13/03/25
Stanwely

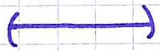
GRUPPO FONDAMENTALE

Esempio: $D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$ disco aperto

Intuitivamente D^n e D^m non sono omeomorfi se $n \neq m$

È facile vedere che D^1 non è omeomorfo a D^n per $n > 1$

$\downarrow$



segmento aperto

$D^1 \setminus \{\text{punto}\}$ è disconnesso

ma $D^n \setminus \{\text{punto}\}$ non lo è $(n>1)$

Vedremo che D^2 non è omeomorfo a D^n se $n > 2$

Altra domanda: come vedere che D^2 e $D^2 \setminus \{0\}$ non sono omeomorfi?

Se $x_1, \dots, x_n$ punti di D^2, $D^2 \setminus \{x_1\}$, $D^2 \setminus \{x_1, x_2\}$, ...
... $D^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ non sono omeomorfi tra loro.

Def. $I = [0,1]$, X sp. topologico

Un cammino in X è un'applicazione continua $I \to X$

Se $f(0) = f(1)$ si parla di un cammino chiuso o di un laccio

Cammino chiuso $\longleftrightarrow$ mappa continua $S^1 \to X$

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \\ S^1 \cong [0,1]/\{0,1\} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

NB! Non è detto che f sia iniettiva, può essere $f: I \to \{x\} \subseteq X$ (cammino costante)

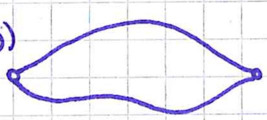
Inoltre,
$f_1: I \to S^1 \quad f_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$

non è uguale a $f_2: I \to S^1 \quad f_2(t) = (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t))$

$\Rightarrow$ Non è possibile identificare un cammino con la sua immagine

Def. Due cammini $f_0, f_1 : I \to X$ con $f_0(0) = f_1(0)$, $f_0(1) = f_1(1)$

$f_0(0) = f_1(0)$



$f_0(1) = f_1(1)$

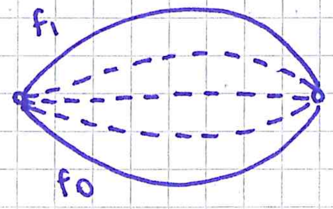
sono **OMOTOPI** se esiste $h: I \times I \to X$ continua

t.c. $h(0,t) = f_0(t) \quad \forall t \in I$

$h(1,t) = f_1(t) \quad \forall t \in I$

$h(s,0) = h(0,0)$, $\quad h(s,1) = h(0,1) \quad \forall s \in I$

Sia $s \in I$ fisso. Allora $f_s(t) := h(s,t) : I \to X$ è un cammino



$\to$ La famiglia $\{f_s \mid s \in I\}$ da una deformazione continua da f_0 a f_1

h si chiama OMOTOPIA tra f_0 e f_1

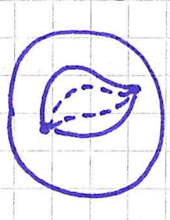
OSS: essere omotopi è una rel. di equivalenza sui cammini

Torniamo al problema "D^2 non omeomorfo a $D^2 \setminus \{0\}$"

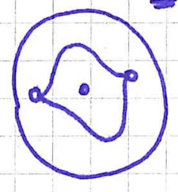
Idea dim:

In D^2 tutti i cammini sono omotopi $\quad$ * (pag. successiva)

D^2



In $D^2 \setminus \{0\}$



questi due cammini non sono omotopi

La deformazione deve attraversare il punto mancante

Ma non è una dim. rigorosa

Esempio di fatto intuitivamente chiaro ma difficile da dimostrare : "TEO. DI JORDAN"

Una curva di Jordan in $\mathbb{R}^2$ è un laccio $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ tale che induce un omeomorfismo $S^1 \xrightarrow{\sim} f(S^1)$

(una dim. è possibile con risultati di questo corso ma è più immediata usando l'omologia, che richiede una costruzione molto pesante)

Il teo. dice che se $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ è una curva di Jordan allora $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ ha due componenti connesse

ORIGINE STORICA DELL'OMOTOPIA: identifichiamo $D^2 \longleftrightarrow \{|z| < 1\} \subseteq \mathbb{C}$

se $f: I \to D^2$ è un cammino e $g: D^2 \to \mathbb{C}$ una funt. differentiabile complessa, si può definire

$$\int_f g(z)\, dz = \int_0^1 (g \circ f)(t)\, dt$$

(anche se g non è differentiabile in 0 ma $0 \notin f(I)$)

Cauchy e Goursat sapevano che

se $f_0, f_1 : I \to D$ sono due cammini t.c. $f_0(0) = f_1(0)$
$f_0(1) = f_1(1)$

allora $\int_{f_0} q(z)\,dz = \int_{f_1} q(z)\,dz$

invece se q non è differenziabile in 0 (ad esempio $q = 1/z$) e f_0 e f_1 sono come in * alla pag. precedente

allora gli integrali sono diversi (ci volle molto a capire che l'origine del problema era geometrica e non analitica)

$\boxed{D^2 \not\cong D^2 \setminus \{0\}}$

Utilizzando i cammini definiremo $\forall X$ connesso un gruppo

Se X e Y sono omeomorfi i gruppi associati saranno isomorfi

Per D^2 il gruppo sarà $\{1\}$, per $D^2 \setminus \{0\}$ sarà $\mathbb{Z}$

Def. Siano $f, g : I \to X$ due cammini t.c. $f(1) = g(0)$

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$ (giunzione o concatenazione di cammini)

Notazione: $f_0 \sim f_1$ significa che sono omotopi

LEMMA $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$ $\Rightarrow$ $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$
$(f_0(1) = g_0(0))$

DIM: Sia l'omotopia tra f_0 e f_1 data da una fam. $\{f_s \mid s \in I\}$ ($f_s(t) = h(s,t)$)

" " " g_0 e g_1 " " " $\{g_s \mid s \in I\}$

$\Rightarrow$ $\{f_s \cdot g_s \mid s \in I\}$ dà un'omotopia tra $f_0 \cdot g_0$ e $f_1 \cdot g_1$ $\square$

TEOREMA (Poincaré)

Sia X connesso e $x_0 \in X$ fisso. Il prodotto definito sopra induce una struttura di gruppo sulle classi di omotopia di cammini chiusi con $f(0) = f(1) = x_0$

- Unità: cammino costante $I \to \{x_0\}$
- Cammino inverso: $f : I \to X$
  $f^{-1} : t \mapsto f(1-t)$

Commento: in modo simile si possono definire gruppi di omotopia superiori $\pi_i(X, x_0)$

Def. Il gruppo del teo. si chiama GRUPPO FONDAMENTALE di X rispetto al punto base x_0. Lo indichiamo con $\pi_1(X, x_0)$

$\pi_i(X, x_0)$ è definito tramite classi di omotopia di mappe continue $(S^i, *) \to (X, x_0)$

Per $i \geq 2$ sono sempre commutativi!

In generale invece $\pi_1(X, x_0)$ non è commutativo.

Esempio: $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Infatti siano $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ due lacci che partono da x_0

Allora $f_s : t \mapsto (1-s) f(t) + s g(t)$ definisce un'omotopia tra f e g

Più generalmente, un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è convesso se $\forall x, y \in X \quad (1-s)x + sy \in X$ se $s \in I$

Lo stesso ragionamento mostra che

$$X \text{ convesso} \Rightarrow \pi_1(X, x_0) = 1 \quad \forall x_0 \in X$$

17/03/25
Szamuely

RECAP

X sp. topologico, $x_0 \in X$ punto base

$f : I \to X$ cammino chiuso con $f(0) = f(1) = x_0$

Abbiamo definito un prodotto sulle classi di omotopia di cammini chiusi $(f, g) \mapsto f \cdot g$ (concatenazione)

Teorema:
Il prodotto sopra induce una struttura di gruppo sulle classi di omotopia di lacci che partono da x_0

UNITÀ: cammino costante

INVERSI: $f \mapsto f^{-1} \qquad t \mapsto f(1-t)$

Def. Questo gruppo è il gruppo fondamentale di X rispetto al punto base x_0

Notazione: $\pi_1(X, x_0)$

LEMMA: Sia $f: I \to X$ un cammino, $\varphi: I \to I$ una funzione continua con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$

Allora $f \circ \varphi \sim f$ [omotopia]

(posso vedere $f \circ \varphi$ come riparametrizzazione di f)

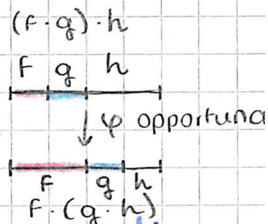
DIM. Basta vedere: $\varphi \sim Id_I$ per poi comporre con f

Un'omotopia è data da $\varphi_s : t \mapsto s \cdot t + (1-s)\varphi(t)$

(da $\varphi \sim Id$ basta usare il lemma precedente) $\left[\begin{array}{l} \varphi_0 : t \to \varphi(t) \\ \varphi_1 : t \to t \end{array}\right]$

$\square$

DIM. (teorema)



Dobbiamo verificare gli assiomi di gruppo:

- Associatività: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

  Si nota che $(f \cdot g) \cdot h$ è una riparametrizzazione di $f \cdot (g \cdot h)$ e quindi applico il lemma

- Unità: Sia $e : I \to \{x_0\}$ il cammino costante. Allora f è la riparametrizzazione di f tramite $\varphi : \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$

  Lemma $\Rightarrow f \cdot e \sim f \sim e \cdot f$

- Inversa: dobbiamo costruire le omotopie

  $$e \sim f^{-1} \cdot f \quad \text{ed} \quad e \sim f^{-1} \cdot f$$

  Il secondo risulta dal primo tramite la sostituzione $f \mapsto f^{-1}$

  Sia $f_s(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq s \\ f(s) & s \leq t \leq 1 \end{cases}$ Quindi $f_0 : t \to \{f(0) = x_0\}$

  $f_1 = f$

  $\Rightarrow \{f_s \mid s \in I\}$ dà una famiglia continua di cammini tra e ed f che non è un'omotopia perché $f_s(1) \neq x_0$ per s generale

  Ma si osserva $f_s^{-1} : t \mapsto f_s(1-t)$ dà una "quasi-omotopia" tra e ed f^{-1} con $f_s^{-1}(1) = x_0$

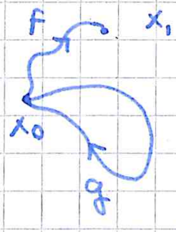
  Di conseguenza $\{f_s \cdot f_s^{-1} \mid s \in I\}$ dà un'omotopia tra $\underbrace{e \cdot e}_{e}$ e $f \cdot f^{-1}$

$\square$

Proposizione se X è connesso per archi e $x_0, x_1 \in X$ $\exists$ isomorfismo $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

DIM. Sia $f : I \to X$ un cammino con $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$

(esiste perché X è connesso per archi)



$g \mapsto f^{-1} \cdot g \cdot f$ induce un omomorfismo $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$

Buona definizione $\quad g \sim g'$

$f^{-1} \cdot g \cdot f \sim f^{-1} \cdot g' \cdot f$ (perché abbiamo visto che il prodotto conserva le classi di omotopia)

Se g_1 e g_2 sono lacci che partono da x_0

$f^{-1}(g_1 \cdot g_2) \cdot f = (f^{-1} \cdot g_1 \cdot f)(f^{-1} \cdot g_2 \cdot f)$

Se g^{-1} è l'inversa di g, $f^{-1} g^{-1} f = (f^{-1} \cdot g \cdot f)^{-1}$

Queste formule dimostrano che τ_f è un omomorfismo di gruppi. τ_f è un isomorfismo perché $\tau_{f^{-1}}: \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ da un' applicazione inversa. $\square$

OSS L' isomorfismo τ_f non è l'unico isomorfismo tra $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$. Se $f_1 : I \to X$, $f_1(0) = x_0$ $f_1(1) = x_1$ è un' altro cammino in generale $\tau_f \neq \tau_{f_1}$

Però $\tau_f = \tau_{f'}$ se $f \sim f_1$

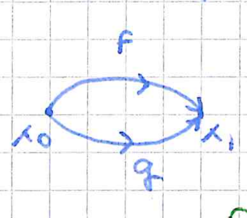
Def. X è semplicemente connesso se è connesso per archi e $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ per un $x_0 \in X$ ($\Rightarrow \forall x_0$)

Quindi un sottoinsieme CONVESSO $X \subset \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

OSS se X è semplicemente connesso e $f, g: I \to X$ due cammini con $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$

$\Rightarrow f \sim g$ (infatti $f \cdot g^{-1}$ è un laccio che parte in x_0 $\Rightarrow f \cdot g^{-1} \sim e$ $\quad f \sim eg \sim g$)

X semplicemente connesso



Proposizione:

Sia $\varphi: X \to Y$ un' applicazione continua tra sp. topologici

$x_0 \in X \quad y_0 = \varphi(x_0)$

Allora φ induce una mappa

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

$$[f] \longmapsto [\varphi \circ f]$$

classe di omotopia di f

Si verifica formalmente: φ_* è un omomorfismo di gruppi

Inoltre, se $\varphi = \mathrm{Id}_X \Rightarrow \varphi_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$

se $\psi : Y \to Z$ continua, $z_0 = \psi(y_0)$

$$\Rightarrow (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* \qquad \text{(funtore)}$$

COROLLARIO: se $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ è un omeomorfismo $\Rightarrow$ φ_* è un isomorfismo $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, y_0)$

DIM. Se φ^{-1} è l'applicazione inversa continua $\varphi^{-1} : Y \to X$

$\varphi \cdot \varphi^{-1} = \mathrm{id}_Y \qquad \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_X$.

Usando le proprietà di sopra $\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = \mathrm{Id}_{\pi_1(Y,y_0)}$

$\varphi_*^{-1} \circ \varphi_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)}$. $\square$

Questo vale più in generale

Def. Due applicazioni $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ continue sono omotope se $h : I \times X \to Y$ continua con $h(0,x) = \varphi_0(x) \ \forall x \in X$

$h(1,x) = \varphi_1(x) \ \forall x \in X$

Di nuovo, $\{\varphi_s(x) := h(s,x) \mid s \in I\}$ definisce una deformazione continua tra φ_0 e φ_1

Attenzione: quando $\varphi_0, \varphi_1 : I \to Y$ sono due cammini questa nozione è più generale che l'omotopia di cammini.

Però anche questa da una rel. di equivalenza tra mappe continue $X \to Y$. Notazione: $\varphi_0 \sim \varphi_1$

Def. Due sp. top. X e Y sono omotopicamente equivalenti se $\exists\ \varphi : X \to Y,\ \psi : Y \to X$ mappe continue t.c. $\varphi \circ \psi \sim id_Y$ $\quad \psi \circ \varphi \sim id_X$

Proposizione Due spazi omotopicamente equivalenti hanno π_1 isomorfi. (dimostrato nella prossima lezione)

Esempi: 1) $\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente al punto

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ $\quad \psi : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ (inclusione)

$\{0\} \xhookrightarrow{\psi} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \{0\}$ $\quad \varphi \circ \psi = id_{\{0\}}$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \{0\} \xhookrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$ $\quad \varphi \circ \psi \sim id_{\mathbb{R}^n}$, un'omotopia è data da $h(s,x) = s \cdot x$

Uno sp. omotopicamente equivalente a un punto si dice **contrattile**

2) S^n è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$\varphi : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ inclusione

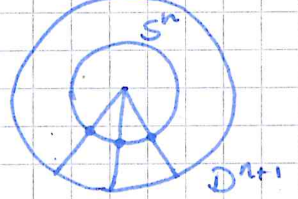
$\psi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ $\quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ (normalizzazione)

$\psi \circ \varphi = id_{S^n}$

$\varphi \circ \psi \sim id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ $\quad$ tramite l'omotopia $h(s,x) = s \cdot \frac{x}{\|x\|} + (1-s)\, x$

Con lo stesso metodo si dimostra che $D^{n+1} \setminus \{0\}$ è omotopicamente equivalente a S^n

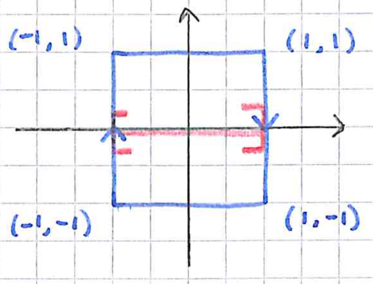
(identificare D^{n+1} con $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \|x\| < 2\}$)



18/03/2025
Szamuely

Ancora sull'omotopia

Es. 3: il Nastro di Moebius è omotopicamente equivalente a S_1



$\square \sim [-1,1]$

$i : [-1,1] \hookrightarrow \square$

$\pi : \square \to [-1,1]$
$(x,y) \mapsto (x,0)$

↓

questa è una equiv. omotopica

$\pi \circ i = id_{[-1,1]}$ $\quad i \circ \pi$ è omotopa all'identità tramite l'omotopia $\{f_s : (x,y) \mapsto (x, s\cdot y),\ s \in I\}$

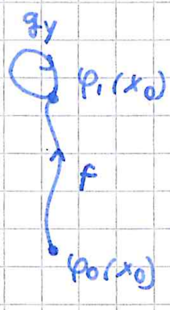
Identifichiamo i due lati verticali con orientazione opposta e guardiamo le mappe indotte da π e i

TEOREMA Spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi

LEMMA: siano $\varphi_0, \varphi_1 : X \to Y$ mappe continue omotope e sia x_0 pt. base. Allora il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \arrow[d, "\tau_f"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "\varphi_{0*}"] \arrow[r, "\varphi_{1*}"'] & \pi_1(Y, \varphi_1(x_0))
\end{tikzcd}$$

τ_f è l'omo indotto da $f : s \mapsto \varphi_s(x_0)$ dove $\{\varphi_s \mid s \in I\}$ è l'omotopia tra φ_0 e φ_1
(cammino) $\quad = h(s, x_0)$



→ **DIM**: $\tau_f^{-1} = \tau_{f^{-1}} : \pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \to \pi_1(Y, \varphi_0(x_0))$
↳ indotto da $g_y \mapsto f \cdot g_y \cdot f^{-1}$

Per $s \in I$ fissato definiamo $f_s : I \to Y$

$f_s(t) = f(s \cdot t) \quad \forall t \in I$ (questo è il cammino $f|_{[0,s]}$ con riparametrizzazione). $\quad f_0 : t \mapsto \{f(0) = \varphi_0(x_0)\}$

di mappe continue, NON di cammini

$\{f_s \mid s \in I\}$ induce un'omotopia $f_0 \sim f_1$. $\quad f_1 = f$

Ma allora $s \mapsto f_s \cdot \varphi_s(g_x) \cdot f_s^{-1}$ induce un'omotopia
↳ laccio su X a partire da x_0

tra $\varphi_0(q_x)$ e $f \cdot \varphi_1(q_x) \cdot f^{-1}$

$\downarrow$ rappresenta $\varphi_{0*}([q_x])$

$\hookrightarrow$ rappresenta $\tau_{f^{-1}}(\varphi_{1*}[q_x])$ $\square$

$\rightarrow$ DIM. (teo):

Siano $\varphi: X \to Y$, $\psi: Y \to X$ tale che $\varphi \circ \psi \sim id_Y$, $\psi \circ \varphi \sim id_X$

Sia $x_0 \in X$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "id_{X*}"'] & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[r, "\psi_*"] & \pi_1(X, (\psi\circ\varphi)(x_0)) \arrow[dl, "\tau_f", "\cong"'] \\
& \pi_1(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Questo diagramma commuta per il lemma

$\Rightarrow$ φ_* deve essere iniettivo e ψ_* è suriettivo

Tutto questo risulta da $\psi \circ \varphi \sim id_X$

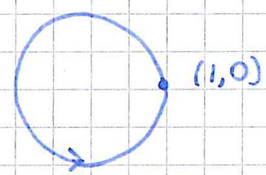
Utilizzando $\varphi \circ \psi \sim id_Y$ (simmetricamente) ottengo

φ_* suriettiva e ψ_* iniettiva $\Rightarrow$ sono isomorfismi $\square$

COROLLARIO: $\pi_1(S^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \cong \pi_1(D^{n+1} \setminus \{0\})$

Teorema $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Più precisamente il laccio $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ rappresenta un generatore di $\pi_1(S^1, (1,0))$



Idea della dim:

Si considera la mappa surgettiva

$\mathbb{R} \xrightarrow{\rho} S^1$

$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

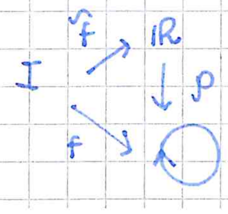
$\rho^{-1}((1,0)) = \mathbb{Z}$ e $\forall a \in \mathbb{R}$

ρ induce un omeomorfismo tra $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ e $S^1 \setminus \{pt\}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

LEMMA 1) Per ogni laccio $f: I \to S^1$ con $f(0) = f(1) = (1,0)$

$\exists!$ cammino (in generale non chiuso) $\hat{f}: I \to \mathbb{R}$

t.c. $\hat{f}(0) = 0$ e $\rho \circ \hat{f} = f$



($\hat{f}$ è un sollevamento di f)

197

2) Se f_0 e f_1 sono due lacci omotopi come in 1)

$\Rightarrow \hat{f}_0(1) = \hat{f}_1(1) \in \mathbb{Z}$

(lo dimostriamo la prossima volta)

→ DIM. (lemma ⇒ teo.):

La mappa $f \mapsto \hat{f}(1)$ è ben def. per il punto 1) del lemma

Lemma 2) ⇒ questa mappa induce una mappa

$$\pi_1(S^1, (1,0)) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}$$

CLAIM: questa mappa è un isomorfismo di gruppi

ϕ omo.: se $\hat{f}$ e $\hat{g}$ sollevano $\underset{I \to S^1}{f \text{ e } g}$ allora la concatenazione di $\hat{f}$ e di $t \mapsto \hat{f}(1) + \hat{g}(t)$ solleva $f \cdot g$

ϕ biq.: se $f_1 : I \to S^1 \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

$\Rightarrow \hat{f}_1 : I \to \mathbb{R}$ è l'inclusione $I \hookrightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow \hat{f}_1(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_1^n(1) = n$ perché ϕ è un omomorfismo

$\Rightarrow \phi$ suriettivo

Sia $f: I \to S^1$ un laccio t.c. $\hat{f}(1) = 0$. Questo vuol dire che $\hat{f}: I \to \mathbb{R}$ è un laccio che parte da 0 e torna a 0

$\mathbb{R}$ è semplicemente connesso $\Rightarrow \hat{f}$ è omotopo al laccio costante $I \to \{0\} \Rightarrow p \circ \hat{f} = f$ è omotopo al laccio costante

$\Rightarrow \phi$ iniettivo $\square$

COROLLARIO $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(D^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ (perché abbiamo già visto che sono omotopicamente equivalenti)

Def. Sia $Y \subset X$ ssp. e $i: Y \hookrightarrow X$ l'inclusione.

Una retrazione di X su Y è un'applicazione continua $r: X \to Y$ tale che $r \circ i: Y \to Y$ è l'identità

Esempi: 1) se $x \in X \Rightarrow \{x\}$ è un retratto di X

2) $[-1,1]$ è retratto del disco chiuso

$$\overline{D}^2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1 \}$$

Lemma se Y è un retratto di X, $x_0 \in Y$

$\Rightarrow i_* : \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è iniettiva

DIM: $\pi_1(Y, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{r_*} \pi_1(Y, x_0)$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y,x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "r_*"] & \pi_1(Y,x_0) \end{tikzcd}$$

$\square$

Cor. S^1 non è un retratto di $\overline{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$

DIM: supponiamo il contrario $i: \pi_1(S^1, (1,0)) \to \pi_1(\overline{D}^2, (1,0))$

non è iniettivo ↯ $\qquad \pi_1(S^1,(1,0)) = \mathbb{Z}$, $\quad \pi_1(\overline{D}^2,(1,0)) = \{1\}$ $\square$

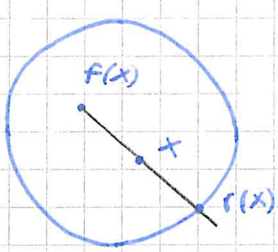
TEOREMA del punto fisso di Brouwer

Ogni applicazione continua $\overline{D}^2 \to \overline{D}^2$ ammette un punto fisso (i.e. $\exists x \in \overline{D}^2 \mid f(x) = x$)

DIM: supponiamo $f(x) \neq x \quad \forall x \in \overline{D}^2$

$r(x) :=$ punto di intersezione con S^1 dalla retta che parte da $f(x)$ e attraversa x

Si verifica: $x \mapsto r(x)$ è continua e da una retrazione da $\overline{D}^2 \to S^1$ ↯



$\square$

20/03/25
Stamuely

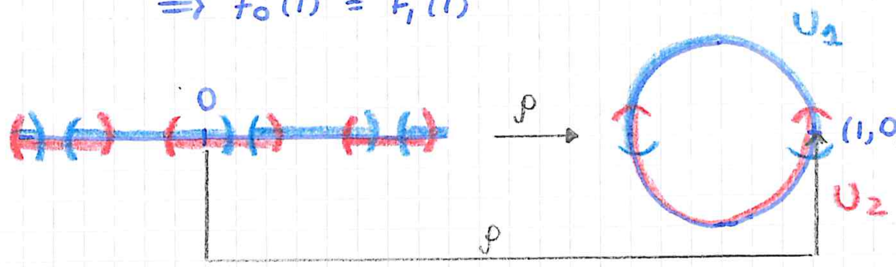
$p : \mathbb{R} \to S^1 \qquad t \xmapsto{p} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

$p^{-1}((1,0)) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

p induce un omeomorfismo tra $(a-1/2, a+1/2) \subseteq \mathbb{R}$ e $S^1 \setminus p(a+1/2)$

LEMMA (i) Per ogni laccio $f: I \to S^1$ con $f(0) = f(1) = (1,0)$ $\exists!$ cammino (in generale non chiuso) $\hat{f}: I \to \mathbb{R}$ t.c. $\hat{f}(0) = 0$ e $p \circ \hat{f} = f$

(ii) Se $f_0 \sim f_1$ sono due lacci omotopi come in (i) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \hat{f}_0(1) = \hat{f}_1(1)$



DIM. (i) Considero il ricoprimento aperto di S^1 dato da due "grandi archi" U_1 e U_2 come sopra. La restrizione di p ad ogni componente di $p^{-1}(U_1)$ induce un omeomorfismo con U_1 (analogamente per U_2). Inoltre, le componenti connesse di $f^{-1}(U_1)$ e $f^{-1}(U_2)$ danno un ricoprimento aperto di $I = [0,1]$

I è compatto $\Rightarrow$ $\exists$ una sottodivisione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ di I tale che $[t_i, t_{i+1}] \subset f^{-1}(U_1)$ opp. $f^{-1}(U_2)$ $\forall i$, $t_i \in f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$.

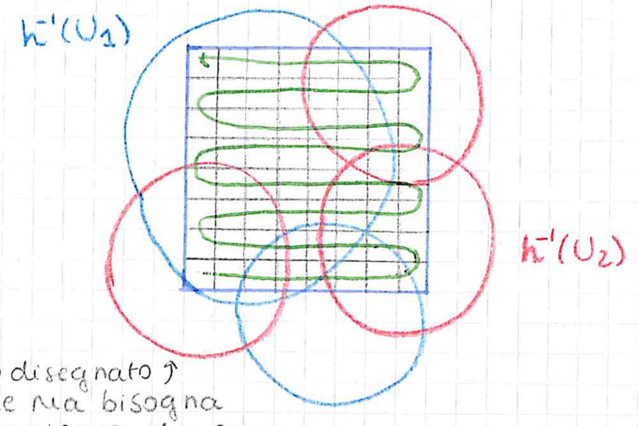
$\hat{f}$ si costruisce induttivamente. Se $\hat{f}|_{[0,t_i]}$ è già costruito e $[t_{i-1}, t_i] \subset f^{-1}(U_1)$, allora si costruisce il sollevamento di $f|_{[t_i, t_{i+1}]}$ partendo da $\hat{f}(t_i)$ e usando l'isomorfismo della componente di $p^{-1}(U_2)$ che contiene $\hat{f}(t_i)$ con U_2. Se $[t_{i-1}, t_i] \subset f^{-1}(U_2)$ si lavora con $p^{-1}(U_1)$.

L'unicità di $\hat{f}$ risulta dal fatto, già osservato che $\forall a \in \mathbb{R}$ esiste un intorno di a sul quale p induce un omeomorfismo (cioè dal fatto che p è un omeomorfismo locale).

DIM (ii) Sia $h: I \times I \to S^1$ un'omotopia tra f_0 e f_1. Come in (i) h si solleva ad un'applicazione continua $I \times I \xrightarrow{\hat{h}} \mathbb{R}$. Le componenti connesse di $h^{-1}(U_1)$ e $h^{-1}(U_2)$

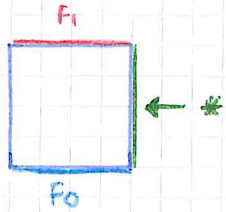
danno un ricoprimento aperto di $I \times I$.

Il numero di Lebesque mi permette di dividere $I \times I$ in quadratini tali che ognuno di essi sia contenuto in $h^{-1}(U_1)$ oppure $h^{-1}(U_2)$



l'ho disegnato ↑ male ma bisogna immaginare che ogni quadratino sia interamente in una palla rossa o blu

Stabilendo un'ordine sui quadratini, per esempio quello "a serpente" in verde nel disegno si costruisce $\hat{h}$ induttivamente. Il sollevamento dei lati orizzontali del quadrato



deve dare $\hat{f}_0$ e $\hat{f}_1$ per l'unicità dimostrata nel punto (i)

Cioè: $\hat{h}(0,t) = \hat{f}_0(t)$, $\hat{h}(1,t) = \hat{f}_1(t)$. Inoltre, $s \mapsto \hat{h}(s,1)$ è un cammino in $\mathbb{R}$ tra $\hat{f}_0(1)$ e $\hat{f}_1(1)$ che solleva il

$* \longrightarrow$ cammino costante $s \mapsto (1,0)$ $\Rightarrow$ per unicità $s \mapsto \hat{h}(s,1)$ è il cammino costante $s \mapsto \hat{f}_0(1)$, quindi $\hat{f}_0(1) = \hat{f}_1(1)$. $\square$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

$f \in \mathbb{C}[z]$. Se $\deg f \geq 1 \Rightarrow \exists\, z_0 \in \mathbb{C} \mid f(z_0) = 0$

DIM.: Supponiamo $\deg f \geq 1$ ma $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$. Allora $\forall r > 0$ reale consideriamo

$$f_r(t) := \frac{f(\overset{(re^{it})}{r\cos(2\pi t)+ir\sin(2\pi t)})/f(r)}{|f(r\cos(2\pi t)+ir\sin(2\pi t))|/|f(r)|} \qquad (*)$$

$t \in I$

$f_r(t)$ definisce un laccio $I \to S^1$ che parte da $1 \in \mathbb{C}$.

$\{f_r \mid r \in I\}$ definisce un'omotopia tra $f_0 : I \to \{1\}$ e f_1

Componendo con $[0,1] \to [0,r]$, $s \mapsto s \cdot r$ otteniamo anche un'omotopia tra $f_0 : I \to \{1\}$ e $f_r \Rightarrow [f_r] := 0 \in \pi_1(S_1)$

Sia ora $f = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0$ e per $s \in I$ $\quad f^s := z^n + s(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0)$, $f^0 = z^n$, $f^1 = f$

Se $r > \max(1, \sum_i |a_i|)$ e $|z| = r$ allora

$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > s \cdot (\sum_i |a_i|)\,|z^{n-1}| \geq |s(a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0)|$

$\Rightarrow f^s(z) \neq 0$ se $|z| = r$ $\forall s \in I$. In particolare,

$f^s(r\cos(2\pi t) + ir\sin(2\pi t)) \neq 0 \Rightarrow$ sostituendo $f \rightsquigarrow f^s$ in $(*)$ si ottengono lacci $f^s : I \to S^1$ $\forall s \in I$. La famiglia $\{f_r^s \mid s \in I\}$ da un'omotopia tra f_r^0 e $f_r^1 = f_r$

$f_r^0 : t \longmapsto \cos(2\pi n t) + i\sin(2\pi n t)$ (laccio che percorre il cerchio n volte)

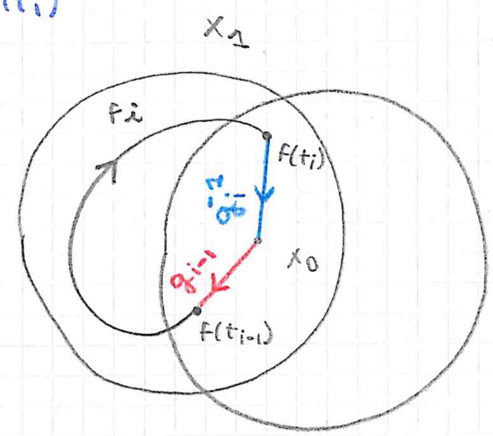
$\Rightarrow [f_r^0] = n \in \pi_1(S^1)$
$\quad\;\; \parallel$
$\quad [f_r] = 0 \in \pi_1(S^1)$ ↯ $\square$

24/03/2025
Stamuely

FORMA DEBOLE DEL TEOREMA DI VAN KAMPEN

Sia $X = X_1 \cup X_2$ dove $X_1, X_2 \subset X$ sono aperti.
Siano $i_1 : X_1 \hookrightarrow X$, $i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ le inclusioni
Supponiamo $X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ connessi per archi. Allora $\pi_1(X, x_0)$ è generato da $i_{1*}(\pi_1(X_1, x_0))$ e $i_{2*}(\pi_1(X_2, x_0))$ $\forall x_0 \in X_1 \cap X_2$

DIM.: Sia $f : I \to X$ un laccio che parte da x_0. Come nella dimostrazione del lemma sul sollevamento di cammini, $\exists$ sottodivisione $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ di I t.c. $f(t_i) \in X_1 \cap X_2$ e $f([t_i, t_{i+1}]) \subset X_1$ o X_2.
Quindi $f = f_1 \cdots f_n$ dove $f_i : I \to X_1$ o X_2
Ora sia $g_i : I \to X_1 \cap X_2$ un cammino con $g_i(0) = x_0$ e $g_i(1) = f(t_i)$



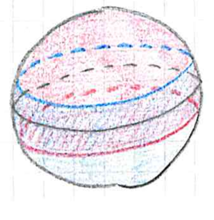
$$\Rightarrow f = f_1 g_1^{-1} g_1 f_2 g_2^{-1} g_2 f_3 \dots g_{n-1} f_n =$$
$$= (f_1 g_1^{-1})(g_1 f_2 g_2^{-1})(g_2 f_3 g_3^{-1}) \cdots (g_{n-2} f_{n-1} g_{n-1}^{-1})(g_{n-1} f_n)$$

Per cui f si scrive come prodotto di lacci che partono da x_0 e sono contenuti in X_1 o X_2. $\square$

COROLLARIO X_1 e X_2 semplicemente connessi nelle stesse ipotesi del teo. $\Rightarrow X$ semplicemente connesso.

COROLLARIO S^n è semplicemente connesso se $n > 1$

DIM. Ricopriamo S_n con due aperti isomorfi a D_n (che sono semplicemente connessi):



OSS: questo argomento non funziona per S^1 perché l'intersezione di questi due aperti non sarebbe connessa.

COROLLARIO $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ $(n>2)$

DIM. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1} ma

$$\pi_1(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n-1=1 \\ 0 & \text{se } n>2 \end{cases}$$

Proposizione Siano $j_1 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1$ e $j_2 : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$ le inclusioni.

$\Rightarrow$ $\forall$ gruppo G e per ogni diagramma commutativo di omeomorfismi:
$(x_0 \in X_1 \cap X_2)$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X_1, x_0) \arrow[dr, "i_{1*}"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[ur, "j_{1*}"] \arrow[dr, "j_{2*}"'] & & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, dashed, "\varphi"] & G \\
 & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[ur, "i_{2*}"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\exists!$ omomorfismo $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$ che fa commutare il diagramma

DIM. caso elementare: $\pi_1(X_2, x_0) = \{1\}$

$\Rightarrow$ $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0)/N$ dove N è il sottogruppo normale generato da $j_{1*}(\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0))$

Richiami di teoria dei gruppi

Def. X insieme. Il gruppo libero di base X $F(X)$ è un gruppo che soddisfa la proprietà universale:
ogni mappa di insiemi $X \to G$ dove G è un gruppo si estende in modo unico all'omomorfismo di gruppi $F(X) \to G$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & F(X) \arrow[dl, "\exists! \text{ omomorfismo } F_\lambda"] \\
G &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[dr, "\lambda_2"] \arrow[ddr, "\lambda_1"'] & F_1(X) \arrow[d, "\exists! f"] \arrow[dd, bend left=60, "id"] \\
 & F_2(X) \arrow[d, "\exists! g"] \\
 & F_1(X)
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow g \circ f = id_{F_1}$

Dalla definizione $F(X)$ risulta determinato a meno di isomorfismo se $F(X)_1$ e $F(X)_2$ soddisfano entrambi la proprietà,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr] & F(X)_1 \arrow[d, shift left, "\exists!"] \\
 & F(X)_2 \arrow[u, shift left, "\exists!"]
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ la composizione di questi due omomorfismi deve essere l'identità

esempio: se X ha un elemento $\Rightarrow F(X) \cong \mathbb{Z}$

COSTRUZIONE DI $F(X)$

Sia $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$

Una parola in X è un prodotto formale $p = x_1^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\pm 1}$ dove x_i non sono necessariamente distinti ma p non contiene sequente $x_i x_i^{-1}$ o $x_i^{-1} x_i$.

$F(X) = \{\text{parole in } X\} \cup \{1\}$

La moltiplicazione è data dal prodotto formale (concatenazione) e dalla cancellazione di sequente $x_i^{-1} x_i$ e $x_i x_i^{-1}$

Prop. universale $\Rightarrow$ se $\lambda(x_i) = g_i$ allora

$$F_\lambda(x_1^{\pm 1} \cdots x_n^{\pm 1}) = g_1^{\pm 1} \cdots g_n^{\pm 1} \in G$$

LEMMA Ogni gruppo è quoziente di un gruppo libero

DIM. Se $\langle g_i \mid i \in I \rangle = G$, sia $X = \{x_i \mid i \in I\}$

$$\begin{aligned} F(X) &\xrightarrow{\Phi} G \\ x_i &\longmapsto g_i \end{aligned}$$

Il 1° teo. di omomorfismo mi da l'enunciato.

Def. Sia $N = \operatorname{Ker} \Phi$ e sia $\{p_j \mid j \in J\}$ un sistema di generatori di N come sottogruppo normale di $F(X)$ $\quad G \cong F(X)/N$

Allora $G = \langle g_i : i \in I \mid p_j : j \in J \rangle$ è una presentazione di G tramite generatori e relazioni.

Tale presentazione di G NON è unica.

Def. Siano G_1 e G_2 gruppi. Il prodotto libero (o coprodotto) $G_1 * G_2$ è il gruppo definito dalla seguente proprietà universale:

esistono $r_1 : G_1 \to G_1 * G_2$, $r_2 : G_2 \to G_1 * G_2$ tale che $\forall$ diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "r_1"'] \arrow[drr, "\varphi_1"] & & \\
& G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & G \\
G_2 \arrow[ur, "r_2"] \arrow[urr, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\exists!$ omomorfismo φ che fa commutare il diagramma

Il prodotto libero è unico a meno di isomorfismo

DIM. esistenza di $G_1 * G_2$

Se $G_1 = \langle g_i^1 : i \in I_1 \mid p_j^1 \ j \in J_1 \rangle$, $\langle g_i^2 : i \in I_2 \mid p_j^2 \ j \in J_2 \rangle$ presentazioni

$$\Rightarrow G_1 * G_2 := \langle \{g_i^1\} \cup \{g_i^2\} \mid \{p_j^1\} \cup \{p_j^2\} \rangle$$

OSS: 1) Gli elementi $G_1 * G_2$ sono parole di elementi in G_1 o G_2

2) $F(X_1) * F(X_2) = F(X_1 \sqcup X_2)$

3) Si può vedere che $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} * \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \cong PSL_2(\mathbb{Z})$

GENERALIZZAZIONE: nella situazione del prodotto libero supponiamo di avere due omomorfismi

$\beta_1 : H \to G_1$

$\beta_2 : H \to G_2$

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, "\varphi_1"] & & \\
H \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & G_1 *_H G_2 \arrow[r, dashed, "\exists!"] & G \\
 & G_2 \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[urr, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

$G_1 *_H G_2$ è il coprodotto amalgamato di (G_1, G_2) rispetto a H

Costruzione: $G_1 *_H G_2 = \langle \{g_i^1\} \cup \{g_i^2\} \mid \{p_j^1\} \cup \{p_j^2\} \cup$

$\cup\ \beta_1(h_i)\beta_2(h_i)^{-1} \rangle$

dove $H = \langle h_i \mid i \in I_3 \rangle$

identifico in $G_1 * G_2$ gli elementi che sono immagine (rispettivamente in G_1 e G_2) dello stesso elemento di H

RECAP:

Se $X = X_1 \cup X_2$, X_1 e X_2 aperti connessi per archi e $X_1 \cap X_2$ cpa
$x_0 \in X_1 \cap X_2$, allora $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) *_H \pi_1(X_2, x_0)$
$\hookleftarrow \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$

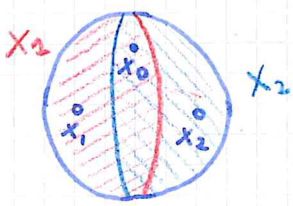
Casi particolari:

1) $\pi_1(X_2) = \{1\} \Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0)/N$ dove
$N =$ sottogruppo normale dato da
$\mathrm{Ker}(\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \xrightarrow{j_{1*}} \pi_1(X_1, x_0))$

2) $\pi_1(X_1 \cap X_2) = \{1\} \Rightarrow \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$

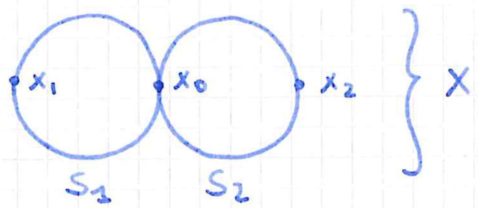
ESEMPI:

1) $D_2 \setminus \{x_1, x_2\} = X_1 \cup X_2$
dove $X_i \cong D_2 \setminus \{0\}$ e $X_1 \cap X_2$ semplicemente connesso
$x_0 \in X_1 \cap X_2$



$\pi_1(D^2 \setminus \{x_1, x_2\}, x_0) \cong \pi_1(D^2 \setminus \{0\}, x_0) * \pi_1(D^2 \setminus \{0\}, x_0) \cong$
$\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$ (gruppo libero generato da due elementi)
Iterando l'argomento $\Rightarrow D^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ ha gr. fondamentale isomorfo a F_n

2) Bouquet di due cerchi:



$X = (X \setminus \{x_1\}) \cup (X \setminus \{x_2\})$
$X_i = X \setminus \{x_i\} \sim S_1$ (omotopicamente equivalente)
$X_1 \cap X_2$ è contrattile
Dunque da Van Kampen $\Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) \cong F_2$
Iterando l'argomento $\Rightarrow \pi_1(\text{Bouquet di } n \text{ cerchi}) \cong F_n$

Commento: Si può verificare che $D^2 \setminus \{x_1, x_2\}$ è omotopicamente equivalente alla forma ∞.

Def Un grafo finito è uno spatio di Hausdorff tale che $\exists\ X^0 \subset X$ finito discreto tale che $X \setminus X^0$ è unione disgiunta di un numero finito di aperti $e_1, \dots, e_r$.

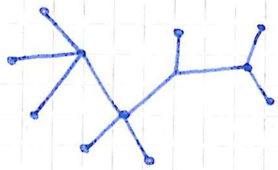
$\forall i \quad e_i \cong (0,1)$ e la chiusura $\bar{e}_i$ soddisfa $1 \leq |\bar{e}_i \setminus e_i| \leq 2$.

Se $|\bar{e}_i \setminus e_i| = 2 \quad (\bar{e}_i, e_i) \cong ([0,1], (0,1))$

$|\bar{e}_i \setminus e_i| = 1 \quad (\bar{e}_i, e_i) \cong (S^1, S^1 \setminus \text{punto})$

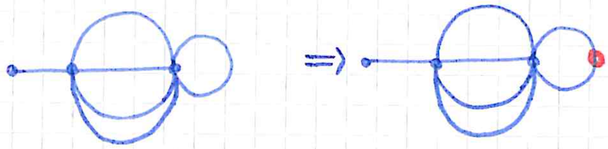
Gli elementi di X^0 sono i vertici del grafo, gli e_i gli archi.

Un grafo è un ALBERO se è connesso e non contiene cerchi (sottografi omeomorfi a S^1) es:



OSS: Aggiungendo nuovi vertici a X_0 si può supporre che il grafo non contenga "lacci" o "archi multipli".

esempio:



caso particolare del concetto di "CW - complesso"

TEOREMA

Il gruppo fondamentale di un grafo finito è isomorfo a un gruppo libero finitamente generato ($\cong F_n$ per un certo n)

LEMMA 1: Un albero X è contrattile

DIM. Per induzione su $|X^0|$

$\exists$ un vertice x_0 t.c. x_0 è connesso a solo uno degli altri vertici (altrimenti X conterrebbe un cerchio)

Sia e_0 l'arco che connette x_0 al resto di X. X si contrae su $X \setminus (\{x_0\} \cup \{e_0\})$ e l'hp. induttiva implica che $X \setminus (\{x_0\} \cup \{e_0\})$ (che ha un vertice in meno) è contrattile. $\square$

LEMMA 2: Esistenza dello spanning tree:

Se X è un grafo finito connesso $\exists$ un sottografo $Y \subset X$ con $Y^0 = X^0$ che è un albero

DIM. Induzione su $|X^0|$. Sia $x_0 \in X^0$ e cancelliamo da X il vertice x_0 e tutti gli archi che partono da esso.

Così si ottiene un grafo Z con $|Z^0| = |X^0| - 1$

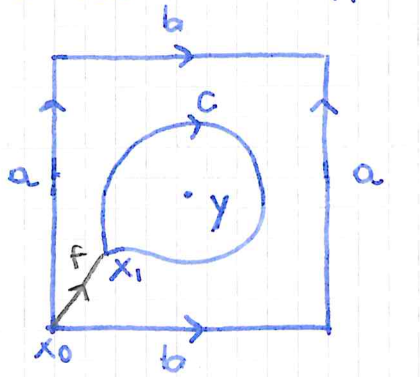
Per induzione esiste un sottografo di Z che verifica il lemma. Ora ci basta rimettere x_0 e tutti gli archi che lo connettono ad ogni componente connessa di Z.

DIM. (teorema):

Sia $Y \subset X$ come nel lemma 2. Contraiamo Y su un punto (possiamo farlo per il lemma 1). Il grafo risultante è omotopicamente equivalente a X ed è omeomorfo a un bouquet di cerchi. $\square$

Esempio: $T =$ toro

Utilizziamo la rappresentazione



$T =$ Quadrato con lati opposti identificati

$y =$ centro di $\square$

$U = T \setminus \{y\}$

$V =$ immagine della parte interna di $\square$ in T

$V = T \setminus$ bouquet di due cerchi che vengono dai lati a e b

$\pi_1(U, x_0)$: $\square \setminus \{y\} \underset{\text{omot. equiv.}}{\sim}$ bordo di $\square$

$\Rightarrow \pi_1(U, x_0) \cong \pi_1(\underset{\text{bouquet}}{\infty}, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$

V è semplicemente connesso

$U \cap V$ è omeomorfo a $D^2 \setminus \{0\} \Rightarrow \pi_1(U \cap V, x_1) \cong \mathbb{Z}$

Da Van Kampen: siccome $\pi_1(V) = \{1\}$

$\pi_1(T, x_1) \cong \pi_1(U, x_1) / N$ dove N è il sottogruppo normale generato dall'immagine $\pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(U)$ (inclusione)

$\pi_1(U, x_0)$ è generato dalle classi di due lacci immagini di $\vec{a}, \vec{b}$

$\pi_1(U, x_1)$ è generato dalle classi di due lacci immagini di $f^{-1}\vec{a}f$ e $f^{-1}\vec{b}f$

D'altra parte $\pi_1(U \cap V)$ è generato da un laccio c come nel disegno. Ma $c \underset{\text{om}}{\sim} f^{-1}\vec{a}\vec{b}\vec{a}^{-1}\vec{b}^{-1}f$

Se $\alpha :=$ classe dell'immagine di $f^{-1}\vec{a}f$ in $\pi_1(U, x_1)$

$\beta :=$ " " " di $f^{-1}\vec{b}f$ in $\pi_1(U, x_1)$

$\Rightarrow$ l'immagine di $[\pi_1(U \cap V, x_1) \to \pi_1(U, x_1)]$ è generato da $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$

$[\, f^{-1}aff^{-1}bf(f^{-1}af)^{-1}(f^{-1}bf)^{-1} = f^{-1}aba^{-1}b^{-1}f \,]$

CONCLUSIONE: $\underline{\pi_1(T, x_1)} \cong \langle \alpha, \beta \mid \underbrace{\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}}_{[\alpha,\beta]} = 1 \rangle \Rightarrow F_2 / \langle [\alpha, \beta] \rangle \cong$

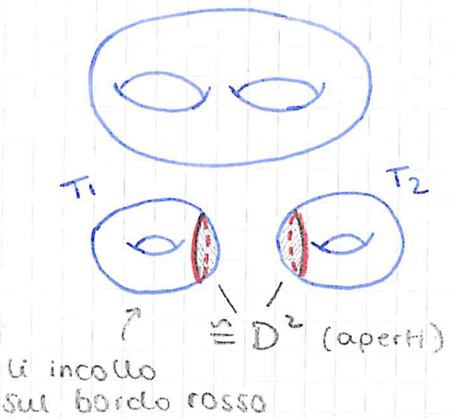
$\underline{\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$

Gli elementi di F_2 sono parole in $\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$

Relazione: $\alpha\beta = \beta\alpha$ $(\Rightarrow \alpha^{-1}\beta = \beta\alpha^{-1}, \ \beta^{-1}\alpha = \alpha\beta^{-1})$

quindi posso mettere davanti tutti gli α e poi i β

Esempio: toro a 2 buchi

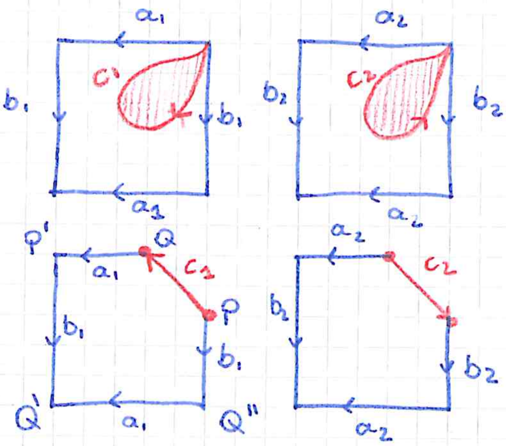


Si può identificare alla somma connessa di due tori T_1, T_2:

- taglio un disco aperto da T_1 e T_2
- incollo le superfici restanti identificando i bordi ($\cong S^1$) dei due dischi tagliati

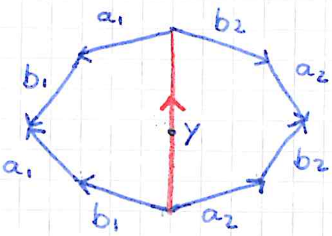
(Si dimostra che scegliendo dischi aperti diversi ottengo spazi omeomorfi)

Guardando T_1 e T_2 come quadrati con bordi identificati



P, Q, P', Q' e Q'' verranno tutti identificati

$\downarrow$ identificando c_1 e c_2



Usando lo stesso argomento del toro classico

$U = T_1 \# T_2 \setminus \{y\}$ $\quad V =$ immagine dell'interno dell'ottagono

somma connessa

$U \underset{\text{omot.}}{\sim}$ bouquet di 4 cerchi

V semplicemente connesso

$U \cap V \underset{\text{omeom.}}{\cong} D^2 \setminus \{0\}$

$\pi_1(U \cap V, x_1) \cong \mathbb{Z}$ generato da $\vec{a}_1 \vec{b}_1 \vec{a}_1^{-1} \vec{b}_1^{-1} \vec{a}_2 \vec{b}_2 \vec{a}_2^{-1} \vec{b}_2^{-1}$

In conclusione: $\pi_1(T_1 \# T_2) \cong \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdot [\alpha_2, \beta_2] \rangle$

GENERALIZZAZIONE: toro con g buchi

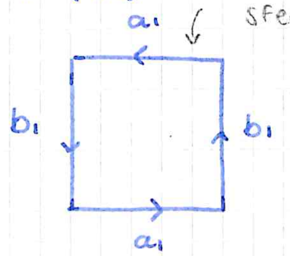
$= T_1 \# \dots \# T_g$ $\quad T_i$ tori

Viene rappresentato da un $4g$-agono con lati identificati

$\pi_1(T_1 \# \dots \# T_g) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_1,\beta_1]\cdot \dots \cdot [\alpha_g, \beta_g] \rangle$

Esempio:

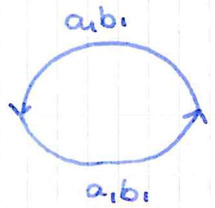
$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ emisfero nord della sfera



Argomento simile al caso del toro

Se $\alpha \leftrightarrow a_1 b_1$

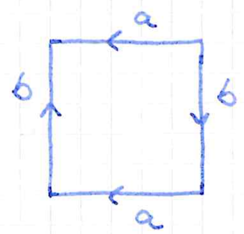
$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \langle \alpha \mid \alpha \cdot \alpha = 1 \rangle = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$



Generalizzazione: $\underbrace{(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))_1 \# \dots \# (\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))_g}_{= X}$ → somma connessa di g piani proiettivi

$\pi_1(X) \cong \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2 = 1 \rangle$

NB:



⟶ Bottiglia di Klein (K)

Non è un caso nuovo:

$K \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (esercizio)

Def. Una <u>superficie topologica</u> X è uno sp. di Hausdorff connesso che ammette un ricoprimento $\{U_i \mid i \in I\}$ di aperti U_i omeomorfi a D^2.

TEOREMA di classificazione

Ogni superficie topologica compatta è omeomorfa a una delle seguenti:

- S^2
- $T_1 \# \dots \# T_g$ T_i tori
- $(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))_1 \# \dots \# (\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))_g$

COROLLARIO: ogni sup. topologica compatta semplicemente connessa è omeomorfa a S^2

Congettura di Poincaré / teorema di Perelman

Ogni 3-varietà compatta semplicemente connessa è omeomorfa a S^3

n-varietà $\overset{def.}{=}$ sp. di Hausdorff connesso che ammette un ricoprimento di aperti $\cong B^n$ (palla n-dimensionale aperta)

TEOREMA (Fredman per $n=4$, Smale per $n \geq 5$)

Ogni n-varietà compatta omotopicamente equivalente a S^n

è omeomorfa a S^n.

31/03/2025
Stamwely

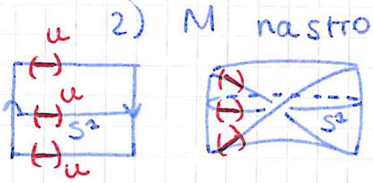
Da qui in avanti tutti gli spazi saranno localmente connessi per archi
(ogni punto ammette un SFI aperti connessi per archi)

Def. Un <u>rivestimento</u> dello spazio X è un'applicazione continua $p: Y \to X$ che soddisfa: $\forall x \in X$ ammette un intorno aperto U t.c. $p^{-1}(U) = \bigsqcup U_i$ e $p|_{U_i}: U_i \to U$ è un omeomorfismo

NB! Se p è un rivestimento allora p è un'<u>applicazione aperta</u> (tutti gli omeomorfismi locali sono mappe aperte)
p è anche un <u>omeomorfismo locale</u>, i.e.: $\forall y \in Y$ ammette un intorno aperto U_y | $p|_{U_y} \to p(U_y)$ è un omeomorfismo e $p(U_y)$ è aperto in X.

Esempio: 1) Rivestimento banale (cioè dotato della topologia discreta)
F sp. top. discreto, $Y = X \times F$
$p_1: X \times F \to X$ (proiezione) è un rivestimento
(omo perché $X \times F = \bigsqcup_{i \in F} X$)

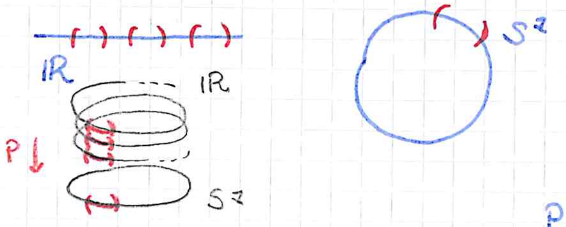
2) M nastro di Moebius, ∂M bordo



$p: \partial M \to S^1$ proiezione sul cerchio "centrale"

Questo è un rivestimento, perché $\forall$ punto di S^1 $\forall$ intorno connesso U $p^{-1}(U) = U \sqcup U$
non è un rivestimento banale perché ∂M è connesso.
(nei rivestimenti banali lo spazio di partenza è sempre sconnesso perché uno dei due fattori del prodotto ha la topologia discreta)

3) $\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$
$t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ è un rivestimento



In questo caso la fibra di ogni punto è infinita.
Non è un rivestimento banale perché $\mathbb{R}$ è connesso

4) $n \geq 1$ intero
$p_n: S^1 \to S^1$
$(\cos t, \sin t) \mapsto (\cos nt, \sin nt)$ è un rivestimento con
$|p_n^{-1}(x)| = n \quad \forall x \in S^1$

5) $\mathbb{C}\setminus\{0\} \xrightarrow{p_n} \mathbb{C}\setminus\{0\}$ è un rivestimento
$z \mapsto z^n$

l'esempio 4) è la restrizione a $\{|z|=1\}$

MA $p_n: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ NON è un rivestimento (ramificazione a 0)
$z \mapsto z^n$

Operazioni sui rivestimenti

1) Se $p: Y \to X$ è un rivestimento, $U \subset X$ aperto, $p|_{p^{-1}(U)}: p^{-1}(U) \to U$ è un rivestimento

2) $p_1: Y_1 \to X_1$, $p_2: Y_2 \to X_2$ rivestimenti $\Rightarrow (p_1, p_2): Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ è un rivestimento
(Ad esempio: $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ (toro) costruito da quello sopra è un rivestimento)

3) Se X è connesso, $Y \xrightarrow{p} X$ è un rivestimento e $Z \subset Y$ è una componente connessa di $Y \Rightarrow p|_Z: Z \to X$ è un rivestimento di X

Stiamo usando X e Y loc. connessi

$x \in p(Z)$ $\exists\, U \subset p(Z)$ intorno connesso di $x \mid p^{-1}(U) = \bigsqcup U_i$ ($U_i \cong U$)
aperto in quanto immagine di un aperto

Ogni U_i è connesso $\Rightarrow U_i \subset Z$ oppure $U_i \cap Z = \emptyset$

Quindi $p|_Z: Z \to p(Z)$ è un rivestimento

Devo ancora vedere $p(Z) = X$. $p(Z) \subset X$ è aperto ma anche $X \setminus p(Z)$ è aperto, infatti $x' \in X \setminus p(Z) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ un intorno aperto connesso di x', che chiamo U', $\mid p^{-1}(U') = \bigsqcup U_i'$

$U_i' \cap Z = \emptyset \Rightarrow U' \subset X \setminus p(Z)$ → che quindi è aperto in quanto intorno di ogni suo punto

$X = p(Z) \cup X \setminus p(Z) \Rightarrow p(Z) = X$ perché X è connesso

(Remainder: negli spazi localmente connessi le componenti connesse sono anche aperte)

COROLLARIO Se X è connesso, $Y \xrightarrow{p} X$ rivestimento
$\Rightarrow Y = \bigsqcup Y_i$ $\quad p|_{Y_i}: Y_i \to X$ riv. connessi.

(Un rivestimento è connesso se lo spazio di partenza è connesso)

Def. Siano $p_i: Y_i \to X$ $i = 1,2$ rivestimenti

riv. connesso $\Rightarrow$ non banale

Un morfismo di rivestimenti è un'applicazione continua $\varphi: Y_1 \to Y_2$ t.c. $p_2 \circ \varphi = p_1$

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ Y_2 \arrow[r, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

φ è un isomorfismo se $\exists\, \psi: Y_2 \to Y_1$ morfismo di rivestimenti $\mid \psi \circ \varphi = id_{Y_1}$ $\quad \varphi \circ \psi = id_{Y_2}$

Proposizione: $p: Y \to X$ applicazione continua surgettiva.
p è un rivestimento $\Leftrightarrow \forall x \in X$ c'è un intorno aperto U di x t.c. $p|_{p^{-1}(U)}: p^{-1}(U) \to U$ è isomorfo a un rivestimento banale

DIM: ($\Leftarrow$) ✓

($\Rightarrow$) Se U è tale che $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ $\quad U_i \cong U$

Un isomorfismo tra $p^{-1}(U)$ e $U \times I$ (I con top. discreta)

è dato da $y \mapsto (p(y), i)$ dove $y \in U_i$ $\square$

<u>COROLLARIO</u>: se X è connesso, $p: Y \to X$ rivestimento

$\Rightarrow$ le fibre $p^{-1}(x)$ ($x \in X$) hanno tutte la stessa cardinalità

DIM: $\forall \alpha$ $\quad \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = \alpha\}$ è aperto in X

$X = \bigsqcup X_\alpha$ ma X è connesso $\Rightarrow \exists \alpha \mid X = X_\alpha$ $\square$

Proposizione $G \circlearrowright Y$ propriamente discontinua (p.d.)

$\Rightarrow p_G: Y \to Y/G$ è un rivestimento

DIM: p_G surgettiva e se U è un intorno t.c. $g.U$

$\forall g \in G$ sono disgiunti

(azione p.d $\Rightarrow$
$\Rightarrow g_1.U \cap g_2.U \neq \emptyset$
SSE $g_1 = g_2$)

$$p_G^{-1}(p_G(U)) = \bigsqcup_{g\in G} g.U$$ $\square$

Esempi: 1) Facciamo agire $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ tramite $\underset{\in\mathbb{Z}}{(u}, \underset{\in\mathbb{R}}{x)} \mapsto x+u$ p.d.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$

Questo è il rivestimento $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

2) Il rivestimento $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ si può anche ritrovare come $(u_1, u_2)\cdot(x_1, x_2) := (u_1 + x_1, u_2 + x_2)$

3) Il rivestimento $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si può identificare
$z \mapsto z^n$

con $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$

$\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}/\mu_n$

e se $\omega \in \mu_n$, $(\omega, t) \mapsto \omega z$

4) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

Facciamo agire $\underset{\{1,\tau\}}{\mathbb{Z}/(2)}$ su S^n tramite $x \xmapsto{\tau} -x$

questa azione è p.d e $S^n/_{\mathbb{Z}/(2)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

Quindi $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un rivestimento e le fibre hanno cardinalità 2.

5) G gruppo che dotiamo della topologia discreta

C'è un'azione naturale di G su $G \times X$ (X sp. top.)

se $g \in G$ $\quad (g', x) \in G \times X$ $\quad g(g', x) = (gg', x)$ è p.d.

$(G\times X)/_G = X$ si ottiene il riv. banale $G \times X \to X$

se $H \trianglelefteq G$ $\quad (G\times X)/_H = (G/_H) \times X$ e abbiamo due riv. banali

$G \times X \to (G/H) \times X \to X$ (questo è l'unico esempio su spazi non connessi)

01/04/2025
Szamuely

Def. Un <u>automorfismo di un rivestimento</u> $p: Y \to X$ è un' isomorfismo
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & \circlearrowleft & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
di p con sé stesso

<u>Gli automorfismi di $p: Y \to X$ formano un gruppo</u>

<u>$\mathrm{Aut}(Y|X)$</u>

Se G agisce in modo p.d. su Y, abbiamo il rivestimento

$p_G : Y \to Y/G$

$\exists$ omomorfismo $G \to \mathrm{Aut}(Y|(Y/G))$ dato da $g \mapsto \varphi_g$

dove $\varphi_g \in \mathrm{Aut}(Y|Y/G)$ e manda $y \in Y$ in $g \cdot y$

Questo morfismo è iniettivo

Proposizione Se Y è connesso, l'omomorfismo $G \to \mathrm{Aut}(Y|(Y/G))$ è un isomorfismo

<u>LEMMA</u>: se $Y \to X$ è un rivestimento connesso e $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y|X)$ è t.c. $\exists\, y \in Y \mid \varphi(y) = y \Rightarrow \varphi = id_Y$

φ è un sollevamento
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
che in un pt. coincide con $id_Y \Rightarrow$ per unicità del sollevamento vale che $\varphi = id_Y$

LEMMA $\Rightarrow$ PROP: dobbiamo vedere che se $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y|(Y/G))$

$\Rightarrow \exists\, g \in G \mid \varphi = \varphi_g$ (mi manca solo la suriettività)

Sia $y \in Y$. Siccome $p_G(y) = p_G(\varphi(y))$ e le fibre di p_G sono le G-orbite su Y, $\exists\, g \in G \mid \varphi(y) = g \cdot y$

$\Rightarrow \varphi_g^{-1} \circ \varphi$ ammette $y \in Y$ come pt. fisso $\xrightarrow{\text{lemma}} \varphi_g^{-1} \circ \varphi = id$

$\varphi_g = \varphi$ $\square$

DIM. LEMMA: risulta dalla proposizione più generale:

Proposizione: sia $p: Y \to X$ rivestimento, Z sp. connesso

$f, g : Z \rightrightarrows Y$ mappe continue t.c. $p \circ f = p \circ g$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr] & Y \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Se $\exists\, z \in Z \mid f(z) = g(z) \Rightarrow f = g$

(Prop $\Rightarrow$ Lemma: $Z = Y$, $f = \varphi$, $g = id_Y$)

DIM: Sia $t \in Z$ t.c. $f(t) = g(t)$ $x := p(f(t)) = p(g(t))$

Sia $U \ni x$ un intorno connesso t.c. $p^{-1}(U) = \bigsqcup U_i$

$p|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\sim} U$ (siamo sempre nell' ip. di locale conness.)

Sia U_i la componente che contiene $f(t) = g(t)$

Sia $V \ni z$ un intorno aperto di t t.c. $f(V) \subset U_i$, $g(V) \subset U_i$.

Ma allora $\forall\, t_0 \in V$ $f(t_0) = g(t_0)$
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[dr] & U_i \arrow[d, "\wr"] \\ & U \end{tikzcd}$$

($u_i \xrightarrow{\sim} u$ bigezione $\Rightarrow f(z_0) = g(z_0)$ siccome $p(f(z_0)) = p(g(z_0))$)

Quindi $S := \{z \in Z \mid f(z) = g(z)\} \subset Z$ è aperto

Con lo stesso argomento $\Rightarrow S' = \{z' \in Z \mid f(z) \neq g(z)\}$ è aperto

(se $f(z') \neq g(z')$ $\quad x' = p(g(z')) = p(f(z'))$)

$u \ni x'$ come prima: $\exists\, i \neq j \mid f(z') \in u_i,\ g(z') \in u_j$

Ma allora $\exists\, V'$ intorno di z': $f(V') \subset u_i$, $g(V') \subset u_j$

Ma $Z = S \sqcup S'$ e Z è connesso $\Rightarrow Z = S$ e $S' = \emptyset$ $\square$

Proposizione Se $Y \xrightarrow{p} X$ è un rivestimento connesso, l'azione di $\mathrm{Aut}(Y|X)$ su Y è p.d.

↳ "reciproco" della proposizione precedente

(se $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y|X)$, $y \in Y$ $\quad (\varphi, y) \mapsto \varphi(y)$)

DIM.: $y \in Y$, $x := p(y)$, $u \ni x$ aperto connesso t.c. $p^{-1}(u) = \bigsqcup u_i$ come nella def.

Se $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y|X)$ e i è t.c. $y \in u_i \Rightarrow \exists\, j \mid \varphi(u_i) = u_j$.

Se $\varphi(y) \neq y \Rightarrow u_i \neq u_j$

$\Rightarrow u_i \cap \varphi(u_i) = \emptyset$. Se $\varphi_1 \neq \varphi_2$ sono automorfismi di $Y|X$ $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}(Y|X)$

applicando l'argomento con $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ e id

$\Rightarrow \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(u_i) \neq u_i \Rightarrow \varphi_1(u_i) \neq \varphi_2(u_i)$ $\square$

Dalla prop. $\exists$ fattorizzazione di p:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & Y/\mathrm{Aut}(Y|X) \arrow[r, "\bar{p}"] & X \end{tikzcd}$$

$y \overset{\pi}{\longmapsto} [y] \overset{\bar{p}}{\longmapsto} p(y)$

↳ continua

π è la proiezione a quoziente rispetto all'azione di $\mathrm{Aut}(Y|X)$ su Y che abbiamo appena considerato

Def. $p: Y \to X$ è un <u>rivestimento di Galois</u> se Y è connesso e $\bar{p}$ sopra è un'omeomorfismo.

In particolare: $p_G: Y \to Y/G$ è di Galois

Proposizione $Y \xrightarrow{p} X$ riv. connesso. p è di Galois SSE $\exists\, x \in X \mid$ l'azione di $\mathrm{Aut}(Y|X)$ su $p^{-1}(x)$ è transitiva

(l'azione di $\mathrm{Aut}(Y|X)$ su $p^{-1}(x)$: se $y \in p^{-1}(x)$ $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y|X)$

$\Rightarrow \varphi(y) \in p^{-1}(x)$. L'azione è transitiva $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall\, y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$

$\exists\, \varphi \in \mathrm{Aut}(Y|X) \mid \varphi(y_1) = y_2$)

DIM: ($\Rightarrow$) $Y/\mathrm{Aut}(Y|X)$ Le fibre sono le orbite di $\mathrm{Aut}(Y|X)$

($\Leftarrow$) Guardiamo la fattorizzazione $Y \to Y/\mathrm{Aut}(Y|X) \xrightarrow{\bar{p}} X$

Si mostra: $\bar{p}: Y/\mathrm{Aut}(Y|X) \to X$ è un rivestimento

Ma anche $Y/\mathrm{Aut}(Y|X)$ è connesso e $|\bar{p}^{-1}(x)| = 1$

$\Rightarrow$ tutte le fibre di $\bar{p}$ hanno card. 1 $\Rightarrow \bar{p}$ è bigettivo. $\square$

Def. Il <u>grado</u> di un riv. connesso è la cardinalità delle sue fibre.

↳ ben def. per la prop. dell'altro giorno

TEOREMA: Sia $p: Y \to X$ un rivestimento di Galois e $G := \mathrm{Aut}(Y|X)$

$\forall H \leq G$ $\quad Y/H \to X$ è un rivestimento connesso ed è di Galois $\iff H \trianglelefteq G$ e in questo caso $\mathrm{Aut}(Y/H \,|\, X) \cong G/H$

Inoltre, se $Z \to X$ è un altro rivestimento connesso t.c. $\exists$ un morfismo di rivestimenti
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[dr] & Z \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow Y \to Z$ è un rivestimento di Galois con $\mathrm{Aut}(Y|Z) \leq G$

$Y \rightsquigarrow Y/H$ induce una bigezione tra

$$\{\text{sottogruppi } H \leq G\} \longleftrightarrow \left\{\text{riv. connessi } \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "gal"] \arrow[dr, "gal"'] & Z \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}\right\}$$

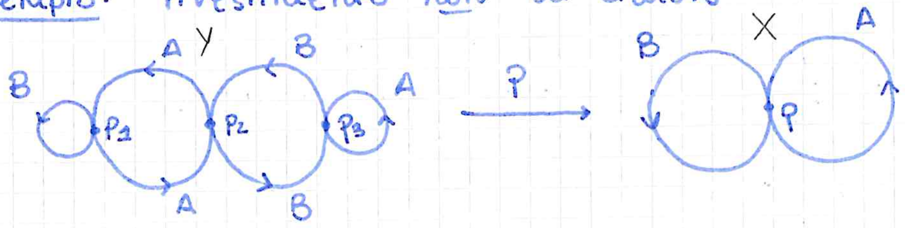
Esempio: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ rivestimento di Galois con $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}|S^1) = \mathbb{Z}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$

$n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$
$$\mathbb{R}/n\mathbb{Z} \cong S^1 \longrightarrow S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{riv. di Galois}$$
$$(\cos t, \sin t) \mapsto (\cos nt, \sin nt)$$

Esempio: rivestimento non di Galois



rivestimento connesso di grado 3 che non è di Galois

$\varphi \in \mathrm{Aut}(Y|X) \Rightarrow \varphi(p_2) = p_2 \Rightarrow \varphi = id_Y$

03/04/2025
Stamuely

RIVESTIMENTI SEMPLICEMENTE CONNESSI

Prop. $\hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ riv. semplicemente connesso e $p: Y \to X$ rivestimento

Allora $\exists$ morfismo di rivestimenti
$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$
e fissato $x_0 \in X$, $\hat{x} \in \pi^{-1}(x_0)$,

$y \in p^{-1}(x_0)$ e imponiamo $\varphi(\hat{x}) = y$, tale morfismo è unico

(Per questo motivo i riv. semplicemente connessi si chiamano anche rivestimenti universali)

LEMMA Sia $p: Y \to X$ un rivestimento e $x_0 \in X$, $y \in p^{-1}(x_0)$.

(i) Se f è un cammino con $f(0) = x_0$ $\exists!$ cammino $\hat{f}: I \to Y$ con $p \circ \hat{f} = f$ e $\hat{f}(0) = y$

↳ SOLLEVAMENTO di f

(ii) Se $f_1 \sim f_2$ sono cammini come in (i)

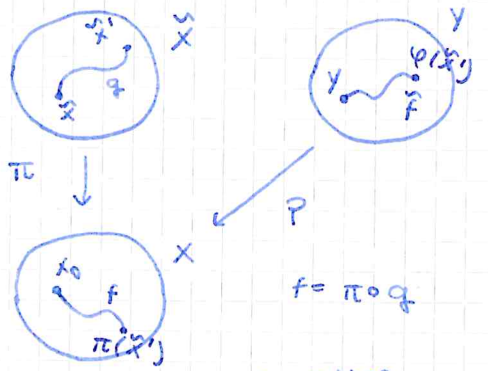
$\Rightarrow \hat{f}_1(1) = \hat{f}_2(1)$ e $\hat{f}_1 \sim \hat{f}_2$

Questo caso generalitta quello già visto del rivestimento $\mathbb{R} \to S^1$.
La dimostrazione è identica.

DIM. (Proposizione)

Sia $\hat{x}' \in \hat{X}$, vogliamo definire $\varphi(\hat{x}')$

$\hat{X}$ semplicemente connesso (per cui è cpa) $\Rightarrow \exists$ cammino $g: I \to \hat{X}$, $g(0) = \hat{x}$, $g(1) = \hat{x}'$



Sia $f = \pi \circ g$

Dal lemma:

$\exists!\ \hat{f}: I \to Y$ con $p \circ \hat{f} = f$ e $\hat{f}(0) = y$. Poniamo $\varphi(\hat{x}') := \hat{f}(1)$

$\varphi(\hat{x}')$ non dipende dalla scelta del cammino g, perché se g' è un altro cammino da $\hat{x}$ a $\hat{x}'$ allora $g \sim g'$ perché $\hat{X}$ è semplicemente connesso $(\pi_1(\hat{X}) = \{e\}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{f}{\underset{\parallel}{\pi \circ g}} \sim \underset{f'}{\underset{\parallel}{\pi \circ g'}} \Rightarrow \hat{f}(1) = \hat{f}'(1)$$

lemma (ii)

- Unicità: risulta da un lemma precedente

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd} \qquad f(z) = g(z) \Rightarrow f = g$$

Se ci fossero due morfismi diversi dovrebbero coincidere su $\hat{X}$

- Continuità di φ: sia $U \ni \varphi(\hat{x}')$ un intorno aperto t.c. $p|_U : U \xrightarrow{\sim} p(U)$ (tale U esiste perché $p: Y \to X$ è un rivestimento). Inoltre $p(U)$ è aperto. $p(U) \subset X$

Sia $U' \subset p(U)$ un intorno aperto di $\pi(\hat{x}') = (p \circ \varphi)(\hat{x}')$ tale che $\pi|_{\pi^{-1}(U')} : \pi^{-1}(U') \to U'$ è un riv. banale.

Sia V' la componente di $\hat{x}'$ in $\pi^{-1}(U')$

sia V " " di $\varphi(\hat{x}')$ in $p^{-1}(\pi(V'))$ $\Rightarrow V' \xrightarrow[\pi]{\sim} \pi(V') \xleftarrow[p]{\sim} V$

$\Rightarrow \varphi(V') = V \subset U$ $\square$

COROLLARIO 1 Se $\varphi: \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ è un morfismo di rivestimenti

$$\begin{tikzcd} \hat{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & \hat{X}_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

semplicemente connessi, allora φ è un isomorfismo di rivestimenti

DIM. Fissiamo $x_0 \in X$, $\hat{x}_1 \in \pi_1^{-1}(x_0)$, $\hat{x}_2 := \varphi(\hat{x}_1) \in \pi_2^{-1}(x_0)$

Applichiamo la proposizione con $\hat{X} = \hat{X}_2$ e $Y = \hat{X}_1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists!\ \psi: \begin{tikzcd} \hat{X}_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & \hat{X}_1 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd} \text{ tale che } \psi(\hat{x}_2) = \hat{x}_1.$$

$\varphi \circ \psi : \hat{X}_2 \to \hat{X}_2$ manda $\hat{x}_2$ su $\hat{x}_2$ $\Rightarrow$ $\varphi \circ \psi = id_{\hat{X}_2}$ per unicità

In modo simile $\psi \circ \varphi = id_{\hat{X}_1}$ $\square$

COROLLARIO 2: Se
$$\begin{tikzcd} \hat{X}_1 \arrow[dr] & & \hat{X}_2 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$
sono due riv. semplicemente connessi di X, allora sono isomorfi

DIM: Prop. $\Rightarrow \exists$
$$\begin{tikzcd} \hat{X}_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr] & & \hat{X}_2 \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Cor 1 $\Rightarrow$ φ è un isom. $\square$

COROLLARIO 3: Ogni rivestimento di uno spazio semplicemente connesso è banale.

(Se X è uno sp. loc. connesso per archi $\Rightarrow$ le componenti connesse per archi sono aperte, quindi se X è connesso allora è anche cpa)

DIM: basta mostrare il corollario per $Y \to \hat{X}$ riv. connesso, $\hat{X}$ semplicemente connesso

(In questo caso p induce un omeomorfismo $Y \xrightarrow{\sim} \hat{X}$)

Dalla prop $\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[rr, dashed, "\exists \varphi"] \arrow[dr, "id"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & \hat{X} & \end{tikzcd}$$

i.e. $\exists \varphi : \hat{X} \to Y \mid$ $\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "id"'] & Y \arrow[r, "p"] & \hat{X} \end{tikzcd}$ (il diagramma commuta)

Se dimostro $\varphi(\hat{X}) = Y$ $\Rightarrow$ φ induce un omeomorfismo tra $\hat{X}$ e Y. Supponiamo: $\exists y \in Y \setminus \varphi(\hat{X})$. Sia $\hat{x} \in \hat{X}$, $y' = \varphi(\hat{x}) \in \varphi(\hat{X}) \subset Y$

Dato che Y è cpa $\Rightarrow \exists q : I \to Y \mid q(0) = y' \wedge q(1) = y$. Sia $f = p \circ q$.

Ma f si solleva anche a un cammino $\varphi \circ f : I \to \varphi(X)$ ↯ $\square$

TEOREMA: un rivestimento semplicemente connesso $\hat{X} \to X$ è di Galois e $Aut(\hat{X} \mid X) \cong \pi_1(X, x_0)$ $(\forall x_0 \in X)$

ESEMPI

1) $\mathbb{R} \to S^1$ è un riv. semplicemente connesso con $Aut(\mathbb{R} \mid S^1) \cong \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

2) $\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ è un riv. sempl. connesso con gruppo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

3) $S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è un riv. semplicemente connesso con gruppo $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ $\Rightarrow$ $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

Prossima puntata: ogni X "abbastanta bello" ammette un riv. $\hat{X} \to X$ semplicemente connesso.

Ma allora teo + teoria di Galois danno una classificazione dei rivestimenti di X:

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \exists H \leq \underset{\pi_1(X)}{\underset{\parallel}{Aut(\hat{X}|X)}} \text{ t.c. } Y \cong \hat{X}/H$$

DIM. Si definisce una mappa $\pi_1(X, x_0) \to Aut(\hat{X}|X)$ così:

$x_0 \in X$ fissato.

Fissiamo $\hat{x} \in \pi^{-1}(x_0)$

Se $\gamma : I \to X$ rappresenta $q \in \pi_1(X, x_0)$

sia $\hat{x}_\gamma \in \pi^{-1}(x_0)$ definito tramite $\hat{\gamma}(1) = \hat{x}_\gamma$, dove

$\hat{\gamma} : I \to \hat{X}$ è l'unico sollevamento di γ che parte da $\hat{x}$.

Prop. $\Rightarrow$ $\exists! \, \varphi_\gamma : \hat{X} \to \hat{X}$ che manda $\hat{x}$ su $\hat{x}_\gamma$. $\varphi_\gamma \in Aut(\hat{X}|X)$

(dal cor. 1)

Inoltre, φ_γ dipende solo dalla classe $q \in \pi_1(X, x_0)$ di γ in $\pi_1(X, x_0)$ (lemma 2)

$$\Phi(q) := \varphi_\gamma$$

Si verifica che Φ è un omo. di gruppi

- Iniettività di Φ: se $\Phi(q) = id$, $\varphi_\gamma(\hat{x}) = \hat{x}$

  $\Rightarrow$ γ si solleva a $\hat{\gamma}$ con $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(1) = \hat{x}$

  $\pi_1(\hat{X}) = 1 \Rightarrow \hat{\gamma} \sim$ cammino costante $I \to \{\hat{x}\}$

  $\Rightarrow \underset{\pi \circ \hat{q}}{\overset{\parallel}{\gamma}} \sim$ cammino costante $I \to \{x_0\}$

- Suriettività: $\varphi \in Aut(\hat{X}|X)$, $\varphi(\hat{x}) \in \pi^{-1}(x_0)$

  $\hat{X}$ è connesso per archi $\Rightarrow \exists$ cammino $I \xrightarrow{q} \hat{X}$ t.c.

  $q(0) = \hat{x}$, $q(1) = \varphi(\hat{x})$

  $\gamma := \pi \circ q : I \to X$ cammino con $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$

  $\Rightarrow \varphi_\gamma \in Aut(\hat{X}|X)$ che manda $\hat{x}$ su $\varphi(\hat{x}) \Rightarrow \varphi = \varphi_\gamma$ per unicità

- $\hat{X}|X$ Galois: basta vedere che $Aut(\hat{X}|X)$ agisce transitivamente su $\pi^{-1}(x_0)$. Sia $\hat{x}' \in \pi^{-1}(x_0) \Rightarrow \exists q$ cammino da $\hat{x}$ a $\hat{x}'$ $\Rightarrow \gamma := \pi \circ q : I \to X$, allora $\varphi_\gamma(\hat{x}) = \hat{x}'$ $\square$

Recap:

$\hat{X} \to X$ riv. semplicemente connesso $\pi_1(\hat{X}) = 1$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Aut}(\hat{X}|X) \cong \pi_1(X, x_0)$ e $\hat{X} \to X$ è di Galois

Se $Y \xrightarrow{p} X$ è un altro rivestimento $\Rightarrow \exists$ un morfismo di riv.

t.c. è unico se fissiamo $x_0 \in X$, $\hat{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$
$y \in p^{-1}(x_0)$

$$\begin{tikzcd} \hat{x}_0 \in \hat{X} \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \ni y \arrow[dl, "p"] \\ & X \ni x_0 & \end{tikzcd}$$

Def. X è <u>localmente semplicemente connesso</u> se $\forall x \in X$ ammette un SFI di intorni aperti semplicemente connessi.

TEOREMA se X è connesso e localmente semplicemente connesso $\Rightarrow \exists \hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ riv. semplicemente connesso

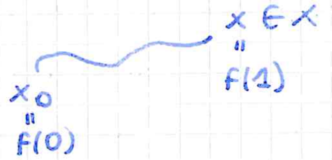
OSS: se X ammette un ricoprimento di aperti $\cong$ ad aperti di $\mathbb{R}^n$ allora è localmente semplicemente connesso

DIM: Fissiamo $x_0 \in X$ (la costruzione dipende dal pt. base, con un pt. $\neq$ si ottiene un riv. $\neq$ ma isomorfo)

$\hat{X} = \{$cammini $f: I \to X$ con $f(0) = x_0\}$ / omotopia

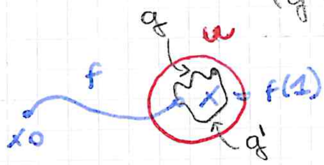
Scriverò $[f]$ per la classe di omotopia di $\hat{x}$ → punto di $\hat{X}$

Si definisce $\pi: \hat{X} \to X$ $\quad \pi([f]) = f(1)$ $\quad$ (è ben def.)



<u>Topologia di $\hat{X}$:</u>

(g ~ g' in quanto
u sempl. connesso)



Sia $\hat{x} = [f] \in \hat{X}$

Sia u un intorno aperto semplicemente connesso di $x = f(1)$

$u_{\hat{x}} = \{[f \cdot g] \mid g: I \to u$ cammino con $g(0) = x = f(1)\} \subset \hat{X}$

aperto $\quad$ non dipende dalla scelta di g
ma solo da $g(1)$

Gli $u_{\hat{x}}$ formano una base di intorni aperti di $\hat{x}$

(se V è un'altro intorno di x con $\pi_1(V) = 1 \Rightarrow \exists W \subset u \cap V$
$x \in W$, $\pi_1(W) = 1$
$\Rightarrow W_{\hat{x}} \subset u_{\hat{x}} \cap V_{\hat{x}}$)

<u>$\pi: \hat{X} \to X$ è un rivestimento:</u>

Sia $U \ni x$ semplicemente connesso.

$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\hat{x} \in \pi^{-1}(x)} U_{\hat{x}}$ rispetta le proprietà volute

$U_{\hat{x}} \xrightarrow{\sim} U$

inoltre la proiezione è continua (ogni aperto di X è unione di aperti semplicemente connessi e la controimmagine di questi è aperta)

$\hat{X}$ è cpa: sia $\hat{x} = [f] \in \hat{X}$. Dimostriamo: $\exists \hat{f} : I \to \hat{X}$ t.c.

$\hat{f}(0) = \hat{x}_0$, $\hat{f}(1) = \hat{x}$

$\overset{\shortparallel}{[\{\text{cammino costante } I \to \{x_0\}\}]}$

Se $s \in I$ $\hat{f}(s) = [t \mapsto f(st)]$

La continuità di $\hat{f}$ risulta dalla continuità di f.

Ne risulta anche che $\hat{f}$ è l'unico sollevamento di f a con $\hat{f}(0) = \hat{x}_0$ (verifica $\hat{f}(1) = \hat{x} = [f]$)

$\hat{X}$ è semplicemente connesso: sia $\hat{x}_0 := [\text{cammino costante } I \to \{x_0\}]$

Sia $\hat{\gamma} : I \to \hat{X}$ cammino chiuso con $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(1) = \hat{x}_0$

$\Rightarrow \gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$ — " — $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$

$\hat{\gamma}$ è l'unico sollevamento di γ a $\hat{X}$ con pt. di partenza $\hat{x}_0$.

Per l'argomento precedente, $\hat{\gamma}(1) = [\gamma]$ (applicato con $f = \gamma$)

Ma $\hat{\gamma}(1) = \hat{x}_0 \Rightarrow \gamma \sim \{\text{cammino cost. } I \to x_0\}$. Ma allora

$\hat{\gamma} \sim$ cammino costante $I \to \{\hat{x}_0\}$ $\square$

Dai teoremi precedenti: se X è localmente semplicemente connesso $\Rightarrow \exists \hat{X} \xrightarrow{\pi} X$ con $\pi_1(X, x_0) \cong Aut(\hat{X} | X)$

$\to \left\{ \text{rivestimenti connessi } \begin{matrix} Y \\ \downarrow \\ X \end{matrix} \right\} \leftrightarrow \{\text{sottogruppi di } \pi_1(X, x_0)\}$

in generale è difficile trovare una descrizione concreta di $\hat{X}$

ES. Se $X =$ toro con $g > 1$ buchi si può dimostrare:

$\hat{X} \cong D^2$ (disco aperto)

$\left\{ \text{riv. } \begin{matrix} Y \\ \downarrow \\ X \end{matrix} \right\} \leftrightarrow \{\text{sottogruppi di automorfismi di } D\}$

Teoria dell'uniformizzazione (Poincaré, Koebe)

Ora supponiamo $\exists \hat{X} \to X$ rivestimento semplicemente connesso, fissiamo $x_0 \in X$

COSTRUZIONE 1: Sia $\rho : \pi_1(X, x_0) \to G$ omo surgettivo

$N := \ker\rho \leadsto N < \underset{\underset{\pi_1(X, x_0)}{\shortparallel}}{Aut(\hat{X} | X)}$ agisce su $\hat{X}$ in modo p.d.

221 $Y := \hat{X}/N \xrightarrow{p} X$ rivestimento. Inoltre, $p : Y \to X$ è di Galois (da un es. delle schede)

con gruppo G perché se $u \subset X$ è tale che

$\pi^{-1}(u) \cong u \times \underbrace{\pi_1(X, x_0)}_{\text{considerato solo come insieme con la top. discreta}} \Rightarrow p^{-1}(u) \cong u \times (\underbrace{\pi_1(X,x_0)/N}_{G \text{ (perché } \rho \text{ è surg.)}})$

COSTRUZIONE 2

Sia $p: Y \to X$ un riv. di Galois di gruppo G

$$\Rightarrow \exists \quad \begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowleft & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

inoltre tale φ è unico se fissiamo $x_0 \in X$, $\hat{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, $y := \varphi(\hat{x}_0) \in p^{-1}(x_0)$

Definiamo un omomorfismo $\rho : \pi_1(X, x_0) \to G$ così:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x_0) & \to & G \\ \wr & & \wr \\ Aut(\hat{X}/X) & & Aut(Y/X) \\ \psi & & g \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \hat{x}_0 & \hat{X} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dd, bend right=60, "\pi"'] & \hat{X} \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\pi"] & \psi(\hat{x}_0) \\ y & Y \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "p"] & y_\psi \\ & X \arrow[r, "id"] & X & \end{tikzcd}$$

$\psi \in Aut(\hat{X}/X)$

$y_\psi := (\varphi \circ \psi)(\hat{x}_0) \in Y$

Si nota $p(y) = p(y_\psi) = x_0 \in X$

$\Rightarrow \exists g \in G$ t.c. $g(y) = y_\psi$

Tale g è unico (lemma)

(g fa commutare il quadrato superiore $\Rightarrow g$ " " " " inferiore, perché il rettangolo grande commuta)

$\varphi \circ \psi$ e $g \circ \varphi$ coincidono in $\hat{x}_0$ $\Rightarrow \varphi \circ \psi = g \circ \varphi$ (lemma)

ρ è surgettivo : nella prossima puntata

TEOREMA le costruzioni precedenti danno una corrispondenza

$\{\rho : \pi_1(X, x_0) \to G$, ρ surgettivo$\} \longleftrightarrow \{$riv. di Galois $Y \xrightarrow{p} X$ con gruppo G, $y \in p^{-1}(x_0)$ fisso$\}$ / isomorfismo

$\to$: $\hat{X}/\ker\rho$ dove $\hat{X}$ è il riv. semplicemente connesso di X

$\leftarrow$: $g \in Aut(Y/X)$ come nel grafico sopra

$\downarrow$ unico se $p^{-1}(x_0)$ fisso

La costruzione 1 è l'inversa della costruzione 2

08/04/2025

$\hookrightarrow$ Surgettività di $\rho : \psi \mapsto g$

Basta vedere che la mappa $\pi^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$ indotta da φ è surgettiva. Questo implica la suriettività di $\underset{\pi_1(X,x_0)}{\overset{\shortparallel}{Aut(\hat{X}/X)}} \to \underset{G}{\overset{\shortparallel}{Aut(Y/X)}}$

perché se $g \in G$, manda y su $g(y) \in p^{-1}(x_0)$

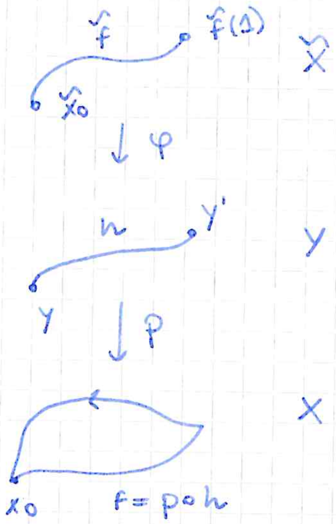
$\Rightarrow \exists \hat{x}_0' \in \pi^{-1}(x_0) : \varphi(\hat{x}_0') = g(y)$

$\exists!$ automorfismo $\psi : \hat{X} \to \hat{X}$ che manda $\hat{x}_0$ su $\hat{x}_0'$

che per la costruzione viene mandato su q

Suriettività di $\varphi|_{\pi^{-1}(x_0)} : \pi^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$

sia $y' \in p^{-1}(x_0)$ e sia $h: I \to Y$ un cammino tale che $h(0) = y$ e $h(1) = y'$, $f := p \circ h$



Allora h è l'unico sollevamento di f a Y che parte da y. Ma $\exists!$ sollevamento $\hat{f}: I \to \hat{X}$ che parte da $\hat{x}_0$. Ma $\varphi \circ \hat{f}: I \to Y$ deve essere h, in quanto h è l'unico sollevamento di f a Y che parte da y.

$\Rightarrow \varphi(\hat{f}(1)) = y'$

TEOREMA DI VAN KAMPEN

$X = X_1 \cup X_2$, X_1 e X_2 aperti cpa e $X_1 \cap X_2$ cpa. $x_0 \in X_1 \cap X_2$, G gruppo. Supponiamo che $\varphi_i : \pi_1(X_i, x_0) \to G$ sono omo che fanno commutare il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(X_1, x_0) \arrow[dr] \arrow[rr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, dashed, "\exists!"] & G \\
 & \pi_1(X_2, x_0) \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

DIM:

Supponiamo che X sia localmente semplicemente connesso e dimostriamo il teo. in questa ipotesi (Dim. di Grothendieck)

Supponiamo per ora che φ_1 e φ_2 siano surgettive

Dal teo. precedente

$$\varphi_i : \pi_1(X_i, x_0) \to G \quad \longleftrightarrow \quad \text{rivestimenti di Galois } \begin{array}{c} Y_i \\ p_i \downarrow \\ X_i \end{array} \text{ con gruppo } G$$

Inoltre $\exists!$ isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
p_1^{-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d] & p_2^{-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[dl] \\
X_1 \cap X_2 &
\end{tikzcd}$$

che è unico se fissiamo $y_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ $y_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ e imponiamo $\varphi(y_1) = y_2$

LEMMA: $Y_1 \xrightarrow{p_1} X_1$, $Y_2 \xrightarrow{p_2} X_2$ rivestimenti e φ isomorfismo di rivestimenti come sopra

$\Rightarrow \exists$ rivestimento $\begin{array}{c} Y \\ p \downarrow \\ X \end{array}$ tale che $p|_{p^{-1}(X_1)} = p_1 : Y_1 \to X$
$p|_{p^{-1}(X_2)} = p_2 : Y_2 \to X$

Inoltre, se $Y_i \to X$ sono di Galois

con gruppo G $\Rightarrow$ anche $Y \to X$ è di Galois con gruppo G.

DIM. (lemma)

Sia $Y = (Y_1 \sqcup Y_2)/_\sim$ dove $y_1 \sim y_2 \overset{def.}{\iff}$ y_1 e y_2 sono sopra $x_1 \cap x_2$ e $\varphi(y_1) = y_2$ $\hookrightarrow y_i \in p_i^{-1}(X_1 \cap X_2)$

Sia $p: Y \to X$ indotta da p_1 e p_2

$Y_1 \xrightarrow{\sim} p^{-1}(X_1)$, $Y_2 \xrightarrow{\sim} p^{-1}(X_2)$ e $p^{-1}(X_1), p^{-1}(X_2) \subset Y$ aperti

$\Rightarrow p$ è un rivestimento perché le restrizioni $p|_{p^{-1}(X_i)}$ lo sono

Y_1, Y_2 connessi $\Rightarrow Y$ connesso

Y_1, Y_2 di Galois $\Rightarrow Y$ di Galois (basta vedere la fibra di $x_0 \in X_1 \cap X_2$)

LEMMA $\Rightarrow$ TEO: biezione vista prima

$Y \to X \longleftrightarrow \pi_1(X, x_0) \to G$ che fa commutare il diagramma

Per estendere la dim. al caso φ_1 e φ_2 non suriettivi, bisogna estendere la corrispondenza

$$\{\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\rho} G\} \longleftrightarrow \{\text{rivestimenti } \begin{matrix} Y \\ \downarrow \\ X \end{matrix} G\}$$

ρ non necessariamente suriettivo.

COSTRUZIONE 1' Sia Π un gruppo, $\hat{X} \xrightarrow{\hat{\pi}} X$ un rivestimento di Galois con $\mathrm{Aut}(\hat{X}|X) \cong \Pi$, $\rho: \Pi \to G$ omo.

Voglio associare un rivestimento $Y_\rho \to X$ a ρ.

(Nell' applicazione $\pi_1(\hat{X}) = 1$ e $\Pi = \pi_1(X, x_0)$)

$\hat{X} \times G$
$\hookrightarrow$ considerato come spazio discreto

$\Pi \circlearrowleft \hat{X} \times G$ tramite $\pi(\hat{x}, g) = (\pi(\hat{x}), g\rho(\pi)^{-1})$ $\pi \in \Pi, g \in G, \hat{x} \in \hat{X}$

Questa è un'azione di G a sinistra che è p.d. perché l'azione di Π su $\hat{X}$ è p.d. e G è discreto. Quindi posso prendere $Y_\rho := (\hat{X} \times G)/\Pi$

Notiamo $\langle \hat{x}, g \rangle$ l'immagine di $(\hat{x}, g) \in \hat{X} \times G$ in Y_ρ.

Definiamo $p_\rho: Y_\rho \to X$ tramite $p_\rho(\langle \hat{x}, g \rangle) := \hat{\pi}(\hat{x})$.

(Si può verificare che questo è un rivestimento di X).

Casi estremi: 1) $\rho: \Pi \to G$ surgettivo

Allora $Y_\rho \cong \hat{X} | \mathrm{Ker}(\rho)$

2) $\rho: \Pi \to \{1\} \in G$

$Y_\rho := \hat{X} \times G / \Pi \cong \hat{X}/\Pi \times G = X \times G = \bigsqcup_{g \in G} X$ rivestimento banale

TEO Se X è connesso, $\hat{X} \to X$ riv. semplicemente connesso, $x_0 \in X$ $\Pi = \pi_1(X, x_0)$, la costruzione 1' precedente induce una corrispondenza 1:1

$\{p : \pi_1(X, x_0) \to G\} \longleftrightarrow \{$ rivestimenti $Y \to X$ con azione di G t.c. $Y/G \cong X\}/\cong$

ES 67 X grafo finito
$p: Y \to X$ rivestimento di grado finito

$\Rightarrow Y$ grafo finito

Soluzione: $X^0 \subset X$ vertici $Y^0 = p^{-1}(X^0)$

Se f è un arco tra x_0 e x_1 (due vertici)

Si può considerare come cammino $I \xrightarrow{f} X$ $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$

$\to$ si può sollevare a un cammino da $y_0 \in Y^0$ e $y' \in Y'$

$\forall y_0 \in p^{-1}(x_0)$ e $y_1 \in p^{-1}(x_1)$

ES 68 $Y \xrightarrow{p} X$ riv. connesso, $H \leqslant Aut(Y|X)$

$\to Y/H \to X$ è un rivestimento

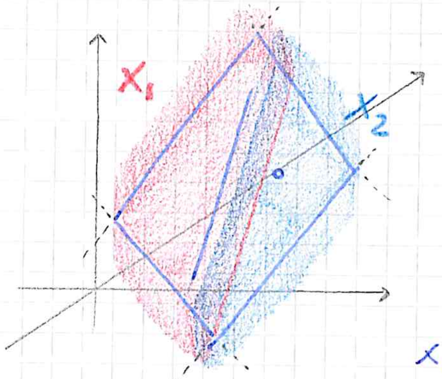
Se $U \subset X$ è t.c. $p^{-1}(U) = U \times F$

F discreto, H agisce anche su $F = p^{-1}(x_0)$

$p_H^{-1}(U) \cong U \times (F/H)$

ES. 63 $r =$ retta $\subset \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}^3$ $p \notin r$

$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (r \cup p)) = ?$



$X_1 \cap X_2$ contrattile

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (r \cup p)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Van Kampen}}}{\cong} \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$

X_2 è omotopicamente equivalente a S^2

$\pi_1(S^2) = 1 \Rightarrow \pi_1(X_2) = 1$

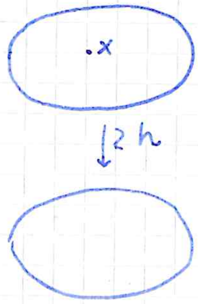
$X_1 \cong \underbrace{\overline{X}_2 \setminus \{pt.\}}_{\text{omotopicamente equivalente a } S^1} \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R} \setminus (r \cup p)) = \mathbb{Z}$

ES. 62 $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto
$V \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow U \not\cong V$

$(n > 2)$

Idea: supponiamo $\exists h: U \cong V$



$\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{\pi_1(W_2 \setminus \{h(x)\})}} \xrightarrow[\ id\ ]{} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{\pi_1(W_1 \setminus \{h(x)\})}}$

(continua sugli appunti di Tamassu elearning)