Dimostrazione elementare del teorema di Van der Waerden

Eugenio Paracucchi

7 luglio 2019

Sommario

Questo seminario tratta di un importante risultato della Teoria di Ramsey, il teorema di Van der Waerden. Nel corso *Ultrafiltri e Metodi nonstandard* lo abbiamo dimostrato usando modelli nonstandard e risultati di dinamica topologica. In questo seminario daremo una dimostrazione *elementare* di tale teorema.

1 Colorazioni

Un oggetto di studio della teoria di Ramsey sono le *colorazioni* di sottoinsiemi dei numeri naturali e loro proprietà.

Definizione 1.1. Sia X un insieme ed r un intero poitivo. Una r-colorazione di X è una funzione

$$\chi : X \longrightarrow \{1, \dots, r\}.$$

Un sottoinsieme $S \subseteq X$ si dice monocromatico (rispetto a χ) se χ è costante su S

Data una r-colorazione se ne possono costruire altre, per esempio:

Definizione 1.2. Siano m, n interi positivi e sia χ una r-colorazione di $\{1, \dots, mn\}$, la r^m-colorazione di $\{1, \dots, n\}$ indotta da χ è:

$$\chi'(i) = (\chi((i-1)m+1), \chi((i-1)m+2), \dots, \chi((i-1)m+m)),\ i = 1, \dots, n.$$

Osservazione 1.1. La colorazione indotta da χ definita sopra è effettivamente una r^m colorazione in quanto le m-uple i cui elementi appartengono a $\{1, \dots, r\}$ sono in totale r^m.

2 Il teorema di Van der Waerden

Un importante teorema sulle colorazioni, che trova svariate applicazioni in combinatoria è il teorema di Van der Waerden. Esso ha due formulazioni (equivalenti): una finita e una infinita.

Teorema 2.1 (Van der Waerden finito)**.** *Per ogni k e r interi positivi esite $W(k, r)$ tale che per ogni r-colorazione di $[1, W(k, r)]$ esiste una progressione aritmetica lunga k monocromatica, cioè esistono $p, q \geq 1$ tali che*

$$\{p + xq \mid x \in [1, k]\}$$

sia monocromatico.

Teorema 2.2 (Van der Waerden infinito)**.** *Per ogni k, r interi positivi e per ogni r-colorazione dei naturali $\mathbb{N}$ esiste una progressione aritmetica lunga k monocromatica.*

Osservazione 2.1. Il Teorema 2.2 segue immediatamente dal Teorema 2.1, infatti la versione finita del teorema è più forte di quella infinita.

Dimostreremo quindi la prima formulazione.

2.1 Dimostrazione del teorema di Van der Waerden

Dimostreremo un enumciato più forte che ha come caso particolare il teorema di Van der Waerden.

Cominciamo col dare una definizione:

Definizione 2.1. Siano dati $l, m \geq 1$, diciamo che due m-uple $(x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_m)$ in $[0, l]^m$ sono equivalenti se coincidono fino all'ultima occorrenza di l compresa, cioè esiste un indice j tale che:

1. $x_i = y_i$ per ogni $i = 1, \ldots, j$;
2. $x_j = y_j = l$;
3. $x_i \neq l$ e $y_i \neq l$ per $i > j$

Osservazione 2.2. Secondo la definizione appena data due m-uple che non contengono occorrenze di l sono equivalenti.

Sia $S(l, m)$ il seguente enunciato: "per ogni $r \in \mathbb{N}$ esiste $N(l, m, r) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni r-colorazione χ di $[1, N(l, m, r)]$ esistono $a, d_1, \ldots, d_m$ interi positivi tali che $\chi(a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i)$[1] sia costante sulle classi di equivalenza di $[0, l]^m$."

[1]Deve valere, ovviamente, $a + l \sum_{i=1}^{m} d_i \leq N(l, m, r)$.

Osservazione 2.3. Notiamo che l'enunciato $S(l,m)$ equivale all'enunciato $S'(l,m)$ in cui si considerano r-colorazioni di traslati dell'intervallo $[1, N(l,m,r)]$.

Teorema 2.3. *L'enunciato $S(l,m)$ vale per ogni $l,m \geq 1$.*

Dimostrazione. Procediamo per doppia induzione su l ed m.

$\mathbf{S(1,1)}$. L'enunciato diventa "per ogni r esiste $N(1,1,r)$ tale che per ogni r-colorazione di $[1, N(1,1,r)]$ esistono a,d tali che $\{a\}$ e $\{a+d\}$ siano monocromatici" che è vero, basta prendere $N(1,1,r) = 2$ e $a = d = 1$.

$(\mathbf{S(l,1)} \wedge \mathbf{S(l,m)}) \Rightarrow \mathbf{S(l,m+1)}$. Fissiamo r. Per ipotesi induttiva poniamo $M = N(l,m,r)$ e $M' = N(l,1,r^m)$. Suddividiamo l'intervallo $[1, MM']$ in M' intervallini di lunghezza M:

$$W_j = [(j-1)M + 1, jM], \quad j = 1, \ldots, M'.$$

Fissiamo una r-colorazione $\chi : [1, MM'] \to [1,r]$ e consideriamo la r^M-colorazione χ' di $[1, M']$ indotta da χ. Per definizione di M' esistono a', d' tale che $\chi'(a' + xd')$ è costante per $x = 0, \ldots, l-1$. Poichè $a' \leq M'$ allora $W_{a'} \subseteq [1, MM']$ è lungo M, quindi applicando $S(l,m)$ su di esso (versione traslata) esistono $a, d_1, \ldots, d_m$ tali che tutte le somme $a + \sum_{i=0}^m x_i d_i$, $x_i \in [0,l]$ siano in $W_{a'}$ e che $\chi(a + \sum_{i=0}^m x_i d_i)$ sia costante sulle classi di equivalenza di $[0,l]^m$. A questo punto $S(l, m+1)$ vale con $N(l, m+1, r) = MM'$, ponendo $a = a$, $d'_i = d_i \ \forall i = 1, \ldots m$ e $d'_{m+1} = d'M$. Certamente vale

$$a + l\sum_{i=1}^{m+1} d_i = a + l\sum_{i=1}^{m} d_i + l d_{m+1} \leq a'M + l d'M \leq MM'$$

Vediamo adesso che i valori

$$\chi(a + \sum_{i=1}^{m+1} x_i d_i) = \chi(a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i + x_{m+1} d'M)$$

sono costanti sulle classi di equivalenza di $[0,l]^{m+1}$. Vediamo nel dettaglio

1. se $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ è tale che $x_{m+1} = l$ allora la sua classe di equivalenza coincide con lei stessa e quindi la proprietà è verificata, altrimenti se $x_{m+1} \neq l$ allora $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) \sim (y_1, y_2, \ldots, y_{m+1})$ se e soltanto se $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \sim (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

2. per costruzione possiamo scrivere

$$a + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i = (a'-1)M + \xi, \quad 1 \leq \xi \leq M$$

in particolare possiamo scrivere

$$(a'-1)M+1+x_{m+1}d'M \leq a+\sum_{i=1}^{m} x_i d_i + x_{m+1}d'M \leq a'M + x_{m+1}d'M$$

cioè tale valore appartiene all'intervallo $W_{a'+x_{m+1}d'}$.

3. fissato x_{m+1} i valori sono costanti sulle classi di equivalenza. Non possiamo ancora tuttavia concludere ancora.

4. fissati $x_i,\ldots,x_m$ allora i valori sono costanti sulle classi al variare di $x_{m+1} \in [0,l]$, infatti:

$$\chi(a+\sum_{i=1}^{m} x_i d_i + x_{m+1}d'M) = \chi((a'-1)M+\xi+x_{m+1}d'M) = \chi'(a'+x_{m+1}d')(\xi)$$

   e tutti questi valori (ξ è fisso) sono tutti costanti al variare di x_{m+1} per definizione di a', d'.

$(\forall \mathbf{m}\ \mathbf{S}(\mathbf{l},\mathbf{m})) \Rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{l}+\mathbf{1},\mathbf{1})$. Dobbiamo dimostrare $S(l+1,1)$, cioè: $\forall r\ \exists N(l+1,1,r)$ tale che per ogni r-colorazione χ di $[1,N(l+1,1,r)]$ esistono a', d' tali che $\chi(a'+xd')$ è costante per ogni $x=0,\ldots,l$. Fissiamo r. Per ipotesi induttiva vale $S(l,r)$ cioè per ogni $\gamma:[1,N(l,r,r)]\to[1,r]$ esitono $a,d_1,\ldots,d_r$ tali che $\gamma(a+\sum_{i=1}^{r} x_{id_i})$ sia costante sulle classi di equivalenza di $[1,l]^r$.

Mostriamo che $N(l+1,1,r)=2N(l,r,r)$. Sia χ una r-colorazione di $[1,2N(l,r,r)]$ e χ' la r-colorazione di $[1,N(l,r,r)]$ indotta da χ, allora esistono $a,d_1,\ldots,d_r$ come sopra per χ'. Consideriamo i numeri

$$a+l\sum_{i=1}^{s} d_i, \quad s=0,\ldots,r^2$$

colorati da χ, poichè sono $r+1$ e ho a disposizione solo r colori per il principio dei cassetti esistono $s,t\in[0,r]$, $s<t$ tali che

$$\chi(a+l\sum_{i=1}^{s} d_i) = \chi(a+l\sum_{i=1}^{t} d_i) \qquad \star$$

Poniamo $a'=a+l\sum_{i=1}^{s} d_i$ e $d'=\sum_{i=s+1}^{t} d_i$ e mostriamo che con questi valori $S(l+1,1)$ è vero.

[2]Per s=0 la somma è vuota quindi il numero risultante è a.

Infatti, calcoliamo

$$\chi(a' + xd') = \chi(a + l\sum_{i=1}^{s} d_i + x\sum_{i=s+1}^{t} d_i)$$

che corrisponde a

$$\chi(a + \sum_{i=1}^{r} x_i d_i)$$

per $(x_1, \ldots, x_r) \in [0, l]^r$ con

$$\begin{cases} x_i = l \quad se\ i = 1, \ldots, s \\ x_i = x \quad se\ i = s+1, \ldots, t \\ x_i = 0 \quad se\ i = t+1, \ldots, r \end{cases}$$

ma tutte le r-uple con $x = 0, \ldots, l-1$ sono equivalenti tra di loro quindi per ipotesi induttiva per questi valori hanno tutti lo stesso colore. D'altra parfe se $x = l$ allora $\chi(a' + ld') = \chi(a')$ per $\star$, ma allora hanno tutti lo stesso colore, da cui la tesi. □

Il teorema di Van der Waerden segue ora immediatamente dal teorema appena dimostrato, notiamo infatti che l'enunciato $S(k, 1)$ è "per ogni r esite $N(k, 1, r)$ tale che per ogni r-colorazione di $[1, N(k, 1, r)]$ esitono p, q tali che $p + xq$ abbiano lo stesso colore per $x = 0, \ldots, k-1$", cioè proprio l'enunciato dei Van der Waerden.

2.2 Un' applicazione

Presentiamo infine un' applicazione, a mio parere elegante, del teorema di Van der Waerden:

Esercizio 1. *Coloriamo i punti di una circonferenza con un numero finito di colori. Allora esistono infiniti (più che numerabili) triangoli isosceli inscritti in tale circonferenza, ogniuno dei quali con i vertici dello stesso colore.*

Soluzione. Sia r il numero di colori. Fissiamo un punto P_1 sulla circonferenza e consideriamomo un N-agono regolare inscritto di vertici $P_1, P_2, \ldots, P_N$. Se $N = W(r, 3)$ allora tra i P_i ce ne saranno tre che sono tra di loro in progressione aritmetica e dello stesso colore, allora essi sono i vertici di un triangolo isoscele che ha i vertici dello stesso colore. Possiamo ripetere la stessa procedura per ogni $W(r, 3)$-agono regolare prendendo come vertice P_1' ogni punto nell'arco di circonferenza P_1P_2 trovando in questo modo un infinità (più che numerabile) di triangoli isoscieli inscritti con i vertici mocromatici. □

Riferimenti bibliografici

[1] Ronald L. Graham, Bruce Lee Rothschild e Joel Spencer (1990), *Ramsey Theory*, A Wiley-Intersience Publication.

[2] Ronald L. Graham (1979), *Rudiments of Ramsey Theory*, Regional Conference Series in Mathematics, National Sience Foundation.

[3] Bruce M. Landman, Aaron Robertson (2000), *Ramsey Theory on the Integers*, American Mathematical Society.

[4] `http://www.oliforum.it/viewtopic.php?t=5112`.