder: X_i, $i \in I$, insiemi, il loro prodotto cartesiano è

$$\prod_{i \in I} X_i = \{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \}$$

$f \in \prod_{i \in I} X_i$ si scrive spesso come $(f(i))_{i \in I}$ o direttamente

$(x_i)_{i\in I}$ $\quad x_i \in X_i$ $\quad (x_i = f(i))$

x_i si chiama coordinata i-esima di $(x_i)_{i\in I} \in \prod X_i$

Fissato $j\in J$, c'è una proiezione sul j-esimo fattore

$$\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$$
$$(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$$

Più in generale, se $J \subseteq I$, c'è una proiezione $\pi_J : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in J} X_i$

(il caso precedente è $J=\{j\}$) $\qquad (x_i)_{i\in I} \mapsto (x_i)_{i\in J}$

Supponiamo ora che (X_i, τ_i), $i\in I$, siano sp. topologici.

Def. la TOPOLOGIA PRODOTTO su $\prod X_i$ è la top. meno fine tra quelle che rendono tutte le proiezioni su singoletti continue (π_j)

(questa è una buona def. perché c'è almeno una top. che soddisfa la richiesta, la top. discreta e intersezioni di top. è una top.)

Proposizione la top. prodotto ha come prebase la famiglia

$\{\pi_j^{-1}(A) \mid j\in I,\ A\subseteq X_j \text{ è aperto}\}$, $\quad \pi_j^{-1}(A) = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod X_i \mid x_j \in A\}$

$\pi_j^{-1}(A)$ è l'insieme di I-uple che hanno coordinata j-esima in A

DIM. La top. prodotto è la top. generata da $\pi_j^{-1}(A)$ al variare di $j\in I$ e $A\subseteq X_j$ aperto, semplicemente perché π_j è continua $\iff$ $\pi_j^{-1}(A)$ è aperto $\forall A\subseteq X_j$ aperto

Abbiamo visto che la top. generata da $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ha $S\cup\{X\}$ come prebase, quindi la top. prodotto ha $\{\pi_j^{-1}(A) \mid j\in I, A\subseteq X_j \text{ aperto}\} \cup \{\prod_{i\in I} X_i\}$ come prebase, e aggiungere $\prod X_i$ non serve, perché $X_j \subseteq X_j$ è aperto e $\pi_j^{-1}(X_j) = \prod_{i\in I} X_i$

$\square$

Corollario una base della top. prodotto è

$$\mathcal{B} = \{\pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k) \mid k\in \mathbb{N},\ i_j \in I,\ A_j \subseteq X_{i_j} \text{ aperto}\}$$

$\mathcal{B} = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_{i_j} \in A_j \ \forall\ 1 \leq j \leq k\}$

È anche immediato vedere che se $\mathcal{B}_i$ è una base di τ_i su X_i, allora $\mathcal{B}' = \{\pi^{-1}_{i_1}(A_1) \cap \dots \cap \pi^{-1}_{i_k}(A_k) \mid k \in \mathbb{N}, i_j \in I, A_j \in \mathcal{B}_{i_j}\}$ è pure una base della top. prodotto

OSS. I finito $I = \{1, \dots, k\}$

una base della top. prodotto è data da

$$\{\underbrace{A_1 \times \dots \times A_k}_{\shortparallel} \mid A_i \subseteq X_i \text{ è aperto}\}$$

$$\pi_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_k^{-1}(A_k)$$

e se $J \subseteq I = \{1, \dots, k\}$

$J = \{1, \dots, h\}$

$$\pi_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_h^{-1}(A_h) =$$
$$= A_1 \times \dots \times A_h \times X_{h+1} \times \dots \times X_k$$

(*) Allora

$\left\{\prod_{i\in I} U_i \mid U_j \subseteq X_j \text{ è aperto } \forall j \text{ e non vale l'} = \text{ per un \# finito di indici}\right\}$

è una base della top. prodotto

Dati sp. topologici X_i, $i \in I$ abbiamo dotato $\prod X_i$ della top. prodotto, una cui base è

21/11/2024
Talpo

$\{\pi^{-1}_{i_1}(A_1) \cap \dots \cap \pi^{-1}_{i_k}(A_k) \mid k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in I, A_j \subseteq X_j \text{ è aperto}\}$

$\shortparallel$

$\{(x_i)_{i\in I} \mid x_{i_j} \in A_j \ \forall j = 1, \dots, k\} = \prod_{i\in I} U_i$ dove $\begin{cases} U_i = X_i & \text{se } i \neq i_1, \dots, i_k \\ U_{i_j} = A_j & \text{se } j = 1, \dots, k \end{cases}$ (*)

Nota: se $|I| = +\infty$, c'è un' altra topologia su $\prod_{i\in I} X_i$, in generale più fine della top. prodotto, i cui aperti di base sono i prodotti di aperti, senza ulteriori restrizioni.

Questa topologia si chiama "box topology"

OSS: un caso particolare è il prodotto di due spazi $X \times Y$ in cui una base è $\{A \times B \mid A \subseteq X, B \subseteq Y \text{ sono aperti}\}$

OSS: non è vero in generale che un aperto di $X \times Y$ è un prodotto di aperti.

Vedremo tra poco che $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{m+n}$, e ad esempio in $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ci sono aperti che non sono prodotto di due aperti (es. le palle aperte per la dist. d_2)

OSS: Se X, Y, Z sono tre spazi, $X \times Y \times Z \cong (X \times Y) \times Z$

insiemisticamente. È facile verificare che l'identificazione naturale è un omeomorfismo.

Proposizione (X, d_X) e (Y, d_Y) sp. metrici
La top. prodotto su $X \times Y$ coincide con la top. indotta da una qualsiasi tra le seguenti distanze su $X \times Y$:

$$d_1((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_Y(y,y')$$

$$d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{d_X(x,x')^2 + d_Y(y,y')^2}$$

$$d_\infty((x,y),(x',y')) = \max\{d_X(x,x'), d_Y(y',y)\}$$

Esercizio: sono distanze e sono topologicamente equivalenti (come per $\mathbb{R}^n$)

DIM. Mostro che la top. τ_∞ indotta da d_∞ su $X \times Y$ coincide con la top. prodotto $\tau_X \times \tau_Y$

Notiamo che $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ sono 1-lipschittiane

$$d_X(x,x') \leq d_\infty((x,y),(x',y')) = \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\}$$

Analogamente per π_2

$\Rightarrow$ π_1 e π_2 continue per τ_∞ e per def. di topologia prodotto $\tau_X \times \tau_Y \subseteq \tau_\infty$.

Mostriamo ora che le palle per d_∞ sono aperte per $\tau_X \times \tau_Y$ e questo conclude

Infatti: $B_\infty((x,y),R) = B_X(x,R) \times B_Y(y,R)$

$$\Downarrow$$

$$(x',y') \Longleftrightarrow \max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\} < R$$

$$\Updownarrow$$

$$d_X(x,x') < R \wedge d_Y(y,y') < R$$

□

Corollario: se $n, m \in \mathbb{N}$, allora $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$

(usando la bigezione ovvia e la top. Euclidea su tutti gli spazi)

DIM. d_2 di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ è proprio (con la big. ovvia) la dist. euclidea di $\mathbb{R}^{n+m}$. $\square$

Teorema ("proprietà universale del prodotto")

X_i, $i \in I$ e Y sp. topologici

$f: Y \to \prod_{i\in I} X_i$ funzione.

Allora f è continua $\Leftrightarrow$ $\pi_j \circ f : Y \to X_j$ è continua $\forall j \in I$

DIM. $(\Rightarrow)$ f continua $\wedge$ π_j continua (per def. di top. prodotto) allora $\pi_j \circ f$ continua perché composizione di continue

$(\Leftarrow)$ Basta verificare la continuità di f usando la prebase del prodotto

$$\{\pi_j^{-1}(A) \mid j \in I,\ A \subseteq X_j \text{ aperto}\}$$

Infatti $f^{-1}(\pi_j^{-1}(A)) = (\pi_j \circ f)^{-1}(A)$, che è aperto in Y perché $\pi_j \circ f$ è continua per ip. e $A \subseteq X_j$ è aperto. $\square$

Esempio: $J \subseteq I$. La proiezione $\prod_{i\in I} X_i \to \prod_{j \in J} X_j$ è continua.
Usando il teo. basta verificare che componendo con le proiezioni di $\prod_{i \in J} X_i$ ottengo funt. continue, che è vero perché ottengo le proiezioni di $\prod_{i\in I} X_i$

(in realtà la validità del teorema caratterizza univocamente la top. prodotto. In realtà, la "vera" prop. universale di $\prod_{i\in I} X_i$ è la seguente: $\forall$ sp. top. T con funt. continue $f_i : T \to X_i$,
$\exists!$ $f: T \to \prod_{i\in I} X_i$ continua t.c. $\pi_j \circ f = f_j$ $\forall j \in I$)

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_j"'] & \prod_{i\in I} X_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

def. di prodotto su una categoria qualsiasi

$f: X \to Y$ è aperta se $f(A) \subseteq Y$ è aperto $\forall A \subseteq X$ aperto

Proposizione le proiezioni di un prodotto $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ sono funzioni aperte

Lemma Se $\mathcal{B}$ è una base di X e $f: X \to Y$ è una funz. allora f aperta $\Leftrightarrow$ $f(B) \subseteq Y$ è aperto $\forall B \in \mathcal{B}$

DIM. ($\Rightarrow$) Banale, $B \in \mathcal{B}$ è un aperto di X

($\Leftarrow$) Dato $A \subseteq X$ aperto, $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ per qualche $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$

$$f(A) = f\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} f(B)$$

è aperto in Y in quanto unione di aperti $\square$

DIM. (Prop.) Usiamo la base "standard" del prodotto

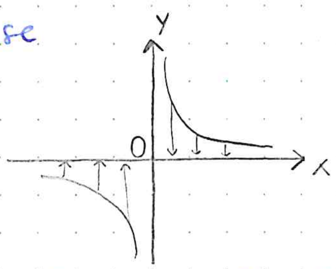
$$\left\{ \prod_{i \in I} U_i \;\middle|\; U_j \subseteq X_j \text{ aperto, } \neq \text{ per un \# finito di indici} \right\}$$

Fissiamo $i_0 \in I$ e mostriamo che π_{i_0} è aperta.

$$\pi_{i_0}\left(\prod_{i \in I} U_i\right) = U_{i_0} \text{ se } U_i \neq \emptyset \ \forall i \neq i_0$$
$$= \emptyset \quad \text{altrimenti.}$$

In ogni caso è aperto. $\square$

In generale, le proiezioni non sono chiuse



Esempio: $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$

e prendiamo $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$

È chiuso perché è $f^{-1}(1)$ dove $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$ e $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso.

Si ha $\pi_1(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, che non è chiuso.

ESERCIZI

28. $A \subseteq X$, la frontiera di A è $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

(1) $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall U \in I(x)$ si ha $U \cap A \neq \emptyset$ e $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

(2) Trovare un esempio di X e A t.c. $\partial A = \emptyset$, $A \neq \emptyset, X$.

Soluzione : (1) $\mathring{A} = X \setminus (\overline{X\setminus A})$, quindi

$$x \in \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} \iff x \in \bar{A},\ x \notin \mathring{A}$$

$$\swarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$x \in \overline{X \setminus A}$$

$$\forall U \in I(x),\ U \cap A \neq \emptyset \qquad\qquad \downarrow$$

$$\forall U \in I(x),\ U \cap (X\setminus A) \neq \emptyset$$

(2) $\partial A = \emptyset \iff A$ è sia aperto che chiuso ("clopen")

vorrei dimostrare questa

$$\Updownarrow$$

$$A = \mathring{A} \text{ e } A = \bar{A}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathring{A} = \bar{A} \qquad (\text{perché } \mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A})$$

$$\Updownarrow$$

$$\partial A = \mathring{A} \setminus \bar{A} = \emptyset$$

Posso prendere X con $|X| \geq 2$ e la top. discreta, $A = \{x\}$

funziona

Funziona anche $(0,1) \cup (1,2)$

Es. più interessante: $X = (0,1) \cup (2,3) \subseteq \mathbb{R}$

come ssp. top., allora $A = (0,1) \subseteq X$ è sia aperto che chiuso.

29. X più che numerabile con la top. cofinita

Dimostrare che X non è I-numerabile.

Soluzione: supponiamo che ogni punto abbia un SFI al più numerabile. Fissiamo $x \in X$ e sia $\underset{\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}}{\Omega \overset{\shortparallel}{\subseteq} I(x)}$ un SFI al più numerabile.

Voglio trovare un intorno che non contenga nessuno degli U_n.

U_n contiene un aperto $\neq \emptyset$, quindi ha complementare finito $(A \subseteq U_n \iff X \setminus U_n \subseteq \underbrace{X \setminus A}_{\text{finito}})$. $F_n := X \setminus U_n$, un sottoinsieme finito di X. Sia $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ è al più numerabile, quindi $\exists\, \bar{x} \in X$ t.c. $\bar{x} \notin F$ e $\bar{x} \neq x$. Dico che $U = X \setminus \{\bar{x}\}$ è un intorno di x t.c. $U_n \not\subseteq U$ $\forall n \in \mathbb{N}$. È chiaro che U è aperto e $x \in U$, dunque $U \in I(x)$ e

$$U_n \subseteq U \iff \underset{\{\bar{x}\}}{X \setminus U} \subseteq \underset{F_n}{X \setminus U_n}$$ ↯ per costruzione di $\bar{x}$

30. (uno spatio non sequentiale)

X più che numerabile con la top. conumerabile.

(1) $\{x_n\} \subseteq X$, $x_n \to \bar{x} \iff x_n = \bar{x}$ definitivamente

(2) Trovare un chiuso per succ. di X che non sia chiuso.

(questo implica che X non è sequentiale, quindi nemmeno I-numerabile)

Solutione: $\Leftarrow$ Sempre vera

$\Rightarrow$ Sia $x_n \to \bar{x}$. Prendo $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_n \neq \bar{x}\} \subseteq X$

Questo A è un chiuso per la top. conumerabile

e $\bar{x} \notin A \Rightarrow$ il complementare $X \setminus A \in I(\bar{x})$

Per def. di convergenta devo avere $x_n \in X \setminus A$ definitivamente

$\Rightarrow x_n = \bar{x}$ definitivamente

(questo vuol dire che le successioni si comportano come se la topologia fosse quella discreta...)

(2) è chiaro che tutti i sottoinsiemi di X sono chiusi per succ., basta trovarne uno che non sia chiuso, ad esempio $X \setminus \{x_0\} \subseteq X$ per qualche $x_0 \in X$ non è al più numerabile.

(notare che la funtione $Id: (X, \tau_{conum}) \to (X, \tau_{disc})$ è continua per successioni ma non è continua

Se $x_n \to \bar{x}$ in (X, τ_{conum}) allora $x_n = \bar{x}$ definitivamente e dunque $x_n \to \bar{x}$ in (X, τ_{disc}))

Addendum: X più che numerabile con la top. cofinita è sequentiale

Infatti, devo vedere che se $C \subseteq X$ è chiuso per successioni, allora è chiuso, cioè finito o tutto X.

Supponiamo C infinito e $\neq X$ e mostriamo che non è chiuso per successioni. Visto che C è ∞, $\exists \{x_n\} \subseteq C$ t.c. $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$.

Prendo $\bar{x} \in X \setminus C$. Se $x_n \to \bar{x}$ questo conclude.
($\uparrow$ rimane vero se ci metto un qualsiasi $y \in X$)

$U \in I(\bar{x})$, allora $X \setminus U$ è finito (U contiene un aperto $\neq \emptyset$) e da questo segue che $x_n \in U$ definitivamente, quello che volevo.

22/11/2024
Talpo

Immersioni dei fattori nel prodotto

Dati sp. topologici X_i, $i \in I$ e fissato $i_0 \in I$, esistono delle immersioni naturali del X_{i_0} in $\prod_{i \in I} X_i$.

Scelgo $\bar{x}_i \in X_i$ per tutti gli $i \in I$, $i \neq i_0$

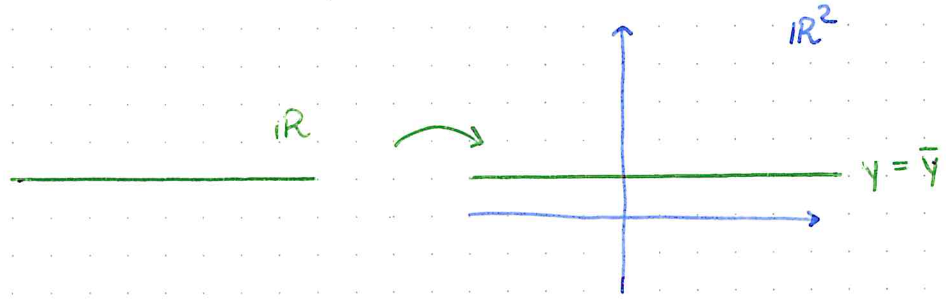
In particolare suppongo $X_i \neq \emptyset \ \forall i$

$$j_{i_0} : X_{i_0} \to \prod_{i \in I} X_i$$
$$x \mapsto (x_i)_{i \in I}$$

(dipende dalla scelta degli $\bar{x}_i$)

dove $x_i = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{se } i \neq i_0 \\ x & \text{se } i = i_0 \end{cases}$

Esempio: se guardo $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, fissato $\bar{y} \in \mathbb{R}$ nel secondo fattore, posso mandare il primo fattore nel prodotto tramite
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto (x, \bar{y})$$



Propositione j_{i_0} è un' immersione topologica

DIM. Devo vedere che j_{i_0} induce un omeomorfismo del dominio con la sua immagine come sottospazio del prodotto. È palese che j_{i_0} è iniettiva.

Vediamo che è continua con la prop. universale

$$\pi_j \circ f_{i_0} = X_{i_0} \to X_i$$

è la costante $\bar{x}_j$ se $j \neq i_0$, ed è l'identità di X_{i_0} se $j = i_0$.

Queste sono continue quindi lo è anche f_{i_0}.

L'inversa insiemistica di $f_{i_0}: X_{i_0} \to f_{i_0}(X_{i_0})$ è chiaramente la restrizione di $\pi_{i_0}: \prod_{i \in I} X_i \to X_{i_0}$ al ssp. $f_{i_0}(X_{i_0})$.

La proiezione π_{i_0} è continua e quindi restringendola a $f_{i_0}(X_{i_0})$ rimane continua, il che conclude. $\square$

In modo analogo si dimostra anche:

Proposizione Se $J \subseteq I$ e fissato $\bar{x}_i \in X_i$ per $i \notin J$ la funzione

$$f: \prod_{i \in J} X_i \to \prod_{i \in I} X_i$$
$$(x_i)_{i \in I} \mapsto (y_i)_{i \in I}$$

dove $y_i = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{se } i \notin J \\ x_i & \text{se } i \in J \end{cases}$

è pure un'immersione topologica.

TOPOLOGIA DELLA CONVERGENZA PUNTUALE

X spazio topologico e Y insieme.

$$F(Y, X) = \{ f: Y \to X \text{ funzione} \}$$

è in bigezione naturale

$$X^Y = \prod_{y \in Y} X_y \qquad X_y = X \quad \forall y \in Y$$

Esempio: $Y = [0,1] \subset \mathbb{R}$

$$X^{[0,1]} = \{ f: [0,1] \to X \}$$

(anche se, come in questo esempio, Y ha una topologia naturale, questa non giocherà nessun ruolo)

Su $F(Y, X) = \prod_{y \in Y} X$ diè la top. prodotto, che in questo contesto si chiama "topologia della conv. puntuale" perché vale la seguente

Proposizione $f_n : Y \to X$ è una succ. in $F(Y,X)$ allora $f_n \to \bar{f}$ in $F(Y,X)$ SSE $\forall y \in Y$ $f_n(y) \to \bar{f}(y)$ in X.

con la topologia prodotto

DIM. ($\Rightarrow$) usando l'identificazione $F(Y,X) = \prod_{y \in Y} X$, la valutazione di $f \in F(Y,X)$ in $y \in Y$ è esattamente la proiezione π_y, cioè $\pi_y(f) = f(y)$

Ora, le proiezioni sono continue, quindi sequenzialmente continue e segue che

$$f_n \to \bar{f} \Rightarrow \underset{f_n(y)}{\pi_y(f_n)} \to \underset{\bar{f}(y)}{\pi_y(\bar{f})} \quad \forall y \in Y$$

($\Leftarrow$) suppongo che f_n sia una succ. in $F(Y,X)$ t.c. $\forall y \in Y$ $f_n(y) \to \bar{f}(y)$

Prendo $U \in I(\bar{f})$ in $F(Y,X)$ e mostro che $f_n \in U$ definitivamente.

Osservo che U contiene sicuramente un aperto di base che contiene $\bar{f}$. Basta mostrare il claim con U aperto di base che contiene $\bar{f}$.

U ap. di base $\Rightarrow$ allora esistono $y_1, \dots, y_k \in Y$ e aperti $A_1, \dots, A_k \subseteq X$ aperti t.c. $U = \pi_{y_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{y_k}^{-1}(A_k)$

$f_n \in U \Leftrightarrow f_n(y_i) \in A_i \quad \forall i = 1, \dots, k$

Osservo che $\bar{f} \in U \Rightarrow \bar{f}(y_i) \in A_i$, e quindi $A_i \in I(\bar{f}(y_i))$

Ora sapendo che $f_n(y_i) \to \bar{f}(y_i)$ deduco che

$f_n(y_1) \in A_1$ def. $(\forall n \geq n_1)$

$\vdots$

$f_n(y_k) \in A_k$ def. $(\forall n \geq n_k)$

$\bar{n} := \max\{n_i \mid i = 1, \dots, k\}$

ho dunque che $f_n(y_i) \in A_i \quad \forall n \geq \bar{n}$
$\forall i = 1, \dots, k$

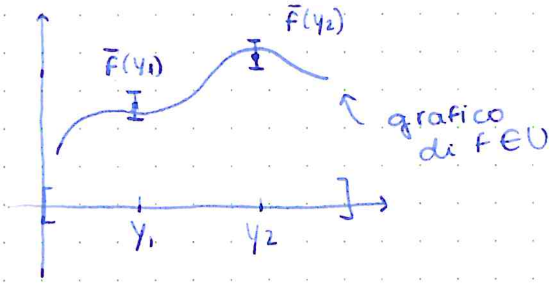
SSE

cioè $f_n \in U \quad \forall n \geq \bar{n}$ $\square$

Un intorno U di base come quello nella dimostrazione seleziona un $\# < +\infty$ di punti di Y e un intorno di ogni punto, e comprende tutte le funzioni che "passano per questi intorni".

Se $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,1]$

$\bar{f} \in U$



ASSIOMI DI SEPARAZIONE

Def. X spazio topologico

Si dice che

① X è T_1 (o "soddisfa l'assioma T_1")

se $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists U \in I(x)$ t.c. $y \notin U$

$(\Rightarrow \exists V \in I(y)$ t.c. $x \notin V)$

② X è T_2 ("X è di Hausdorff")

se $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists U \in I(x)$, $V \in I(y)$ t.c. $U \cap V = \emptyset$

Oss • è equivalente richiedere che esistano intorni aperti che soddisfano le richieste

• $T_2 \Rightarrow T_1$ (ovvio)

e il viceversa non vale

Esempio: X infinito con la topologia cofinita, allora X è T_1

$x \neq y$

$X \setminus \{y\}$ intorno di x che non contiene y

ma non T_2

U e V aperti $\neq \emptyset$ allora $U \cap V \neq \emptyset$

$U \cap V$ ha complementare finito e X è infinito

Proposizione X metrizzabile $\Rightarrow X$ è T_2

DIM. d distanza che induce la top. di X

e $x \neq y$ in X, allora $U = B(x, \frac{d(x,y)}{2})$
$V = B(y, \frac{d(x,y)}{2})$

sono intorni di x e y e sono disgiunti, perché se

z è nell'intersezione

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} = d(x,y) \quad \text{↯}$$

□

Proposizione X è T_2 (in particolare se è metrizzabile)

i limiti di succ. sono unici (se esistono)

DIM. $x_n \to x \ \wedge \ x_n \to y$ con $x \neq y$

per la prop. T_2 ho $U \in I(x)$, $V \in I(y)$ t.c. $U \cap V = \emptyset$

Per def. di convergenza dovrei avere $x_n \in U$ e $x_n \in V$

definitivamente, cioè $x_n \in U \cap V = \emptyset$ def. ↯ □

Proposizione X è $T_1 \iff \forall x \in X$, $\{x\} \subseteq X$ è chiuso
"i punti sono chiusi"

$\iff$ la top di X è più fine della top. cofinita.

DIM. La II equivalenza segue dal fatto che τ è più fine della top. cofinita $\iff$ tutti i sottoinsiemi finiti di X sono chiusi

$\iff$ tutti i singoletti sono chiusi

Mostriamo la 1ª equivalenza

$\forall x \in X$, $\{x\}$ è chiuso $\overset{\forall x \in X}{\iff} X \setminus \{x\}$ è aperto $\iff$

$\iff$ è intorno di ogni suo punto

cioè $\overset{\forall x \in X}{\forall y} \in X \setminus \{x\}$ $(y \neq x)$, $X \setminus \{x\} \in I(y)$

Questo è vero SSE

$\forall y \neq x \quad \exists U \in I(y)$ t.c. $U \subseteq X \setminus \{x\} \iff x \notin U$

↑ prop. T_1 per $x \in X$ □

Def. X spazio topologico, la diagonale di $X \times X$ è

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$$

Proposizione Uno sp. top. è $T_2 \iff \Delta$ è chiuso in $X \times X$

DIM. Δ è chiusa in $X \times X \iff X \times X \setminus \Delta$ è aperto che equivale a dire che $\forall \underbrace{(x,y)}_{x \neq y} \in X \times X \setminus \Delta$ $\exists$ intorno aperto di base $U \times V$ di $X \times X$ che contiene (x,y), $(x,y) \in U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta$

$\downarrow$

$x \in U,\ y \in V$

e U e V aperti di X

e $U \times V \subseteq X \times X \setminus \Delta \iff U \cap V = \emptyset$

per prodotti finiti la topologia prodotto coincide con la box-topology

Corollario $f: X \to Y$ continua e Y è T_2

allora il grafico di f

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y \text{ è chiuso}$$

DIM. Considero la funz $F: X \times Y \to Y \times Y$, $(x,y) \mapsto (f(x), y)$ "$F = f \times id_Y$"

F è continua, perché le due composizioni con le proiezioni

$\pi_1 \circ F: X \times Y \to Y$, $(x,y) \mapsto f(x)$ $= X \times Y \xrightarrow{\boxed{\pi_1}} X \xrightarrow{f} Y$

$\pi_2 \circ F: X \times Y \to Y$, $(x,y) \mapsto y$ è $\boxed{\pi_2}$

proiezioni di $Y \times Y$

$\to$ proiezioni di $X \times Y$

sono continue

$\Delta \subseteq Y \times Y$ è chiusa e $\Gamma_f = F^{-1}(\Delta)$ è un chiuso di $X \times Y$ (controimmagine di un chiuso mediante una funzione continua)

$\square$

Corollario $f, g: X \to Y$ continue e Y è T_2, allora

$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$ è chiuso

DIM. Sia $F: X \to Y \times Y$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ si verifica come prima che F è continua e poi si ha

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = F^{-1}(\Delta) \text{ che è chiuso}$$

$\square$

Corollario² $f: X \to X$ continua e X è T_2

allora $Fix(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$ è chiuso in X.

DIM. Basta applicare il corollario precedente con $Y = X$ e $g = id_X$

$\square$

Def. uno sp. topologico è

1. T_3 se $\forall x \in X$ e $\forall C \subseteq X$ chiuso con $x \notin C$

   $\exists$ aperti $U, V \subseteq X$ con $x \in U$, $C \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$

2. T_4 se $\forall C, D \subseteq X$ chiusi t.c. $D \cap C = \emptyset$

   $\exists$ aperti $U, V \subseteq X$ con $C \subseteq U$, $D \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$

4. Regolare se è T_1 e T_3

5. Normale se è T_1 e T_4

OSS T_3 e T_4 non implicano T_1

Ad esempio la topologia indiscreta $\{\emptyset, X\}$ su X è T_3 e T_4: le uniche coppie di chiusi disgiunti sono $\emptyset, \emptyset$ e $\emptyset, X$ e queste sono separate da aperti

Si vede facilmente che è T_3.

Se $|X| > 2$ questa topologia non è T_1

TEOREMA: Valgono le seguenti implicazioni:

metrizzabile $\Rightarrow$ normale $\Rightarrow$ regolare $\Rightarrow$ di Hausdorff (T_2) $\Rightarrow$ T_1

DIM.

normale $\Rightarrow$ regolare: se vale T_1, basta prendere $C = \{x\}$ nella condizione T_4

regolare $\Rightarrow$ T_2: se vale T_1 prendo $C = \{y\}$ nella condizione T_3

26/11/2024
Frigerio

TEOREMA
Metrizzabile $\Rightarrow$ normale $\Rightarrow$ regolare $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

DIM. Mancava da vedere solo:

metrizzabile $\Rightarrow$ normale. Sappiamo già che metrizzabile $\Rightarrow T_1$ per cui consideriamo l'implicazione $\Rightarrow T_4$.

Abbiamo visto in un esercizio precedente che se (X,d) è uno spazio metrico e $A \subseteq X$, allora la funzione

(sottoinsieme qualsiasi)

$$d_A : X \to \mathbb{R}$$

$d_A(x) = \inf\{d(x,a) \quad a \in A\}$ è continua (perché è 1-lipschitziana)

e che $d_A^{-1}(0) = \overline{A}$.

Siano allora C_1, C_2 chiusi disgiunti di X e consideriamo

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{d_{C_1}(x)}{d_{C_1}(x) + d_{C_2}(x)}$

f è ben definita ed è continua (rapporto di funz. continue)

$d_{C_1}(x) + d_{C_2}(x) = 0 \Leftrightarrow d_{C_1}(x) = 0 \wedge d_{C_2}(x) = 0 \Leftrightarrow$
$x \in \overline{C_1} \cap \overline{C_2} = C_1 \cap C_2 = \emptyset$

Inoltre $x \in f^{-1}(0) \Leftrightarrow d_{C_1}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in C_1$

$x \in f^{-1}(1) \Leftrightarrow d_{C_2}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in C_2$

Allora $f^{-1}(0) = C_1$ $\quad f^{-1}(1) = C_2$. Ora basta porre

$A_1 = f^{-1}(-\infty, 1/3)$, $\quad A_2 = f^{-1}(1/3, +\infty)$

A_1 e A_2 sono aperti disgiunti tali che $C_1 \subseteq A_1$ e $C_2 \subseteq A_2$ $\square$

Abbiamo separato C_1 e C_2 tramite una funzione continua.
In sp. normali questo è sempre possibile grazie al seguente risultato che non dimostriamo:

Lemma di Urysohn: X normale, C_1 e C_2 chiusi disgiunti di X. Allora $\exists f: X \to [0,1]$ continua t.c. $f(x)=0$ $\forall x \in C_1$ e $f(x)=1$ $\forall x \in C_2$

PROP. "T_1 e T_2 passano a ssp. e prodotti"

Cioè: se X_1 e X_2 sono T_i $(i=1,2)$, ogni ssp. di X_1 è T_i e $X_1 \times X_2$ è T_i. (Analogamente vale per $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$) → prodotto infinito

DIM. Facciamo il caso T_2 (T_1 è analogo)

Sia X_{α_1} T_2 e sia $A \subseteq X_{\alpha_1}$.

Siano $p,q \in A$, $p \neq q$. X_{α_1} è $T_2 \Rightarrow \exists$ intorni U di p e V di q con $U \cap V = \emptyset$. Prendendo la loro parte interna posso supporli aperti. Ma allora $A\cap U$ e $A \cap V$ sono aperti disgiunti di A che contengono rispettivamente p e q, per cui A è T_2.

Siano p,q punti distinti di $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, $p=(p_\alpha)_{\alpha\in J}$, $q=(q_\alpha)_{\alpha \in J}$. Poiché $p \neq q$, $\exists \bar\alpha \in J \mid p_{\bar\alpha} \neq q_{\bar\alpha}$. Poiché $X_{\bar\alpha}$ è T_2, esistono intorni (che posso supporre aperti) disgiunti U, V di $p_{\bar\alpha}$ e $q_{\bar\alpha}$ in $X_{\bar\alpha}$. Se $\pi_{\bar\alpha}: \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_{\bar\alpha}$ è la proiezione su $X_{\bar\alpha}$, gli insiemi $\pi_{\bar\alpha}^{-1}(U)$, $\pi_{\bar\alpha}^{-1}(V)$ sono aperti disgiunti che contengono p e q $\square$

PROP. X è T_3, $A \subseteq X$ allora A è T_3.

DIM. Siano $p \in A$ e $B \subseteq A$, B chiuso in A, con $p \notin B$.

~~Poiché X è T_3 esistono aperti U e V di X t.c. $p \in U$ $B \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$~~ NO! Non è detto che B sia chiuso in X

B chiuso in $A \Rightarrow \exists$ un chiuso C di X t.c. $B = A \cap C$

Notiamo che $p \notin C$, altrimenti (visto che $p \in A$ per hp) $p \in A \cap C = B$, e stiamo supponendo $p \notin B$.

Allora posso usare la prop. T_3 di X per ottenere aperti

U, V di X con $p \in U$, $C \subseteq V$

$U \cap A$ e $V \cap A$ sono aperti di A e $p \in U \cap A$ e $B = A \cap C \subseteq A \cap V$ $\square$

PROP. Sia X T_4 e sia $A \subseteq X$

① Se A è chiuso, A è T_4

② Ci sono esempi di A non T_4

DIM. ① C_1 e C_2 chiusi disgiunti di A

A chiuso in $X \Rightarrow C_1$ e C_2 chiusi in X.

Poiché X è T_4 esistono aperti disgiunti U, V di X con $C_1 \subseteq U$ $C_2 \subseteq V$, allora $C_1 \subseteq A \cap U$, $C_2 \subseteq A \cap V$

$(A \cap V) \cap (A \cap U) = \emptyset$

e $A \cap U$ e $A \cap V$ sono aperti di A, dunque A è T_4. $\square$

② Sia Y uno spazio non T_4 e costruiamo uno spazio T_4 X di cui Y sia un sottospazio.

Le cose "andranno male" se dati due chiusi disgiunti di Y, le loro chiusure di X saranno sempre non disgiunte.

$X = Y \cup \{\infty\}$ e definiamo su X la topologia

∞: simbolo non appartenente a Y

τ seguente: $A \subseteq X$ aperto $\Leftrightarrow$ $A \subseteq Y$ ed è aperto in Y oppure $A = X$

È facile vedere che τ è una topologia

Inoltre, se penso Y con la top. di ssp. di X ritrovo la top. originaria su Y.

Inoltre, X è T_4 perché tutti i chiusi non vuoti di X contengono ∞, dunque <u>non esistono chiusi disgiunti non vuoti</u> $\Rightarrow$ T_4 banalmente vera. $\square$

Per quanto riguarda le prop. T_3 e T_4 rispetto ai prodotti guardare il foglio di esercizi.

RICOPRIMENTI

X spazio topologico. Un ricoprimento di X è una famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di X t.c. $\bigcup_{i\in I} A_i = X$. Si dice APERTO (risp. CHIUSO) se ogni A_i è aperto (risp. chiuso).

Si dice LOCALMENTE FINITO se vale la seguente condizione:

Def. $\{A_i\}_{i\in I}$ famiglia di sottoinsiemi di X è localmente finita se $\forall p \in X$ $\exists$ un intorno U di p t.c. $\{i \in I \mid U \cap A_i \neq \emptyset\}$ è finito.

Def. Un ricoprimento $\{B_i\}_{i\in I}$ si dice FONDAMENTALE se vale la seguente condizione

$$A \subseteq X \text{ è aperto} \iff A \cap B_i \text{ è aperto in } B_i \ \forall i \in I$$

o passando ai complementari:

$$C \subseteq X \text{ è chiuso} \iff C \cap B_i \text{ è chiuso in } B_i \ \forall i \in I$$

Le frecce "$\Rightarrow$" sono sempre vere per def. di topologia di sottospazio.

Non tutti i ricoprimenti sono fondamentali.

$X = \mathbb{R}$ con la top. Euclidea e $\Omega = \{\{x\},\ x \in \mathbb{R}\}$ ricoprimento dato dai singoletti, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$, $\forall \{x\} \in \Omega$

$$A \cap \{x\} = \begin{cases} x \\ \emptyset \end{cases} \text{aperti in } \{x\}$$

ma non è detto che A sia aperto in $\mathbb{R}$.

Teorema Ogni ricoprimento aperto è fondamentale

DIM. Sia $\Omega = \{A_i,\ i \in I\}$ ricoprimento aperto.

$B \subseteq X$. Devo verificare che se $B \cap A_i$ è aperto in A_i $\forall i \in I$, allora B aperto in X.

Ma A_i aperto $\Rightarrow$ $B \cap A_i$ aperto in A_i è aperto anche in X

Dunque $B = B \cap X = B \cap (\bigcup A_i) = \underbrace{\bigcup (B \cap A_i)}_{\text{unione di aperti di } X}$ è aperto in X $\square$

Per vedere quando i ricoprimenti chiusi sono fondamentali serve il seguente

LEMMA $\{B_i\}_{i\in I}$ famiglia di sottoinsiemi di X localmente finita. Allora

$$\bigcup_{i\in I} \overline{B_i} = \overline{\bigcup B_i}$$

DIM. Supponiamo prima che I sia finito

Una delle inclusioni è sempre vera: fissato $i_0 \in I$,

$B_{i_0} \subseteq \bigcup B_i \Rightarrow \overline{B_{i_0}} \subseteq \overline{\bigcup B_i}$ ma allora

$\bigcup_{i\in I} \overline{B_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} B_i}$ (anche se I è infinito)

Per l'altra inclusione se I è finito, $\bigcup_{i\in I} \overline{B_i}$ è chiuso in quanto unione finita di chiusi e ovviamente contiene $\bigcup B_i$.

$\overline{\bigcup B_i}$ è il più piccolo chiuso che contiene $\bigcup B_i$, allora abbiamo

$\bigcup \overline{B_i} \supseteq \overline{\bigcup B_i}$

Nel caso in cui I sia infinito. Dobbiamo vedere $\overline{\bigcup B_i} \subseteq \bigcup \overline{B_i}$

Sia $p \in \overline{\bigcup B_i}$

Poiché $\{B_i\}_{i\in I}$ localmente finita, $\exists$ intorno U di p t.c.

$\{i \in I \mid U \cap B_i \neq \emptyset\} = \{i_1, \dots, i_n\}$ è finita.

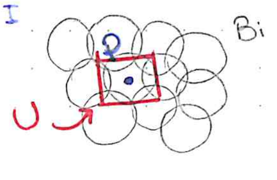
Sia W un qualsiasi intorno di p. Allora $U \cap W$ è un intorno di p, per cui, poiché $p \in \overline{\bigcup B_i}$, si ha $(U\cap W) \cap (\bigcup B_i) \neq \emptyset$

Però se $i \neq i_1, \dots, i_n \Rightarrow U \cap B_i = \emptyset$, per cui necessariamente $(U \cap W) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j}) \neq \emptyset$ da cui $W \cap (\bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j}) \neq \emptyset$.

Dunque $p \in \overline{\bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j}}$ (ogni suo intorno interseca questa unione) } faccio vedere che appartiene alla chiusura di un'unione finita

Per quanto già visto sulla chiusura delle unioni finite

$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} B_{i_j}} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{B_{i_j}} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{B_i} \Rightarrow p \in \bigcup_{i\in I} \overline{B_i}$ come voluto. $\square$



Corollario Un' unione localmente finita di chiusi è chiusa

DIM. Usando il lemma, si ottiene che tale unione è uguale alla sua chiusura $\Rightarrow$ è chiusa. $\square$

Teorema $\{C_i\}_{i\in I}$ ricoprimento chiuso <u>localmente finito</u> è fondamentale

DIM. $\{C_i\}_{i\in I}$ ricoprimento chiuso loc. finito e sia $B \subseteq X$. Suppongo $B\cap C_i$ chiuso in C_i $\forall i \in I$. Poiché C_i è chiuso, $B\cap C_i$ è chiuso anche in X e

$$B = B\cap X = B\cap (\bigcup C_i) = \bigcup (B\cap C_i)$$

unione localmente finita

(chiaramente $\{B\cap C_i\}$ loc. finita se lo è $\{C_i\}$), dunque B è unione localmente finita di chiusi e perciò è chiuso. $\square$

Teorema $\Omega = \{A_i\}_{i\in I}$ ricoprimento fondamentale di X $f: X \to Y$ tra sp. top. Allora

f è continua $\Leftrightarrow$ $f|_{A_i}: A_i \to Y$ è continua $\forall i\in I$

DIM. $(\Rightarrow)$ sempre vera (la restrizione di una continua è continua)

$(\Leftarrow)$ $B\subseteq Y$ aperto. Allora se $f|_{A_i}$ è continua $(f|_{A_i})^{-1}(B) = f^{-1}(B)\cap A_i$ è aperto in A_i. Ma allora, se questo vale $\forall i \in I$ e $\{A_i\}_{i\in I}$ è fondamentale, $f^{-1}(B)$ è aperto in X e f è continua. $\square$

Riformuliamo in maniera più utile l'ultimo risultato.

X sp. topologico, $\{A_i\}_{i\in I}$ ricoprimento FONDAMENTALE di X e

$f_i : A_i \to Y$ continue t.c. $f_i(x) = f_j(x) \ \forall x \in A_i \cap A_j \ \forall i,j \in I$ "compatibili"

$\Rightarrow f : X \to Y$ ottenuta incollando le f_i, cioè

$$f(x) = f_i(x) \quad \forall x \in A_i$$

è ben def. per l'hp. e CONTINUA

(Continuità di funzioni "continue a tratti" purché i domini dei vari tratti diano un ricoprimento fondamentale)

Esempi: ① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x \geq 0 \\ x^3-1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$A_1 = [0,+\infty) \qquad A_2 = (-\infty, 0]$

$f_1 : A_1 \to \mathbb{R} \quad f_1(x) = x^2-1 \qquad A_1 \cap A_2 = \{0\}$

$f_2 : A_2 \to \mathbb{R} \quad f_2(x) = x^3-1 \qquad f_1(0) = f_2(0)$

$\{A_1, A_2\}$ è un ricoprimento fondamentale $\Rightarrow f$ continua
(chiuso finito)

② $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{non continua} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$ NON è un ricoprimento fondamentale

$\downarrow$

infatti se $A_1 = \mathbb{Q}$ e $A_2 = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \cap A_1 = A_1$ (aperto in A_1)

$\mathbb{Q} \cap A_2 = \emptyset$ (aperto in A_2) ma $\mathbb{Q}$ non è aperto in $\mathbb{R}$

③ Giunzione di cammini

$\gamma_1 : [0,1] \to X$

$\gamma_2 : [0,1] \to X$

funzioni continue (tali funzioni si chiamano CAMMINI in X)

la giunzione di γ_1 e γ_2 è

$\gamma_1 * \gamma_2 : [0,1] \to X$

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se assumiamo $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, allora $\gamma_1 * \gamma_2$ è ben definita e continua. Infatti $A_1 = [0, 1/2]$ e $A_2 = [1/2, 1]$ danno un ricoprimento chiuso e finito $\Rightarrow$ fondamentale di $[0,1]$

in $t = 1/2$ $(= A_1 \cap A_2)$ si ha $\underset{\gamma_1(1)}{\gamma_1(2t)} = \underset{\gamma_2(0)}{\gamma_2(2t-1)}$

la continuità segue dal fatto che

$t \mapsto \gamma_1(2t)$ $\quad t \mapsto \gamma_2(2t-1)$ sono continue in quanto composizioni di funz. continue.

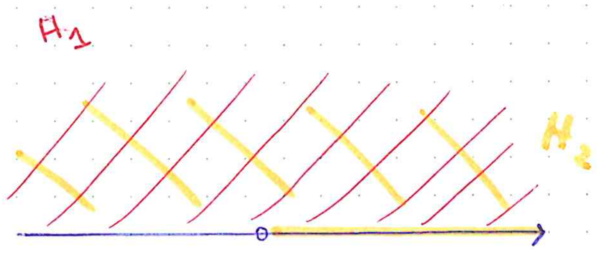
$\Rightarrow$ La giunzione di cammini (definita solo se $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$)

è continua

Es. 33 $\quad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f(z) = z^2$

$H_1 = \{ z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0 \}$

$H_2 = H_1 \cup \mathbb{R}_+ = H_1 \cup \{ z \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(z) > 0 \}$



$f_1 = f|_{H_1}$ $\quad f_2 = f|_{H_2}$ sono immersioni topologiche?

Per esserlo devono essere iniettive; lo sono entrambe

su $\mathbb{C}$ elevare al quadrato significa elevare al quadrato il modulo e raddoppiare l'argomento

$f_1(H_1) = \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{R} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0 \}$

$f_2(H_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$f_1^{-1}: \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{R},\ Re(z)\geq 0\} \to H_1$ e/o

$f_2^{-1}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to H_2$ sono continue?

(immersione topologica = omeomorfismo sull'immagine)

$z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{R},\ Re(z)>0\}$

$z_0 = Re^{i\theta}$ $R>0$ $\theta\in(0,2\pi)$ e R,θ univocamente determinati

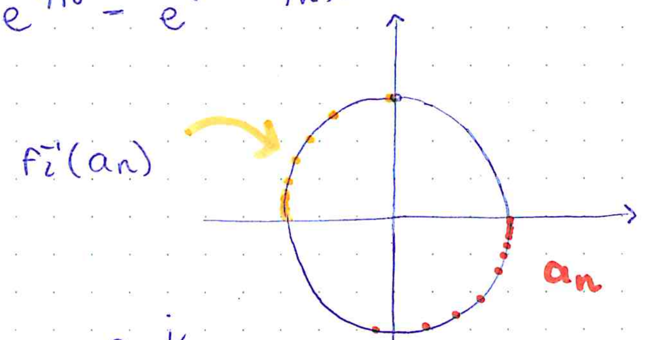
$f_1^{-1}(z_0) = \sqrt{R}\, e^{i\theta/2}$ $\Rightarrow$ è facile vedere che è continua

Per f_2 vale una formula analoga

$z_0 = Re^{i\theta}$ $0\leq\theta<2\pi$ $f_2^{-1}(z_0) = \sqrt{R}e^{i\theta/2}$

Questa funz. non è continua, ad esempio

$a_n = e^{-i/n} = e^{(2\pi - 1/n)i}$



$f_2^{-1}(a_n) = e^{\pi - 1/2n}$

$f_2^{-1}(1) = 1$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ $\lim_{n\to+\infty} f_2^{-1}(a_n) = -1 \neq f_2^{-1}(1) = 1$

allora f_2^{-1} non continua in 1

Domanda: perché f_1^{-1} continua e f_2^{-1} no pur essendo esprimibili dalla stessa forma?

Le "coord. polari (R,θ) con $0<\theta<2\pi$ sono continue su $\mathbb{C}\setminus\{$semiretta reale positiva$\}$"

mentre le stesse coordinate su $0\leq x<2\pi$ sono discontinue su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (proprio sulla semiretta reale positiva).

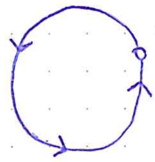
Esempio (analogo) $f: \mathbb{R}\to S^1$ $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

$f|_{(0,2\pi)} : (0,1) \to S^1$ immersione topologica

$f|_{[0,2\pi)} : [0,1) \to S^1$ non lo è

$f((0,1)) = S^1 \setminus \{(1,0)\}$ → inversa continua

$f([0,1)) = S^1$ → inversa discontinua


(1,0)

Es. 35

$X_i = \{0,1\}$ con la top. discreta e $X = \prod_{i\in I} X_i$, I più che numerabile

Allora X non è primo numerabile

DIM. Supponiamo per assurdo che X sia I-numerabile, scegliamo un punto di X, ad esempio quello le cui coordinate sono tutte 0, e sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sist. fondamentale di intorni di P. Possiamo supporre gli U_n aperti. (se non lo sono rimpiazzo U_n con $\mathring{U}_n$)

Per ottenere un assurdo, devo trovare un intorno W di P che non contiene alcun U_n

Ogni U_n contiene un aperto di base che contiene P, cioè $\exists\, I_n \subseteq I$ finito t.c.

$$U_n \supseteq \bigcap_{i\in I_n} \pi_i^{-1}(A_{i,n}) \quad , \quad A_{i,n} \text{ aperto di } \{0,1\} \text{ che contiene } 0$$

Ora, $\bar{I} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ è numerabile in quanto unione numerabile di insiemi finiti, dunque $\exists\, i_0 \in I \mid i_0 \notin \bar{I}$ (uso I non numerabile).

Pongo $W = \pi_{i_0}^{-1}(\{0\})$. Ma per costruzione poiché $i_0 \notin I_n$, $\pi_{i_0}^{-1}(U_n) = \{0,1\} \Rightarrow U_n \not\subseteq W \ \forall n$. $\square$

03/12/2024
Frigerio

Def. X sp. top. non vuoto si dice CONNESSO se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1) Non esiste una partizione $X = A \cup B$, A e B aperti $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$
2) $\nexists$ una partizione $X = A \cup B$, A e B chiusi, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$
3) Se $A \subseteq X$ è aperto, chiuso e non vuoto $\Rightarrow A = X$

Passando ai complementari è ovvio che $1 \Leftrightarrow 2$
Inoltre, A è aperto e chiuso $\Leftrightarrow A$ e $B = X \setminus A$ sono entrambi aperti (o entrambi chiusi), per cui $1 \Leftrightarrow 3$

Teo. $[0,1]$ (con la top. euclidea) è connesso

DIM. $A \subseteq [0,1]$ aperto, chiuso e non vuoto
A meno di sostituire A con $[0,1] \setminus A$ (ancora aperto e chiuso) posso supporre $0 \in A$

$\Omega = \{ t_0 \in [0,1] \text{ t.c. } [0,t_0] \subseteq A \}$

Voglio mostrare che $1 \in \Omega$, così $A = [0,1]$
(l'unico aperto e chiuso non vuoto di $[0,1]$ sarebbe tutto $[0,1]$)

Poiché $0 \in A$, $0 \in \Omega \Rightarrow \Omega \neq \emptyset$

Sia $\bar{t} = \sup \Omega$. Mostriamo che $\bar{t} = \max \Omega$, cioè $\bar{t} \in \Omega$

Poiché $\bar{t} = \sup \Omega$, $\exists t_n$, $n \in \mathbb{N}$, succ. con $t_n \in \Omega \ \forall n$
$t_n \leq \bar{t} \ \forall n$ e $\lim_{n \to +\infty} t_n = \bar{t}$

$\forall n$ si ha $[0,t_n] \subseteq A$, ma allora $[0,\bar{t}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0,t_n] \subseteq A$

A chiuso $\Rightarrow \overline{[0,\bar{t})} \subseteq A \Rightarrow [0,\bar{t}] \subseteq A \Rightarrow \bar{t} \in \Omega$

Dunque $\bar{t}$ è il max di Ω e per concludere basta vedere $\bar{t} = 1$.

Se per assurdo $\bar{t} < 1$, poiché A aperto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.c.

$[\bar{t}, \bar{t}+\varepsilon) \subseteq A$. Ma allora $[0, \bar{t}+\frac{\varepsilon}{2}] = \underbrace{[0,\bar{t}]}_{\subseteq A} \cup \underbrace{[\bar{t}, \bar{t}+\frac{\varepsilon}{2}]}_{\subseteq A}$

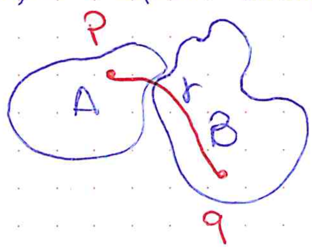
Dunque $\bar{t}+\varepsilon/2 \in \Omega$ ↯ $\bar{t}$ era il max $\square$

Def. X si dice **CONNESSO PER ARCHI** se $\forall p,q \in X$ esiste un cammino (f. continua) $\gamma : [0,1] \to X$ t.c. $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$

Teo. X connesso per archi $\Rightarrow$ X connesso (Il viceversa è falso)

DIM. Per assurdo supponiamo X connesso per archi e non connesso.

Allora $\exists$ A, B aperti disgiunti non vuoti con $X = A \cup B$



Siano $p \in A$, $q \in B$ ($\exists$ poiché A e B non vuoti)

sia γ un cammino con $\gamma(0) = p \wedge \gamma(1) = q$

$\gamma^{-1}(A)$, $\gamma^{-1}(B)$ sono aperti disgiunti non vuoti

$(0 \in A$ e $1 \in B)$ e $[0,1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$ ↯ $[0,1]$ è connesso

$\square$

Teo. $f : X \to Y$ continua, $C \subseteq X$. Allora:

1) C connesso $\Rightarrow$ f(C) connesso

2) C connesso per archi $\Rightarrow$ f(C) connesso per archi

DIM. 1) Se f(C) non fosse connesso, esisterebbero A, B aperti $\neq \emptyset$ e disgiunti di f(C) t.c. $A \cup B = f(C)$

Poiché $f : X \to Y$ continua $\Rightarrow f : C \to f(C)$ continua, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ danno una partizione di C in aperti non vuoti, dunque C è sconnesso

$f|_C : C \to f(C)$ surgettiva

2) Siano $p, q \in f(C)$, allora $\exists\, p', q' \in C \mid f(p') = p \quad f(q') = q$

Perciò $\exists$ cammino $\gamma : [0,1] \to C$ t.c. $\gamma(0) = p'$, $\gamma(1) = q'$

Poiché la composizione di continue è continua

$f \circ \gamma : [0,1] \to f(C)$ è un cammino tra p e q. $\square$

CONNESSI DI $\mathbb{R}$

Def. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CONVESSO se $\forall p, q \in C$ il segmento $[p,q]$ di estremi p, q è contenuto in C, cioè

$\forall t \in [0,1], \ (1-t)p + (t \cdot q) \in C.$

OSS. Convesso $\Rightarrow$ connesso per archi $\Rightarrow$ connesso

Infatti, se C è convesso e $p, q \in C$

$\gamma : [0,1] \to C$, $\gamma(t) = (1-t)p + tq$ è un cammino che connette p e q dentro C.

Ricordiamo che i convessi di $\mathbb{R}$ sono detti INTERVALLI

Teo. $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora sono fatti equivalenti:

1) A intervallo $(\equiv A$ convesso$)$

2) A connesso per archi

3) A connesso

DIM. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ già visto

$3 \Rightarrow 1$

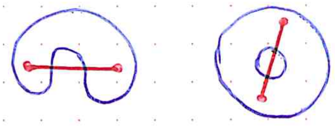
Se per assurdo A non convesso $\Rightarrow \exists\, t_0, t_1 \in A$ t.c. $[t_0, t_1] \not\subseteq A$ per cui $\exists\, \bar{t} \in [t_0, t_1] \setminus A$

Per costruzione $t_0 < \bar{t} < t_1$, allora

$$\underbrace{((-\infty, \bar{t}) \cap A)}_{\ni t_0} \cup \underbrace{((\bar{t}, +\infty) \cap A)}_{\ni t_1} = A \Rightarrow A \text{ non connesso}$$

aperti non vuoti

In $\mathbb{R}^2$ ci sono connessi per archi non convessi, esempio:



e connessi non connessi per archi (vedi dopo)

<u>OSS.</u> Il teo. di esistenza degli zeri segue dalla caratterizzazione dei connessi di $\mathbb{R}$ (che sono gli intervalli) insieme al fatto che imm. continua di un connesso è connessa.

In generale:

<u>Prop.</u> X connesso, $f: X \to \mathbb{R}$ continua.
Se $\exists\, x_0 \in X$, $x_1 \in X$ con $f(x_0) < 0$, $f(x_1) > 0$
allora $\exists\, \bar{x} \in X$ con $f(\bar{x}) = 0$

<u>DIM.</u> X connesso $\Rightarrow$ $f(X)$ connesso $\Rightarrow$ $f(X)$ intervallo $\square$

ESERCIZIO $A \subseteq \mathbb{Q}$ connesso $\Rightarrow$ $A = \{q\}$

Svolgimento: supponiamo per assurdo che A sia connesso ma contenga almeno 2 punti p e q. Allora per densità di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\exists\, \bar{t} \notin \mathbb{Q}$ t.c. $p < \bar{t} < q$

Ma allora ($\bar{t} \notin A$ perché $A \subseteq \mathbb{Q}$)

$A = \underbrace{(A \cap (-\infty, \bar{t}))}_{\neq \emptyset \text{ perché contiene } p} \cup \underbrace{(A \cap (\bar{t}, +\infty))}_{\neq \emptyset \text{ perché contiene } q}$ ed A è sconnesso

Si dice che $\mathbb{Q}$ è TOTALMENTE SCONNESSO

COMPONENTI CONNESSE (per archi)

Vediamo che la chiusura di un ssp connesso è connessa

<u>Lemma:</u> $Z \subseteq X$, $A \subseteq Z$. Se denotiamo con $\bar{A}^Z$ la chiusura di A in Z (come ssp. di Z) e con $\bar{A}$ la chiusura di A in X, allora

$$\bar{A}^Z = \bar{A} \cap Z$$

<u>DIM.</u> $$\bar{A}^Z = \bigcap_{\substack{C \subseteq Z \\ C \text{ chiuso in } Z \\ A \subseteq C}} C = \bigcap_{\substack{C' \subseteq X \\ C' \text{ chiuso in } X \\ A \subseteq C'}} (C' \cap Z) = \Big(\bigcap_{\text{" '' "}} C'\Big) \cap Z = \bar{A} \cap Z$$ $\square$

OSS. Il lemma precedente non è valido se si considera la parte interna al posto della chiusura.

Es: $X = \mathbb{R}$, $Z = \mathbb{N}$, $A = \{0\}$ | la parte interna di A come ssp. di Z è A stesso, mentre la sua parte interna in $\mathbb{R}$ è vuota

Lemma $A \subseteq X$, Z t.c. $A \subseteq Z \subseteq \bar{A}$ (per esempio $Z = \bar{A}$)
Se A è connesso, anche Z connesso
(in particolare, A connesso $\Rightarrow \bar{A}$ connesso)

DIM. Sia $\Omega \subseteq Z$ aperto, chiuso e non vuoto. Voglio mostrare $\Omega = Z$.

Osserviamo che $\bar{A}^Z = \bar{A} \cap Z \overset{Z \subseteq \bar{A}}{=} Z$ (lemma appena visto), dunque A è denso in Z e perciò ha intersezione non vuota con qualsiasi aperto non vuoto di Z, perciò $A \cap \Omega \neq \emptyset$

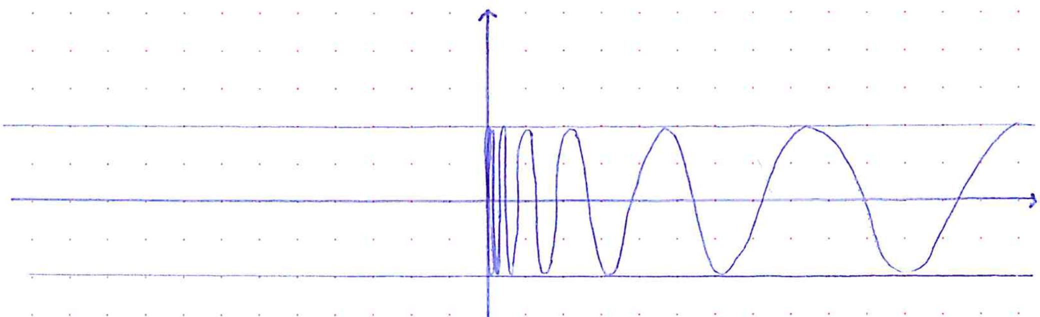
Poiché Ω è aperto e chiuso in Z e $A \subseteq Z$, $\Omega \cap A$ è aperto e chiuso in A e non vuoto.

Poiché A è connesso, $\Omega \cap A = A$, cioè $A \subseteq \Omega$.

Ma allora $\bar{A}^Z \subseteq \bar{\Omega}^Z \Rightarrow Z \subseteq \bar{\Omega}^Z = \Omega$ ← perché Ω è chiuso in Z
$\Rightarrow \Omega = Z$ come voluto. □

Esempio: di un connesso che non è connesso per archi

Sia $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}),\ x > 0\}$
$Z = A \cup \{(0,0)\}$



A è connesso per archi $\Rightarrow$ connesso
↳ immagine di $(0, +\infty)$ tramite la f. continua f

$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 \quad f(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$

$(0,0) \in \overline{A}$ (ad esempio perché è il limite della succ.

$a_n = (\frac{1}{n\pi}, 0) \in A$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

Per il lemma precedente Z è connesso ↗ perché sta tra A e la sua chiusura

Per concludere, devo vedere Z non connesso per archi.

Mostriamo che, se $\gamma : [0,1] \to Z$ è continua

e $\gamma(0) = (0,0)$ allora γ è costante (in particolare non riuscirò a connettere $(0,0)$ con $(\frac{1}{\pi}, 0)$ e Z non è connesso per archi)

Vediamo che $\gamma^{-1}((0,0))$ è aperto e chiuso in $[0,1]$, così avremo $\gamma^{-1}((0,0)) = [0,1]$, cioè γ costante.

Che sia chiuso è ovvio perché $\{(0,0)\}$ è un chiuso di Z ($\mathbb{R}^2$ è T_1 e dunque lo è anche Z).

Vediamo che è aperto, cioè che, se $\gamma(\bar{t}) = (0,0)$, allora $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\gamma((\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon) \cap [0,1]) = \{(0,0)\}$

Se così non fosse, esisterebbe una successione $t_n \to \bar{t}$ con $\gamma(t_n) = (a_n, b_n)$, $a_n \neq 0 \ \forall n$?

Ora però $[\bar{t}, t_n]$ (o $[t_n, \bar{t}]$, se $t_n < \bar{t}$) è connesso per cui $\gamma([\bar{t}, t_n])$ è connesso, ed è connessa anche la proiezione di $\gamma([\bar{t}, t_n])$ sull'asse x (perché la proiezione è continua). Tale proiezione contiene $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ascissa di } \gamma(\bar{t})}}{0}$ e $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ascissa di } \gamma(t_n)}}{a_n}$, per cui

contiene $[0, a_n]$, che a sua volta contiene un valore di tipo $\frac{1}{\pi/2 + 2\pi k}$ $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \exists t_n'$ in $[\bar{t}, t_n]$ (o $[t_n, \bar{t}]$)

con $\gamma(t_k') = \left(\frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}, \sin(\pi/2 + 2k\pi)\right) = \left(\frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}, 1\right)$

Ma poiché t_n' è compreso tra $\bar{t}$ e t_n, $t_n' \to \bar{t}$ da cui per continuità di γ

$\lim_{n\to+\infty} \gamma(t_n') = \gamma(\bar{t}) = (0,0)$, mentre l'ordinata di $\gamma(t_n')$ è uguale a 1 $\forall n$, assurdo.

05/12/2024

COMPONENTI CONNESSE (per archi)

Lemma: Siano $X_i, i \in I$ ssp. di uno spazio topologico X tali che $\exists x_0 \in X$ con $x_0 \in X_i \ \forall i \in I$ ($\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$)

1. Se X_i è connesso $\forall i \in I$, allora $\bigcup_{i\in I} X_i$ è connesso
2. Se X_i è connesso per archi $\forall i \in I$, allora $\bigcup_{i\in I} X_i$ è connesso per archi

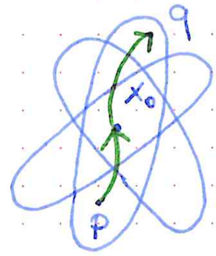
DIM. (1) Sia $A \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$ ssp. aperto chiuso e non vuoto di $\bigcup X_i$. Se $A = \bigcup X_i$ abbiamo finito, altrimenti a meno di scambiare A con $\bar{A} = \bigcup X_i \setminus A$ posso supporre $x_0 \in A$.

Ora, $\forall i \in I$ si ha $A \cap X_i$ è un aperto e chiuso di X_i non vuoto (c'è x_0) $\Rightarrow$ per connessione di X_i si ha $A \cap X_i = X_i$, cioè $A \supseteq X_i \Rightarrow A = \bigcup X_i$ per cui questa unione è connessa.

(2) Siano $p, q \in \bigcup_{i\in I} X_i$

$\exists\ i_0, i_1$ t.c.

$p \in X_{i_0}$, $q \in X_{i_1}$



poiché X_{i_0} e X_{i_1} connessi per archi, esistono

$\gamma_0 : [0,1] \to X_{i_0}$ | $\gamma_0(0) = p$ $\gamma_0(1) = x_0$

$\gamma_1 : [0,1] \to X_{i_1}$ | $\gamma_1(0) = x_0$ $\gamma_1(1) = q$

Allora $\gamma_0 * \gamma_1 : [0,1] \to \bigcup X_i$ connette p e q. □

Grazie al lemma precedente, l'unione di tutti i ssp. connessi che contengono x_0 è un connesso non vuoto ($\{x_0\}$ connesso) ed è il più grande ssp.

connesso di X che contiene x_0.

Tale ssp. si chiama componente connessa di x_0

$$C(x_0) = \bigcup_{\substack{C \subseteq X \\ C \text{ connesso} \\ x_0 \in C}} C$$

Analogamente, il più grande ssp. connesso per archi che contiene x_0 è ben def. e si chiama componente connessa per archi di x_0

$$P(x_0) = \bigcup_{\substack{P \subseteq X \\ P \text{ conn. per archi} \\ x_0 \in P}} P$$

Poiché connesso per archi $\Rightarrow$ connesso

$\forall x_0 \in X \qquad \boxed{P(x_0) \subseteq C(x_0)}$

Proposizione (i) Le componenti connesse danno una partizione di X (coincidono o sono disgiunte e la loro unione è tutto X)

(ii) Le " " per archi " "

(iii) Le componenti connesse sono chiuse

DIM. (i) $x_0 \in C(x_0)$ $\forall x_0$ ($\{x_0\}$ connesso)

$\Rightarrow$ ricoprono tutto X

Se $C(p) \cap C(q) \neq \emptyset$ allora $\exists\, x_0 \in C(p) \cap C(q)$

$\Rightarrow$ per il lemma di prima $C(p) \cup C(q)$ connesso (in quanto lo sono $C(p)$ e $C(q)$) ma allora per massimalità di $C(p)$ e $C(q)$ vale

$C(p) \cup C(q) \subseteq C(p)$ e $C(p) \cup C(q) \subseteq C(q)$

$\Rightarrow C(p) = C(q)$

(ii) analogo

(iii) Ricordiamo $A \subseteq X$ connesso $\Rightarrow \overline{A}$ connesso

$\Rightarrow \overline{C(x_0)}$ connesso e per massimalità

$\overline{C(x_0)} \subseteq C(x_0) \Rightarrow \overline{C(x_0)} = C(x_0)$ cioè $C(x_0)$ chiuso

$\square$

FATTI: ① Le componenti connesse non sono aperti in generale: ad esempio, sappiamo che le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono i singoletti, che non sono aperti.

Se però X ha un # finito di componenti connesse, allora ciascuna di esse è complementare di una unione finita di chiusi $\Rightarrow$ è aperta.

② Le componenti connesse per archi non sono in generale né aperte né chiuse

Ad esempio, le comp. conn. per archi di

$\{(0,0)\} \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}),\ x>0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ sono

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiuso ma} \\ \text{non aperto} \\ \text{in } X}}{\{(0,0)\}}$ e $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{aperto ma} \\ \text{non chiuso} \\ \text{in } X}}{\{(x, \sin\frac{1}{x}),\ x>0\}}$

ES. 36

Due fatti preliminari di interesse generale

LEMMA X_i, $i \in I$ sp. topologici e $\forall i \in I$ sia $B_i \subseteq X_i$ e sia $X = \prod_{i \in I} X_i$, allora

1) B_i chiuso in X_i, $\forall i \in I$ allora $\prod B_i$ è chiuso in X

2) Se B_i è aperto in X_i $\forall i$ e $B_i = X_i$ eccetto per un # finito di indici, allora $\prod B_i$ è aperto

DIM. 2) Già visto

1) Se $\pi_i : X \to X_i$ è la proiezione sull'i-esimo fattore, allora $\prod B_i = \bigcap \pi_i^{-1}(B_i)$ è intersezione di chiusi, in quanto π_i è continua ed è perciò chiusa.

$\square$

Prop. X è T_3 $\Leftrightarrow$ ogni $x_0 \in X$ ha un sistema **fondamentale** di intorni chiusi

DIM. ($\Rightarrow$) Sia $\mathcal{F}$ l'unione degli intorni chiusi di x_0

voglio mostrare che contiene un intorno chiuso

<u>U intorno di x_0</u> e $V = \mathring{U}$. Per def. $x_0 \in V$.

Poiché X è T_3 $\exists$ aperti A_1, A_2 t.c. $x_0 \in A_1$ e $X \setminus V \subseteq A_2$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Per costruzione, $A_1 \subseteq X \setminus A_2$, $X \setminus A_2$ è chiuso, per cui $\overline{A}_1 \subseteq X \setminus A_2 \subseteq V \subseteq U$. Perciò $\overline{A}_1$ è un intorno di x_0 ($x_0 \in A_1 \subseteq \overline{A}_1$ e A_1 aperto), è chiuso ed è contenuto in U. Questo mostra che $\mathcal{F}$ è effettivamente un SF di intorni di x_0.

($\Leftarrow$) Siano $x_0 \in X$, $C \subseteq X$ t.c. C sia chiuso e $x_0 \notin C$, allora $X \setminus C$ è un intorno di x_0, per cui per ip. esiste un intorno chiuso W di x_0 con $W \subseteq X \setminus C$, da cui $x_0 \in \mathrm{int}(W) \subseteq W \subseteq X \setminus C$

Allora $\mathrm{int}(W)$ e $X \setminus W$ sono due aperti disgiunti con $x_0 \in \mathrm{int}(W)$ e $C \subseteq X \setminus W$.

$\square$

Soluzione es. 36

X_i, $i \in I$ spazi T_3. Allora $\prod X_i$ è T_3.

Sia $\overline{x} = (x_i)_{i \in I} \in \prod X_i$ e vediamo che $\overline{x}$ ammette un SFI di intorni chiusi.

Sia U un intorno di $\overline{x}$. Per def. di topologia prodotto, $\exists V \subseteq U$ aperto con $x_0 \in V$ e $V = \bigcap_{i \in I_0} \pi^{-1}(A_i)$, dove $I_0 \subseteq I$

aperto di base

è finito e $A_i \subseteq X_i$ è aperto $\forall i \in I_0$

Poiché ogni X_i è T_3 e $\bar{x} \in V$, $\forall i \in I_0$ si ha $x_i \in A_i$ e $\exists$ intorno chiuso B_i di x_i in X_i t.c. $B_i \subseteq A_i$

Ponendo ad esempio $B_j = X_j$ $\forall j \notin I_0$, per un lemma di prima abbiamo e $A_j = X_j$ $\forall j \notin I_0$

$$\bar{x} \in \underbrace{\prod_{i \in I} \mathrm{int}(B_i)}_{\text{aperto}} \subseteq \underbrace{\prod B_i}_{\text{chiuso}} \subseteq \prod A_i = V \subseteq U$$

intorno chiuso di $\bar{x}$ che cercavamo

$\square$

ES. 37

Dimostrare che la retta di Sorgenfrey è normale.

DIM. $X = \mathbb{R}$ con la topologia τ una cui base è data dai sottoinsiemi di tipo $[a,b)$, $a<b$. Abbiamo visto che τ è più fine della top. euclidea, che è T_1, dunque τ è T_1.

Vediamo che è T_4

Siano C_1 e C_2 chiusi disgiunti di X

devo costruire aperti A_1, A_2 con $C_1 \subseteq A_1$, $C_2 \subseteq A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$\forall x \in C_1$, poiché $x \in X \setminus C_2$ e $X \setminus C_2$ è aperto, $\exists\, a_x, b_x$ $a_x < b_x$ t.c. $x \in [a_x, b_x)$ e $[a_x, b_x) \subseteq X \setminus C_2$

Posso supporre $a_x = x$, così $x \in [x, b_x) \subseteq X \setminus C_2$

Pongo $A_1 = \bigcup_{x \in C_1} [x, b_x)$

Analogamente, $\forall x \in C_2$ $\exists\, k_x > x$ t.c. $x \in [x, k_x) \subseteq X \setminus C_1$ e pongo $A_2 = \bigcup_{x \in C_2} [x, k_x) \subseteq X \setminus C_1$

Naturalmente $C_1 \subseteq A_1$ e $C_2 \subseteq A_2$ e A_1, A_2 sono aperti.

Vediamo che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, il che conclude.

Se $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, $\exists\, x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$ t.c.

$$[x_1, b_{x_1}) \cap [x_2, k_{x_2}) \neq \emptyset$$

Se così fosse dovremmo avere $x_1 \in [x_2, k_{x_2})$ o $x_2 \in [x_1, b_{x_1})$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$C_1 \cap [x_2, k_{x_2}) \neq \emptyset$ ↯ per costruzione $\qquad C_2 \cap [x_1, b_{x_1}) \neq \emptyset$ ↯ $\square$

Questo es. è un esempio di sp. normale non metrizzabile (perché separabile ma non II-numerabile)

SPAZI LOCALMENTE CONNESSI

Def. Uno sp. X si dice localmente connesso (per archi) se ogni $x_0 \in X$ ammette un SFI connessi (per archi)

Esempi ① $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, A è localmente connesso per archi e dunque localmente connesso.

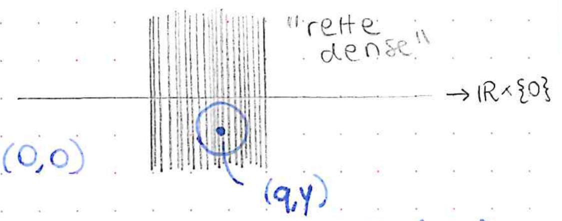
Le palle contenute in A danno SFI convessi, dunque connessi per archi

② $\mathbb{Q}$ non è localmente connesso

③ Il PETTINE INFINITO

$$X = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{q\} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$$ è connesso per archi,

ma non localmente connesso



La componente connessa per archi di $(0,0)$ è chiaramente tutto X. Se $y \neq 0$, qualsiasi intorno di (q,y) $q \in \mathbb{Q}$, contenuto in $B\left((q,y), \frac{|y|}{2}\right)$ è sconnesso
↳ (palla che non interseca l'asse x)
(la sua proiezione sull'asse x è un insieme infinito di razionali ed è quindi sconnesso).

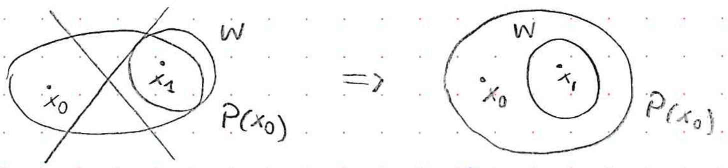
TEO X connesso e localmente connesso per archi

Allora X connesso per archi

questo mi da la tesi perché sarebbe aperto, chiusa (in quanto complementare delle altre componenti cpa) e non vuota $\Rightarrow$ è tutto

<u>DIM.</u> Dimostriamo qualcosa di più forte e cioè che $\forall x_0 \in X$ la componente connessa per archi $P(x_0)$ è aperta.

Basta vedere che se $x_1 \in P(x_0)$, allora c'è un intorno W di x_1 tutto contenuto in $P(x_0)$: così $P(x_0)$ sarà int di ogni suo punto. Sia ora W un intorno connesso per archi di x_1 ($\exists$ per hp.) Allora $P(x_0)$ e W connessi per archi che contengono entrambi x_1, per cui la loro unione $P(x_0) \cup W$ è connesso per archi: per max di $P(x_0)$, $P(x_0) \supseteq P(x_0) \cup W$, cioè $W \subseteq P(x_0)$ come voluto.



ciascuna di esse è aperta

Questo mostra che $P(x_0)$ è aperta. Però $P(x_0) = X \setminus \bigcup_{x \notin P(x_0)} P(x)$

$\Rightarrow P(x_0)$ è complementare di unione di aperti, per questo è anche chiuso

Perciò, essendo non vuota, per connessione di X si ha $P(x_0) = X$, e X è connesso per archi. $\square$

OSS: Se X è localmente connesso per archi:

① le componenti connesse per archi sono aperte e chiuse (visto ieri)

② le componenti connesse coincidono con le componenti connesse per archi

(se $x_0 \in X$, $P(x_0) \subseteq C(x_0)$ sempre e visto che $P(x_0)$ è aperto e chiuso in X lo è anche in $C(x_0)$, da cui segue $P(x_0) = C(x_0)$)

③ Se $U \subseteq X$ è aperto, allora anche U è localmente connesso per archi, (se $x_0 \in U$, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è un SFI di x_0 in X con U_i connesso per archi, allora $\mathcal{U}' = \{U_i \mid U_i \subseteq U\}$ è un SFI di x_0 in U)

④ Se $U \subseteq X$ è un aperto connesso, allora è anche connesso per archi

(punto ③ + il fatto che uno spazio connesso e localmente connesso per archi è anche connesso per archi)

OSS in generale, se $Y \subseteq X$ è un sottinsieme aperto e chiuso, allora Y è unione di componenti connesse di X: se $C \subseteq X$ è una comp. connessa di X, $C \cap Y \subseteq C$ è aperto e chiuso e C connesso $\Rightarrow C \cap Y = \emptyset$ oppure $C \cap Y = C$ cioè $C \subseteq Y$.

Il funtore π_0

Per dimostrare che due sp. X e Y non sono omeomorfi, di solito si esibisce una prop. topologica che uno dei due spazi possiede ma l'altro no.

Ad esempio: $\underset{\text{connesso}}{X = (0,1)}$, $\underset{\text{non connesso}}{Y = (2,3) \cup (5,6)}$ non sono omeomorfi

Usando la connessione si può far vedere che $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$

(è anche vero che $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$)

Se per assurdo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ fosse un omeomorfismo

avrei che $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^n\setminus\{f(0)\}$ sarebbe pure un omeomorfismo

(più in generale, se $f: X \to Y$ è omeo., e $Z \subseteq X$ sottoinsieme, allora $f|_{X\setminus Z}$ è pure un omeo.)

$$X \setminus Z \to Y \setminus \{f(Z)\}$$

con la top. di ssp.

Ma ora $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ è sconnesso e se $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ è connesso per archi, quindi connesso.

↳ per collegare due punti se il segmento che li collega non funziona perché contiene p, si "gira intorno" per es. con un arco di circonferenza

Esercizio: se $n \geq 2$, e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme al più numerabile, allora $\mathbb{R}^n \setminus A$ è connesso per archi (ad esempio $A = \mathbb{Q}^n, \dots$)

Più in generale, se X e Y hanno un # diverso di comp. connesse (anche ∞ usando le cardinalità), allora non possono
(o connesse per archi)
essere omeomorfi.

Def. X sp. topologico. Si denota con $\pi_0(X)$ l'insieme delle sue comp. connesse per archi

In altre parole, $\pi_0(X) = X/_\sim$ dove $x \sim y$ se $\exists\, \gamma: [0,1] \to X$ t.c. $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$ cammino.

Questa è una rel. di equivalenza (per la transitività si usa la giunzione di cammini). Le classi di equivalenza sono esattamente le componenti connesse per archi.

Data una funt. $f: X \to Y$ continua, questa induce

$$\pi_0(f): \underset{X/\sim}{\underset{\parallel}{\pi_0(X)}} \to \underset{Y/\sim}{\underset{\parallel}{\pi_0(Y)}}$$

(se $x \sim x'$ in X $\Rightarrow$ $f(x) \sim f(x')$ in Y)
$\gamma: [0,1] \to X$ $\quad$ $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$
$\gamma(0) = x \quad \gamma(1) = x'$ $\quad$ è un cammino

Inoltre vale che

proprietà di FUNTORIALITÀ

- $\pi_0(id_X) = id_{\pi_0(X)}$
- se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ continue tra sp. top., allora

  $\pi_0(g \circ f): \pi_0(X) \to \pi_0(Z)$

  $\pi_0(g) \circ \pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Z)$

  sono la stessa funzione

π_0 è un FUNTORE dalla categoria degli sp. topologici alla categoria degli insiemi.

Segue formalmente che se $f: X \to Y$ è un omeomorfismo, allora $\pi_0(f)$ è una bigezione, cioè se X e Y sono omeomorfi, allora hanno lo stesso numero di componenti connesse per archi.

($f^{-1}: Y \to X$ è l'inversa, allora $\begin{matrix} f \circ f^{-1} = id_Y \\ f^{-1} \circ f = id_X \end{matrix}$

$$\Rightarrow \pi_0(f \circ f^{-1}) = \pi_0(id_Y) = id_{\pi_0(Y)}$$
$$\parallel$$
$$\pi_0(f) \circ \pi_0(f^{-1})$$

analogamente si ha $\pi_0(f^{-1}) \circ \pi_0(f) = id_{\pi_0(X)}$ quindi $\pi_0(f)$ è bigettiva, con inversa $\pi_0(f^{-1})$)

Quindi $|\pi_0(X)|$ è un invariante che si può usare per distinguere spazi non omeomorfi

OSS. chiaramente se $|\pi_0(X)| = |\pi_0(Y)|$ non segue che $X \cong Y$.

ad esempio $X = \{*\}$ e $Y = [0,1]$

COMPATTEZZA

Def. Uno sp. top. X si dice compatto se da ogni ricoprimento aperto di X si può estrarre un sottoricoprimento finito, cioè se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto, allora $\exists\ J \subseteq I$ finito t.c. $\{U_i\}_{i \in J}$ è ancora un ricoprimento di X.

Esempi: (1) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ non è compatto

Se $\mathcal{U} = \{B(0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento che non ammette sottoricoprimenti finiti

(2) Se (X,d) è metrico ed è compatto, allora d è limitata, cioè $\exists\ K \in \mathbb{R}$ t.c. $d(x,y) \leq K$ $\forall\ x,y \in X$

Fissato $x_0 \in X$, $\mathcal{U} = \{B(x_0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento aperto di X, che quindi ammette un sottoric. fin. $\{B(x_0,n_1), \dots, B(x_0,n_k)\} \Rightarrow X = B(x_0,\overline{K})$ $\overline{K} = \max\{n_1, \dots, n_k\}$.

A questo punto $d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \leq$
$\leq \overline{K} + \overline{K} = 2\overline{K} = K$

(il viceversa non è vero: qualsiasi distanza d è topologicamente equivalente a una distanza limitata, ad esempio $d' = \min\{d, 1\}$).

(3) se X ha un # finito di punti, è compatto.

(4) Se X ha la top. indiscreta è banalmente compatto (mentre se X è infinito e la top. è discreta, X non è compatto)

C'è una condizione equivalente alla compattezza che usa i chiusi e si ottiene "passando al complementare"

Def. Se $\{Y_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X, si dice che ha la PROPRIETÀ DELL'INTERSEZIONE FINITA se $\forall J \subseteq I$ finito si ha $\bigcap_{i\in J} Y_i \neq \emptyset$

Esempi ① $X = \mathbb{R}$, $Y_i = [i, +\infty)$ $i \in \mathbb{N}$

Questa famiglia ha la prop. dell'intersezione finita. Notare che $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} Y_i = \emptyset$

② $X = [0,1]$ $Y_i = [0, 1/i)$

Anche questa ha la proprietà dell'int. finita

Questa volta $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} Y_i = \{0\} \neq \emptyset$

Prop: Uno spazio X è compatto SSE ogni famiglia di chiusi $\{Y_i\}_{i\in I}$ con la prop. dell'intersezione finita soddisfa $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$.

DIM. Data una fam. di aperti $\{U_i\}_{i\in I}$, i complementari $Y_i = X \setminus U_i$ danno una fam. di chiusi di X (e viceversa)

Inoltre se $J \subseteq I$ è un sottoinsieme,

$$\bigcup_{i\in J} U_i = \bigcup_{i\in J} (X\setminus Y_i) = X \setminus \left(\bigcap_{i\in J} Y_i\right)$$

Quindi $\{U_i\}_{i\in J}$ è un ricoprimento di X SSE $\bigcap Y_i = \emptyset$

Se assumiamo che X sia compatto, e $\{Y_i\}_{i\in I}$ chiusi con la prop. di intersezione finita, pongo $U_i = X\setminus Y_i$

Ora $\{U_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di aperti di X, che non ha sottoricoprimenti finiti

Per compattezza di X segue che $\{U_i\}_{i\in I}$ non è un ricoprimento di X, cioè $\bigcap Y_i \neq \emptyset$

L'altra implicazione è analoga. $\square$

<u>COROLLARIO</u>: se X è compatto e $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono chiusi non vuoti t.c. $C_{n+1} \subseteq C_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$$

<u>TEO</u> $[0,1]$ (con la top. Euclidea) è uno sp. compatto

<u>DIM</u>. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto, e mostriamo che esiste un sottoric. finito.

Consideriamo

intervalli $[0,t]$ che hanno un sottoricoprimento finito

$$A = \left\{ t \in [0,1] \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists J \subseteq I \text{ finito t.c.} \\ [0,t] \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i \end{array} \right\}$$

$A \subseteq [0,1]$. Vogliamo mostrare che $1 \in A$.

1. $0 \in A$, $A \neq \{0\}$

Visto che $\mathcal{U}$ è un ricoprimento, $\exists i_0 \in I$ t.c. $0 \in U_{i_0}$. Visto che U_{i_0} è aperto,

$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $[0,\varepsilon) \subseteq U_{i_0}$

$\qquad\qquad\qquad\quad \cup\!|$

$\qquad\qquad\qquad [0, \varepsilon/2]$

Questo implica che $0 \in A$ e $\varepsilon/2 \in A$, quindi $A \neq \{0\}$

2. A è un intervallo, cioè se $a \in A$ e $a' \leq a$, allora $a' \in A$. Infatti, $a \in A \iff [0,a] = \bigcup_{i\in J} U_i$ con J finito, e $[0,a'] \subseteq [0,a]$, quindi $a' \in A$

Chiamiamo $s = \sup A \in [0,1]$

3. si ha $[0,s) \subseteq A$

Visto che $s = \sup A$, $[0,s) \in \bigcup_{a\in A} [0,a]$ e ok.

4. si ha $s \in A$

Visto che $\mathcal{U}$ è un ricoprimento, esiste $i_s \in I$ t.c. $s \in U_{i_s}$. Dato che U_{i_s} è aperto,

$\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap [0,1] \subseteq U_{i_s}$

Ora, $s - \varepsilon/2 \in A$ e quindi $\exists\, J \subseteq I$ finito t.c. $[0, s-\varepsilon/2] = \bigcup_{i \in J} U_i$

A questo punto ho

$$[0,s] = [0, s-\varepsilon/2] \cup (s-\varepsilon, s] \subseteq \underbrace{\left(\bigcup_{i\in J} U_i\right) \cup U_{i_s}}_{\text{unione finita di elementi di } \mathcal{U}}$$

Questo implica che $s \in A$.

(5) $s = 1$. Se per assurdo $s < 1$, il ragionamento del punto precedente produce un $\varepsilon > 0$ t.c. $s + \varepsilon/2 \leq 1$ e $[0, s+\varepsilon/2]$ è contenuto in una unione finita di elementi di $\mathcal{U}$, quindi $s + \varepsilon/2 \in A$, assurdo perché $s = \sup A$ $\square$

OSS come conseguenza tutti gli intervalli chiusi $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ sono compatti, invece gli intervalli aperti (a,b) non sono compatti: sono tutti omeomorfi a $(-1,1)$, che è omeomorfo a $\mathbb{R}$, tramite

$$x \longmapsto \tan \frac{\pi}{2} x \; : \; (-1,1) \to \mathbb{R}$$

Analogamente si vede che gli intervalli $[a,b)$ e $(a,b]$ non sono compatti.

(tramite l'omeomorfismo di sopra, $[0,1) \cong [0, +\infty)$, che non è compatto).

TEO $f: X \to Y$ continua, e $C \subseteq X$ è un ssp. compatto, allora $f(C) \subseteq Y$ è compatto.

DIM. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $f(C)$

Visto che f è continua, anche la funt. indotta $g = f|_C : C \to f(C)$ è continua.

Dunque $\{g^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ è un ric. aperto di C.

Per compattezza di C $\exists J \subseteq I$ finito t.c.

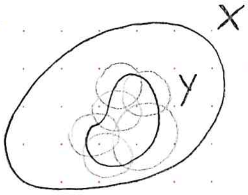
$$C = \bigcup_{i \in J} q^{-1}(U_i) \quad \text{e dunque}$$

$$q(C) = q\Big(\bigcup_{i \in J} q^{-1}(U_i)\Big) = \bigcup_{i \in J} q(q^{-1}(U_i)) \underset{\substack{\uparrow \\ q \text{ suriettiva}}}{=} \bigcup_{i \in J} U_i$$

da cui $\{U_i\}_{i \in J}$ è un ricoprimento FINITO di $f(C)$. $\square$

OSS un ssp. $Y \subseteq X$ è compatto SSE per ogni famiglia di $\{U_i\}_{i \in I}$ con U_i aperti di X t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ si può estrarre $J \subseteq I$ finito t.c.

$$Y \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$$



10/12/2024
Talpo

COMPATTEZZA

In $\mathbb{R}^n$ i compatti sono esattamente i chiusi e limitati

Vediamo in generale come si rapportano compattezza ed essere chiusi

Prop: se X è compatto e $Y \subseteq X$ è chiuso, allora Y è compatto

("chiuso di un compatto è compatto")

DIM Usando l'ultima osservazione della lezione precedente, prendo $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ con $U_i \subseteq X$ aperto, t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

$U = X \setminus Y$ è aperto per hp. e $\{U_i\}_{i \in I} \cup \{U\}$ è un ricoprimento aperto di X. Per compattezza posso estrarre un sottoricoprimento finito, cioè $\exists J \subseteq I$ finito / $X = \bigcup_{i \in J} U_i \cup U$

$Y = X \setminus U$, quindi necessariamente $Y \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$ e questo mostra che Y è compatto. $\square$

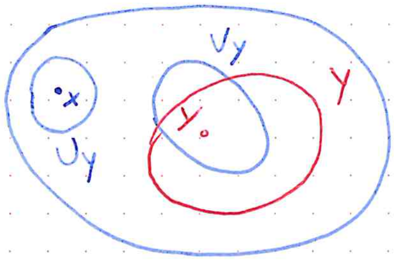
OSS: l'hp. che Y sia chiuso è necessaria, non è vero che un ssp. di un compatto è compatto in generale. es: $X = [0,1]$, $Y = (1/2, 2/3)$

(non sto assumendo X compatto)

Prop. se X è T_2 e $Y \subseteq X$ è un ssp. compatto, allora Y è chiuso in X

DIM. Mostriamo che $X \setminus Y$ è aperto, facendo vedere che è intorno di ogni suo punto.

Fisso $x \in X \setminus Y$, voglio trovare un intorno di x tutto contenuto in $X \setminus Y$.



Per ogni $y \in Y$ per la prop. T_2 trovo U_y e V_y aperti di X, $x \in U_y$, $y \in V_y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$

La famiglia $\{V_y\}_{y \in Y}$ è una famiglia di aperti di X che ricoprono Y e per compattezza di Y

$$\exists y_1, \dots, y_k \in Y \text{ t.c. } Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$$

Se poniamo $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}$, questo è un intorno, aperto, di x e non interseca Y:

$$U \cap Y = \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}\right) \cap Y \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}\right) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} \left(V_{y_i} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}\right)\right) = \emptyset$$

$$V_{y_i} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}\right) \subseteq V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$$

Quindi $x \in U \subseteq X \setminus Y$ è l'intorno che cercavo □

OSS senza l'ipotesi T_2 non è sempre vero che compatto $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ chiuso.

① Se $|X| \geq 2$ e X ha la top. indiscreta, qualsiasi sottoinsieme di X è compatto, ma quasi tutti i sottoinsiemi NON sono chiusi.

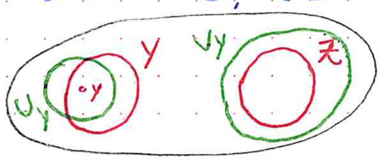
② Se X è un insieme infinito con la top. cofinita, allora tutti i sottospazi di X sono compatti:
se $Y \subseteq X$ è un ssp., allora Y ha di nuovo la top. cofinita.
Data una famiglia di aperti $\{U_i\}_{i\in I}$ di X t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, preso $U_i \neq \emptyset$ tra questi
(se $Y = \emptyset$ è chiaramente compatto)
il complementare $X \setminus U_i$ è finito e quindi per coprire Y basta prendere U_i e aggiungere un # finito degli $\{U_i\}_{i\in I}$, al più uno per ogni punto di $Y \setminus U_i$.
Non è vero che tutti i sottoinsiemi di X sono chiusi ad esempio $X \setminus \{x\} \subseteq X$ per $x \in X$.

Prop. Se X è compatto e T_2, allora è regolare (cioè $T_1 + T_3$)

DIM. $T_2 \Rightarrow T_1$ per cui basta vedere che X è T_3
Siano $x \in X$ e $Y \subseteq X$ chiuso t.c. $x \notin Y$. Per quanto visto, Y è compatto, essendo chiuso in un compatto.
La prop. precedente produce U, V aperti di X, $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}$, $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$
con $x \in U$, $Y \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$ □

Prop. X compatto e $T_2 \Rightarrow X$ è normale $(T_1 + T_4)$

DIM. Sappiamo già che è T_1 e T_3. Per la prop. T_4:
siano $Z, Y \subseteq X$ chiusi t.c. $Y \cap Z = \emptyset$ e produco $U, V \subseteq X$ aperti, con $Y \subseteq U$, $Z \subseteq V$ e $U \cap V = \emptyset$ così:



Per ogni $y \in Y$, per la prop. T_3 trovo $U_y, V_y \subseteq X$ aperti, con $y \in U_y$, $Z \subseteq V_y$ e $U_y \cap V_y = \emptyset$.

La famiglia $\{U_y\}_{y \in Y}$ è una fam. di aperti di X la cui unione contiene Y e per compattezza di Y (che è chiuso di un compatto)

$\exists y_1, \dots, y_k \in Y$ t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{y_i}$

Ponendo $V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{y_i}$, $U = \bigcup_{i=1}^{k} U_{y_i}$

questi sono aperti di X, $Y \subseteq U$ e $Z \subseteq V$ e come prima $U \cap V = \emptyset$. Questo mostra che X è T_4 $\square$

IMPORTANTE! In futuro sarà utile negli esercizi sui quozienti.

Prop $f: X \to Y$ continua. X compatto e Y è T_2, allora f è chiusa. In particolare se f è anche biunivoca, segue che è un omeomorfismo.

Questa prop. è molto utile nella pratica per verificare che una bigezione è un omeomorfismo senza controllare "esplicitamente" la continuità dell'inversa.

DIM. Se $C \subseteq X$ è un chiuso, è compatto in quanto chiuso di un compatto. Dunque $f(C) \subseteq Y$ è pure compatto, in quanto immagine continua di un compatto. Ora segue che $f(C)$ è chiuso in Y, visto che è compatto in uno spazio T_2. $\square$

Teorema Se X e Y sono sp. compatti, allora $X \times Y$ è compatto

OSS ① È vero più in generale che se $\{X_i\}_{i \in I}$ sono sp. top. compatti, allora $\prod X_i$ è compatto (TEO. DI TYCHONOFF)

② $X \times Y$ compatto $\Rightarrow$ X e Y compatti supponendo che $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$

($X \times Y$ compatto, allora $\pi_X : X \times Y \to X$ realizza X

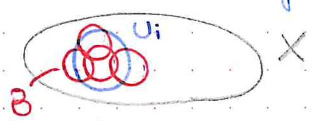
come immagine continua di un compatto se $Y \neq \emptyset$, così π_X è suriettiva)

Per dimostrare il teo. è utile il seguente lemma

LEMMA: se $\mathcal{B}$ base della top. di X e da qualsiasi ricoprimento di X costituito da aperti di $\mathcal{B}$ si riesce a estrarre un sottoricoprimento finito ("X compatto rispetto a $\mathcal{B}$"), allora X è compatto.

DIM. Dato $\mathcal{U} = \{U_i\}$ ricoprimento aperto di X, mostriamo che ammette un sottoricoprimento finito

Scriviamo $\forall i$ $U_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_i} B$ (usando la def. di base)



Ora $\{B \mid B \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}\}$ è un ricoprimento di X fatto da aperti di base

Per ip. $\exists$ $B_1, \dots, B_K$ famiglia finita t.c. $\bigcup_{i=1}^{K} B_i = X$

Per costruzione $B_i \subseteq U_{f(i)}$ per qualche $f(i) \in I$. La famiglia $\{U_{f(i)} \mid i = 1, \dots, K\}$ è un sottoricoprimento finito del ricoprimento originale

$(\bigcup U_{f(i)} \supseteq \bigcup B_i = X)$ e ho finito $\square$

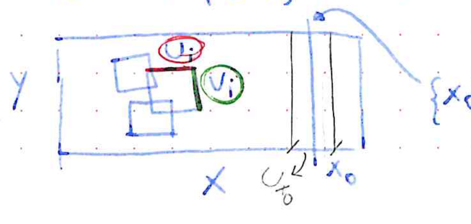
OSS. Vale anche usando le pre-basi (TEO. DI ALEXANDER)

DIM. (del TEO)

X, Y compatti, voglio mostrare che lo è anche $X \times Y$.

Per il lemma posso considerare ricoprimenti di $X \times Y$ fatti da aperti di base.

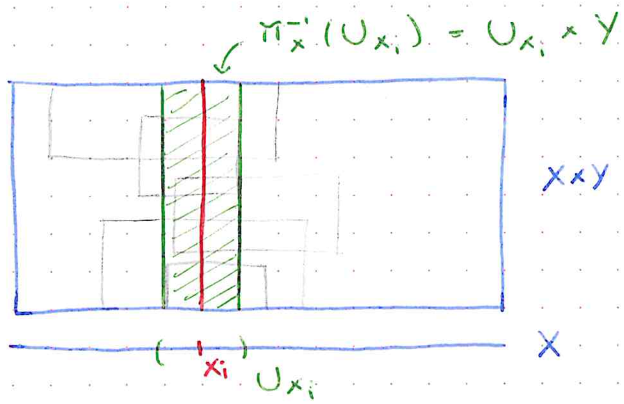
Sia $\mathcal{U} = \{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ un tale ricoprimento, dove $U_i \subseteq X$ $V_i \subseteq Y$ sono aperti, $X \times Y = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)$



Fissato $x_0 \in X$, $\{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ è omeomorfo a Y, quindi è compatto. La famiglia $\{U_i \times V_i \mid x_0 \in U_i\}$ è una famiglia di aperti di $X \times Y$ che contiene $\{x_0\} \times Y$, dunque $\exists\ I_{x_0} \subseteq I$ finito t.c. $\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I_{x_0}} U_i \times V_i$

Sia ora $U_{x_0} = \bigcap_{i \in I_{x_0}} U_i$. Questo è un aperto di X che contiene x_0. La famiglia $\{U_{x_0}\}_{x_0 \in X}$ è un ricoprimento aperto di X allora per compattezza $\exists\ x_1, \dots, x_K$ t.c.

$$X = \bigcup_{i=1}^{K} U_{x_i}$$



Abbiamo che $\{U_i \times V_i\}_{i \in \bigcup_{j=1}^{K} I_{x_j}}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$:

$$\bigcup_{i \in \bigcup_{j=1}^{K} I_{x_j}} U_i \times V_i = \bigcup_{j=1}^{K} \left(\bigcup_{i \in I_{x_j}} (U_i \times V_i) \right) \supseteq \bigcup_{j=1}^{K} U_{x_j} \times Y \quad \left(\text{perché } U_{x_j} = \bigcap_{i \in I_{x_j}} U_i\right)$$

$$= \left(\bigcup_{j=1}^{K} U_{x_j} \right) \times Y = X \times Y$$

Corollario: $X_1, \dots, X_K$ compatti $\Rightarrow \prod_{i=1}^{K} X_i$ compatto

(per induzione...)

Teorema (Heine-Borel)

I compatti di $\mathbb{R}^n$ sono esattamente i chiusi e limitati.

DIM. compatto $\Rightarrow$ chiuso perché $\mathbb{R}^n$ è T_2, e abbiamo visto che in uno sp. metrico compatto la distanza è limitata, il che vuol dire che il sottoinsieme è limitato.

Chiuso e limitato $\Rightarrow$ compatto?

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato. Posso trovare $R \in \mathbb{R}^n$ t.c. $X \subseteq [-R,R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$
ipercubo

$[-R,R]^n$ è compatto in quanto prodotto di compatti e X è chiuso in $[-R,R]^n$ (è chiuso anche in $\mathbb{R}^n$) e dunque X è compatto. (compatto in un sottoinsieme è sempre aperto nello spazio grande) $\square$

Teorema (Weierstrass)

$f: X \to \mathbb{R}$ continua e X compatto $\Rightarrow$ f ammette max e min.

DIM. $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ compatto (perché X compatto e f continua)

$\Rightarrow$ $f(X)$ chiuso e limitato

Allora $\sup(f(X))$ e $\inf(f(X)) \in \mathbb{R}$ e inoltre sono in $f(X)$ poiché questo è chiuso

($\inf A$ e $\sup A$ sono sempre punti aderenti di A)

Segue che sup e inf sono in realtà max e min. $\square$

Corollario: tutte le norme su $\mathbb{R}^n$ sono topologicamente equivalenti

OSS Questo è falso in dimensione infinita. (vedi esercizio del foglio)

DIM. Confrontiamo una norma arbitraria $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con la norma euclidea $\|\cdot\|_{Eucl}$

$\|\cdot\|$ è continua rispetto alla top. Euclidea

Infatti, se $\{e_i\}$ è la base standard

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| = \Big\|\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) e_i\Big\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \|e_i\| \leq d_1(x,y) \cdot M \qquad M = \max\{\|e_i\|, i = 1, \dots, n\}$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ è M-Lipschitz rispetto a d_1, che induce la top. euclidea.

Restringiamo $\|\cdot\|$ a $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{Eucl} = 1\}$

che è compatto in quanto chiuso e limitato.

Quindi $\|\cdot\|\big|_{S^{n-1}}$ ammette $\underset{\overset{\|}{M}}{\max}$ e $\underset{\overset{\|}{m}}{\min}$

Ora, dato $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $\dfrac{x}{\|x\|_{Eucl}} \in S^{n-1}$

$$m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_{Eucl}} \right\| \leq M$$

$$\Rightarrow \quad m\|x\|_{Eucl} \leq \|x\| \leq M \cdot \|x\|_{Eucl}$$

Come visto in precedenta, da questo segue che le due norme sono top. equivalenti. $\square$

12/12/2024
Talpo

40 X insieme più che numerabile con la top. conumerabile

(1) X connesso
(2) $Y \subseteq X$ al più numerabile, allora Y è totalmente sconnesso
(3) X non connesso per archi (CPA)

Solutione:
(1) Mostriamo che se U e $V \subseteq X$ sono aperti non vuoti, $U \cap V \neq \emptyset$

Questo implica che X è connesso

$X \setminus U$ e $X \setminus V$ sono chiusi e $\neq X$ per cui sono al più numerabili $\Rightarrow X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ è al più numerabile e visto che X è più che numerabile, segue che $X \setminus (U \cap V) \neq X$

$\Rightarrow \quad U \cap V \neq \emptyset$

(2) Sia $Y \subseteq X$ al più numerabile. Vediamo che la top. indotta su Y è discreta ($\Rightarrow$ Y tot. sconnesso)

Dato $y \in Y$, mostriamo che $\{y\} \subseteq Y$ è aperto e chiuso.

È chiuso, visto che $\{y\} \subseteq X$ è chiuso e il complementare $Y \setminus \{y\} \subseteq X$ è pure chiuso in X (è al più num.) e dunque è chiuso anche in Y.

(3) X non CPA

Mostriamo che qualsiasi cammino $\gamma : [0,1] \to X$ è costante.

Questo implica che X non è connesso per archi.

Sia $D \subseteq [0,1]$ **denso** numerabile (es. $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$) e facciamo vedere che $\gamma([0,1]) = \gamma(D)$

Una volta visto questo, $\gamma(D)$ è al più numerabile dunque tot. sconnesso (punto 2). Invece $\gamma([0,1])$ è connesso in quanto immagine continua di un connesso $\Rightarrow \gamma([0,1]) = \gamma(D)$ è sia connesso che tot. sconnesso per cui è un singoletto, cioè γ costante.

Vediamo che $\gamma([0,1]) = \gamma(D)$ $\quad (\overline{D} = [0,1])$

$$\gamma(D) \subseteq \underbrace{\gamma(\overline{D})}_{= \gamma([0,1])} \subseteq \overline{\gamma(D)} = \gamma(D)$$

giustifichiamo questa inclusione:

$\gamma(D)$ in X è al più numerabile quindi chiuso

In generale, se $f : X \to Y$ è una funzione continua e $Z \subseteq X$, allora vale sempre che $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$

Sia $a \in f(\overline{Z})$, diciamo $a = f(z)$ $z \in \overline{Z}$

Per mostrare $a \in \overline{f(Z)}$, vediamo che ogni intorno $U \in I(a)$ interseca $f(Z)$.

Infatti per continuità di f, $f^{-1}(U) \in I(z)$

Segue che $f^{-1}(U) \cap Z \neq \emptyset$, visto che $z \in \overline{Z}$.

È facile vedere che $f(f^{-1}(U) \cap Z) \subseteq U \cap f(Z)$ si verifica la doppia inclusione

$y \in Z \quad y \in f^{-1}(U) \rightsquigarrow f(y) \in U$

e segue che $f(U) \cap Z \neq \emptyset$. $\square$

42 X e Y connessi (risp. connessi per archi) allora $X \times Y$ è connesso (risp. connesso per archi)

(il $\emptyset$ è connesso? cpa? Dalla def. sì, però per certi aspetti conviene non considerarlo connesso, ad esempio così la scomposizione in componenti connesse è sicuramente unica...)

DIM. Supponiamo X e Y c.p.a. e mostriamo che $X \times Y$ lo è.

Siano (x_0, y_0) e $(x_1, y_1) \in X, Y$

$\gamma : [0,1] \to X$ cammino $\gamma(0) = x_0$ $\gamma(1) = x_1$

$\gamma' : [0,1] \to Y$ cammino $\gamma'(0) = y_0$ $\gamma'(1) = y_1$

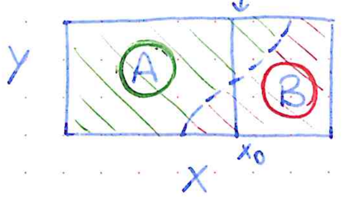
È facile verificare che $\gamma'' : [0,1] \to X \times Y$ dato da

$\gamma''(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$ è un cammino che collega (x_0, y_0) e (x_1, y_1)

Supponiamo ora X e Y connessi.

Supponiamo per assurdo che $A, B \subseteq X \times Y$ siano aperti, $\neq \emptyset$ e disgiunti e t.c. $A \cup B = X \times Y$

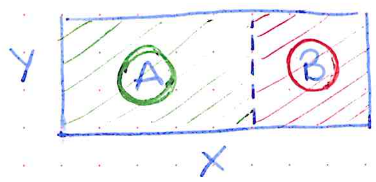
$\{x_0\} \times Y \cong Y$



Dato $x_0 \in X$, i sottoinsiemi $A \cap (\{x_0\} \times Y)$ e $B \cap (\{x_0\} \times Y)$ sono aperti e disgiunti di $\{x_0\} \times Y \cong Y$ che è connesso, inoltre la loro unione è tutto $\{x_0\} \times Y$.

Segue che $A \cap (\{x_0\} \times Y) = \emptyset$ e $B \cap (\{x_0\} \times Y) = \{x_0\} \times Y$ o viceversa.

Allora un disegno più accurato è



Cioè A e B unione di sottoinsiemi della forma $\{x_0\} \times Y$.

Guardiamo quindi $\pi_X(A)$ e $\pi_X(B) \subseteq X$

↳ aperti, non vuoti,

$\pi_X(A) \cup \pi_X(B) = X$

$\subseteq$ ovvia, $\supseteq$ se $x \in X$, preso $y_0 \in Y$ a caso, $(x, y_0) \in A$ o B

Dato che X è connesso, segue che $\pi_X(A) \cap \pi_X(B) \neq \emptyset$.

Questo è assurdo, perché se $x_0 \in$ all'intersezione, allora

$\exists\, y_0, y_1$ t.c. $\underbrace{(x_0, y_0) \in A}_{x_0 \in \pi_X(A)}$, $(x_0, y_1) \in B$

che è falso, perché vorrebbe dire che $A \cap (\{x_0\} \times Y) \neq \emptyset$ e

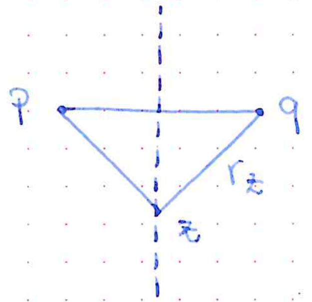
$B \cap (\{x_0\} \times Y) \neq \emptyset$.

Per il prodotto arbitrario vale ancora? $\square$

41 (sketch)

Se $W \subseteq \mathbb{R}^2$ è al più numerabile, allora $\mathbb{R}^2 \setminus W$ è connesso per archi. (Da questo segue l'analogo risultato per $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$)

Idea: dati $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus W$ si possono considerare i cammini ottenuti congiungendo p e q a un punto dell'asse del segmento $\overline{pq}$



r_z non funziona se contiene almeno un punto di W

però $\mathrm{Im}(\gamma(z)) \cap \mathrm{Im}(\gamma(z')) = \{p, q\}$ se $z \neq z'$

e il fatto che W è al più numerabile, mentre z varia in $\mathbb{R}$, vi permette di concludere che ci deve essere almeno un r_z che non interseca W (sistemare i dettagli).

39 $n \geq 1$, su $\mathbb{R}^{n+1}$ scriviamo x come $x = (x_0, \dots, x_n)$

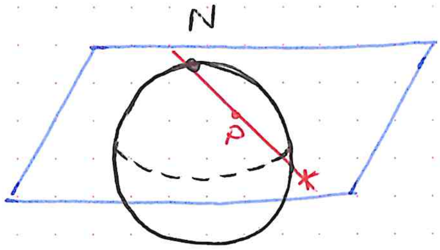
$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $N = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$,

$f: S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ (proiezione stereografica)

$f(p) =$ ultime n coordinate dell'intersezione della retta per N e p con $x_0 = 0$

Questa è biunivoca ed è un omeomorfismo

Sol.



$\{0\} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$
$\cong$
$\mathbb{R}^n$

Scriviamo in coord. e verifichiamo che f e f^{-1} sono continue.

Dato $p = (x_0 \cdots x_n)$ la retta r è parametrizzata come

$t \cdot p + (1-t)N =$

$= (t \cdot x_0 + (1-t), tx_1, \dots, tx_n)$

L'intersezione con $x_0 = 0$ da $tx_0 + 1 - t = 0$

$t(x_0 - 1) = -1$

$t = \frac{1}{\underset{\sim}{1-x_0}}$

$\neq 0$ perché N è l'unico punto con 0-esima coord. 0 di S^n

e ha coordinate

$$\left(0, \frac{x_1}{1-x_0}, \frac{x_2}{1-x_0} \cdots \frac{x_n}{1-x_0}\right)$$

la funt. risultante è continua perché le coordinate sono continue. Scriviamo l'inversa

Prendo $(0, x_1, \dots, x_n) \in \{0\} \times \mathbb{R}^n$

$t(0, x_1, \dots, x_n) + (1-t)(1, 0, \dots, 0) = (1-t, tx_1, \dots, tx_n)$

Imponendo che stia su S_n si trova

$$(1-t)^2 + t^2 x_1^2 + \dots + t^2 x_n^2 = 1$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad \cancel{1} - 2t + t^2 + t^2 \|x\|^2 = \cancel{1}$

$t^2(1 + \|x\|^2) - 2t = 0 \quad \begin{cases} t = 0 \leftrightarrow N \\ t = \frac{2}{1+\|x\|^2} \end{cases}$

Il pt. risultante di S_n è

$$\left(1 - \frac{2}{1+\|x\|^2}, \frac{2x}{1+\|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1+\|x\|^2}\right)$$

↳ che è continua. $\square$

COMPATTIFICAZIONE DI ALEXANDROV

Costruzione generale di cui l'esempio precedente è un caso particolare ($F^{-1}: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} S^n \setminus \{N\} \subseteq S^n$ è continua, è un omeomorfismo con l'immagine e S^n è compatto)

Dato X sp. topologico, si costruisce $\hat{X}$, la sua COMPATTIFICAZIONE DI ALEXANDROV, nel seguente modo:

insiemisticamente, $\hat{X} = X \cup \underbrace{\{\infty\}}$ non-elemento di X

($i: X \hookrightarrow \hat{X}$ inclusione)

con la topologia per cui $A \subseteq \hat{X}$ è aperto SSE

- è un aperto di X, se $\infty \notin A$
- $X \setminus i^{-1}(A)$ è un chiuso compatto di X

Prop: questa è una topologia su $\hat{X}$ e $\hat{X}$ è compatto.

DIM.
- $\emptyset \subseteq \hat{X}$ è aperto, perché $\infty \notin \emptyset$ e $\emptyset \subseteq X$ è aperto
- $\hat{X} \subseteq \hat{X}$ è aperto, perché $\hat{X} \setminus i^{-1}(\hat{X}) = \emptyset$ che è chiuso e compatto in X
- A, B sono aperti, allora $A \cap B$ aperto

Ci sono 3 casi, a seconda che ∞ stia in A e/o B

Guardiamo solo il caso in cui $\infty \in A \land \infty \in B$.

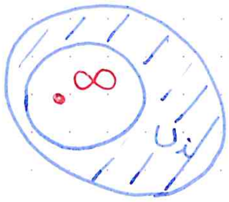
(gli altri sono simili)

$\infty \in A \cap B$ e $X \setminus \underset{i^{-1}(A) \cap i^{-1}(B)}{i^{-1}(A \cap B)} = (X \setminus i^{-1}(A)) \cup (X \setminus i^{-1}(B))$ chiusi e compatti in X

è pure chiuso e compatto.

- L'unione arbitraria di aperti è aperta (esercizio).

Vediamo che $\hat{X}$ è compatto. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $\hat{X}$. Sia $i_0 \in I$ t.c. $\infty \in U_{i_0}$



$\hat{X}$ Per definizione, $X \setminus i^{-1}(U_{i_0}) \subseteq X$ è chiuso e compatto. $\overset{\shortparallel}{Z}$

Inoltre, $\{i^{-1}(U_i)\}_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ è un ricoprimento aperto di Z. Per compattezza di Z posso estrarre un sottoric. finito $\{i^{-1}(U_1), \dots, i^{-1}(U_K)\}$ e segue facilmente che $\{U_1, \dots, U_K, U_{i_0}\}$ è un sottoric. finito di $\hat{X}$, sottoric. finito di $\mathcal{U}$. $\square$

OSS: X è T_2 e loc. compatto $\Leftrightarrow$ $(\overset{?}{\Leftarrow})$ $\hat{X}$ è T_2

compattificare senza voler conservare la prop. T_2 è più semplice: su $X \cup \{\infty\}$ si può mettere la top. in cui gli aperti sono aperti di X o tutto $X \cup \{\infty\}$

È compatto ma non è mai T_2

Prop: se Y è uno sp. compatto e T_2 e $p \in Y$ (fissato) e $X \cong Y \setminus \{p\}$, allora $Y \cong \hat{X}$

(una specie di unicità della compattificazione di Alexandrov).

Corollario: $\hat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$ 13/12/2024 (Talpo)

DIM. Sia $g: X \to Y \setminus \{p\}$ un omeomorfismo. Definiamo

$f: \hat{X} \to Y$ come $f(x) = g(x)$ se $x \in X$, $f(\infty) = p$

Questa è biunivoca e una volta che mostriamo che è continua, seguirà che è un omeomorfismo dal fatto che $\hat{X}$ è compatto e Y è T_2.

Sia $A \subseteq Y$ aperto. Ci sono due casi:

- Se $p \in A$, consideriamo $Z = Y \setminus A \subseteq Y$. Questo è chiuso, quindi è compatto (perché Y compatto), e inoltre $Z \subseteq Y \setminus \{p\} = g(X)$. Dato che g è omeo., $g^{-1}(Z) \subseteq X$ è pure chiuso e compatto. Ora $f^{-1}(Z) = g^{-1}(Z)$ e

$$f^{-1}(A) = \hat{X} \setminus f^{-1}(\overset{Z}{\overset{\shortparallel}{Y \setminus A}}) \quad (f \text{ è biunivoca})$$

$$= \hat{X} \setminus g^{-1}(Z)$$

$\hookrightarrow$ chiuso compatto di X

che quindi è aperto in $\hat{X}$

- Se $p \notin A$, allora $A \subseteq Y \setminus \{p\}$ e $f^{-1}(A) = g^{-1}(A)$

  Visto che g è continua, $g^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto e dunque è aperto anche in $\hat{X}$ (per costruzione).

$\square$

COMPATTO PER SUCCESSIONI

Def. Uno sp. top. X è COMP. PER SUCCESSIONI (o sequentialmente compatto) se da ogni succ. in X si può estrarre una sottosucc. convergente.

(una sottosuccessione di $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione della forma $\{x_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, dove $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funt. strettamente crescente)

TEO (vd. Analisi 2)

Se X è metrizzabile, sono equivalenti:

1) X compatto
2) X compatto per successioni
3) X completo e totalmente limitato

OSS Le condizioni 1 e 2 sono puramente topologiche, mentre a priori la 3 è soltanto metrica.

La sola completezza non è invariante per omeo.

Es: $\mathbb{R} \cong (0,1)$ (vd topological end)

$\mathbb{R}$: completo; $(0,1)$: non completo

TEO X è I-numerabile e compatto, allora è compatto per successioni.

DIM. sia $\{x_n\}$ una succ. in X. Devo estrarre una sottosuccessione convergente.

$D_i = \{x_n \mid n \geq i\} \subseteq X$ per $i \in \mathbb{N}$.

Chiamo $\Omega = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{D_i}$ (insieme dei candidati limiti delle sottosuccessioni di x_n)

Osserviamo che $\overline{D_{i+1}} \subseteq \overline{D_i}$

$(A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B})$

per la caratterizzazione mediante la proprietà dell'intersezione finita

per compattezza di X si ha $\Omega \neq \emptyset$. Sia $x \in \Omega$.

Costruiamo una sottosucc. di $\{x_n\}$ che converge a x.

Questo concluderà. Fissiamo un SFI al più numerabile di x, $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e posso supporre che $U_{k+1} \subseteq U_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Costruiamo induttivamente $x_{n(j)}$:

$j = 0$: $x \in \overline{D_0}$ e $U_0 \in I(x)$ Segue che $D_0 \cap U_0 \neq \emptyset$ Prendo $x_{n_0} \in D_0 \cap U_0$.

$j = 1$: $x \in \overline{D_{n_0+1}}$ e $U_1 \in I(x)$ Segue che $D_{n_0+1} \cap U_1 \neq \emptyset$ Prendo $x_{n_1} \in D_{n_0+1} \cap U_1$

etc...

Induttivamente in questo modo si costruisce

$x_{n(j)}$ t.c. $x_{n(j)} \in U_j$

Mostriamo che $x_{n(j)} \to x$. Sia $U \in I(x)$

Visto che $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è un SFI di x, $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $U_k \subseteq U$. Ma visto che $U_j \subseteq U_k$ $\forall j \geq k$ e $x_{n(j)} \in U_j$, segue che $x_{n_j} \in U$ $\forall j \geq k$. $\square$

TEO Se X è II-numerabile, allora X è compatto SSE è comp. per successioni

DIM. II num $\Rightarrow$ I num. per cui la freccia comp. $\Rightarrow$ comp. per successioni segue dal teo. precedente.

Mostriamo che non compatto $\Rightarrow$ non comp. per succ.

Se X non è compatto, allora ammette un ricoprimento

$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ che non ammette sottoric. finiti.

Possiamo supporre I (insieme di indici) numerabile, grazie al seguente lemma.

Lemma: X II-num. $\Rightarrow$ da ogni ric. aperto di X si può estrarre un sottoric. al più numerabile (X è "di Lindelöf")

DIM. $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ ric. aperto e $\mathcal{B}$ base al più numerabile.

Per ogni $x \in X$, esiste un $U_{i_x} \in \mathcal{U}$ t.c. $x \in U_{i_x}$ e visto che U_{i_x} è aperto, è unione di aperti di base, ed esisterà $B_x \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_x \subseteq U_{i_x}$

Ora $\{B_x \mid x \in X\}$ è un ric. di X, perché $x \in B_x$, e visto che è un sottoinsieme di $\mathcal{B}$, è al più numerabile.

Numeriamo gli elementi di $\{B_x \mid x \in X\}$

$$\{B_x \mid x\in X\} = \{B_{x_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Ora $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{x_n} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_{x_n}}$

Dunque $\{U_{i_{x_n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un sottoric. di $\mathcal{U}$. $\square$

Posso quindi supporre di avere $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un ric. aperto di X, senza sottoric. finiti.

Costruiamo una successione $\{x_n\}$ in X che non ammette sottosucc. convergenti. Osserviamo $X \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_K) \neq \emptyset$

Prendo $x_K \in X \setminus (\cdots)$, cioè $x_K \notin U_0 \cup \cdots \cup U_K$.

Mostriamo che $\{x_K\}$ non ha sottosuccessioni convergenti.

Supponiamo che $x_{K(n)}$ sia una sottosuccessione di $\{x_K\}$, che converge a un certo x.

Visto che U è un ricoprimento, avrò che $x \in U_j$ per qualche $j \in \mathbb{N}$. Dato che $U_j \in I(x)$, dovrei avere che $x_{K(n)} \in U_j$ definitivamente. Ma per costruzione, non appena

$K(u) \geq j$, ho $x_{K(u)} \notin U_0 \cup \cdots \cup U_K$ e i particolare

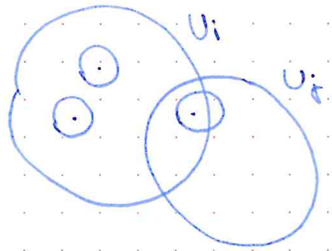
$x_{K(u)} \notin U_j$ ↯ $\square$

Corollario $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è comp. SSE è seq. comp.

(segue sia dal teo. precedente che da quello sugli sp. metrici)

Numero di Lebesgue

Def. un ric. $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di uno sp. metrico (X,d) ammette $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ come numero di Lebesgue se $\forall x \in X$, $B(x,\varepsilon) \subseteq U_i$ per qualche $i \in I$



ESEMPIO: se $X = [1,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$, il ricoprimento

$$\mathcal{U} = \{(y - \tfrac{1}{y}, y + \tfrac{1}{y}) \cap [1,+\infty) \mid \underset{\underset{y \to \text{ ricopre tutto}}{\cup}}{y \in X}\}$$

non ammette numero di Lebesgue:

fissato $\varepsilon > 0$, esiste sempre x grande t.c.

$$B(x,\varepsilon) \not\subseteq (y - \tfrac{1}{y}, y + \tfrac{1}{y}) \quad \forall y \in X$$

TEO X metrico compatto e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento, allora $\exists$ un # di Lebesgue per $\mathcal{U}$

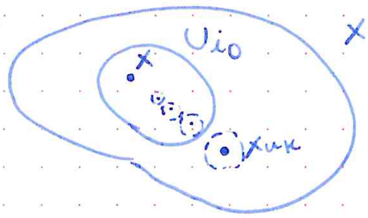
DIM. Per assurdo, supponiamo che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in X$ t.c. $B(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subseteq U_i$ $\forall i \in I$.

In particolare, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in X$ t.c. $B(x_n, 2^{-n}) \not\subseteq U_i$ $\forall i \in I$

Visto che è compatto, quindi comp. per succ., posso estrarre una sottosucc. convergente di x_n, diciamo x_{n_K}

e $x = \lim_{K \to +\infty} x_{n_K}$.

Visto che $\mathcal{U}$ è un ric. $\exists\, i_0 \in I$ t.c. $x \in U_{i_0}$



Visto che U_{i_0} è aperto, $\exists\, r>0$ t.c. $B(x,r) \subseteq U_{i_0}$.

Dato che $x_{n_k} \to x$, $\exists\, k_0$ t.c. $x_{n_k} \in B(x, \frac{r}{2})$ $\forall k \geq k_0$

e dato che $2^{-n} \to 0$ $\exists\, k_1$ t.c. $\forall k \geq k_1$ si ha $2^{-n_k} < r/2$

Ora se $\bar{k} = \max\{k_0, k_1\}$ $\forall k \geq \bar{k}$ si ha $B(x_{n_k}, 2^{-n_k}) \subseteq B(x,r) \subseteq U_i$

che è contro l'ipotesi

$y \in B(x_{n_k}, 2^{-n_k})$, allora

$d(y,x) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) <$

$< r/2 + r/2 = r$ $\square$

CONTINUITÀ UNIFORME

Sia $f: (X,d) \to (X',d')$ una funzione fra sp. metrici

f continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0$ t.c. $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

dipende da x_0 e ε

Se δ non dipende da x_0, si dice f "uniformemente" continua.

Def. f come sopra unif. cont. se $\forall \varepsilon>0 \ \exists\, \delta>0$ t.c.

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon \quad \forall x,y \in X$$

ES: se f è k-Lipschitziana, cioè $d'(f(x),f(y)) \leq k\, d(x,y)$ $\forall x,y \in X$

allora è unif. cont. (dato ε basta scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$)

ES: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ non è unif. cont.

TEO (Heine Cantor) Se $f: (X,d) \to (X',d')$ è continua e X è compatto, allora f è uniformemente continua

DIM. per assurdo, supponiamo f non unif. continua

Questo implica che $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n, x_n' \in X$ t.c.

$d(x_n, x_n') < 2^{-n}$ ma $d'(f(x_n), f(x_n')) \geq \varepsilon$

Per compattezza $\{x_n\}$ ammette una sottosucc. convergente, diciamo $x_{n_k} \to x$.

Dal fatto che $d(x_n, x_n') \to 0$, segue che anche $x_n' \to x_n$

Visto che f è continua, è anche continua per succ., quindi $f(x_{n_k}) \to f(x)$
$f(x_{n_k}') \to f(x)$

e questo implica che $d(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}')) \to 0$

(... dettagli) e questo contraddice l'ip. che

$d'(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}')) \geq \varepsilon \quad \forall n.$ $\square$

Esercitazione - 17/12/2024

ESERCIZIO 45

Se X è compatto e T_2 e C_n è una succ. di chiusi tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, detto $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ dimostrare che:

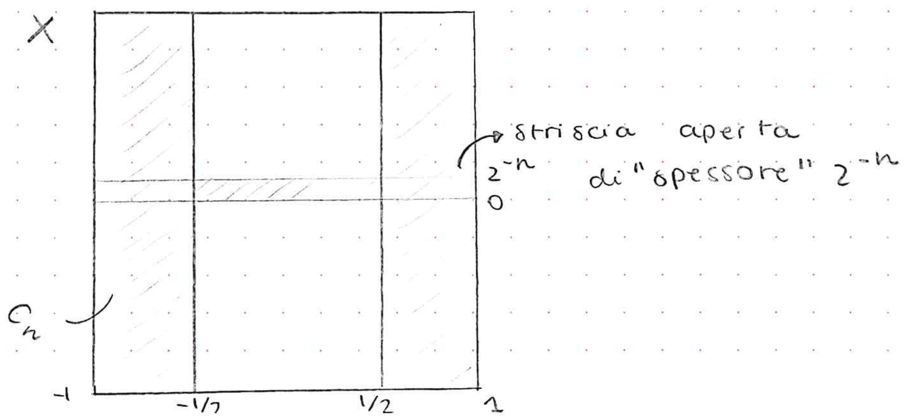
1) Se C_n è connesso $\forall n$, allora C è connesso

2) Vale lo stesso con "connesso per archi"?

OSSERVAZIONE: la compattezza di X e la chiusura dei C_n sono fondamentali. Ad esempio, se

$$X = [-1,1] \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$C_n = ([-1,-1/2] \times [-1,1]) \cup ([-1,1] \times (0, 2^{-n})) \cup ([1/2, 1] \times [-1,1])$$



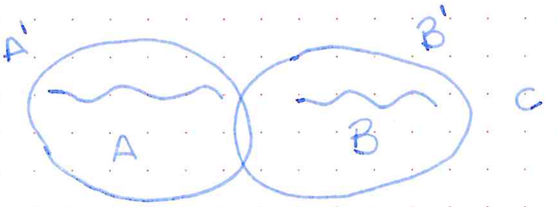
C_n è connesso per archi, dunque connesso, ma

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = [-1, -\tfrac{1}{2}] \times [-1,1] \cup [\tfrac{1}{2}, 1] \times [-1,1] \text{ è sconnesso}$$

1)
Risolviamo ora l'esercizio. Supponiamo $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ sconnesso e dimostriamo che C_n è sconnesso per qualche $n \in \mathbb{N}$

$C = A \cup B$, A e B aperti disgiunti non banali di C.

Perciò esistono aperti A', B' di X t.c. $A = C \cap A'$, $B = C \cap B'$



Vorrei $A' \cap B' = \emptyset$, ma per il momento non posso ottenerlo.

Però C è chiuso in quanto intersezione di chiusi e A e B sono chiusi in C $\Rightarrow$ sono chiusi anche in X.

Uno spazio compatto e T_2 è T_4, per cui, essendo $A, B \subseteq X$ chiusi disgiunti, esistono aperti A', B' disgiunti con $A \subseteq A'$ e $B \subseteq B'$. Per concludere è sufficiente verificare che $C_n \subseteq A' \cup B'$ per qualche n, così $C_n \cap A'$ e $C_n \cap B'$ sarà una partizione non banale di C_n in aperti e C_n sarà sconnesso e non banale ($\emptyset \neq A = C \cap A' \subseteq C_n \cap A'$ e similmente $\emptyset \neq C_n \cap B'$).

Basta vedere che $C_n \setminus (A' \cup B') = \emptyset$ per qualche n.

Osserviamo che $C_n \setminus (A' \cup B') = D_n$ è un chiuso di X e
$$" C_n \cap (X \setminus (A' \cup B'))$$
$D_{n+1} \subseteq D_n \quad \forall n$.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \setminus (A' \cup B') = C \setminus (A' \cup B') = \emptyset$$ ma allora,

uso X compatto e D_n chiuso $\forall n$

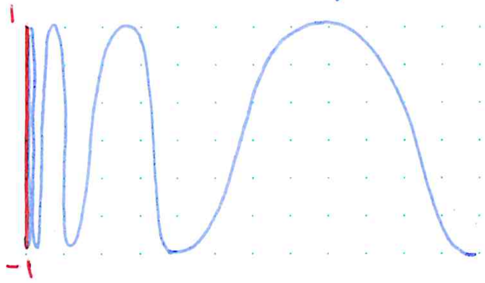
per la proprietà dell'intersezione finita deve esistere un $D_{n_k} = \emptyset$, che è quello che volevamo.

2) È falso.

Visto che ① è vero, se i C_n sono chiusi connessi per archi in X compatto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = C$ sarà connesso.

Allora per trovare un controesempio mi serve un connesso non connesso per archi. Provo a realizzare

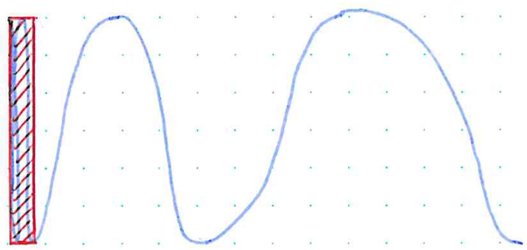
$$C = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x, \sin \tfrac{1}{x}),\ 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$



(si può dimostrare che non è connesso per archi)

Scelgo $X = [0,1] \times [-1,1]$ che è compatto e

$$C_n = C \cup ([0, 2^{-n}] \times [-1,1])$$



questa striscia rende C_n connesso per archi $\forall n$

Chiaramente $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = C$

FATTO ASSURDO:

Esiste una funzione $f: [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ continua e suriettiva, la "curva di Peano"

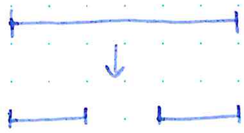
INSIEME DI CANTOR

Sia $X_0 = [0,1]$, $X_1 = X_0 \setminus (1/3, 2/3) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

X_n sarà unione finita di intervalli chiusi disgiunti.

Per ottenere X_{n+1} prendo ciascuno di questi intervalli e tolgo il terzo "mediano": da $[a,b]$ ottengo

$$[a, \tfrac{b-a}{3}] \cup [a + 2\tfrac{b-a}{3}, b]$$



$$X_2 = [0, 1/9] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{3}{9}] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

C = Cantor set = $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$ in quanto intersezione di compatti non vuoti inscatolati

$C = \{$numeri la cui scrittura ternaria non contiene cifre uguali a $1\}$ $\quad (1 = 0,\overline{2})$

Proprietà di C:

① È compatto (chiuso in quanto intersezione di chiusi e limitato)

② È totalmente sconnesso

③ È perfetto: tutti i suoi punti sono di accumulazione per C

④ È omogeneo: $\forall p, q \in C$ esiste un omeomorfismo $f: C \to C$ con $f(p) = q$ (questa f non si estenderà in maniera continua a $[0,1]$!)

⑤ L'insieme di Cantor non è numerabile (nessun sottoinsieme perfetto di $\mathbb{R}$ lo è)

⑥ Per dimostrare che è omogeneo, si usa il fatto che

$$C \cong \prod_{i\in\mathbb{N}} \{0,1\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

tramite $\varphi: \prod_{i\in\mathbb{N}} \{0,1\} \to C$

$$\varphi((x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i \cdot 2}{3^{i+1}}$$

⑦ $\mathring{C} = \emptyset$

G2 - SECONDO SEMESTRE

27/02/2025
Frigerio

TOPOLOGIA QUOZIENTE

X sp. top. e $\sim$ una rel di equivalenza su X

Vogliamo dotare $X/_\sim$ di una topologia

Def/Prop. la TOP. QUOZIENTE su $X/_\sim$ è la topologia più fine che rende la proiezione $\pi: X \to X/_\sim$ continua

PROPOSIZIONE:
Tale top. risulta essere così caratterizzata:

$A \subseteq X/_\sim$ è aperto SSE $\pi^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto in X

Passando ai complementari $C \subseteq X/_\sim$ chiuso SSE $\pi^{-1}(C) \subseteq X$ è chiuso in X

DIM: Vediamo che dichiarando $A \in X/_\sim$ aperto $\Longleftrightarrow$ $\pi^{-1}(A)$ aperto otteniamo una top. (τ)

1) $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ aperto in $X \Rightarrow \emptyset \in \tau$

2) $\pi^{-1}(X/_\sim) = X \Rightarrow X/_\sim \in \tau$

3) $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow \pi^{-1}(A_1)$ e $\pi^{-1}(A_2)$ aperti in X

$\pi^{-1}(A_1) \cap \pi^{-1}(A_2) = \pi^{-1}(A_1 \cap A_2) \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$

4) A_i, $i \in I$ appartengono a $\tau \Rightarrow \pi^{-1}(A_i)$ aperto in X $\forall i$

$\pi^{-1}(\bigcup A_i) = \bigcup \pi^{-1}(A_i)$ che è aperto in X

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Allora per costruzione τ è la top. più fine che rende π continua. $\square$

Proprietà universale della top. quoziente

X, Y sp. topologici, $\sim$ rel. di equivalenza su X e $f: X \to Y$ "compatibile" con $\sim$ (cioè se $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$)

sia $\bar{f}: X/_\sim \to Y$ la funzione indotta da f, cioè $\bar{f}([x]) = f(x)$ (ben def. perché f è compatibile), cioè la funz. che fa commutare il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Allora f è continua $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ è continua

DIM: f è continua $\Leftrightarrow$ $\forall A \subseteq Y$ aperto, $f^{-1}(A)$ è aperto in X

ma $f^{-1}(A) = (\bar{f} \circ \pi)^{-1}(A) = \pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(A))$ che per def. di top. quoziente $\bar{f}^{-1}(A)$ è aperto in $X/\sim$ $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(A))$ è aperto in X

f continua $\Leftrightarrow$ $\forall A$ aperto in Y $f^{-1}(A)$ aperto in X

$\Leftrightarrow$ " " $\pi^{-1}(\bar{f}^{-1}(A))$ aperto in X

$\Leftrightarrow$ " " $\bar{f}^{-1}(A)$ aperto in $\hat{X}$

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ continua $\square$

Come si "identifica" un quoziente? Per "visualizzare" un quoziente è utile:

1) "individuare" chi è $Z = X/\sim$

2) Costruire $f: X \to Z$ continua e compatibile con $\sim$ così da indurre $\bar{f}: X/\sim \to Z$, con f surgettiva, in modo che lo sia anche $\bar{f}$ e t.c. $f(x) = f(x') \Rightarrow x' \sim x$ (cioè $\bar{f}$ iniettiva)

A questo punto $\bar{f}: X/\sim \longrightarrow Z$ è continua (per la prop. universale) e biunivoca se vale il punto 2)

3) Rimane da controllare che $\bar{f}$ sia un omeomorfismo (non c'è una regola generale per farlo, basta vedere ad esempio $\bar{f}$ aperta o chiusa)

Può essere utile il teorema (già visto) (cioè i compatti sono un ricoprimento fondamentale)

$f: X \to Y$ continua, X compatto, Y è T_2 $\Rightarrow$ f chiusa.

Infatti X compatto $\Rightarrow$ $X/\sim$ compatto (perché π è continua)

TEO $f: X \to Y$ continua e Y T_2 compattamente generato (esercizio: localmente compatto $\Rightarrow$ compattam. generato)

Se f è PROPRIA (cioè $f^{-1}(K)$ compatto $\forall K \subseteq Y$ compatto), allora f è chiusa. $\square$

ESEMPI:

Collasso di un sottoinsieme ad un punto

X topologico e $A \subseteq X$, $x \sim x' \iff x = x' \vee \{x, x'\} \subseteq A$

Classi di equivalenza: A e singoletti non contenuti in A

es. 1: $X = [0,1]$, $A = \{0,1\}$, chi è X/A?

in tal caso $X/\sim$ si indica anche con X/A

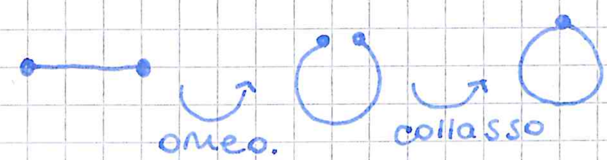
Un insieme di rappresentanti è ad esempio $[0,1)$

$X/A \cong [0,1)$?

$[0,1) \hookrightarrow [0,1] \xrightarrow{\pi} X/A$ è una bigezione continua

ma non può essere un omeomorfismo perché $[0,1)$ non è compatto mentre $[0,1]/\{0,1\}$ sì (immagine del compatto $[0,1]$ tramite la funzione continua π).

Nel quotiente i punti vicini a $[1]$ sono vicini anche a $[0]$, cosa che in $[0,1)$ non vedo



Congettura: $X/A \cong S_1$

DIM.: $Z = S_1$, cerco $f: [0,1] \to S^1$ che passi al quoziente

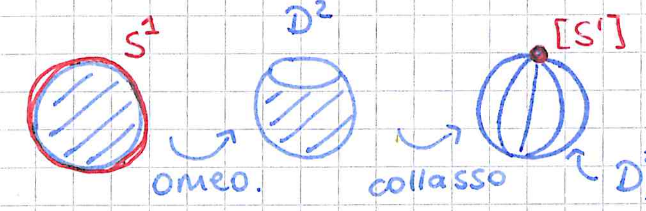
es: $f(t) = e^{2\pi i t}$ $\to$ continua, surgettiva e $f(t) = f(t')$
$\Updownarrow$
$t = t' \vee \{t, t'\} = \{0,1\}$

Dunque $\bar{f}: [0,1]/\{0,1\} \to S_1$ $\quad \bar{f}([t]) = f(t)$ è continua e bigettiva. Infine $[0,1]/\{0,1\}$ compatto e S_1 è T_2 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\bar{f}$ omeo.

Proposizione $D^2/S^1 \cong S^2$ e in generale $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

dove $D^n = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \le 1 \}$

DIM:

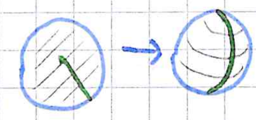


$D^2/S^1 \cong S^2$

Formalmente: cerco $f: D^n \to S^n$ che avvolga $D^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

su $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mandando ∂D^n sul polo nord.

Mando ogni raggio sul meridiano di S^n che giace sullo stesso iperpiano verticale



Dunque $\forall v \in D^n$, $f(v) = (\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\lambda v}}, \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{q(\|v\|)}})$

con $\|(\lambda v, q(\|v\|))\|^2 = 1$ $\quad \lambda^2 \|v\|^2 + q(\|v\|)^2 = 1$

Scelgo q in modo che $q(0) = -1$ (il centro del disco va nel polo sud) e $q(1) = 1$ (il bordo va nel polo nord)

ad esempio $q(t) = -1 + 2t$, da cui $\lambda^2 \|v\|^2 + (2\|v\| - 1)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 = \dfrac{4 - 4\|v\|}{\|v\|}$ $(v \neq 0)$ (andrebbe discussa la continuità per $v=0$)

Se $v \neq 0$ $\quad f(v) = \left(2\sqrt{1-\|v\|}\,\dfrac{v}{\sqrt{\|v\|}}, \; 2\|v\| - 1 \right)$ e $f(0) = (\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{0}}, -1)$

questa f è continua $\left(\lim_{v \to 0} f(v) = (0,-1)\right)$ e passa al quoziente

$\bar{f}: D^n/S^{n-1} \to S^n$ biq. e continua.

$\bar{f}$ è un omeo. perché D^n/S^{n-1} è compatto e S^n è T_2. □

Abbiamo usato il seguente

TEOREMA Il quoziente di uno sp. top. compatto (risp. connesso / connesso per archi) è compatto (risp. connesso / connesso per archi)

DIM: π continua e surgettiva. □

(X è $T_1 \iff \forall x \in X$, $\{x\}$ è chiuso)

Esempio: $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ non è T_1

Infatti $\pi^{-1}([\mathbb{Q}]) = \mathbb{Q}$ non è chiuso in $\mathbb{R}$, dunque esiste un punto di $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ che non è chiuso (non posso separare nessuna coppia di punti)

Dunque gli assiomi di separazione NON passano al quoziente.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ bigettiva, quando è un omeomorfismo?

$\bar{f}$ continua per la prop. universale, ci stiamo chiedendo quindi se è aperta o chiusa.

Def. $f: X \to Y$ si dice IDENTIFICAZIONE se

1) f surgettiva
2) $A \subseteq Y$ è aperto $\iff f^{-1}(A)$ è aperto in X (è equivalente chiederlo sui chiusi)

"$\Rightarrow$" vera visto che f è continua

TEO $f: X \to Y$ continua e $\sim$ relazione di equivalenza su X data da $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$. Allora la mappa indotta $\bar{f}$ è un omeo. SSE f è un'identificazione

DIM.: ($\Leftarrow$) $\bar{f}$ continua (prop. universale), inoltre, $\bar{f}$ iniettiva per come è definita $\sim$, poi, $\bar{f}$ surgettiva perché lo è f per def. di identificazione

Per concludere vediamo che $\bar{f}$ è aperta

Sia $B \subseteq X/\sim$ aperto. Allora

$\pi^{-1}(B)$ è aperto in X. Inoltre,

$f^{-1}(\bar{f}(B)) = \pi^{-1}(B)$ (verificarlo!), per cui essendo $\pi^{-1}(B)$ aperto, per def. di identificazione anche $\bar{f}(B)$ è aperto.

03/03/2025
Frigerio

Reminder:

$f: X \to Y$ identificazione se:

- f surg.
- $f^{-1}(A)$ aperto in X $\iff$ A aperto in Y

non sto considerando tutti gli aperti di X, solo quelli che sono contro-imm. di sottoinsiemi di Y

"$\Leftarrow$" equivalente alla continuità

"$\Rightarrow$" caratterizza le id.

Prop $f: X \to Y$ continua e surg. Allora

① f aperta $\Rightarrow$ f id.

② f chiusa $\Rightarrow$ f id.

DIM: ① Devo vedere che se $f^{-1}(A)$ è aperto, allora lo è anche A.

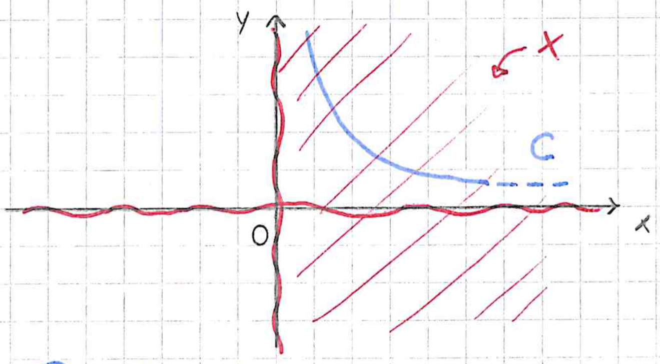
f surg $\Rightarrow$ $A = f(f^{-1}(A))$ $\wedge$ f aperta

$\Rightarrow$ $f^{-1}(A)$ aperto $\Rightarrow$ A aperto

② Identico usando la caratterizzazione delle identificazione con i chiusi. □

Esercizio: $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup ([0,+\infty) \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R}$ e sia

$f: X \to Y$, $f(x,y) = x$



Dimostrare che f è id. ma non è né aperta né chiusa

① Non è chiusa

$C = \{ (x,y) \in X \ , \ xy = 1 \}$ è chiuso

(contro-imm. di 1 tramite una funt. continua)

$f(C) = (0,+\infty)$ che non è chiuso in Y

② Se $A \subseteq X$ è $A = B((0,2),1) \cap X$, A è aperto in X ma $f(A) = [0,1)$ non è aperto in $Y = \mathbb{R}$

③ f è un'identificazione:

$A \subseteq Y = \mathbb{R}$ t.c. $f^{-1}(A)$ è aperto. Per vedere che A è aperto, controllo che sia intorno di ogni suo punto

Sia $x_0 \in A$.

Distinguendo i casi $x_0 > 0$, $x_0 = 0$, $x_0 < 0$ è facile verificare che se $f^{-1}(A)$ è aperto allora la sua proiezione sull'asse x è un intorno di x_0. (Provate a scriverlo) $\square$

INSIEMI SATURI

Sia $f: X \to Y$. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice SATURO se (o meglio f-saturo) $f^{-1}(f(A)) = A$.

In generale, $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ e l'insieme $f^{-1}(f(A))$ si chiama SATURATO di A. Saturare un insieme vuol dire $\forall x \in A$ aggiungere tutti i punti della fibra di $f(x)$, cioè tutti punti in $f^{-1}($

Se $\underset{\pi}{\underset{\shortparallel}{f}}: X \to X/_\sim \implies A$ è saturo $\iff A$ è unione di classi di equivalenza

Prop: $B \subseteq X/_\sim$ aperto (risp. chiuso) $\iff B = \pi(B')$ con B' aperto saturo (risp. B' chiuso saturo)

DIM: (vale analoga per i chiusi)

$(\Rightarrow)$ B aperto $\Rightarrow \pi^{-1}(B)$ aperto (per def. di top. quotiente) ed è saturo (le preimm. di sottoinsiemi sono sempre sature) e $\pi(\pi^{-1}(B)) = B$ perché π surg.

Dunque basta porre $B' = \pi^{-1}(B)$.

$(\Leftarrow)$ $B' \subseteq X$ aperto saturo $\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(B')) = B'$ ma allora essendo B' aperto, $\pi(B')$ è aperto per def. di top. quotiente $\square$

FATTI SEMPLICI

① $f: X \to Y$. $\forall B \subseteq Y$, $f^{-1}(B)$ è saturo

② $\pi: X \to X/_\sim$ è aperta $\iff$ il saturato di ogni aperto di X è aperto

(infatti, dato $A \subseteq X$ aperto, $\pi(A)$ aperto in $X/_\sim$ $\iff \underbrace{\pi^{-1}(\pi(A))}_{\text{saturato di } A}$ è aperto in X) idem per i chiusi

③ Se A, A' sono saturi, allora
$$\pi(A \cap A') = \pi(A) \cap \pi(A')$$

AZIONI DI GRUPPO

G gruppo, X insieme (poi sarà sp. topologico)

Un' azione (sinistra) di G su X è una funzione
$$\varphi : G \times X \to X \quad \text{t.c.}$$
① $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$

② $\varphi(1_G, x) = x \quad \forall x \in X$

Di norma, $\varphi(g, x)$ si indica con $g \cdot x$.

I due assiomi diventano:

① $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$

② $1_G \cdot x = x \quad \forall x \in X$

Ogni elemento $g \in G$ definisce una mappa
$$\ell_g : X \to X \qquad \ell_g(x) = g \cdot x,$$
"left"

da ① e ② discende che $\ell_g \circ \ell_{g^{-1}} = \ell_{gg^{-1}} = \ell_{1_G} = \mathrm{Id}_X \Rightarrow \ell_g$ bigettiva (con inversa $\ell_{g^{-1}}$)

In effetti, si può pensare all' azione come un omo. di gruppi.

permutazioni di X (sono un gruppo con la composizione)
$$\begin{aligned} G &\to S(X) \\ g &\mapsto \ell_g \end{aligned}$$

$\forall x \in X$ lo STABILIZZATORE di x è
$$\mathrm{stab}(x) = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \} \to \text{sgr. di } G$$

L' ORBITA di x è
$$G \cdot x = \{ g \cdot x \mid g \in G \} \subseteq X$$

L' azione si dice LIBERA se $\mathrm{stab}(x) = \{1_G\} \quad \forall x \in X$

si dice TRANSITIVA se c'è una sola orbita, cioè se
$$\forall x, y \in X \quad \exists g \in G \text{ t.c. } g \cdot x = y$$

"Appartenere alla stessa orbita" è equivalente alla rel.

$x \sim y \iff \exists g \in G \mid g \cdot x = y$

questa è una rel. di equivalenza e si pone $X/_G = X/_\sim$

(per i puristi $_G\backslash^X = X/_\sim$ perché l'azione è sx)
e noi non lo siamo mai stati

Convenzione: quando X è uno sp. topologico, supporremo che l'azione sia CONTINUA, cioè $\forall g \in G$ la mappa

$$l_g : X \to X \qquad l_g(x) = g \cdot x$$

deve essere continua.

In tal caso, l_g è invertibile con inversa $l_{g^{-1}}$, ogni l_g è automaticamente un omeo.

Esempio: $G = \mathbb{Z}$ e fisso l'azione

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad n \cdot x = x + n$$

(azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ per traslazione)

Chi è il quoziente $\mathbb{R}/_\mathbb{Z}$?

notazione ambigua perché potrebbe indicare sia il collasso sia il quoz. di $\mathbb{R}$ per l'azione di $\mathbb{Z}$ (consideriamo il quoziente)

$x, y \in \mathbb{R}$ sono equivalenti $\iff x - y \in \mathbb{Z}$

cioè SSE hanno la stessa "parte frazionaria"

$\Rightarrow [0,1)$ è un insieme di rappresentanti

Già sappiamo che non posso limitarmi a considerare $[0,1)$ ottenendo $\cancel{\mathbb{R}/_\mathbb{Z} \cong [0,1)}$

è falso

Sarà sufficiente considerare la restrizione di $\sim$ a $[0,1]$?

SI: $\mathbb{R}/_\mathbb{Z} \cong [0,1]/_{\{0,1\}} \cong S^1$

DIM: Cerco $f : \mathbb{R} \to S^1$ tale che $f(x) = f(y) \iff x \sim y$

Prendo $f(t) = e^{2\pi i t}$ ($\cap\ \mathbb{C}$) (o $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ $\cap\ \mathbb{R}^2$)

f è 1-periodica e si ha $f(x) = f(y) \iff x - y \in \mathbb{Z}$ (cioè $x \sim y$)

f è cont. e surg. dunque induce

$\bar{f}: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ continua e bigettiva

Per concludere, mi basterebbe vedere che $\bar{f}$ è chiusa e poiché S^1 è T_2 basta che $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sia compatto.

Se $i: [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ è l'inclusione, la composizione

$\pi \circ i : [0,1] \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ $\quad (\underset{\text{continua}}{\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}})$ è continua e surg.

$[0,1]$ compatto $\Rightarrow$ $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compatto

Vedremo che $[0,1]$ è un DOMINIO FONDAMENTALE per l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$, il che implicherà

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong [0,1]/\sim'$ dove $\sim'$ è la restrizione di $\sim$ a $[0,1]$

Osservazione: $G \curvearrowright X$ $\leftarrow$ azione di G su X

$A \subseteq X$ saturo $\Leftrightarrow$ $g \cdot A = A \quad \forall g \in G$

rispetto alla proiezione $\pi : X \to X/G$ $\quad$ cioè A è G-invariante

Infatti, il saturato di A è $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot A$

TEOREMA $G \curvearrowright X$, la proiezione $\pi: X \to X/G$ è una mappa aperta. Se G è finito è anche chiusa

DIM: Devo vedere che se A è aperto, il suo saturato è aperto. Ma $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot A$ che è unione di aperti, in quanto $g \cdot A = l_g(A)$ e l_g è un omeomorfismo, per cui $g \cdot A$ è aperto $\forall g \in G$.

Se G è finito e C è chiuso, $\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot C$ è unione finita di chiusi $\Rightarrow$ è chiuso $\square$

Abbiamo visto che gli assiomi di separazione si comportano male rispetto ai quozienti. Questo è vero anche per i quozienti rispetto alle azioni di gruppo a meno di ip. aggiuntive.

Esempio: ① $G = \mathbb{Q}$ che agisce per traslazioni su $\mathbb{R}$

allora $\mathbb{R}/G$ ha la top. indiscreta dunque non verifica alcun assioma di separazione

Infatti, se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un aperto saturo $\neq \emptyset$ allora $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0 \mid (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$;

ma allora $A \supseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{azione}}}{q \cdot} (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \mathbb{R}$

② $X = M_2(\mathbb{R})$ matrici reali 2×2 e

$G = Gl_2(\mathbb{R})$ allora $G \circlearrowleft X$ per coniugio

$$\underset{G}{\underset{\cap}{A}} \cdot \underset{X}{\underset{\cap}{M}} = AMA^{-1}$$

Metto su X la top. di $\mathbb{R}^4 \cong M_2(\mathbb{R})$

La top. quoziente X/G non è T_1.

Per mostrarlo basta trovare un'orbita che non sia chiusa (così il pt. corrispondente di X/G non sarà chiuso)

Se $\Omega = \left\{ \text{matrici con FCJ } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un'orbita che contiene tutte le matrici $\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon \neq 0$, dunque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è un pt. di $\overline{\Omega}$ $\left(\lim_{\varepsilon \to 0} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \Omega$.

04/03/2025
Frigerio

PROPRIETÀ TOPOLOGICHE DI AZIONI DI GRUPPO

$G \circlearrowleft X$ azione su uno sp. topologico

Def. L'azione si dice propriamente discontinua se $\forall x \in X \; \exists\, U \in I(x)$ t.c. $g \cdot U \cap U = \emptyset \;\; \forall g \neq 1_G$

Ovviamente propriamente discontinua $\Rightarrow$ libera

(nozione molto importante nella teoria dei rivestimenti)

Def. L'azione si dice PROPRIA se $\forall x, y \in X$ $\exists$ intorni $U \in I(x)$ e $V \in I(y)$ | $\{g \in G \mid g.U \cap V \neq \emptyset\}$ sia finito

Ad esempio, se G è finito ogni sua azione è propria

Propriamente discontinua $\not\Rightarrow$ propria
$\not\Leftarrow$

$(\not\Leftarrow)$ ovvio: $G = \{\pm id\}$, $X = \mathbb{R}^2$

L'azione non è libera ($-Id$ fissa 0) dunque non è propriamente discontinua, ma è propria perché $|G| = 2$

Avvertenza: la terminologia nella letteratura non è stabile. La vera def. di "azione propria" è la richiesta che $\forall$ compatto $K \subseteq X$, $\{g \in G : g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ sia finito. (*) Se X è localmente compatto questa def. è equivalente a quella di sopra.

La def di sopra implica sempre (*), la locale compattezza serve per (*) $\Rightarrow$ def. di sopra

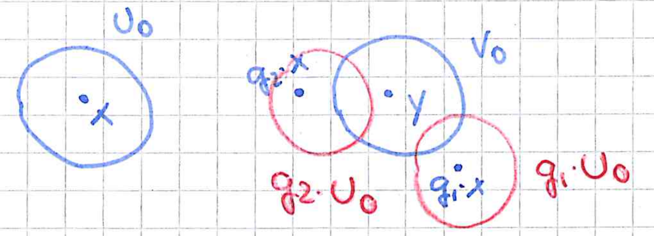
TEOREMA $G \circlearrowleft X$, X spazio T_2
Se l'azione è propria allora X/G è T_2

DIM.: Siano $[x]$, $[y]$ punti distinti di X/G
Cerco intorni disgiunti di $[x]$ e $[y]$ in X/G

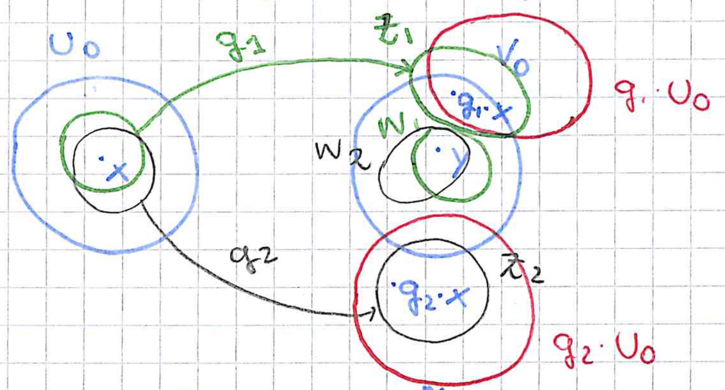
In X, $G \cdot x$ e $G \cdot y$ orbite distinte e dunque disgiunte e cerco aperti saturi disgiunti U, V tali che $U \supseteq G.x$, $V \supseteq G \cdot y$. Se li trovo ho finito, perché la proiezione di un aperto saturo è aperta in X/G e le proiezioni di insiemi saturi disgiunti sono disgiunte.

Per def. di azione propria $\exists$[no] intorni $U_0 \in I(x)$ e $V_0 \in I(y)$ t.c. $\{g \mid g.U_0 \cap V_0 \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_n\}$

Inoltre, posso supporre U_0 e V_0 aperti e disgiunti (X è T_2)



Poiché $[x]\neq[y]$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$ $g_i\cdot x\neq y$. Poiché X è T_2, $\forall i$ trovo aperti disgiunti W_i e Z_i t.c. $y\in W_i$ e $g_i\cdot x\in Z_i$ $i=1,\dots,n$



Pongo ora $\hat{V}=V_0\cap\bigcap_{i=1}^{n}W_i$ $\rightarrow$ aperto che contiene y

Pongo $\hat{U}=U_0\cap\bigcap_{i=1}^{n}g_i^{-1}\cdot Z_i$ $\rightarrow$ int. finita di aperti che contengono x $\Rightarrow$ intorno aperto di x

Verifico che $\hat{U}$ e $\hat{V}$ funzionano, cioè che se $\pi: X\to X/G$ è la proiezione al quoziente, allora $\pi(\hat{U})$ e $\pi(\hat{V})$ danno intorni disgiunti di $[x]$ e $[y]$

Ciò equivale a dire che i saturati di $\hat{U}$ e $\hat{V}$ siano aperti (saturi per costruzione) disgiunti.

$$\pi^{-1}(\pi(\hat{U}))=\bigcup_{g\in G}g\cdot\hat{U}\qquad \pi^{-1}(\pi(\hat{V}))=\bigcup_{h\in G}h\cdot\hat{V}$$

che sono aperti in quanto unione di aperti.

Vediamo che sono disgiunti.

Se per assurdo

$$\left(\bigcup_{g\in G}g\cdot\hat{U}\right)\cap\left(\bigcup_{h\in G}h\cdot\hat{V}\right)\neq\emptyset \qquad \exists\,\bar{g},\bar{h}\in G \text{ t.c.}$$

$\bar{g}\cdot\hat{U}\cap\bar{h}\cdot\hat{V}\neq\emptyset$, da cui (applico $\bar{h}^{-1}$)

$(\bar{h}^{-1}\cdot\bar{g}\cdot\hat{U})\cap\hat{V}\neq\emptyset$ da cui poiché $\hat{U}\subseteq U_0$ $\hat{V}\subseteq V_0$

$(\bar{h}^{-1}\bar{g}\cdot U_0)\cap V_0\neq\emptyset$ $\Rightarrow$ $\bar{h}^{-1}\cdot\bar{g}=g_i$ per qualche $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow q_i \cdot \hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset$. Poiché $\hat{U} \subseteq q_i^{-1} Z_i$

$\hat{V} \subseteq W_i$

otteniamo $q_i (q_i^{-1} Z_i) \cap W_i \neq \emptyset$, cioè $Z_i \cap W_i \neq \emptyset$ ↯

$\square$

Esempio:

① $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ con $[K] \cdot v = A_K \cdot v$

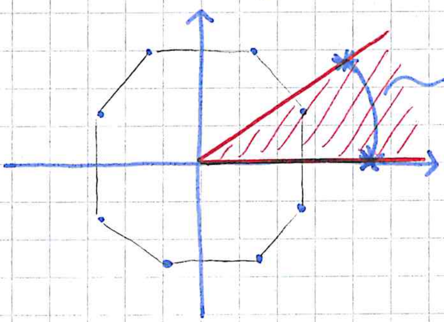
$$A_K = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi K}{n} & -\sin \frac{2\pi K}{n} \\ \sin \frac{2\pi K}{n} & \cos \frac{2\pi K}{n} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rotazione di angolo } \frac{2K\pi}{n}$$

Poiché G è finito, l'azione è propria, per cui $\mathbb{R}^2/_G$ è T_2 (visto che $\mathbb{R}^2$ è T_2)

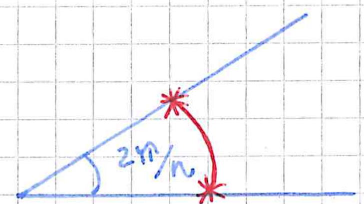
Un insieme di rappresentanti è

$\{ R \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta),\ R \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{2\pi}{n} \}$

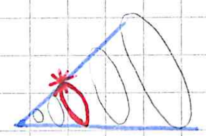
$n = 8$



Per studiare $X/_G$ NON conviene prendere un'unione di rappresentanti ma la sua chiusura, che in questo caso è $\{ R \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta),\ R \geq 0\ \ 0 \leq \vartheta \leq \frac{2\pi}{n} \}$



$\Rightarrow$



DOMINIO FONDAMENTALE

$G \circlearrowright X$. Un DOMINIO FONDAMENTALE per l'azione è un sottoinsieme $D \subseteq X$ t.c. (indico con $\pi : X \to X/G$ la proiezione)

1) D è chiuso

2) $\bigcup_{g \in G} g \cdot D = X$ (cioè $\pi(D) = X/G$)

3) $\{g \cdot D, g \in G\}$ è una famiglia LOCALMENTE FINITA in X (se G è finito è sempre soddisfatta)

4) $\pi|_{\mathring{D}} : \mathring{D} \to X/G$ è iniettiva

$\forall g \neq 1_G,\ g \cdot \mathring{D} \cap \mathring{D} = \emptyset$

Solitamente si mette la condizione $\overline{\mathring{D}} = D$

ESEMPI

1) Per l'azione di $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ su $\mathbb{R}^2$ appena vista,
$D = \{ R \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta),\ R \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{2\pi}{n} \}$ è un dominio fondamentale

2) $\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}$ per traslazione
$D = [0,1]$ è un dom. fondamentale

3) Esercizio $\mathbb{Q} \circlearrowright \mathbb{R}$ per traslazione
NON AMMETTE un dominio fondamentale

06/03/2025
Frigerio

TEOREMA $G \circlearrowright X$ azione che ammette un dominio fondamentale $D \subseteq X$. Allora:

1) L'azione è propria

2) Se X è T_2, anche X/G lo è

3) $X/G \cong D/_{\sim'}$ dove $\sim'$ è la restrizione di $\sim$ a D, cioè $\forall x,y \in D$ si ha $x \sim' y \iff \exists g \in G \mid g.x = y$

DIM. 1) $x, y \in X$ fissati

Per def. di dominio fondamentale, la famiglia $\{g.D, g \in G\}$ è localmente finita, perciò esistono intorni U di x e V di y tali che

$\{g \in G \mid g.D \cap U \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_n\}$ è finito

$\{g \in G \mid g.D \cap V \neq \emptyset\} = \{g'_1, \dots, g'_m\}$ è finito

Poiché $\{g.D,\ g\in G\}$ è un ricoprimento di X,

$U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} g_i.D$. Perciò, se $g\in G$ è t.c. $g.U\cap V\neq\emptyset$,

allora e a maggior ragione

$$g.\left(\bigcup_{i=1}^{n} g_i D\right)\cap V \neq \emptyset \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} g.g_i.D\right)\cap V\neq\emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, i\in\{1,\dots,n\} \text{ t.c. } (gg_i).D\cap V \neq\emptyset \Rightarrow \exists\, j\in\{1,\dots,m\}$$

tale che $g.g_i = g'_j \Rightarrow \exists\, i,j \mid g = g'_j g_i^{-1}$

Dunque $\{g\in G \mid g.U\cap V \neq \emptyset\} \subseteq \{g'_j g_i^{-1} \quad i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m\}$ e

perciò è finito.

2) segue da 1) (per il teorema della scorsa lezione)

3) Poiché $\{g.D,\ g\in G\}$ ricopre tutto X, la composizione

$$D \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/G$$ è surgettiva, per cui induce

una funzione $f: D/\sim' \to X/G$ continua

(per la prop. universale) e bigettiva (perché $\sim'$ è la

restrizione a D dell'equivalenza su X)

Per concludere basta vedere che $\pi\circ i$ è chiusa.

Se lo dimostro allora posso concludere che $\pi\circ i$ è un'identificazione, dunque f è un omeomorfismo

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[r, "\pi"] & X/G \\
D/\sim' \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Sia $C\subseteq D$ un chiuso di D. Poiché D è chiuso in X,

C è anche chiuso in X. Per controllare che $\pi(i(C))$ sia

chiuso in X/G, è necessario e sufficiente che $\pi^{-1}(\pi(i(C)))$

sia chiuso in X, cioè $\bigcup_{g\in G} g.C$ sia chiuso in X.

Ma, poiché g agisce come un omeomorfismo in X,

$g.C$ è chiuso in X $\forall g\in G$ e la locale finitezza di

$\{g.D,\ g\in G\}$ implica la locale finitezza di $\{g.C,\ g\in G\}$

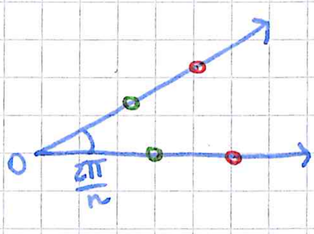
visto che $C \subseteq D$

Perciò $\bigcup_{g \in G} g \cdot C$ è un'unione loc. finita di chiusi ed è quindi un chiuso. $\square$

Esempi: 1) $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \circlearrowright \mathbb{R}^2$ tramite rotazioni di angoli $\frac{2k\pi}{n}$ $k = 0, \dots, n-1$, ha come dominio fondamentale $D = \{ R(\cos\vartheta, \sin\vartheta), R \geq 0, 0 \leq \vartheta \leq \frac{2\pi}{n} \}$

Dunque $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong D/_{\sim}$ dove

$v \sim w \iff v = w \vee$ v e w appartengono alle semirette uscenti dall'origine che formano angoli 0 e $\frac{2\pi}{n}$ con l'asse x e $\|v\| = \|w\|$



Per dimostrare che questo spazio è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ possiamo ad esempio prendere

$f : D \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = z^n$

Tale f è surgettiva (tutti i complessi hanno una radice n-esima con argomento tra 0 e $\frac{2\pi}{n}$) e

$f(z) = f(w) \iff z^n = w^n \iff z = w = 0$ oppure $(zw^{-1})^n = 1$, cioè zw^{-1} è una radice n-esima dell'unità, cioè $z = e^{\frac{2\pi i k}{n}} w$

$\Rightarrow$ f induce una $\bar{f} : D/_{\sim} \to \mathbb{C}$ bigettiva e continua.

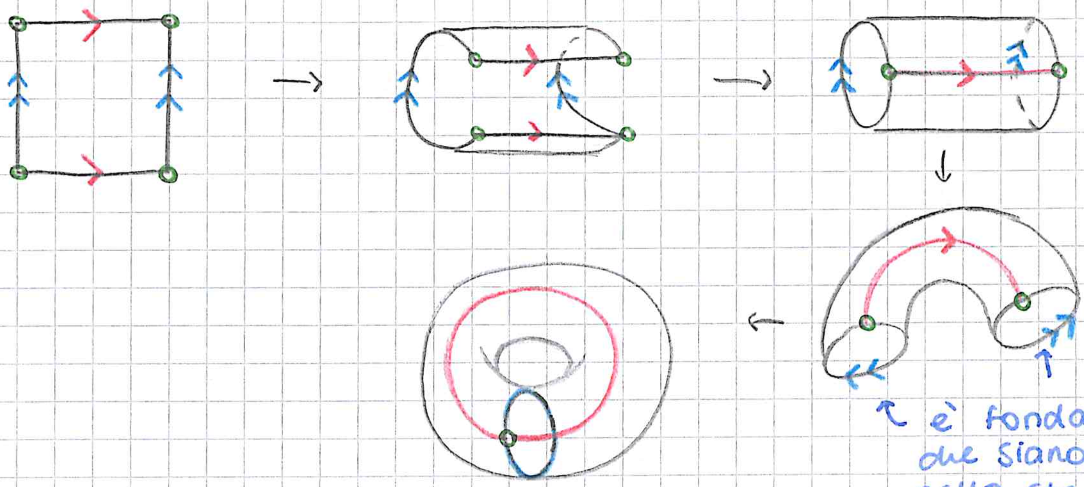
Poiché f è propria ($f^{-1}(K)$ compatto $\forall K$ compatto)

$\Rightarrow$ f è chiusa $\Rightarrow$ è un'identificazione $\Rightarrow$ $\bar{f}$ è un omeomorfismo.

2) Consideriamo l'azione $\mathbb{Z}^2 \circlearrowright \mathbb{R}^2$ per traslazioni intere (tutte le coord. intere)

Un dom. fondamentale è il quadrato $[0,1] \times [0,1]$

La restrizione dell'azione di $\mathbb{Z}^2$ a D è la seguente



↑ è fondamentale che siano orientate nello stesso verso (altrimenti otterrei la bottiglia di Klein)

Allora $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è un toro

Formalmente si può dimostrare che

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$ ad esempio

$$f : D = [0,1] \times [0,1] \to S^1 \times S^1$$

$$f(t,s) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s))$$

Questa f è continua, surgettiva, chiusa (in quanto va da un compatto a un T_2) e induce l'omeomorfismo $\bar{f} : D/_{\sim'} \to S^1 \times S^1$ cercato

OSS: Se D è compatto, studiare X/G è più facile (perché studio $D/_{\sim'}$), anche se X non è compatto.

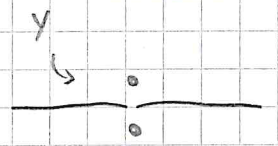
ES. 49 $\quad X = \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$

$(x, \varepsilon) \sim (x', \varepsilon') \iff (x,\varepsilon) = (x', \varepsilon')$ oppure $x = y \neq 0$

$Y = X/_\sim$. Si mostri che

1) Y è T_1 ma non T_2

2) Y è "localmente euclideo", cioè ogni $p \in Y$ ha un intorno omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}$



"retta con punto doppio"

1) Y è T_1, in quanto se $p \in Y$

$\pi : X \to X/_\sim = Y$

$\pi^{-1}(p)$ è un punto se $p = [(0,1)]$ o $p = [(0,-1)]$ o due punti se $p = [(x,1)]$, $x \neq 0$

In ogni caso, $\pi^{-1}(p)$ è chiuso in X $\Rightarrow \{p\}$ chiuso in Y

Y non è T_2 in quanto $[(0,1)]$ e $[(0,-1)]$ non hanno intorni disgiunti. Se U e V fossero intorni disgiunti di tali punti, potrei supporli aperti e $\pi^{-1}(U)$, $\pi^{-1}(V)$ sarebbero aperti saturi disgiunti di $\mathbb{R} \times \{1,-1\}$ contenenti rispettivamente $(0,1)$ e $(0,-1)$

$\pi^{-1}(U) \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{1\}$ $\quad \varepsilon > 0$

$\pi^{-1}(V) \supseteq (-\delta, \delta) \times \{-1\}$ $\quad \delta > 0$

Ma essendo saturi $\Rightarrow \pi^{-1}(U)$ contiene anche $((-\varepsilon,\varepsilon) \times \{-1\}) \setminus \{(0,-1)\}$

e $\pi^{-1}(V)$ contiene anche $((-\delta,\delta) \times \{1\}) \setminus \{(0,1)\}$

$\Rightarrow \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow Y$ NON è T_2

2) Basta vedere che $i : \mathbb{R} \to Y$ $\quad j : \mathbb{R} \to Y$

$i(x) = [(x,1)]$ $\quad j(x) = [(x,-1)]$ sono continue e aperte.

Essendo iniettive, saranno omeomorfismi su aperti di Y e poiché le loro immagini contengono tutto Y avremo ricoperto Y con due aperti omeomorfi a $\mathbb{R}$

Studiamo i, (j è analogo)

$i : \mathbb{R} \to Y$ è continua, in quanto composizione dell'inclusione di $\mathbb{R} \times \{1\}$ in X e della proiezione su Y

è chiaramente iniettiva e la sua immagine è

$Y \setminus \{[(0,-1)]\}$ è aperta, perché $\{[(0,-1)]\}$ è chiuso.

Basta vedere che $i^{-1} : Y \setminus \{[(0,-1)]\} \to \mathbb{R}$ è continua

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ Y \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad f((x,\varepsilon)) = x$$

La mappa f induce $\bar{f} : Y \to \mathbb{R}$ continua (essendo f continua) con $\bar{f}([(x,\varepsilon)]) = x$. È chiaro che i^{-1} è la restrizione di $\bar{f}$ a $Y \setminus \{[(0,-1)]\}$, ed è perciò continua.

BOUQUET DI SP. TOPOLOGICI (es. 50/51)

Def. TOPOLOGIA UNIONE DISGIUNTA

Siano (X,τ), (Y,τ') topologici.

L'unione disgiunta (topologica) $X \sqcup Y$ è

l'insieme $X \sqcup Y$ dotato della topologia $\bar{\tau}$ t.c.

$A \in \bar{\tau} \iff A \cap X \in \tau$ e $A \cap Y \in \tau'$

È banale verificare che è una topologia

Fatto: 1) X e Y sono aperti di $X \sqcup Y$

2) Le inclusioni

$X \overset{i}{\hookrightarrow} X \sqcup Y$

$Y \overset{j}{\hookrightarrow} X \sqcup Y$

sono immersioni topologiche su aperti

Infatti, sono iniettive e $A \subseteq X$ è aperto in X SSE

$i(A) \subseteq X \sqcup Y$ è aperto in $X \sqcup Y$

($i(A)$ aperto in $X \sqcup Y \iff \underbrace{i(A) \cap X}_{= A}$ è aperto in X e

$\underbrace{i(A) \cap Y}_{= \emptyset}$ è aperto in Y)

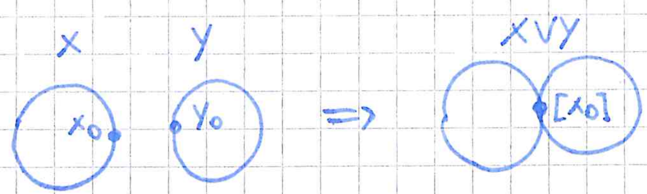
3) Se X e Y sono non vuoti $X \sqcup Y$ è

sconnesso, in quanto sia X sia Y sono

aperti e chiusi in $X \sqcup Y$

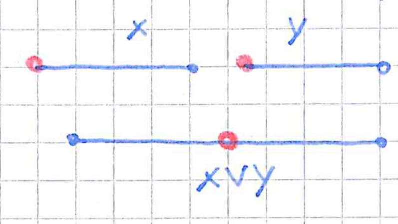
Siano $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Il BOUQUET di X e Y (con pt. base

x_0, y_0) è $(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}$ ← collasso questi due punti

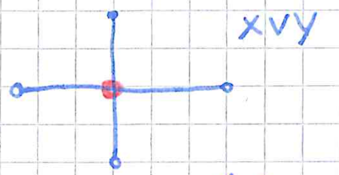


Il bouquet dipende dalla scelta dei punti base

Se $X = Y = [0,1]$ con $x_0 = y_0 = 0$ ottengo



Invece con $x_0 = y_0 = 1/2$



che non è omeomorfo al precedente (togliendo il punto rosso ottengo 4 componenti connesse, prima ne avrei ottenute due)

10/03/25
Frigerio

Ancora sul bouquet ...

$x_0 \in X$, $y_0 \in Y$

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = X \sqcup Y / \{x_0, y_0\}$$

ES. 50

1) Le mappe $i : X \to X \vee Y$ $\quad i(x) = [x]$
$j : Y \to X \vee Y$ $\quad j(y) = [y]$

sono immersioni topologiche

Infatti se $i' : X \hookrightarrow X \sqcup Y$, sappiamo che i' è continua

per cui $i = \pi \circ i'$ $\quad \pi : X \sqcup Y \to X \vee Y$ è continua in

quanto composizione di cont. e bigettiva con l'immagine

Per concludere basta vedere che i è un omeo. con l'imm.

ad esempio mostrando che è aperta o chiusa sull'immagine

Dimostriamo che è aperta

$A \subseteq X$

(a) $x_0 \notin A$ Allora $i(A)$ è aperto in $X \vee Y \Rightarrow$ lo è

anche in $i(X)$

$i(A) \subseteq X \vee Y$ aperto $\iff$ lo è $\pi^{-1}(A) \subseteq X \sqcup Y$

Poiché $x_0 \notin A$ $\quad \pi^{-1}(A) = i'(A)$ "$=$" $A \subseteq X \sqcup Y$

$A \cap X = A$ aperto in X
$A \cap Y = \emptyset$ aperto in Y $\quad \Rightarrow \pi^{-1}(A)$ aperto in $X \sqcup Y$

(b) $x_0 \in A$ $\quad \pi^{-1}(i(A)) = A \cup \{y_0\} \subseteq X \sqcup Y$

In generale $i(A)$ non è aperto in $X \vee Y$ (lo è solo se $\{y_0\}$ lo è in Y) ma ci basta che lo sia in $i(X)$, cioè che esista un aperto $B \subseteq X \vee Y$ t.c.

$i(A) = B \cap i(X)$

Scegliendo $B = i(A) \cup j(Y)$, allora

$i(A) = B \cap i(X)$ e B è aperto in $X \vee Y$ in quanto

$\pi^{-1}(B) \cap X = A$ che è aperto in X

$\pi^{-1}(B) \cap Y = Y$ che è aperto in Y

4) Se X e Y sono T_1 i e j sono chiuse

(e in particolare $i(X)$, $j(Y)$ sono chiusi in $X \vee Y$)

Infatti, se $C \subseteq X$ è chiuso, allora:

a) Se $x_0 \notin C$ $\pi^{-1}(i(C))$ è chiuso in $X \sqcup Y$ poiché

$\pi^{-1}(i(C)) \cap X = C$ chiuso in X

$\pi^{-1}(i(C)) \cap Y = \emptyset$ chiuso in Y

b) Se $x_0 \in C$, $\pi^{-1}(i(C))$ è chiuso in $X \sqcup Y$

poiché $\pi^{-1}(i(C)) \cap X = C$ chiuso in X

$\pi^{-1}(i(C)) \cap Y = \{y_0\}$ è chiuso in Y perché Y è T_1

5) X, Y T_2 $\Rightarrow$ $X \vee Y$ è T_2

Siano p, q distinti di $X \vee Y$

Ci sono 3 casi:

a) $p \neq [x_0] = [y_0] \neq q$ e p e q sono entrambi in X

(il caso entrambi in Y è analogo)

X è T_2 $\Rightarrow$ $\exists$ aperti U e V di X con $\underset{i(p')=p}{p' \in U}$, $\underset{i(q')=q}{q' \in V}$

e $U \cap V = \emptyset$

Poiché X è T_2 è anche T_1, per cui a meno di sostituire U con $U \setminus \{x_0\}$ e V con $V \setminus \{x_0\}$ posso supporre $x_0 \notin U$, $x_0 \notin V$. $i(U)$ e $i(V)$ sono sottoinsiemi disgiunti di $X \vee Y$ che contengono risp. p e q e sono aperti perché

$\pi^{-1}(i(U)) \cap X = U$ aperto in X $\quad \pi^{-1}(i(V)) \cap X = V$ aperto in X

$\pi^{-1}(i(U)) \cap Y = \emptyset$ aperto in Y $\quad \pi^{-1}(i(V)) \cap Y = \emptyset$ aperto in Y

(b) $p \in i(X) \setminus \{[x_0]\}$, $q \in j(Y) \setminus \{[y_0]\}$

Pongo $U = i(X) \setminus \{[x_0]\}$ e $V = j(Y) \setminus \{[y_0]\}$

$U \cap V = \emptyset$, $p \in U$, $q \in V$ per cui basta vedere che sono aperti.

Per U: $\pi^{-1}(U) \cap X = X \setminus \{x_0\}$ aperto in X perché X è T_2 dunque anche T_1

$\pi^{-1}(U) \cap Y = \emptyset$ aperto in Y

(c) $p = [x_0] = [y_0]$ $\quad q \in X \setminus \{[x_0]\}$

(se $q \in Y \setminus \{[y_0]\}$ la dim. è identica)

$p' \in X \quad [p'] = p = [x_0]$
$q' \in X \quad [q'] = q$

X è $T_2 \Rightarrow \exists\, U, V$ aperti di X con $p' \in U$, $q' \in V$ e $U \cap V = \emptyset$

In particolare $V \not\ni x_0$

Perciò come già visto sopra, $i(V)$ è un aperto di $X \vee Y$ $(x_0 \notin V)$ e $q' \in i(V)$

$i(U)$ in generale non è aperto in $X \vee Y$ però mi basta prendere $i(U) \cup j(Y) = B$ per avere che B è aperto in $X \vee Y$

Per costruzione $p \in B$ e $B \cap i(V) = \emptyset$ per cui $X \vee Y$ è T_2 $\square$

SPAZI PROIETTIVI CON LA TOPOLOGIA QUOZIENTE

$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \qquad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ con $v = \lambda w$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ $\quad \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ o

$\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\}$

Dotiamo $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ dell'usuale Top. Euclidea e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ delle topologie quoziente indotte

Si tratta di quozienti rispetto ad azioni di gruppo:

$\mathbb{R}^* \circlearrowright \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \qquad \lambda \cdot v = \lambda v$
(e analogamente per $\mathbb{C}$)

$$\boxed{\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*}$$

Queste azioni sono molto lontane dall'essere proprie o propriamente discontinue.

Il caso reale

Per ottenere $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ non è necessario partire da $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, S^n interseca già tutte le classi di equivalenza. Inoltre, la restrizione di $\sim$ e $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ è la rel. $\sim'$ su S^n data da $v \sim' w \iff v = \pm w$

La speranza è che si abbia $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}/_{\sim} = S^n/_{\sim'} = S^n/_{\pm Id}$

TEOREMA: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{omeo.}}}{\cong} S^n/_{\pm Id}$

DIM:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

$f = \pi \circ i$ è cont. e surg. $f(v) = f(w) \iff [v] = [w] \iff v = \lambda w$

ma $\|v\| = \|w\| = 1$ per cui $\lambda = \pm 1$ per cui $f(v) = f(w) \iff v = \pm w$

f induce $\bar{f}: S^n/_{\pm id} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ continua e bigettiva

Costruiamo un'inversa continua

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[r, "n"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & S^n \arrow[r, "\pi"] & S^n/_{\pm Id} \end{tikzcd}$$

$n(v) = \frac{v}{\|v\|}$ è il normalizzato di v. Poiché n e π sono continue, anche $g = \pi \circ n$ lo è.

$v = \lambda w \Rightarrow \frac{v}{\|v\|} = \pm \frac{w}{\|w\|}$ per cui g passa al quoziente definendo $\bar{g}: \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to S^n/_{\pm id}$ continua. È immediato verificare che $\bar{f}$ e $\bar{g}$ sono una l'inverso dell'altra. □

Corollario: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è connesso per archi, compatto e T_2 $\forall n \in \mathbb{N}$

DIM: ① Connessione per archi $n = 0$ $\mathbb{P}^0(\mathbb{R}) = \{pt.\}$ connesso per archi

$n \geq 1$, S^n è connessa per archi

$\Rightarrow$ lo è anche $S^n/_{\pm Id} \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

② compattezza : segue da S^n compatto

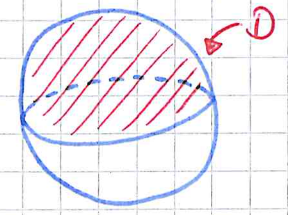
③ $G = \{\pm Id\} \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ è finito e S^n è T_2 ↳ quindi l'azione è propria

$\Rightarrow S^n/_G \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2

□

Ora l'azione di $\{\pm Id\}$ su S^n è propria, per cui possiamo cercare un dominio fondamentale D.

Poniamo D = emisfero nord $= \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n, x_0 \geq 0\}$



È immediato verificare che è un dominio fondamentale.

Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n/_{\pm Id} \cong D/_\sim$

$v \sim w \iff v = w$ o $v = \pm w$ e $v, w \in \partial D$ ← frontiera di D come ssp. di S^n

TEOREMA Sia $D^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq 1\}$ il disco chiuso in $\mathbb{R}^n$ e sia $\sim'$ la rel. su D^n data da

$v \sim' w \iff v = w$ opp. $\|v\| = \|w\| = 1$ e $v = \pm w$

Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong D^n/_{\sim'}$

DIM: Esiste un ovvio omeo. tra D e D^n

$p: D \to D^n \quad p(x_0, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$

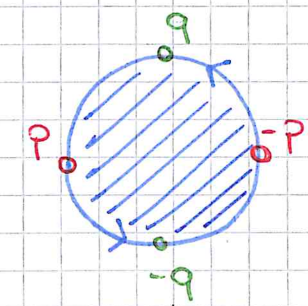
(proietto l'emisfero nord sul disco ad altezza $x_0 = 0$)

Ora $D \xrightarrow{p} D^n \longrightarrow D^n/_{\sim'}$ induce al quoziente una mappa continua $D/_\sim \longrightarrow D^n/_{\sim'}$,

con inversa continua indotta da

$D^n \xrightarrow{p^{-1}} D \longrightarrow D/_\sim$

□



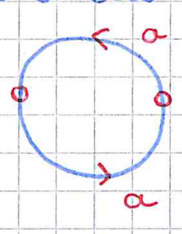
Casi di dimensione bassa

(0) $\mathbb{P}^0(\mathbb{R}) = \{pt.\}$

(1) $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = D^1/_{\sim'} = [-1,1]/_{\{-1,1\}} \cong [0,1]/_{\{0,1\}} \cong S^1$

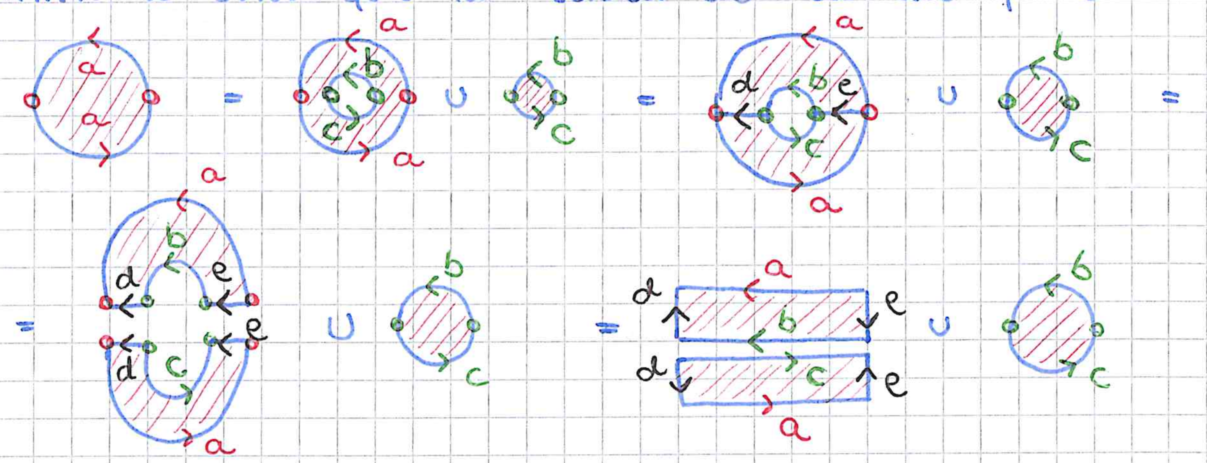
(2) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = D^2/_{\sim'} =$

Abbiamo visto che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è rappresentato da

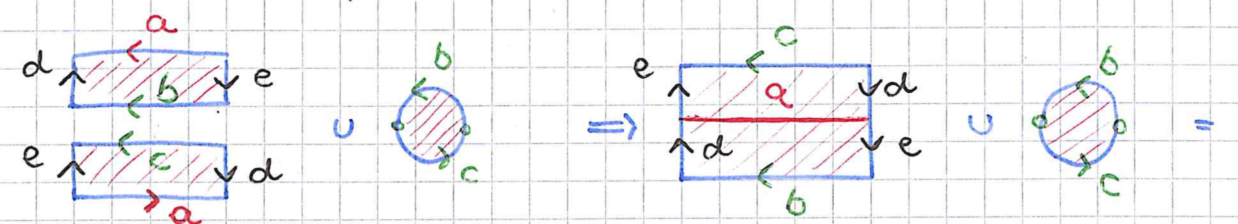


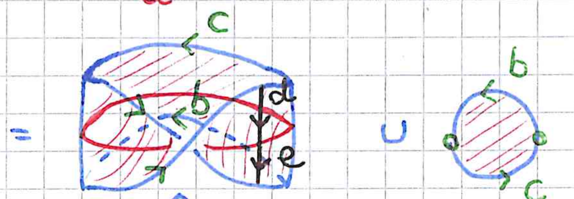
l'incollamento di queste due semicirconferente non si può effettuare in $\mathbb{R}^3$.

Utilizziamo comunque la tecnica del "cut and paste"



Attacco i due rettangoli lungo $\underline{\underline{a}}$ dopo aver simmetrizzato quello in basso rispetto a un asse verticale, ottenendo:





Nastro di Moebius

Dunque $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ottiene "tappando" un nastro di Moebius con un disco (cosa che non può essere fatta in $\mathbb{R}^3$ senza generare intersezioni non volute)

Consideriamo le carte affini

$j_i : \mathbb{K}^n \longrightarrow U_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ $\quad (U_i = \{x_i \neq 0\},\ H_i = \{x_i = 0\}$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}))$

$(x_1 \cdots x_n) \longmapsto [x_1 \cdots 1 \cdots x_n]$

con inversa

$j_i^{-1} : U_i \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$[x_0 : \dots : x_n] \longrightarrow \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, è facile verificare che vale il seguente

TEOREMA 1) U_i è aperto (e H_i è chiuso) in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

2) $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

3) $j_i : \mathbb{K}^n \to U_i$ è un omeomorfismo

DIM: 1) $\pi^{-1}(H_i)$ è $\{x_i = 0\} \cap (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})$ che è chiuso in $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ da cui la tesi per def. di top. quotiente

2) $H_i = \mathbb{P}(\{x_i = 0\}) \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

K-spatio vettoriale di dimensione n

restringersi a $x_i = 0$ e quotientare è topologicamente equivalente a quotientare e poi prendere la top. di ssp., funziona perché $\{x_i = 0\} \cap \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ è un chiuso saturo di $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$

3) $j_i : \mathbb{K}^n \to U_i$ è composizione di

$$\begin{array}{ccccc} (x_1 \cdots x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots x_n) & \mapsto & [x_1 \cdots 1 \cdots x_n] \\ \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} & \to & U_i \end{array}$$

ed è perciò continua.

L'inversa è continua perché definita per passaggio al quotiente

$$\{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\text{mappa continua}} \mathbb{K}^n$$

$$(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \to \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

(controllare i dettagli: anche qui quotiente e restrizione devono commutare)

Il caso complesso

Posto su $\mathbb{C}^{n+1}$ il prodotto hermitiano standard, che è definito positivo posso prendere $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\}$

(penso a $\mathbb{C}^{n+1}$ come $\mathbb{R}^{2n+2}$ dotato di prod. scalare standard, ottenendo la stessa S^{2n+1})

Dato $v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\frac{v}{\|v\|} \sim v$ e $\frac{v}{\|v\|} \in S^{2n+1}$

$\Rightarrow \pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si restringe a una mappa continua e surg. $\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Corollario: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ compatto e connesso per archi in S

Achtung! Dato $v \in S^{2n+1}$, chi è la preimmagine di $[v]$?

È $\{w \in S^{2n+1} \mid w = \lambda v\} = \{w \in S^{2n+1} \mid w = \lambda v \quad \lambda \in S^1\}$
in quanto se $\|v\| = \|w\| = 1$ e $v = \lambda w$ allora $|\lambda| = 1$

Dunque, $\forall p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, la preimm. di p in S^{2n+1} è omeo. a S^1

Fatto: $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è T_2

$$\begin{array}{c} \wr\wr \\ S^{2n+1}/S^1 \end{array} \qquad S^1 \circlearrowleft S^{2n+1} \text{ tramite } \lambda \cdot v = \lambda v$$

(Dimostrarlo per esercizio facendo prima T_2 a mano e dedurre che $S^{2n+1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è chiusa (va da un compatto a un T_2) per cui è un'identificazione e quindi $S^{2n+1}/S^1 \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$).

Proposizione $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2$

DIM. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus H_0 \cong U_0 \cong \mathbb{C}$

ma $H_0 \cong \mathbb{P}^0(\mathbb{C}) = \{\text{punto}\}$ inoltre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è compatto e T_2. Per unicità della compattificazione di Alexandrov, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è la comp. di Alex. di $\mathbb{R}^2$ che è S^2 (riguardare la proiezione sterografica) $\square$

ES. 53 Fissiamo l'azione $\mathbb{Z} \circlearrowleft \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

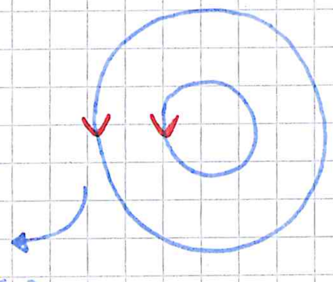
$$n \cdot v = 2^n \cdot v$$

Mostriamo che $D = \{v \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq \|v\| \leq 2\}$ è un dom. fondamentale.

È chiuso (preimm. di $[1,2]$ tramite la funz. continua $v \mapsto \|v\|$) e $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} n \cdot D = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

La famiglia $\{n \cdot D, n \in \mathbb{Z}\}$ è loc. finita, ogni punto ha un intorno che interseca al max 2 insiemi di tipo $n \cdot D$ (se $\|v\| \neq 2^n \; \forall n \in \mathbb{Z}$ trovo un intorno che ne interseca uno solo). Inoltre $\mathring{D}$ non contiene coppie di pt. equivalenti

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} / \mathbb{Z} \cong D/_\sim$ dove $v \sim w$ se $v = w$ oppure $\|v\| = 1$ e $w = 2v$ o viceversa



toro:

è $S^1 \times [1,2]$ con l'identificazione di $S^1 \times \{1\}$ con $S^1 \times \{2\}$

In generale D è la famiglia di sfere concentriche centrate nell'origine con raggi $1 \leq R \leq 2$ e voglio identificare quella di raggio 1 con quella di raggio 2.

Mi aspetto di ottenere $S^{n-1} \times [1,2]/_\sim = S^{n-1} \times S^1$

DIM: Cerco $f : D \to S^{n-1} \times S^1$ che passi al quoziente in modo che $f(v) = f(w) \iff v \sim w$ (f surg.)

Se trovo f poiché D è compatto e $S^{n-1} \times S^1$ è T_2 (prodotto di T_2) ho finito

Pongo $f(v) = \left(\frac{v}{\|v\|}, e^{2\pi i (\|v\| - 1)} \right)$

$$\frac{v}{\|v\|} \in S^{n-1}, \quad e^{2\pi i (\|v\|-1)} \in S^1.$$

f continua (perché lo sono le sue componenti) ed è surgettiva.

$f(v) = f(w) \iff \frac{v}{\|v\|} = \frac{w}{\|w\|}$ e $e^{2\pi i (\|v\|-1)} = e^{2\pi i (\|w\|-1)}$

$$\Updownarrow$$

$$\|v\| - \|w\| \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$v = w$ o $\|v\| = 1$ e $w = 2v$ o viceversa

ES. 52

$\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\quad n \cdot (x,y) = (2^n \cdot x, 2^{-n} \cdot y)$

1) L'azione è propriamente discontinua, cioè $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\exists$ intorno U di (x_0, y_0) t.c. $n \cdot U \cap U \neq \emptyset \Rightarrow n = 0$

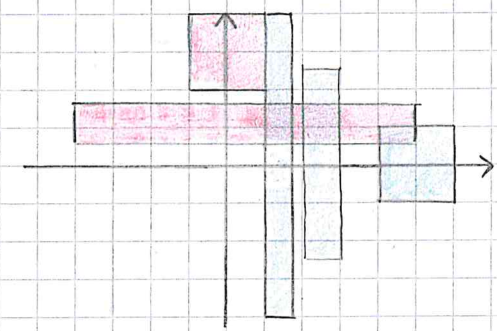
Se $x_0 \neq 0$, basta porre $U = (\frac{7}{8} x_0, \frac{9}{8} x_0) \times \mathbb{R}$ $(x_0 > 0)$

scambiati se $x_0 <$ [illegible]

Se $y \neq 0$ faccio la stessa cosa con strisce orizzontali

2) L'azione non è propria:

se U è un intorno di $(1,0)$ allora U contiene un quadratino $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon \times \varepsilon)$



I suoi traslati con $n<0$ sono rettangoli di base sempre più piccola e alt. sempre più grande.

Analogamente, se V è un intorno di $(0,1)$ i suoi traslati $(n>0)$ sono rettangoli con base sempre maggiore e alt. minore

Esisterà un rettangono orizzontale che ne interseca ∞ verticali, cioè $\exists\, n_0 \in \mathbb{Z} \mid n_0 \cdot U \cap n \cdot V \neq \emptyset$ per ∞ n

$\Rightarrow n^{-1} \cdot n_0 \cdot U \cap V \neq \emptyset$ per ∞ n

per cui l'azione non è propria.

Questo argomento mostra anche che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{Z}$ non è T_2:

$[(1,0)] \neq [(0,1)]$ e se U è un aperto saturo che contiene $(1,0)$ allora deve contenere anche

$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} n \cdot U$ e questa unione come abbiamo visto interseca tutti gli aperti che contengono $(0,1)$.

Dunque non esistono aperti saturi disgiunti che contengono $(1,0)$ e $(0,1)$ e perciò $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{Z}$ non è T_2 $\square$