ALCUNI FATTI SUI GRUPPI

MAURIZIO MONGE

Siano G_1, G_2 sottogruppi di indice finito di qualche gruppo Γ. È facile mostrare che esiste un sottogruppo contenuto in G_1 e G_2 che ha indice finito in essi, e in particolare possiamo prendere $G_1 \cap G_2$ e considerare l'isomorfismo di G_1-sets

$$G_1G_2/G_2 \xrightarrow{\simeq} G_1/(G_1 \cap G_2), \qquad g_2G_1 \mapsto g_2(G_1 \cap G_2) \quad \forall g_2 \in G_2 \tag{1}$$

(che è facile dimostrare essere un isomorfismo) per mostrare che essendo

$$(G_1G_2 : G_2) \leq (\Gamma : G_2) < +\infty$$

anche $(G_1 : G_1 \cap G_2)$ è finito (e similarmente per G_2).

Ci chiediamo se sia vero il contrario, ovvero che se G_1 e G_2 hanno un sottrogruppo di indice finito H 'in comune' (nel senso che esistono immersioni $\phi_1 : H \hookrightarrow G_1$ e $\phi_2 : H \hookrightarrow G_2$ le cui immagini hanno indice finito) debba esistere un gruppo Γ in cui essi sono presenti come sottogruppi di indice finito, e in cui H viene identificato. Più precisamente, ci chiediamo se esista Γ e immersioni ψ_1, ψ_2 di G_1, G_2 in Γ le cui immagini hanno indice finito e il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook, "\phi_1"] \arrow[d, hook, "\phi_2"'] & G_1 \arrow[d, hook, "\psi_1"'] \\ G_2 \arrow[r, hook, "\psi_2"] & \Gamma \end{tikzcd}$$

E' possibile costruire un controesempio nel seguente modo. Consideriamo gli elementi di $SL_2(\mathbb{Z})$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che come è ben noto generano tutto $SL_2(\mathbb{Z})$. Sia

$$V = ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente S, V generano $SL_2(\mathbb{Z})$, e inoltre $S^2 = V^6 = 1$.

Consideriamo quindi i gruppi $G_1 = \mathbb{Z}^2 \rtimes \langle S \rangle$ e $G_2 = \mathbb{Z}^2 \rtimes \langle V \rangle$, in cui l'azione per coniugio di S, V sugli elementi $\mathbb{Z}^2$ è data dalla loro azione come elementi di $SL_2(\mathbb{Z})$. Questi gruppi G_1, G_2 hanno Z^2 come sottogruppo normale di indice finito, e inoltre un gruppo, Γ poniamo, che contenga entrambi questi come sottogruppi non identifica nessun altro loro elemento dato che le azioni delle potenze di S, V su $\mathbb{Z}^2$ sono non banali e tutte differenti. Inoltre nel generato in Γ di questi gruppi $\mathbb{Z}^2$ deve ancora essere normale dato che viene normalizzato da tutti gli elementi di G_1, G_2, e siccome S, V generano $SL_2(\mathbb{Z})$ abbiamo che il generato in Γ deve essere isomorfo a $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ perché deve contenere tutti gli isomorfismi di $\mathbb{Z}^2$. Ma

Date: 15 aprile 2009.

$SL_2(\mathbb{Z})$ è infinito, e quindi G_1 e G_2 non possono avere indice finito in Γ, in altre parole

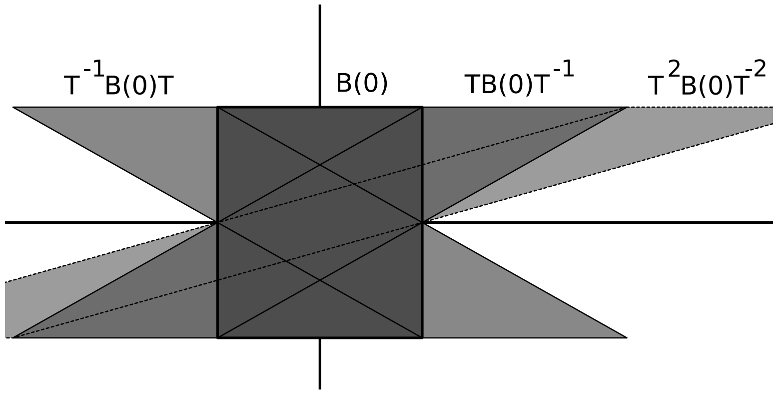
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "\phi_2"'] & \mathbb{Z}^2 \rtimes \langle S \rangle \arrow[d, hook, dashed] \arrow[ddr, hook] & \\
\mathbb{Z}^2 \rtimes \langle V \rangle \arrow[r, hook, dashed] \arrow[drr, hook] & \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z}) \arrow[dr, hook, dashed] & \\
 & & \Gamma
\end{tikzcd}$$

Mostriamo ora come possa succedere che la classe di quasi-isometria di una gruppo possa essere diversa dalla classe del gruppo quando è sottogruppo di un altro gruppo in cui ha indice infinito. Consideriamo $\mathbb{Z}^2$ come sottogruppo di $\mathbb{Z}^2 \rtimes \langle T \rangle$, dove T è la matrice di $SL_2(\mathbb{Z})$ che abbiamo definito sopra (la quale ha ordine infinito). In particolare coniugare un elemento di $\mathbb{Z}^2$ equivale ad applicare la matrice, che agisce come la mappa $(a, b) \mapsto (a + b, b)$

Come è ben noto e facile da verificare, la crescita di $\mathbb{Z}^2$ è data dalla mappa $R \mapsto R^2$. Se prendo la base Σ (non minimale) di $\mathbb{Z}^2$ data dai vettori non nulli le cui coordinate appartengono all'insieme $\{-1, 0, 1\}$, abbiamo per ogni intero $R > 0$ che la palla di raggio R centrata nell'origine è precisamente formata dagli (a, b) con $|a| \leq R$ e $|b| \leq R$.

Osserviamo che se $B_R(0)$ è tale palla, allora

$$\bigcup_{i=-R}^{R} T^i B_R(0) T^{-i} = \{(a, b) : |b| \leq R, |a| \leq (|b| + 1)R\}$$



e in particolare questo insieme è contenuto nella palla di raggio $3R$ nel gruppo $\mathbb{Z}^2 \rtimes \langle T \rangle$ con la base di generatori $\Sigma \cup \{T, T^{-1}\}$. Inoltre esso contiene precisamente

$$(2R + 1)^2 + \frac{R(R + 1)}{2} \cdot 2R = O(R^3)$$

elementi.

Quindi la crescita di $\mathbb{Z}^2$ con la metrica indotta è almeno R^3, che non è asintoticamente equivalente a R^2, e quindi $\mathbb{Z}^2$ non è quasi-isometrico a $\mathbb{Z}^2$ con la metrica indotta come sottogruppo di $\mathbb{Z}^2 \rtimes \langle T \rangle$.

Scuola Normale Superiore di Pisa - Piazza dei Cavalieri, 7 - 56126 Pisa
E-mail address: `maurizio.monge@gmail.com`