ANALISI COMPLESSA

14/04/2025
Szamuely

$\mathbb{C} = \{a+bi \quad a,b \in \mathbb{R}\}$ è un campo $\quad (i^2 = -1)$

$z = a+ib \implies \bar{z} = a - ib$

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$

$(z,w) \mapsto |z-w|$ definisce una metrica su $\mathbb{C}$

$\longrightarrow$ $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico e ha una topologia indotta dalla metrica. Come sp. topologico $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Sia u aperto connesso.

Def. Una funzione $u \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ è differenziabile in $z_0 \in u$ se esiste $f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ ($h \in \mathbb{C}$ e converge a 0 in norma)

Se f è differenziabile in ogni punto di u è detta OLOMORFA.

Esempio:
1) $f \in \mathbb{C}[z] \implies f$ olomorfo su $\mathbb{C}$
2) $f: z \mapsto \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con derivata $-\frac{1}{z^2}$
3) $z \mapsto \bar{z}$ non è differenziabile in nessun punto di $\mathbb{C}$

$$\frac{\overline{z_0+h} - \overline{z_0}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = \frac{\bar{h}\cdot h}{h^2} = \left(\frac{|h|}{h}\right)^2$$

numero di valore assoluto 1

$\frac{|h|}{h}$ può muoversi su $\{|z| = 1\}$ senza convergere

Fatti che si dimostrano come per le funzioni reali
* f differenziabile in $z_0 \implies f$ continua in un intorno di z_0
* f,g olomorfe $\implies f+g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ olomorfe con le stesse regole di derivazione.

$z_0 \in \mathbb{C} \qquad f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n \in \mathbb{C}$

Fatti: $\exists\, 0 \leq R \leq \infty$ (raggio di convergenza di f) tale che f converge assolutamente e uniformemente per $|z-z_0| < R$ e diverge per $|z-z_0| > R$

Inoltre, $$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \quad \text{(Hadamard)}$$

Dimostrazione come per $\mathbb{R}$

Prop. Se f converge per $|z-z_0| < R$ allora f è olomorfa in $|z-z_0| < R$. Inoltre $f' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ (e questa serie ha lo stesso raggio di convergenza)

DIM. La convergenza della serie per f'

risulta dalla formula di Hadamard.

Mostriamo che è la derivata. Possiamo supporre $z_0 = 0$.

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \quad (*)$$

Ricordiamo che $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots + y^{n-1})$

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} = (z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2} z + \ldots + z^{n-1} - n z^{n-1}$$

che converge a 0 se $h \to 0$

Ora fissiamo $|z| < r < R$ e supponiamo $|h| \leq r - |z|$

$\Rightarrow |z|, |z+h| \leq r$

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| \leq 2 n r^{n-1}$$ dalla scrittura di prima

$\Rightarrow |(*)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (2n r^{n-1}) < \infty$ perché $r < R$

Dunque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ |$ se $n > N$ $\sum_{n>N} |a_n| (2n r^{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$

D'altra parte, per $|h|$ piccolo, $\left| \sum_{n=2}^{N} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow |(*)| < \varepsilon$ □

Corollario: f è differenziabile ∞ volte per $|z - z_0| < R$ e la derivata i-esima è data dalla derivata formale della serie.

Inoltre, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ (Taylor)

Def. $f: U \to \mathbb{C}$ è ANALITICA in U se $\forall z_0 \in U \ \exists r_{z_0} > 0$ t.c. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subset U$ e una serie $\sum a_n z^n$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge per $|z - z_0| < r$ e il limite è $f(z)$

Analitica $\Rightarrow$ olomorfa

Prop. Sia $f := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ di raggio di convergenza $R > 0$.

Allora f è analitica nel disco $\{|z| < R\}$

DIM. Sia z_0 t.c. $|z_0| < R$. Dimostriamo che la serie di Taylor di f nel punto z_0 converge per $|z - z_0| < R - |z_0|$ e il suo limite è $f(z)$.

$$f^{i}(z_0) = \sum_{n=i}^{\infty} \overbrace{n(n-1)\cdots(n-i+1)}^{\frac{n!}{(n-i)!}} a_n z_0^{n-i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i+j)!}{j!} a_{i+j} z_0^{j}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} |f^{(i)}(z_0)| r^i \leq \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(i+j)!}{i!\, j!} |a_{i+j}| |z_0^j| r^i$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z_0| + r)^n < \infty \qquad r < R - |z_0|$$

Quindi $S := \sum_{i,j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} a_{i+j} z_0^j h^i$ converge assolutamente per

$|h| = r < R - |z_0|$

Ma allora $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 + h)^n$ e d'altra parte

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} h^i \underset{\text{Taylor}}{=} f(\underbrace{z_0 + h}_{z})$$

$\square$

Prop. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso, $z_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{C}$ analitica.

Sono equivalenti : (1) $f^{(i)}(z_0) = 0 \quad \forall i \geq 0$

(2) $f = 0$ in un intorno di z_0

(3) $f = 0$ su U

Quindi la conoscenza della serie di Taylor in z_0 determina f su tutto U

DIM. (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) banale

(1) $\Rightarrow$ (2) : la serie di Taylor converge in un intorno di z_0. Se i suoi coeff. sono 0 $\Rightarrow f = 0$ in questo intorno.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\quad S := \{z \in U \mid f(z) = 0$ in un intorno di $z\} \underset{\text{Prop. (2)}}{\neq} \emptyset$

S è aperto dalla definizione. Se dimostriamo che è anche chiuso allora abbiamo finito perché U è connesso.

Sia z' nella chiusura di S. $\exists (z_n) \subset S \quad z_n \to z'$.

$\Rightarrow \forall i \quad \underset{\substack{\| \\ 0 \\ (z_n \in S)}}{f^{(i)}(z_n)} \longrightarrow f^{(i)}(z') \iff z' \in S$ per l'equivalenza di (1) e (2)

Da ora U è sempre connesso

Corollario 1 Se f non è identicamente 0 su $U \Rightarrow U^0 = \{z \in U \mid f(z) = 0\}$ è un sottoinsieme discreto.

In particolare se $C \subset U$ è un compatto allora $|C \cap U^0| < \infty$

DIM. Se $f \neq 0$ è analitica, $f(z_0) = 0 \quad \exists m > 0 \mid f^{(m)}(z_0) \neq 0$

ma $f^{(i)}(z_0) = 0 \quad i < m$.

Quindi $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^i = (z - z_0)^m \underbrace{\sum_{i=m}^{\infty} \frac{f^{(i)}(z_0)}{i!} (z - z_0)^{i-m}}_{\neq 0 \text{ in un intorno di } z_0}$

$\Rightarrow \exists$ intorno V di z_0 in U : $V \cap U^0 = \{z_0\}$

(m = molteplicità di z_0 come zero di f)

Corollario 2 Se $f, g : U \to \mathbb{C}$ sono due funzioni analitiche e $\exists\ S \subset U$ non discreto $\mid f(t) = g(t)\ \forall t \in S \Rightarrow f = g$
↳ può essere l'intorno di un punto oppure una sequenza che converge verso un punto di U

15/04/2025
Szamuely

Def. Definiamo la funzione esponenziale come $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
Questa funzione è analitica su tutto $\mathbb{C}$ (il raggio di convergenza della serie è ∞) e, inoltre, vale che
$$(e^z)' = e^z$$

LEMMA: $z \mapsto e^z$ induce un omomorfismo surgettivo di gruppi $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ con nucleo $2\pi i \mathbb{Z}$
$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

DIM.
omo. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ risulta dalla formula del binomio di Newton come per $\mathbb{R}$.

buona def. Supponiamo esista $z \in \mathbb{C} \mid e^z = 0 \Rightarrow$
$0 = e^z \cdot e^{-z} = e^0 = 1$ ↯ $\Rightarrow e^z \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$.

surjettività Dimostriamo ora la surjettività:
Se $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $e^z = e^a \cdot e^{ib}$
$\overline{e^{ib}} = e^{-ib}$ (risulta dalla serie) $\Rightarrow |e^{ib}|^2 = e^{ib} \cdot \overline{e^{ib}} =$
$= e^{ib} \cdot e^{-ib} = e^0 = 1 \Rightarrow |e^{ib}| = 1$ e $|e^z| = |e^a|$.
$$e^{ib} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} b^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} b^{2n+1} =$$
$= \cos b + i \sin b$
Siccome $a \mapsto e^a$ è una surgezione $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ e $b \mapsto \cos b + i \sin b$ è una surgezione $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \{|z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$ otteniamo la surjettività di $z \mapsto e^z$.

nucleo Inoltre, $e^a = 1 \iff a = 0$, $e^{ib} = 1 \iff b = n \cdot 2\pi$ per $n \in \mathbb{Z}$. □

L'esponenziale reale $a \mapsto e^a$ induce un isomorfismo $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \times)$, quindi ammette un'inversa (continua) $x \mapsto \log x$. Tale cosa non succede per l'esponenziale complesso perché il nucleo è non banale. Esiste però una inversa restringendosi a certi aperti $U \subseteq \mathbb{C}^*$

OSS La funzione analitica $z \mapsto z^k$ induce un omomorfismo $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ surjettivo con nucleo $\mu_k = \{z \in \mathbb{C} \mid z^k = 1\}$
Se $k > 1$, μ_k è non banale e non esiste un'inversa su tutto $\mathbb{C}^*$. Siccome $z^k = e^{k \log z}$, l'esistenza di $\log z$

in un aperto $U \subseteq \mathbb{C}^*$ implica quella di $\sqrt[k]{\ }$.

Def. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ connesso. Una branca del logaritmo su U è una funzione analitica $U \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ tale che $e^{g(z)} = z \ \forall z \in U$

LEMMA Se g_1, g_2 sono due branche del logaritmo su U, allora $g_1 = g_2 + 2\pi i n$ per un $n \in \mathbb{Z}$

DIM: $1 = z \cdot (z^{-1}) = e^{g_1(z)} e^{-g_2(z)} \ \forall z \in U \Rightarrow g_1(z) - g_2(z) : U \to \mathbb{C}$ è una funzione continua con $(g_1 - g_2)(U) \subset 2\pi i \mathbb{Z}$.
Siccome $2\pi i \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ è un sottospazio discreto ($\Rightarrow$ le sue componenti connesse sono i punti) e U è connesso, $(g_1 - g_2)(U) = \{2\pi i n\}$ per un certo $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Proposizione Una branca del logaritmo sul disco $\{|z-1| < 1\}$ è data da $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}$
Più generalmente, per $z_0 \neq 0$ una branca sul disco $\{|z - z_0| < |z_0|\}$ è data da $g_{z_0}(z) = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/z_0 - 1)^{n+1}}{n+1}$

LEMMA Se $g : U \to \mathbb{C}$ è una branca del logaritmo su U, allora $g'(z) = \frac{1}{z} \ \forall z \in U$

DIM: Come in $\mathbb{R}$: $\lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{e^{g(z+h)} - e^{g(z)}} =$

$$\underset{\substack{t = g(z) \\ t' = g(z+h)}}{=} \lim_{t' \to t} \frac{t' - t}{e^{t'} - e^{t}} = \frac{1}{(e^t)'} = \frac{1}{e^t} = z^{-1}.$$

$\square$

DIM (proposizione): la serie converge per $|z-1| < 1$ e la sua derivata è $\sum_{n=0}^{\infty} (-(z-1))^n = 1/z$.
Ma allora
$$\left(\frac{e^{g(z)}}{z}\right)' = \frac{e^{g(z)} \cdot \frac{1}{z} \cdot z - e^{g(z)} \cdot 1}{z^2} = 0$$

$\Rightarrow e^{g(z)} = c \cdot z$, ma $e^{g(1)} = e^0 = 1 \Rightarrow c = 1$

(alternativamente si verifica direttamente con le serie che $e^{g(z)} = z$). Per la generalizzazione: usare
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0} - 1\right)} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{z_0} - 1\right)^n$$
$\square$

OSS. Siano $z_0, z_1 \in U$, g_0, g_1 due branche del logaritmo che esistono su dischi aperti $D_0, D_1 \subseteq U$ di centri z_0, z_1 tali che $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$. Allora $g_0|_{D_0 \cap D_1} = g_1|_{D_0 \cap D_1} + 2\pi i n$

Sostituendo $g_1 \rightsquigarrow g_1 + 2\pi i n$ le funzioni analitiche g_0, g_1 definiscono su $D_0 \cup D_1$ una branca g del logaritmo.
Quindi una branca può essere "continuata" su aperti più

grandi. Facciamo una discussione sistematica di questa idea.

Def. Un germe di funzione analitica nel punto $z_0 \in U$ è una serie $f_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ che converge su un disco centrato in z_0 contenuto in U.

Se $f: U \to \mathbb{C}$ è analitica, il suo germe f_{z_0} in $z_0 \in U$ è la sua serie di Taylor.

Def. Sia f_{z_0} un germe di funzione analitica in $z_0 \in U$, $g: I \to U$ un cammino continuo con $g(0) = z_0$. Una CONTINUAZIONE ANALITICA di f_{z_0} lungo g è data da un germe f_z $\forall z \in C := g(I)$ in modo che $\forall z \in C$ esiste un intorno aperto V e una funt. analitica $f: V \to \mathbb{C}$ t.c. $\forall z' \in V \cap C$ $f_{z'}$ è il germe di f in z'.

Siccome C è compatto, una continuazione analitica può essere descritta anche da un # finito di dischi aperti $V_0, \dots, V_n$ con $C \subseteq \bigcup_{m=0}^{n} V_m$ e funzioni analitiche $f_i: V_i \to \mathbb{C}$ tali che $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$ e se $z_0 \in V_0$ $(f_0)_{z_0} = f_{z_0}$.

TEO - di monodromia

Siano $g_0, g_1: I \to U$ due cammini omotopi con $g_0(0) = g_1(0) = z_0$, $g_0(1) = g_1(1) = z_1$, con omotopia data da una famiglia di cammini $\{g_s \mid s \in I\}$. Sia f_0 un germe di funzione analitica in z_0 che ammette una continuazione analitica lungo ogni g_s. Allora le continuazioni lungo g_0 e g_1 arrivano allo stesso germe f_{z_1}.

<u>OSS</u>: Siccome ogni $f_i: V_i \to \mathbb{C}$ sopra è determinata dal suo germe in un punto $z \in C \cap V_i$, partendo da f_0 si vede che i germi f_z nella continuazione sono unicamente determinati da f_0 e C. Il teo. dice che f_{z_1} dipende unicamente dalla classe di omotopia di C (e da f_0).

<u>COROLLARIO</u>: se U è semplicemente connesso e f_{z_0} è un germe di funt. analitica in $z_0 \in U$ per cui esiste una continuazione anal. lungo ogni cammino partendo da z_0 $\Rightarrow \exists f: U \to \mathbb{C}$ analitica con germe f_{z_0} in z_0.

<u>COROLLARIO</u>: se <u>$U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso, esiste una branca del logaritmo in U.</u>

231 Gli U utilizzati più spesso sono $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ o $\mathbb{C}$ privo di una

semi-retta che parte da 0.

Def. Se $f: U \to \mathbb{C}$ è una funzione analitica, una primitiva di f è una funt. analitica $F: U \to \mathbb{C}$ con $F' = f$.

OSS
1) Se F_1 e F_2 sono due primitive di f, $F_1 - F_2$ = costante
2) Se $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ e ha raggio di convergenza $R > 0$, allora $F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$ è una primitiva di f in $|z-z_0| < R$.

COROLLARIO se U è semplicemente connesso, esiste una primitiva per f in U.
(stesso argomento che nel caso $f(t) = \frac{1}{z}$).

NB! Se $f = 1/z$, non esiste una primitiva di f su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\Rightarrow \nexists$ una branca del logaritmo su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). Infatti, vedremo che se la primitiva F esiste, $g: I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cammino C^1 con $g(0) = z_0$, $g(1) = z_1$
$\Rightarrow \int_g f(t)\,dt = F(z_1) - F(z_0)$. Ma se $g: t \mapsto e^{2\pi i t}$
vedremo che $\int_g 1/z \, dz = 2\pi i \neq 0$

In questo caso $2\pi i$ è la monodromia di $1/z$ lungo g.

NB! Ogni aperto semplicemente connesso $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è contrattile. Questo risulta da un teo. di Riemann: U come sopra è sempre omeomorfo al disco aperto $D = \{|z| < 1\}$
Inoltre, $f: U \to D$ e $f^{-1}: D \to U$ che inducono l'omeo. possono essere scelte olomorfe.

Per la dim. del teo. di monodromia serve la seguente costruzione:

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Definiamo uno spazio topologico O_U così: $O_U = \{$germi di funzioni analitiche in punti $z \in U\}$, con la seguente topologia:
$V \subseteq U$ aperto e $f: V \to \mathbb{C}$ analitica, sia $V_f := \{\underbrace{\text{germi}}_{f_z}$ di f per i pt. $z \in V\} \subseteq O_U$.

I V_f formano una base di aperti perché se $f_z \in V_f \cap \bar{V}_{\bar{f}}$ e W è un intorno aperto connesso di z contenuto in $V \cap \bar{V}$
$\Rightarrow f|_W = \bar{f}|_W$ perché i loro germi in z coincidono
$\Rightarrow W_{f|_W} \subset V_f \cap \bar{V}_{\bar{f}}$.

La mappa $O_U \xrightarrow{\pi} U$, $f_z \mapsto z$ manda V_f bigettivamente in $V \Rightarrow \pi$ è continua ed è un omeomorfismo locale.

DIM:
(teo. di monodromia)

Una continuazione analitica di f_0 lungo $q: I \to U$ coincide con un sollevamento $\check{q}: I \to O_U$ del cammino q con $\check{q}(0) = f_0$ (per la definizione della topologia di O_U).

Se $O_U \to U$ fosse un rivestimento, allora il teo. risulterebbe dal lemma di sollevamento di cammini omotopi.

Ma $O_U \to U$ è solo un omeomorfismo locale. Questa proprietà implica almeno che se il sollevamento esiste, allora è unico.

Dalle ipotesi esistono $\check{q}_s: I \to O_U$ $\forall q_s: I \to U$ nella famiglia $\{q_s \mid s \in I\}$.

π omeomorfismo locale $\Rightarrow$ $(s,t) \mapsto \check{q}_s(t)$ è una mappa continua da $I \times I$ in O_U che dà un'omotopia tra $\check{q}_0$ e $\check{q}_1$

$\Rightarrow \check{q}_0(1) = \check{q}_1(1)$ per lo stesso argomento per i rivestimenti

$\square$

Abbiamo omesso i dettagli

come è evidente

FUNZIONI OLOMORFE E 1-FORME COMPLESSE

$f: W \to \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto è DIFFERENZIABILE in $x_0 \in W$ se $\exists$ una funzione lineare $df_{x_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ t.c.

$f(x) = f(x_0) + df_{x_0}(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$ per $x \to x_0$ cioè:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df_{x_0}(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$$

Inoltre, poiché $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{iso. canonico}}}{\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong M(m \times n, \mathbb{R})}$, possiamo pensare a df_{x_0} come a una matrice, nel cui posto (i,j)-esimo troviamo $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.

Noi siamo interessati al caso $W = U \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, cioè $m = n = 2$ e $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ tramite $x+iy \leftrightarrow (x,y)$

Dando per sottintesa questa identificazione quando serve, abbiamo:

TEO $f: U \to \mathbb{C}$, U aperto $z_0 \in U$. TFAE:

(i) f olomorfa in z_0 con derivata $f'(z_0) = a+ib$

(ii) f diff. in z_0 con $df_{z_0} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

(iii) f diff. in z_0 e df_{z_0} $\mathbb{C}$-lineare

(iv) f diff. in z_0 e $\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Im}(f)}{\partial x} \end{cases}$ ← condizioni di Cauchy-Riemann

DIM: (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(i) vale SSE $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a+ib$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (a+ib)(z-z_0)}{z - z_0} = 0$$

$$\Updownarrow \to \text{facile esercizio}$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (a+ib)(z-z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

$$\Updownarrow \text{ def.}$$

f differenziabile in z_0 con df_{z_0} = moltiplicazione per $a+ib$

Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto a+ib = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto (a+ib)i = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow df_{z_0} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Questo mostra (i) $\iff$ (ii)

(ii) $\iff$ (iii) discende dal fatto che $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-lineare è anche $\mathbb{C}$-lineare $\iff$ $L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$

Infatti L è $\mathbb{C}$-lineare $\iff$ $L \circ q = q \circ L$ dove $q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è la moltiplicazione per i e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \iff b = -c \text{ e } a = d$$

(ii) $\iff$ (iv) è ovvio $\square$

ES: • $f(z) = \bar{z}$ non è olomorfa (già visto)

si può controllare anche con Cauchy-Riemann:

$f(x,y) = (x, -y)$ e $\dfrac{\partial Re(f)}{\partial x} = 1$ $\quad \dfrac{\partial Im(f)}{\partial y} = -1$ ↳ viola Cauchy-Riemann

• $f(z) = e^z$ diventa

$f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$\dfrac{\partial Re(f)}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \dfrac{\partial Im(f)}{\partial y} = e^x \cos y$ ✓

$\dfrac{\partial Re(f)}{\partial y} = -e^x \sin y \qquad \dfrac{\partial Im(f)}{\partial x} = e^x \sin y$ ✓

1-forme complesse

Def. $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una 1-FORMA COMPLESSA su U è una $\omega : U \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

(i) continua

(ii) $\mathbb{R}$-lineare sulla 2ª variabile, cioè t.c. $\omega(z, \lambda w) = \lambda \omega(z, w)$ $\forall z \in U$, $\forall w \in \mathbb{C}$

In altre parole, è una collezione di $\omega_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineari che varia in maniera continua al variare di $z \in U$

ESEMPIO FONDAMENTALE: $f: U \to \mathbb{C}$ di classe C^1 ($\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue) un teo. di Analisi 2 assicura che f è differenziabile e $df_z : \underset{\mathbb{R}^2}{\mathbb{C}} \to \underset{\mathbb{R}^2}{\mathbb{C}}$ è $\mathbb{R}$-lineare e, proprio perché f è C^1, varia in maniera continua rispetto a z, dunque df è 1-forma complessa

Def. L'insieme delle 1-forme complesse su U si denota con $\Omega^1(U)$. Una $\omega \in \Omega^1(U)$ si dice ESATTA se $\omega = df$ per qualche $f: U \to \mathbb{C}$ di classe C^1.

In tal caso, f si dice PRIMITIVA di ω.

Def. Una 1-forma si dice CHIUSA se è localmente esatta, cioè se $\forall z \in U$ $\exists$ un aperto W con $z \in W \subseteq U$ e $\omega|_W = df$, con $f: W \to \mathbb{C}$ di classe C^1.

Naturalmente esatta $\Rightarrow$ chiusa.

$Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ sono uno sp. vettoriale su $\mathbb{R}$ di dim. 4
(IR-lineare) e uno sp. vettoriale su $\mathbb{C}$ di dim. 2

$f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$

$(\lambda \cdot f)(v) = \lambda f(v)$ definisce una mappa IR-lineare

$\lambda \cdot f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$a+ib \overset{dx}{\longmapsto} a$

Una $\mathbb{C}$-base di tale spazio è data da dx, dy, dove $dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ "parte reale"

e $dy = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ "parte immaginaria" $\quad a+ib \overset{dy}{\longmapsto} b$

Perciò, ogni $\omega \in \Omega^1(U)$ si scrive come $\omega_{(x,y)} = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

$P, Q : U \to \mathbb{C}$ continue.

$a+ib \overset{dz}{\longmapsto} a+ib$

Un'altra base è data da $dz = d(x+iy) = dx + i\,dy$

$d\bar{z} = d(x-iy) = dx - i\,dy$

$a+ib \overset{d\bar{z}}{\longmapsto} a-ib$

(Si noti che $dz = Id$, $d\bar{z}$ = riflessione rispetto all'asse x)

$\Rightarrow \omega_z = P(z)\,dz + Q(z)\,d\bar{z}$

$P, Q : U \to \mathbb{C}$ continue

Se $\omega = df$, allora $\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

Nel foglio di esercizi definiamo $\frac{\partial f}{\partial z}$ e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ in modo che si abbia $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$

INTEGRALI DI 1-FORME (di linea)

Sia $\gamma: [a,b] \to U$ una curva C^1 e sia $\omega \in \Omega^1(U)$. Allora

$$\boxed{\int_\gamma \omega := \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt}$$

Intendiamo che l'integrale $\int_a^b g(t)\,dt$, con $g: [a,b] \to \mathbb{C}$ si ottiene integrando separatamente parte reale e parte immaginaria

$$\int_a^b (g_1(t) + i g_2(t))\,dt = \int_a^b g_1(t)\,dt + i\int_a^b g_2(t)\,dt$$

$g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$

Se γ è C^1 a tratti, cioè è continua e posso ripartire $[a,b]$ in un # finito di sottointervalli $[t_0,t_1] \cup \dots \cup [t_{n-1},t_n]$ t.c. $t_0=a$, $t_n=b$ e $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]} \in C^1$ $\forall i$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}} \omega$$

Proposizione:

(i) Se $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ è C^1, surgettiva e t.c. $\varphi(c)=a$ e $\varphi(d)=b$ e $\gamma: [a,b] \to U$ è C^1 a tratti allora

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma\circ\varphi} \omega$$ (invarianza per riparametrizzazioni)

(ii) $\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma^{-1}} \omega$ (invertendo il verso di percorrenza si inverte il segno dell'integrale)

(iii) $\int_{\alpha * \beta} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$ se α e β sono concatenabili.

DIM: (iii) è ovvia

Dimostriamo (i) (la (ii) è simile)

Possiamo supporre γ C^1 (se è C^1 a tratti sommiamo sui tratti)

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_c^d \omega_{\gamma(\varphi(t))}((\gamma\circ\varphi)'(t))\,dt = \int_c^d \omega_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t))\cdot \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cup}}{\varphi'(t)})\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}\text{-linearità} \\ \text{di } \omega}}{=} \int_c^d \varphi'(t)\,\omega_{\gamma(\varphi(t))}(\gamma'(\varphi(t)))\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ s=\varphi(t)}}{=} \int_a^b \omega_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\,ds = \int_\gamma \omega$$ $\square$

Fatto: $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso $\Rightarrow$ cpa C^1 a tratti

(dimostrazione identica a connesso + localmente cpa $\Rightarrow$ cpa)

TEO $\omega \in \Omega^1(U)$. Allora ω è esatta $\Leftrightarrow \int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ curva chiusa C^1 a tratti

LEMMA: se $\omega = dF$ e γ è C^1 a tratti, allora $\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$
$\gamma: [a,b] \to U$, $\omega \in \Omega^1(U)$, $F: U \to \mathbb{C}$.

DIM (LEMMA): Posso assumere γ C^1 (se è C^1 a tratti sommo i contributi dei tratti ottenendo una somma telescopica)

Se γ è C^1, $\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = \int_a^b dF_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop. di} \\ \text{composizione dei} \\ \text{differenziali}}}{=} \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo. fondam.} \\ \text{del calcolo}}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ $\square$

INTEGRALI DI 1-FORME

Abbiamo visto ieri che, se ω è esatta, $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ curva C^1 a tratti chiusa, in quanto, se $\omega = dF$,

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0 \quad \text{se } \gamma(b) = \gamma(a)$$

Osserviamo anche che, se $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ curva chiusa, allora $\int_\alpha \omega$ dipende solo dal punto iniziale e finale di α.
Infatti, se β è un'altra curva con gli stessi estremi di α, allora $\alpha * \beta^{-1}$ è una curva chiusa e perciò

$$0 = \int_{\alpha * \beta^{-1}} \omega = \int_\alpha \omega + \int_{\beta^{-1}} \omega = \int_\alpha \omega - \int_\beta \omega, \text{ da cui}$$

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

TEO $\omega \in \Omega^1(U)$. Allora ω è esatta se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ curva chiusa C^1 a tratti in U.

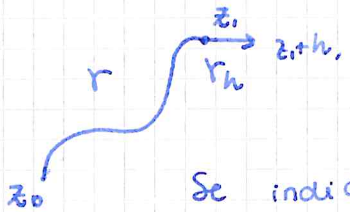
<u>DIM</u>: $\Rightarrow$ OK!

$\Leftarrow$ Sapendo che $\int_\gamma \omega = 0$ $\forall \gamma$ chiusa, devo costruire una primitiva $F: U \to \mathbb{C}$ di ω.

Scelgo $z_0 \in U$ a caso e $\forall z \in U$ pongo $F(z) = \int_\gamma \omega$, dove $\gamma: [a,b] \to U$ è C^1 a tratti e tale che $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z$

(posso supporre U connesso, dunque cpa C^1 a tratti, perché altrimenti potrei ragionare componente per componente). F è definita bene proprio perché $\int_\alpha \omega = 0$ $\forall \alpha$ chiusa, per cui $\int_\gamma \omega$ dipende solo dagli estremi di γ, cioè z_0 e z.

Dobbiamo vedere che $dF = \omega$, cioè $dF_{z_1} = \omega_{z_1}$ $\forall z_1 \in U$.
Scriviamo $\omega = P(x+iy)dx + Q(x+iy)dy$ e mostriamo che $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$.



$$\frac{\partial F}{\partial x}(z_1) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h}$$

Se indico con $\gamma_h : [0,h] \to \mathbb{C}$ il cammino $\gamma_h(t) = z_1 + t$, allora

$$F(z_1+h) - F(z_1) = \int_{\gamma * \gamma_h} \omega - \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_h} \omega = \int_{\gamma_h} P dx + Q dy =$$

$$= \int_0^h (P(r_h(t))\,dx + Q(r_h(t))\,dy)(r_h'(t))\,dt$$

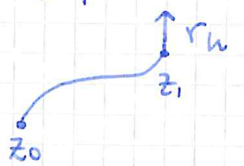
Poiché $r_h'(t) = (1,0)$, $dx(r_h'(t)) = 1$ $dy(r_h'(t)) = 0$,

$$F(z_1+h) - F(z_1) = \int_0^h P(r_h(t))\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teorema} \\ \text{della media} \\ \text{integrale}}}{=} h \cdot P(r_h(c_h)) \quad 0 \leq c_h \leq h$$

Dunque $\dfrac{\partial F}{\partial x}(z_1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h} P(r_h(c_h))}{\cancel{h}} =$

$= P(z_1)$ come voluto

Analogamente, posto $r_h : [0,h] \to U$ $\quad r_h(t) = z_1 + ih$



esattamente lo stesso calcolo mostra che $\dfrac{\partial F}{\partial y}(z_1) = Q(z_1)$ $\square$

Se R è un rettangolo contenuto in U, indichiamo con ∂R una parametrizzazione antioraria del bordo topologico di R.

La dimostrazione appena vista mostra anche il seguente

TEO Sia $U = B(z_0, r)$ una palla aperta. Allora $\omega \in \Omega^1(U)$ è esatta su U $\iff \int_{\partial R} \omega = 0$ $\forall$ rettangolo $R \subseteq U$.

__DIM:__ $(\Rightarrow)$ Ovvio, perché ∂R è una curva chiusa.

$(\Leftarrow)$ Costruisco la primitiva F come sopra, usando solo cammini da 2 segmenti, uno parallelo all'asse x e uno parallelo all'asse y. L'ip. è sufficiente per garantire che F sia ben definita e il calcolo sopra si può replicare nello stesso modo. $\square$

UN ESEMPIO FONDAMENTALE

Sia $B(z_0, R)$ la palla di centro z_0 e raggio $R > 0$, e indichiamo con $\partial B(z_0,R)$ una sua parametrizzazione in senso antiorario. Allora

$$\int_{\partial B(z_0,R)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$

Infatti, posto $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $r(t) = z_0 + Re^{it}$, abbiamo $r'(t) = iRe^{it}$, da cui $\displaystyle\int_{\partial B(z_0,R)} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(t) - z_0} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ Id}}{dz}(r'(t))\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{z_0} + Re^{it} - \cancel{z_0}} \cdot iRe^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

COROLLARIO: la forma $\dfrac{dz}{z} \in \Omega^1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ è chiusa ma non esatta.

DIM.: $\forall z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, se $U \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ è una palla aperta centrata in z_0, allora U è semplicemente connessa e sappiamo che esiste una branca del logaritmo definita su U, $L: U \to \mathbb{C}$. Dico che $dL = \frac{dz}{z}$, per cui L è una primitiva locale di $\frac{dz}{z}$ su U, per cui $\frac{dz}{z}$ chiusa. (Sappiamo che L è olomorfa e $L'(z) = 1/z$, cioè che il differenziale di L è la moltiplicazione per $1/z$, il che equivale a $\frac{1}{z} \underset{Id}{dz}$).

D'altronde, $1/z\, dz$ non è esatta in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ perché il suo integrale lungo $\partial B(0,1)$ è $2\pi i \neq 0$ e $\partial B(0,1)$ è una curva chiusa. □

COROLLARIO: non esiste una branca globale del logaritmo, cioè una $L: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ continua che sia inversa dell'esponenziale.

DIM.: abbiamo visto che, per qualsiasi logaritmo L, si ha $L'(z) = 1/z$. Se esistesse $L: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ con tale proprietà, la forma $1/z\, dz$ sarebbe esatta su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ □

Si vedono bene, a questo punto, i legami tra la topologia (in particolare π_1 e rivestimenti) e l'analisi complessa. Un'altra dimostrazione della non esistenza di un logaritmo globale segue dal

TEO $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ è un rivestimento

DIM.: pensata come mappa da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, poiché $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

l'esponenziale è $(x,y) \mapsto e^x(\cos y, \sin y)$
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$$

Tramite l'omeomorfismo
$$\mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to (0,+\infty)\times S^1$$
$$v \mapsto \left(\|v\|, \frac{v}{\|v\|}\right)$$

l'esponenziale diventa perciò
$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to (0,+\infty)\times S^1$$
$$(x,y) \to (e^x, (\cos y, \sin y)),$$
cioè il prodotto dell'omeomorfismo $\mathbb{R} \to (0,+\infty)$, $x \mapsto e^x$ e del rivestimento
$$\mathbb{R} \to S^1$$
$$y \mapsto (\cos y, \sin y)$$

È poi immediato vedere che il prodotto di un omeomorfismo e un rivestimento è un rivestimento. □

Ora, se $L: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ fosse un' inversa destra continua dell' esponentiale, avremmo $\exp \circ L = Id$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\setminus\{0\} \arrow[r, "L"] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{C} \arrow[r, "\exp"] & \mathbb{C}\setminus\{0\} \end{tikzcd}$$

per cui $\exp_* \circ L_* = Id_{\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\})}$

$$\exp_* : \underset{\{1\}}{\overset{\shortparallel}{\pi_1(\mathbb{C})}} \to \underset{\mathbb{Z}}{\overset{\shortparallel}{\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\})}}$$

$$L_* : \underset{\mathbb{Z}}{\overset{\shortparallel}{\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\})}} \to \underset{\{1\}}{\overset{\shortparallel}{\pi_1(\mathbb{C})}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "L_*"] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & \{1\} \arrow[r, "\exp_*"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \text{assurdo.}$$

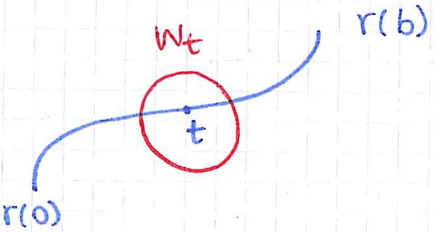
$\square$

Cerchiamo ora di dare una caratterittatione delle forme chiuse simile a quella data per le forme esatte. Prima di farlo, definiamo e' INTEGRALE DI FORME CHIUSE LUNGO CAMMINI C^0

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $\omega \in \Omega^1(U)$ e supponiamo ω CHIUSA. Sia $r: [a,b] \to U$ un cammino continuo. Una primitiva di ω lungo r e una $G: [a,b] \to \mathbb{C}$ t.c. $\forall t \in [a,b]$ $\exists W_t \subseteq U$ aperto e una primitiva locale $F: W_t \to \mathbb{C}$ di ω,

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ t.c.}$$

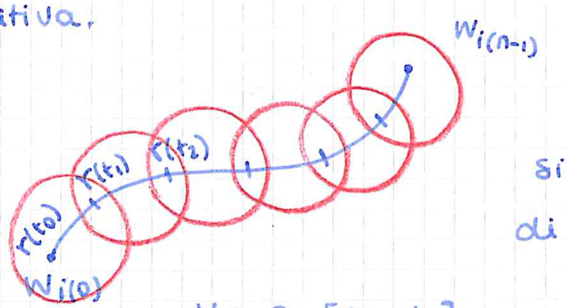
$$r((t-\varepsilon, t+\varepsilon)) \subseteq W_t \quad e \quad G(s) = F(r(s)) \quad \forall s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$$



Propositione se ω è chiusa, una primitiva lungo r esiste sempre, inoltre, due primitive differiscono per una costante.

DIM. Poiché ω è chiusa, esiste un ricoprimento aperto $\{W_i,\ i \in I\}$ di U t.c. ω è esatta su ogni W_i.
$\{r^{-1}(W_i),\ i \in I\}$ mi da un ricoprimento aperto di $[a,b]$.
Poiché $[a,b]$ è compatto, tale ricoprimento ammette un numero di Lebesque $\varepsilon > 0$. Se scelgo n t.c. $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$, allora posso partitionare $[a,b]$ scegliendo
$t_0 = a,\ t_1, t_2, \dots, t_n = b$ con $t_{i+1} = \frac{b-a}{n} + t_i$ e

$r([t_k, t_{k+1}]) \subseteq W_{i(k)}$ per qualche $W_{i(k)}$ su cui ω ammette una primitiva.



Costruisco la primitiva G lungo r induttivamente così:
sia $F_0 : W_{i(0)} \to \mathbb{C}$ una primitiva di $\omega|_{W_{i(0)}}$

$\forall t \in [t_0, t_1]$ pongo $G(t) = F_0(r(t))$

Sia poi $F_1 : W_{i(1)} \to \mathbb{C}$ una primitiva di $\omega|_{W_{i(1)}}$
A meno di sommare a F_1 una costante, posso assumere che $F_0(r(t_1)) = F_1(r(t_1))$. Pongo poi $\forall t \in [t_1, t_2]$ $G(t) = F_1(r(t))$.
Proseguo così "incollando" le primitive.
Per definizione la G così ottenuta è una primitiva di ω lungo r. L'unicità a meno di costanti è facile e discende dal fatto che potevamo scegliere i W_i iniziali connessi e che due primitive di ω su un connesso differiscono per una costante, per cui, una volta scelta F_0 su $W_{i(0)}$, tutte le altre scelte (di $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$) sono forzate.

$\square$

Perciò se ω è chiusa e r è C^0, possiamo porre $\int_r \omega = G(b) - G(a)$ dove G è una primitiva di ω lungo $r : [a,b] \to U$.
È una buona definizione perché una tale G esiste ed è unica a meno di una costante.

OSS: se r è C^1 a tratti, è anche C^0, e le due definizioni date di $\int_r \omega$ (per ω chiusa) coincidono.

Infatti, se $F_0, \dots, F_{n-1}$ sono le primitive locali usate per definire G, con la "vecchia" definizione di $\int_r \omega$ abbiamo

$$\int_r \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\int_{r|_{[t_i, t_{i+1}]}} \omega}_{\substack{\omega \text{ è esatta intorno} \\ \text{a } r([t_i, t_{i+1}]) \text{ con} \\ \text{primitiva } F_i}} = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(r(t_{i+1})) - F_i(r(t_i)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} G(t_{i+1}) - G(t_i) = G(b) - G(a).$$

$\square$

Ricordiamo che, se $F: U \to \mathbb{C}$ è differenziabile e $dF \equiv 0$, allora F è loc. costante. In particolare, se $C \subseteq U$ è connesso, $F|_C$ è costante. In particolare, <u>due primitive della stessa 1-forma differiscono per una funzione che è costante sui connessi</u>

(se $dF = dG$ $\quad d(F-G) = 0$)

1-forme e omotopia

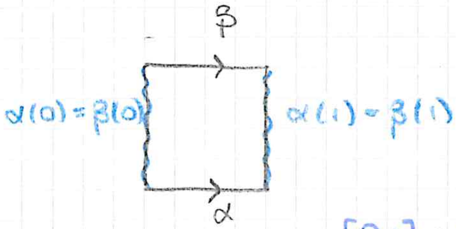
TEO Sia ω una 1-forma chiusa su $U \subseteq \mathbb{C}$ e siano α, β da $[0,1]$ in U cammini omotopi a estremi fissi in U.
Allora $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$.

(omotopi a estremi fissi $\Rightarrow \alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$)

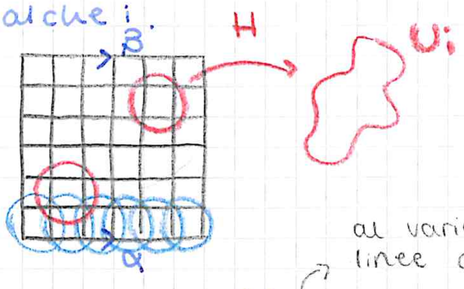
DIM.: Sia $H: [0,1] \times [0,1] \to U$ un'omotopia a estremi fissi tra α e β

$H(t,0) = \alpha(t) \quad \forall t \qquad H(0,s) = \alpha(0) = \beta(0) \quad \forall s$

$H(t,1) = \beta(t) \quad \forall t \qquad H(1,s) = \alpha(1) = \beta(1) \quad \forall s$



Poiché ω è chiusa, $\exists$ ricoprimento aperto $\{U_i, i \in I\}$ di U t.c. $\omega|_{U_i} = dF_i \quad F_i: U_i \to \mathbb{C}$.
Poiché H è continua, $H^{-1}(U_i)$ è aperto in $[0,1]\times[0,1]$ $\forall i$ e $\{H^{-1}(U_i), i \in I\}$ è un ric. aperto di $[0,1]\times[0,1]$. Poiché $[0,1]\times[0,1]$ è compatto, il ric. ha un # di Lebesgue ε, perciò posso scegliere $n \in \mathbb{N}$ t.c. ciascun quadratino $Q_{h,k} = [h/n, h+1/n] \times [k/n, k+1/n]$ è t.c. $H(Q_{h,k}) \subseteq U_i$ per qualche i.



su cui $\omega = dF_i$

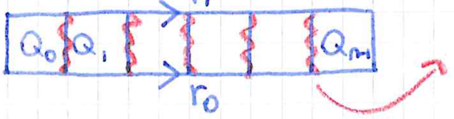
al variare di k sono i cammini dati dalle linee orizzontali del quadratino

Sia $r_k(t) = H(t, \frac{k}{n})$ $\forall t$, così $r_0 = \alpha$, $r_1 = \beta$, $k = 0, \dots, n$

Basta mostrare $\int_{r_k} \omega = \int_{r_{k+1}} \omega$ $\forall k$, così

$$\int_\alpha \omega = \int_{r_0} \omega = \int_{r_1} \omega = \int_{r_2} \omega = \dots = \int_{r_n} \omega = \int_\beta \omega$$

Vediamo ad esempio che $\int_{r_0} \omega = \int_{r_1} \omega$



qui devo "saldare" le primitive

Sappiamo che $H(Q_k) \subseteq U_{i(k)}$ e $\omega|_{U_{i(k)}} = dF_k$, con F_k primitiva di ω su $U_{i(k)}$. Ora scelgo F_0 a caso, poi voglio che F_1 e F_0

coincidano su $H(Q_0 \cap Q_1)$, cioè $H\left(\{\frac{1}{n}\} \times [0, 1/n]\right)$.

Poiché $\{1/n\} \times [0, 1/n]$ è connesso, lo è anche $H(Q_0 \cap Q_1)$ per cui $\exists$ costante c t.c. $(F_1 - F_0)|_{H(Q_0 \cap Q_1)} \equiv c$

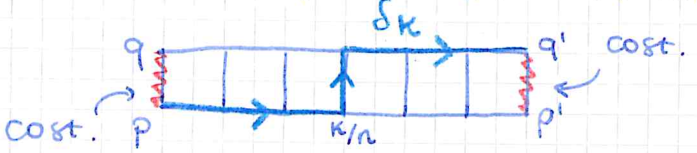
Rimpiazzo F_1 con $F_1 - c$, ho che $F_1 - c$ è un'altra primitiva di ω su $H(Q_1)$ che coincide con F_0 su $H(Q_0 \cap Q_1)$.

Procedo nello stesso modo per scegliere $F_K : U_{i(K)} \to \mathbb{C}$ primitive di ω su $U_{i(K)}$ in modo che

$$F_K|_{H(\{\frac{K}{n}\} \times [0, 1/n])} = F_{K-1}|_{H(\{\frac{K}{n}\} \times [0, 1/n])}$$

Notiamo che, poiché H è un'omotopia a estremi fissi, i cammini verticali $s \mapsto H(0,s)$ e $s \mapsto H(1,s)$ sono costanti, dunque $F_0(H(0,0)) = F_0(H(0, 1/n))$

$F_{n-1}(H(1,0)) = F_{n-1}(H(1, 1/n))$



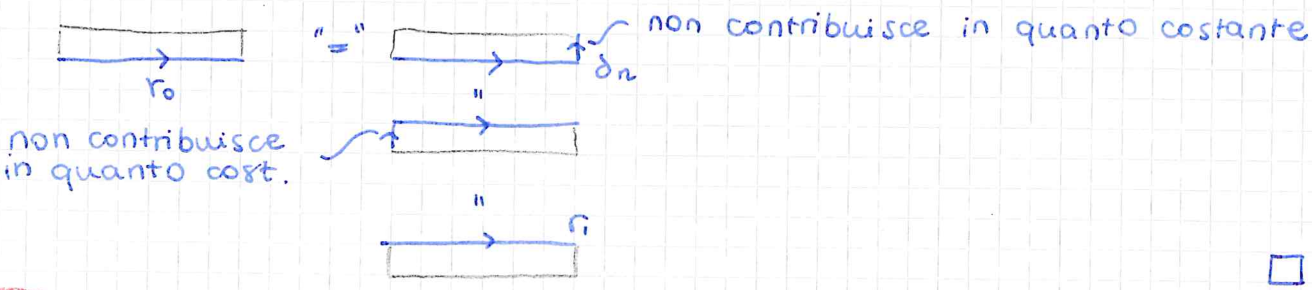
$F_0(H(p)) = F_0(H(q))$

$F_{n-1}(H(p')) = F_{n-1}(H(q'))$

$\forall K = 0, \dots, n$ prendiamo il cammino δ_K che percorre i segmenti $([0, K/n] \times \{0\}) \cup (\{K/n\} \times [0, 1/n]) \cup ([K/n, 1] \times \{1/n\})$

$\int_{\delta_K} \omega = \int_{\delta_{K+1}} \omega$, perché $\int_{\delta_{K+1}} \omega - \int_{\delta_K} \omega = \int_{H \circ (\partial Q_K)} \omega = 0$ perché ω ammette una primitiva su $H(Q_K)$.

Perciò $\int_{\delta_0} \omega = \int_{\delta_n} \omega$. Ma $\int_{\delta_0} \omega = \int_{r_1} \omega$ in quanto il tratto iniziale in verticale, essendo costante, non contribuisce all'integrale. Analogamente $\int_{\delta_n} \omega = \int_{r_0} \omega$ in quanto il tratto finale costante non contribuisce all'integrale.



$\square$

TEO $\omega \in \Omega^1(U)$. TFAE: (U sempre aperto)

1. ω è chiusa
2. $\int_r \omega = 0 \quad \forall r$ chiusa omotopicamente banale in U
3. $\int_{\partial R} \omega = 0 \quad \forall$ rettangolo R interamente contenuto in U ($R \subseteq U$, non solo il bordo)

DIM: ① ⇒ ② è conseguenza immediata del teo. precedente
γ chiusa e omot. banale $\Rightarrow \int_\gamma \omega = \int_{cost} \omega = 0$

② ⇒ ③ ovvio: $R \subseteq U \Rightarrow \partial R$ omot. banale

③ ⇒ ① $\forall p \in U$ e B palla aperta centrata in p con $B \subseteq U$. Per hp. $\int_{\partial R} \omega = 0 \quad \forall R \subseteq B \Rightarrow$ (ris. già visto) ω esatta su B.

Allora ω è loc. esatta, cioè chiusa. □

COROLLARIO: U sempl. connesso, ogni forma chiusa su U è anche esatta.

DIM: Se U è sempl. connesso, le condizioni $\int_\gamma \omega = 0 \ \forall \gamma$ chiusa e $\int_\gamma \omega = 0 \ \forall \gamma$ chiusa omotopicamente banale sono equivalenti tra loro. □

TEO $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora la 1-forma $\omega = f(z)dz$ è chiusa.

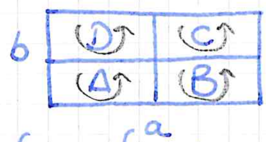
Questo teo. è fondamentale nella teoria delle funz. olomorfe

DIM.: Basta vedere che se $R \subseteq U$ è un rettangolo, $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$.

Sia $\int_{\partial R} f(z)\,dz = \alpha \in \mathbb{C}$ $\qquad R = R_0$

Siano a, b le lungh. dei lati di R.

Posso dividere R in 4 rettangoli



È facile verificare che $\int_{\partial R} \omega = \int_{\partial A} \omega + \int_{\partial B} \omega + \int_{\partial C} \omega + \int_{\partial D} \omega$

(le somme dei lati interni si cancellano, percorro ogni segmento interno due volte in versi opposti)

Per la disuguaglianza triangolare, almeno uno di questi integrali ha modulo $\geq \frac{|\alpha|}{4}$

Chiamo $R_1 \subseteq R$ la regione A, B, C o D per la quale $\left| \int_{\partial R_1} f(z)\,dz \right| \geq |\alpha|/4$. Divido R_1 in 4 rettangoli e ottengo $R_2 \subseteq R_1$ t.c. $\left| \int_{\partial R_2} f(z)\,dz \right| \geq \frac{\left|\int_{\partial R_1} f(z)\,dz\right|}{4} \geq \frac{|\alpha|}{16}$

Procedendo induttivamente ottengo

$R = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots$

t.c. $\left| \int_{\partial R_n} f(z)\,dz \right| \geq \frac{|\alpha|}{4^n}$

Trattandosi di rettangoli inscatolati, ed essendo i rettangoli compatti, $\exists z_0 \in \bigcap R_n$. Poiché diam $R_n \to 0$

$\bigcap R_n = \{z_0\}$

f olomorfa $\Rightarrow \exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$ t.c. $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)$

con $\varepsilon(z) = o(|z-z_0|)$ per $z \to z_0$.

Il rettangolo R_n ha perimetro $\frac{2(a+b)}{2^n}$ e se $z \in \partial R_n$,

poiché $z_0 \in R_n$ si ha $\sup\{|z-z_0|,\ z \in \partial R_n\} \leq \sqrt{\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{b}{2^n}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2^n}$

Ora, $(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0))\,dz$ è esatta, perché ha primitiva

$F(z) = f(z_0)z + f'(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2}$. Perciò $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\partial R_n} f(z)\,dz =$

$$= \int_{\partial R_n} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \varepsilon(z)\,dz =$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_{\partial R_n} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\,dz}}_{=0} + \int_{\partial R_n} \varepsilon(z)\,dz$$

$\varepsilon(z) = o(|z-z_0|) \implies \varepsilon(z) = |z-z_0| \cdot \alpha(z)$ con $\lim_{z \to z_0} |\alpha(z)| = 0$

perciò $\left|\int_{\partial R_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial R_n} \varepsilon(z)\,dz\right| \leq \int_{\partial R_n} |\varepsilon(z)|\,dz =$

$$= \int_{\partial R_n} |z-z_0| \cdot |\alpha(z)|\,dz \leq \int_{\partial R_n} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2^n} \cdot |\alpha(z)|\,dz =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2^n} \cdot \int_{\partial R_n} |\alpha(z)|\,dz \leq \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2^n} \cdot \frac{2(a+b)}{2^n} \cdot \sup\{|\alpha(z)|,\ z \in \partial R_n\} =$$

$$= \frac{2\sqrt{a^2+b^2}\,(a+b)}{4^n} \cdot \sup\{|\alpha(z)|,\ z \in \partial R_n\}$$

Rimettendo insieme i pezzi

$$\frac{|\alpha|}{4^n} \leq \left|\int_{\partial R_n} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2\sqrt{a^2+b^2}\,(a+b)}{4^n} \cdot \sup\{|\alpha(z)|,\ z \in R_n\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |\alpha| \leq 2\sqrt{a^2+b^2}\,(a+b) \cdot \sup\{|\alpha(z)|,\ z \in \partial R_n\}$

Ma, poiché $\lim_{z \to z_0} |\alpha(z)| = 0$, si ha $\lim_{n \to +\infty} \sup\{|\alpha(z)|,\ z \in \partial R_n\} = 0$

allora passando al limite $|\alpha| = 0 \implies \alpha = 0$ $\square$

06/05/2025
Frigerio

TEO $f: U \to \mathbb{C}$. Supponiamo che $\exists$ retta orizzontale $r \subseteq \mathbb{C}$ t.c.:
1) f è continua su U
2) f è olomorfa su $U \setminus r$

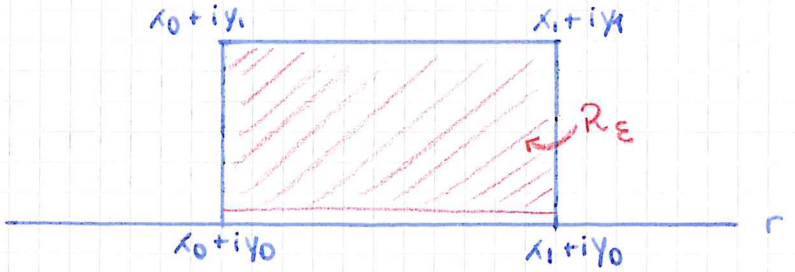
Allora la forma $f(z)\,dz \in \Omega^1(U)$ è chiusa

(Reminder: $f(z)$ olomorfa su U
$\Downarrow$
$\omega = f(z)\,dz$ chiusa)

<u>DIM</u>: Basta vedere che se $R \subseteq U$ è un rettangolo, $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$. Naturalmente se $R \cap r = \emptyset$ ricadiamo nel risultato visto ieri. Rimangono i casi
1) r contiene un lato di R
2) r interseca R in un segmento // alle basi di R e da esse distinto.

Si riesce comunque a dimostrarlo con un passaggio al limite

1) Siano $x_0 + iy_0$, $x_1 + iy_0$, $x_0 + iy_1$, $x_1 + iy_1$ i vertici di R



$\forall \varepsilon > 0$ consideriamo il rettangolo R_ε con vertici $x_0 + iy_0 + i\varepsilon$, $x_1 + iy_0 + i\varepsilon$, $x_0 + iy_1$, $x_1 + iy_1$

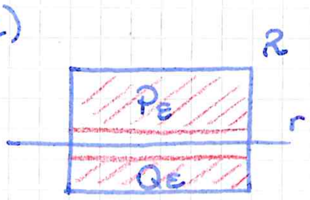
Usando che f è continua si vede facilmente

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial R_\varepsilon} f(z)\,dz = 0 \quad \text{in quanto}$$

$$\int_{\partial R_\varepsilon} f(z)\,dz = 0 \quad \forall \varepsilon \quad \text{perché } R_\varepsilon \cap r = \emptyset$$

La dimostrazione è identica se $R \cap r$ è la base "superiore"

2)



P_ε e Q_ε "evitano" r lasciandola a distanza ε.

Anche in questo caso si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial P_\varepsilon} f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial Q_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$$

Inoltre, $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial P_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\partial Q_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial R} f(z)\,dz$

In quanto i contributi dati dalle basi vicine a γ al limite $(\varepsilon \to 0)$ si cancellano, mentre la somma di tutti gli altri lati da proprio $\int_{\partial R} f(z)\,dz$ $\square$

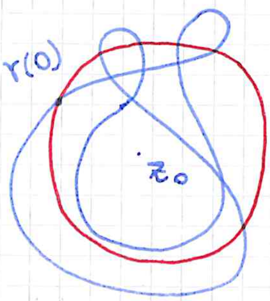
<u>Def.</u> Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ una curva chiusa. L'INDICE DI AVVOLGIMENTO di γ intorno a z_0 è $I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz$

(la forma $\frac{1}{z-z_0}\,dz \in \Omega^1(\mathbb{C}\setminus\{z_0\})$ è chiusa perché di tipo $f(z)\,dz$, f olomorfa o più semplicemente perché ottenuta traslando $\frac{1}{z}\,dz$, per cui ha senso integrarla lungo cammini continui)

TEO Sia $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ una curva chiusa, sia $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{z_0\}, \gamma(0)) \cong \mathbb{Z}$.
Fissato l'isomorfismo $\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{z_0\}, \gamma(0)) \cong \mathbb{Z}$ che identifica $1 \in \mathbb{Z}$ con una circonferenza centrata in z_0 percorsa in senso antiorario,

$$I(\gamma, z_0) = [\gamma] \in \mathbb{Z}$$

<u>DIM.</u>: Sia $\alpha: [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ una parametrizzazione in senso antiorario della circonferenza centrata in z_0 e passante per $\gamma(0)$.



Se $\gamma(0) - z_0 = Re^{i\theta}$, $R>0$, si ha $\alpha: [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$
$\alpha(t) = z_0 + Re^{i(\theta+2\pi t)}$
da cui $\int_\alpha \frac{1}{z-z_0}\,dz =$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\alpha(t)-z_0}\,\alpha'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\cancel{Re^{i(\theta+2\pi t)}}} \cdot 2\pi i \cdot \cancel{Re^{i(\theta+2\pi t)}}\,dt = 2\pi i$$

Ora, $[\gamma] = n$ significa $[\gamma] = [\underbrace{\alpha * \ldots * \alpha}_{n \text{ volte}}]$

Poiché γ è omotopo a estremi fissi a $\alpha * \ldots * \alpha = \alpha^n$ e $\frac{1}{z-z_0}\,dz$ è chiuso, un teorema visto ieri ci assicura che $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_{\alpha^n} \frac{1}{z-z_0}\,dz = n\int_\alpha \frac{1}{z-z_0}\,dz = n2\pi i$ perciò

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \frac{n2\pi i}{2\pi i} = n = [\gamma]$$

$\square$

Formula di Cauchy

TEO Sia $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa, sia $z_0 \in U$ e sia $\gamma: [0,1] \to U \setminus \{z_0\}$ una curva chiusa omotopicamente banale in U (ma magari non banale in $U \setminus \{z_0\}$). Allora $I(\gamma, z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$

__DIM.__ Definiamo $g: U \to \mathbb{C}$ come segue: $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$

Allora g è continua su U (per def. di $f'(z_0)$) ed è olomorfa su $U \setminus \{z_0\}$ (rapporto di olomorfe).
Per quanto visto prima la forma $g(z)\, dz$ è chiusa su tutto U. Perciò poiché γ è omotopicamente banale in U, si ha $\int_\gamma g(z)\, dz = 0$

Dunque $0 = \int_\gamma g(z)\, dz = \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz -$
$- \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz =$
$= \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) \cdot 2\pi i \cdot I(\gamma, z_0)$ perciò

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \cdot 2\pi i \cdot I(\gamma, z_0)$$

$\square$

71 Sia $f: U \to \mathbb{C}$ differenziabile e poniamo $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$
Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial z}$ e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$

So che $dz = dx + i dy$ e $d\bar{z} = dx - i dy$, per cui
$dz + d\bar{z} = 2dx$, $dz - d\bar{z} = 2i dy$ e
$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}$, $dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$. Perciò $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy =$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{dz + d\bar{z}}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z}\right]$$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z}\right]$, perciò

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Mostrare che sono fatti equivalenti
1) f olomorfa
2) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial(\mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f))}{\partial x} + i\frac{\partial(\mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f))}{\partial y} = 0$$

$\iff \frac{\partial Re(f)}{\partial x} + i\frac{\partial Im(f)}{\partial x} + i\frac{\partial Re(f)}{\partial y} - \frac{\partial Im(f)}{\partial y} = 0 \iff$

$\frac{\partial Re(f)}{\partial x} = \frac{\partial Im(f)}{\partial y}$ e $\frac{\partial Im(f)}{\partial x} = -\frac{\partial Re(f)}{\partial y}$, che sono le condizioni di Cauchy-Riemann.

Inoltre: a) Se f è olomorfa, $df = f'(z)\,dz$

b) Se $df = g(z)\,dz$ (cioè manca $d\bar{z}$), allora f è olomorfa e $f'(z) = g(z)$.

a) Se f è olomorfa, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ per cui $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = \frac{\partial f}{\partial z}dz$, cioè (ricordiamo $dz = Id$) df è la moltiplicazione per il complesso $\frac{\partial f}{\partial z}$, cioè $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$

b) Se $df = g(z)\,dz$, allora $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, per cui f è olomorfa e, per a), si ha allora $g(z) = f'(z)$.

Da ricordare: $\boxed{f \text{ olomorfa} \Rightarrow df = f'(z)\,dz}$

72 $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa e tale che $f(U) \subseteq \mathbb{R}$.

Allora f è localmente costante (e, se U è connesso è perciò costante)

Infatti, se $f(U) \subseteq \mathbb{R}$, $Im(f) \equiv 0$, quindi $\frac{\partial Re(f)}{\partial y} = -\frac{Im(f)}{\partial x} = 0$, per cui tutte le derivate parziali di $Re(f)$ e $Im(f)$ sono nulle, cioè $df_z = 0$ $\forall z \in U$, da cui la tesi. □

74 $\omega = \frac{1}{z}dz \in \Omega^1(\mathbb{C}^*)$. Posso scrivere $\omega = \omega_{\mathbb{R}} + \omega_{Im}$, dove

$\omega_{\mathbb{R}} = A\,dx + B\,dy$ $\quad A, B: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$

$\omega_{Im} = i(C\,dx + D\,dy)$ $\quad C, D: \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$

Claim: $\omega_{\mathbb{R}}$ esatta, ω_{Im} chiusa ma non esatta.

Sappiamo che $\omega = \frac{1}{z}dz$ è chiusa ma non esatta $\Rightarrow$ basta vedere che $\omega_{\mathbb{R}}$ è esatta (a quel punto se lo fosse anche ω_{Im} otterrei ω esatta ↯). Inoltre, se $\omega_{\mathbb{R}}$ è esatta $\Rightarrow \omega_{\mathbb{R}}$ chiusa $\Rightarrow \omega_{Im} = \omega - \omega_{\mathbb{R}}$ è anch' essa chiusa. (Forme esatte e chiuse sono uno sp. vettoriale)

Se γ è una curva chiusa in $\mathbb{C}^*$, $\int_\gamma \omega = 2\pi i\, I(\gamma, 0)$ è un # immag. puro. D'altronde $\int_\gamma \omega = \underbrace{\int_\gamma \omega_{\mathbb{R}}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_\gamma \omega_{Im}}_{\in i\mathbb{R}}$, per cui $\int_\gamma \omega_{\mathbb{R}} = 0$.

Siccome questo vale $\forall \gamma$ chiusa $\Rightarrow \omega_{\mathbb{R}}$ esatta. $\omega_{\mathbb{R}} = ?$ $\omega_{Im} = ?$

$\frac{1}{z}dz = \frac{\bar{z}}{|z|^2}(dx + i\,dy) = \frac{x - iy}{x^2+y^2}(dx + i\,dy) = \frac{1}{x^2+y^2}(x\,dx + y\,dy + i(-y\,dx + x\,dy))$

$= \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$

LE FUNZIONI OLOMORFE SONO ANALITICHE

TEO Siano $z_0 \in \mathbb{C}$ e $R>0$. Sia $f: B(z_0,R) \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora f si può esprimere come una serie di potenze di centro z_0 con raggio di convergenza $\geq R$.

Nota: se $f: U \to \mathbb{C}$ è olomorfa, f è analitica e sappiamo anche che se $z_0 \in U$ e $B(z_0,R) \subseteq U$, allora lo sviluppo in serie di f centrato in z_0 converge a f su tutta $B(z_0,R)$.
Questo è falso per le funz. analitiche reali: ad esempio, $f(x) = \arctan x$ è analitica su $\mathbb{R}$, ma il suo sviluppo centrato in 0 converge solo su $(-1,1)$.

DIM: Possiamo assumere $z_0 = 0 \Rightarrow f: B(0,R) \to \mathbb{C}$ olomorfa.
Basta vedere che f si sviluppa in serie di potenze su $B(0,\rho)$ $\forall \rho < R$: infatti, i coeff. dello sviluppo su $B(0,\rho)$ e $B(0,\rho')$ devono coincidere: se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, allora $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ non può dipendere da ρ.

Sia perciò $0<\rho<R$ e prendiamo $z \in B(0,R)$, con $|z|<\rho$.
Sia γ una parametrizzazione antioraria di $\partial B(0,\rho)$, così che $I(\gamma,z)=1$. La form. di Cauchy dice che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Lungo γ, si ha $|w|>|z|$ per cui

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w(1-\frac{z}{w})} = \frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{1}{w}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n$$

e la convergenza di $\sum \left(\frac{z}{w}\right)^n$ a $\frac{1}{1-z/w}$ è uniforme lungo γ (cioè, con z fissato e w che varia lungo γ)

Perciò $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{-z+w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{w^n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)z^n}{w^{n+1}}\,dw$

conv. uniforme

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma \frac{f(w)z^n}{w^{n+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right)z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw.$$

Poiché questa formula è valida $\forall z \in B(0,\rho)$, questo conclude. □

Abbiamo dimostrato anche

TEO Se $f(z)$ è olomorfa su $B(z_0,R)$ e $\gamma: [0,1] \to B(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ è chiusa e t.c. $I(\gamma,z_0)=1$, allora $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ su $B(z_0,R)$ con $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

DIM: già visto quando γ è una circonferenza centrata in z_0, ora la tesi segue dal fatto che una qualsiasi γ con $I(\gamma, z_0) = 1$ è omotopa a estremi fissi a una tale circonferenza in $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ e $\frac{f(z)}{z-z_0}dz$ è chiusa su tale palla bucata. □

Corollario (teo. di Morera): $f: U \to \mathbb{C}$. Allora f è olomorfa SSE $f(z)dz$ è chiusa su U.

DIM.: ($\Rightarrow$) Vista

($\Leftarrow$) $\forall p \in U$, $\exists$ intorno W di p aperto t.c. $f(z)dz|_W = dF$ $F: W \to \mathbb{C}$. Ora, F è differentiabile e in dF non compare $d\bar{z}$ ($dF = f(z)dz$), per cui F è olo. e $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in W$.

vedi es. 7.1

Ma F allora è analitica $\Rightarrow F' = f|_W$ è analitica e perciò è olomorfa e f è olomorfa. □

TEO (Disuguaglianza di Cauchy)

Sia $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ su $B(z_0, R) \subseteq U$. $\forall r$ con $0 < r < R$ sia

$$M(r) = \sup\{|f(z)|, |z-z_0| = r\}$$

(è un massimo perché la circonferenza $|z-z_0| = r$ è compatta)

Allora $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

DIM: Se $\gamma: [0, 2\pi] \to U$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, allora

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(re^{it})^{n+1}} rie^{it}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0+re^{it})|}{r^n \underbrace{|e^{int}|}_{1}} \underbrace{|i|}_{1}\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M(r)}{r^n}\,dt = \frac{M(r)}{r^n}$$ □

TEO (di Liouville)

Sia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa. (tali f si chiamano "intere")
Se f è limitata (cioè $\exists M$ t.c. $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$), allora f è costante.

DIM.: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Ora $\forall n \geq 1$ si ha

prendendo il limite per $r \to +\infty$

$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \to 0$ si ottiene $|a_n| = 0$ $\forall n \geq 1$ $\Rightarrow$

f limitata da M

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0$ costante. $\square$

Corollario (teo fondamentale dell'algebra)

Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ha almeno una radice.

DIM.: Sia $p(z)$ un polinomio che non si annulla mai.

Allora $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ è olomorfa e limitata in quanto o $p(z)$ è costante (e lo è anche f) o $\lim_{z \to +\infty} |p(z)| = +\infty$, se $p(z) = a_n z^n +$ term. di deg minore, $a_n \neq 0$

allora $p(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{b_{n-1}}{z} + \frac{b_{n-2}}{z^2} + \dots\right)$ per cui

$|p(z)| = |a_n||z|^n$ (1+ termini che tendono a 0) $\to +\infty$ per $|z| \to \infty$

Dunque $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = 0$ e perciò essendo continua, f è limitata ($\exists R > 0$ t.c. $|f(z)| < 1$ $\forall z$ con $|z| \geq R$ e $f|_{\overline{B(0,R)}}$ è limitata perché $\overline{B(0,R)}$ è compatta)

Per Liouville, f è costante e quindi lo è anche $p(z)$ $\square$

TEO (della media)

Sia $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa e siano $z_0 \in U$, $R > 0$ t.c. $\overline{B(z_0,R)} \subseteq U$. Allora $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt$

DIM.: se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, allora $f(z_0) = a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-z_0} dz =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{\cancel{z_0} + Re^{it} - \cancel{z_0}} \cdot Rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt \quad \square$$

TEO (Principio del massimo modulo)

$f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se $z_0 \in U$ è un punto di massimo locale per $|f|$, allora f è costante su un intorno di z_0.

e $|f(z_0)| = \max_{z \in B(z_0,R)} |f(z)|$

DIM.: Sia $R > 0$ t.c. $B(z_0, R) \subseteq U$. A meno di moltiplicare f per una costante complessa, posso assumere $f(z_0) \in \mathbb{R}$, $f(z_0) \geq 0$.

Se $f(z_0) = 0$ non c'è nulla da dimostrare. In generale basta vedere che $\forall\, 0 < \rho < R$, $f(z) = f(z_0)$ $\forall z$ con $|z - z_0| = \rho$.

Per il teo. della media posto $\alpha = f(z_0) \in \mathbb{R}_+$,

$$\alpha = f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{Re(f)(z_0 + \rho e^{it})}_{\leq \alpha} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} Im(f)(z_0 + \rho e^{it})\, dt}_{= 0 \ (\alpha \text{ reale})}$$

perché $|f(z_0)|$ è max locale

Da $\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(f)(z_0 + \rho e^{it})\, dt$ deduciamo che $Re(f)(z_0+\rho e^{it}) = \alpha \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

(sappiamo che è $\leq \alpha \ \forall t$, e se fosse $< \alpha$ per qualche t_0, lo sarebbe per continuità in un intorno di t_0, e la sua media non potrebbe essere α).

Dunque $Re(f(z)) = \alpha \quad \forall z \in B(0,R)$. Inoltre, $\alpha = |f(z_0)| \geq |f(z)| = \sqrt{Re(f(z))^2 + Im(f(z))^2} = \sqrt{\alpha^2 + Im(f(z))^2}$ e $f(z) = \alpha = f(z_0)$ $\forall z \in B(z_0, R)$ $\square$

Corollario: se U è connesso, $f: U \to \mathbb{C}$ è olomorfa e $z_0 \in U$ è un punto di massimo relativo per $|f|$, allora f è costante.

DIM.: Per il teo. appena visto, f è costante su un intorno di z_0, ma allora $f(z) - f(z_0)$ è nulla su un aperto contenuto in U. Poiché è anche analitica e U è connesso, $f(z) - f(z_0)$ è nulla su tutto U, cioè f costante su U.

$\square$

12/05/2025
Frigerio

SVILUPPO DI LAURENT

È uno sviluppo in serie di potenze della forma

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

Per $z = z_0$, questo sviluppo non ha senso (se $n<0$, $(z-z_0)^n$ non è definito per $z=z_0$) ma possiamo chiederci se tale serie converge in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

Poniamo $z_0 = 0$.

Def. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ CONVERGE in z_0 se convergono entrambe le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$

In tal caso si pone $f_+(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$, $f_-(z_0) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$

e la serie conv. a $f(z_0) = f_+(z_0) + f_-(z_0)$

TEO $a := \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, $b := \limsup_{n \to -\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Allora $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge assolutamente (anzi totalmente come serie di funzioni) nella corona circolare $C(0, R_2, R_1) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_2 < |z| < R_1\}$ dove $R_1 = \frac{1}{a}$, $R_2 = b$ $\quad$ ($C(0, R_2, R_1) = \emptyset$ se $\frac{1}{a} \leq b$ e (come al solito $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$)

DIM.: Abbiamo visto che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ conv. totalmente ($\Rightarrow$ assolutamente, uniformemente) per $|z| < \frac{1}{a}$.

Inoltre, posto $w = \frac{1}{z}$
$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \frac{1}{w^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ la convergenza si ha per $|w| < \frac{1}{b}$, cioè $|\frac{1}{z}| < \frac{1}{b} \Rightarrow |z| > b$

Dunque la serie di Laurent converge totalmente su $\{|z| < \frac{1}{a}\} \cap \{|z| > b\}$ come voluto (e non converge se $|z| > \frac{1}{a}$ o $|z| < b$)

$\square$

Proposizione Siano R_1 e R_2 come sopra. Allora la serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ definisce una funz. olomorfa $f(z)$ su $C(0, R_2, R_1)$ con derivata complessa $f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

DIM.: $f_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è olomorfa e $f_+'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ (già visto)

$f_-(z) = g(h(z))$ dove $h(z) = \frac{1}{z}$ e $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$

$\hookrightarrow$ olomorfa su $C(0, R_2, R_1)$ (addirittura su $\{z \mid |z| > R_2\}$)

con derivata $f_-'(z) = g'(h(z)) \cdot h'(z) =$
$= g'(\frac{1}{z}) \cdot (-\frac{1}{z^2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n a_{-n} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} n a_n z^{n-1}$

$\square$

Proposizione Sia $f: C(0, R_2, R_1) \to \mathbb{C}$ una funzione definita come serie di Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$. Allora gli a_n sono univocamente determinati da f: se $r: [0,1] \to C(0, R_2, R_1)$ è una curva chiusa con $I(r, 0) = 1$, allora

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(nel caso olomorfo l'unicità degli a_n era data da $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$)

DIM.: Come nel caso olomorfo: per la conv. uniforme posso scambiare serie e integrale, per cui

$$\int_r \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_r \frac{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k\right)}{z^{n+1}} dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \int_r z^{k-n-1} dz = *$$

$\int_\gamma z^{k-n-1}\,dz = 0$ se $k-n-1 \neq -1$ cioè $k \neq n$
(vedi lemma seguente)

$* = a_n \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = a_n 2\pi i\, I(\gamma,0) = a_n 2\pi i$

$\square$

LEMMA: Se $n \neq -1$, la forma $z^n\,dz$ è esatta su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
$(\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$

DIM: Per $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ una primitiva è $F(z) = \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$

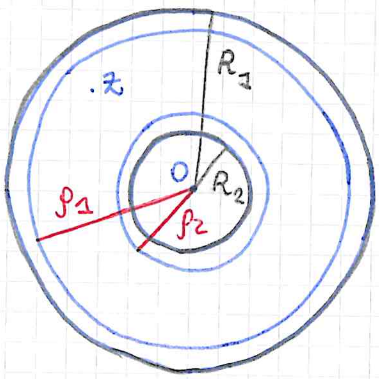
$\square$

Se f è olomorfa su una corona circolare $C(0,R_2,R_1)$
$R_2 < R_1$ allora f è sviluppabile in serie di Laurent in tale corona con serie centrata in 0, cioè il centro della corona.

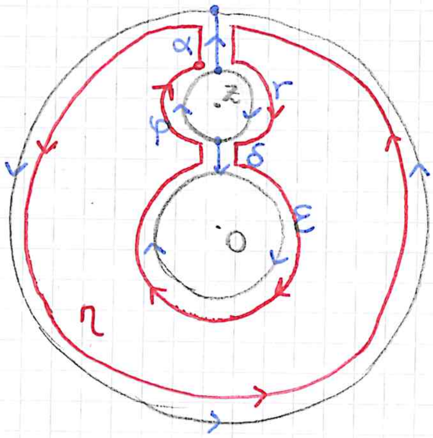
Proposizione $f: C(0,R_2,R_1) \to \mathbb{C}$ olomorfa, $z \in C(0,R_2,R_1)$ e siano ρ_2, ρ_1 t.c. $R_2 < \rho_2 < |z| < \rho_1 < R_1$. Allora

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial B(0,\rho_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\partial B(0,\rho_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \right)$$

DIM:



Infatti, il seguente cammino è omotopicamente banale in $C(0,R_2,R_1)\setminus\{z\}$



$$\eta = \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \gamma * \delta * \varepsilon * \delta^{-1} * \varphi$$

Dove β parametrizza $\partial B(0,\rho_1)$ in senso antiorario
ε " $\partial B(0,\rho_2)$ in senso orario

α e δ "congiungono" il bordo di un piccolo disco centrato in z con i bordi della corona circolare e $\gamma * \varphi$ dà una parametrizzazione in senso orario del bordo del disco piccolo.

Poiché η è omotopicamente banale in $C(0,R_2,R_1)\setminus\{z\}$ e $\frac{f(w)}{w-z}\,dw$ è chiusa in $C(0,R_2,R_1)\setminus\{z\}$, si ha

$$0 = \int_\eta \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_\alpha \cancel{\frac{f(w)}{w-z}}\,dw + \int_\beta \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{\alpha^{-1}} \cancel{\frac{f(w)}{w-z}}\,dw +$$

$$+ \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_\delta \cancel{\frac{f(w)}{w-z}}\,dw + \int_\varepsilon \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{\delta^{-1}} \cancel{\frac{f(w)}{w-z}}\,dw + \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,dw =$$

$$= \int_{\partial B(0,\rho_1)} \frac{f(w)}{w-z} + \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \int_{\partial B(0,\rho_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw =$$

$$= \int_{\partial B(0,\rho_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \underbrace{\int_{\partial B(z,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw}_{\substack{r \text{ piccolo} \\ \downarrow \text{ Cauchy} \\ 2\pi i f(z)}} - \int_{\partial B(0,\rho_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Risistemando gli addendi si ha la tesi. □

TEO Sia $f: C(0,R_2,R_1) \to \mathbb{C}$ olomorfa.
Allora f ammette uno sviluppo di Laurent su $C(0,R_2,R_1)$ centrato in 0.

<u>DIM.</u> Fissato $z \in C(0,R_2,R_1)$ e scelti ρ_1, ρ_2 con $R_2 < \rho_2 < |z| < \rho_1 < R_1$, scriviamo $f(z)$ come serie di Laurent, che sarà valida $\forall z$ con $\rho_2 < |z| < \rho_1$. Per unicità dello sviluppo e arbitrarietà di ρ_2 e ρ_1, tale sviluppo funzionerà su tutta la corona $C(0,R_2,R_1)$. Sappiamo che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\rho_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(0,\rho_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Come nel caso olomorfo, se $w \in \partial B(0,\rho_1)$ allora $|z| < |w|$, da cui $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w(1-\frac{z}{w})} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$ e

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n \text{ e si calcola}$$

$$\int_{\partial B(0,\rho_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\partial B(0,\rho_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw \right) z^n =$$

$$= f_+(z)$$

Per calcolare l'integrale lungo $\partial B(0,\rho_2)$ devo osservare che se $w \in \partial B(0,\rho_2)$, allora $|w| < |z|$, perciò affinché la sua geometrica converga devo raccogliere z e non w:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z(1-\frac{w}{z})} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-w^n}{z^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{-w^{-n}}{z^{-n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{0} w^{-n} z^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} w^{-n-1} z^n, \text{ per cui}$$

$$\frac{f(w)}{w-z} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n \rightarrow$$ conv. uniformemente, per cui

$$\int_{\partial B(0,\rho_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = -\int \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n\,dw =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\int_{\partial B(0,\rho_2)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw \right) z^n$$ e rimettendo insieme i pezzi si ha la tesi. $$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right) z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\int_{\partial B_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right) z^n \right)$$

□

Corollario (disuguaglianza di Cauchy)

$f: C(0, R_2, R_1) \to \mathbb{C}$ olomorfa, per cui $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$

$\forall\, r \in (R_2, R_1)$, sia $M(r) = \sup\{ |f(z)|,\ |z| = r \}$

Allora $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$

DIM. identica al caso olomorfo.

□

Applicazione importante delle serie di Laurent: studio delle funzioni con singolarità.

Def. $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$ (U connesso)

Una funz. olomorfa $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ si dice avere una singolarità in z_0.

Poiché U è aperto, $\exists\, \varepsilon > 0$ con $B(z_0, \varepsilon) \subseteq U$, per cui f è olomorfa su $B(z_0,\varepsilon) \setminus \{z_0\}$
$$\overset{\shortparallel}{C(z_0, 0, \varepsilon)}$$

Su questa palla f si scrive come $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = f(z)$

Def. La singolarità z_0 si dice

1) Eliminabile se $a_n = 0 \quad \forall n < 0$
2) Di tipo POLO se non è eliminabile e $\exists\, n_0 < 0$ t.c.
   $a_{n_0} \neq 0$ e $a_n = 0 \ \forall n < n_0$
   n_0 è detto ordine del polo.
3) Essenziale se $\inf\{n \mid a_n \neq 0\} = -\infty$

13/05/2025
Frigerio

ESEMPI DI SINGOLARITÀ

Sia $U = \mathbb{C}^*$

1) $f: U \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ ha una singolarità eliminabile in quanto $\frac{e^z-1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$

In effetti, f si prolunga ad una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ ponendo $f(0) = 1$.

2) $f: U \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ ha un polo di ordine 2: $f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!}{z^2} =$

$= \underbrace{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}_{\text{polo di ordine 2}} + \dots$ ↖ Sviluppo di Laurent di $f(z)$

$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4}$ ha un polo in 0 di ordine 3 (non 4!)

$$\frac{e^z-1}{z^4} = \underbrace{\frac{e^z-1}{z}}_{\text{olomorfa anche in } 0} \cdot \frac{1}{z^3}$$

3) $f: U \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = e^{1/z}$ ha sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} \cdot z^n$$

$\Rightarrow$ f ha una singolarità essenziale in 0.

Ordine di annullamento e ordine di polo

Def. $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa (e dunque analitica), $z_0 \in U$ t.c. $f(z_0) = 0$.

Si dice ORDINE DI ANNULLAMENTO di f in z_0:

1) $+\infty$ se f si annulla in un intorno di z_0 (se U è connesso, perciò su tutto U)

2) $\min\{n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \neq 0\}$ dove $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ in un intorno di z_0.

Proposizione Sia z_0 uno 0 di f. TFAE:

① l'ordine di z_0 è K

② $f^{(n)}(z_0) = 0$ $\forall n < K$ e $f^{(K)}(z_0) \neq 0$

③ $\exists$ intorno W di z_0 e una funz. olomorfa $g: W \to \mathbb{C}$ con $g(z_0) \neq 0$ t.c. $f(z) = (z-z_0)^K g(z)$ $\forall z \in W$

(in realtà vale con $W = U$).

DIM. ① $\Leftrightarrow$ ② è ovvio, perché $f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n$

① $\Rightarrow$ ③ Per analiticità $\exists$ intorno W su cui $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Per definizione di ordine

$$f(z) = \sum_{n=K}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^K \sum_{n=K}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-K} =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+K} (z-z_0)^n\right)}_{g(z)} (z-z_0)^K \qquad g(z_0) = a_K \neq 0$$

③ ⇒ ① g olom. ⇒ g analitica ⇒ $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ e $g(z_0) \neq 0$
⇒ $a_0 \neq 0$, da cui $f(z) = (z-z_0)^k g(z) =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k} = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} (z-z_0)^n$ per cui z_0 è uno zero di ordine k. □

Esiste un' interpretazione analoga di ordine di polo.

Proposizione Sia $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa.
Allora z_0 è un polo di ordine k ⇔ $\exists W$ intorno di z_0 e $g: W \to \mathbb{C}$ olomorfa con $g(z_0) \neq 0$ tali che

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \quad \forall z \in W \setminus \{z_0\}$$

DIM: Per def. di polo, f ha un polo di ord k in z_0 ⇔
⇔ $\exists$ intorno W di z_0 t.c. $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $a_{-k} \neq 0$
$\forall z \in W \setminus \{z_0\}$ ⇔ $f(z) = (z-z_0)^{-k} \cdot \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+k}$, $a_{-n} \neq 0$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z-z_0)^n}_{g(z)} \quad \text{con } g(z_0) = a_{-k} \neq 0$$ □

Def. $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una funzione MEROMORFA su U è, dato un sottoinsieme discreto e chiuso $S \subseteq U$, una $f: U \setminus S \to \mathbb{C}$ olomorfa che ha nei punti di S solo singolarità eliminabili o poli.

Esempio: se $f, g: U \to \mathbb{C}$ sono olomorfe e g non è costantemente nulla (U connesso) allora $\frac{f}{g}$ è meromorfa su U.

Infatti, $S = \{$zeri di $g\}$. Sappiamo che S è discreto e $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ dà una funzione olomorfa su $U \setminus S$.

Se $z_0 \in S$ e z_0 è uno 0 di ordine k per g, allora $g(z) = (z-z_0)^k \cdot b(z)$ dove b è olomorfa in un intorno di z_0 e $b(z_0) \neq 0$.
Per cui in tale intorno $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{b(z)(z-z_0)^k}$

olom. in un intorno di z_0

polo di ord. $\leq k$ o singolarità eliminabile

Se z_0 è anche uno zero di f di ordine k', allora
$h(z) = \frac{(z-z_0)^{k'} \cdot a(z)}{(z-z_0)^k \cdot b(z)} = (z-z_0)^{k'-k} \frac{a(z)}{b(z)}$ olomorfa vicino a z_0 e $\neq 0$ in z_0

Se $k' \geq k$ è eliminabile, altrimenti ha un polo di ord. $k-k'$.

TEOREMA (estensione di Riemann)

Sia $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa e si supponga che esista $\varepsilon > 0$ t.c. $f|_{B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}}$ sia limitata.

Allora z_0 è una singolarità eliminabile.

(Naturalmente vale anche il viceversa: una funzione continua in un punto è sempre limitata su un suo intorno).

DIM. Per ip. $\exists M > 0$ t.c. $|f(z)| \leq M \ \forall z \in B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$

In particolare, $\forall 0 < r < \varepsilon$, $M(r) = \sup\{|f(z)| \text{ t.c. } |z-z_0| = r\} \leq M$.

Per le disuguaglianze di Cauchy, se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ è lo sviluppo di Laurent di f, si ha

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall r < \varepsilon$$

Se $n < 0$, $|a_n| \leq M r^{-n}$, da cui, prendendo il limite per $r \to 0$, si ha $|a_n| = 0 \ \forall n < 0$, cioè $a_n = 0 \ \forall n < 0$, che è la tesi. □

TEOREMA (Weierstrass)

Sia $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa e sia z_0 una singolarità essenziale. Allora $\forall \varepsilon > 0$ t.c. $B(z_0,\varepsilon) \subseteq U$, $f(B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\})$ è denso in $\mathbb{C}$.

DIM. Per assurdo, se $f(B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\})$ non è denso,

$\exists z_1 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ t.c. $f(B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}) \cap B(z_1, R) = \emptyset$

Pongo $g: B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - z_1}$$

Per costruzione, $|f(z) - z_1| \geq R \ \forall z \in \text{dominio}(g)$, per cui g è ben def. è olomorfa e $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-z_1|} \leq \frac{1}{R}$

$\forall z \in B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$. Posso perciò applicare il teo. di estensione di Riemann a g, ottenendo che g si prolunga a una funzione olomorfa su tutta $B(z_0,\varepsilon)$. Chiamo comunque g questo prolungamento.

Da $g(z) = \frac{1}{f(z)-z_1}$ ottengo $f(z) = \underbrace{\frac{1}{g(z)}}_{\text{funz. meromorfa}} + z_1 \quad \forall z \in B(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$

$\Rightarrow$ f ha un polo in z_0 (se $g(z_0) = 0$) o una singolarità eliminabile (se $g(z_0) \neq 0$) ↯ □

COROLLARIO: $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora

1) z_0 è eliminabile $\iff \lim_{z \to z_0} |f(z)|$ esiste finito

2) z_0 è un polo $\iff \lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

3) z_0 è essenziale $\iff \lim_{z \to z_0} |f(z)|$ non esiste

TEOREMA DEI RESIDUI

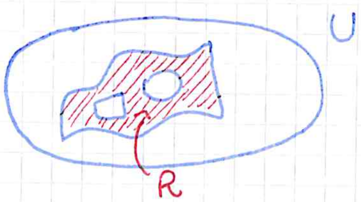
Def. $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Il residuo di f in z_0 è $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$, dove $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ è lo sviluppo di Laurent di f centrato in z_0.

FATTO: se γ è una curva chiusa percorsa in senso antiorario, che parametrizza $\partial B(z_0, R)$ con $\overline{B(z_0, R)} \subseteq U$, allora sappiamo (dalla dim. dello sviluppo di Laurent) che

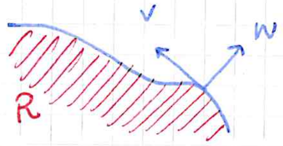
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz, \quad \text{perciò } a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \, dz$$

e dunque
$$\boxed{\int_\gamma f(z) \, dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, z_0)}$$

Def. Sia ora $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto. Una regione in U è un sottoinsieme $R \subseteq U$ compatto, che sia chiusura di un aperto e tale che ∂R sia un'unione finita di curve chiuse (C^1 a tratti)

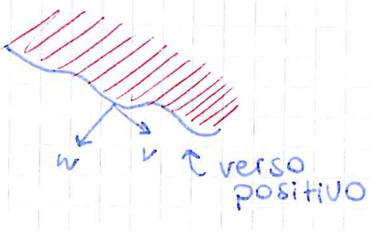


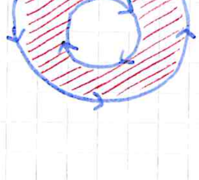
Le componenti di ∂R possono essere orientate come segue: diciamo che se $p \in \partial R$, un vettore v tangente a ∂R in p è "positivo" se (w, v) è una base positiva di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, dove w è un vettore "uscente" da R (questa def. funziona nei punti dove ∂R è C^1).



Cioè, v è positivo se individua il verso antiorario se "visto da dentro R"

(cioè se il prodotto vettoriale tra w e v è entrante nel foglio)





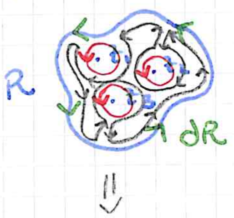
Così facendo, i bordi delle palle hanno la solita orientazione antioraria, mentre il bordo di un complementare di una palla ha orientazione oraria.
D'ora in poi, le parametrizzazioni del bordo di una regione saranno sempre positive (cioè avranno velocità positiva in ogni punto liscio).

TEO dei residui

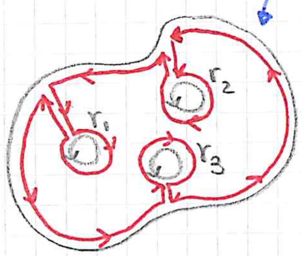
U aperto di $\mathbb{C}$, $S \subseteq U$ discreto chiuso, $f : U \setminus S \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $R \subseteq U$ una regione (perciò compatta) t.c. $\partial R \cap S = \emptyset$. Allora poiché R è compatto e S è discreto, $R \cap S$ è finito e

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_i \in R \cap S} \mathrm{Res}(f, z_i)$$

DIM. Vediamo il caso in cui R è omeomorfo a un disco



$R \cap S = \{z_1, z_2, z_3\}$



Sia α il cammino rosso
Allora α è omotopicamente banale in $R \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ e f è olomorfa su $R \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ per cui $f(z)\,dz$ è chiusa su $R \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ e

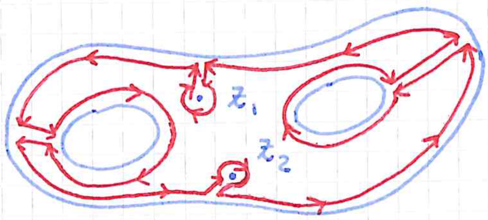
$$\int_\alpha f(z)\, dz = 0$$

Ora se r_i, $i = 1,2,3$ sono piccole circonferenze percorse in senso antiorario intorno agli z_i, α è concatenazione di: ∂R (percorso nel verso giusto), $r_1^{-1}, r_2^{-1}, r_3^{-1}$ e in "segmenti" percorsi ciascuno sia in un verso, sia nell'altro. Perciò i contributi lungo questi segmenti si annullano e

$$0 = \int_\alpha f(z)\,dz = \int_{\partial R} f(z)\,dz + \int_{r_1^{-1}} f(z)\,dz + \int_{r_2^{-1}} f(z)\,dz + \int_{r_3^{-1}} f(z)\,dz =$$

$$= \int_{\partial R} f(z)\,dz - \sum_{i=1}^{3} 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_i)$$ che è la tesi. $\square$

Lo stesso accade se R non è un disco:



CALCOLO DI RESIDUI

15/05/2025
Frigerio

Fatti:

① Sia z_0 un polo semplice (= di ordine 1) per una funzione olomorfa $f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Allora

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{vicino a } z_0$$
$$= \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z) \quad \text{olomorfa anche in } z_0.$$

Allora $(z-z_0)\cdot f(z) = a_{-1} + (z-z_0)g(z)$, da cui, passando al limite per $z \to z_0$, $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = a_{-1} + \underbrace{\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z)}_{=0}$ (g continua in z_0)

Dunque $\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)}$
(per poli semplici)

Se ne deduce che se $f(z) = \frac{h(z)}{K(z)}$, $h(z_0) \neq 0$ e $K(z_0) = 0$, $K'(z_0) \neq 0$ con h, K olomorfe, allora $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) =$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)}{K(z)} h(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{K(z)-\underbrace{K(z_0)}_{=0}} \cdot h(z) = \frac{h(z_0)}{K'(z_0)}$$

Dunque $\operatorname{Res}\left(\frac{h(z)}{K(z)}, z_0\right) = \frac{h(z_0)}{K'(z_0)}$ (se h e K sono come sopra)

② Se il polo di f ha ordine 2, $f(z) = \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$ ← olomorfa anche in z_0

da cui $\underbrace{(z-z_0)^2 f(z)}_{=h(z)} = a_{-2} + a_{-1}(z-z_0) + (z-z_0)^2 g(z)$

e $a_{-1} = h'(z_0)$. Dunque se f ha un polo di ordine 2, $\operatorname{Res}(f, z_0) = h'(z_0)$, con $h(z) = (z-z_0)^2 f(z)$.

③ In generale, se f ha un polo di ordine n, posto $h(z) = (z-z_0)^n f(z)$ (che sarà olomorfa)

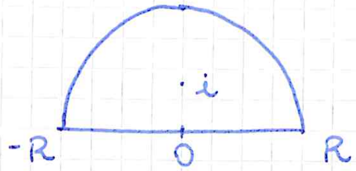
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{h^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} \quad \text{(stessa dimostrazione)}$$

Uso del teorema dei residui per il calcolo di integrali impropri

Ex: si calcoli $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

Idea: definiamo $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, funzione meromorfa su $\mathbb{C}$. Definiamo una regione C_R, al variare di $R > 0$, tale che, calcolando $\int_{\partial C_R} f(z)dz$ e passando al limite, otteniamo il risultato cercato. Sia $C_R = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |z| \leq R \text{ e } \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$

$C_R =$



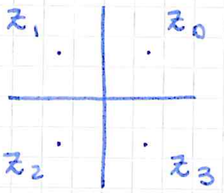
I poli di f si trovano nei punti in cui si annulla $1+z^4$, cioè dove $z^4=-1$, cioè $z_0 = e^{i\pi/4}$, $z_1 = e^{3/4 i\pi}$, $z_2 = e^{5/4 i\pi}$, $z_3 = e^{7/4 i\pi}$.

Sono poli semplici (perché sono zeri semplici di z^4+1) e perciò $\forall i = 0, \dots, 3$

$$\mathrm{Res}(f, z_i) \underset{\nearrow}{=} \frac{1}{4z_i^3} = \frac{z_i}{4z_i^4} = -\frac{z_i}{4}$$

Uso il Fatto ①

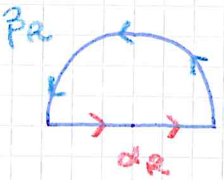
$\uparrow$ derivata di $1+z^4$ calcolata in z_i



Per $R>1$ il semicerchio C_R contiene z_0 e z_1, per cui se $R>1$, per il teorema dei residui,

$$\int_{\partial C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,z_0) + \mathrm{Res}(f,z_1)) =$$
$$= 2\pi i \left(-\frac{z_0}{4} - \frac{z_1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} + \right.$$
$$\left. + \cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\pi i}{2}\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Una parametrizzazione positiva di ∂C_R è data da $\alpha_R * \beta_R$ dove $\alpha_R : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\alpha_R(t) = t$



$\beta_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\beta_R(t) = R\cdot e^{it}$

$$\int_{\alpha_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(\alpha_R(t))\cdot\alpha_R'(t)\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^4}\,dt$$

$$\int_{\beta_R} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(\beta_R(t))\,\beta_R'(t)\,dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^4e^{4it}}\cdot iRe^{it}\,dt$$

$$\left|\frac{1}{1+R^4e^{4it}}\cdot iRe^{it}\right| \leq \frac{|iRe^{it}|}{|1+R^4e^{4it}|} \leq \frac{R}{R^4-1}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\beta_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi}\frac{1}{1+R^4e^{4it}}\cdot iRe^{it}\,dt\right| \leq \int_0^{\pi}\left|\frac{1}{1+R^4e^{4it}}\cdot iRe^{it}\right|dt \leq$$
$$\leq \int_0^{\pi}\frac{R}{R^4-1}\,dt = \pi\cdot\frac{R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Allora

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \lim_{R\to+\infty}\int_{\partial C_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{\alpha_R} f(z)\,dz + \int_{\beta_R} f(z)\,dz =$$
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{1+t^4}\,dt + 0 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^4}\,dt$$

Ex: Si calcoli $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt$

Sappiamo da Analisi 1 che si tratta di un integrale assolutamente convergente. Proviamo ad adottare la stessa strategia di prima. Vorrei che il numeratore fosse limitato lungo β_R, così $\int_{\beta_R} \frac{\text{"limitato"}}{1+z^2}\, dz \sim \frac{R}{R^2-1} \to 0$

β_R ha lunghezza πR

Perciò porre $f(t) = \frac{\cos z}{1+z^2}$ dove $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ è errato.

Se $a \in \mathbb{R}$, $\cos i \cdot a = \cosh a$ cresce molto per $a \to +\infty$.

Consiglio: $\sin t$ e $\cos t$ è meglio pensarli come parte immaginaria e reale di e^{it}.
(così $|e^{it}| = 1$ $\forall t$ e la stima lungo β_R sarà più facile).

Poniamo $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ e procediamo come prima.

I poli di f sono $z_0 = i$ e $z_1 = -i$, sono entrambi semplici per cui

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{e^{iz_0}}{2z_0} = \frac{e^{i \cdot i}}{2i} = \frac{1}{2ei}$$

Se C_R è come nell'esercizio precedente, $R > 1$ e α_R, β_R come prima, allora

$$\int_{\partial C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{2\pi i}{2ei} = \frac{\pi}{e}$$

$$\int_{\alpha_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{t^2+1}\, dt = \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{t^2+1}\, dt + i \underbrace{\cancel{\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t^2+1}\, dt}}_{=0}$$

(perché $\sin t$ è dispari)

$$\int_{\beta_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2+1}}_{f(\beta(t))} \underbrace{iRe^{it}\, dt}_{\beta'(t)}$$

$$e^{iRe^{it}} = e^{iR(\cos t + i \sin t)} = e^{iR\cos t - R\sin t} = e^{iR\cos t} \cdot e^{-R\sin t}$$

$e^{iR\cos t}$ ha modulo 1 perché $R\cos t \in \mathbb{R}$

$t \in [0, \pi]$
$-R\sin t \leq 0$
$|e^{-R\sin t}| \leq 1$

Dunque $|e^{iRe^{it}}| \leq 1$ e

$$\left| \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2+1} \cdot iRe^{it} \right| \leq \frac{R}{R^2-1}$$ che tende a 0 per $R \to +\infty$

perciò $$\left| \int_{\beta_R} f(z)\, dz \right| \leq \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2+1} \cdot iRe^{it} \right| dt \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

Perciò $$\frac{\pi}{e} = \lim_{R \to +\infty} \int_{\partial C_R} f(t)\, dt = \lim_{R \to +\infty} \int_{\alpha_R} f(t)\, dt + \int_{\beta_R} f(t)\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t^2+1}\, dt + 0 .$$

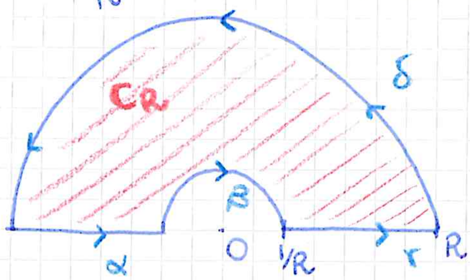
Ex: Si calcoli $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

In 0 non ci sono problemi (almeno per l'integrale reale) perché $\frac{\sin t}{t} \to 1$ per $t \to 0$ e sappiamo che l'integrale deve convergere.

Poiché $\frac{\sin t}{t}$ è pari, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

Poniamo $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ $\to$ ha un polo in 0 per cui non posso scegliere C_R come prima. Per evitare l'origine pongo

$C_R = \{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{R} \leq |z| \leq R,\ \operatorname{Im}(z) \geq 0 \}$, $R > 1$



Si ha $\int_{\partial C_R} f(z)\, dz = 0$ (per il teo. dei residui o perché f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e ∂C_R è omotopicamente banale in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$)

$\partial C_R = \alpha_R * \beta_R * \gamma_R * \delta_R$, per cui

- $\alpha_R : [-R, -1/R] \to \mathbb{C}$, $\alpha_R(t) = t$
- $\beta_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\beta_R(t) = \frac{1}{R} e^{i(\pi - t)}$
- $\gamma_R : [1/R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) = t$
- $\delta_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\delta_R(t) = R e^{it}$

$$\lim_{R\to+\infty} \left(\int_{\alpha_R} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \right) = \lim_{R\to+\infty} \left(\int_{-R}^{-1/R} \frac{\cos t + i \sin t}{t}\, dt + \int_{1/R}^{R} \frac{\cos t + i\sin t}{t}\, dt \right)$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \Bigg(\underbrace{\int_{-R}^{-1/R} \cancel{\frac{\cos t}{t}}\, dt + \int_{1/R}^{R} \cancel{\frac{\cos t}{t}}\, dt}_{\text{opposti perché } \frac{\cos t}{t} \text{ è dispari}} + i \left(\int_{-R}^{-1/R} \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_{1/R}^{R} \frac{\sin t}{t}\, dt \right) \Bigg) =$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

percorro una semicirconferenza nel verso sbagliato

Vediamo che $\lim_{R\to+\infty} \int_{\beta_R} f(z)\, dz = \left(-\frac{1}{2}\right) 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$ $(*)$

Infatti, $f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + g(z)$ con g olomorfa anche in 0, in quanto f ha un polo semplice in 0, per cui

$$\int_{\beta_R} f(z)\, dz = \int_{\beta_R} \frac{a_{-1}}{z}\, dz + \int_{\beta_R} g(z)\, dz =$$

$$\int_0^\pi \frac{a_{-1}}{\beta_R(t)} \beta_R'(t)\, dt + \int_0^\pi q(\beta_R(t))\, \beta_R'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\pi \frac{a_{-1}}{\frac{1}{R} \cancel{e^{i(\pi-t)}}} \frac{1}{R} (-i) \cancel{e^{i(\pi-t)}}\, dt + \int_0^\pi q(\beta_R(t))\, \beta_R'(t)\, dt =$$

$= -i\pi a_{-1}$ + termine che tende a 0 per $R \to +\infty$ in quanto q è limitata in un intorno di 0 e perciò

$$\int_0^\pi |q(\beta_R(t))| \cdot |\beta_R'(t)|\, dt \leq K \cdot \int_0^\pi |\beta_R'(t)|\, dt = K \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{\text{lungh}(\beta_R)}$$

Questo mostra quanto asserito sopra.$^{(*)}$

$\text{Res}(f,0) = 1$ (ovvio), per cui $\lim_{R \to +\infty} \int_{\beta_R} f(t)\,dt = -i\pi \text{Res}(f,0) = -i\pi$

Per concludere manca la stima lungo δ_R.

$$|f(\delta_R(t)) \cdot \delta_R'(t)| = \left| \frac{e^{iRe^{it}}}{\cancel{Re^{it}}} \cdot i\cancel{Re^{it}} \right| = |e^{iRe^{it}}| = e^{-R\sin t}$$

Bisogna osservare che $\lim_{R \to +\infty} \int_0^\pi e^{-R\sin t}\, dt = 0$. Ad esempio perché $e^{-R\sin t}$ è dominato da 1 e tende puntualmente a 0 su $(0,\pi)$ e a 1 su $\{0\} \cup \{\pi\}$.

Mettendo tutto insieme,

$$0 = \lim_{R \to \infty} \int_{\partial C_R} f(t)\,dt = \lim_{R \to +\infty} \left(\int_{\alpha_R} f(t)\,dt + \int_{r_R} f(t)\,dt \right) +$$

$$+ \lim_{R \to \infty} \int_{\beta_R} f(t)\,dt + \lim_{R \to +\infty} \int_{\delta_R} f(t)\,dt = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt + (-i\pi) + 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} = \pi \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} = \pi/2.$$

76 $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 2\pi \}$

Di ciascuna delle seguenti forme dire se è chiusa/esatta.

- $\omega_1 = \frac{1}{z^2} dz \rightarrow$ esatta (già visto in un lemma) $\Downarrow$ chiusa
- $\omega_2 = \frac{1}{e^z - 1} dz$ non definita per $e^z = 1$, $e^{a+ib} = 1$

$e^a \cdot e^{ib} = 1$, $e^a = |1| = 1 \rightarrow a = 0$

$b = \arg(1) = 0 \rightarrow b = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow \omega_2$ è definita in U.

$\frac{1}{e^z - 1}$ olomorfa $\Rightarrow \frac{1}{e^z - 1} dz$ chiusa

Sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ $\quad \gamma(t) = e^{it}$

$\int_\gamma \omega_2 = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, 0)$. In 0 ho un polo semplice,

$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ per cui $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{e^0} = 1 \neq 0$

$\int_\gamma \omega_2 \neq 0$ quindi ω_2 non è esatta.

- $\omega_3 = \frac{1}{\bar{z}} dz$. Per il teo. di Morera $f(z)dz$ chiusa SSE f è olomorfa. $\frac{1}{\bar{z}}$ non è olomorfa $\Rightarrow \omega_3$ non chiusa e non esatta
- $\omega_4 = \frac{1}{\bar{z}} d\bar{z}$. Vediamo che $\forall \gamma$ C^1 a tratti, se $\omega_0 = \frac{1}{z} dz$, allora $\int_\gamma \omega_4 = \overline{\int_\gamma \omega_0}$. $\quad \gamma : [a, b] \rightarrow U$

$$\int_\gamma \omega_4 = \int_a^b \frac{1}{\overline{\gamma(t)}} d\bar{z}(\gamma'(t))\, dt = \int_a^b \frac{1}{\overline{\gamma(t)}} \overline{\gamma'(t)}\, dt = \int_a^b \overline{\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right)} dt =$$

$$= \overline{\left(\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt\right)} = \overline{\int_\gamma \omega_0}.$$ Allora $\int_\gamma \frac{d\bar{z}}{\bar{z}} = 0 \iff \int_\gamma \frac{dz}{z} = 0$

$\Rightarrow \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}$ chiusa ma non esatta. $\qquad$ ($\frac{dz}{z}$:) chiusa ma non esatta

80 Sia $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Calcolare $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at}}{e^t + 1} dt$

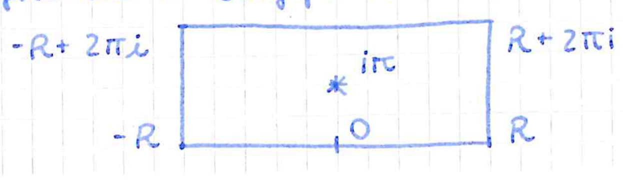
Hint: al variare di $R > 0$, si consideri la regione C_R rettangolare di vertici $-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i$

$f(z) := \frac{e^{az}}{e^z + 1}$ meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli semplici (perché la derivata del denominatore non è mai nulla)

nei punti dove $e^z + 1 = 0$, $e^z = -1 \iff z = (\pi + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$

I poli sono $z_k = \pi + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

Seguendo il suggerimento:



L'unico polo in C_R è $z_0 = i\pi$, e $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{e^{az_0}}{e^{z_0}} = -e^{a\pi i}$

Per il teorema dei residui, $\displaystyle\int_{\partial C_R} \frac{e^{az}}{e^z+1}\,dz = -2\pi i\, e^{a\pi i}$

Una parametrizzazione positiva del bordo di C_R è data da $\alpha * \beta * \gamma * \delta$ dove:

$$\alpha : [-R, R] \to \mathbb{C}, \qquad \alpha(t) = t$$
$$\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \qquad \beta(t) = R + it$$
$$\gamma : [-R, R] \to \mathbb{C}, \qquad \gamma(t) = -t + 2\pi i$$
$$\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \qquad \delta(t) = -R + (2\pi - t) i$$

- $\displaystyle\int_\alpha f(t)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{e^t+1}\,dt \qquad (\alpha'(t) = 1)$

- $\displaystyle\int_\gamma f(t)\,dt = \int_{-R}^{R} -\frac{e^{a(-t+2\pi i)}}{e^{(-t+2\pi i)}+1}\,dt \qquad (\gamma'(t) = -1)$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{e^{-at}\cdot e^{a2\pi i}}{e^{-t}\cdot \underbrace{e^{2\pi i}}_{1} + 1}\,dt = -e^{2\pi a i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{-at}}{e^{-t}+1}\,dt =$$

$$\underset{y=-t}{=} -e^{2\pi a i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ay}}{e^y+1}\,(-dy) = -e^{2\pi a i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{at}}{e^t+1}\,dt$$

Perciò $\displaystyle\int_\alpha f(t)\,dt + \int_\gamma f(t)\,dt = (1 - e^{2\pi a i})\int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{e^t+1}\,dt$

- $\displaystyle\int_\beta \frac{e^{az}}{e^z+1}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{e^{R+it}+1}\, i\,dt$. Ora $\displaystyle\left|\frac{e^{a(R+it)}}{e^{R+it}+1}\cdot \cancel{i}\right| =$

$$= \left|\frac{e^{aR}\cdot \cancel{e^{at}}}{e^R\cdot \underbrace{e^{it}}_{\text{modulo } 1} + 1}\right| \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1}, \text{ per cui } \left|\int_\beta f(t)\,dt\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R-1}\,dt =$$

$$= 2\pi\,\frac{e^{aR}}{e^R-1}$$

Poiché <1, per $R \to +\infty$ questa quantità tende a 0

In modo analogo $\displaystyle\int_\delta f(t)\,dz \to 0$ per $R \to +\infty$.

Perciò $\displaystyle -2\pi i\, e^{a\pi i} = \lim_{R\to+\infty}\int_{\partial C_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty}(1-e^{2\pi a i})\int_{-R}^{R}\frac{e^{at}}{e^t+1}\,dt$

$$= (1 - e^{2\pi a i})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at}}{e^t+1}\,dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{at}}{e^t+1}\,dt = \frac{2\pi i\, e^{a\pi i}}{e^{2\pi a i}-1}$$

$e^{a\pi i} = \cos a\pi + i\sin a\pi$ formule di duplicazione

$e^{2\pi a i} = \cos 2\pi a + i\sin 2\pi a - 1 \longrightarrow \cos^2\pi a - \sin^2\pi a + 2i\sin\pi a\cos\pi a - 1 =$

$= \cancel{1} - 2\sin^2\pi a + 2i\sin\pi a\cos\pi a \cancel{-1} = 2\sin\pi a\,(-\sin\pi a + i\cos\pi a)$

(NB! $(e^a)^b = e^{ab}$ vale solo se b è un numero naturale)

Dunque $\displaystyle\frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2\pi a i}-1} = \frac{\cancel{2}\pi \cancel{i}(\cancel{\cos a\pi} + i\sin a\pi)}{\cancel{2}\sin\pi a(-\cancel{\sin\pi a} + i\cos a\pi)} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \in \mathbb{R}$

(Per velocizzare si poteva moltiplicare num. e den. per $e^{-a\pi i}$)