

# Indice

<b>I</b>	<b>Elettrostatica</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Cariche elettriche</b>	<b>7</b>
1.1	Prime evidenze sperimentali . . . . .	7
1.2	Forza di Coulomb . . . . .	8
1.2.1	Località? . . . . .	9
1.2.2	Lavoro ed energia potenziale . . . . .	9
1.2.3	Principio di sovrapposizione . . . . .	9
1.2.4	Disegnare un campo elettrico: linee di campo . . . . .	10
1.2.5	Potenziale elettrico . . . . .	11
1.3	Quantizzazione della carica . . . . .	12
1.3.1	Quantizzazione della carica dell'elettrone . . . . .	12
1.3.2	Quantizzazione della carica del protone . . . . .	13
1.3.3	Newton vs Coulomb . . . . .	13
1.3.4	La forza elettrica è fondamentale o derivata? . . . . .	14
1.4	La forza di Coulomb tiene assieme atomi e materia . . . . .	14
1.4.1	Stime: atomo . . . . .	15
1.4.2	Stime: la materia . . . . .	16
1.4.3	Stime: oggetti . . . . .	17
1.4.4	La forza di Coulomb non ha punti di equilibrio stabile . . . . .	17
1.4.5	L'esperimento di Rutherford e la forma degli atomi . . . . .	18
1.5	Limite continuo: campo elettrico, potenziale, energia . . . . .	19
1.5.1	Campo elettrico . . . . .	20
1.5.2	Potenziale elettrico . . . . .	20
1.5.3	Energia elettrica . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Il campo elettrico</b>	<b>21</b>
2.1	Flusso di un campo vettoriale . . . . .	21
2.2	Teorema di Gauss . . . . .	22
2.2.1	Elettrostatica in $d$ dimensioni . . . . .	23
2.3	Raggio classico dell'elettrone . . . . .	24
2.4	Energia di legame nucleare . . . . .	25
2.5	Il gradiente . . . . .	25

2.6	La divergenza . . . . .	26
2.7	Teorema della divergenza . . . . .	27
2.8	Prima equazione di Maxwell . . . . .	28
2.9	Densità di energia del campo elettrico . . . . .	28
2.10	Pressione su cariche superficiali . . . . .	29
2.11	Teorema del rotore . . . . .	30
2.11.1	Teorema unificato . . . . .	31
2.12	La 2a equazione di Maxwell (in elettrostatica) . . . . .	32
2.13	Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Sistemi di coordinate ortogonali</b>	<b>34</b>
3.1	Gradiente in coordinate ortogonali . . . . .	35
3.2	Divergenza in coordinate ortogonali . . . . .	35
3.3	Rotore . . . . .	36
3.4	Laplaciano . . . . .	36
3.5	Esempi matematici . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Dipolo elettrico</b>	<b>38</b>
4.1	Potenziale di dipolo . . . . .	38
4.2	Campo di dipolo . . . . .	39
4.3	Sistema di cariche generiche . . . . .	40
4.4	Forza e momento su dipolo in $E$ esterno . . . . .	40
4.5	Espansione in multipoli . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Conduttori</b>	<b>43</b>
5.1	Unicità della soluzione . . . . .	43
5.2	Esempi pratici . . . . .	44
5.3	Scariche nei gas . . . . .	45
5.4	Induzione completa: condensatore . . . . .	45
5.5	Energia . . . . .	46
5.6	Induzione parziale . . . . .	46
5.7	Forze su condensatori . . . . .	47
5.8	Circuiti . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Dielettrici</b>	<b>49</b>
6.1	Dielettrico con geometria semplice . . . . .	49
6.2	Materiali non polari: allungamento . . . . .	50
6.3	Materiali polari: allineamento . . . . .	51
6.4	Capacità con dielettrico . . . . .	51
6.5	Dielettrici: trattamento generale . . . . .	52
6.6	Dielettrici: equazioni generali . . . . .	53
6.7	Dielettrici uniformi . . . . .	54
6.8	Energia di un dielettrico . . . . .	55

<b>7</b>	<b>Correnti e conduzione</b>	<b>56</b>
7.1	Corrente . . . . .	56
7.2	Conservazione della carica . . . . .	56
7.3	Legge di Ohm e resistenza . . . . .	57
7.4	Interpretazione microscopica della legge di Ohm . . . . .	58
7.5	Effetto Joule . . . . .	60
7.6	Circuiti . . . . .	60
7.7	Circuiti: leggi di Kirchhoff . . . . .	60
7.8	Correnti alternate . . . . .	62
7.9	Costante dielettrica complessa . . . . .	64
<b>II</b>	<b>Magnetostatica</b>	<b>66</b>
<b>8</b>	<b>Campi magnetici</b>	<b>67</b>
8.1	Forza di Lorentz . . . . .	68
8.2	Moto di carica in campo magnetico costante . . . . .	69
8.3	Effetto Hall . . . . .	69
8.4	Effetto Zeeman . . . . .	70
8.5	Forza magnetica su di un filo . . . . .	71
<b>9</b>	<b>Induzione magnetica</b>	<b>73</b>
9.1	Spira in moto in campo magnetico . . . . .	73
9.2	Legge di Faraday-Lenz . . . . .	74
9.3	Legge di Faraday e relatività . . . . .	75
9.4	Seconda equazione di Maxwell . . . . .	76
<b>10</b>	<b>Generazione di campi magnetici</b>	<b>78</b>
10.1	Formula integrale per $B$ . . . . .	78
10.2	Disco di Rowland . . . . .	80
10.3	III e IV equazione di Maxwell (per ora) . . . . .	80
10.4	Riassunto (finora) . . . . .	81
<b>11</b>	<b>Dipolo magnetico</b>	<b>83</b>
11.1	Introduzione . . . . .	83
11.2	Momento delle forze su di un dipolo magnetico: esempio . . . . .	84
<b>12</b>	<b>Induttori ed energia magnetica</b>	<b>86</b>
12.1	Energia magnetica . . . . .	87
12.2	Mutua induzione . . . . .	88
12.3	Forza magnetica dall'energia . . . . .	89
<b>13</b>	<b>Magnetismo nella materia</b>	<b>90</b>
13.1	Interpretazione microscopica . . . . .	91

<b>14 Corrente di spostamento</b>	<b>92</b>
14.1 Contraddizione nelle equazioni: esempi . . . . .	92
14.2 Contraddizione nelle equazioni: in generale . . . . .	93
14.3 La corrente di spostamento . . . . .	94
<b>15 Onde elettromagnetiche</b>	<b>96</b>
15.1 Onda nel vuoto, conto in componenti . . . . .	96
15.2 Onda nel vuoto, conto in notazione vettoriale . . . . .	98
15.3 Onde piane nel vuoto . . . . .	98
15.3.1 Spettro in frequenza . . . . .	99
15.3.2 Polarizzazione . . . . .	100

# Introduzione

A che serve questo corso?

Quando un ministro chiese a Faraday a cosa servivano i suoi marchingegni elettromagnetici, il fisico rispose “*There is every probability that you will soon be able to tax it*”. Non aveva previsto tre telefonate al giorno per ‘sconti sull’elettricità’.

L’elettromagnetismo ha significative implicazioni pratiche e teoriche. L’elettromagnetismo più la meccanica quantistica consente di capire, atomi, materia, chimica, elettronica.

Seguendo lo sviluppo storico, partiremo da esperimenti su forze elettriche fatti usando la materia. Si passa poi ad un argomento apparentemente diverso, le forze magnetiche. Mano a mano ci si accorge che per descrivere questi fenomeni conviene introdurre una matematica diversa rispetto a Fisica 1, ed utilizzare invece di  $\mathbf{x}(t)$  campi come quello elettrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  e quello magnetico  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ .

Nel processo proliferano altri campi  $\mathbf{D}, \mathbf{P}, \mathbf{H}, \mathbf{M}, \dots$ . Questo accade perché gli esperimenti sono fatti con la materia, e questi campi ulteriori forniscono una teoria approssimata della materia: una cosa interessante da capire ma complicata e non fondamentale. Da tutto questo si distilla una teoria fondamentale dei campi elettrici  $\mathbf{E}$  e magnetici  $\mathbf{B}$ , che risultano essere aspetti di una fisica comune, l’elettromagnetismo.

A posteriori si scopre che l’elettromagnetismo è anche una teoria della luce e che, oltre al concetto di campo, introduce nuovi principi fondamentali: l’invarianza relativistica e di gauge. Teorie basate sugli stessi principi e simili all’elettromagnetismo (ma più complicate) descrivono le altre forze esistenti in natura (forti, deboli e gravità).

A queste scoperte si arriva seguendo il metodo della fisica, procedendo su due gambe: l’esperimento e la teoria. A differenza della matematica, si procede a tentoni costruendo su risultati parziali matematicamente problematici, per arrivare a convergere sulla teoria finale. A volte le equazioni ottenute risultano spiegabili in termini di altre (un esempio è la termodinamica, in cui la temperatura è compresa come energia media delle molecole). Altre volte, come nel caso di Fisica 2, si ottengono alla fine strutture matematiche pulite e più sorprendenti di quanto uno avrebbe immaginato con la sola gamba del puro pensiero, che sono considerate ‘fondamentali’ in quanto non derivabili da altri concetti.

Alcune inconsistenze presenti nella parte iniziale del corso vengono chiarite al suo interno. Altre rimarranno alla fine del corso e segnalano la necessità di abbandonare la fisica classica per quella quantistica.

Parte I

**Elettrostatica**

# Cariche elettriche

## 1.1 Prime evidenze sperimentali

I Greci antichi avevano osservato che pettinando gatti con ambra ( $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\upsilon\nu$  cioè electron in greco) si osservano piccole forze. Pettinandosi con un pettine di plastica uno può similmente osservare che le punte del pettine attirano piccoli pezzi di carta non strofinata.

In tempi meno antichi si sperimentò lo strofinamento di materiali vari, osservando forze repulsive fra materiali dello stesso tipo, e forze a volte repulsive tra materiali diversi. Questo suggerì di dire che lo strofinamento rende i materiali ‘con carica  $q$  e che  $F \propto q_1 q_2$  (cariche uguali si respingono, cariche opposte si attirano), e di dividere i materiali ‘caricabili’ in due tipi: quelli come le plastiche che accumulano carica negativa (oggi si sa che sono elettroni), quelli come il vetro che accumulano carica positiva (oggi si sa che perdono elettroni).

Tutti questi materiali sono detti **isolanti**: materiali su cui le cariche rimangono, e che quindi impediscono alle cariche di muoversi (esempi sono ambra, vetro, plastica...).

Ci sono poi materiali detti **conduttori**, che permettono alle cariche di muoversi (ad esempio i metalli), fenomeno osservabile mediante un elettroscopio a foglie: aggiungendo carica sul manico esterno questa si sposta nella zona interna in cui produce la repulsione della parte finale, contenente due leggere ‘foglie’ metalliche mobili.



Figura 1.1: *Fenomeni dovuti a cariche elettriche.*

Sebbene facilmente osservabili, gli effetti fisici qui menzionati sono complicati ed indiretti. Per arrivare a capire cosa sono conviene partire a studiare casi semplici.

## 1.2 Forza di Coulomb

Attorno al 1800 i fisici iniziavano a capire qualcosina della materia, grazie alla modifica della legge dei gas perfetti spiegata da Van der Waals come forze fra ‘molecole’. Teorizzavano quindi che queste forze potessero avere importanza fondamentale, mentre gli strofinatori di materiali erano tenuti in minore considerazione. Oggi si sa che le forze di Van der Waals sono solo il rimasuglio (a grande distanza, fra molecole complicate) di una forza fondamentale detta di Colulomb, scoperta strofinando materiali.

De Coulomb era un aristocratico francese esperto in bilance di torsione, che usava per studiare l’attrito. Le bilance di torsione sono strumenti che consentono di misurare piccole forze. Funziona così: le forze fanno ruotare un oggetto appeso ad un filo sottile, in cui solo la piccola torsione del filo si oppone alla piccola forza, per cui l’angolo di rotazione raggiunto nella posizione di equilibrio è proporzionale alla forza applicata.

Nel 1789 tirava brutta aria e De Coulomb si ritirò a studiare le forze elettriche: mettendo una carica  $q_1$  sul filo ed una carica  $q_2$  a distanza  $r$  misurò che la forza elettrica ha la forma (in precedenza osservata da Henry Cavendish, che però non aveva pubblicato i risultati):

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



Si osserva che la forza elettrica è radiale e con modulo proporzionale ad  $1/r^2$ . Questo comportamento è analogo a quello della forza gravitazionale di Newton. Una differenza è che la forza di Coulomb può essere sia attrattiva che repulsiva: si osserva che esistono cariche di entrambi i segni, e la forza elettrica è repulsiva fra cariche dello stesso segno. La costante numerica

$$k = 8.9875 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

non ha significato fisico, in quanto il suo valore numerico dipende dall’unità arbitraria con cui si sceglie di misurare carica elettrica. Il valore qui dato corrisponde a misurare le cariche in Coulomb, e l’equazione definisce quanta carica è un Coulomb.

In pratica vengono solitamente utilizzate due unità di misura:

- Il sistema detto MKSC o ‘internazionale’, basato su metri-kilo-secondo-Coulomb. È quello che useremo.
- Il sistema detto cgs o ‘razionale’, basato su cm-grammo-secondo ed in cui non esiste una nuova unità di misura per la carica, in quanto la sua arbitrarietà viene usata per fissare il valore della costante  $k$  a  $k = 1$  o  $k = 1/4\pi$ .

Il pedice  $_0$  in  $\epsilon_0$  indica il valore della ‘costante dielettrica’ nel vuoto. Come vedremo in seguito, nella materia valgono equazioni approssimate simili a quelle nel vuoto, in cui la materia ha l’effetto di cambiare il valore di  $\epsilon_0$  in  $\epsilon \equiv \epsilon_r \epsilon_0$ . La ‘costante dielettrica relativa’ vale  $\epsilon_r = 1.0005$  nell’aria (che quindi differisce poco dal vuoto),  $\epsilon_r \approx 80$  nell’acqua;  $\epsilon_r = 3.5$  nella carta,  $\epsilon_r = 4.7$  nel vetro, etc.



### 1.2.1 Località?

La forza di Coulomb segue una legge a potenza  $F \propto 1/r^p$ , e quindi non seleziona nessuna scala di lunghezza speciale (come avrebbe invece fatto, ad esempio,  $F \propto e^{-r/r_0}$ ). L'esponente della potenza è uguale a  $p = 2$  entro un'incertezza sperimentale molto piccola (vedremo in seguito come i conduttori consentono una misura precisa). Una azione a distanza  $F \neq 0$  per  $r \neq 0$  solleva i dubbi filosofici che si era posto Newton per la forza di gravità:

*“It is **inconceivable** that inanimate Matter should, without the Mediation of something else, which is not material, operate upon, and affect other matter without mutual Contact...*

*...that one body may act upon another at a distance thro' a Vacuum, without the Mediation of any thing else, by and through which their Action and Force may be conveyed from one to another, is to me so great an **Absurdity** that I believe no Man who has in philosophical Matters a competent Faculty of thinking can ever fall into it”.*

Siccome le forze di Coulomb e Newton dipendono da  $1/r^2$ , come l'inverso dell'area, sono stati fatti tentativi di interpretarle come 'ombra' che scherma il moto di immaginifici punti materiali che riempiono l'universo e urtano su oggetti. Ma questi tentativi non hanno portato a nulla, la strada giusta è diversa.

Gli sviluppi matematici che discuteremo nel seguito mostreranno che  $p = 2$  è un esponente speciale, tale che lo stesso fenomeno può venire descritto tramite una teoria di campo *locale*, senza azione a distanza. In qualche modo sarà simile a riformulare fisica 1, in cui la potenza 2 nel moto uniformemente accelerato  $x = \frac{1}{2}at^2$  consente di riformularlo e generalizzarlo in  $F = ma$ , imparando che la fisica è locale nel tempo:  $v(t + dt) = v(t) + dt F(t)/m$ . Non lo sarebbe se si fosse misurato che invece

$$v_{\text{oggi}} = v_{\text{ieri}} + \Delta t \frac{F_{\text{ieri}}}{m} \quad \text{o} \quad v(t) = \int^t dt' \frac{F(t')}{m}.$$

### 1.2.2 Lavoro ed energia potenziale

In totale analogia alla forza gravitazionale (i conti già visti a Fisica 1 vengono solo accennati), la forza elettrica è radiale, quindi conservativa. Il lavoro necessario per spostare una carica  $q_2$  nel campo di una carica  $q_1$  da un punto  $A$  ad un punto  $B$  vale

$$\mathcal{L}(A \rightarrow B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = U(r_A) - U(r_B) \quad (1.1)$$

dove

$$\boxed{U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad \text{è l'energia potenziale.} \quad (1.2)$$

Come noto, l'energia ha dimensione  $[U] = \text{Joule}$ . La forza è, come al solito, data dal gradiente del potenziale  $\mathbf{F} = -\nabla U$ .

### 1.2.3 Principio di sovrapposizione

Quanto vale la forza fra più cariche elettriche? Come nel caso gravitazionale, si osserva sperimentalmente che è semplicemente la somma delle forze prodotte dalle singole coppie di cariche, indipendentemente dalle altre. Il risultato delle osservazioni avrebbe potuto essere molto più complicato (come in effetti è per le forze deboli e forti, non trattate in questo corso).

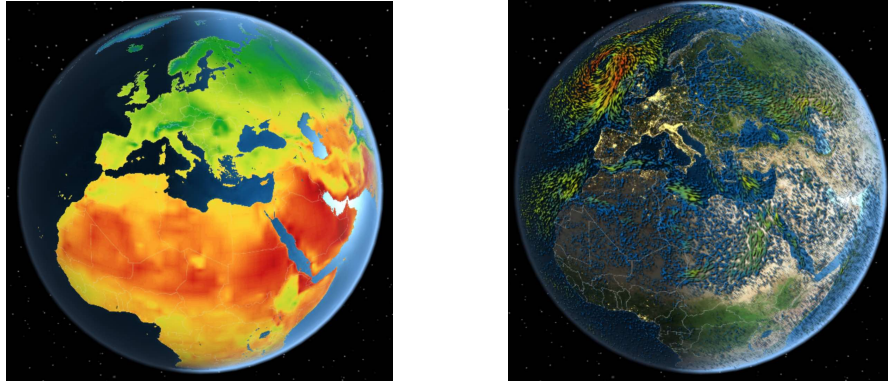


Figura 1.2: *Esempi di campi. a) La temperatura sulla superficie della Terra è un campo scalare in 2 dimensioni spaziali. b) La velocità del vento è un campo vettoriale in 2 dimensioni spaziali.*

Similmente a come questo risultato suggerisce di definire il campo gravitazionale, nel caso elettrico è naturale introdurre il campo elettrico  $\mathbf{E}$  tale che la forza su di una carica  $q$  in presenza di altre cariche  $q_i$  viene scritta come

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \equiv q\mathbf{E}(x, y, z, t) \quad (1.3)$$

e quindi si definisce il campo elettrico

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (1.4)$$

Si noti un dettaglio spiacevole: per calcolare la forza su di una carica puntiforme  $q$  ed evitare infiniti occorre escludere la carica  $q$  stessa dalla somma  $\sum_i$ :  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_q$ . È il prezzo da pagare se si vuole idealizzare la cariche come puntiformi, senza preoccuparsi della loro struttura interna.

Il campo elettrico ha dimensione  $[E] = \text{N/C}$  nel sistema MKSC.

È un esempio di **campo vettoriale** in 3 dimensioni spaziali ed una dimensione temporale: tre funzioni di  $x, y, z, t$  che definiscono una freccia in ogni punto dello spazio  $x, y, z$ , ad ogni tempo  $t$ . Per chiarire il concetto, la figura 1.2 mostra esempi più intuitivi di campi.

#### 1.2.4 Disegnare un campo elettrico: linee di campo

Come raffigurare un campo vettore?

Uno potrebbe disegnare una freccia in tanti punti, per esempio su di una griglia quadrata. Considerando per semplicità di una carica in due dimensioni, il risultato in figura 1.3a appare poco chiaro, in quanto per via dell' $1/r^2$  il modulo è troppo piccolo a grande distanza e/o troppo grosso vicino alla carica. Per convenzione il campo ‘esce’ da una carica positiva, ed ‘entra’ in una carica negativa.

Passando a situazioni più complicate si nota che questo tipo di figura aiuta poco a livello intuitivo. Ad esempio, la fig. 1.3b,c mostra il campo generato da due cariche di eguale modulo e segno opposto: il disegno tramite frecce in 3 dimensioni è incomprensibile, e quello in 2 dimensioni non è molto meglio.

Per questo motivo, per visualizzare di solito si usa disegnare le *linee di campo*. Sono definite come traiettorie ottenute muovendosi seguendo  $\mathbf{E}$ , ovvero congiungendo le frecce come uno farebbe se  $\mathbf{E}$  indicasse la velocità del vento, Matematicamente calcolare le linee di campo equivale a risolvere

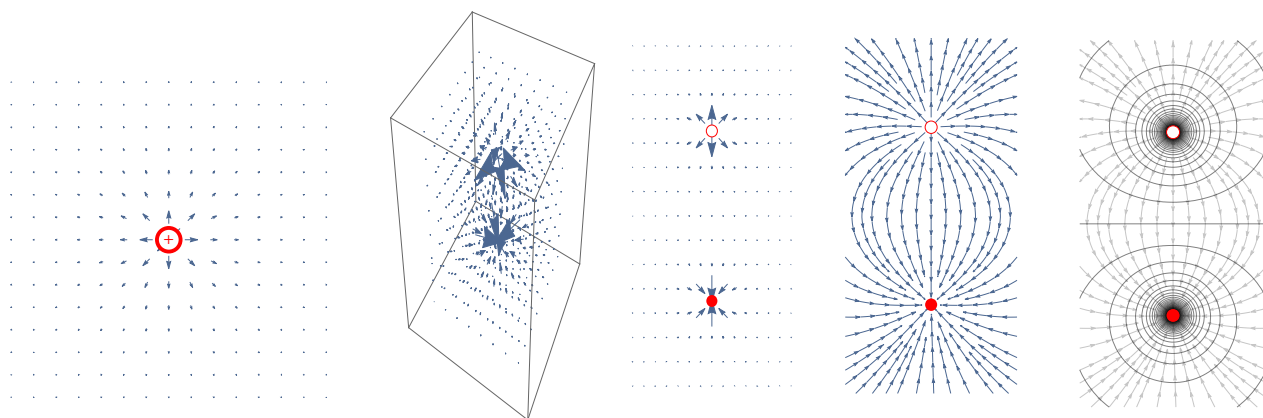


Figura 1.3: a) Campo elettrico generato da una carica positiva. Campo elettrico generato da due cariche opposte, disegnato in 3 dimensioni (fig. b) ed in 2 (fig. c), e mediante le linee di campo (fig. d). Fig. e): per lo stesso sistema vengono disegnate anche le superfici equipotenziiali.

l'equazione differenziale  $d\mathbf{x}/d\lambda = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ , dove  $\lambda$  è un parametro arbitrario, partendo da vari punti a piacere. Lo scopo non è risolvere equazioni ma ottenere qualcosa di intuitivo.

Le linee di campo non forniscono informazione diretta sul modulo del campo. Forniscono tuttavia un'informazione indiretta: come si vede dalla figura le linee di campo si addensano dove il modulo del campo  $E$  è grosso.

La fig. 1.3d mostra che le linee di campo forniscono una figura intuitiva: escono dalla carica positiva e entrano in quella negativa.

### 1.2.5 Potenziale elettrico

Combinando  $\mathbf{F} = -\nabla U$  con  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  si definisce (in analogia al potenziale gravitazionale  $\phi = -\sum_i Gm_i/r_i$ ) un campo scalare  $\varphi(x, y, z, t)$  detto **potenziale elettrico**

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi}, \quad \varphi = \frac{U}{q} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}. \quad (1.5)$$

Qui viene denotato come  $\varphi$ , un'altra notazione spesso usata altrove è  $V$ . La sua unità di misura è nota dall'uso pratico:

$$\boxed{[\varphi] = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} \equiv \text{Volt} = \text{V}}.$$

Dovrebbe chiamarsi Volta, dall'inventore della pila Alessandro Volta (1745-1827).

Come il potenziale, anche il potenziale elettrico  $\varphi$  è definito a meno di una costante additiva. È usualmente fissata imponendo  $\varphi = 0$  all'infinito. Questo è possibile in problemi con cariche in una regione finita dello spazio tali che il potenziale non diverge a grandi distanze.

Si definiscono le *superfici equipotenziiali* come le superfici con  $\varphi = \text{cte}$ . Sono ortogonali al campo elettrico  $\mathbf{E}$  ed alle sue linee di campo. La figura 1.3e mostra le superfici equipotenziiali (che sono linee, in quanto il disegno è fatto su di un piano) per due cariche di segno opposto.

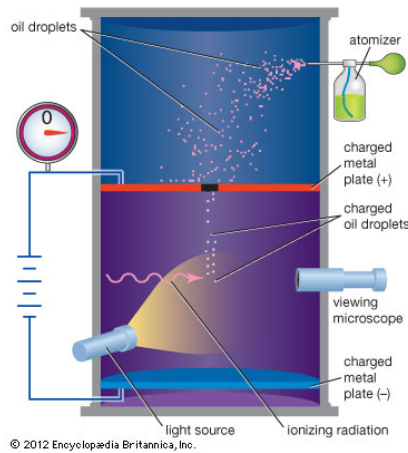


Figura 1.4: *Esperimento di Millikan.*

## 1.3 Quantizzazione della carica

### 1.3.1 Quantizzazione della carica dell'elettrone

Vediamo come si osserva che le cariche elettriche esistono in natura sono multiple della carica  $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{C}$  portata da particelle elementari.

La forza fra due elettroni

$$F = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2 = 2 \cdot 10^{-22} \text{N} (\text{mm}/r)^2$$

può oggi essere misurata in fisica delle particelle, in cui si raggiungono distanze così piccole che consentono di vederla direttamente. Tuttavia era troppo piccola (perché  $\propto e^2$ ) quando  $e$  venne misurata per la prima volta da Millikan, utilizzando l'apparato in fig. 1.4.

Per avere un effetto più grosso conviene mettere un  $e$  in un campo elettrico  $\mathbf{E}$  macroscopico esterno, e misurare  $F = eE$ . Inoltre una volta non era possibile isolare singoli elettroni. Millikan nel 1910 mise gocce di olio il più piccole possibili, che avevano cariche elettriche  $q \sim 10e$  con valori casuali ma non molto maggiori di  $e$ . Il raggio delle gocce era circa  $r \sim 10^{-6} \text{m}$ , e quindi la massa era  $m \sim 10^{-14} \text{kg}$ . Le gocce erano visibili come puntini quando illuminate da una luce intensa. Millikan le mise in un mezzo viscoso con campo elettrico più forte possibile,  $E \sim 1000 \text{V/m}$ . L'equazione del moto delle gocce era quindi

$$m\dot{v} + \eta v = F = qE + mg. \quad (1.6)$$

Come noto da Fisica 1, l'attrito viscoso porta ad un moto con velocità limite  $v_{\text{lim}} = F/\eta$ . Senza entrare in dettagli di un vecchio esperimento, è importante osservare il punto cruciale: la forza gravitazionale è numericamente comparabile a quella elettrica:  $mg \sim 10^{-15} \text{N} \sim qE$ . Millikan poteva misurare  $v_{\text{lim}}$  variando il campo elettrico. Ad esempio, dai valori in presenza ed in assenza del campo elettrico si ricava la carica  $q$  delle gocce come

$$q = \frac{mg}{E} \left[ \frac{v_{\text{lim}}(E)}{v_{\text{lim}}(0)} - 1 \right].$$

Dai valori misurati Millikan poté osservare che erano multipli interi di  $e$ .

	Elettricità	Gravità
Forza	$\mathbf{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$	$\mathbf{F}_N = -\frac{G_N m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$
Forza	$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$	$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$
Campo	$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$	$\mathbf{g} = -\nabla\phi$
Potenziale	$U = q\varphi$	$U = m\phi$
Sorgente	$q_e = -q_p$	$m_e = m_p/1876$

Tabella 1.1: *Similitudini e differenze fra la forza di Newton e quella di Coulomb.*

### 1.3.2 Quantizzazione della carica del protone

Si osserva che tutti gli elettroni hanno uguale carica  $q_e = -e$  e massa  $m_e$  (la misura della massa sarà discussa quando faremo campi magnetici; anche se con la tecnologia attuale è possibile misurarla usando solo campi elettrici).

Si osserva poi che l'idrogeno (l'atomo è uno stato legato  $ep$  di elettrone e protone; esiste come molecola di atomica  $H_2 \sim (ep)(ep)$ ) non viene deflesso in un campo elettrico  $\mathbf{E}$ . Questo significa che l'idrogeno ha carica piccola o nulla, ovvero che protone ed elettrone hanno cariche opposte. Gli esperimenti attuali trovano limiti  $|q_p + q_e| < 10^{-20}e$ . Per quanto si sa,  $q_p = -q_e = +e$ .

Oggi è anche noto che la carica elettrica elementare non è  $e$  ma  $e/3$ . Infatti il protone è una particella composta di quark up  $u$  e down  $d$ :  $p \sim uud$  con cariche elettriche  $q_u = 2e/3$  e  $q_d = -e/3$ . E il neutrone è  $n \sim udd$ . Tuttavia, per motivi non spiegabili in questo corso, non esistono quark liberi.

Avendo a che fare con particelle elementari, conviene utilizzare unità di misura diverse dal sistema MKSC. L'elettronvolt è unità di misura dell'energia, definito come

$$\text{eV} \equiv \text{energia che un elettrone acquista attraversando 1 Volt}$$

ovvero, in formule:

$$\text{eV} \equiv e \times \text{V} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \times \text{Volt} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Joule.} \quad (1.7)$$

### 1.3.3 Newton vs Coulomb

La tabella 1.1 riassume le analogie e le differenze fra la forza di Coulomb e forza gravitazionale di Newton. Ricordiamo che la costante gravitazionale di Newton vale  $G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm/kg}^2$ . Si notino le seguenti differenze:

- **Il segno.** La gravità è attrattiva fra masse dello stesso segno, e tutte le masse osservate sono sempre positive. Viceversa cariche di segno uguale si respingono, ed esistono cariche sia positive che negative. Questo fatto è oggi capito in fisica teorica avanzata (alla fine del corso vedremo che l'elettro-magnetismo è un campo quadri-vettore; la gravità è un campo quadri-tensoriale: questa è la differenza di base).
- **La gravità è molto più 'debole' della forza elettrica** in sistemi di poche particelle elementari. Ad esempio nell'idrogeno  $F_N/F_C = 4\pi\epsilon_0 G_N m_e m_p / e^2 = 4.4 \cdot 10^{-40}$ . Il rapporto non dipende da  $r$  ed è un numero puro (non dipende dalle unità di misura) scritto nella natura, che ha un valore numerico molto piccolo. La forza di Coulomb batterebbe l'attrazione gravitazionale, ad esempio fra Terra e Sole, se questi corpi contenessero un piccolo sbilanciamento di carica

$|N_e - N_p| \gtrsim 10^{-40} N_{e,p}$  (per la Terra basterebbe separare circa  $10^{14}$  cariche, molto meno di una mole). Non è ad oggi capito, in fisica teorica avanzata, perché la natura contiene questo piccolo numero adimensionale, si hanno solo congetture.

Come conseguenza una persona può sollevare un peso vincendo la forza gravitazionale dell'intero pianeta Terra. La persona usa forze fra oggetti materiali, che come discuteremo in seguito sono forze elettriche. La materia contiene un numero enorme (di Avogadro) di cariche di entrambi i segni. Una mole di idrogeno contiene  $2N_A e = 192000 C$ . Se fosse possibile separare elettroni da protoni fino a distanza di un metro, la forza di Coulomb sarebbe  $F_C \sim 3 \cdot 10^{20} N$ : abbastanza grossa da sollevare un pianeta ( $M_\oplus = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ).

### 1.3.4 La forza elettrica è fondamentale o derivata?

Uno può chiedersi: la forza elettrica (fisica 2) è un fenomeno nuovo, o può essere compresa in termini di forze meccaniche (fisica 1)? Ad esempio, in un problema fisico diverso, la temperatura è stata compresa in termini di fisica 1 come l'energia media degli atomi. Come accenneremo in seguito, Maxwell stesso inizialmente tentò di sviluppare un modello meccanicistico dell'elettromagnetismo (oggi dimenticato).

La risposta è che la forza elettrica è un fenomeno nuovo. La domanda giusta è quindi quella opposta: se e come fisica 2 può spiegare fisica 1.<sup>1</sup>

## 1.4 La forza di Coulomb tiene assieme atomi e materia

Vogliamo mostrare che la forza di Coulomb è ragionevolmente la forza che tiene assieme atomi e materia. Ovvero le forze meccaniche (come le molle, gli attriti, eccetera) sono forze elettriche.

Oggi la fisica è in grado di calcolare la materia in termini di poche costanti fondamentali:

$$(G_N), \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad m_{e,p}, \quad \hbar.$$

La la forza di Coulomb insieme alla Meccanica Quantistica spiegherà come mai gli atomi hanno tutti la stessa dimensione: ad esempio il raggio dell'atomo di idrogeno sarà calcolabile come  $r = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$ . Non conoscendo la Meccanica Quantistica e volendo qui studiare l'elettromagnetismo possiamo procedere a capire la materia nel seguente modo:

1. Facciamo *stime invece che calcoli*.
2. Evitiamo la costante quantistica di Planck  $\hbar$  assumendo invece *come costante fondamentale la dimensione degli atomi  $r$* , che ha un significato più intuitivo.

Ricaviamo  $r$  dai dati. Sapendo che una mole di un tipico materiale liquido o solido è grande circa un  $\text{cm}^3$  e contiene un numero di Avogadro  $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$  di molecole, si ricava la loro tipica dimensione e la loro tipica massa

$$r \sim \frac{\text{cm}}{\sqrt[3]{N_A}} \sim 10^{-8} \text{ cm}. \quad (1.8)$$

Denoteremo la tipica dimensione degli atomi come Ångström

$$\text{\AA} \equiv 10^{-8} \text{ cm},$$

---

<sup>1</sup>Può sembrare una discussione ovvia, ma la questione analoga si riproporrà con fisica 3 vs fisica 1,2 in maniera meno ovvia: tanti tentano di interpretare la meccanica quantistica in termini di fisica classica, invece del contrario.

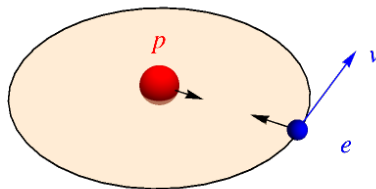


Figura 1.5: *Modello per l'atomo di idrogeno.*

una unità di misura usata in fisica atomica. Si ricava anche la tipica massa di un atomo

$$m_p \approx \frac{\text{gram}}{2N_A} \sim 10^{-26} \text{ kg}$$

qui denotata come  $m_p$  in quanto (come vedremo in seguito)  $m_e \ll m_p$ : la massa degli atomi è dominata da quella di protoni (e neutroni,  $m_n \approx m_p$ ). Atomi di diversi elementi hanno nuclei con numeri interi  $Z$  di protoni, fra 1 e circa 100: nelle nostre stime approssimiamo  $1 \sim 100$ . Il numero di protoni ( $Z = 6$  per il carbonio, 8 per l'ossigeno, per 26 il ferro...) è detto numero atomico, in quanto caratterizza l'atomo. Il motivo per cui esistono nuclei con vari  $Z$  non fa parte di questo corso (sono dovuti forze non elettriche dette forze 'forti').

Nelle stime che faremo utilizzeremo un concetto di termodinamica, ovvero di Fisica 1 applicata ad un grande numero di particelle. Per chi non la ha già studiata, riassumo qui il concetto (senza dimostrazione). La quantità macroscopica nota come temperatura è l'energia cinetica media delle particelle:

$$(\text{temperatura } T) \sim (\text{energia media}).$$

Più precisamente, vale il teorema di equipartizione: ogni grado di libertà ha energia media  $k_B T/2$ . Siccome l'energia e la temperatura venivano misurate prima che si capisse che erano la stessa cosa, per motivi storici vengono misurate in unità di misura diverse, e nelle equazioni compare la costante di Boltzmann  $k_B$ , che è solo una costante di conversione. Ci basti sapere che a temperatura ambiente  $T = 20 \text{ Celsius} = 293.15 \text{ Kelvin}$  le singole particelle hanno energia tipica  $E = k_B T = \text{eV}/39.6$ .

Possiamo ora iniziare a stimare atomi e materia.

#### 1.4.1 Stime: atomo

Visto che facciamo solo stime possiamo semplificarci la vita assumendo una arbitraria geometria semplice per il più semplice atomo, quello di idrogeno: un elettrone in orbita circolare attorno ad un protone a distanza  $r \sim \text{\AA}$ , come illustrato in fig. 1.5. Altre geometrie darebbero risultati diversi per fattori di ordine uno, e questo modello sarà parzialmente giustificato dall'esperimento di Rutherford discusso in seguito (sezione 1.4.5).

- La **forza elettrica** fra  $e$  e  $p$  in un atomo vale

$$F_C \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \text{\AA}^2} \approx 10^{-8} \text{ N}.$$

Essendo una forza ‘grossa’ (di valore quasi macroscopico ma fra particelle elementari) si intuisce che per cancellarla la materia tende spontaneamente ad arrangiarsi formando atomi neutri.

- Il **potenziale elettrico** di un atomo  $ep$  è

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27 \text{ Volt} \quad \text{per } r = 0.53 \text{ \AA} \text{ (atomo di idrogeno).}$$

Moltiplicando numeri grossi esce circa 1 Volt, che è un potenziale elettrico di utilizzo comune: questo suggerisce che la forza elettrica ha qualcosa a che fare con la materia.

- Schematizzando l’atomo  $ep$  come  $e$  leggero che ruota in orbita (per semplicità) classica circolare attorno al  $p$  pesante circa fermo, la **velocità** dell’elettrone è data  $m_e v_e^2 / r = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2$  e quindi vale  $v_e = e \sqrt{1/4\pi\epsilon_0 m_e r} \approx c/137 \ll c$ . Si osserva che è circa 100 volte minore della velocità della luce (questo significherà che è corretto usare Fisica 1 invece delle equazioni relativistiche).
- La **velocità angolare** dell’elettrone vale

$$\omega = v_e / r = e / \sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3} \approx 4.1 \cdot 10^{16} \text{ Hz.}$$

Si osservi che è un valore tipico a cui (in fisica atomica) si misurano righe spettrali degli atomi.

- L’**energia di legame**, assumendo orbita circolare, è

$$E = \frac{m_e}{2} v_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -13.6 \text{ eV} \equiv 1 \text{ Rydberg.}$$

Si osserva che è simile all’energia media degli atomi a temperatura ambiente,  $E \sim \text{eV}/40$ . Questo significa che a temperature molto maggiori gli atomi sono tutti ionizzati ( $e$  e  $p$  liberi) e la materia è fusa. A temperature molto minori la materia è ‘ghiacciata’, ovvero l’energia media è trascurabile rispetto all’energia necessaria per vincere le forze elettriche. Solo alla temperatura intermedia è possibile una chimica complessa con reazioni chimiche e fisiche, e quindi la vita.

Riassumendo: le stime per ordini di grandezza danno risultati qualitativi consistenti con l’idea che gli atomi siano tenuti assieme da forze elettriche. L’unica altra forza elementare nota, la gravità, darebbe stime sballate di decine di ordini di grandezza. Questo non è un argomento solido, ma è in questa maniera, cercando ipotesi giuste a tentoni, che si è arrivati alla attuale conoscenza solida.

### 1.4.2 Stime: la materia

Passiamo adesso a stimare la materia, ovvero sistemi di tantissimi atomi.

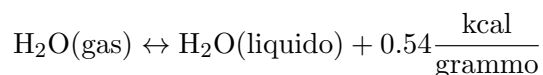
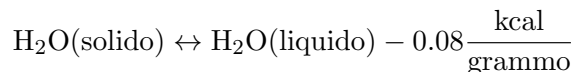
Nella nostre stime la forza fra due atomi vicini vale di nuovo  $F_C \approx e^2 / 4\pi\epsilon_0 \text{\AA}^2 \approx 10^{-8} \text{ N}$ . È un valore ragionevole? Proviamo a stimare la forza necessaria per rompere una bacchetta di sezione  $1 \text{ cm}^2$ . La sua superficie contiene  $n = (\text{cm}/\text{\AA})^2 = 10^{16}$  atomi. Per spezzarla occorre quindi spezzare  $n$  legami atomici, ciascuno con forza  $F_C$ : occorre quindi una forza  $nF_C \sim 10^8 \text{ N}$ . È un valore ragionevole, tenendo conto nelle nostre stime non distinguiamo gesso da acciaio. Se volessimo entrare in maggiori dettagli, diremmo che solo gli elettroni esterni degli atomi vengono ritoccati nello spezzare la materia o nelle reazioni che discutiamo in seguito: è quindi ragionevole che otteniamo sovra-stime.

In base all’ipotesi che la materia sia tenuta assieme da forze elettriche, si deduce che ricombinare una mole di materia fornisce o richiede energia

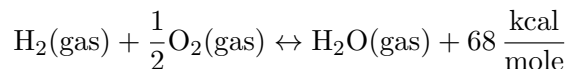
$$U \sim N_A \cdot \text{eV} \sim 10^5 \text{ Joule} \sim 100 \text{ kcal} \quad \text{cal} = 4.2 \text{ J}$$



che è stata scritta in termini di unità di misura multiple, in quando la stessa stima si applica a reazioni fisiche come



ed a reazioni chimiche come



$$1 \text{ cm}^3 \text{ di cioccolato} \sim 1 \text{ gianduiotto} \sim 0.1 \text{ kcal}$$

Nelle nostre stime sono diversi spostamenti di circa un elettrone per atomo, e tutte hanno energie simili a quella stimata.

Questo nuovamente indica che è ragionevole che la materia sia tenuta assieme da forze elettriche. E che quindi esista una temperatura speciale detta ‘ambiente’: la materia è solida a  $k_B T \ll E$ ; si hanno liquidi o materiali ‘molli’ a  $k_B T \sim E$ , e gas o plasmi ionizzati a  $k_B T \gg E$ .

### 1.4.3 Stime: oggetti

Potremmo fermarci qui. Sebbene non necessario per questo corso è interessante andare avanti e strafare, mostrando come, a partire dalle costanti fondamentali

$$G_N, \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad m_{e,p}, \quad \text{\AA}$$

è possibile stimare proprietà di sistemi complicati, capendo come la fisica fondamentale determina le loro proprietà.

Ad esempio, come mostrato negli esercizi, è possibile stimare in termini di costanti fondamentali la massima altezza di un animale o di un a montagna in un campo gravitazionale  $g$  dato; il raggio critico sopra il quale i pianeti sono sferici, o il raggio critico sopra il quale i pianeti a temperatura ambiente non perdono l’atmosfera per evaporazione. Si trovano stime ragionevoli, e si impara cosa è possibile.

### 1.4.4 La forza di Coulomb non ha punti di equilibrio stabile

Dopo esserci convinti che è ragionevole teorizzare che la forza di Coulomb è la forza che tiene assieme gli atomi e la materia, sorge però un grave ostacolo:

In fisica classica (ovvero, non quantistica) non esiste nessuna configurazione elettrostatica stabile.

Gli esercizi mostrano alcuni tentativi infruttuosi, ed una prima comprensione generale dell’impossibilità. Il campo elettrico generato da una  $q$  nell’origine espanso in serie di Taylor attorno a  $\mathbf{X} = (r, 0, 0) + (x, y, z)$  è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^p} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^{p-1}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} (1-p)x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^2, y^2, z^2) \right]$$

Per il valore fisico  $p = 3$  i coefficienti del termine di prim ordine si sommano a zero. Questo significa che, mettendo assieme sistemi arbitrari di cariche tali che una carica  $q'$  nel punto  $\mathbf{X}$  è in equilibrio

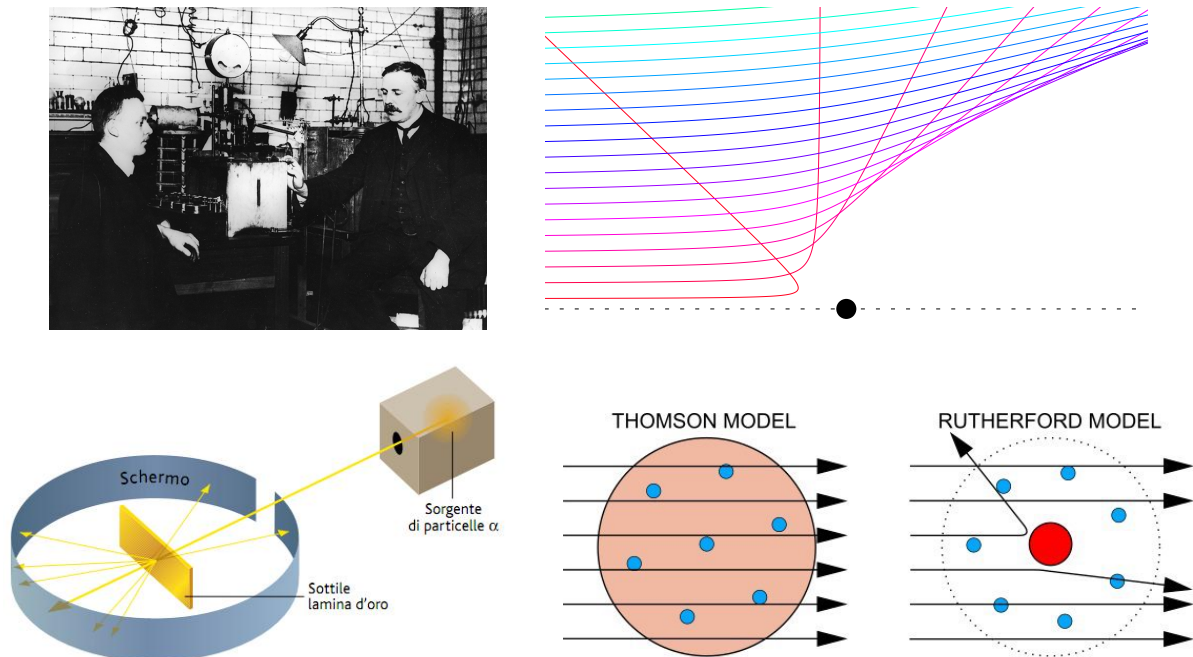


Figura 1.6: *L'esperimento di Rutherford.*

$\mathbf{E} = 0$ , non si ottiene mai un equilibrio stabile, in quanto spostandola di  $(x, y, z)$  in qualche direzione si avrà sempre una forza destabilizzante di segno sbagliato. Nel seguito questa impossibilità verrà compresa in maniera più generale ed intuitiva tramite il teorema di Gauss.

La soluzione di questo problema non può essere data in questo corso, e non era nota ai fisici che sono andati avanti a tentoni invece di arrendersi. La soluzione che in Meccanica Quantistica le cariche puntiformi sono rimpiazzate da 'onde', consentendo di calcolare ad esempio il raggio dell'atomo di idrogeno

$$\text{Raggio di Bohr} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{m_e c \alpha} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{m}$$

e  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \approx 1/137.03599915$  è una seconda costante fisica adimensionale. Oltre a creare sistemi stabili, la MQ evita anche il dettaglio spiacevole di dover escludere la carica  $q$  stessa a mano nel calcolare  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . Facendo fisica classica, il corso contiene questo passaggio extra-logico, matematicamente sporco.

#### 1.4.5 L'esperimento di Rutherford e la forma degli atomi

Abbiamo stimato che la forza di Coulomb tiene assieme gli atomi: un esperimento consentì di iniziare a capire come sono fatti gli atomi, giustificando quanto assunto in precedenza: un nucleo pesante attorno a cui girano gli elettroni (modello di Rutherford) piuttosto che una grossa sfera di carica positiva  $Ze$  attorno al cui centro cadono  $Z$  elettroni (modello di Thomson).

Rutherford nel 1913 fece urtare particelle cariche di grande energia su un foglio sottile di materia, osservando che a volte rimbalzano all'indietro. Usò particelle  $\alpha$  di carica  $2e$  (oggi è noto che sono stati di 2 protoni e 2 neutroni legati da interazioni forti) generate da decadimenti radioattivi, con energia cinetica  $K_\alpha$  fino a 7.7 MeV, ovvero un milione di volte maggiore dell'energia di legame atomico. L'esperimento è illustrato in figura 1.6.

Il fatto che le particelle  $\alpha$  possono rimbalzare invece di andare sempre circa dritte fu una grossa sorpresa per Rutherford:

*“It was quite the most incredible event that ever happened to me in my life. It was as incredible as if you fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you”.*

Capì che questo significava che il modello atomico di Thomson era sbagliato, e che questo significa che quasi tutta la massa degli atomi è concentrata in un nucleo pesante carico.

Uno sperimentale, operando su distanze molto maggiori delle dimensioni atomiche o nucleari, può misurare l'angolo di deflessione. Un teorico può calcolare l'orbita classica (è un'iperbole, il conto è matematicamente simile a quello delle orbite gravitazionali) e da questo l'angolo di deflessione  $\theta_d$  in funzione del parametro d'impatto  $b$ :

$$\tan \frac{\theta_d}{2} = \frac{q_\alpha Q}{8\pi\epsilon_0 b K_\alpha} \quad \text{dove} \quad \begin{array}{l} \theta_d = \text{angolo di deflessione} \\ b = \text{parametro di impatto} \\ K_\alpha = \text{energia cinetica } Mv^2/2 \text{ della particella } \alpha \end{array} . \quad (1.9)$$

Il conto è qui inutilmente pesante. Come vedremo in seguito dopo aver fatto il teorema di Gauss, è banale calcolare la formula nel limite di piccolo angolo di deflessione in cui  $\tan(\theta_d/2) \simeq \theta_d/2$ .

Siccome il parametro d'impatto  $b$  non è misurabile in pratica, ma è nota la sua distribuzione statistica su tanti eventi, è possibile calcolare la distribuzione angolare delle particelle deflesse. I fisici presentano il risultato usualmente in termini di “sezione d'urto differenziale”. Evitiamo di entrare in queste cose di dettaglio, che confermano il modello di Rutherford. Capita che la meccanica quantistica, in questo caso, dia lo stesso risultato del conto classico.

Nominato Lord, Rutherford morì di ernia non potendo curarsi da medici plebei.

## 1.5 Limite continuo: campo elettrico, potenziale, energia

Le cariche sono particelle discrete, ma sono tante: circa un numero di Avogadro per mole di materia. Conviene quindi approssimarle come un fluido continuo.

- Definiamo la *densità di carica volumetrica*  $\rho(\mathbf{r}) = dq/dV$ .
- Come vedremo in seguito, in casi interessanti (come i conduttori) le cariche si dispongono su superfici. Definiamo quindi la *densità superficiale di carica*  $\sigma(\mathbf{r}) = dq/dS$ .
- Già che ci siamo definiamo anche la *densità di carica lineare*  $\lambda(\mathbf{r}) = dq/ds$ .

Le notazioni sono standard. In generale si hanno cariche di tutti e tre i tipi:

$$dq = \rho \, dV + \sigma \, dS + \lambda \, ds. \quad (1.10)$$

Come riscaldamento, impariamo come passare dalla somma discreta all'integrale continuo in un caso in cui il risultato è intuitivo: il calcolo della carica totale  $Q = \sum_i q_i$ . Considerando cariche volumetriche la carica totale vale

$$Q = \sum_i q_i \simeq \int dq' = \int dV' \frac{dq'}{dV'} = \int dV' \rho(\mathbf{r}'). \quad (1.11)$$

Similmente  $Q = \int dS \, \sigma$  e  $Q = \int ds \, \lambda$ .

### 1.5.1 Campo elettrico

Applichiamo poi lo stesso passaggio da discreto a continuo in un caso meno intuitivo, ricavando la formula per il *campo elettrico generato da una distribuzione continua di cariche*. Applicando la formula per una cariche puntiforme, e sommando su tutte, si ottiene:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.12)$$

### 1.5.2 Potenziale elettrico

Allo stesso modo si ottiene la formula per il *potenziale elettrico di una distribuzione continua di cariche*:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dV' \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (1.13)$$

### 1.5.3 Energia elettrica

Per finire, l'*energia elettrostatica* è data da una somma doppia, su ogni coppia di cariche. Nel limite continuo si ottiene quindi un poco pratico integrale doppio sul volume:

$$U = \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \simeq \frac{1}{2} \int \frac{dq' dq''}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} = \frac{1}{2} \int \frac{dV' dV'' \rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}. \quad (1.14)$$

Notare che il caso  $i = j$ , escluso artificialmente dalla somma discreta, diventa irrilevante per una distribuzione volumetrica  $\rho$ , in quanto in un integrale della forma  $d^3r/r$  in cui le 3 potenze al numeratore evitano che la potenza  $1/r$  al denominatore dia un'integrale divergente nel limite  $r \rightarrow 0$ .

L'energia viene scritta in forma più utile per calcoli pratici spezzando il doppio integrale in due: uno per calcolare il potenziale, uno per calcolare l'energia

$$U = \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi(r_j)_{\text{altre}} = \boxed{\frac{1}{2} \int dq \varphi} = \frac{1}{2} \int dV \rho \varphi. \quad (1.15)$$

Come meglio discusso negli esercizi, in generale l'energia scala quadraticamente  $U \propto N^2$  con il numero di particelle cariche, con una importante eccezione: la materia neutra in cui  $U \propto N$ . Questo significa che l'energia chimica in due litri di benzina, essendo energia elettrostatica, è il doppio di quella in un litro. Si veda l'esercizio sull'energia del sale per un calcolo dettagliato.

# Il campo elettrico

Riformuliamo la forza di Coulomb assegnando realtà fisica al campo elettrico.

## 2.1 Flusso di un campo vettoriale

Si definisce il flusso di un campo vettoriale  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  attraverso una superficie  $S$  come

$$\text{Flusso di } \mathbf{E} = \Phi_E \equiv \int_S dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \quad (2.1)$$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale alla superficie. Notare che il flusso può essere negativo: per convenzione si prende la normale uscente quando la superficie è chiusa.

Per motivare la definizione, consideriamo come campo vettoriale il flusso dell'acqua, ad esempio di un fiume (fig. 2.1). Si dice che l'Arno ha un flusso medio di  $110 \text{ m}^3/\text{s}$ , il Po di  $1500 \text{ m}^3/\text{s}$ , il Rio delle Amazzoni di  $200000 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Che significa? Il flusso dice quindi quanta acqua passa. Vediamo come calcolarlo in termini del campo vettore velocità del fluido  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  (per misurarlo basta buttare una foglia e vedere a che velocità viene trasportata). Se  $\mathbf{v}$  è uguale in tutto il fiume, basta considerare una superficie  $S$  ortogonale a  $\mathbf{v}$ : il flusso vale  $\Phi_v = Sv$ . A livello matematico, uno può complicare il conto prendendo una superficie  $S' = S/\cos\theta$  piana ma con normale inclinata di un angolo  $\theta$  rispetto a  $\mathbf{v}$ : si ottiene lo stesso flusso definendolo come  $\Phi_v \equiv S'v \cos\theta$ . Considerando una superficie di forma generica, questo motiva la

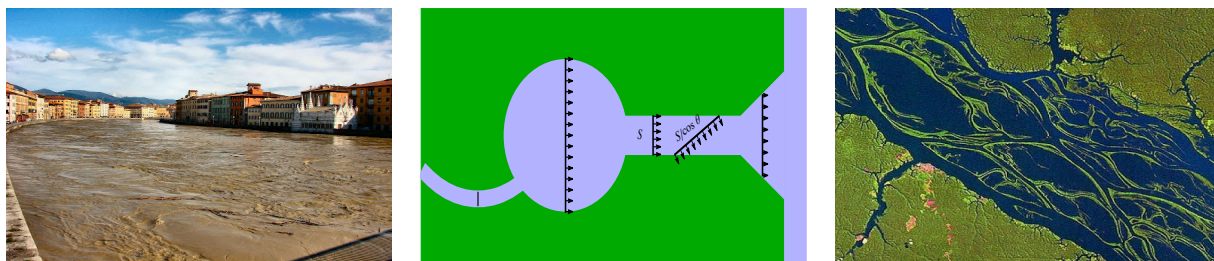


Figura 2.1: Fiumi con flusso di acqua.

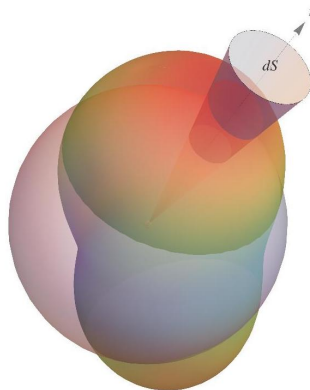


Figura 2.2: *Teorema di Gauss per una carica  $Q$  nell'origine. Per ogni cono infinitesimo  $dS$  il flusso attraverso la sfera è uguale a quello attraverso la superficie di forma generale a patata.*

definizione

$$\Phi_v = \int dS \, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \quad \text{dove } \mathbf{n} \text{ è il versore normale alla superficie } dS.$$

In questo modo si può calcolare il flusso di fiumi con forme tortuose. Per un fiume che non perde o guadagna acqua,  $\Phi_v$  non dipende dalla superficie scelta.

## 2.2 Teorema di Gauss

Gauss ha dimostrato che il flusso del campo elettrico attraverso una generica superficie chiusa  $S$  è uguale alla carica totale interna  $Q_{\text{in}}$  diviso  $\epsilon_0$

$$\Phi_E = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}. \quad (2.2)$$

Come vedremo in seguito, questo risultato è così importante che lo strano fattore  $1/4\pi\epsilon_0$  nella forza di Coulomb è stato messo per cancellare il  $4\pi$  nel teorema di Gauss.

Ragionando al livello di rigore tipico in fisica, lo si dimostra così. Se è vero per una sola carica, è vero in generale, essendo sia  $\mathbf{E}$  che  $\Phi_E$  dato dalla somma sulle cariche.

Quindi, iniziamo dal caso più semplice: mettiamo una carica  $Q$  nell'origine e calcoliamo il flusso di  $\mathbf{E}$  attraverso una sfera di raggio  $r$ : si ha  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = E_r = |\mathbf{E}|$  e

$$\Phi_E = Q \frac{4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Notare che la dipendenza da  $r$  si cancella: la superficie cresce come  $r^2$ , che viene cancellato dall' $1/r^2$  nella forza di Coulomb. Il teorema di Gauss esprime quindi qualcosa di speciale legato alla potenza specifica  $1/r^2$ .

Si nota poi che il flusso ha lo stesso valore se calcolato attraverso una superficie storta, in quanto ogni contributo infinitesimo  $d\Phi_E = dS \, \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$  è lo stesso indipendentemente dalla distanza e dall'inclinazione  $\mathbf{n}$ . Questo è illustrato nella figura 2.2 (e sarebbe più chiara facendola in 2d piuttosto che in 3d).

Infine, si osserva che il flusso generato da una carica esterna alla superficie vale zero, in quanto il contributo di ogni elemento infinitesimo entra tante volte quanto esce, e tutte le volte ha lo stesso modulo.

Quindi, avendo tante cariche puntiformi, solo quelle interne contribuiscono al flusso. Lo stesso vale quindi per una distribuzione continua di cariche.

Una prima conseguenza importante del teorema di Gauss è che nessuna carica è in equilibrio elettrostatico stabile nel campo generato da altre cariche. Se lo fosse, dovrebbe esserci un campo elettrico che vale zero nella posizione della carica, e che la rimanda indietro in qualunque direzione essa si sposta. Quindi il flusso delle cariche esterne dovrebbe essere diverso da zero, in contraddizione con il teorema di Gauss che impone  $\Phi_{E_{\text{ext}}} = 0$ .

### 2.2.1 Elettrostatica in $d$ dimensioni

Il teorema di Gauss inizia a svelare un messaggio che si nasconde nel fatto che la forza di Coulomb dipende dalla distanza come  $1/r^2$  piuttosto che come una potenza diversa o come una funzione più complicata: la forza scala come l'inverso della superficie  $S_3 = 4\pi r^2$ . Questo consente di capire come sarebbe l'elettromagnetismo in dimensioni diverse, ad esempio  $S_2 = 2\pi r$  in 2 dimensioni o  $S_1 = 2$  in 1 dimensione.

Ed infatti, allo stesso risultato si arriva tramite conti fatti negli esercizi: il campo o potenziale generato da un filo carico, o da un piano carico. Un filo carico è una speciale sorgente in 3 dimensioni che dipende solo da 2 dimensioni: si immagina di vedere il filo da sopra: nel piano perpendicolare al filo, questo è come una carica puntiforme. Matematicamente, un filo lungo l'asse  $z$  con densità di carica costante  $\lambda$  è una densità di carica  $\rho(x, y, z)$  che non dipende da  $z$ , che quindi è come se non esistesse.

Similmente un piano carico è una sorgente in 3 dimensioni che dipende solo da 1 dimensione, in cui è come una carica puntiforme. Ed infatti i risultati dei calcoli forniscono quanto suggerito dal teorema di Gauss,

Dimensioni	Analogo a	$E_r(r)$	$\varphi(r)$	$r^2$
1	Piano in 3d	$\sigma/2\epsilon_0$	$-\sigma r /2\epsilon_0$	$x^2$
2	Filo in 3d	$\lambda/2\pi r\epsilon_0$	$\lambda \ln(r)/2\pi\epsilon_0$	$x^2 + y^2$
3	Carica in 3d	$Q/4\pi r^2\epsilon_0$	$Q/4\pi\epsilon_0 r$	$x^2 + y^2 + z^2$
$d$		$\propto 1/S_d \propto 1/r^{d-1}$	$\propto 1/r^{d-2}$	$\sum_{i=1}^d x_i^2$

che anche consente di dire come sarebbe la forza di Coulomb in  $d > 3$  dimensioni.

Un'osservazione interessante è che  $d = 3$  è la dimensione speciale che consente una fisica non ovvia, in quanto:

- Per  $d \leq 2$  il potenziale non è finito nell limite  $r \rightarrow \infty$ , il che significa che non esistono 'cariche' libere.
- Per  $d \geq 4$  non esistono orbite stabili: in ogni dimensione le orbite avvengono in un piano e sono calcolabili tramite il potenziale effettivo  $V_{\text{eff}} = V(r) + L^2/2\mu r^2$ . Il minimo di  $V_{\text{eff}}$  che esiste per  $d \leq 3$  scompare per  $d \geq 4$ : il moto collassa all'origine. (Un simile risultato vale per la funzione d'onda in meccanica quantistica).

Magari qualche teoria fondamentale consente diversi numeri di dimensioni, e viviamo in  $d = 3$  perché è l'unica dimensione che consente cariche libere con moto che non collassa ad  $r = 0$ .

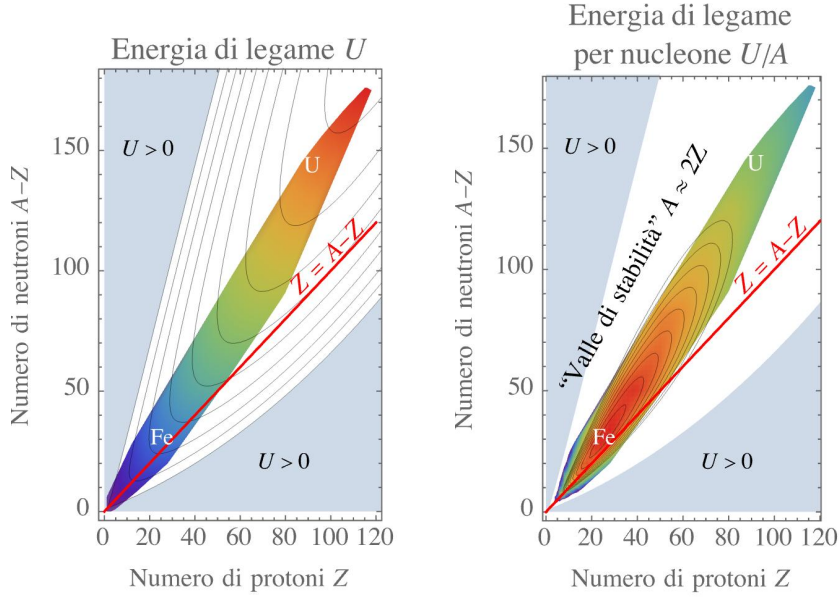


Figura 2.3: I nuclei sono caratterizzati da  $Z$  (numero di protoni) ed  $A - Z$  (numero di neutroni). In questo piano disegniamo le funzioni  $U$  (energia di legame, a sinistra) e  $U/A$  (energia di legame per nucleone, a destra), confrontando l'approssimazione analitica nel testo (linee di livello) con i valori sperimentali (colori). Si capisce come mai il Ferro è l'elemento più stabile e nuclei a grosso  $Z$  come l'Uranio iniziano ad essere instabili per repulsione elettrica.

## 2.3 Raggio classico dell'elettrone

Come applicazione della formula in eq. (1.15) calcoliamo l'energia di una sfera di raggio  $r$  con carica elettrica totale  $e$  distribuita in maniera uniforme sulla superficie, o nel volume, o in modi vari. Si trova:

$$U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \times \begin{cases} 1/2 & \text{densità } \sigma \text{ costante su superficie sferica} \\ 3/5 & \text{densità } \rho \text{ costante in sfera} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{per semplicità, se la forma è ignota.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Assumendo che l'elettrone sia una sfera di piccolo raggio  $r$  con carica messa in qualche maniera ignota, si ottiene l'energia elettrostatica  $U = e^2/4\pi\epsilon_0 r$  in cui il fattore incognito di ordine 1 è fissato in maniera arbitraria. L'energia è grande per  $r$  piccolo e diverge per  $r \rightarrow 0$ . In relatività l'energia  $U$  contribuisce alla massa come  $U/c^2$  (questa formula famosa viene qui usata senza dimostrazione). Ipotizzando che tutta la massa dell'elettrone sia dovuta alla sua energia elettrostatica,  $U = m_e c^2$ , fissa un valore particolare  $r = r_e$  detto 'raggio classico dell'elettrone':

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (2.4)$$

Oggi si sa che l'energia elettrica è solo una piccola frazione della massa dell'elettrone,  $U \sim m_e c^2/137$ . Quindi questo *non* è il vero raggio dell'elettrone, ma il termine è rimasto, e la combinazione  $r_e$  tornerà utile in seguito. Inoltre, per caso,  $r_e$  è circa la dimensione del protone.



## 2.4 Energia di legame nucleare

La formula in eq. (1.15) consente di capire alcune proprietà dei nuclei. Oggi è noto che i nuclei contengono

- $Z$  protoni  $p$  di carica  $+e$ , massa  $m_p \approx 0.9382 \text{ GeV}/c^2$ , di dimensione  $r_N = 1.3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ .
- $A - Z$  neutroni  $n$  di carica  $0$  e massa  $m_n \approx 0.9395 \text{ GeV}/c^2$ , e uguale dimensione  $r_N$

In notazione nucleare un nucleo generico viene denotato come  ${}_Z^A\text{nome}$ . Ad esempio la particella  $\alpha$  di Rutherford è il nucleo dell'elio,  ${}_2^4\text{He}$ . Per  $Z$  abbastanza grosso i nuclei sono approssimabili come sferette di raggio  $R \approx A^{1/3} r_N$  con densità di carica costante nel volume. L'energia di legame nucleare è la somma di una componente elettrica  $U_{\text{em}}$  (oggetto di questo corso), e di una componente  $U_{\text{strong}}$  dovuta alle forze forti (non oggetto di questo corso):

$$U = U_{\text{em}} + U_{\text{strong}}, \quad (2.5)$$

$$U_{\text{em}} \approx +\frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \approx 0.0006 \text{ GeV} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (2.6)$$

$$U_{\text{strong}} \approx \underbrace{-0.01 \text{ GeV} A}_{\text{legame forte a corto raggio}} + \underbrace{0.01 \text{ GeV} A^{2/3}}_{\text{corr. di superficie, conta poco}} + \underbrace{0.1 \text{ GeV} \frac{(Z - A/2)^2}{A}}_{\text{accoppiamento } p, n} \quad (2.7)$$

Siccome i protoni si respingono il contributo elettrico è positivo e scala come  $Z^2/A^{1/3}$ : la repulsione fra protoni tende a destabilizzare i nuclei, e diventa importante a grosso  $Z$ . Il primo termine nel contributo forte è attrattivo e può essere capito tramite buon-senso: scala come  $A$  in quanto le interazioni forti sono a corto raggio, ovvero agiscono solo fra protoni o neutroni vicini. Il secondo termine, numericamente poco rilevante, tiene conto che i nuclei sulla superficie hanno un solo vicino, e quindi (come in una goccia d'acqua) esiste una tensione superficiale. L'ultimo termine nel contributo forte è numericamente importante e, per motivi qui non spiegabili, favorisce nuclei con un ugual numero di protoni e neutroni,  $A - Z = Z$  cioè  $Z = A/2$ .

La figura 2.3 mostra l'energia di legame totale per nucleone  $U/A$ . La formula qui riassunta è in buon accordo con i dati sperimentali. È infatti possibile misurare la massa  $M$  di ogni nuclei che, in base alla relatività " $E = mc^2$ ", è data dalla formula

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{U}{c^2}. \quad (2.8)$$

Ovvero uno stato legato con energia negativa  $U < 0$  è più leggero della somma dei suoi componenti. Da questa funzione  $U$  si possono comprendere proprietà dei nuclei, come discusso negli esercizi.

## 2.5 Il gradiente

Per i matematici il gradiente è un *operatore differenziale* che viene definito come

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.9)$$

Per i fisici il gradiente è qualcosa di più. Capita che la fisica sia invariante sotto rotazioni in 3 dimensioni (gruppo  $\text{SO}(3)$ ), e quindi è utile in fisica rendere esplicita questa invarianza utilizzando

rappresentazioni del gruppo  $SO(3)$ , ovvero vettori (e tensori più complicati). In fisica il gradiente soddisfa a proprietà matematiche di due mondi diversi: è *sia un operatore differenziale che un vettore*. Questo fissa la sua definizione: definizioni alternative come

$$\hat{y}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{x}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{o} \quad 2\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

non darebbero un vettore.

Cosa è un vettore?

In linguaggio algebrico, un vettore  $V_i$  sono 3 numeri (le componenti  $V_i$  con  $i = \{1, 2, 3\}$  su 3 assi) che sotto rotazioni  $R_{i'i}$  del sistema di coordinate  $x_{i'} = \sum_i R_{i'i}x_i$  si trasformano come  $V_{i'} = \sum_i R_{i'i}V_i$ . Questa definizione traduce in forma matematica precisa il concetto geometrico intuitivo di vettore ‘freccetta’  $\mathbf{V} = \sum_i V_i \hat{\mathbf{x}}_i = \sum_{i'} V_{i'} \hat{\mathbf{x}}_{i'}$  indipendentemente dal sistema di coordinate utilizzato. E può essere generalizzata a tensori (che non ci servono) e gradiente. In questo linguaggio il gradiente ha componenti  $\nabla_i = \partial/\partial x_i$ .

Una prima dimostrazione che il gradiente è un vettore si basa sulle proprietà algebriche della componente  $i$  del gradiente, la derivata rispetto alla coordinata  $x_i$ . Utilizzando la formula per la derivata di funzione di funzione  $f(x'(x))$  e la proprietà  $R^{-1} = R^T$  della matrice di rotazione si ottiene

$$\nabla_{i'} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{i'}} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_{i'}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i R_{i'i} \nabla_i \quad x_i = \sum_{i'} (R^{-1})_{ii'} x_{i'} = \sum_{i'} x_{i'} R_{i'i}.$$

(Se la formula astratta  $\nabla$  confonde, si pensino le formule sopra come applicate ad una generica funzione  $f$ ).

Una seconda dimostrazione, più geometrica, si basa sul fatto che il prodotto scalare di due vettori è uno scalare, e che quindi un oggetto  $X$  è un vettore se il suo prodotto scalare con un secondo vettore è uno scalare. Nel nostro caso, come secondo vettore prendiamo il vettore distanza  $d\mathbf{x} = \sum_i dx_i \hat{\mathbf{x}}_i$  fra due punti infinitesimamente vicini. Lo scalare è il differenziale di una funzione scalare arbitraria  $f$ . Essendo la differenza nel valore di  $f$  in due punti, il differenziale è uno scalare (ovvero un numero che non dipende da quale sistema di coordinate uno usa). Come noto, il differenziale è matematicamente dato da

$$df = f(x_i + dx_i) - f(x_i) = \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv d\mathbf{x} \cdot \nabla f.$$

Nel passaggio finale abbiamo solo riscritto la formula matematica in notazione vettoriale, come prodotto scalare fra il vettore distanza  $d\mathbf{x}$ : il pezzo rimanente definisce quindi un vettore  $\nabla f$ . Per una funzione  $f$  arbitraria data  $\nabla f$  è la freccetta che punta nella direzione di massima pendenza di  $f$ . In maniera più astratta,  $\nabla$  (non applicato a nessuna funzione  $f$ ) è un vettore, ed un operatore differenziale.

Questo punto di vista astratto è utile per introdurre divergenza, rotore, ed operazioni varie.

## 2.6 La divergenza

Abbiamo dimostrato che  $\nabla$  è un vettore: conseguenza immediata è che il prodotto scalare fra  $\nabla$  ed un campo vettoriale generico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  è uno scalare, detto divergenza:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (2.10)$$

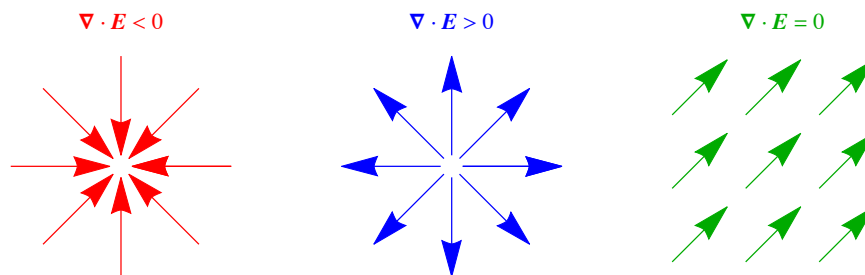


Figura 2.4: Esempio di campo vettoriale con divergenza negativa, positiva, nulla.

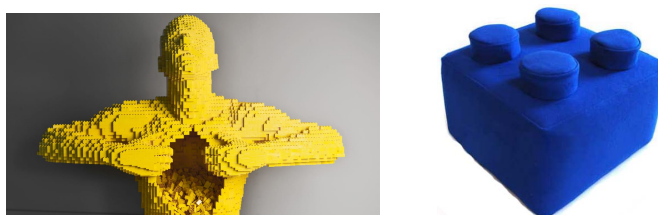


Figura 2.5: Una forma generica può essere approssimata come tanti cubettini.

Essere scalare significa che la divergenza non cambia se uno ruota il sistema di coordinate. Ruotando  $x \rightarrow x'$ ,  $E_x \rightarrow E_{x'}$ , etc si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'}.$$

La divergenza ha il seguente significato geometrico. Assumendo che il campo vettoriale sia la velocità  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  di un flusso di acqua (per semplicità 2-dimensionale), la divergenza calcolata in un generico punto  $\mathbf{r}$  dice se lì ci sono sorgenti di acqua. Un tubo che preleva acqua è come una carica puntiforme; la pioggia  $p$  è come una distribuzione di carica uniforme:  $v_x = \text{cte} + px$ . La figura 2.4 esemplifica campi vettoriali a divergenza negativa, positiva, nulla.

## 2.7 Teorema della divergenza

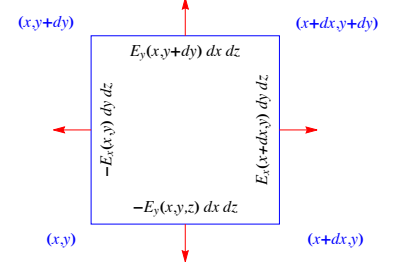
Il teorema della divergenza dice che

$$\int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \int dV \nabla \cdot \mathbf{E} . \quad (2.11)$$

Lo si dimostra decomponendo un volume generico in cubettini infinitesimi e verificando che il teorema si applica separatamente a ciascun cubettino.

Per un cubetto infinitesimo di lati  $dx dy dz$

$$\begin{aligned}
 \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} &= + \int dy dz [E_x(x+dx, y, z) - E_x(x, y, z)] \\
 &+ \int dx dz [E_y(x, y+dy, z) - E_y(x, y, z)] \\
 &+ \int dx dy [E_z(x, y, z+dz) - E_z(x, y, z)] \\
 &= \int dx dy dz \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]
 \end{aligned}$$



## 2.8 Prima equazione di Maxwell

Consideriamo una generica densità di cariche volumetriche  $\rho(\mathbf{x})$ . Combinando il teorema di Gauss con quello della divergenza si ottiene

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int dV \rho = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \Phi_E = \int dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \stackrel{\text{divg}}{=} \int dV \nabla \cdot \mathbf{E}.$$

Essendo l'equazione vera per un volume generico, devono essere eguali gli integrandi. Si ottiene la prima equazione di Maxwell

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0}. \quad (2.12)$$

Dice (parzialmente) come una densità di carica  $\rho$  genera un campo elettrico  $\mathbf{E}$ . La 1a equazione di Maxwell non aggiunge nulla alla forza di Coulomb, eccetto il mostrare che la potenza speciale  $1/r^2$  significa che il campo elettrico è soluzione della più semplice equazione differenziale invariante per rotazioni. Il fatto che sia venuta un'equazione differenziale (con 1 derivata) significa che la fisica è *locale* se il campo elettrico piuttosto che la forza di Coulomb è la vera quantità fisica.

Vedremo in seguito che il campo elettro-magnetico possiede energia, impulso, etc.

Si inizia a vedere quali sono i principi dietro alla fisica. A posteriori, assumendo 1) località; 2) invarianza per rotazioni; 3) linearità non poteva che venire  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  proporzionale alla sua sorgente  $\rho$ .

Possiamo infine verificare che in  $d = 3$  dimensioni il campo di Coulomb  $\mathbf{E} \propto \mathbf{r}/r^3$ , pur non essendo costante, ha divergenza zero per  $r \neq 0$ . Il conto esplicito non è del tutto ovvio:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{r}}{r^4} \cdot \nabla r = \frac{d}{r^3} - 3 \frac{\mathbf{r}}{r^4} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = 0.$$

## 2.9 Densità di energia del campo elettrico

L'aver riformulato in forma differenziale la forza elettrica rende possibile dimostrare una seconda formula utile in pratica per calcolare l'energia elettrostatica:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2 \quad \text{cioè} \quad u = \frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2}$$

La formula va verso il considerare il campo elettrico come la vera quantità fisica, attribuendogli una densità di energia  $u$ .

Per iniziare, verifichiamo che la formula fornisce il risultato corretto nel sistema fisico più semplice possibile: due piastre parallele di superficie  $S$  a distanza  $d$  con densità superficiale  $\pm\sigma$ . Esse generano un campo elettrico semplice,  $E_{\text{in}} = \sigma/\epsilon_0$  costante nella zona interna, e zero fuori. Quindi

$$U = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta\varphi = \frac{S\sigma \cdot E_{\text{in}}d}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\epsilon_0}{2} V E_{\text{in}}^2. \quad (2.13)$$

Procediamo con la dimostrazione generale. In una dimensione essa consiste in una integrazione per parti:

$$U = \frac{1}{2} \int dx \varphi \rho = \frac{\epsilon_0}{2} \int dx \varphi \frac{dE}{dx} = \frac{\epsilon_0}{2} \int dx \left[ -\frac{d\varphi}{dx} E + \frac{d}{dx}(\varphi E) \right] = \int dx \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + (\text{termine di bordo}). \quad (2.14)$$

In 3 dimensioni la dimostrazione è basata sulla generalizzazione dell'integrazione per parti:

$$U = \frac{1}{2} \int dV \varphi \rho = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \varphi \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV [-\mathbf{E} \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{E})] = \int dV u + \frac{\epsilon_0}{2} \Phi_{\varphi} \mathbf{E} \quad (2.15)$$

La formula vale se il termine di bordo  $\Phi_{\varphi} \mathbf{E}$  vale zero. Questo è vero prendendo come volume tutto lo spazio (e quindi bordo all'infinito), ma solo per distribuzioni di cariche finite. In tal caso il termine di superficie vale zero all'infinito

$$\Phi_{\varphi} \mathbf{E} \sim \int dS \varphi E \sim \int \frac{r^2 d\Omega}{r \times r^2} \stackrel{r \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0. \quad (2.16)$$

La dimostrazione fallisce se ci sono singolarità, ovvero cariche puntiformi. Essendo singolari, esse vanno escluse dal volume su cui si applica l'integrazione per parti, ottenendo ulteriori termini di superficie vicini alla cariche, che divergono mandandoli a distanza  $r \rightarrow 0$  dalla carica puntiforme.

Matematicamente questo sembra brutto e confuso, ma fisicamente è bello e chiaro. Il termine divergente è l'energia di una carica su stessa, quella già discussa in eq. (2.3). Avevamo scritto l'energia come  $U = \sum_{i \neq j} q_i q_j / 4\pi\epsilon_0 r_{ij}$ , omettendo a mano il termine infinito con  $i = j$ . La nuova formula pulita  $U = \int dV \epsilon_0 E^2 / 2$  include questo contributo divergente nel limite puntiforme. Ovvero la formula pulita descrive una fisica pulita, in cui si evita di sottrarre a mano l'energia di una carica su se stessa. Tutta la confusione è dovuta all'aver sviluppato il formalismo basandosi sul limite ideale di cariche puntiformi.

Vari esercizi mostrano come le due formule per  $U$  concordano in maniera non ovvia per sistemi come una sfera carica, nonostante la seguente apparente differenza: La formula  $U = \frac{1}{2} \int \varphi dq$  attribuisce le energie alle cariche, che stanno nella sfera. La formula equivalente  $U = \int dV \epsilon_0 E^2 / 2$  attribuisce energia al campo, che sta anche fuori dalla sfera.

## 2.10 Pressione su cariche superficiali

In casi di interesse fisico come i conduttori discussi nel seguito, le cariche elettriche si distribuiscono su superfici  $S$  con densità superficiale  $\sigma$ . In presenza di un campo elettrico esterno, a quale forza elettrica sono soggette queste cariche superficiali? L'espressione naturale  $\mathbf{F} \stackrel{?}{=} q\mathbf{E} = \sigma S \mathbf{E}$  è male definita, in quanto la componente normale del campo  $\mathbf{E}$  è discontinua sulla superficie.

Questo segue dal teorema di Gauss applicato ad un cilindretto ortogonale alla superficie

$$E_{\perp 1} - E_{\perp 2} = \sigma / \epsilon_0.$$

Mostriamo che la formula giusta è

$$\mathbf{F} = \sigma S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) / 2 \quad (2.17)$$

ovvero conta la media aritmetica del campo sui due lati 1 e 2.

Il motivo intuitivo è che, per il principio di azione e reazione, la forza deve essere generata solo dal campo elettrico ‘esterno’, non da quello generato dalla superficie stessa. Questa crea una discontinuità nel valore di  $\mathbf{E}_{\perp}$ , e quindi non contribuisce alla media  $(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)/2$ .

Per dimostrare il risultato occorre abbandonare l’idealizzazione di superficie di spessore zero, e studiare cosa accade dentro il piccolo spessore finito che rimpiazza la superficie ideale.

Chiamando  $z$  l’asse perpendicolare alla superficie, la sua densità di carica è legata da  $\sigma = \int \rho(z) dz$  alla densità volumetrica  $\rho$ . Questa compare nella 1a equazione di Maxwell,  $dE_z/dz = \rho/\epsilon_0$ . Integrandola in  $dz$  si riottiene  $E_{z2} - E_{z1} = \sigma/\epsilon_0$ : il risultato sopra ottenuto applicando il teorema di Gauss su di un cilindretto perpendicolare alla superficie. La pressione vale:

$$p = \frac{dF_z}{dS} = \int E_z \rho dz = \epsilon_0 \int E_z \frac{dE_z}{dz} dz = \epsilon_0 \frac{E_{z2}^2 - E_{z1}^2}{2} = u_2 - u_1. \quad (2.18)$$

Si è ottenuta la differenza nella densità di energia nei due lati: questo tipo di formula è vera in contesti più generali, ad esempio la pressione su di una superficie che separa due gas è data dalla differenza nella loro densità di energia (in questo caso l’energia cinetica dovuta al moto delle molecole).

Concludendo, la fomula viene riscritta nella forma finale:

$$p = \epsilon_0 (E_{\perp 2} - E_{\perp 1}) \frac{E_{\perp 2} + E_{\perp 1}}{2} = \sigma \frac{E_{\perp 2} + E_{\perp 1}}{2}. \quad (2.19)$$

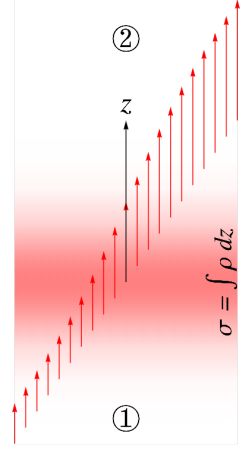
## 2.11 Teorema del rotore

Una seconda identità matematica utile è nota come teorema del rotore: dato un qualunque campo vettoriale  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  ed una qualunque superficie avente come bordo la curva chiusa  $\gamma$  vale

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

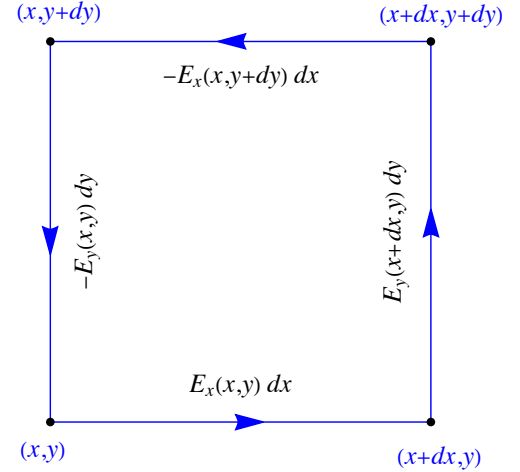
dove  $\mathbf{n}$  è la normale alla superficie. Il segno di entrambi i termini è definito decidendo che l’integrale di circuitazione  $\oint$  è fatto in verso antiorario.

La dimostrazione è simile a quella del teorema della divergenza: decomponendo una superficie generica  $S$  come somma di rettangolini infinitesimi, il teorema è vero se è soddisfatto su ognuno di essi.



Infatti, considerando per semplicità un rettangolo infinitesimo di lati  $dx dy$ , si ha

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= + \int dx [E_x(x, y) - E_x(x, y + dy)] \\ &\quad + \int dy [-E_y(x, y) + E_y(x + dx, y)] \\ &= \int dx dy \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right]\end{aligned}$$



che, in notazione vettoriale, coincide con

$$\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = (\nabla \times \mathbf{E})_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x$$

ricordando che il prodotto vettore vale  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$ .

### 2.11.1 Teorema unificato

È utile, se non altro a livello mnemonico, menzionare che il teorema del rotore, quello della divergenza, e quello (banale) del gradiente sono casi particolari di un teorema più generale. Si noti infatti la struttura comune:

- 0) Il teorema banale lega l'integrale di una derivata lungo una curva all'integrale sul suo bordo, ovvero i punti iniziale e finale:

$$\int_L \nabla f \cdot d\mathbf{x} = \Delta f = \oint_{\partial L=P} f.$$

- 1) Il teorema del rotore lega l'integrale di una derivata su di una superficie all'integrale sul suo bordo, ovvero una curva:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S=L} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}.$$

- 2) Il teorema della divergenza lega l'integrale di una derivata sul volume all'integrale sul suo bordo, ovvero una superficie:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \oint_{\partial V=S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Il teorema generale lega l'integrale di una derivata su di un sotto-spazio  $X$  di dimensione  $n$  in uno spazio di dimensione  $d$  all'integrale sul suo bordo di dimensione  $n - 1$ :

$$\int_X \partial \wedge A^{(n)} \wedge dx^{(n+1)} = \oint_{\partial X} A^{(n)} \wedge dx^{(n)}.$$

Il bordo di  $X$  è denotato come  $\partial X$ . L'integrando  $A^{(n)}$  è una  $n$ -forma, ovvero un tensore anti-simmetrico nei suoi  $n$  indici. Il simbolo  $\wedge$  indica anti-simmetrizzazione, che è l'elemento alla base delle identità. Non entriamo qui nei dettagli, se non per osservare che in  $d = 3$  dimensioni si ha:

- 0) Per  $n = 0$  una 0-forma è una normale funzione scalare, integrata su di una curva.
- 1) Per  $n = 1$  una 1-forma è un vettore, integrato su di uno spazio di dimensione  $n + 1 = 2$ , ovvero una superficie.
- 2) Per  $n = 2$  una 2-forma è un tensore antisimmetrico a 2 indici  $A_{jk}$ , che in 3 dimensioni equivale ad un vettore  $V_i = \epsilon_{ijk} A_{jk}$  in quanto esiste il tensore invariante a 3 indici totalmente antisimmetrico  $\epsilon_{ijk}$ . (In maniera più intuitiva, in 3 dimensioni due vettori definiscono un unico vettore ortogonale ad entrambi; la normale nel teorema della divergenza esce come  $\epsilon_{ijk} dx_j dx_k = dS \, n_i$ ).

## 2.12 La 2a equazione di Maxwell (in elettrostatica)

Il campo vettoriale  $\mathbf{E}$  ha 3 componenti, quindi la sola 1a equazione di Maxwell (una componente scalare) non può determinarle tutte. Infatti, data una qualunque soluzione della 1a equazione di Maxwell, è possibile aggiungere un campo arbitrario che ha divergenza zero. Un esempio è  $\mathbf{E} = (y, -x, 0)$ , le cui linee di campo sono circonferenze. Questi campi ‘che ruotano’ non sono generati da cariche elettriche in quanto Coulomb ha osservato che una carica puntiforme genera un campo  $\mathbf{E}$  radiale. Il punto essenziale qui è che un qualunque campo di forza radiale  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  è conservativo, ovvero non si ha lavoro su di un circuito chiuso, ed il lavoro su di un circuito aperto dipende solo dai suoi punti iniziale e finale:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \varphi_A - \varphi_B = 0 \quad \text{se } A = B. \quad (2.20)$$

Questo risultato noto da fisica 1 può ora essere espresso in una forma nuova, detta 2a equazione di Maxwell, utilizzando il teorema del rotore. Esso asserisce che  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int dS \, \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$ , quindi

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Questa 2a equazione di Maxwell è automaticamente soddisfatta se  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Infatti il rotore di un gradiente è identicamente zero, grazie all’anti-simmetria  $(\nabla \times \nabla\varphi)_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = 0$ . (Se il tensore  $\epsilon_{ijk}$  confonde le idee, basta scrivere esplicitamente in componenti).

## 2.13 Equazioni di Maxwell per l’elettrostatica

Abbiamo quindi completato il programma di riscrivere la forza di Coulomb in una formulazione matematica equivalente, in cui la potenza speciale  $1/r^2$  rende possibile maggiore semplicità:

	caso particolare	lezione generale
Fisica 1	$x = at^2/2$	$\ddot{x} = a$
Fisica 2	$F = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r^2$	$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$

Al momento non è chiaro se la fisica che si nasconde dietro alla forza di Coulomb è meglio catturata usando il campo vettoriale a 3 componenti  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ , o usando invece un campo scalare  $\varphi(\mathbf{x})$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0 \\ \mathbf{E} = -\nabla \varphi \end{array} \right.$$



dove  $\nabla^2\varphi \equiv \nabla \cdot \nabla\varphi = \partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2$  è il Laplaciano.

I risultati precedenti implicano che la soluzione generali delle equazioni differenziali è:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}.$$

Si osserva inoltre che, se le stesse equazioni e soluzioni valessero anche nel caso dinamico in cui le cariche si muovono (ovvero la densità di carica  $\rho(\mathbf{r}, t)$  dipende dal tempo  $t$ ) implicherebbero un fenomeno sorprendente: la trasmissione di segnali a velocità infinita, in quanto il moto di una carica istantaneamente modifica il campo elettrico in tutto lo spazio.

Per finire, un punto qui non necessario, che viene accennato per completezza. Questi risultati, ottenuti in maniera fisica con cariche puntiformi, possono essere formalizzati matematicamente dicendo che le equazioni sono lineari, e risolvendo il caso con sorgente semplice eguale alla funzione ‘delta di Dirac’, che formalizza la carica puntiforme, e matematicamente soddisfa all’equazione  $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ .

Come esercizio di conto esplicito verifichiamo che in  $d$  dimensioni l’equazione  $\nabla^2\varphi = 0$  per  $r \neq 0$ . è risolta da  $\varphi \propto r^{2-d}$ . Proviamo come soluzione una potenza generica  $\varphi \propto r^p$ :

$$\partial_x r^p = p x r^{p-2}, \quad \partial_x^2 r^p = p r^{p-2} + p(p-2)x^2 r^{p-4}, \quad \nabla^2 r^p = p[d + p - 2]r^{p-2}$$

che è uguale a zero per  $p = 2 - d$ .

## Sistemi di coordinate ortogonali

Dimostriamo qui alcune formule utili per gradiente, divergenza, rotore e laplaciano in sistemi di coordinate cilindriche e sferiche, riassunte ad esempio al seguente link: [Raccolta di formule in wikipedia](#).

Per capire come derivarle è utile essere più generali. Un settore della matematica si occupa di descrivere uno spazio (nel nostro caso piatto, ma in generale anche curvo) in termini di coordinate generiche curve  $x_i$ ,  $i = \{1, \dots, d\}$  dove  $d$  è la dimensione dello spazio. Il punto di partenza di questo formalismo è che coordinate curve diventano localmente rettilinee (eventualmente storte), per cui localmente vale il teorema di Pitagora secondo cui la distanza fra due punti di coordinate  $x_i$  e  $x_i + dx_i$  è una funzione quadratica dei  $dx$ :

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i dx_j. \quad (3.1)$$

Per semplicità ci restringiamo a coordinate ortogonali (in cui gli assi localmente sono ortogonali fra di loro) in  $d = 3$  dimensioni. Abbiamo quindi

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{dove} \quad d\mathbf{x} = \sum_i g_i dx_i \hat{\mathbf{x}}_i$$

è il vettore spostamento infinitesimo,  $\hat{\mathbf{x}}_i$  è il versore lungo la coordinata  $i$  e  $g_i \equiv \sqrt{g_{ii}}$  (adottiamo questa notazione inusuale semplificata).

Esempio rilevante in  $d = 2$  sono le coordinate cartesiane e polari, in cui i versori sono:  $d\mathbf{x} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ :



Ci interessano in particolare le coordinate cartesiane  $x_i = \{x, y, z\}$ , polari  $x_i = \{r, \theta, z\}$  e cilindriche  $x_i = \{r, \theta, \varphi\}$ . Ad esempio in coordinate polari si ha  $g_r = 1$ ,  $g_\theta = r$  e  $g_\varphi = r \sin \theta$  ed infatti il vettore spostamento è

$$d\mathbf{x} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

La tabella riassume i valori nei casi rilevanti:

Coordinate 3d	coefficienti metrici			$d\mathbf{x}$
Cartesiane $x, y, z$	$g_x = 1$	$g_y = 1$	$g_z = 1$	$dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$
Cilindriche $r, \theta, z$	$g_r = 1$	$g_\theta = r$	$g_z = 1$	$dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + dz \hat{\mathbf{z}}$
Sferiche $r, \theta, \phi$	$g_r = 1$	$g_\theta = r$	$g_\phi = r \sin \theta$	$dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$

Avendo scelto coordinate ortogonali, è immediato derivare dalla lunghezza la superficie (ad esempio  $dS_{12} = g_1 g_2 dx_1 dx_2$  per una superficie nel piano 12; quindi  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  per la superficie di una sfera) ed il volume  $dV = g_1 g_2 g_3 dx_1 dx_2 dx_3$  (ad esempio  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  in coordinate sferiche).

### 3.1 Gradiente in coordinate ortogonali

Definiamo nuovamente il gradiente come il vettore il cui prodotto scalare con lo spostamento produce il differenziale di una funzione generica  $f$ . In un generico sistema di coordinate ortogonali  $x_i$  si ha

$$df = f(x_i + dx_i) - f(x_i) = \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv d\mathbf{x} \cdot \nabla f.$$

Inserendo il vettore spostamento infinitesimo  $d\mathbf{x} = \sum_i g_i dx_i \hat{\mathbf{x}}_i$  si ottiene il gradiente

$$\nabla = \sum_i \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{g_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\hat{\mathbf{x}}_1}{g_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_2}{g_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_3}{g_3} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Ad esempio, in coordinate cartesiane, sferiche e cilindriche si ha

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

In particolare, è utile notare che in coordinate sferiche la componente radiale del gradiente è semplicemente  $E_r = -(\nabla \varphi)_r = -\partial \varphi / \partial r$ .

### 3.2 Divergenza in coordinate ortogonali

Avendo definito il gradiente, segue immediatamente la divergenza. Per calcolare  $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$  in coordinate in cui i versori  $\hat{\mathbf{x}}_i$  non sono costanti occorre tenere conto che  $\nabla$  applicata a  $\mathbf{E} = \sum_i E_i \hat{\mathbf{x}}_i$  deriva sia le componenti  $E_i$  che i versori  $\hat{\mathbf{x}}_i$ . La figura mostra come in coordinate cilindriche e sferiche l'orientazione dei versori varia:



Ad esempio, applicando  $\nabla$  ad un campo vettoriale radiale  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}} E_r(r)$  in coordinate sferiche (utili appunto quando si ha simmetria sferica) si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + E_r \left( \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} E_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r.$$

avendo omesso i dettagli del conto, che non sono immediati: questo metodo di definire la divergenza in un sistema di coordinate generico è sistematico ma porta a passaggi pesanti.

Passiamo quindi ad un metodo meno diretto ma in cui si arriva al risultato finale rapidamente. L'idea è di calcolare  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  in un sistema di coordinate ortogonali usando la sua espressione data dal teorema della divergenza

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Consideriamo un volumetto infinitesimo di lati  $d\mathbf{x}_{1,2,3}$  e calcoliamo, nel secondo termine, il flusso sulle superfici perpendicolari alla direzione 1 (le altre sono analoghe):

$$\begin{aligned} (E_1 dS_{23})_+ - (E_1 dS_{23})_- &= (E_1 g_2 g_3)_+ dx_2 dx_3 - (E_1 g_2 g_3)_- dx_2 dx_3 = \\ &= dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1 g_2 g_3) = \frac{dV}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1 g_2 g_3). \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (E_2 g_1 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (E_3 g_1 g_2) \right]$$

Come verifica, utilizziamo questa formula generale per riottenere la divergenza di un vettore radiale in coordinate polari:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} E_r r^2 \sin \theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r.$$

### 3.3 Rotore

Facendo conti analoghi, qui omessi, il teorema di Stokes

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int dS \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

consente di ottenere un'espressione generica per il rotore:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \det \begin{pmatrix} g_1 \hat{\mathbf{x}}_1 & g_2 \hat{\mathbf{x}}_2 & g_3 \hat{\mathbf{x}}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ g_1 E_1 & g_2 E_2 & g_3 E_3 \end{pmatrix}$$

### 3.4 Laplaciano

Combinando le formule per la divergenza e per il gradiente si ottiene:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{g_1 g_3}{g_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right]$$

In coordinate cilindriche:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

In coordinate polari:

$$\nabla^2 \varphi = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}_{(r\varphi)''/r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}.$$

È anche utile la formula per il Laplaciano di una funzione che dipende solo dal raggio  $r^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$  in un numero generico  $d$  di dimensioni. Si ha

$$\nabla^2 \varphi(r) = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Da questo si deduce che  $\nabla^2 \varphi(r) = 0$  per  $\varphi \propto r^{2-d}$ .

### 3.5 Esempi matematici

Le formule ricavate saranno utili in Fisica 2, ed anche in corsi futuri: due esempi sono qui accennati.

**Potenziale di Yukawa.** A Fisica 2 impareremo che la forza di Coulomb è mediata da una particella di massa zero, il fotone. Particelle di massa diversa da zero mediano forze con potenziali che soddisfano all'equazione di Poisson con un termine aggiuntivo senza derivate,

$$\nabla^2 \varphi - \lambda^2 \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r}.$$

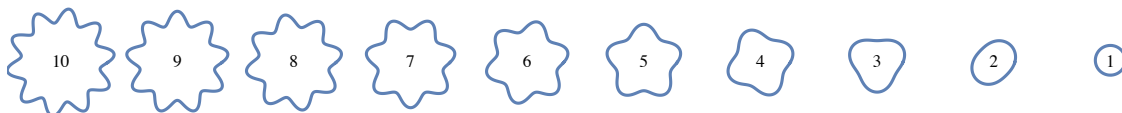
Il risultante potenziale è esponenzialmente soppresso a distanze maggiori di  $1/\lambda$ . Questo è, ad esempio, il caso delle forze nucleari, per questo dette “a corto raggio”.

**Atomo di idrogeno quantistico.** In corsi futuri verrà mostrato che l'elettrone è un'onda descritta da una funzione  $\psi(\mathbf{r})$  che soddisfa alle seguente equazione

$$H\psi = E\psi \quad \text{dove} \quad H = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla.$$

La soluzione ha livelli discreti. Intuitivamente: un elettrone libero ha  $\psi \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ , ovvero lunghezza d'onda ‘di de-Broglie’  $\lambda = 2\pi/k = 2\pi\hbar/p$ . Onde stazionarie negli atomi sono ottenute per valori speciali dell'energia  $E$  tali che le orbite sono multipli interi di  $\lambda$ . La soluzione per lo stato di minima energia è

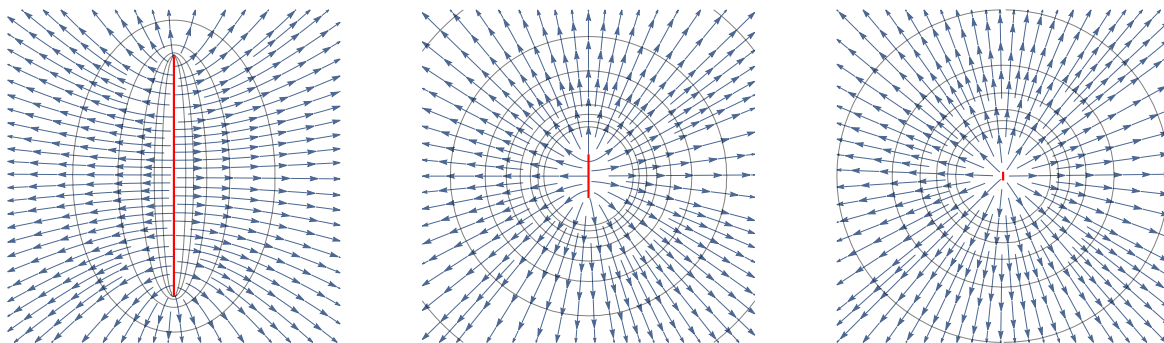
$$\psi(r) \propto e^{-r/a_0}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e q_q^2}, \quad E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}.$$



## Dipolo elettrico

Un generico sistema di cariche di dimensione spaziale  $d$  e carica totale  $Q \neq 0$  sembra una carica  $Q$  puntiforme quando visto da grande distanza. Ad esempio, la figura mostra il campo elettrico generato da un filo di lunghezza  $\ell$  con densità di carica costante  $\lambda$ :

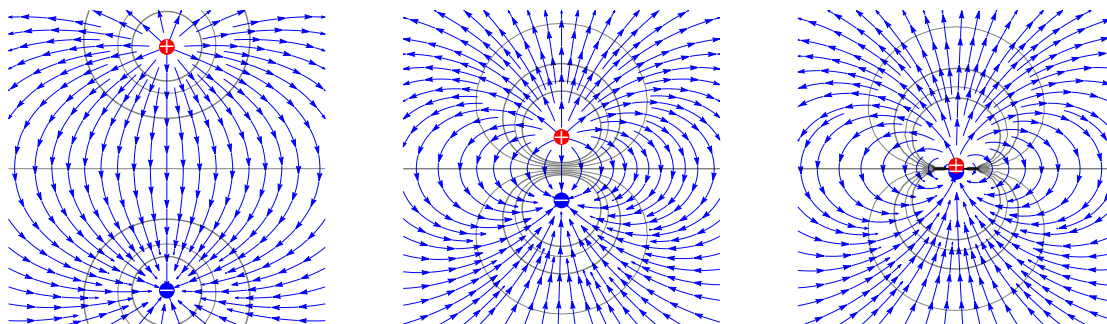
$$\mathbf{E} \stackrel{r \gg d}{\simeq} \frac{Q \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \dots$$



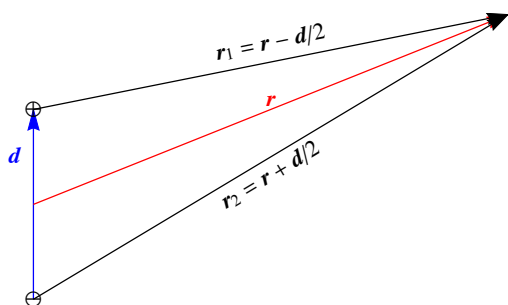
Avendo a che fare con oggetti complicati ma piccoli, è possibile approssimare il campo elettrico a distanza  $r$  espandendolo in serie di Taylor per  $d/r \ll 1$ . All'ordine dominante si ha il campo radiale generato dalla carica totale  $Q \neq 0$ , detto monopolo. Il termine successivo è detto dipolo. Il dipolo diventa il termine dominante quando  $Q = 0$ . Siccome molti sistemi hanno carica totale zero (ad esempio una molecola di acqua, o un'antenna), l'approssimazione di dipolo è spesso utile. Per calcolare questo termine universale conviene considerare un sistema particolare il più semplice possibile, due cariche  $\pm q$  a distanza  $d$ . Calcoliamo questo sistema non perché abbia interesse fisico diretto, ma come prototipo del più generale dipolo elettrico.

### 4.1 Potenziale di dipolo

La figura mostra il potenziale e le linee di campo di due cariche  $\pm q$  a distanza  $d$ , che viene progressivamente ridotta, fino ad ottenere il limite di dipolo:



Per calcolarlo analiticamente occorre approssimare in serie di Taylor al 1o ordine il potenziale delle due cariche. La serie di Taylor viene qui calcolata con un metodo geometrico comprensibile anche a chi non conosce la matematica delle serie di Taylor. Chi la conosce non rimarrà sorpreso che espandendo  $1/r$  si ottenga alla fine il suo gradiente.



$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} \\
 &\stackrel{r \gg d}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r}
 \end{aligned}$$

L'espressione in rosso è quella usata in pratica. Si osserva che il potenziale non dipende separatamente da  $q$  e da  $\mathbf{d}$ , ma solo dal loro prodotto detto *momento di dipolo*  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ .

## 4.2 Campo di dipolo

Avendo il potenziale di dipolo  $\varphi$ , per calcolare il campo elettrico di dipolo basta ora applicare la formula  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Il calcolo richiede l'utilizzo delle formule  $\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}$  e  $\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$  che sono verificabili, ad esempio, scrivendole in componenti. Si ottiene una formula che può essere scritta in due maniere equivalenti:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \underbrace{\frac{2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}}_{E_r} + \underbrace{\frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{r^5}}_{E_\theta} \right]$$

avendo usato l'identità vettoriale  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ . La seconda formula può essere utile, nonostante il doppio prodotto vettore, in quanto i due termini sono le componenti  $E_r$  ed  $E_\theta$  del campo in coordinate polari (mentre  $E_\phi = 0$ ).

Calcoliamo adesso il modulo del campo elettrico di dipolo. Definendo  $\theta$  come l'angolo fra  $\mathbf{p}$  ed il punto  $\mathbf{r}$  in cui si calcola il campo elettrico (e quindi  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pr \cos \theta$ ) il modulo è

$$E = \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \propto \frac{1}{r^3}.$$

Non vale zero a nessun angolo  $\theta$  e va a zero come  $1/r^3$ .

Lo stesso conto può essere fatto in coordinate polari. Scegliendo l'asse polare allineato al dipolo, l'angolo polare  $\theta$  coincide con il  $\theta$  sopra definito. In coordinate polari il potenziale vale quindi  $\varphi(r, \theta) = p \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2$ . Applicando le formule per il gradiente in coordinate polari si trovano le componenti del campo elettrico:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\varphi = 0.$$

### 4.3 Sistema di cariche generiche

Considerando adesso un sistema di cariche generiche, espandiamo il potenziale elettrico come

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \stackrel{r \gg r_i}{\simeq} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \left[ \frac{1}{r} - \mathbf{r}_i \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots \right] = \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \left[ \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \right] \quad (4.2)$$

Il momento di monopolio  $Q$  è la carica elettrica totale del sistema:

$$Q = \sum_i q_i = \int dq = \int dV \rho. \quad (4.3)$$

Abbiamo già visto in precedenza il passaggio dalla somma discreta al limite continuo.

Il momento di dipolo vale

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \int dq \mathbf{r} = \int dV \rho \mathbf{r}. \quad (4.4)$$

La sua unità di misura è Coulomb  $\cdot$  metro. Notare che  $\mathbf{p}$  dipende dall'origine ogni volta che  $Q \neq 0$ : essendo il 2o termine di una serie di Taylor, dipende dalla scelta del punto attorno al quale viene espanso il termine dominante di monopolio. Nei sistemi in cui  $Q = 0$  il dipolo è il termine dominante, ed il suo momento  $\mathbf{p}$  non dipende dalla scelta dell'origine del sistema di coordinate.

L'applicazione della formula in eq. (4.4) a casi pratici dovrebbe essere semplice, ma spesso vengono fatti errori.

### 4.4 Forza e momento su dipolo in $E$ esterno

Finora abbiamo calcolato come un dipolo produce un campo elettrico. Vediamo adesso come un dipolo si comporta in un campo elettrico esterno.



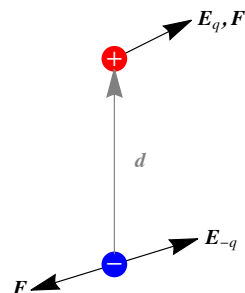
Nuovamente conviene ottenere la formula generale considerando il prototipo più semplice di dipolo: due cariche  $\pm q$  a distanza  $d$ . Una prima formula per la forza totale agente sul dipolo è

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}_q - \mathbf{E}_{-q}] \simeq q(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}.$$

Questa formula è sempre corretta, ma occorre capire cosa significa: viene fatta la derivata del campo elettrico lungo la direzione parallela al dipolo.

Una seconda formula, più intuitiva ma meno generale è

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad \text{dove} \quad U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta \quad (4.5)$$



dove  $\theta$  è qui l'angolo fra il momento di dipolo ed il campo elettrico nella posizione del dipolo.

La seconda formula è ottenuta dalla prima assumendo che 1) il dipolo  $\mathbf{p}$  sia costante (è stato inserito dentro la derivata); 2) il campo elettrico  $\mathbf{E}$  abbia rotore zero. Sotto queste condizioni, le due formule sono connesse dal seguente passaggio:

$$0 = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} - \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}). \quad (4.6)$$

Lo stesso conto può essere fatto in componenti: prendiamo un dipolo lungo  $y$  e calcoliamo la componente  $x$  della forza:  $F_x = p_y \partial_y E_x = p_y \partial_x E_y$ .

La seconda formula in eq. (4.5) non è valida: 1) quando il dipolo  $\mathbf{p}$  è indotto dal campo esterno  $\mathbf{E}$ : il dipolo non è costante, e ci sono altre energie in gioco. 2) quando il campo elettrico è rotazionale: vedremo che campi sono  $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$  saranno indotti da campi magnetici variabili.

Il dipolo non è un punto materiale ma un sistema composto. Come visto a fisica 1, oltre al moto traslatorio determinato dalla forza totale, può anche avere un moto rotatorio, determinato dal momento delle forze, che vale:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_q \times q\mathbf{E} + \mathbf{r}_{-q} \times (-q\mathbf{E}) = q(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{-q}) \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (4.7)$$

È interessante notare che l'energia  $U$  fornisce informazioni sia sul moto traslatorio che su quello rotatorio. Come visto a fisica 1, la forza è il gradiente del potenziale rispetto alle coordinate 'traslatorie' (in formule  $\mathbf{F} = -\nabla U$ ), ed il momento delle forze è il gradiente rispetto alle coordinate 'rotatorie' (in formule semplificate si ha  $M = pE \sin \theta \stackrel{\vee}{=} -\partial U / \partial \theta$ ).

La raccolta di esercizi fornisce esempi pratici che coinvolgono dipoli, quali il forno a micro-onde (rotazione di dipoli), e le memorie di vecchi computer (allineamento di dipoli).

## 4.5 Espansione in multipoli

In alcuni casi è necessario andare oltre all'approssimazione di dipolo. L'idea generale è espandere la formula per il potenziale di un sistema generico di cariche

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_q \frac{q_q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|}$$

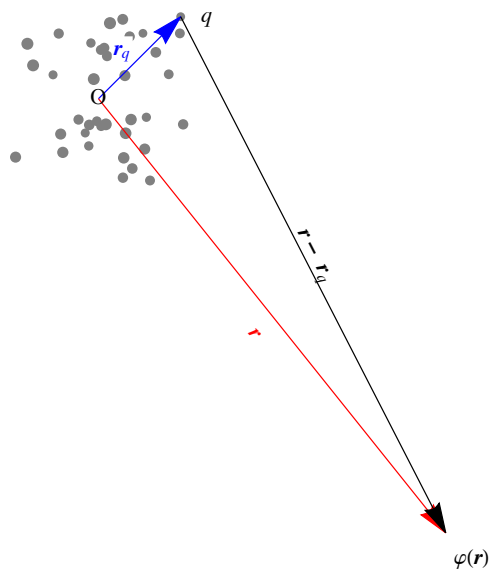
in serie di Taylor per  $r_q \ll r$ . Si ottiene

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} + \sum_{i=1}^3 \frac{p_i \hat{r}_i}{r^2} + \sum_{i,j} \frac{Q_{ij} \hat{r}_i \hat{r}_j}{2r^3} + \dots \right]$$

dove

- $Q = \sum_q q_q$  è il **monopolo** (mucca sferica).
- $p_i = \sum_q q_q r_{qi}$  con  $i = \{x, y, z\}$  è **dipolo**.
- $Q_{ij} = \sum_q q_q (3r_{qi} r_{qj} - r_q^2 \delta_{ij})$  è **quadrupolo**, tensore simmetrico **a traccia nulla**. Compare per la prima volta una nuova difficoltà di questa espansione: la parte di traccia del quadrupolo produce una termine di monopolo, che è stato levato a mano: la matrice  $Q_{ij}$  ha quindi 5 elementi e non 6. Questa difficoltà compare in quando espanendo  $1/r$  al secondo ordine si ottiene  $\nabla_i \nabla_j (1/r)$ , che contiene 5 termini invece di 6 in quanto  $\nabla^2 (1/r) = 0$ .

Un formalismo apposito opera automaticamente questo tipo di ripuliture ad ordini generici più alti. Non vale la pena di presentarlo, anche se ha interesse oltre fisica 2: fornisce una base di funzioni, dette armoniche sferiche, che sono usate in Meccanica Quantistica in quanto, a livello matematico, forniscono rappresentazioni del gruppo delle rotazioni (lo scalare corrisponde al monopolo, il vettore al dipolo, il quadrupolo è il più semplice tensore irriducibile...).



# Conduttori

I conduttori sono materiali che contengono tanti elettroni (tipicamente circa uno per molecola) ‘*quasi*’ liberi di muoversi all’interno del materiale, che è circa una buca di potenziale di altezza  $\sim \text{eV}$  da cui gli elettroni non hanno abbastanza energia per uscire.

Applicando un campo elettrico esterno o caricando un conduttore nasce un campo elettrico  $\mathbf{E}$  interno: quindi gli elettroni soggetti alla forza  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  iniziano a muoversi. Grazie al ‘quasi’ (che verrà chiarito nel seguito) dissipano energia, fino a raggiungere l’unico stato stabile possibile di equilibrio:

$$\mathbf{E} = 0 \text{ nel conduttore e } \mathbf{E}_{\parallel} = 0 \text{ sulla superficie}$$

Il campo elettrico può avere una componente perpendicolare alla superficie, in quanto gli elettroni non possono uscire dal conduttore.

Il teorema di Gauss o la prima equazione di Maxwell implicano che la densità di carica interna al conduttore vale

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Come vedremo, questa proprietà dei conduttori, vera in quanto la forza di Coulomb scala come  $1/r^2$ , consente di fare misure precise dell’esponente 2 nella forza.

La densità di carica  $\sigma$  sulla superficie di un conduttore è legata al campo elettrico nelle sue immediate vicinanze, che è perpendicolare (in quanto il conduttore è equipotenziale) e con valore  $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$ . La formula generale  $p = \sigma E_{\text{medio}}$  per la pressione elettrica su di una superficie diventa, per un conduttore,  $p = \sigma E_{\perp}/2$  in quanto il campo interno vale zero.

Si usa l’espressione “conduttore messo a terra” per indicare che un conduttore di volume finito è connesso (ad esempio da un cavo conduttore) ad un secondo conduttore di dimensione idealmente infinita (in pratica il pianeta terra), che per convenzione ha potenziale elettrico  $\varphi = 0$ . La carica può quindi fluire su di un conduttore a terra, in maniera da mantenere a zero il suo potenziale. Un conduttore infinito (ad esempio un piano) è per definizione “a terra”.

Regioni di spazio separate da conduttori sono schermate.

## 5.1 Unicità della soluzione

Il problema fisico è di trovare lo stato di minima energia di sistemi di conduttori su cui uno opera nei seguenti modi

- Alcuni conduttori possono essere messi a potenziali fissati, e quindi la loro carica può variare.

- Alcuni conduttori possono essere messi a  $Q$  data, e quindi il loro potenziale  $\varphi$  può variare.

Il problema matematico corrispondente è: risolvere l'equazione di Poisson/Laplace  $\nabla^2\varphi = 0$  con condizioni al bordo

- o su  $\varphi$  (di 'Dirichlet', ad esempio conduttori a potenziali dati),
- o su  $E = -\nabla\varphi$  (di 'Neumann', ad esempio conduttori isolati a carica data).

Ma non entrambe su di un unico conduttore (di 'Cauchy', il problema matematico non ha soluzione; il problema fisico è impossibile).

Si dimostra che la soluzione è unica. Date due soluzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , per linearità  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  risolve con condizioni al bordo zero e

$$0 = \varphi \nabla^2\varphi = \varphi \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot (\varphi \nabla\varphi) - (\nabla\varphi)^2.$$

Integrando su tutto il volume (o meglio su di una sfera di raggio  $R$  che viene fatto tendere all'infinito) ed applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\int dS \mathbf{n} \cdot (\varphi \nabla\varphi) = \int dV (\nabla\varphi)^2.$$

Il lato sinistro è zero nel limite  $R \rightarrow \infty$  in quanto  $\varphi \propto 1/r$ . Quindi anche il lato destro deve essere 0, ma essendo un quadrato questo è possibile solo se  $\varphi = 0$  cioè se  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Quindi la soluzione è unica.

L'unicità della soluzione è un fatto non ovvio: altri sistemi fisici non hanno un unico stato di minima energia. Abbiamo visto come, ad esempio, sistemi di dipoli a distanza fissata tendono ad allinearsi, ma possono farlo in direzioni diverse. Alcuni sistemi hanno un numero enorme di possibili stati: ad esempio è difficile calcolare la piegatura delle proteine. Non si riesce ad ottenere predizioni dalla teoria delle stringhe in quanto pare che esistano un numero enorme di stati possibili per l'Universo.

Questi problemi non esistono per i conduttori, in cui basta trovare una soluzione.

## 5.2 Esempi pratici

**Gabbia di Faraday:** regioni di spazio separate da conduttori sono schermate. Calcoliamo infatti il campo elettrico in un buco interno ad un conduttore. Assumendo cariche arbitrarie all'esterno, e che non ci siano cariche nel buco, occorre risolvere  $\nabla^2\varphi = 0$  con condizione  $\varphi = \text{cte}$  sul bordo. La soluzione è  $\varphi = \text{cte}$  nel buco, quindi campo elettrico zero. Questo effetto di schermo segue in quanto la forza di Coulomb scala come  $1/r^2$ , da cui seguiva l'equazione  $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ . Misurando che l'effetto di schermo avviene per davvero si deduce che l'esponente nella forza di Coulomb è 2 entro  $10^{-15}$ .

**Metodo delle immagini:** alcuni sistemi hanno soluzioni semplici non ovvie...

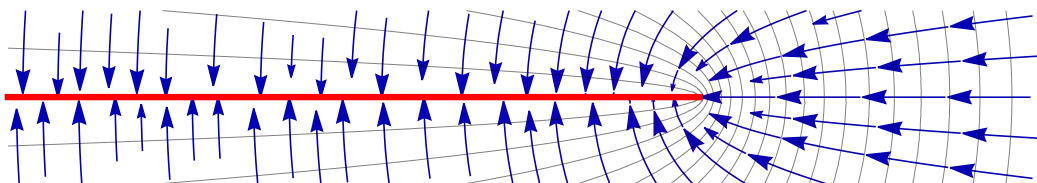
**Effetto delle punte:** Cariche su di un conduttore si respingono e quindi cercano di allontanarsi il più possibile. Alla fine le cariche si concentrano sulle punte dei conduttori. Per vederlo, consideriamo un sistema semplice che consente di fare un calcolo esplicito e semplice: due sfere conduttrici di raggi  $R \gg r$  a grande distanza  $d \gg R, r$  connesse da un filo conduttore. La sfera piccola schematizza una punta. Si determinano le cariche  $q$  e  $Q$  sulle due sfere imponendo che i potenziali sulle superfici delle due sfere siano uguali, ottenendo  $Q/R = q/r$ . Quindi la sfera grossa ha maggiore carica, ma la sfera piccola ha maggiore densità di carica  $\sigma = q/4\pi r^2$  e maggiore campo elettrico:



$$\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{q/r^2}{Q/R^2} = \frac{R}{r}.$$

Alcuni problemi di elettrostatica in due dimensioni sono risolti grazie all'analisi complessa: definendo  $z = x + iy$  si ha  $\nabla^2\varphi = 4\partial^2\varphi/\partial z\partial\bar{z}$ . L'equazione  $\nabla^2\varphi = 0$  è quindi risolta da una generica funzione 'olomorfa',  $f(z)$ . E quindi, separatamente, dalla sua parte reale e dalla parte immaginaria. Alcuni esempi sono nella raccolta di esercizi.

Ad esempio, scegliendo  $f(z) = \sqrt{z}$ , il potenziale  $\text{Re}\sqrt{x+iy} = \sqrt{(x + \sqrt{x^2 + y^2})/2}$  descrive un semi-piano conduttore  $x < 0$ , mostrando l'effetto delle punte:  $\mathbf{E}(x, 0) = (0, \pm 1/\sqrt{x}, 0)$ .



### 5.3 Scariche nei gas

Mettendo due acini di uva che quasi si toccano in un forno a micro-onde ed accendendolo si generano **scariche**.

Succede in quanto l'uva è un conduttore, e tutta la differenza di potenziale nei due acini d'uva viene concentrata nel breve tratto che le separa, in cui quindi si ha un campo elettrico molto intenso.

Un campo elettrico molto intenso produce scariche nei gas poco densi come l'aria, in cui la distanza fra le molecole è  $d \sim n^{-1/3} \gg \text{\AA}$ .

Un elettrone libero (magari ionizzato dal campo intenso  $E_{\text{ext}}$ ) viene accelerato per un tratto  $d$  prima di urtare un altro atomo: acquista quindi energia  $edE_{\text{ext}}$  che può essere grande abbastanza da ionizzare l'atomo su cui urta. Questo succede se  $E_{\text{ext}}d$  è maggiore del potenziale degli atomi  $\varphi_{\text{atomo}} \sim V$ :

$$E_{\text{ext}} \gtrsim \frac{\varphi_{\text{atomo}}}{d} \sim E_{\text{atomo}} \times \frac{\text{\AA}}{d} \sim 10^8 \frac{\text{V}}{\text{m}} \times 10^{-2} \sim \frac{\text{MV}}{\text{m}}$$

per aria asciutta. Si ha quindi una reazione a catena che rende l'aria conduttrice, facendo partire la scarica.

Mettendo punte su parafulmini si facilita ad una nuvola carica elettricamente di scaricarsi sul parafulmine. Una volta, per ottenere lo stesso effetto, si aggiungeva radioattività sui parafulmini (alcuni sono rimasti ancora oggi, dopo che è stato vietato in quanto la radioattività sul tetto è poco salutare).

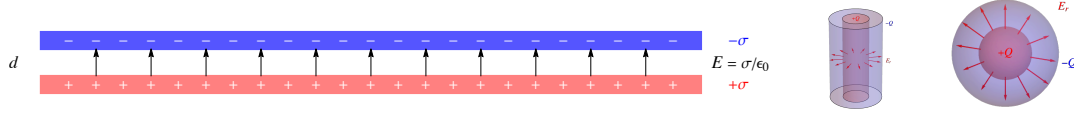
Similmente si osserva un fenomeno incomprensibile da un punto di vista religioso: i fulmini tendono a cadere sui campanili. Il motivo è che sono alti o costruiti sulle cime di colline, per cui vicino a loro si concentra la differenza di potenziale dovuta al campo elettrico terrestre, circa  $E \sim 100 \text{ V/m}$ .

### 5.4 Induzione completa: condensatore

Si dice "condensatore" (o "capacità") un sistema di due conduttori a differenza di potenziale  $V$  in cui le linee di campo vanno solo da uno all'altro. In questa maniera si costruiscono oggetti che immagazzinano carica ed energia senza disturbare con campi elettrici la zona esterna. Per ottenere questo risultato devono avere cariche opposti  $+Q$  e  $-Q$  ed essere uno interno all'altro. Si definisce la **capacità**  $C$  tale che  $Q = CV$ .

Esistono tre geometrie semplici:

- 1d) Due piani (piatti paralleli di superficie  $S$  a distanza  $d \ll \sqrt{S}$  per poter trascurare effetti ai bordi): la densità superficiale vale  $\sigma = Q/S$ , il campo prodotto è costante  $E = \sigma/\epsilon_0$ , la differenza di potenziale vale  $V = dE = Q \cdot d/S\epsilon_0$ : quindi  $C = \epsilon_0 S/d$ .



- 2d) Due cilindri: quello interno genera lo stesso campo elettrico di un filo con densità lineare  $\lambda = \frac{Q}{h}$ , ovvero  $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ . Quindi la differenza di potenziale vale  $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$ , e la capacità è

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(r_2/r_1)}.$$

- 3d) Due sfere:  $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ ,  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ :  $C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$ . Nel limite  $r_2 \rightarrow \infty$  si riduce ad una sfera isolata:  $C = 4\pi\epsilon_0 r$ .

La capacità  $C$  è misurata in Coulomb/Volt = Farad. Il suo tipico valore numerico è piccolo:  $C \approx \epsilon_0 S/d \sim \epsilon_0 \times$  (dimensione dell'oggetto)  $\approx 10^{-11}$  F per  $S/d \approx$  m. Per questo motivo le unità di uso pratico sono  $\mu\text{F}$ ,  $\text{nF}$ ,  $\text{pF}$ .

## 5.5 Energia

L'energia elettrostatica di un condensatore vale

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 Q_i \varphi_i = \frac{1}{2} (Q\varphi_1 - Q\varphi_2) = \frac{1}{2} QV \stackrel{\text{memo}}{=} \boxed{\frac{Q^2}{2C}} = \frac{CV^2}{2}.$$

È possibile re-derivare il fattore  $1/2$  in maniera intuitiva, calcolando l'energia necessaria per caricare gradualmente il condensatore: aggiungere  $dQ$  costa lavoro  $d\mathcal{L} = V dQ = Q dQ/C$ . A ccumulare carica da 0 a  $Q$  necessita  $\mathcal{L} = \int_0^Q d\mathcal{L} = Q^2/2C$ .

Ad esempio una capacità  $C \sim 100 \mu\text{F}$  caricata a differenza potenziale  $V \sim 250 \text{ V}$  ha  $U = CV^2/2 \approx 3 \text{ J}$ , che può essere rilasciata in maniera istantanea: è usata ad esempio per flash di macchine fotografiche.

## 5.6 Induzione parziale

Un conduttore 1 da solo con carica  $Q_1$  ha potenziale  $\varphi_1 = P_{11}Q_1$ ; le linee di  $\mathbf{E}$  vanno all'infinito.

Con due conduttori, le linee possono andare in parte all'infinito. Per più conduttori con cariche  $Q_i$  a potenziali  $\varphi_i$  la linearità delle eq. di Maxwell implica  $\varphi_i = \sum_j P_{ij}Q_j$  dove  $P_{ij}$  è detta *matrice dei potenziali* e dipende solo dalla geometria del sistema (non dai valori delle cariche).

Invertendo questa relazione matriciale si ottiene  $Q_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j$  dove la *matrice delle capacità* è l'inversa della matrice dei potenziali:  $C_{ij} = (P^{-1})_{ij}$ .

Verifichiamo come per due condensatori messi a cariche  $Q_1 = Q$  e  $Q_2 = -Q$  si ri-ottiene la capacità

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{(P_{11} - P_{12})Q - (P_{21} - P_{22})Q} = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}}.$$

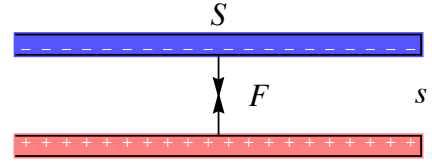
L'energia di un sistema generico di conduttori vale  $U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} P_{ij} Q_i Q_j$ .

Si dimostra che le matrici sono simmetriche:  $C_{ij} = C_{ji}$ . Immaginiamo infatti di calcolare l'energia  $U$  mettendo prima il conduttore 1 a potenziale  $\varphi_1$  ( $U_1 = \frac{1}{2} C_{11} \varphi_1^2$ ) e poi mettendo il conduttore 2 a potenziale  $\varphi_2$  (serve ulteriore energia  $\Delta U = \frac{1}{2} C_{22} \varphi_2^2 + \Delta Q_1 \varphi_1$  con  $\Delta Q_1 = C_{12} \varphi_2$ ). Invertendo la procedura si ottiene la stessa espressione con  $C_{21}$  invece di  $C_{12}$ . Tuttavia lo stato finale è lo stesso, e l'energia deve quindi essere la stessa indipendentemente dalla procedura seguita per arrivarci.

## 5.7 Forze su condensatori

Iniziamo da un esempio: i piatti di un condensatore piano a distanza  $s$  risentono di una forza che tende a ridurre  $s$  in quanto cariche opposte si attraggono:

$$F = -pS = -\frac{E\sigma}{2}S = -\frac{\epsilon_0}{2}E^2S = -\frac{\epsilon_0}{2}\frac{V^2}{s^2}S.$$



In generale, la forza  $F$  su condensatore (sia messo a  $Q$  costante o a  $V$  costante) vale

$$F = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{ds}$$

Il segno è tale che  $F$  cerca di diminuire  $U$ , cioè aumentare  $C$ . Verifichiamo che questa formula riproduce la forza calcolata sopra per un condensatore piano:  $C = \epsilon_0 S/s$ , quindi  $F = -SV^2\epsilon_0/2s^2$ , attrattiva. Gli esercizi mostreranno che questa formula può produrre risultati non ovvi.

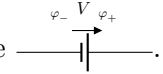
La si dimostra usando la conservazione dell'energia meccanica più elettrostatica variando la geometria (ad es. la distanza  $s$  fra i piatti). Visto che  $F$  è la stessa consideriamo conduttori a carica  $Q$  costante (altrimenti, considerando conduttori  $V$  costante, si avrebbe un diverso bilancio energetico più complicato, in cui occorre tenere conto del lavoro compiuto dalle batterie). La carica è costante e la differenza di potenziale  $V(s)$  dipende dalla geometria. Quindi

$$F = -\frac{dU}{ds} = -\frac{d}{ds} \frac{Q^2}{2C(s)} = -\frac{Q^2}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{C} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{dC}{ds} = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{ds}.$$

## 5.8 Circuiti

I circuiti sono sistemi elettromagnetici semplificati, calcolabili approssimando le equazioni di Maxwell con matematica più accessibile. Iniziamo ad introdurre alcuni elementi:

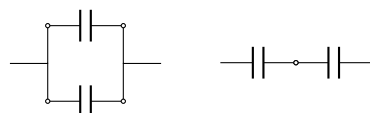
- Un **filo conduttore** connette oggetti mettendoli allo stesso potenziale.

- Una **batteria** è un oggetto che, in qualche modo (vedremo in seguito come è possibile ottenerle tramite campi magnetici DISCUTERE QUI IL RESTO) mantiene ai suoi capi una differenza di potenziale  $V = \varphi_+ - \varphi_-$ . In un circuito viene disegnata come .

- Una **capacità** è disegnata come  $-||-$  ed è un sistema che, posto a differenza di potenziale  $V$ , immagazzina carica  $Q = CV$ . Due capacità si combinano come:

- Capacità in parallelo:  $C = \sum C_i$  in quanto  $Q_i = C_i V$  e  $Q = \sum Q_i$ .

Infatti per piatti piani  $C_{1+2} = \epsilon_0(S_1 + S_2)/d$ .



- Capacità in serie:  $1/C = \sum 1/C_i$  in quanto  $V_i = Q/C_i$  e  $V = \sum V_i$ .

Infatti per piatti piani  $C = \epsilon_0 S/(d_1 + d_2)$ .



# Capitolo 6

## Dielettrici

Le equazioni di Maxwell nel vuoto discusse finora sono equazioni esatte. Otterremo adesso equazioni simili per i campi elettrici nella materia: si tratta di equazioni che descrivono in maniera approssimata il comportamento di tipici materiali.

Si misura che la forza di Coulomb nella materia è data da un'equazione simile a quella nel vuoto ma con  $\epsilon_0$  rimpiazzato da una costante che dipende dal materiale  $\epsilon \equiv \epsilon_r \epsilon_0$ . Ad esempio  $\epsilon_r \sim 80$  per l'acqua: la capacità di un condensatore riempito di acqua aumenta. In generale  $\epsilon > \epsilon_0$ , ovvero il campo elettrico nella materia è meno intenso che nel vuoto.

Questo fenomeno è dovuto al modo in cui la materia, neutra ma composta di elettroni e protoni carichi, reagisce ad un campo elettrico esterno  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ : ogni molecola è approssimabile come un dipolo elettrico  $\mathbf{p}$ , le molecole polarizzate collettivamente generano un campo elettrico  $\mathbf{E}_{\text{pol}}$  detto 'di polarizzazione' che si oppone al campo esterno  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ . Il campo elettrico totale vale  $\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{pol}} < \mathbf{E}_{\text{ext}}$ , e quindi è come se la materia avesse un  $\epsilon > \epsilon_0$ . Si noti che il calcolo dell'effetto è complicato dal fatto che modifica se stesso:

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} \Rightarrow \mathbf{p} \Rightarrow \delta \mathbf{E} \Rightarrow \delta \mathbf{p} \Rightarrow \delta \delta \mathbf{E} \Rightarrow \delta \delta \mathbf{p} \Rightarrow \delta \delta \delta \mathbf{E} \dots$$

Alla fine il dipolo elettrico medio di una molecola è circa proporzionale al campo totale  $\mathbf{E}_{\text{tot}}$  (non a quello esterno  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ ). È utile definire una *costante di polarizzabilità* caratteristica di ogni molecola, come

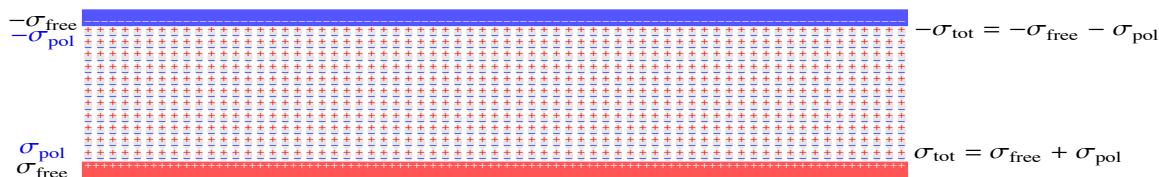
$$\mathbf{p} \approx \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{tot}}. \quad (6.1)$$

Occorre poi passare dalla fisica atomica alla fisica della materia calcolando l'effetto collettivo delle molecole con densità in numero  $n$ . Vogliamo mostrare che si ottiene

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + n\alpha). \quad (6.2)$$

### 6.1 Dielettrico con geometria semplice

Iniziamo a considerare la più semplice geometria: un condensatore piano contenente un dielettrico con densità  $n$  di dipoli. Dividiamo la carica totale in carica libera più carica di polarizzazione.



Il campo elettrico è uniforme, ed i dipoli allineati in maniera uniforme producono come effetto collettivo, una densità superficiale

$$\sigma_{\text{pol}} = \mp np \quad \text{opposta a } \sigma_{\text{free}}$$

in quanto le cariche libere attirano cariche di segno opposto.

Diamo due dimostrazioni della formula per  $\sigma_{\text{pol}}$

- 1) Calcolando il dipolo totale del dielettrico in due modi: a)  $\pm\sigma_{\text{pol}}$  produce dipolo totale  $P_{\text{tot}} = \sigma_{\text{pol}}D$ ; b) Gli  $N$  dipoli  $p$  producono  $P_{\text{tot}} = Np = Vnp$ .
- 2) Immaginando di separare le cariche positive da quelle negative nel dielettrico: l'effetto della polarizzazione  $p = ed$  è di spostare di una piccola distanza relativa  $d$  i due sistemi con densità uniforme volumetrica  $\rho = \pm en$ . Lo spostamento produce  $\sigma_{\text{pol}} = \rho d$ .

Il campo elettrico totale è prodotto da  $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{free}} + \sigma_{\text{pol}}$ . Vogliamo scriverlo come se fosse prodotto dalla sola carica libera, definendo una costante artificiale  $\epsilon$

$$E_{\text{tot}} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \equiv \frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon}.$$

Essa vale quindi:

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 \frac{\sigma_{\text{free}}}{\sigma_{\text{tot}}} = \epsilon_0 \frac{\sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{pol}}}{\sigma_{\text{tot}}} = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\sigma_{\text{tot}}} \right) = \epsilon_0(1 + n\alpha)$$

avendo usato  $\sigma_{\text{tot}} = \epsilon_0 E_{\text{tot}}$  e  $\sigma_{\text{pol}} = -np = -n\alpha\epsilon_0 E_{\text{tot}}$  di segno opposto a  $\sigma_{\text{tot}}$ .

## 6.2 Materiali non polari: allungamento

Discutiamo adesso il valore della costante di polarizzabilità  $\alpha$ . Occorre distinguere due possibili effetti:

$$\alpha = \alpha_{\text{allineamento}} + \alpha_{\text{allungamento}}.$$

Nei materiali *non polari* (ovvero costituiti di molecole prive di dipolo proprio, come l'idrogeno), il dipolo molecolare  $p$  nasce perché ciascuna molecola viene 'stiracchiata' dal campo elettrico  $\mathbf{E}$ . Questo effetto può essere calcolato in meccanica quantistica e stimato in meccanica classica: per motivi dimensionali si ha  $p \sim \epsilon_0 a^3 E_{\text{ext}}$ , ovvero

$$\alpha \approx a^3$$

dove  $a$  è la dimensione della molecola.

- Se fosse vero il modello atomico di Thomson per l'atomo di idrogeno, al suo interno si avrebbe il campo  $\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + e\mathbf{r}/4\pi\epsilon_0 a_0^3$  e quindi, nella posizione di equilibrio, dipolo elettrico  $\mathbf{p} = e\mathbf{r} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E}_{\text{ext}}$ .
- Se fosse vero il modello atomico classico di Rutherford con orbite circolari nel piano  $xy$ , un campo elettrico esterno  $E_{\text{ext}}$  lungo  $z$  contribuirebbe alla forza totale

$$F_z = -e \left( E_{\text{ext}} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{a^3} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -ez = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_{\text{ext}}.$$

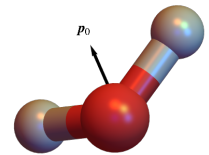
La stima  $\alpha \approx a^3$  significa che la correzione ad  $\epsilon_0$  è di ordine uno nei liquidi e nei solidi in cui la densità in numero delle molecole è circa l'inverso del loro volume,  $n \sim 1/a^3$ .

Invece, un tipico gas a temperatura/pressione ambiente ha densità minore di circa un fattore 1000,  $n \sim 10^{-(2-3)}/a^3$ , e quindi un piccolo effetto dielettrico:  $\epsilon_{\text{gas}} \sim 1.003\epsilon_0$ .

### 6.3 Materiali polari: allineamento

Alcune molecole hanno un dipolo proprio  $p_0 \sim ea$  permanente.  
Ad esempio l'acqua  $\text{H}_2\text{O}$  ha  $p_0 \approx 0.39 \text{ e \AA}$ .

- L'energia  $U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}$  cerca di allineare  $\mathbf{p}_0$  ad  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ .
- L'agitazione termica cerca di orientare  $\mathbf{p}_0$  a caso.



La polarizzabilità dipende dalla temperatura, ed a temperatura ambiente viene nuovamente stimata ad essere  $\alpha \approx a^3$ . Infatti, secondo la meccanica statistica, la frazione di dipoli allineati è  $\sim U/k_B T$ . Quindi

$$p \sim p_0 \frac{p_0 E_{\text{ext}}}{k_B T} \quad \text{cioè} \quad \alpha \sim \frac{e^2 a^2}{k_B T \epsilon_0}.$$

La temperatura ambiente è la temperatura 'antropica' tale che l'energia termica è simile all'energia di legame atomico,  $k_B T \sim E_B \sim e^2/\epsilon_0 a$ . Inserendo tale temperatura si ha ancora  $\alpha \sim a^3$ .

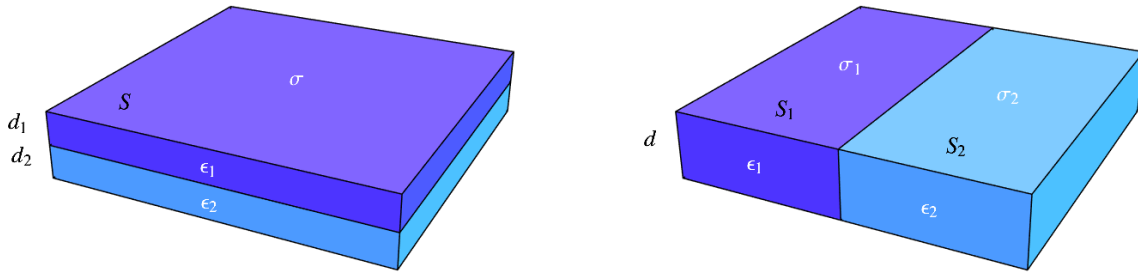
### 6.4 Capacità con dielettrico

Ha interesse definire la capacità di un condensatore contenente materiale dielettrico come  $C \equiv Q/V$  dove  $Q = Q_{\text{free}}$  è la carica libera, in quanto è la carica vista da chi approssima il condensatore come una scatola nera con due fili. Per una capacità piana si ha quindi  $C = \epsilon S/d$ : la capacità  $C$  aumenta in un dielettrico perché  $E$  diminuisce. A potenziale  $V$  fissato aumenta quindi anche l'energia  $U = CV^2/2 = \int dV \epsilon E^2/2$ .

Notare che nel limite  $\epsilon \rightarrow \infty$  un dielettrico ha  $E \rightarrow 0$ : si comporta come un conduttore.

A volte approssimare un sistema fisico come un circuito consente di risolvere problemi non ovvi. Ad esempio un condensatore riempito con due materiali di costante dielettrica  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$  e geometrie

come in figura



può essere visto come capacità in serie e parallelo

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_1 S} \quad C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}. \quad (6.3)$$

In casi più generali in cui l'indice di rifrazione dipende in maniera continua da  $\mathbf{r}$  questa approssimazione non è applicabile, ed occorre il trattamento generale dei dielettrici. Per chi volesse evitare il trattamento generale, ricaviamo qui in maniera semplificata i punti cruciali che più servono in pratica (in particolare quando in futuro discuteremo le onde). Assumiamo che lo spazio sia diviso in zone entro cui  $\epsilon$  è costante (ad esempio una lastra di vetro che separa aria da acqua):

1. In ciascuna zona basta sostituire  $\epsilon_0$  con il suo  $\epsilon$ . Per ottenere una soluzione completa occorre raccordare le soluzioni nelle diverse zone sul loro bordo.
2. La componente del campo elettrico parallela alla superficie di separazione fra due zone 1 e 2 è continua,

$$E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2}. \quad (6.4)$$

Questo segue da  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , applicando il teorema di Stokes su di un circuito sottile. Ed è verificato dal secondo esempio in eq. (6.3): il campo elettrico ha solo una componente parallela alla superficie di separazione, uguale a  $E_{\parallel} = V/d$  in entrambi i lati.

3. La condizione sulla componente del campo elettrico perpendicolare alla superficie di separazione è più complicata,

$$\epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp} \quad (6.5)$$

nel caso (spesso verificato in pratica) in cui non ci sia carica libera sulla superficie di separazione. La si può ricavare considerando il primo esempio in eq. (6.3), in cui il campo elettrico ha solo una componente perpendicolare alla superficie di separazione. Chiamando  $\pm Q$  le cariche libere presenti sulle due facce superiore ed inferiore si ha  $E_1 = Q/S\epsilon_1$  (applicando il teorema di Gauss con  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_1$  nella faccia superiore) ed  $E_2 = Q/S\epsilon_2$  (applicando Gauss con  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_2$  nella faccia inferiore). I campi soddisfano a  $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$ .

Abbiamo considerato esempi particolari: il trattamento generale consente di dimostrare che queste condizioni al bordo sono soddisfatte in generale, ed in seguito ottenute nell'eq. (6.7).

## 6.5 Dielettrici: trattamento generale

Consideriamo un dielettrico contenente dipoli  $\mathbf{p}(\mathbf{r})$  con densità in numero  $n(\mathbf{r})$ : in generale entrambi dipendono dalla posizione  $\mathbf{r}$ . Definiamo il campo vettoriale **densità di polarizzazione**

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) \equiv n(\mathbf{r})\mathbf{p}(\mathbf{r}).$$

- Generalizzando lievemente quanto visto in precedenza con il condensatore piano, sulla superficie di un dielettrico si ha la densità superficiale di carica di polarizzazione  $\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ .
- Il nuovo effetto è che nel volume si ha una densità carica di polarizzazione  $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  che può essere diversa da zero quando  $\mathbf{P}$  non è costante.

Per capirlo consideriamo un volume immaginario: la carica di polarizzazione al suo interno è opposta a quella che ha attraversato la superficie, essendoci solo cariche  $-+$  che polarizzandosi si spostano. Si ha quindi

$$\int dV \rho_{\text{pol}} = - \int dS \sigma_{\text{pol}} = - \int dS \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = - \int dV \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (6.6)$$

come anche graficamente illustrato da.



Ad esempio, per un cubetto di volume  $dV = dx dy dz$ , considerando le facce  $dS = dy dz$ , si ha

$$\rho_{\text{pol}} = \frac{dq_{\text{pol}}}{dV} = - \frac{(\sigma_{\text{destra}} + \sigma_{\text{sinistra}})dS}{dV} = - \frac{P_x(x+dx) - P_x(x)}{dx} = - \frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

Aggiungendo i contributi delle altre facce si ottiene  $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ . Anticipiamo che in seguito si avrà la corrente  $\mathbf{J}_{\text{pol}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$  se  $\mathbf{P}$  dipende dal tempo.

## 6.6 Dielettrici: equazioni generali

Scriviamo adesso equazioni generali che descrivono i dielettrici.

La 2a equazione di Maxwell rimane tale. Nella 1a equazione di Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{tot}} / \epsilon_0$  separiamo  $\rho_{\text{tot}} = \rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{free}}$  ed usiamo la formula  $\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  per riscriverla come

$$\nabla \cdot \left[ \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right] = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}.$$

Inizia ad assomigliare ad un'equazione in cui la sola carica libera agisce da sorgente. Usando l'approssimazione  $\mathbf{p} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}$  si ha  $\mathbf{P} \equiv n \mathbf{p} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}$  dove  $\chi = n \alpha$  è la 'susceptività elettrica', adimensionale e di ordine uno per solidi e liquidi. Quindi

$$\nabla \cdot [\mathbf{E}(1 + \chi)] = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}.$$

Usualmente questa equazione viene scritta come

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}} \quad \text{definendo} \quad \mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \equiv \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$$

Siccome la 2a equazione di Maxwell rimane  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , si ha quindi un sistema di equazioni per due campi  $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ , più complicato dell'elettrostatica nel vuoto.

## 6.7 Dielettrici uniformi

Per un unico dielettrico uniforme  $\epsilon$  non dipende dalla posizione  $\mathbf{r}$ , e la 1a equazione di Maxwell nella materia si riduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{free}}/\epsilon \quad \text{se } \epsilon \text{ è costante.}$$

Quindi, nel caso semplice di un solo dielettrico uniforme è come se  $\epsilon_0$  fosse sostituito da  $\epsilon$ . Per  $\epsilon \rightarrow \infty$  è come un conduttore.

In molti casi pratici si hanno due o più materiali, ed  $\epsilon$  è costante entro ciascun materiale. Questi problemi possono essere approcciati in questo modo:

1. risolvendo separatamente in ciascun materiale (in cui la soluzione è come nel vuoto, con  $\epsilon_0$  rimpiazzato dall' $\epsilon$  del materiale);
2. poi raccordando le soluzioni sul bordo fra i materiali.

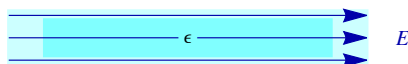
Le condizioni di raccordo sui bordi fra diversi dielettrici sono

$$\Delta E_{\parallel} = 0, \quad \Delta D_{\perp} = \sigma_{\text{free}} \quad (6.7)$$

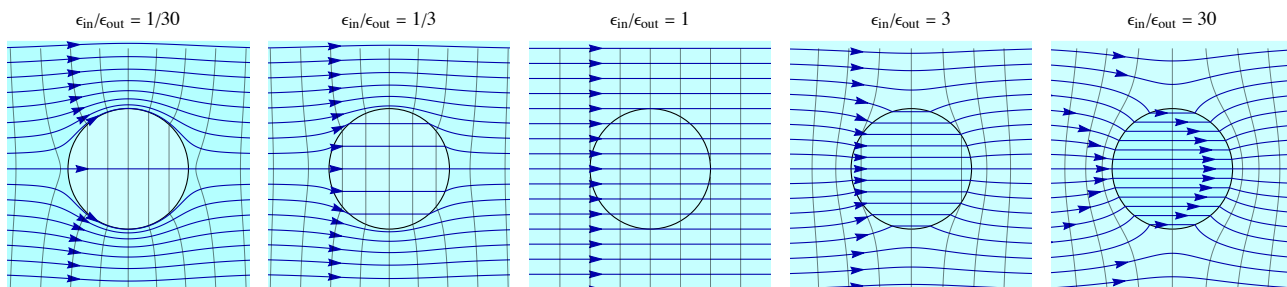
La prima condizione segue da  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , applicando il teorema del rotore su di un circuito parallelo alla superficie, ed il cui spessore è un infinitesimo di ordine superiore. La seconda condizione segue da  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}}$ , applicando il teorema della divergenza ad un cilindretto perpendicolare alla superficie, il cui spessore è un infinitesimo di ordine superiore.

Come esempio, calcoliamo cosa succede se in un dielettrico con un campo  $E_{\text{ext}}$  è presente un ‘buco’ costituito da un altro dielettrico.

- Se il buco è parallelo ad  $E_{\text{ext}}$  e lungo e sottile, domina la condizione  $\Delta E_{\parallel} = 0$ , e si ha quindi  $E_{\text{in}} = E_{\text{ext}}$ .



- Se il buco è parallelo ad  $E_{\text{ext}}$  e corto e largo, domina la condizione  $\Delta D_{\perp} = 0$ , e si ha quindi  $\epsilon_{\text{in}} E_{\text{in}} = \epsilon_{\text{out}} E_{\text{out}}$ .
- I due casi precedenti erano calcolabili senza bisogno del formalismo generale, che invece è necessario in generale. Ad esempio un caso intermedio calcolabile è un buco di forma sferica: come mostrato negli esercizi si ha una polarizzazione costante  $\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{ext}} / (1 + \chi/3)$  cioè  $\sigma_{\text{pol}} = P \cos \theta$ . La figura mostra esempi:



Altro problema non ovvio risolto fra gli esercizi è una carica davanti ad un semi-spazio dielettrico: il problema è risolvibile con 2 cariche immagini, determinate dalle condizioni sul piano di separazione.

## 6.8 Energia di un dielettrico

Ricaviamo una formula generale per l'energia elettrica  $U$  di un dielettrico. Il problema sembra intuitivamente semplice, ma è non banale.

Intuitivamente, consideriamo un condensatore: abbiamo scritto le cariche libere come  $Q = CV$  con  $C = \epsilon S/d$  maggiore della capacità  $C_0$  in assenza di dielettrico. Per un utilizzatore che vede il condensatore come scatola nera esistono solo le cariche libere, che hanno energia elettrica  $U = CV^2/2$  (maggiore che in assenza di dielettrico). Infatti l'utilizzatore deve mettere più cariche  $Q > Q_0$  per raggiungere un dato potenziale  $V$ . Questa formula per l'energia elettrica di un condensatore suggerisce la seguente formula più generale per la densità di energia elettrica di un dielettrico

$$u = \frac{\epsilon}{2} E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} > u_0.$$

Ha senso? A livello fondamentale nasce un dubbio: un dielettrico è solo un particolare sistema che viene approssimato 'come se'  $\epsilon_0$  fosse rimpiazzato da  $\epsilon_0$ , ma la formula fondamentale per la densità di energia elettrica è sempre  $\epsilon_0 E^2/2$ .

La soluzione è che entrambe le considerazioni sono valide, e la contraddizione è solo apparente, risolta considerando che si riferiscono a due energie diverse. Le cariche sono divise in  $\rho = \rho_{\text{free}} + \rho_{\text{pol}}$ . Rimane vero che  $u_{\text{free}} + u_{\text{pol}} = \epsilon_0 E^2/2$ .

Ma l'energia totale del sistema include  $u_{\text{spring}}$ , l'energia di tipo meccanico necessaria per polarizzare i dipoli.<sup>1</sup> L'energia totale vale

$$u = u_{\text{free}} + u_{\text{pol}} + u_{\text{spring}} = u_{\text{free}}$$

in quanto si dimostra che, per dielettrici lineari,  $u_{\text{spring}} = -u_{\text{pol}}$ : un dielettrico riduce  $E$  immagazzinando meccanicamente la sua energia. Quindi l'energia di un dielettrico lineare finito vale

$$U = U_{\text{free}} = \frac{1}{2} \int \rho_{\text{free}} \varphi dV = \frac{1}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) \varphi dV \rightarrow \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot (-\nabla \varphi) dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV.$$

---

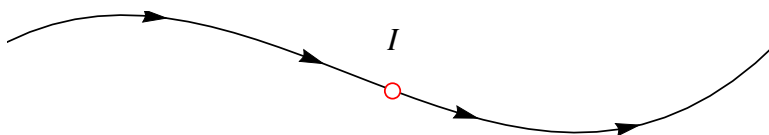
<sup>1</sup>Possiamo approssimarli come una molla, ma (per confondere ulteriormente le idee) a loro volta i dipoli sono sistemi elettrici, per cui  $u_{\text{spring}}$  è ancora energia elettrica.

# Correnti e conduzione

Cambiamo argomento, passando dall'elettrostatica a studiare cariche in moto. Se l'equazione  $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$  rimanesse valida anche quando  $\rho(\mathbf{r}, t)$  e quindi  $\varphi$  dipendono dal tempo, essa implicherebbe la **trasmissione istantanea di segnali**: spostando una carica  $q$  il campo elettrico da essa prodotto  $\mathbf{E}$  varia istantaneamente ovunque. Invece di porci questi problemi iniziamo a capire il moto 'lento' in cui essi non sono numericamente rilevanti: procedendo a questa maniera il problema concettuali si chiarirà da solo alla fine.

## 7.1 Corrente

Dato un filo, si definisce la corrente elettrica  $I \equiv dQ/dt$  in un dato punto come la quantità di carica  $dQ$  che attraversa il punto in un intervallo temporale  $dt$ . È come contare il passaggio di frontali. Il segno di  $I$  è arbitrario. Per ora  $I$  potrebbe dipendere dal punto. L'unità di misura MKSC della corrente è Coulomb/secondo, detto Ampere.



Passando da un filo ad un sistema generale, si definisce la densità di corrente elettrica  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  in maniera analoga alla corrente di un fiume:  $I = \Phi_J = \int dS \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ . Il segno di  $\mathbf{J}$ , per ora arbitrario, viene definito stabilendo per convenzione che la direzione del vettore  $\mathbf{J}$  è la direzione del moto di cariche positive. La corrente è spesso prodotta dal moto degli elettroni, ed ha quindi direzione opposta al loro moto, in quanto gli elettroni hanno carica negativa.

## 7.2 Conservazione della carica

Si osserva che la carica si conserva in fisica della materia a basse energie, dove ogni particella ha la sua carica ed il numero di particelle si conserva.

Si osserva che la carica si conserva anche in fisica delle alte energie in cui le particelle cambiano, ma lo fanno conservando la carica (ad esempio il neutrone decade in  $n \rightarrow p e \bar{\nu}$  dove il neutrino  $\nu$  è neutro). L'elettrone è stabile perché è la particella carica più leggera.

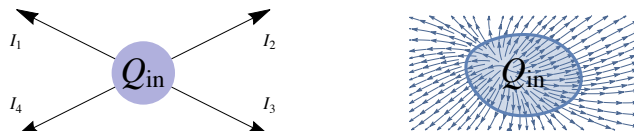


Traduciamo in formule l'osservazione della conservazione della carica, partendo dal caso più semplice di un circuito, in cui 'conservazione della carica' significa che

- ogni filo ha  $I$  costante;

- nei nodi  $\dot{Q}_{\text{in}} = -\sum I_i$

con  $Q \neq 0$  solo in un condensatore, oggetto su cui si accumulano le cariche.



Passiamo poi al caso di un volume generico. Nel linguaggio dei frontalieri 'conservazione delle persone' significa che la popolazione aumenta quando qualcuno entra. Similmente, conservazione della carica significa  $\dot{Q}_{\text{in}} = -\Phi_J$  (ricordando che la normale è per convenzione uscente ad una superficie chiusa, e quindi  $\Phi_J > 0$  se la carica positiva esce). Il teorema della divergenza implica la conservazione della carica in forma differenziale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

In questa equazione lo spazio ed il tempo compaiono in maniera simmetrica: è un primo esempio di equazione che nasconde una simmetria detta relatività. Si noti un aspetto non ovvio: si possono avere correnti anche se la densità di carica è costante,  $\dot{\rho} = 0$ : ad esempio una  $J$  costante, tipo fiume. Anche se la densità di carica vale  $\rho = 0$ , come accade in ogni circuito senza capacità.

### 7.3 Legge di Ohm e resistenza

Ohm nel 1826 osservò la seguente legge approssimata di fisica dei materiali: in un filo di lunghezza  $L$  e sezione  $S$  sottoposto a differenza di potenziale  $V$  scorre una corrente  $I$  data da

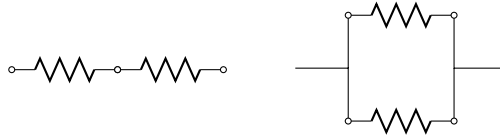
$$I = \frac{V}{R}, \quad R = \rho \frac{L}{S}$$

La costante  $R$  è detta **resistenza** ed ha dimensioni  $[R] = V/A \equiv \Omega = \text{Ohm}$ , quindi  $[\rho] = \Omega \cdot m$ . Essa dipende dalla geometria nel modo indicato. La costante  $\rho$  (detta **resistività**) ed il suo inverso  $\sigma = 1/\rho$  (detta **conducibilità**) dipendono solo dal materiale e dalla temperatura. Usando  $I = SJ$  e  $V = LE$ , la legge di Ohm può essere riscritta in forma generale

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}}{\rho}.$$

Nei circuiti le resistenze sono simbolizzate da un tratto di filo a zig-zag  $\sim \text{W} \sim$ . Le resistenze si combinano analogamente all'attrito che in tubi ostacola lo scorrimento della corrente dell'acqua spinta da un potenziale gravitazionale.

- Resistenze in serie:  $V_1 = R_1 I$  e  $V_2 = R_2 I$ . Quindi  $V_1 + V_2 = (R_1 + R_2)I$  in accordo con la geometria  $L = L_1 + L_2$ .



- Resistenze in parallelo:  $V = R_1 I_1 = R_2 I_2 \equiv R(I_1 + I_2) = R(1/R_1 + 1/R_2)V$  da cui  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ , in accordo con la geometria  $S = S_1 + S_2$ .

Si osserva che la resistività  $\rho$  varia moltissimo in diversi materiali (a differenza della polarizzabilità, sempre circa uguale a  $\alpha \sim a^3$ ). Per questo motivo i materiali sono divisi in due grandi classi: **conduttori** ed **isolanti**

$$\rho = \begin{cases} 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} & \text{per il rame (un tipico conduttore)} \\ 10^{10-14} \Omega \cdot \text{m} & \text{per il vetro (un tipico isolante)} \\ 10^3 \Omega \cdot \text{m} & \text{per il silicio (un tipico semi-conduttore)} \\ 10^2 \Omega \cdot \text{m} & \text{per il 'terreno'}. \end{cases}$$

Come mai? Da dove viene la legge di Ohm?

## 7.4 Interpretazione microscopica della legge di Ohm

Esprimiamo la conduzione in termini del moto delle particelle. In molti materiali la conduzione è dominata dal moto degli elettroni liberi di carica  $q_e = -e$ , densità in numero  $n_e$ , numero  $N_e$ , velocità  $\mathbf{v}_e$  e massa  $m_e$ . Avendo massa minore delle altre particelle, gli elettroni tendono a muoversi maggiormente.

Un filo di lunghezza  $L$  è attraversato da  $\Delta Q = N_e q_e$  in un tempo  $\Delta t = L/v_e$ . Quindi la corrente vale

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{N_e q_e v_e}{L} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{I}{S} = n_e q_e v_e.$$

In gas e liquidi conducono anche ioni (molecole cariche): sommando su tutti i tipi di particelle  $i$  si ha la corrente totale

$$I = \sum_i \frac{N_i q_i v_i}{L}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_i n_i(\mathbf{r}) q_i \mathbf{v}_i(\mathbf{r})$$

Consideriamo, ad esempio, un filo con  $N \sim 6 \cdot 10^{23}$  elettroni e lunghezza  $L \sim 10$  m percorso da una grossa corrente  $I = \text{Ampere}$ . Essendo  $I = -Nev/L$  si ottiene la velocità degli elettroni:  $v_e \sim 10^{-4} \text{ m/s}$ . Sono lenti: come mai le lampadine si accendono istantaneamente?

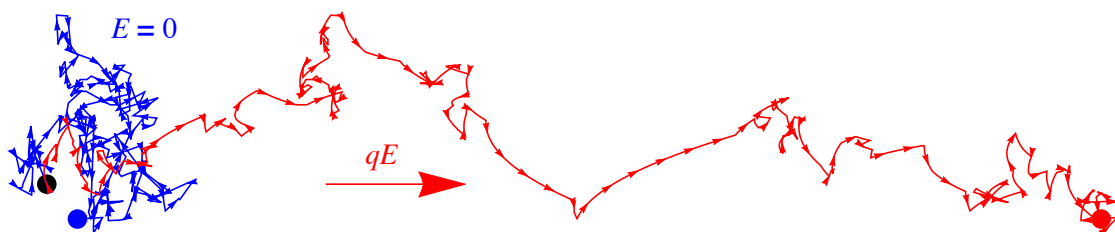
In quanto accendere la corrente è come aprire un rubinetto: anche in questo caso le particelle si muovono lentamente (come si vede aspettando che arrivi l'acqua calda), ma un'onda di pressione che si propaga alla velocità del suono le fa partire in blocco.

In entrambi i casi la velocità degli elettroni è data da  $m_e v^2/2 \sim k_B T$ . A temperatura ambiente  $k_B T \approx \text{eV}/40$  significa  $v_e \approx 10^5 \text{ m/s}$  ovvero  $v_e/c \sim 10^{-3}$ , simile alla velocità degli elettroni negli atomi in quanto  $k_B T \sim E_B$ .

Quindi le particelle vanno veloci, ma in media non vanno da nessuna parte:  $J_{\text{elettrica}} = J_{\text{acqua}} = 0$ . La corrente nasce quando gli elettroni, oltre alla **velocità caotica**, hanno una **piccola velocità media chiamata velocità di deriva**.

La presenza del moto caotico è essenziale per capire come mai la legge di Ohm è di tipo ‘Aristotelico’: la velocità (corrente) è proporzionale alla forza applicata (campo elettrico  $E$  esterno). Secondo Newton una forza produce invece un’accelerazione sulle singole cariche,  $a = qE/m$ . In che modo  $F = ma$  diventa  $v \propto F$ ? Allo stesso modo in cui gli attriti producono velocità limite  $v \propto F$  con forze meccaniche.

Assumendo che un elettrone urti in media ogni tempo  $\tau$ , e che dopo ogni urto riparta con grossa velocità termica in direzione casuale, a media zero, la velocità di deriva vale  $v_{\text{deriva}} = qE\tau/m$ .



Questa corrisponde a densità di corrente  $J = n_e e v_e \equiv E/\rho$  in presenza di densità di elettroni liberi  $n_e$ . Abbiamo quindi ottenuto la legge di Ohm, con resistività:

$$\rho = m_e / e^2 n_e \tau$$

Assumendo il valore noto della distanza fra gli atomi  $d \sim \text{\AA}$  possiamo calcolare il tempo fra gli urti,  $\tau \sim d/v_{\text{termica}} \sim 10^{-14 \div 15} \text{ sec} \propto 1/\sqrt{T}$  che non dipende da  $E$  in quanto  $v_{\text{deriva}} \ll v_{\text{termica}}$ .

Conferme sperimentali di questa teoria sono:

- Il moto Browniano: si osserva che particelle piccole ed appena visibili fanno un moto caotico, per effetto degli urti degli atomi.
- Le scariche: si osserva che se  $eEd > \text{eV}$ , cioè se  $E \gtrsim 10^{10} \text{ V/m}$ , gli  $e$  acquistano così tanta energia da ionizzare gli atomi. Come già discusso, si osservano scariche nelle sostanze rarefatte come i gas dove la distanza fra le molecole  $d \sim 100 \text{ \AA}$  è maggiore della loro dimensione, in maniera che per causarle basta un campo elettrico  $E$  minore (e.g.  $E < 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$  nell’aria).

Quindi, come mai la resistività  $\rho$  varia tanto in materiali diversi? Il colpevole è la densità di elettroni liberi  $n_e \propto e^{-E_B/k_B T}$ , che dipende esponenzialmente dal rapporto tra l’energia termica  $k_B T$  e l’energia di ionizzazione  $E_B \sim eQ/4\pi\epsilon_0 a$ .

- **Conduttori.** I materiali in cui  $E_B \ll k_B T$  hanno circa un elettrone libero per atomo:  $n \sim 1/\text{\AA}^3$ . Quindi  $\rho \sim 10^{-8} \text{ Ohm} \cdot \text{m}$ : il valore tipico di un metallo.
- **Isolanti.** Nei materiali in cui  $E_B \gg k_B T$  quasi tutti gli elettroni sono legati:  $n_e^{\text{free}}$  è soppresso da  $e^{-E_B/k_B T} \sim 10^{-20}$ .
- **Semiconduttori.** Ci sono poi materiali intermedi, in cui alcuni  $e$  più debolmente legati hanno  $E_B \sim \text{few} \times k_B T$ , dando luogo ad una soppressione esponenziale moderata.
- **Superconduttori.** Menzioniamo che in alcuni materiali effetti quantistici producono un moto collettivo degli elettroni, tale che la resistenza è zero. Al momento non sono noti superconduttori a temperatura ambiente: i superconduttori noti funzionano a temperature così basse da avere scarsa rilevanza tecnologica: raffreddarli costa più energia dell’energia risparmiata evitando l’effetto Joule.

## 7.5 Effetto Joule

Abbiamo visto che gli elettroni e le altre cariche conducono elettricità come  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  in quanto vengono accelerati da  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  ma fanno frequenti urti caotici, cedendo l'eccesso di energia cinetica che hanno acquistato al materiale, che quindi si riscalda.

Per calcolare questo effetto, detto effetto Joule (così importante che dà il nome all'unità di energia) iniziamo a considerarlo nell'approssimazione di circuiti.

Iniziamo con il derivare una formula generale: dato un elemento generico (una resistenza, una batteria, un condensatore, o altro) ai cui capi c'è una differenza di potenziale  $V$ , per fare scorrere una corrente  $I$  occorre una potenza  $W = IV$  (positiva o negativa a seconda che l'elemento assorba o ceda energia). Infatti quando passa una carica  $dQ$ , la sua energia potenziale varia di

$$dU = dQ V \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = \boxed{W = IV}.$$

Nel caso speciale di una resistenza, in cui  $V = IR$ , questa formula implica l'effetto Joule:

$$W = I^2 R = \frac{V^2}{R}.$$

L'energia si conserva, e quella elettrica diventa calore (il moto collettivo di cariche che urtano diventa moto caotico): stufe, ferri da stiro, forni, etc. funzionano in base all'effetto Joule.

Come curiosità, osserviamo che una corrente  $I$  che incontrando due resistenze  $R_{1,2}$  in parallelo, si ripartisce in  $I = I_1 + I_2$  con valori tali da minimizzare la potenza totale dissipata per effetto Joule. Infatti:  $W = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$ :

$$\frac{dW}{dI_1} = 2R_1 I_1 + 2R_2 (I_1 - I) = 0 \quad \text{risolta da} \quad R_1 I_1 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_{\parallel} I$$

che è la stessa formula della resistenza  $R_{\parallel}$  equivalente due resistenze in parallelo.

Passiamo infine alla formula generale per l'effetto Joule. Ricordiamo la formula  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  per la potenza su di una particella in moto con velocità  $\mathbf{v}$ . Pensando ad un conduttore, la applichiamo sommando sulle particelle con densità  $n$

$$W = \sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i = \int dV n \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \int dV n q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (7.1)$$

Abbiamo ottenuto che la densità volumetrica di potenza è data da

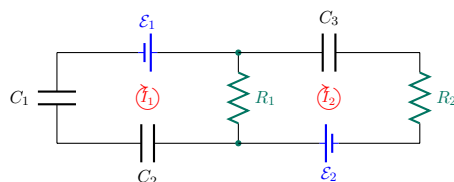
$$\boxed{w = \frac{dW}{dV} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}}. \quad (7.2)$$

Questa formula è valida anche se  $\mathbf{J} \neq \sigma \mathbf{E}$ : è quindi più generale dei conduttori.

## 7.6 Circuiti

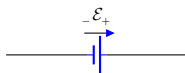
## 7.7 Circuiti: leggi di Kirchhoff

Alcuni circuiti che contengono solo resistenze o capacità in serie o paralleli sono risolubili in quanto equivalenti a circuiti semplici. Questo non è possibile per più generali circuiti più complicati come quello in figura, dove sostituire  $C_1$  e  $C_2$  con una  $C$  equivalente non consente di risolvere il circuito



Le leggi di Kirchhoff sono una forma sistematica generale per scrivere le leggi di un circuito. Iniziamo a definire i nomi degli elementi.

- **Fili:** sono conduttori a  $\varphi = \text{cte}$ , così sottili che non si ha accumulo di carica su di loro. In generale ogni filo potrebbe avere la sua corrente (nel circuito sopra si avrebbero 7 correnti incognite).
- **Nodi:** sono punti  $B$  in cui due o più fili si congiungono. La conservazione della carica impone che la somma delle correnti entranti in ogni nodo sia zero:  $\sum_A I_{A \rightarrow B} = 0$ . Questa equazione è risolta in maniera geometricamente intuitiva, introducendo come incognite solo le correnti che circolano in ogni ‘maglia’ (nel circuito sopra si hanno due maglie, e in  $R_1$  scorre  $I_2 - I_1$ ).
- Occorrono quindi tante equazioni quante sono il numero di maglie. Le leggi di Kirchhoff sono queste equazioni, ottenute imponendo la conservazione del potenziale facendo il giro in ogni maglia:  $0 = \sum V_{AB}$  dove  $V_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$  è la caduta di potenziale da  $A$  a  $B$ , lungo ogni elemento sulla maglia.
- **Resistenza:** è un elemento descritto dall’equazione  $V_{AB} = RI_{A \rightarrow B}$  dove la corrente fluisce da  $A$  a  $B$ .
- **Capacità:** è un elemento che consente accumuli di carica, descritto dall’equazione  $V_{AB} = Q/C$  con  $\dot{Q} = I_{A \rightarrow B}$ .
- **Batteria:** è un elemento che in qualche modo mantiene costante la differenza di potenziale ai suoi capi,  $\mathcal{E} = \varphi_+ - \varphi_-$ . Nel simbolo circuitale una linea corta indica il polo a potenziale minore:

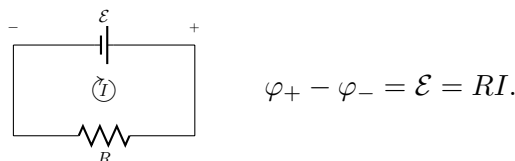


Le batterie possono funzionare sulla base di diversi principi fisici:

- Meccanica: forza sposta cariche su isolante. E.g. cinghia Van de Graaf.
- Chimica: ioni migrano dove la concentrazione è minore per dare reazione.
- Fotoelettrica: luce fornisce energia ionizzando  $e$ .
- Magnetica:  $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$ .

Consideriamo come esempio un circuito con una resistenza  $R$  ed una batteria con differenza di potenziale  $V$ , spesso indicata con il simbolo  $\mathcal{E}$ . Gli elettroni, avendo carica negativa, vanno al polo

positivo girando nel circuito ( $\mathbf{F} = e\mathbf{E} = |e|\nabla\varphi$ ) e quindi la corrente gira in direzione opposta al loro moto, verso il polo negativo.



Una batteria ha sempre una resistenza  $R$  interna.

Consideriamo poi un circuito  $RC$ : è abbastanza semplice vedere che è descritto dall'equazione  $\mathcal{E} = RI + Q/C$ . Definendo  $\tau = RC$  le soluzioni rilevanti sono

$$Q(t) = \begin{cases} C\mathcal{E}[1 - e^{-t/\tau}] & \text{carica da } Q(0) = 0 \\ C\mathcal{E}e^{-t/\tau} & \text{scarica con } \mathcal{E} = 0 \end{cases}.$$

Ad esempio un'automobile ha capacità  $C \sim \epsilon_0 \cdot \text{m}^2 / 0.1\text{m} \sim 100 \text{ pF}$ , resistenza  $R \sim 100 \text{ G}\Omega$  ( $\rho \sim 10^{10} \Omega \cdot \text{m}$ ), e si può caricare a  $V_0 \sim 30 \text{ kV}$ . Quindi  $\tau = RC = 10 \text{ s}$ ,  $U_0 = CV_0^2/2 = 0.045 \text{ J}$ , che decade con costante tempo  $\tau/2$ . Aggiungendo granuli conduttori nelle gomme si può ridurre  $\tau$ .

## 7.8 Correnti alternate

Spesso si usano correnti alternate, ovvero batteria che generano una differenza di potenziale che oscilla a pulsazione  $\omega$ . Nei circuiti ha un simbolo dedicato:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t = \text{---} \bigcirc \text{---}$$

Ad esempio la corrente nelle case oscilla a frequenza di circa 60 Hz in quanto (come vedremo in seguito) la corrente alternata consente di sprecare meno energia per effetto Joule nel trasporto. Vedremo anche in seguito un nuovo elemento di circuito, detto induttanza, descritto da  $V = L\dot{I}$ , dove  $L$  è una costante.

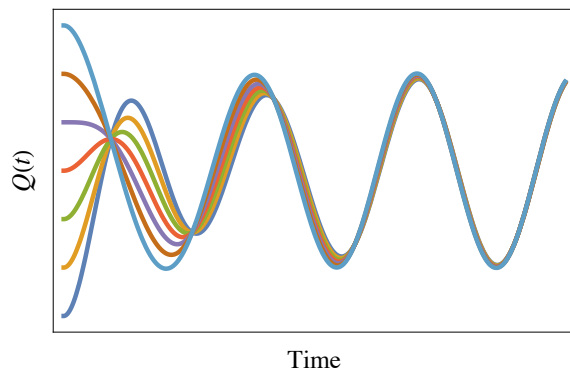
Un circuito con  $R$ ,  $L$  e  $C$  in serie con corrente alternata è quindi descritto dall'equazione differenziale di secondo grado

$$\frac{Q}{C} + RI + L\dot{I} = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

È formalmente a quella che descrive il moto di una massa soggetta ad una forza elastica con attrito. La soluzione generale è complicata e spesso superflua.

Infatti, come illustrato dalla figura, dopo un periodo iniziale  $\tau \sim RC$  detto **transiente** in cui il moto è complicato,  $R$  ha dissipato l'energia iniziale ed il sistema ha raggiunto il moto **a regime**, in

cui rimane solo un'oscillazione alla pulsazione  $\omega$ .



La soluzione a regime è quella che è interessa, ed è ad esempio visibile mediante oscilloscopio.

Esiste una tecnica matematica che rende semplice ottenere solo la soluzione a regime. In sostanza, si cerca una soluzione  $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta)$  che oscilli alla pulsazione  $\omega$ . Per farlo in maniera ancora più semplice si utilizza l'analisi complessa. Si scrive

$$\mathcal{E} = \Re \hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t} \quad \text{avendo definito} \quad \hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0$$

e si cerca una **soluzione complessa**

$$I = \Re \hat{I} e^{i\omega t}$$

di cui poi si interpreta come soluzione fisica la parte reale (che è soluzione, in quanto l'equazione è lineare). Essendo fissata la dipendenza dal tempo, le derivate  $d/dt$  diventano moltiplicazioni per  $i\omega$  e l'equazione differenziale diventa un'equazione algebrica lineare (o un sistema di equazioni lineari, per circuiti con più maglie)

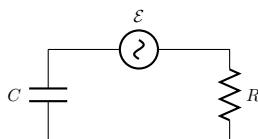
$$\Re \hat{I} Z = \Re \hat{\mathcal{E}} \quad \boxed{Z = \frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L} = \text{"impedenza"}.$$

risolta da

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{Z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cos(\omega t + \delta)} \quad \text{dove } \delta \text{ è la fase di } \hat{I}.$$

Le impedenze in serie o parallelo si combinano come resistenze.

Consideriamo, per esempio, un circuito  $RC$  in alternata:



Misurando la differenza di potenziale ai capi di  $C$  si ottiene un filtro 'passa-basso', che taglia frequenze alte

$$\frac{V_C}{\mathcal{E}} = \left| \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} \right| = \left| \frac{1}{1 + i\omega RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

Misurando la differenza di potenziale ai capi di  $R$  si ottiene un filtro 'passa-alto', che taglia frequenze basse

$$\frac{V_R}{\mathcal{E}} = \left| \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} \right| = \left| \frac{1}{1 + 1/i\omega RC} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(\omega RC)^2}}.$$

Nel calcolare la potenza dissipata  $W = VI$  da una impedenza  $Z$  a regime occorre fare attenzione che il prodotto non è una operazione lineare: la differenza di potenziale ai suoi capi è calcolata usando numeri complessi come  $\hat{V} = Z\hat{I}$ , ma  $W = \text{Re}(\hat{V})\text{Re}(\hat{I}) \neq \text{Re}(\hat{V}\hat{I})$ . Bisogna tornare ai numeri reali: scrivendo  $Z = R + iY$  e  $\hat{I} = I_0 e^{i\omega t}$  si ha

$$W = \underbrace{(I_0 R \cos \omega t - I_0 Y \sin \omega t)}_{\text{Re}\hat{V}=\text{Re}Z\hat{I}} \cdot \underbrace{(I_0 \cos \omega t)}_{\text{Re}\hat{I}}.$$

Di questa espressione spesso ha interesse la media temporale, denotata con  $\langle \dots \rangle$ : calcolandola si osserva che solo la parte reale dell'impedenza (la resistenza) dissipa energia:

$$\langle W \rangle = I_0^2 \langle R \cos^2 \omega t - Y \sin \omega t \cos \omega t \rangle = \frac{R}{2} I_0^2.$$

## 7.9 Costante dielettrica complessa

Un trucco matematico simile alle impedenze consente di ridurre problemi di dielettrici conduttori soggetti a campi oscillanti o ruotanti a problemi di dielettrici in campi statici, con una costante dielettrica complessa  $\hat{\epsilon}$ .

Iniziamo a vederlo considerando un problema concreto dalla geometria semplice: un piatto piano sottile con costante dielettrica  $\epsilon$  in un campo elettrico esterno  $E_{\text{ext}}$ :



Come noto, il campo interno è dato dalla condizione al bordo

$$\Delta D_{\perp} = \epsilon_0 E_{\text{ext}} - \epsilon E_{\text{in}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{in}} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_{\text{ext}}.$$

Consideriamo ora un piatto piano sottile con costante dielettrica  $\epsilon$  e resistività  $\rho$  in campo elettrico esterno  $E_{\text{ext}}(t)$  che dipende dal tempo. Il problema è ridotto alle seguenti equazioni differenziali

$$\begin{cases} \epsilon_0 E_{\text{ext}} - \epsilon E_{\text{in}} = \sigma \\ \dot{\sigma} = J = E_{\text{in}}/\rho \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma + \tau \dot{\sigma} = \epsilon_0 E_{\text{ext}}, \\ \epsilon \dot{E}_{\text{in}} + E_{\text{in}}/\rho = \epsilon_0 \dot{E}_{\text{ext}} \end{cases}$$

dove  $\tau = \epsilon\rho$  come in un circuito  $RC$ . Assumendo ora che  $E_{\text{ext}} = \Re \hat{E}_{\text{ext}} e^{i\omega t}$  oscilli con pulsazione  $\omega$ , la soluzione a regime è ottenuta assumendo che  $\sigma = \Re \hat{\sigma} e^{i\omega t}$  ed  $E_{\text{in}} = \Re \hat{E}_{\text{in}} e^{i\omega t}$  oscillino con la stessa pulsazione  $\omega$ . Il dielettrico-conduttore diventa come se la costante dielettrica fosse complessa

$$\boxed{\hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{1}{i\omega\rho}} \quad E_{\text{in}} = \Re \frac{\epsilon_0}{\hat{\epsilon}} E_{\text{ext}} = \frac{\epsilon_0 \hat{E}_{\text{ext}}}{\epsilon \sqrt{1 + 1/(\tau\omega)^2}} \cos(\omega t + \delta) \quad \delta = \arctan \omega\tau$$

(Un campo elettrico ruotante è equivalente a due componenti oscillanti sfasate: usando numeri complessi è descritto da un campo complesso:  $\hat{\mathbf{E}}_{\text{ext}} = \hat{E}_{\text{ext}}(1, i, 0)/\sqrt{2}$ ).

Per concludere, passiamo dall'esercizio specifico al trattamento generale. Consideriamo un dielettrico con cariche fisse e di conduzione  $\rho_{\text{free}} = \rho_{\text{fix}} + \rho_{\text{cond}}$ . La prima equazione di Maxwell è

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_{\text{fix}} + \rho_{\text{cond}}.$$



La conservazione della carica impone  $\dot{\rho}_{\text{cond}} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$ . A regime possiamo eliminare la derivata rispetto al tempo,  $\dot{\rho}_{\text{cond}} = i\omega\rho_{\text{cond}}$ . Quindi la 1a equazione di Maxwell diventa come quella statica, ma con costante dielettrica complessa

$$\nabla \cdot \left( \epsilon \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{i\omega} \right) = \rho_{\text{fix}}.$$

In un conduttore  $\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$ , quindi

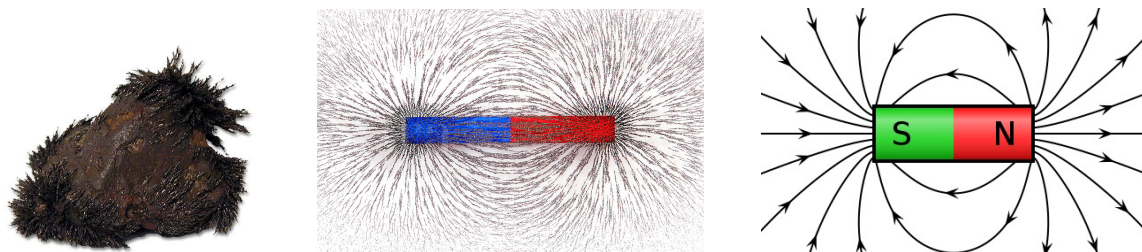
$$\nabla \cdot (\hat{\epsilon} \mathbf{E}) = \rho_{\text{fix}}, \quad \hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{1}{i\omega\rho} = \epsilon \left( 1 + \frac{1}{i\omega\tau} \right) \quad \tau = \epsilon\rho \quad .$$

Parte II

Magnetostatica

## Campi magnetici

Passiamo ad un fenomeno che apparentemente non c'entra niente con l'elettricità: il magnetismo. La parola deriva da 'magnetite' il nome di un minerale (ossidi di Fe) che gli antichi greci scoprirono nella regione di Magnesia (oggi in Turchia).



Si osserva che questi minerali attraggono limatura, specialmente sulle estremità, dette 'poli'. Sago-  
mando questi minerali a bacchetta si osserva che esistono due tipi di poli, detti  $N$  ed  $S$ . I poli  $NS$  si  
attraggono, mentre  $NN$  e  $SS$  si respingono, con una forza che scala come  $1/r^2$ .

Questo sembra simile alle cariche, ma deve essere un fenomeno diverso. Infatti una bacchetta  
risulta avere poli opposti  $NS$  ai suoi lati, e non è possibile separarli in 'cariche'. In qualche senso è  
come se esistessero solo 'dipoli'. Inoltre, non possono essere cariche elettriche in quanto la magnetite le  
conduce: mettendo cariche elettriche su magnetite si osservano gli usuali fenomeni elettrici. Si osserva  
infine che aghi di magnetite liberi di ruotare si allineano lungo la direzione nord/sud: questo fenomeno,  
detto bussola, spiega il nome 'poli' (il polo nord del magnete si allinea verso nord) e suggerisce che la  
Terra è magnetica.

Immaginiamo quindi l'esistenza di un nuovo campo vettoriale  $\mathbf{B}$ , le cui linee di campo sono vi-  
sualizzabili mettendo manciate di limatura ferrosa in prossimità di magnetite. Si osserva che le linee  
di campo girano, ovvero non terminano mai in cariche magnetiche. Mettendo due sassi magnetici si  
osserva che il nuovo campo si somma:  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ . Si attribuisce alla terra un campo magnetico  
che esce dal polo nord e rientra nel polo sud.

Cosa genera il campo magnetico? I ferromagneti non sono lo strumento giusto per capirlo: sono  
sassi che generano grossi 'campi magnetici' per via di complicati effetti quantistici. Invece di seguire  
lo sviluppo storico rimandiamo la risposta a questa domanda, e discutiamo prima possibili effetti ed  
applicazioni del campo magnetico.

## 8.1 Forza di Lorentz

Nel 1895 si scoprì una connessione fra campi magnetici e cariche elettriche:  $\mathbf{B}$  esercita la ‘forza di Lorentz’ su cariche elettriche. Facendo misure si osserva che la forza magnetica su di una carica ferma vale zero. La forza magnetica su di una carica in moto con velocità  $\mathbf{v}$  vale zero se  $\mathbf{v}$  è in direzione parallela al campo magnetico. Se invece  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$  differiscono di un angolo  $\theta$  si osserva una forza trasversa di modulo  $F_{\perp} = qvB \sin \theta$ . Questa osservazione è importante, in quanto significa che anche questa nuova forza magnetica (come il resto della fisica) è invariante per rotazioni, ovvero descritta da una formula vettoriale:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (8.1)$$

Ricordiamo che un segno arbitrario può essere definito dalla regola della mano destra: l’indice indica  $\mathbf{v}$ ; il medio indica  $\mathbf{B}$ , il pollice  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Una immediata implicazione è che la forza magnetica non compie lavoro:

$$W_{\text{mag}} = \mathbf{F}_{\text{mag}} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8.2)$$

È interessante discutere come si comporta la forza magnetica sotto una trasformazione galileiana. Come noto ed ovvio a tutti, dati due sistemi di riferimento  $S$  ed  $S'$  in moto relativo uniforme con velocità  $\mathbf{u}$ , le velocità  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  di un punto materiale sono legate da  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ . Quindi le accelerazioni sono uguali,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ . Essendo  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  si ha che la meccanica è invariante per trasformazioni galileiane se le forze soddisfano a  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ .

Può la nuova forza magnetica soddisfare a questa relazione? Apparentemente no, in quanto dipende dalla velocità. Può essere covariante in combinazione con la forza elettrica, se i campi elettromagnetici nei due diversi sistemi di riferimento trasformano come

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} . \quad (8.3)$$

Questo suggerisce un legame profondo fra campi elettrici e magnetici: la loro distinzione è questione di sistemi di riferimento. La combinazione  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}'$  rimane invariante.

Vedremo in seguito che la legge di trasformazione in eq. (8.3) è vera solo nel limite  $u \ll c$  in cui la velocità  $u$  è molto minore della velocità della luce  $c$ . Questo motiva l’interesse nello studio del campo magnetico. Alla fine  $B$  risulterà essere un effetto relativistico soppresso da  $(v/c)^2 \sim 10^{-30}$ , che è facilmente misurabile in quanto la materia è costituita da  $N \sim 10^{30}$  particelle  $e$  e  $p$  di carica opposta: i loro campi elettrici si cancellano, ma gli elettroni fanno moti collettivi dando correnti. Il  $10^{30}$  compensa il  $10^{-30}$ , dando effetti relativistici grossi (e consentendo alla fine di scoprire la relatività dal misurare effetti elettro-magnetici).

La formula di Lorentz definisce le dimensioni MKS del campo magnetico

$$[B] = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} \equiv \text{Tesla} .$$

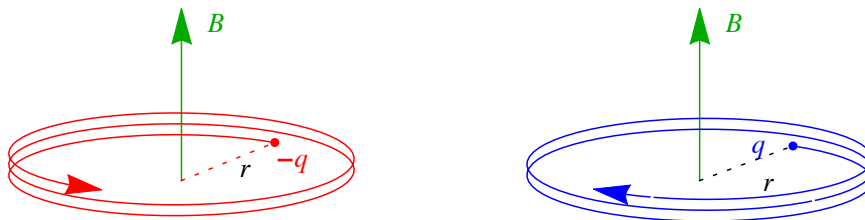
Un campo magnetico di 1 Tesla è ‘grande’, come mostrato dai seguenti esempi:

- Il campo magnetico terrestre vale circa  $B \sim 10^{-4}$  T. Per questo motivo viene usata l’unità di misura Gauss =  $10^{-4}$  Tesla, che però non è unità MKS. Ogni tanto il polo nord magnetico si inverte.
- Una calamita produce  $B \sim 10^{-2}$  T.

- Con la tecnologia si ottengono campi magnetici di intensità massima  $B_{\max} \sim 20 \text{ T}$  (come discuteremo in seguito).
- Una stella di neutroni ruotante, un sistema a densità nucleare invece che atomica, genera campi magnetici molto più intensi, anche  $10^8 \text{ T}$ .
- La nostra galassia contiene un campo magnetico non uniforme e caotico, di tipica intensità  $B \sim 10^{-10} \text{ T}$ .

## 8.2 Moto di carica in campo magnetico costante

Una carica elettrica  $q$  di massa  $m$  in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  costante fa un moto elicoidale, che consiste di un moto a velocità costante  $v_{\parallel}$  lungo  $\mathbf{B}$ , e di un moto circolare con velocità di rotazione  $v_{\perp}$  e raggio  $r$  nel piano perpendicolare al campo magnetico.



Ricordando la formula per l'accelerazione centrifuga si ha  $mv_{\perp}^2/r = qv_{\perp}B$  cioè

$$\boxed{p_{\perp} = r q B} = \frac{\text{J}}{\text{m/s}} \frac{r}{\text{m}} \frac{q}{\text{C}} \frac{B}{\text{Tesla}} = \frac{c}{\text{m/s}} \frac{\text{eV}}{c} \frac{r}{\text{m}} \frac{q}{e} \frac{B}{\text{Tesla}} = 300 \frac{\text{MeV}}{c} \frac{r}{\text{m}} \frac{q}{e} \frac{B}{\text{Tesla}}$$

avendo scritto il numero in termini di unità di misura particellari per  $q$  e per l'impulso  $p$ . Per evitare di fare moltiplicazioni superflue si è usato qualche virtuosismo che può confondere: si è utilizzato Joule = Volt Coulomb = eV Coulomb/e. Il senso di rotazione dipende dal segno di  $q$ . Il periodo vale  $T = 2\pi r/v_{\perp} = 2\pi m/qB$ . La pulsazione vale  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T = qB/m$ .

Tante sono le applicazioni pratiche dei campi magnetici, riassunte in esercizi: misura della massa dell'elettrone, spettrometri, scoperta degli isotopi...

## 8.3 Effetto Hall

Che segno ha la carica  $q_e$  dei portatori di carica? Si muovono nella stessa direzione della corrente  $I$  o in direzione opposta (come avviene in realtà, in quanto per convenzione gli elettroni hanno carica negativa). Hall nel 1879 rispose sperimentalmente a questa domanda sfruttando che la forza magnetica dipende dalla velocità  $v$ .

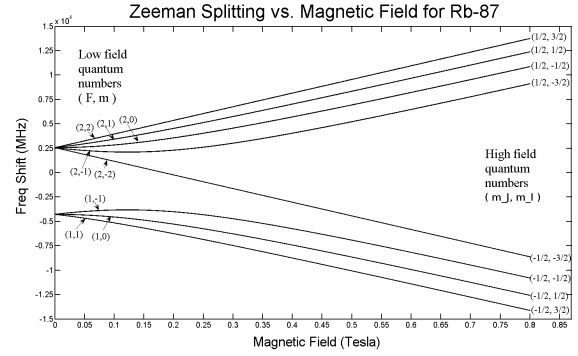
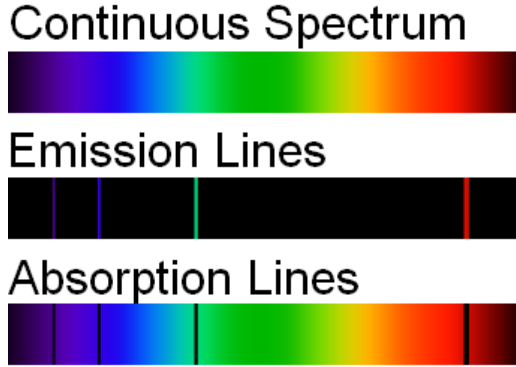


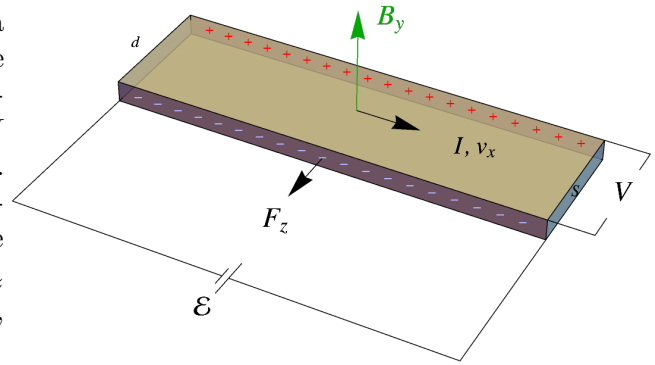
Figura 8.1: *Illustrazione dell'effetto Zeeman.*

Consideriamo un filo conduttore parallelo all'asse  $x$  con portatori di carica di densità numerica  $n$  e velocità  $v_x$ : la corrente vale  $I = nq_e S v_x$ . Immaginiamo che la corrente sia prodotta da una batteria esterna con fem  $\mathcal{E}$ , ed aggiungiamo un campo  $B_y$  ortogonale al filo: i portatori di carica, oltre alla forza elettrica, sentono la forza magnetica  $F_z = q_e v_x B_y \propto I$  che li spinge verso un lato del filo, di spessore  $d$ . Succede una cosa simile a quanto discusso quando trattavamo conduttori all'equilibrio: le cariche si accumulano fino a creare un campo elettrico  $E_z$  tale da schermare la forza *totale* agente su di essi, ovvero tale da compensare la forza magnetica:

$$F_z = q_e(E_z + v_x B_y) = 0.$$

Dopo aver raggiunto questo equilibrio, i portatori di carica riprendono a scorrere lungo l'asse  $x$ . Si ha un nuovo effetto fisico misurabile: una differenza di potenziale  $V = E_z d$  ai capi di spessore  $d$ . Misurandola si ricava  $E_z$  e quindi  $v_x$ . I dati mostrano che  $v_x$  ha segno opposto a  $I$ , cioè che sono elettroni con  $q_e < 0$ . Si misura inoltre che  $v_x$  è piccolo, come atteso.

La piccolezza rende possibile un nuovo esperimento: uno può muovere meccanicamente il filo con velocità opposta a  $v_x$ . In questo modo gli elettroni si comportano come uno che sale una scala mobile al contrario: rimangono fermi. Avendo velocità zero, l'effetto Hall deve sparire, come in effetti si verifica.



## 8.4 Effetto Zeeman

La presenza di un campo magnetico modifica la frequenza con cui gli elettroni ruotano attorno ai nuclei negli atomi. Questo fenomeno è interessante in quanto osservabile: gli elettroni emettono radiazione elettromagnetica alla frequenza di rotazione. Questo ultimo punto viene qui assunto a livello intuitivo, e può essere compreso solo con l'elettromagnetismo quantistico (in una transizione fra due livelli, la frequenza di emissione o assorbimento è la differenza fra le frequenze dei due livelli).

Discutiamo qui il calcolo della frequenza di rotazione, che può essere compresa classicamente. Assumiamo orbite circolari con  $v = \omega r$  nel piano perpendicolare al campo magnetico, e aggiungiamo alla forza di Coulomb la forza magnetica. Essendo entrambe radiali si ha:

$$m_e r \omega^2 = F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + eBv \quad (8.4)$$

Assumiamo  $r$  dato, definiamo la frequenza  $\omega_0 = \sqrt{e^2/4\pi\epsilon_0 r^3 m_e}$  nel caso in cui  $B = 0$ , e ricordiamo la definizione della frequenza di Larmor  $\omega_B \equiv eB/m_e$ . Otteniamo

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega\omega_B} \simeq \omega_0 + \frac{\omega_B}{2}. \quad (8.5)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto che la forza magnetica è tipicamente piccola rispetto alla forza di Coulomb, e fatto una espansione di Taylor al primo ordine, approssimando  $\omega \simeq \omega_0$ . Questo ha semplificato il risultato, in quanto l'incognita  $\omega$  è rimasta solo nel lato sinistro. In prima approssimazione un campo magnetico sposta la frequenza di rotazione della metà della frequenza di Larmor.

Sperimentalmente si osserva che le righe spettrali si spostano in maniera proporzionale a  $B$ , consentendo di misurare  $e/m_e$ . Zeeman e Lorentz ricevettero il Nobel 1902, ma dal valore di  $e/m_e$  non capirono di aver scoperto una particella molto più leggera dell'atomo: l'elettrone.

Si osserva anche che le righe si separano, e da questo si capì che gli elettroni ruotano anche su se stessi: come la Terra attorno al Sole fanno un moto combinato di rivoluzione e rotazione (descritto in meccanica quantistica come 'spin' dell'elettrone).

## 8.5 Forza magnetica su di un filo

Calcoliamo la forza su di un filo percorso da corrente  $I$  in presenza di un campo magnetico  $\mathbf{B}$  sommando le forze sulle singole cariche.

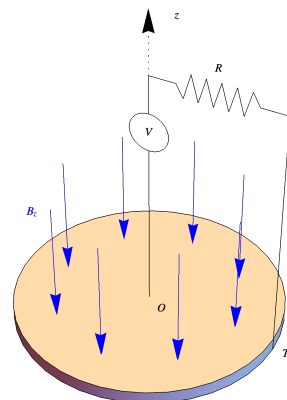
Iniziamo da un caso particolare con geometria semplice: un filo dritto di lunghezza  $L$  e sezione di area  $S$  orientato perpendicolarmente ad un campo magnetico costante. La corrente vale  $I = SJ = Snq_e v$  dove  $n = N/SL$  è la densità in numero degli  $N$  elettroni di conduzione, in moto con velocità  $v$ . La forza magnetica su ciascun elettrone vale  $F = q_e v B$ , quindi la forza magnetica totale vale  $F = NevB = LIB$ . Avendo capito come passare da cariche a correnti, è facile generalizzare la geometria: per un filo di forma generica si ha

$$\mathbf{F} = \int I \, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}. \quad (8.6)$$

avendo dato per convenzione a  $d\mathbf{s}$  il verso della corrente.

Questa forza ha tante applicazioni pratiche, ad esempio:

- L' amperometro: è uno strumento che misura la corrente  $I$ . La misura è ottenuta mettendo il filo in campo magnetico noto e misurando la forza magnetica dal punto di equilibrio fra la forza magnetica e quella di una molla.
- Motori elettrici. Il disegno (e l'esercizio associato) mostra una possibile geometria: il punto non ovvio è ottenere un circuito chiuso mediante un contatto strisciante fra la ruota ed un conduttore fisso. La corrente che passa nella ruota in presenza del campo magnetico provoca un momento delle forze, e quindi un moto rotatorio.
- Generatori di correnti alternate. Mostriamo nella sezioni seguenti come, facendo girare una spira si crea una fem tramite un fenomeno detto 'induzione magnetica'.

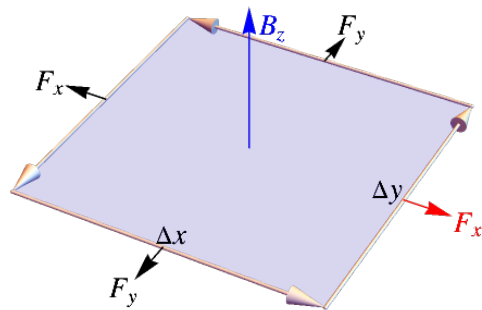




## Induzione magnetica

Iniziamo considerando una geometria semplice: una spira rettangolare di lati  $\Delta x$  e  $\Delta y$  percorsa da una corrente elettrica  $I$  ferma nel piano  $xy$  in presenza di un campo magnetico  $B_z$  ad essa perpendicolare. Su ogni lato della spira, di lunghezza  $L$ , agisce una forza magnetica  $|\mathbf{F}| = |ILB|$  diretta verso l'esterno se  $I$  gira in senso antiorario e se  $B_z > 0$ . La forza magnetica totale vale zero se il campo  $\mathbf{B}$  è uniforme, in quanto si cancellano le forze fra lati opposti. Lo stesso è vero per una forma generale del circuito, in quanto

$$\mathbf{F} = I \left( \oint d\mathbf{s} \right) \times \mathbf{B} = 0$$



Questa forza totale è diversa da zero se il campo magnetico  $B$  non è costante. Ad esempio il campo magnetico e quindi la forza magnetica è più intensa sul lato di un circuito più vicino ad una calamita.

Tornando ad una geometria semplice, riprendiamo il circuito rettangolare nel piano  $xy$  ed assumiamo come esempio di campo magnetico non uniforme un campo uniforme a tratti:

$$B_z(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ B_z & \text{per } x > 0 \end{cases} . \quad (9.1)$$

Assumendo che uno solo dei lati di lunghezza  $\Delta y$  sia nella zona in cui  $B_z \neq 0$ , la forza magnetica totale vale  $F_x = IB_z \Delta y$ . Tale forza vale  $F = 1 \text{ N}$  se  $I = 1 \text{ A}$  e  $\Delta y = 1 \text{ m}$  e  $B = 1 \text{ T}$ . Il campo magnetico terrestre produce piccole forze magnetiche su circuiti in quanto vale  $B \sim 10^{-4} \text{ T}$  ed è circa uniforme.

### 9.1 Spira in moto in campo magnetico

Assumiamo ora che la spira rettangolare nel campo di eq. (9.1) sia in moto lungo l'asse  $x$  con velocità  $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ . La forza magnetica compie lavoro, descritto dalla potenza

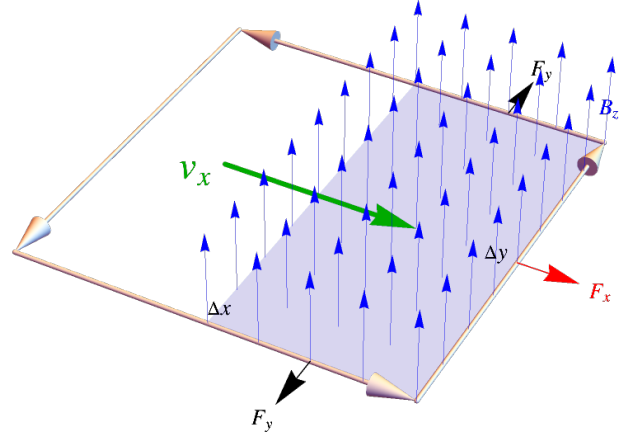
$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = IB_z \Delta y v \neq 0. \quad (9.2)$$

Il fatto che il lavoro sia non nullo appare, a prima vista, paradossale. Infatti abbiamo visto che la forza magnetica non compie lavoro su ogni singola carica che contribuisce alla corrente  $I$ :

$$W_q = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

In eq. (8.6) abbiamo ricavato la forza macroscopica sul filo sommando le forze microscopiche sulle cariche. Come è allora possibile che la forza macroscopica compia lavoro su di un circuito percorso da corrente  $I$ , cioè su tante cariche che girano?

Avendo fiducia nella conservazione dell'energia, uno si aspetta intuitivamente che la risoluzione del paradosso stia nel non aver finora notato qualche altro effetto che compensa il bilancio energetico.



## 9.2 Legge di Faraday-Lenz

Guardando in maggior dettaglio cosa succede, si osserva che ogni  $q$  è soggetta alla forza di Lorentz di modulo  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Nei lati  $\Delta x$  del circuito la forza di Lorentz è trasversa al filo: produce il già discusso effetto Hall, che esiste ma non risolve il paradosso.

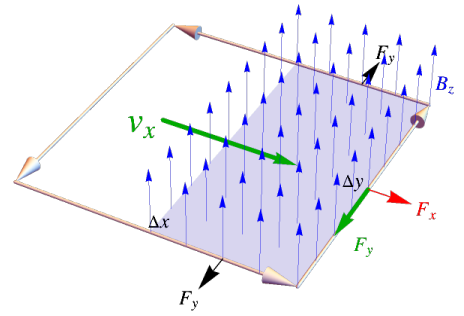
Nel lati  $\Delta y$  del circuito la forza di Lorentz  $F_L$  è *parallela* al filo. Questo significa che tale forza magnetica è una delle forze che possono generare una fem. È come un campo elettrico apparente (o 'effettivo')  $\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  producesse una fem  $q\mathbf{E}_{\text{eff}}$ . Nell'esempio che stiamo considerando (circuito rettangolare in moto con velocità  $v_x$ ) tale effetto è presente solo sul lato nel campo magnetico, e quindi la fem totale vale

$$\mathcal{E} = -v_x \Delta y B_z.$$

Passiamo adesso a considerare un più generale campo magnetico  $B_z(x)$ , la fem è prodotta sui due lati  $\Delta y$  e si cancella se il campo magnetico è uniforme: sommando sui due lati, la fem totale è proporzionale alla differenza nel valore di  $B_z$  sui due lati:

$$\mathcal{E} = -v_x \Delta y [B_z(x + \Delta x) - B_z(x)]. \quad (9.3)$$

Notare che, come la apparentemente paradossale forza meccanica, questo nuovo effetto è presente solo se il campo magnetico non è uniforme: possiamo quindi sperare che risolva il paradosso.



Considerando un circuito di forma magnetica in un campo magnetico generico, la formula generale per questo nuovo effetto è detta legge di Faraday-Lenz:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (9.4)$$

dove  $\Phi_B$  è il flusso di  $B$  attraverso la spira (misurato in Wb, Weber). Si può dimostrare la legge di Faraday decomponendo un circuito generico in rettangolini infinitesimi di lati  $\Delta y$  e  $\Delta x$ , verificando che si riduce alla formula in eq. (9.3). Oppure è possibile dimostrarla notando che, quando in un tempo  $dt$  il circuito effettua un piccolo spostamento, la differenza di flusso (detta ‘flusso tagliato’) soddisfa a  $\Phi_B(t+dt) - \Phi_B(t) + d\Phi_B^{\text{cut}} = 0$  ed è calcolabile come

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{\text{eff}} \cdot d\mathbf{s} = \oint \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \oint \underbrace{(d\mathbf{s} \times d\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}}_{dS B_{\perp}} = \frac{d}{dt} \int d\Phi_B^{\text{cut}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Il segno meno in  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$  (attribuito a Lenz) è importante in quanto ristabilisce la conservazione dell’energia.

- La forza meccanica discussa in precedenza produce una potenza meccanica

$$W_{\text{mecc}} = Fv = vILB.$$

- La fem genera una corrente  $I$ : la potenza elettrica in generale vale

$$W_{\text{el}} = \mathcal{E}I = -vILB.$$

(Questa formula può essere troppo astratta: vari esercizi mostrano come applicarla in pratica. Ad esempio per un circuito che contiene solo una resistenza  $R$  si ha  $I = \mathcal{E}/R$  che dissipa potenza elettrica  $W_{\text{el}} = -W_R = -I^2 R$ : l’energia si conserva in quanto la forza magnetica è opposta alla direzione della velocità della spira  $\mathbf{v}$ ).

Le due potenze sono uguali: tenendo in conto il loro segno corretto si ottiene che *l’energia si trasforma*

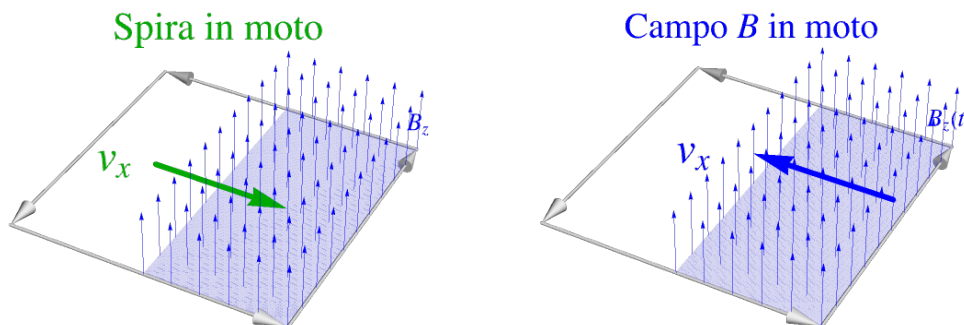
$$\text{energia meccanica} \quad \leftrightarrow \quad \text{energia elettrica}$$

L’energia spesa per spingere una spira in un campo magnetico diventa energia elettrica del circuito (così funzionano le centrali elettriche). Oppure l’energia elettrica può venire usata per far muovere un circuito (così funzionano i motori elettrici).

### 9.3 Legge di Faraday e relatività

La risoluzione dell’apparente paradosso genera una nuova domanda fondamentale. La potenza meccanica dipende dal sistema di riferimento. Supponiamo di andare nel sistema di riferimento rispetto al quale la spira è ferma (ovvero, in termini più fisici, supponiamo di muovere il magnete e tenere ferma la spira). Siccome  $\mathbf{v} = 0$ , secondo le equazioni attuali, non dovrebbe esserci nessuna forza di Lorentz  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  sulle cariche, e quindi dovrebbe sparire la fem  $\mathcal{E}$ .

Si avrebbe un nuovo paradosso, in quanto è lo stesso esperimento visto da due osservatori in moto relativo:



- L'osservatore solidale al campo magnetico misura fem  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ .
- L'osservatore solidale alla spira vedrebbe  $\mathcal{E} = 0$  secondo le equazioni attuali.

Se così fosse, sarebbe violato il *principio di relatività*, secondo cui osservatori in moto relativo uniforme osservano la stessa fisica (ovvero, le leggi della fisica sono covarianti rispetto a cambiamenti di sistemi di riferimento).

Effettuando l'esperimento, si osserva che la natura rispetta il principio di relatività: si osserva che *in tutti i casi si ha* la fem descritta dalla legge di Faraday. Quando la spira è in moto in un campo magnetico costante, la legge di Faraday è una conseguenza della forza di Lorentz,  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , come abbiamo dimostrato in precedenza.

Ma ora l'esperimento dice che la legge di Faraday ha validità più generale: lo stesso effetto è presente anche quando il circuito è fermo ed il campo magnetico  $\mathbf{B}$  dipende dal tempo. Siccome in questo caso la legge di Faraday non segue da nessuna delle equazioni fondamentali viste fino ad ora, occorre modificare le equazioni fondamentali. Riassumendo:

- Per un circuito in moto in un campo magnetico non uniforme nello spazio e costante nel tempo, la forza magnetica genera una fem  $\mathcal{E}$  **come se** ci fosse un campo elettrico effettivo  $\mathbf{E}$ .
- Per un circuito fermo in un campo magnetico che dipende dal tempo, una possibile interpretazione (che è quella corretta) è che esiste un campo elettrico rotazionale  $\mathbf{E}$ . una roba mai vista prima.

## 9.4 Seconda equazione di Maxwell

Passiamo a descriverlo matematicamente, modificando la 2a equazione di Maxwell ed ottenendo la sua forma definitiva. Per arrivarci combiniamo i seguenti tre elementi:

- esperimento: la legge di Faraday,  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -\int \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n} dS$ ,
- interpretazione: un vero campo elettrico  $\mathbf{E}$  produce la fem,  $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ ,
- matematica: il teorema del rotore  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS$ .

Si ottiene quindi che il campo elettrico ha un rotore, dato da  $-\dot{\mathbf{B}}$ :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Ovvero il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è irrotazionale solo quando  $\mathbf{B}$  non dipende da  $t$ . Quindi, in generale non è più possibile scrivere  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . Niente panico: alla fine del corso il potenziale scalare  $\varphi$  risorgerà in una generalizzazione in cui compare anche un potenziale vettore  $\mathbf{A}$ .

Nella formulazione attuale, la legge di Faraday è una legge derivata in maniera ibrida: è conseguenza di due equazioni fondamentali diverse: la forza di Lorentz e la 2a equazione di Maxwell. Può sembrare strano, e indica che la forma finale delle equazioni di Maxwell conterrà una simmetria inattesa per ora non apparente: la relatività.

Quando discuteremo la generazione di campi magnetici vedremo che il segno  $-$  nella legge di Faraday è tale che la fem indotta genera una  $I$  che genera un  $B$  che si oppone alla variazione  $\dot{\Phi}_B$  del suo flusso; e.g. per una spira in moto tende a frenare.

È possibile ripetere gli stessi conti per una spira che ruota in un campo magnetico costante: questa geometria più complicata è quella che viene utilizzata in pratica per trasformare il moto rotatorio in corrente elettrica alternata.

# Capitolo 10

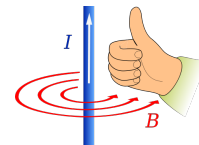
## Generazione di campi magnetici

I campi magnetici sono generati da correnti elettriche, come scoperto da Orsted. Si racconta che nel 1820 Hans-Christian Orsted insegnava elettrostatica all'università di Copenaghen. Durante una dimostrazione dell'effetto Joule, in cui una corrente elettrica riscaldava un filo, per caso una bussola magnetica era vicino al filo. Orsted notò che la bussola si muoveva quando veniva accesa la corrente. Ne fu magnetizzato. Pare che non sia vero, e che Orsted sia arrivato alla scoperta facendo ricerche dedicate. Comunque sia, facendo esperimenti si misura che:

- Un filo rettilineo infinito percorso da una corrente  $I$  genera un campo magnetico rotazionale dato da

$$B_\theta = \mu_0 I / 2\pi r$$

Il verso è dato dalla 'regola della mano destra'.



- Una spira circolare genera nel suo centro un campo magnetico parallelo al suo asse e dato da  $B_\perp = \mu_0 I / 2a$ .

La costante  $\mu_0$  è detta 'permeabilità magnetica del vuoto' e vale

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad \text{avendo usato Tesla} = \text{N/A} \cdot \text{m}$$

$\mu_0$  ha un valore arbitrario (che avrebbe potuto essere più semplice) in quanto dal 1948 il sistema MKSC definisce Colomb  $\equiv$  Ampere secondo e l'Ampere come: *'due fili infiniti paralleli a distanza di 1 m sono percorsi da 1 A se la forza fra di loro vale  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton/metro'*. In base alla formula in eq. (8.6) la forza magnetica fra due fili paralleli è radiale con modulo  $F/L = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi d$  per unità di lunghezza. Si osserva che è attrattiva se le correnti sono concordi.

### 10.1 Formula integrale per $B$

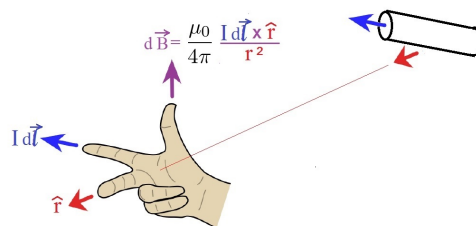
Assumendo che la fisica è invariante per rotazioni, queste due misure del campo magnetico generato con geometrie semplici bastano per dedurre la formula generale, detta di Biot-Savart. Una densità di

corrente  $\mathbf{J}$  genera

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Nel caso particolare di una corrente  $I = JS$  in un filo o di una carica  $q$  situata in  $\mathbf{r}'$ , la formula si riduce a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$



Verifichiamo tramite integrazione esplicita che nelle due geometrie semplici la formula di Biot-Savart riproduce il campo magnetico osservato. Inoltre, dato un percorso arbitrario definiamo la circuitazione del campo magnetico come  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  e la calcoliamo per le geometrie semplici.

1. Un filo infinito rettilineo percorso da corrente  $I$  genera

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\sin \theta}{d^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} \stackrel{?}{=} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

in accordo con la misura. La circuitazione vale quindi  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$  lungo una circonferenza di raggio  $r$  arbitrario centrata sul filo.

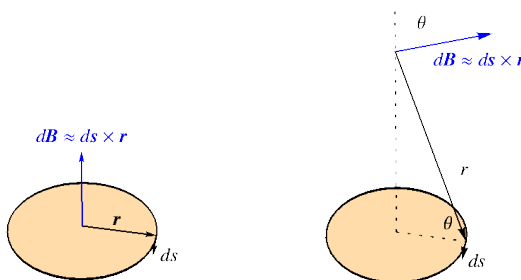
2. Il campo magnetico nel centro di una spira circolare di raggio  $a$  vale

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi a}{a^2} \stackrel{?}{=} \frac{\mu_0 I}{2a}$$

Più in generale, il campo magnetico  $B_z(z)$  lungo l'asse di una spira circolare di raggio  $a$  nel piano  $xy$  vale

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi a}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

dove  $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$  forma un angolo  $\theta$  con l'asse  $z$ .



La circuitazione lungo l'asse (un cerchio di raggio infinito) vale

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz B_z = \mu_0 I.$$

In entrambi i casi la circuitazione vale  $\mu_0 I$ : si inizia a sospettare una legge generale per la circuitazione.

## 10.2 Disco di Rowland

In base alla legge di Biot-Savart una corrente genera un campo magnetico. La legge è stata scoperta usando correnti generate da batteria. Nasce quindi la domanda: la legge si applica allo stesso modo anche quando la corrente è generata dal moto *meccanico* di cariche?

Rispondere in maniera sperimentale non è stato immediato. Infatti, una carica  $Q \sim C$  su un condensatore che gira 1 volta al secondo genera  $I = 1 A$ , che genera  $B \sim \mu_0 I / r \sim 10^{-7} T$  a  $r \sim m$ . Ma genera anche un enorme campo elettrico

$$E \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim 10^{11} \frac{V}{m}$$

ed una enorme forza elettrica

$$F \sim QE \sim 10^{11}$$

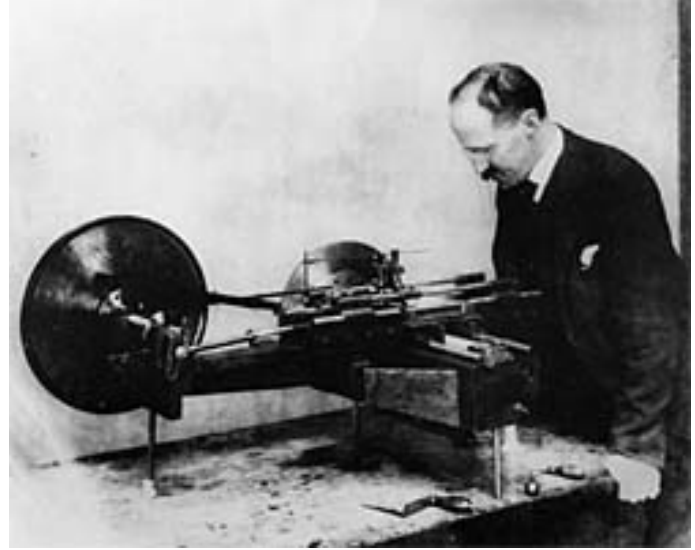
che distruggono il condensatore e ionizzano l'aria.

Per evitarlo Rowland nel 1878 usò una più piccola carica  $Q \sim 10^{-6} C$  facendola girare più rapidamente  $\nu \sim 100 Hz$ . Questo produce a  $d \sim 0.1 m$

$$B \sim 10^{-10} T \quad E \sim 10^5 \frac{V}{m}.$$

Schermando  $\mathbf{E}$  tramite un conduttore, Rowland riuscì a rivelare  $B(t)$  nonostante il  $B$  terrestre  $10^5$  volte maggiore.

L'esercizio su fili carichi in moto con velocità  $v$  comune realizza con una geometria ideale semplice una situazione simile a quella studiata da Rowland, e mostra che la forza magnetica è una correzione relativistica alla forza elettrica.



## 10.3 III e IV equazione di Maxwell (per ora)

Si vuole passare dall'equazione integrale di Biot-Savart al suo equivalente differenziale. Come nel caso elettrico questo è utile in quanto le equazioni differenziali sono le più semplici possibili. Avendo capito che la sorgente di  $\mathbf{B}$  è  $\propto \mathbf{J}$ , le uniche equazioni semplici invarianti per rotazioni sono

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} \propto \mathbf{J}.$$

- La divergenza del campo magnetico vale zero (3a equazione di Maxwell) in quanto nessuno ha mai scoperto cariche magnetiche  $q_m$  da cui uscirebbero le linee del campo magnetico  $\mathbf{B}$ : in tutti i casi osservati le linee del campo magnetico 'girano' senza uscire da sorgenti.
- L'equazione giusta sembra essere  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  in quanto, in base al teorema di Stokes implica che la circuitazione del campo magnetico vale

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{concatenata}} \quad \text{dove} \quad I_{\text{concatenata}} = \Phi_J = \sum I_i$$



in accordo con i due esempi. Questo analogo magnetico del teorema di Gauss è detto **legge di Ampere**. Consente di calcolare rapidamente il campo magnetico generato da un solenoide rettilineo o circolare.

Per verificare che/se  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  equivale davvero alla formula di Biot-Savart, procediamo con il calcolo esplicito applicando il rotore al campo magnetico di Biot-Savart. In notazione semplificata ma imprecisa esso è dato da:  $\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi) \int dV \mathbf{J} \times \mathbf{r}/r^3$ . Facendo quindi attenzione al fatto che il rotore va a derivare sia  $\mathbf{J}$  che il raggio vettore si ottengono due termini, che è possibile scrivere in notazione vettoriale usando identità fra vettori:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \nabla \times \left( \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \left[ \mathbf{J}(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) - \frac{\mathbf{r}}{r^3}(\nabla \cdot \mathbf{J}) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV [\mathbf{J}4\pi\delta(\mathbf{r}) - \dots \nabla \cdot \mathbf{J}] = \mu_0 \mathbf{J} + \dots \nabla \cdot \mathbf{J} \stackrel{?}{=} \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}$$

Si può dimostrare (usando  $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = -\nabla^2(1/r) = 4\pi\delta(\mathbf{r})$ ) che il primo termine da solo produce il risultato desiderato. La cosa interessante è la presenza del secondo termine, indesiderato. Quindi qualcosa non torna. Il termine  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  vale zero nel limite statico, quindi ha poco effetto, e possiamo procedere rimandando la comprensione di questo problema a quando si risolverà da solo (in fisica è spesso produttivo procedere in questo modo: quando si ha una teoria sbagliata ma vicina abbastanza a quella giusta siamo ormai nel bacino di attrazione della teoria giusta: andando avanti a fare misure prima o poi si arriva al punto). Le equazioni verranno corrette nel capitolo 14.

## 10.4 Riassunto (finora)

Se il corso finisse qui, sarebbe riassunto dalle seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{lll} 1) & \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \Rightarrow \Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0 \\ 2) & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \Rightarrow \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B \\ 3) & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \Rightarrow \Phi_B = 0 \\ 4) & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} & \Rightarrow \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{conc}} \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 & \Rightarrow \dot{Q}_{\text{in}} + \Phi_J = 0 \\ & q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F} & \end{array} \right.$$

È interessante chiedersi: quali sono le simmetrie dell'elettromagnetismo. Se le equazioni fossero quelle attuali, avrebbero le seguenti simmetrie:

1. **Rotazioni**, rese esplicite dall'aver scritto le equazioni in notazione vettoriale. In linguaggio matematico le rotazioni in 3 dimensioni formano il gruppo detto SO(3).
2. **Parità**. La parità è quell'operazione matematica che riflette tutte le coordinate:

$$\mathbf{r} \xrightarrow{P} -\mathbf{r} \quad \nabla \xrightarrow{P} -\nabla.$$

La parità P è moralmente simile alla più intuitiva riflessione da uno specchio, che inverte solo la coordinata perpendicolare. La parità è meno intuitiva ma matematicamente più semplice,

in quanto agisce in maniera uguale su ogni coordinate, rendendo esplicito che è invariante per rotazioni.

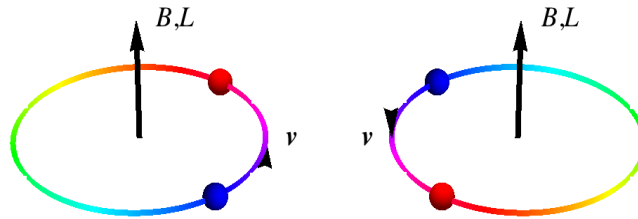
Le equazioni di elettricità e magnetismo sono invarianti sotto parità in maniera non ovvia:  $\mathbf{E} \xrightarrow{P} -\mathbf{E}$  si riflette come fanno vettori ordinari tipo la velocità  $\mathbf{v}$  o la densità di corrente  $\mathbf{J}$  (data dalla velocità media delle cariche elettriche). Viceversa le equazioni sono invarianti se il campo magnetico non si riflette

$$\mathbf{B} \xrightarrow{P} +\mathbf{B}$$

ed è per questo detto *pseudo-vettore*. Un esempio più noto di pseudo-vettore è il momento angolare  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \xrightarrow{P} (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}) = +\mathbf{L}.$$

Sia  $\mathbf{L}$  che  $\mathbf{B}$  compaiono in equazioni che contengono il prodotto vettoriale, entrambi hanno qualcosa a che fare con le rotazioni, ed in entrambi i casi è possibile vedere in maniera intuitiva che sono pseudo-vettori disegnando come un oggetto ruotante si trasforma sotto parità: l'oggetto continua a girare nella stessa direzione, e la corrente a circolare nella stessa direzione:



La densità di carica elettrica  $\rho$  è uno scalare. La densità di carica magnetica  $\rho_m$  (se esistesse) sarebbe uno pseudo-scalare, il cui segno si inverte sotto riflessione.

3. Per concludere la discussione delle simmetrie, le equazioni attuali dell'elettromagnetismo non sono invarianti sotto trasformazioni di **Galileo**. Ad esempio, uno potrebbe provare a definire le trasformazioni di Galileo come

$$\rho \rightarrow \rho, \quad \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J} + \rho \mathbf{v}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ma le equazioni 1), 2) e 4) non sarebbero invarianti.

Vedremo in seguito che le equazioni di Maxwell finali saranno invarianti sotto una simmetria simile a quella Galileiana ma più profonda: la relatività.

# Dipolo magnetico

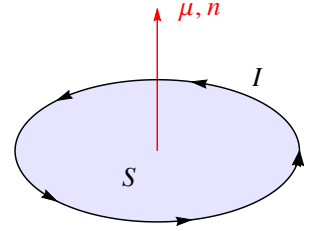
## 11.1 Introduzione

Dimostreremo le seguenti formule: una piccola spira piana di superficie  $S$  percorsa da corrente  $I$  è approssimabile come **dipolo magnetico** di momento

$$\boldsymbol{\mu} = IS\mathbf{n} \quad (11.1)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale alla spira. Il dipolo magnetico di un più generale oggetto piccolo (anche una densità di corrente  $\mathbf{J}$  in un volume) è dato dalla formula più generale, raramente usata:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int dV \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = I \int dS \mathbf{n} \simeq IS\mathbf{n}.$$



Il primo passaggio specializza al caso speciale di una corrente  $I$  (ad esempio una spira non piana), ed il passaggio finale mostra che nel limite di spira piana si riottiene  $\boldsymbol{\mu} = IS\mathbf{n}$ .

L'unità di misura del momento di dipolo magnetico è  $\text{A} \cdot \text{m}^2 = \text{J/T}$ . Ma a che serve il dipolo magnetico? L'approssimazione di dipolo magnetico consente di calcolare:

- La forza magnetica su di un dipolo in campo magnetico esterno, che vale

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (11.2)$$

dove  $U$  è l'energia magnetica di un dipolo in un campo esterno.

- Il momento delle forze magnetiche su di un dipolo:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (11.3)$$

- Un dipolo magnetico genera il seguente campo magnetico:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \right]$$

Si osservi che le formule (ancora da dimostrare) per **dipoli magnetici** sono molto simile alle formule già ricavate per **dipoli elettrici**:

$\mathbf{p} \simeq q\mathbf{d}$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{\mu} \simeq IS\mathbf{n}$
$\mathbf{p} = \int dV \mathbf{r} \rho$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{\mu} = \int dV \mathbf{r} \times \mathbf{J}/2$
$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$	$\leftrightarrow$	$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$
$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$
$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]$	$\leftrightarrow$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \right]$

Il motivo generale della similitudine è che un dipolo è un oggetto ideale, presente solo in un punto. Nel vuoto  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  soddisfano alla stessa equazione: zero divergenza e zero rotore. Quindi hanno la stesse soluzioni, approssimabili con la stessa espansione in potenze di  $d/R$ : monopolo, dipolo, quadrupolo...

Nel caso elettrico il dipolo elettrico è importante per i sistemi con carica elettrica totale uguale a zero. Nel caso magnetico questo è sempre vero, in quanto non esistono cariche magnetiche.

Se esistessero cariche magnetiche si potrebbe ottenere un dipolo magnetico in maniera identica al dipolo magnetico, ponendo due cariche opposte a piccola distanza. Siccome non esistono, il dipolo magnetico più semplice è una piccola spira, ovvero un oggetto più complicato da calcolare.

Tutte le formule possono essere dimostrate in maniera diretta, ma i calcoli necessari sono pesanti e poco illuminanti. Vale quindi la pena di iniziare a fare ‘dimostrazioni per esempio’, ovvero verificare che le formule generali funzionano nei casi speciali più semplici.

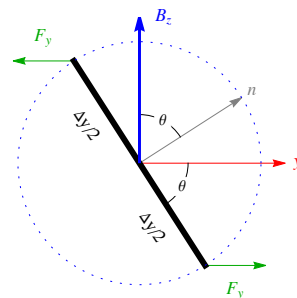
## 11.2 Momento delle forze su di un dipolo magnetico: esempio

Iniziamo a verificare la formula in eq. (11.3) per il momento delle forze su di un dipolo magnetico. Avevamo già calcolato il momento delle forze sulla spira  $\Delta x \Delta y$  di pag. ?? . Esso valeva

$$M_x = F_y \Delta y \sin \theta = B_z IS \sin \theta, \quad \text{dove} \quad F_y = \Delta x IB_z$$

La figura mostra che  $\theta$  è anche l'angolo fra  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$  e  $\boldsymbol{\mu} = IS\mathbf{n}$  dove  $\mathbf{n} = (0, \sin \theta, \cos \theta)$  è la normale alla spira. Abbiamo quindi verificato che

$$M_x = \mu_y B_z, \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (11.4)$$



Se uno ricorda da fisica 1 la connessione  $M = -\partial U / \partial \theta$  fra momento delle forze  $M$  ed energia potenziale  $U$ , possiamo da  $M$  ricavare  $U = -\mu B \cos \theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ .

Due applicazioni di queste formule sono

- **La bussola.** L'energia magnetica è minima quando  $\boldsymbol{\mu}$  è parallelo a  $\mathbf{B}$ . Quindi un ago magnetico  $\boldsymbol{\mu}$  nel campo magnetico terrestre farà un moto complicato (descritto dal momento delle forze), che grazie a qualche attrito raggiungerà alla fine lo stato di energia minima, in cui l'ago è allineato al campo magnetico.

- **La levitazione magnetica.** La figura mostra una spira (in basso) ed un dipolo magnetico (il disco). Si osserva che il disco può volteggiare sopra la spira, vincendo la forza di gravità. Il sasso serve solo per spettacolarizzare. Questo succede utilizzando l'energia magnetica  $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$ . Se il dipolo è libero di ruotare  $\boldsymbol{\mu}$  si allinea a  $\boldsymbol{B}$  e scende venendo attratto da  $B$  intensi, cioè dalla spira. Se invece il dipolo magnetico è mantenuto anti-parallelo a  $\boldsymbol{B}$  (ad esempio se il disco ruota su se stesso la conservazione del momento angolare  $\boldsymbol{L} \propto \boldsymbol{\mu}$  gli impedisce di ribaltarsi, un fenomeno di fisica 1), allora la forza magnetica ha segno opposto, e viene respinto da campi  $B$  intensi.




# Induttori ed energia magnetica

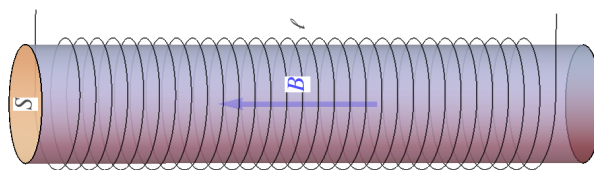
Abbiamo ricavato la legge di Lenz  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$  studiando un circuito in campo magnetico esterno, ma la legge si applica anche al  $\mathbf{B}$  che un circuito induce su se stesso. Questo nuovo aspetto del fenomeno dell'induzione è detto **auto-induzione**, e si denota con il termine **induttore** un circuito in cui questo fenomeno è rilevante.

Un induttore è l'analogo magnetico di un condensatore: un dispositivo che immagazzina un campo magnetico e la sua energia. Analogamente alla capacità  $C \equiv Q/V$  definiamo il coefficiente di l'auto-induttanza  $L$  come  $1/L = I/\Phi_B$  cioè  $\Phi_B = LI$ . L'unità di misura di  $L$  è T m<sup>2</sup>/A, detto Henry ed il suo valore dipende solo dalla geometria.

Ai capi di una induttanza con valore  $L$  costante (quindi un oggetto rigido) si ha una differenza di potenziale  $\mathcal{E}_L = -\dot{\Phi}_B = -L\dot{I}$ . Se  $L$  varia nel tempo la differenza di potenziale vale  $-L\dot{I} - \dot{L}I$ .

Una spira circolare genera un campo magnetico complicato:  $L$  dipende dallo spessore del filo.

Viceversa un solenoide di lunghezza  $\ell$  ed area  $S \ll \ell^2$  (in maniera da poter trascurare gli effetti ai suoi bordi) genera un campo magnetico costante e grosso in presenza di  $N = n\ell \gg 1$  spire. Per questo motivo il simbolo circuitale di un induttore è 

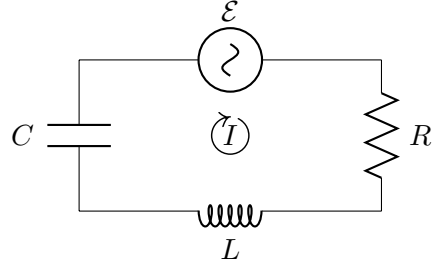


Usando il teorema di Ampere lungo in circuito immaginario rettangolare con un lato parallelo all'asse e posizionato a distanza arbitraria, si trova che il campo magnetico in un punto generico dentro un solenoide vale  $B = \mu_0 n I$ . L'induttanza di un solenoide cresce come il quadrato del numero  $N$  di spire, in quanto sia l'area che il campo magnetico crescono linearmente:

$$L \equiv \frac{\Phi_B}{I} = \frac{NSB}{I} = \frac{\mu_0 SN^2}{\ell} = \mu_0 S \ell n^2.$$

Siccome  $\mathcal{E}_L$  è generato dal secondo termine della 2a equazione di Maxwell,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ , un induttanza contribuisce come una batteria all'equazione di un circuito  $RLC$ :

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_C \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = L\dot{I} + RI + Q/C$$



L'equazione di un circuito  $RLC$  è formalmente analoga all'equazione del moto di un oscillatore smorzato:

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = F_{\text{ext}} \quad \text{analogo a} \quad L\ddot{Q} + Q/C + R\dot{Q} = \mathcal{E}.$$

Inoltre, le equazioni di circuiti  $RC$  ed  $RL$  sono formalmente analoghe fra di loro

- Un circuito  $RC$  è descritto dall'equazione  $\mathcal{E} = R\dot{Q} + Q/C$ . Ad esempio, la soluzione in cui il circuito si carica partendo da  $Q(0) = 0$  è  $Q(t) = (C\mathcal{E})[1 - e^{-t/\tau}]$  dove la costante tempo vale  $\tau = RC$ . Avevamo visto che questo significava che il circuito ha energia elettrica  $U_E = Q^2/2C$
- Un circuito  $RL$  è descritto dall'equazione  $\mathcal{E} = L\dot{I} + RI$  che è equivalente a quella di un circuito  $RC$  facendo le sostituzioni

$$\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}, \quad Q \leftrightarrow I, \quad R \leftrightarrow L, \quad 1/C \leftrightarrow R. \quad (12.1)$$

Si hanno quindi le stesse soluzioni: assumendo di partire da  $I(0) = 0$  il circuito  $RL$  si carica come  $I(t) = (\mathcal{E}/R)[1 - e^{-t/\tau}]$  con costante tempo  $\tau = L/R$ . Il fatto che ci voglia tempo per carica o scarica indica che l'induttanza contiene **energia magnetica** associata alla corrente  $I$ .

## 12.1 Energia magnetica

Ricaviamo la formula per l'energia magnetica  $U_B$  in una induttanza. Si utilizza la formula generale  $W = \mathcal{E}I$  per la potenza di un generico elemento di circuito, e la si specializza al caso di un'induttanza  $\mathcal{E} = -LI$ , ricordando come l'energia è legata alla potenza:

$$\frac{dU_B}{dt} = -W = -\mathcal{E}I = LI\dot{I} = \frac{d}{dt} \frac{LI^2}{2} \quad \boxed{U_B = \frac{LI^2}{2}}.$$

Similmente a come un condensatore piano contiene campo elettrico uniforme, suggerendo la formula universale  $u_E = \epsilon_0 E^2/2$  per la densità di energia del campo elettrico, un solenoide contiene un campo magnetico uniforme, e suggerisce la seguente possibile formula universale per la densità di energia del campo magnetico:

$$u_B = \frac{U_B}{V} = \frac{LI^2/2}{S\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

A pag. ?? dimostreremo il seguente risultato generale: la densità di energia elettromagnetica in presenza di  $E$  e  $B$  vale

$$\boxed{u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}.$$

Una prima conseguenza di questa formula è ricavare il massimo campo magnetico ottenibile tramite materiali costituiti da atomi. Imponendo  $u_B \lesssim u_E$ , ovvero che la densità di energia magnetica non ecceda quella elettrica degli atomi (altrimenti gli atomi si ‘spezzano’) si ottiene

$$B \lesssim \frac{E_{\text{atomo}}}{c} \sim \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c \text{\AA}^2} \sim 1000 \text{ T}.$$

In pratica si raggiungono campi magnetici di 40 T, tramite solenoidi con tante spire e correnti  $I$  intense. Aumentando troppo  $I$  aumenta la forza magnetica sulle spire, fino a quando il solenoide si spezza. Questo fenomeno di fisica della materia è l’equivalente macroscopico della rozza stima fatta a livello di atomi.

Una tipica induttanza vale  $L \sim \mu_0 \cdot \text{m} \sim 10^{-6} \text{ mT/A}$ : anche se percorsa da una ‘grossa’ corrente  $I = 1 \text{ A}$ , la sua energia è ‘piccola’:  $U = 10^{-6} \text{ J}$ . Questa energia è quella che provoca piccole scintille quando un interruttore viene aperto o chiuso. Per immagazzinare energia bisogna far circolare una corrente  $I$ : questo non è conveniente in quanto implica che l’energia viene dissipata da resistenze inevitabilmente presenti. Per immagazzinare energia è molto meglio utilizzare un condensatore che un’induttanza. L’induttanza un diverso uso pratico: il trasformatore possibile grazie alla mutua induzione.

## 12.2 Mutua induzione

Consideriamo due circuiti. Anche se sono distanziati, il magnetismo accoppia le equazioni che li descrivono, in quanto il circuito 1 produce un campo magnetico  $B_1$  che genera un flusso  $\Phi_2(B_1)$  attraverso il circuito 2, e quindi la fem  $\mathcal{E}_2 = -\dot{\Phi}_2(B_1)$  descritta dalla legge di Faraday-Lenz. Conviene descrivere questo fenomeno mediante una matrice di induttanze  $L_{ij}$ , che dipendono solo dalla geometria:

$$-\mathcal{E}_1 = \dot{\Phi}_1 = L_{11}\dot{I}_1 + L_{12}\dot{I}_2, \quad -\mathcal{E}_2 = \dot{\Phi}_2 = L_{22}\dot{I}_2 + L_{21}\dot{I}_1.$$

Quando discuteremo il ferromagnetismo, vedremo che un limite semplice di queste equazioni descrive il *trasformatore*, ovvero un oggetto in cui viene inserita una fem alternata in un circuito ‘primario’, e che genera una fem di valore diverso in un circuito ‘secondario’.

In generale, *la matrice delle induttanze è simmetrica*, ad esempio  $L_{12} = L_{21}$ . Lo si può dimostrare indirettamente utilizzando la conservazione dell’energia similmente a come fatto con la matrice delle capacità, o direttamente tramite i seguenti passaggi, che portano ad una formula utile:

$$\begin{aligned} L_{12} &\equiv \frac{\Phi_{1,B_2}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \oint d\mathbf{s}_2 \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \oint d\mathbf{s}_2 \times \nabla \frac{1}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot (\nabla \times \oint \frac{d\mathbf{s}_2}{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r} = L_{21}. \end{aligned}$$

Nel primo passaggio abbiamo inserito (in notazione semplificata) il campo magnetico dato dalla formula di Biot-Savart; nel secondo passaggio abbiamo utilizzato  $-\mathbf{r}/r^2 = \nabla(1/r)$ ; nel terzo utilizzato la ciclicità del prodotto misto vettore-scalare fra 3 vettori, nel passaggio finale il teorema del rotore, arrivando ad una formula esplicitamente simmetrica.

Essendo la matrice  $L_{ij}$  simmetrica, i suoi elementi vengono solitamente riscritti in una notazione più breve:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}. \quad (12.2)$$



La simmetria implica risultati non ovvi: si veda ad esempio l'esercizio sul calcolo dell'induzione su di una spira di raggio  $a$  di un dipolo  $\boldsymbol{\mu}$  situato nel centro della spira. Vedendo il dipolo come una spira infinitesima  $\boldsymbol{\mu} = si$ , ed utilizzando la formula per il campo magnetico generato da una spira circolare, il dipolo 'riceve' flusso  $M = \Phi_s/I = \mu_0 s \cos \theta / 2a$  e quindi produce  $\Phi_S = Mi = \mu_0 \mu \cos \theta / 2a$ . Si veda l'esercizio su induttanze in serie e parallelo

La matrice delle induttanze consente anche di generalizzare la formula  $U_B = \frac{1}{2}LI^2$  per l'energia magnetica di un singolo circuito, ad un sistema di circuiti. Si ha

$$U_B = \frac{1}{2} \sum L_{ij} I_i I_j .$$

Infatti  $\dot{U}_B = -W = -\sum_i \mathcal{E}_i I_i = \sum_{ij} L_{ij} \dot{I}_j I_i$ .

Come mostrato negli esercizi, è possibile mostrare che due induttanze in serie ed in parallelo sono equivalenti ad una singola induttanza di valore

$$L = L_1 + L_2 + 2M, \quad L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}. \quad (12.3)$$

Il fatto che  $L \geq 0$  (positività dell'energia magnetica) implica che il massimo valore delle mutua induttanza è  $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ .

## 12.3 Forza magnetica dall'energia

La formula per l'energia magnetica consente di ricavare una formula per la forza magnetica fra circuiti. In generale si ha  $\mathbf{F} = -\nabla U$  in assenza di oggetti che producono energia, complicando il bilancio energetico. Nel caso elettrico tali oggetti sono generatori.

La dimostrazione procede in maniera simile a quella già fatto nel caso elettrico, che qui riassumiamo:

- Nel caso elettrico si aveva

$$Q = CV \quad U = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{V^2}{2} \nabla C, \quad \text{e.g.} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Variando la geometria in assenza di generatori,  $Q$  rimane costante mentre  $V$  varia con la geometria. Quindi  $F$  vuole aumentare  $C$ . Vuole ridurre la distanza  $d$  fra i piatti di un condensatore piano. Infatti cariche opposte si attraggono.

- Nel caso magnetico si hanno formule analoghe:

$$\Phi = LI \quad U = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \frac{I^2}{2} \nabla L \quad \text{e.g.} \quad L = \mu_0 N^2 \frac{S}{d}. \quad (12.4)$$

Variando la geometria in assenza di generatori e resistenze,  $I$  varia in maniera da mantenere  $\Phi$  costante. Quindi  $F$  vuole aumentare  $L$ . Vuole ridurre  $d$  avvicinando le spire di un solenoide. Infatti correnti concordi si attraggono.

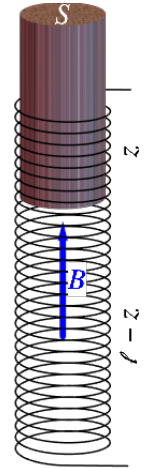
Il prossimo capitolo inizia con un esempio di applicazione di questa formula.

## Magnetismo nella materia

Si osserva sperimentalmente che, inserendo materiali in un solenoide, alcuni vengono attratti ed altri respinti. La descrizione teorica di questa forza sarà: è come se i materiali avessero una permeabilità magnetica  $\mu$  diversa da  $\mu_0$  (maggiore o minore). Sotto questa assunzione possiamo vedere il sistema in figura come due solenoidi in serie. Consideriamo per semplicità il limite ideale solenoidi lunghi e sottile, in maniera da poter trascurare la mutua induttanza rispetto alle auto-induttanze. La parte con il materiale di permeabilità  $\mu$ , inserita per una lunghezza  $z$  nelle spire, ha auto-induttanza  $L_z = \mu z n^2 S$  dove  $n$  è il numero di spire per unità di lunghezza e  $S$  la superficie trasversa. La parte vuota ha auto-induttanza  $L_{d-z} = \mu_0(\ell - z)n^2 S$ . Il sistema ha auto-induttanza totale

$$L = L_z + L_{d-z} \simeq \mu n^2 S z. \quad (13.1)$$

Detta  $I$  la corrente che scorre nelle spire, in base alla formula in eq. (12.4) si ha una forza magnetica



$$F_z = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{I^2}{2} (\mu - \mu_0) n^2 S. \quad (13.2)$$

Vediamo quindi che

- $\mu < \mu_0$  produce una forza repulsiva: questo tipo di materiali sono detti **diamagnetici**. Questo fenomeno è analogo alla dielettricità, descritta da  $\epsilon > \epsilon_0$  (ricordando che  $\epsilon$  compare nelle formule al denominatore, mentre  $\mu$  compare al numeratore). La dielettricità era microscopicamente compresa come dovuta a molecole con dipoli elettrici orientati in maniera anti-parallela al campo elettrico esterno. Il paramagnetismo sarà similmente compreso microscopicamente come dovuto a molecole con dipoli magnetici anti-paralleli al campo magnetico esterno. Infatti la formula per la forza su di un dipolo in un campo magnetico mostra che tale forza è repulsiva quando il dipolo è anti-parallelo al campo magnetico. Quindi il campo magnetico viene ridotto da materiali diamagnetici, analogamente a come materiali dielettrici riducono il campo elettrico.

A differenza della dielettricità, il diamagnetismo è un effetto numericamente piccolo. Definendo  $\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 \equiv \mu_r\mu_0$  esempi di materiali diamagnetici sono l'acqua ( $\chi_m = -0.90 \cdot 10^{-5}$  a temperatura e pressione ambiente), il rame ( $-0.90 \cdot 10^{-5}$ ), l'idrogeno ( $-0.45 \cdot 10^{-8}$ ).

- $\mu < \mu_0$  produce una forza attrattiva: questo tipo di materiali sono detti **paramagnetici**. Non hanno analogo elettrico: i dipoli magnetici delle molecole si allineano paralleli al campo magnetico esterno, che quindi aumenta dentro materiali paramagnetici.

Numericamente il paramagnetismo è un effetto piccolo: esempi di materiali paramagnetici sono l'ossigeno ( $+0.38 \cdot 10^{-5}$ ), e alluminio ( $+2.08 \cdot 10^{-5}$ ). Fosse finita qui potremmo ignorare il tutto.

- Si osservano poi altri materiali detti **ferromagnetici** (in quanto il ferro è l'esempio principale) che hanno  $\mu \sim 10^{3-5} \mu_0$ . Questo fenomeno ha enorme rilevanza pratica.

## 13.1 Interpretazione microscopica

## Corrente di spostamento

Torniamo alle equazioni fondamentali. Per il momento ne abbiamo 6: 4 per i campi, la forza di Lorentz, la conservazione della carica:

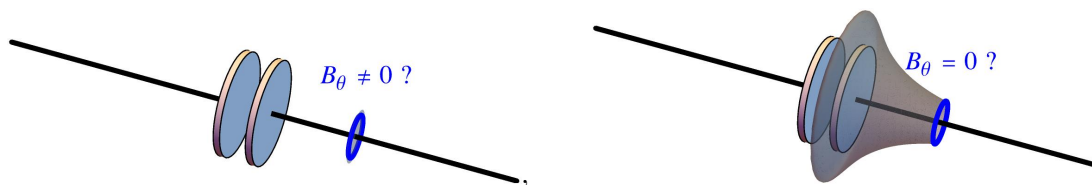
$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ 2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ 3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ 4) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \end{array}$$

Tuttavia queste equazioni presentavano il problema accennato nella sezione 10.3. È arrivato adesso il momento di capire davvero quale sia davvero il problema.

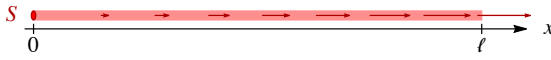
### 14.1 Contraddizione nelle equazioni: esempi

Il problema è grave: le equazioni, come scritte finora, si contraddicono! Vediamo alcuni esempi concreti in cui l'inconsistenza in queste equazioni si manifesta (gli esempi sono anche discussi in dettaglio negli esercizi, qui basta capire il punto qualitativo):

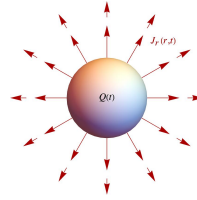
1. Un condensatore con carica  $Q(t)$  che dipende dal tempo (ad esempio una carica, una scarica, una corrente alternata...). Nei fili si ha corrente  $I = \dot{Q}$ , che quindi genera un campo magnetico. Appliciamo il teorema di Stokes alla IV equazione considerando un circuito immaginario circolare come in figura. L'equazione  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{conc}}$  è inconsistente, in quanto una persona ragionevole che prende come superficie il cerchio trova  $I_{\text{conc}} = I$ , mentre un matematico che prende una superficie che passa fra i piatti (come disegnati nella figura a destra) trova  $I_{\text{conc}} = 0$ .



2. Consideriamo un filo carico (magari un conduttore), con la carica libera di uscire ad un lato. Come in una cascata, la corrente è più forte nei punti più vicini all'uscita. La conservazione della carica fornisce  $I = -x\dot{\lambda}$ , che dipende dalla posizione nel modo atteso: ora  $I_{\text{conc}}$  assume qualunque valore.



3. Consideriamo una sfera carica che si scarica in un conduttore: esce una densità di corrente  $J_r(r)$  che abbiamo calcolato in esercizi precedenti. Chiediamoci ora: quale campo magnetico viene generato? Provando a disegnare le possibili linee di campo, uno si rende conto che il problema non ha senso. Ragionando, una sorgente  $J_r$  a simmetria sferica dovrebbe produrre un campo magnetico  $B_r(r)$  a simmetria sferica. Ma ogni campo vettoriale radiale ha rotore zero: è quindi impossibile soddisfare alla IV equazione.



4. Come esempio finale, consideriamo un problema fondamentale che non abbiamo finora trattato: quanto vale il campo magnetico generato da una carica in moto, ad esempio rettilineo uniforme? Procedendo come nell'esempio 1 si incontra lo stesso problema: la corrente concatenata vale  $I_{\text{conc}} = 0$ , a meno di non scegliere una superficie che interseca la carica  $q$ .

## 14.2 Contraddizione nelle equazioni: in generale

Tutti gli esempi discussi sopra hanno una caratteristica in comune: una densità di corrente che dipende dalla posizione. Sono infatti manifestazioni del problema più generale che si ha quando  $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$  come già discusso nella sezione 10.3.

Vediamo allora di affrontare il problema in maniera generale ma astratta. L'idea cruciale è provare a calcolare la divergenza della dubbia IV equazione. Un'identità matematica dice che la divergenza del rotore di qualunque campo vettoriale vale zero. Lo si può dimostrare scrivendo il prodotto vettoriale in componenti tramite il tensore totalmente antisimmetrico  $\epsilon_{ijk}$  contratto con la derivata seconda:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 B_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

o anche espandendo a mano in componenti l'identità

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}' \times \mathbf{B}) = (A_y A'_z - A_z A'_y) B_x + (A_z A'_x - A_x A'_z) B_y + (A_x A'_y - A_y A'_x) B_z$$

e poi inserendo  $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \rightarrow \nabla$ .

Si trova che la divergenza della IV equazione implica che  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Ma questo è incompatibile con l'equazione  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dot{\rho}$  che descrive la conservazione della carica. Infatti tutti gli esempi concreti contenevano cariche in moto.

È interessante osservare che nei capitoli seguenti abbiamo allegramente estratto fenomeni fisici interessanti e di rilevanza pratica senza accorgerci che stavamo lavorando con equazioni inconsistenti. In fisica serve meno rigore che in matematica perché c'è una seconda gamba, l'esperimento. Nei sistemi fisici studiati il problema è numericamente piccolo, e questo ha reso possibile ottenere risultati sensati. Tuttavia a livello concettuale il problema è grosso. Per risolverlo passiamo all'altra gamba: la teoria. Grazie agli esperimenti ci siamo avvicinati alla teoria giusta: essendo ormai nel bacino di attrazione della teoria giusta è possibile arrivare a risolvere il problema con il puro pensiero matematico.

## 14.3 La corrente di spostamento

Il passaggio cruciale venne fatto nel 1863 da Maxwell, e quindi le equazioni corrette sono dette equazioni di Maxwell.

Come spesso accade, il passo cruciale è identificare il problema. All'epoca c'era ancora confusione fra elettromagnetismo esatto nel vuoto ed elettromagnetismo approssimato nella materia, per cui non era chiaro che l'inconsistenza fosse davvero un problema. A questa confusione se ne sommava altra: Maxwell aveva in testa anche idee sballate, che oggi hanno solo interesse storico e che per ora ignoriamo. Nonostante tutta questa confusione Maxwell riuscì ad identificare il problema giusto, quello discusso sopra.

Una volta fatto questo la soluzione è facile ed elegante. Maxwell rimediò modificando la IV equazione in

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_S) \quad \mathbf{J}_S = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Grazie al termine aggiuntivo, la divergenza della equazione corretta ora **implica** la conservazione della carica, utilizzando anche la I equazione  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ .

Il nuovo effetto fisico predetto è chiamato **corrente di spostamento**  $\mathbf{J}_S$  perché appare quando si spostano cariche e quindi varia il campo elettrico,  $\dot{\mathbf{E}} \neq 0$ . L'equivalente integrale è:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0(I_{\text{conc}} + \epsilon_0 \dot{\Phi}_E).$$

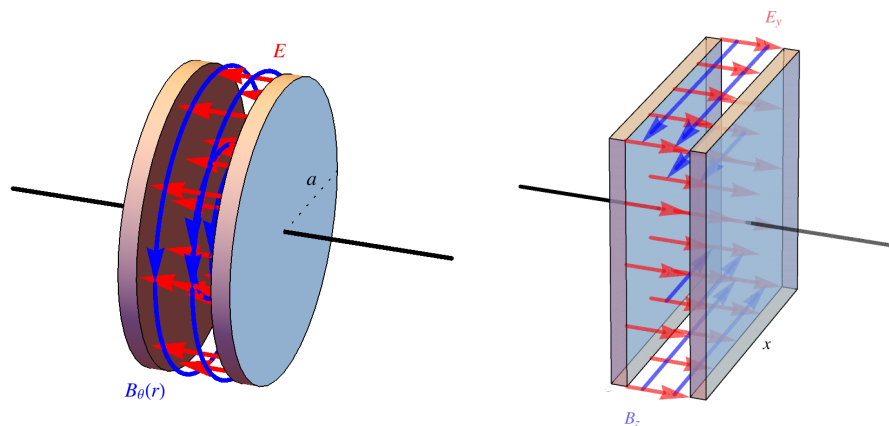
Siamo così arrivati alle 5 equazioni finali dell'elettromagnetismo:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ 2) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ 3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ 4) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Non è più necessario includere l'equazione di conservazione della carica in quanto è implicata dalla IV equazione.

Il modo in cui la corrente di spostamento risolve le inconsistenze discusse nella sezione precedente, e gli effetti fisici della corrente di spostamento, sono discussi negli esercizi. Fra questi l'effetto più importante lo si incontra considerando un condensatore con carica  $Q(t)$  che dipende dal tempo. La

carica genera un campo elettrico  $E(t)$  che, in base alla nuova IV equazione di Maxwell, genera un campo magnetico  $B(t)$ . La figura mostra la tipica geometria. I conti sono fatti negli esercizi, ed il caso più semplice è un condensatore piano di dimensione  $a$  con carica oscillante  $Q(t) = Q_0 \cos \omega t$ .



I conti con diverse geometrie mostrano un risultato generale: *l'energia magnetica  $U_B = \int dV B^2/2\mu_0$  è comparabile all'energia elettrica  $U_E = \int dV \epsilon_0 E^2/2$  se il tempo scala  $\tau \sim 1/\omega$  per la variazione della carica è rapido, comparabile al tempo  $a/c$  dove  $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$*

$$\frac{U_B}{U_E} \sim \left(\frac{a}{c\tau}\right)^2 \quad \tau \equiv \left|\frac{Q}{\dot{Q}}\right|. \quad (14.1)$$

Come vedremo in seguito  $c$  è la velocità della luce, e quindi  $a/c$  è il tempo che la luce impiega ad attraversare l'apparato. Se  $U_B \ll U_E$  il conto finisce qui. Se invece  $U_B \sim U_E$  diventa numericamente rilevante un nuovo effetto che cambia in maniera qualitativa il comportamento del sistema:  $B(t)$  in base alla II equazione genera una correzione  $\delta E(t)$  al campo elettrico, che in base alla IV equazione genera una correzione  $\delta B(t)$  al campo magnetico, che in base alla II equazione genera una correzione  $\delta\delta E(t)$  al campo elettrico, e così via all'infinito. Gli esercizi mostrano come la serie può essere risommata, ottenendo campi di forma analitica semplice  $E \sim cB \sim E_0 \cos[\omega(t - x/c)]$  nel caso del condensatore piano.

Il fatto che la serie sia infinita suggerisce che si è ottenuto un fenomeno fisico nuovo ed autonomo, indipendente da quale era il sistema iniziale: un condensatore con  $Q(t)$ , oppure un solenoide  $I(t)$ , etc.

Il fenomeno fisico nuovo sono le *onde elettromagnetiche*, meglio calcolate nel prossimo capitolo risolvendo le equazioni di Maxwell nel vuoto, senza sorgenti, invece che risommando sistemi particolari.

# Onde elettromagnetiche

## 15.1 Onda nel vuoto, conto in componenti

Per iniziare con un conto esplicito evitiamo di utilizzare il formalismo vettoriale, e cerchiamo una soluzione che descriva un'onda che si propaga lungo l'asse  $x$ . Assumendo quindi che  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  dipendano da  $x, t$  ma non da  $y, z$ , scriviamo le equazioni di Maxwell in componenti e cerchiamo di risolverle. Le 4 equazioni di Maxwell nel vuoto sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ 2) \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad 0 = \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ 3) \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \\ 4) \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad 0 = \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{array} \right.$$

Impariamo quindi che  $E_x$  e  $B_x$  sono costanti che non dipendono da  $x$  né da  $t$ : possiamo metterle a zero in quanto descriverebbero ben noti campi elettrici e magnetici costanti, che qui non ci interessano.

Come evidenziato dai colori, le rimanenti 4 equazioni si dividono in due coppie di sistemi di 1o grado per  $E_z, B_y$  e per  $E_y, B_z$ . Operando con opportune ulteriori derivate  $\partial/\partial x$  e  $\partial/\partial t$  (e quindi perdendo un poco di informazione) queste 4 equazioni intrecciate vengono ridotte a 4 equazioni singole di 2o grado, trovando che tutte hanno la stessa forma:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W = 0 \quad \text{dove} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad W = \{E_z, B_y, E_y, B_z\}.$$

Si noti che l'operatore con derivate seconde contiene un segno  $-$  ed una tipica forma 'spazio – tempo'. Andando a rintracciare l'origine di questo segno si può vedere che deriva dal segno  $-$  introdotto da Lenz nell'equazione di Faraday  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ . Questo segno è cruciale, in quanto significa che si è ottenuta l'equazione delle onde, risolta da due onde che vanno una avanti ed una indietro a velocità  $c$ , con forma descritta da due funzioni generiche  $f$  e  $g$  (due funzioni indipendenti per ogni componente di  $W = \{E_z, B_y, E_y, B_z\}$ ):

$$W(x, t) = f_W(x - ct) + g_W(x + ct). \quad (15.1)$$



$f$  descrive un'onda che si muove in avanti alla velocità  $c$ ,  $g$  un'onda che si muove all'indietro.  $c$  risulta coincidere numericamente con la velocità della luce, suggerendo che la luce sono campi elettrici e magnetici che si generano a vicenda.

È immediato verificare che l'eq. (15.1) è una soluzione. Volendo ricavarla in maniera costruttiva e dimostrare che è l'unica soluzione, conviene riscrivere l'equazione delle onde passando alle variabili  $u = x - ct$ ,  $v = x + ct$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \quad (15.2)$$

L'equazione delle onde diventa quindi

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) W = 4 \frac{\partial W}{\partial u \partial v} = 0 \quad (15.3)$$

e nelle nuove variabili è ovvio che la soluzione è  $W = f_W(u) + g_W(v)$ .<sup>1</sup>

Avendo operato derivate extra per semplificare le equazioni di Maxwell separando  $\mathbf{E}$  da  $\mathbf{B}$ , abbiamo perso un po' di informazione. Occorre quindi inserire le possibili soluzioni ottenute nelle equazioni originali, che descrivevano anche un legame fra campi elettrici e magnetici. Imponendo ad esempio la componente  $z$  della II equazione ( $\partial_t B_z = -\partial_x E_y$ ) si trova che  $B_z$  è determinato in termini di  $E_y$  come:

$$E_y = f_y(x - ct) + g_y(x + ct) \quad \Rightarrow \quad B_z = \frac{1}{c} f_y(x - ct) - \frac{1}{c} g_y(x + ct) \quad (15.4)$$

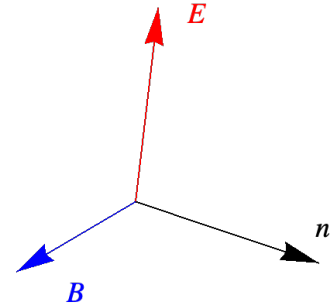
a meno di una funzione  $\delta B_z(x)$  che deve valere zero per via della IV eq. di Maxwell.

A questo punto l'aver fatto il conto in componenti inizia a portare a dettagli noiosi che oscurano il significato geometrico del risultato. Considerando per semplicità solo l'onda  $f$  in avanti, e ripetendo il conto per tutte le componenti si trova

$$\begin{cases} E_y = f_y(x - ct) \\ E_z = f_z(x - ct) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B_y = -E_z/c \\ B_z = +E_y/c \end{cases} \quad (15.5)$$

in cui il segno è importante: significa che queste apparentemente complicate equazioni in componenti hanno un banale significato geometrico: *per una generica onda piana  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono ortogonali fra di loro ed ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda*, che nei conti attuali è l'asse  $x$  ovvero  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ . Le equazioni di Maxwell sono risolte da onde con **polarizzazione** trasversa alla direzione del moto. In notazione vettoriale le eq. (15.5) si traducono in

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}/c. \quad (15.6)$$



<sup>1</sup>Questo cambio di variabili è identico a quanto viene fatto per risolvere il Laplaciano in 2 dimensioni  $x$  ed  $y$ , che differisce dall'equazione delle onde per avere il segno  $+$  invece del segno  $-$ :

$$\nabla^2 \varphi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = 4 \frac{\partial \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

dove  $z = x + iy$  e  $\bar{z} = x - iy$ . Per via del segno  $+$  è necessario introdurre la  $i$  per ottenere un cambio conveniente. Il Laplaciano in 2 dimensioni è quindi risolto da funzioni olomorfe di variabile complessa,  $\varphi = f(z) + g(\bar{z})$ .

## 15.2 Onda nel vuoto, conto in notazione vettoriale

È possibile ripetere il conto in maniera più compatta, utilizzando la notazione vettoriale. Già che ci siamo, evitiamo di assumere di essere nel vuoto e facciamo il conto in generale.

Il passaggio equivalente ad operare derivate extra per separare  $\mathbf{E}$  da  $\mathbf{B}$  consiste nel prendere il rotore della II e della IV equazione di Maxwell. Ad esempio prendendo il rotore della II equazione si ottiene

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \quad (15.7)$$

avendo anche usato la IV equazione. Il doppio prodotto vettore può essere semplificato tramite l'identità matematica

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (15.8)$$

che è solo la nota formula per il doppio prodotto vettore applicata al caso in cui due vettori sono gradienti  $\nabla$ .

Mettendoci adesso nel vuoto  $\rho = \mathbf{J} = 0$  si ottiene il d'Alembertiano

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (15.9)$$

ovvero l'equazione delle onde in 3 dimensioni spaziali ed 1 dimensione temporale:

$$\square^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (15.10)$$

Prendendo il rotore della IV equazione ed operando in maniera simile si ottiene la stessa equazione per  $\mathbf{B}$ :

$$\square^2 \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (15.11)$$

Abbiamo ottenuto l'equazione delle onde, una cui soluzione particolare semplice sono onde piane infinite che si propagano in direzione  $\mathbf{n}$  generica:

- La I e III equazione implicano che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono perpendicolari alla direzione  $\mathbf{n}$ .
- La II e IV equazione implicano che  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  sono perpendicolari, con moduli legati da  $E = cB$ .

## 15.3 Onde piane nel vuoto

Esistono anche soluzioni finite, tipo la luce di una torcia, che ha una dimensione finita nella direzione perpendicolare alla direzione di propagazione. Ma ottenerle è matematicamente più complicato, e non è necessario in quanto il *teorema di Fourier* dice che la soluzione generale può essere ottenuta come somma o integrale di una classe speciale di onde infinite dette *piane*, in quanto le funzioni  $f$  e  $g$  generiche sono assunte essere funzioni trigonometriche cos e sin

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t). \quad (15.12)$$

La fig. 15.1 illustra questa soluzione, disegnando  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  ad un tempo fissato lungo l'asse di propagazione. Essendo queste soluzioni importanti esiste una serie di notazioni standard sovrabbondanti,

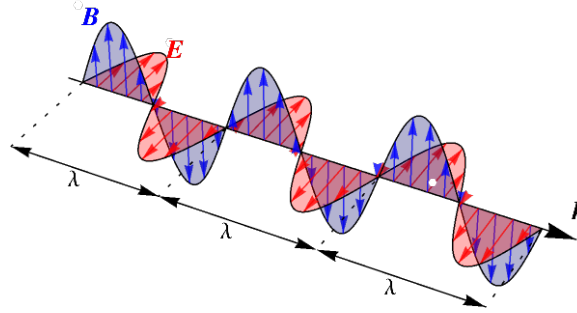


Figura 15.1: *Illustrazione dei campi di un'onda piana.*

che descriviamo. Il vettore  $\mathbf{k}$  è detto **vettore d'onda**, ed è legato alla **pulsazione**  $\omega$  dalla **relazione di dispersione**  $\omega^2 = c^2 k^2$ . La **polarizzazione** delle onde è trasversa alla direzione del moto  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}} \quad c\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}.$$

Si definiscono la **lunghezza d'onda**  $\lambda$  e la **frequenza**  $\nu = 1/T$  delle onde piane come

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (15.13)$$

### 15.3.1 Spettro in frequenza

La relazione di dispersione diventa quindi

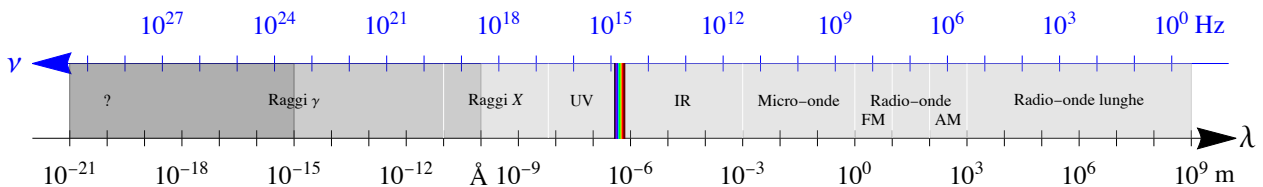
$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu. \quad (15.14)$$

La luce percepita come visibile dall'occhio umano ha  $\lambda$  fra 400 nm (blu) e 700 nm (rosso), e corrispondenti a frequenza di oscillazione di circa  $10^{16}$  Hz.

Notare che  $\nu$  è simile alla frequenza del moto non-relativistico di rotazione degli elettroni negli atomi, e quindi  $\lambda$  è molto maggiore della dimensione tipica di un atomo,  $\sim \text{\AA} = 0.1 \text{ nm}$ ,

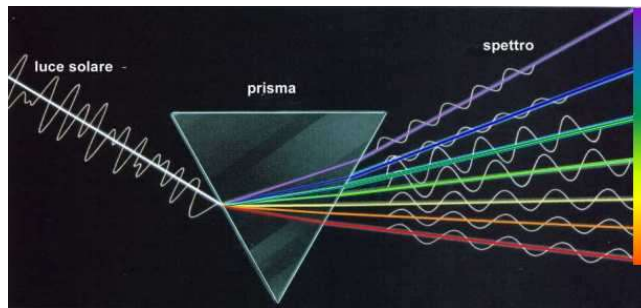
Le equazioni scritte da Maxwell nel 1865 hanno soluzioni con ogni valore di  $\lambda$ , e predicono quindi onde invisibili che non vennero prese molto sul serio fino al 1886, quando Hertz con un condensatore/induttanza con  $Q(t)$  generò ed osservò onde di frequenza  $\nu \sim 10^6$  Hz, dette 'radio'. Onde di questa frequenza (e un po' maggiore) vengono utilizzate per trasmettere la radio in quanto modulandole ad esempio in ampiezza trasmettono circa  $10^6$  bit/s, quanto basta per trasmettere il suono della voce umana.

La figura mostra i nomi dati dallo spettro delle onde



Si chiamano raggi  $X$  onde elettromagnetiche di lunghezza comparabile alla dimensione degli atomi, e per questo utili per capire come gli atomi sono disposti nei materiali. I raggi detti  $\gamma$  includono onde di lunghezza d'onda simile alla dimensione dei nuclei atomici.

Notare che la luce bianca non compare nel visibile: il bianco è il colore percepito dall'occhio umano per una onda che somma diverse lunghezze d'onda nel range visibile. Si osserva che un prisma separa la luce bianca nelle diverse lunghezze d'onda (questo fenomeno verrà in seguito spiegato come conseguenza delle equazioni di Maxwell in un dielettrico), e che un oggetto messo nella zona nera si riscalda, indicando che esistono onde invisibili.



### 15.3.2 Polarizzazione