Versione: 13 febbraio 2004

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Elementi di Analisi Matematica I e II
a.a. 2002/03

docenti: G. Alberti, A. Briani

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta dei testi degli scritti d'esame per i due moduli di Elementi di Analisi Matematica del corso di laurea in Matematica, a.a. 2002/03. Questi scritti si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda parte con tre o più problemi per cui invece si deve dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte, e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questi appunti consta dei testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, i cosiddetti "compitini", in tutte le varianti presentate, mentre la seconda sezione contiene una breve traccia delle soluzioni.

A questo punto è oppportuna una precisazione sull'uso di questi appunti. Le tracce delle soluzioni date nella seconda parte sono spesso ridotte all'essenziale, e comprenderle può richiedere talvolta un notevole sforzo. Nella fase di preparazione dell'esame, è probabilmente meglio non ricorrere a queste soluzioni se non per confrontarle con quelle ottenute per conto proprio, o quando proprio non si riesce a venire a capo di un esercizio. Infine, è bene ricordare che il livello di difficoltà degli esercizi proposti varia moltissimo, ed alcune delle domande sono decisamente difficili. Non è quindi il caso di allarmarsi se non si riesce a trovare sempre una soluzioni (suggerisco però di fare sempre almeno un tentativo).

Gli esercizi si basano sui seguenti argomenti, che costituiscono il programma d'esame tipo.

Programma del corso.

Sono in corsivo gli argomenti non essenziali.

Primo modulo: calcolo

1. Funzioni: grafico, surgettività, iniettività. Funzioni reali di una variabile reale: monotonia e convessità, funzioni pari, dispari, periodiche, funzione inversa, interpretazione geometrica.
2. Grafici delle funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmo, funzioni trigonometriche). Visualizzazione grafica di alcune trasformazioni.
3. Definizione di derivata e sua interpretazione geometrica; calcolo delle derivate. Relazione con monotonia e convessità; studio qualitativo del grafico di una funzione.
4. Regole di de L'Hôpital. Confronto di esponenziali, potenze e logaritmi (all'infinito ed in zero). Sviluppo di Taylor; applicazioni al calcolo dei limiti di forme indeterminate; sviluppi di Taylor delle funzioni fondamentali.
5. Infiniti ed infinitesimi asintoticamente equivalenti; principio di sostituzione degli infinitesimi; notazione di Landau ("o" piccolo); parte principale e ordine di un infinito e di un infinitesimo.
6. Primitiva di una funzione (integrale indefinito); calcolo delle primitive; primitive delle funzioni razionali.
7. Calcolo dell'area del sottografico tramite la primitiva (integrale definito); l'area di una figura piana come integrale delle lunghezze delle sezioni unidimensionali; il volume di una figura solida come integrale delle aree delle sezioni bidimensionali; lunghezza del grafico di una funzione.
8. Equazioni differenziali del primo ordine: problema di Cauchy ed enunciato del teorema di esistenza ed unicità locale, equazioni a variabili separabili, equazioni lineari del primo ordine (formula risolutiva generale).
9. Equazioni differenziali del secondo ordine: problema di Cauchy ed enunciato del teorema di esistenza ed unicità locale, equazioni lineari (omogenea e non), soluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti, riduzione dell'ordine, ricerca di una soluzione particolare in alcuni casi speciali.

Secondo modulo: analisi

10. Numeri reali: reali estesi, massimo e minimo, estremo inferiore e superiore, esistenza di estremo inferiore e superiore.
11. Numeri complessi: interpretazione geometrica, esponenziale complesso, calcolo di potenze e radici di un numero complesso.
12. Definizione di limite di una successione e sue proprietà; convergenza delle successioni monotone e delle successioni di Cauchy; teorema di Bolzano-Weierstrss. Successioni definite per ricorrenza.
13. Teoria degli insiemi: prodotto infinito, insieme delle parti, insieme potenza. Esempi fondamentali: interi, razionali ed algebrici sono numerabili, i reali sono più che numerabili.
14. Definizione di limite di una funzione e sue proprietà; funzioni continue; teorema di esistenza dei valori intermedi; Teorema di Weierstrass.
15. Definizione di derivata. Derivabilità implica continuità. Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione delle regole di de L'Hôpital.
16. Integrale secondo Riemann di una funzione limitata e teorema fondamentale del calcolo integrale. Sviluppo di Taylor con resto integrale, di Lagrange e di Peano.
17. Integrali impropri di funzioni positive: criteri di convergenza (confronto asintotico). Serie a termini positivi: criterio del rapporto, della radice, del confronto, dell'integrale. Integrali impropri di funzioni a segno variabile, convergenza e convergenza assoluta. Serie a termini reali: convergenza e convergenza assoluta. Criterio di Leibniz per le serie a segni alterni. *Riordinabilità delle serie.*
18. Serie di potenze: raggio di convergenza, derivabilità.
19. Funzioni convesse.
20. *Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.*

Elementi di Analisi Matematica, I modulo, a.a. 2002/03 - Testi

Compitino di prova, 14 novembre 2002

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 5}}$.
2. Dire se la funzione $f(x) = \sin^2(x) + |\cos x|$ è periodica.
3. Determinare i numeri reali a per cui $f(x) = \dfrac{x + a}{x - a}$ è una funzione pari.
4. Determinare a e b in modo che la funzione $f(x) = e^{-x(ax+b)}$ abbia un punto di massimo o minimo in $x = -1/2$.
5. Determinare l'insieme degli $x \in [0, \pi]$ tali che $\sin(2x) \geq \frac{1}{2}$.
6. Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan x + \arctan(1/x)$.
7. Determinare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x) = ||x + 5| - 2|$.
8. Scrivere un intervallo in cui sia possibile definire l'inversa della funzione $f(x) = 4x^2 - 4$, e calcolarla.

Seconda parte

1. Determinare i valori del parametro reale a tali che
$$e^{|x|} - |x| + \cos(x) \geq a \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
2. Tracciare un grafico approssimativo della funzione
$$f(x) = (x - 2)e^{\frac{x}{x-1}}.$$
3. Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione
$$\frac{x}{x + \log(x + 1)} = \alpha x.$$

Primo compitino, 28 novembre 2002

Prima parte, gruppo A

1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\log(x+1)+1}$.
2. Risolvere la disequazione $\cos(4x) \leq 1/2$ nell'intervallo $x \in [0, 2\pi]$.
3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x^4 e^x \sin(x^2) \;=\; o(x^a)$ per $x \to 0$?
4. Disegnare il grafico di $f(x) := 2 + \dfrac{1}{x-1}$.
5. Determinare i valori di a e b per cui $f(x) = ax^3 + 2bx^2 + 1$ ha un punto di flesso in $x = 1/6$.
6. Calcolare la derivata prima e seconda di $f(x) := \dfrac{e^{\log(x^2-1)}}{x+1}$.
7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4 2^{-x}$.
8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(1 + x^5\,\log x)}{e^{1/x}}$.

Prima parte, gruppo B

1. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\log(x+2)+2}$.
2. Risolvere la disequazione $\cos(3x) \leq 1/2$ nell'intervallo $x \in [0, 2\pi]$.
3. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x^4 e^x \cos(x^2) = o(x^a)$ per $x \to 0$?
4. Disegnare il grafico di $f(x) := 2 + \dfrac{1}{x+1}$.
5. Determinare i valori di a e b per cui $f(x) = ax^3 + 4bx^2 + 1$ ha un punto di flesso in $x = 1/6$.
6. Calcolare la derivata prima e seconda di $f(x) := \dfrac{e^{\log(x^2-4)}}{x-2}$.
7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^5 \log x$.
8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\pi/3 + x^5\,\log x)}{e^{1/x}}$.

Seconda parte

1. Studiare la funzione $f(x) := \dfrac{x^2-2x}{x+1}$.
2. Calcolare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a\cos x - be^x + \sin x}{x^2}$.
3. a) Determinare il primo termine non nullo nello sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) := (\sin x)^2 - \sin(x^2)$.
   b) Lo stesso, con $f(x) := (\sin x)^n - \sin(x^n)$, $n \geq 2$ intero.
4. a) Dimostrare che la funzione $f(x) := x\,\log x$ è invertibile per $x \geq 1$.
   b) Calcolare il limite del rapporto $f^{-1}(y)/y$ per $y \to +\infty$, dove f^{-1} è l'inversa di f.
   c) Trovare una funzione elementare $h(y)$ per cui $f^{-1}(y) = h(y) + o(h(y))$ per $y \to +\infty$.
   d) Trovare una funzione elementare $h(y)$ per cui $f^{-1}(y) = h(y) + o(y/\log^2 y)$ per $y \to +\infty$.

Secondo compitino, 19 dicembre 2002

Prima parte, gruppo A

1. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 1$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 10 in 0 di $f(x) := \sin(2x^2)$.
3. Calcolare $\lim_{x\to 0}(1+x)^{10}2^{-x}$ e $\lim_{x\to -\infty} x^2 2^x$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx$.
5. Determinare una primitiva di xe^{3x}.
6. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq x \leq 2$ e $x \leq y \leq \sqrt{2x}$, e calcolarne l'area.
7. Risolvere il problema ai dati iniziali $\begin{cases} y' = (3x^2+1)(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
8. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = 0$.

Prima parte, gruppo B

1. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $(x+1)^2+(y-1)^2 \leq 1$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 12 in 0 di $f(x) := e^{-x^3}$.
3. Calcolare $\lim_{x\to +\infty}(1+x)^{10}2^{-x}$ e $\lim_{x\to +\infty}(x+\sin x)^4 \log(x^3+1)$.
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-3}{x^2+1}\,dx$.
5. Determinare una primitiva di $x\cos(2x)$.
6. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq x \leq 1$ e $x \leq y \leq \sqrt{x}$, e calcolarne l'area.
7. Risolvere il problema ai dati iniziali $\begin{cases} y' = e^x(y^2+1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
8. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Seconda parte, gruppo A

1. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{|3e^{2x}-e^x|}{e^{2x}-e^x-6}dx$.
2. Calcolare il volume dell'insieme A dei punti (x, y, z) tali che $x^2+y^2+z^4 \leq 1$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/10} e^{-x^2}dx$ con un errore inferiore a 10^{-7}.
4. Dato a parametro reale, si consideri l'equazione differenziale
$$y'' + (a^2-4)y' + (a+1)y = c(x)\ . \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di $(*)$ per $a = 3$ e $c(x) = 2e^x + \sin x$.
b) Per $a = 3$ e $c(x) = 2x^2$, determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.
c) Come al punto b), con $c(x)$ un generico polinomio di grado k.
d) Per $c(x) = 0$, determinare i valori di a per cui le soluzioni di $(*)$ sono tutte limitate.

Secondo compitino, 19 dicembre 2002

Seconda parte, gruppo B

1. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{|-2e^{2x}+e^{x}|}{e^{2x}+e^{x}-6}\,dx$.
2. Calcolare il volume dell'insieme A dei punti (x,y,z) tali che $x^2+y^2+z^6 \le 1$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_{0}^{1/10} e^{-x^2}\,dx$ con un errore inferiore a 10^{-7}.
4. Dato a parametro reale, si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + (a^2-4)y' + (a+1)y = c(x)\ . \qquad (*)$$

a) Trovare la soluzione generale di $(*)$ per $a=3$ e $c(x) = 2e^{-x} + \sin x$.
b) Per $a = 3$ e $c(x) = x^2$, determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.
c) Come al punto b), con $c(x)$ un generico polinomio di grado k.
d) Per $c(x) = 0$, determinare i valori di a per cui le soluzioni di $(*)$ sono tutte limitate.

Scritto del primo appello, 13 gennaio 2003

Prima parte, gruppo A

1. Determinare il campo di esistenza di $f(x) := \sqrt{1 - 2\sin x}$.
2. Tracciare il grafico di $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Determinare una primitiva di $9x^2 \log x$.
4. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $100!$, 1000^{10}, 10^{300}.
5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin(ax) - e^{3x}}{x^2}$ è finito, e calcolarlo.
6. Risolvere $y' - y \sin x = \sin x$ con dato iniziale $y(0) = 0$.
7. Trovare la soluzione generale di $y'' + 3y' + 2y = 6e^x$.
8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x^7+1)^{1/5} - (x^7+1)^{1/5}}{(2x^{35}+1)^{1/25} - (x^{21}+1)^{1/15}}$.

Prima parte, gruppo B

1. Determinare il campo di esistenza di $f(x) := \log(1 - 2\sin x)$.
2. Tracciare il grafico di $f(x) = -e^{1-x}$.
3. Determinare una primitiva di $16\, x^3 \log x$.
4. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $100!$, 1000^{20}, 10^{1000}.
5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + \sin(ax) - e^{3x}}{x^2}$ è finito, e calcolarlo.
6. Risolvere $y' - y\, \sin x = \sin x$ con dato iniziale $y(0) = 0$.
7. Trovare la soluzione generale di $y'' + 2y' + y = 4e^x$.
8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x^7+1)^{1/5} - (x^7+1)^{1/5}}{(2x^{35}+1)^{1/25} - (x^{21}+1)^{1/15}}$.

Seconda parte, gruppo A

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = a$.
2. Si consideri l'equazione differenziale
$$y'' - 2y' - 3y = f(x)\ . \qquad (*)$$
Determinare la parte principale della soluzione con ordine di infinitesimo più alto in 0 nei seguenti casi:
a) $f(x) := 2x + 5$;
b) $f(x) := x^n$ con n intero positivo assegnato;
c) $f(x)$ una generica funzione infinitamente derivabile di $\mathbb{R}$.
3. Siano C e C' gli insiemi di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che, rispettivamente, $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + z^2 \leq 1$.
a) Disegnare sommariamente C, C', e, se possibile, $C'' := C \cap C'$.
b) Descrivere le intersezioni di C'' con il piano di equazione $x = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

c) Calcolare il volume di C''.

4. a) Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $\tan x = ax$ contenute nell'intervallo $(0, \pi/2)$.
   b) Studiare il comportamento di queste soluzioni per $a \to +\infty$.

Seconda parte, gruppo B

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}} = a$.

2. Si consideri l'equazione $y'' + 2y' + 3y = f(x)$. Determinare la parte principale della soluzione con ordine di infinitesimo più alto in 0 nei seguenti casi: a) $f(x) := 2x + 1$; b) $f(x) := x^n$ con n intero positivo assegnato; c) $f(x)$ una generica funzione infinitamente derivabile di $\mathbb{R}$.

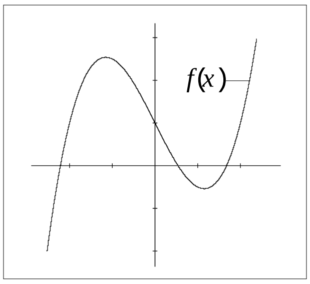
3. Siano C e C' gli insiemi di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che, rispettivamente, $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + z^2 \leq 1$.
   a) Disegnare sommariamente C, C', e, se possibile, $C'' := C \cap C'$.
   b) Descrivere le intersezioni di C'' con il piano di equazione $x = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
   c) Calcolare il volume di C''.

4. a) Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $\tan x = ax$ contenute nell'intervallo $(0, \pi/2)$.
   b) Studiare il comportamento di queste soluzioni per $a \to +\infty$.

Scritto del secondo appello, 7 febbraio 2003

Prima parte

1. Trovare una primitiva di $e^{|x|}$.
2. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \log\left(1 + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.
3. Determinate la parte principale di $\dfrac{\sin(x^8)}{\log(1+x^4)}$ per $x \to 0$.
4. Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax) - x}{x^2}$ esiste ed è finito, e calcolarlo.
5. Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 2^x$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{x+2}\, dx$.
7. Risolvere $y'' + 4y = 0$ con dati iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.
8. Sia $f(x)$ la funzione in figura. Disegnare il grafico di $f(|x|)$ e di $|f(x)|$.



Seconda parte

1. a) Dato $\lambda \in (0,1)$, calcolare il valore minimo di $f(x) := x^{1-\lambda} + x^{-\lambda}$ per $x \in (0,+\infty)$.
   b) Trovare la più grande costante C per cui vale la seguente disuguaglianza:
   $$a + b \geq C a^{\lambda} b^{1-\lambda} \quad \text{per ogni } a, b \text{ reali positivi.}$$
   c) Come nel punto b), ma con a, b interi positivi.
   d) Come nel punto b), ma con a, b potenze (intere positive) di 2 e $\lambda = 3/4$.
2. Si consideri, per $x > 0$, l'equazione lineare del secondo ordine
   $$y'' + \frac{y'}{x} - a\frac{y}{x^2} = c(x) \qquad (*)$$
   a) Risolvere (*) per $a = 1$ e $c(x) = 0$ (suggerimento: cercare soluzioni della forma $y = x^{\lambda}$).
   b) Risolvere (*) per a reale e $c(x) = 0$.
   c) Risolvere (*) per $a > 0$ e $c(x) = x$.
3. Calcolare il numero $\log(12/10)$ con un errore inferiore a 10^{-3}.
4. Calcolare, al variare di $a \in [0,+\infty)$, l'area della regione limitata del piano compresa tra la curva di equazione $y = (-x^2 + 4x - 3)^{-1}$ e la retta di equazione $y = a$.

Scritto del terzo appello, 12 giugno 2003

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{\log(x^3+1)}$.
2. Calcolare la primitiva di $\dfrac{x}{1+x^2}$.
3. Calcolare la derivata di $x^{1-x}x^{1+x}$.
4. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $xy \geq 1$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,\cos x\,dx$.
6. Trovare i punti critici di $f(x) := e^{x^3-3x^2-9x+1}$ e determinarne la natura.
7. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot y + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.
8. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x+e^{x-x^2})}{\log x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\,(\log x)^2$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\sin(1/x)$.

Seconda parte

1. Calcolare il volume dell'insieme V dei punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}$. [*Suggerimento: le intersezioni di V con i piani paralleli al piano xy sono cerchi.*]
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni del problema $\begin{cases} \ddot y + 4y = \sin(ax) \\ y(0) = 0 \\ \dot y(0) = 0 \end{cases}$ sono illimitate.
3. Trovare il punto del grafico di $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ che minimizza la distanza dall'origine.
4. Sia a un numero reale positivo diverso da 0 e da 1.
   a) Trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 in 0 di $(1+x)^a$.
   b) Calcolare la parte principale per $x \to +\infty$ di $(x+1)^a + (x-1)^a - 2x^a$.
   c) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+1)^a + (x^3-1)^a - 2x^{3a}}{x^5}$.

Scritto del quarto appello, 10 luglio 2003

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{2-|x+1|}$.
2. Calcolare la derivata di $f(x) := \log(x^x)$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.
4. Trovare una primitiva di $\dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$.
5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)}{x\,\sin x}$, $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log\log x}$, $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x+\sin x}$.
6. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 9 incluso di $f(x) = \sin(x^3 + x^9)$.
7. Scrivere la soluzione generale dell'equazione $xy' + y = e^x$.
8. Disegnare il grafico di $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Seconda parte

1. Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la parte principale di $e^{-1/x} - \cos(a/\sqrt{x})$ per $x \to +\infty$.
2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\right]$.
3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \sin x\ , \\ y(0) = y'(0) = 0\ . \end{cases}$

Scritto del quinto appello, 8 settembre 2003

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{2+|x+1|}$.
2. Calcolare la derivata di $f(x) := x^x \cdot x^{-x}$ (per $x > 0$).
3. Risolvere $y'' - 4y = 0$ con dati iniziali $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
4. Calcolare la primitiva di $\dfrac{x^2}{1+x^3}$.
5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x \log x$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(x^{-20} + e^{-x})$.
6. Trovare i punti critici di $f(x) := e^{x^3-3x^2-9x+1}$ e determinarne la natura.
7. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 12 in 0 di $f(x) := \cos(-x^3)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $xy \le 1$.

Seconda parte

1. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|-2e^{-2x} + e^{-x}|}{e^{-2x} + e^{-x} - 6} dx$.
2. Trovare il punto del grafico di $f(x) := \dfrac{2}{1+x^2}$ che minimizza la distanza dall'origine.
3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni del problema $\begin{cases} \ddot{y} + 4y = \sin(ax) \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$ sono illimitate.

Elementi di Analisi Matematica, II modulo, a.a. 2002/03 - Testi

PRIMO COMPITINO, 3 APRILE 2003

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f definita da
$$f(x) := \begin{cases} ae^x & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{e^{bx}-1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$
è continua su tutto $\mathbb{R}$.
2. Calcolare (in forma cartesiana) il numero $(1-i)^{10}$.
3. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
a) l'insieme dei numeri primi;
b) l'insieme dei numeri irrazionali;
c) l'insieme delle radici quadrate di numeri razionali.
4. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $1 \leq |z+1-i| \leq \sqrt{2}$.
5. Calcolare il limite di $\sqrt[n^2]{n!}$ per $n \to +\infty$.
6. Dare un'esempio (anche con un disegno) di funzione continua f su $(0,1]$ che
a) non ammette massimo;
b) non ammette né massimo né minimo.
7. Determinare l'estremo superiore ed inferiore di $A := \Big\{ \exp\Big(\frac{4n^2-1}{4n^2}\Big) : n = 1, 2, \dots \Big\}$.
8. Scrivere la definizione di successione di Cauchy.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f definita da
$$f(x) := \begin{cases} a \sin x & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{e^{bx}-1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$
è continua su tutto $\mathbb{R}$.
2. Calcolare (in forma cartesiana) il numero $(i-1)^{10}$.
3. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
a) l'insieme delle potenze intere di due;
b) l'insieme delle radici cubiche di numeri razionali;
c) l'insieme dei numeri reali non interi.
4. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $1 \leq |z+1+i| \leq \sqrt{2}$.
5. Calcolare il limite di $\sqrt[n^3]{n!}$ per $n \to +\infty$.
6. Dare un'esempio (anche con un disegno) di funzione continua f su $[0,1)$ che
a) non ammette minimo;
b) non ammette né massimo né minimo.
7. Determinare l'estremo superiore ed inferiore di $A := \Big\{ \log\Big(\frac{4n^2-1}{4n^2}\Big) : n = 1, 2, \dots \Big\}$.
8. Scrivere la definizione di maggiorante e di estremo superiore di un insieme.

Primo compitino, 3 aprile 2003

Seconda parte, gruppo A

1. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
   a) la famiglia X_1 dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con 5 elementi;
   b) la famiglia X_2 dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$;
   c) l'insieme X_3 delle successioni (x_n) tali che $x_n \in \mathbb{Z}$ per ogni n, e $x_n \to 0$;
   d) l'insieme X_4 delle successioni definite come in c) sostituendo a $\mathbb{Z}$ l'insieme dei reciproci dei numeri naturali.

2. Dato un numero reale y e due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y^- := \max\{-y, 0\}$ è la parte negativa di y, e $\min\{f, g\}$ la funzione data da $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$.
   a) Dimostrare che se f è continua allora $|f|$ ed f^- sono continue.
   b) È vero che se $|f|$ è continua allora f è continua?
   c) È vero che se $|f|$ ed f^- sono continue allora f è continua?
   d) Dimostrare che se f e g sono continue, allora $\min\{f, g\}$ è continua.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data data da $f(x) := x^5 + 3x^3 + 2x - 6$. Dimostrare che f è iniettiva e surgettiva e calcolare $\lim f^{-1}(1/\log y)$ per $y \to +\infty$.

4. Sia a un numero positivo, e sia (x_n) la successione definita per ricorrenza come segue:
   $$x_1 := 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} := x_n + a^n e^{-x_n} \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$
   Dimostrare che (x_n) è crescente per ogni a. Dire quindi se il limite di (x_n) è finito o infinito nei seguenti casi: a) $a = 1$; b) $a > 1$; c) $a < 1$.

5. Sia L un numero finito, e sia (x_n) una successione di numeri reali. Poniamo
   $$y_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \quad \text{e} \quad z_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{4n}}{3n} .$$
   a) Dimostrare che $x_n \to L$ implica $y_n \to L$ e $z_n \to L$.
   b) Far vedere che se y_n (o z_n) converge non è detto che x_n converga.
   c) Dimostrare che $y_n \to L$ implica $z_n \to L$.
   d) Far vedere che in generale se z_n converge non è detto che y_n converga.

Seconda parte, gruppo B

1. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
   a) la famiglia X_1 dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con 6 elementi;
   b) la famiglia X_2 dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$;
   c) l'insieme X_3 delle successioni (x_n) tali che $x_n \in \mathbb{N}$ per ogni n, e $x_n \to 0$;
   d) l'insieme X_4 delle successioni definite come in c) sostituendo a $\mathbb{N}$ l'insieme delle potenze intere negative di 2.

2. Dato un numero reale y e due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y^+ := \max\{y, 0\}$ è la parte positiva di y, e $\max\{f, g\}$ la funzione data da $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$.
   a) Dimostrare che se f è continua allora $|f|$ ed f^+ sono continue.
   b) È vero che se $|f|$ è continua allora f è continua?
   c) È vero che se $|f|$ ed f^+ sono continue allora f è continua?
   d) Dimostrare che se f e g sono continue, allora $\max\{f, g\}$ è continua.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data data da $f(x) := x^7 + 4x^3 + x + 6$. Dimostrare che f è iniettiva e surgettiva e calcolare $\lim f^{-1}(e^{-y})$ per $y \to +\infty$.

4. Sia a un numero positivo, e sia (x_n) la successione definita per ricorrenza come segue:

$$x_0 := 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} := x_n + a^n e^{-x_n} \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Dimostrare che (x_n) è crescente per ogni a. Dire quindi se il limite di (x_n) è finito o infinito nei seguenti casi: a) $a = 1$; b) $a > 1$; c) $a < 1$.

5. Sia L un numero finito, e sia (x_n) una successione di numeri reali. Poniamo

$$y_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \quad \text{e} \quad z_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{4n}}{3n} \ .$$

a) Dimostrare che $x_n \to L$ implica $y_n \to L$ e $z_n \to L$.
b) Far vedere che se y_n (o z_n) converge non è detto che x_n converga.
c) Dimostrare che $y_n \to L$ implica $z_n \to L$.
d) Far vedere che in generale se z_n converge non è detto che y_n converga.

SECONDO COMPITINO, 22 MAGGIO 2003

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Sia $f_a(x) := x^{-a}\arctan(e^x)$. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il limite di f_a a $+\infty$ è zero, e per quali l'integrale di f_a da 1 a $+\infty$ risulta finito.
2. Sia $n \geq 2$ un intero fissato. Per ciascuno dei seguenti insiemi di matrici $n \times n$, dire se è finito, numerabile o più che numerabile:
   a) matrici con coefficienti 0 oppure 1;
   b) matrici con coefficienti reali e traccia nulla;
   c) matrici con coefficienti complessi e determinante nullo;
   d) matrici con coefficienti interi.
3. Dire quali delle seguenti serie risultano convergenti
$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{2^n n} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{2^n}{n} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{2^n}{n!}\ .$$
4. Calcolare, per $t > 0$, l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-tx}dx$.
5. Sia A l'insieme dei numeri e^{-n} con $n \in \mathbb{N}$. Determinarne estremo inferiore e superiore, e dire se si tratta di minimo e massimo.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_0^{+\infty} 2^n(2+\cos n)\,x^n$.
7. Calcolare (in forma cartesiana) il numero $\big(1+\sqrt{3}i\big)^6$.
8. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Sia $f_a(x) := x^a e^{-x}$. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il limite di f_a a $+\infty$ è zero, e per quali l'integrale di f_a da 1 a $+\infty$ risulta finito.
2. Sia $n \geq 2$ un intero fissato. Per ciascuno dei seguenti insiemi di matrici $n \times n$, dire se è finito, numerabile o più che numerabile:
   a) matrici con coefficienti razionali;
   b) matrici con coefficienti ± 1 e traccia nulla;
   c) matrici triangolari superiori con coefficienti complessi;
   d) matrici con coefficienti reali e invertibili.
3. Dire quali delle seguenti serie risultano convergenti
$$\sum_1^{+\infty} \frac{3^n}{(2n)!} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{1}{3^n 2n} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{3^n}{2n}\ .$$
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{|\log x|^a}{x}\,dx$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
5. Sia A l'insieme dei valori di e^x con $x \in (-\infty, 1]$. Determinarne estremo inferiore e superiore, e dire se si tratta di minimo e massimo.

Secondo compitino, 22 maggio 2003

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_0^{+\infty} n(2-\cos n)\, x^n$.

7. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = -4$.

8. Dare un esempio di serie a termini reali che non diverge a $\pm\infty$ né converge.

Seconda parte, gruppo A

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\sum_2^{+\infty} \big[(n^2-1)^a - (n^2+1)^a\big]$.

2. Dati $\alpha, \beta > 0$, si ponga
$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0, \\ x^\alpha \sin(1/x^\beta) & \text{per } x > 0. \end{cases}$$
Dire per quali α e β si verificano le seguenti condizioni:
a) $f(x)$ è continua in $[0, +\infty)$,
b) $f(x)$ è derivabile in $[0, +\infty)$,
c) $f'(x)$ è continua in $[0, +\infty)$,
d) $f(x)$ è derivabile due volte in $[0, +\infty)$.
Fissato $\beta = 1$ ed n intero con $n \geq 2$, dire per quali α si ha che:
e) $f(x)$ è derivabile n volte in $[0, +\infty)$,
f) $D^n f(x)$ è continua in $[0, +\infty)$.

3. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
a) Dimostrare che se f è di classe C^1 ed esiste $L := \lim_{x\to+\infty} f'(x)$, allora $L = 0$.
b) Far vedere con un esempio che se f è di classe C^1 non è detto che L esista.
c) Dimostrare che se f è di classe C^2 e $\int_0^{+\infty} |f''(x)|\, dx < +\infty$, allora L deve esistere.
d) Dimostrare che se f è di classe C^2 e $|f''(x)| \leq 1$, allora L deve esistere.

4. a) Sia $q := \underbrace{9\,9 \cdots 9\,9}_{h \text{ cifre}}$ con $h \geq 1$. Dimostrare che $1/q = 0,\underbrace{0\,0 \cdots 0\,1}_{h \text{ cifre}}\underbrace{0\,0 \cdots 0\,1}_{h \text{ cifre}} \cdots$
b) Dimostrare che ogni numero con rappresentazione decimale periodica è razionale.
c) Dimostrare che la rappresentazione decimale di ogni numero razionale è periodica.

Seconda parte, gruppo B

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\sum_1^{+\infty} \big[(n+2)^a - n^a\big]$.

2. Uguale al gruppo A

3. Uguale al gruppo A

4. Uguale al gruppo A

SCRITTO DEL I APPELLO, 12 GIUGNO 2003

PRIMA PARTE

1. Dei seguenti insiemi, dire se sono finiti, numerabili o più che numerabili:
   a) polinomi a coefficienti interi;
   b) soluzioni dell'equazione differenziale $y' + y = 0$ definite su $\mathbb{R}$;
   c) soluzioni dell'equazione $\sin(x^2) = 0$.
2. Dare un'esempio di funzione continua e derivabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la cui derivata non si annulla nel punto di massimo.
3. Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \sin\Big(\frac{1}{x+x^2}\Big)dx$ è finito?
4. Calcolare il valore di $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n e^{-n}$.
5. Calcolare la derivata di $f(x) := \displaystyle\int_0^{2x} te^{t+1}\,dt$.
6. Calcolare i raggi di convergenza delle serie di potenze $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{x^n}{1+n^2}$ e $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{x^{2n}}{2^n}$.
7. Dare un'esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ma non C^2.
8. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $1 \geq |z| \geq |z - 1 + i|$.

SECONDA PARTE

1. a) Dato $a \in \mathbb{R}$, determinare la parte principale in 0 di
   $$f_a(x) := x^a \sin(x^3 + x^4) \sin(e^{-x}) \ .$$
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty f_a(x)\,dx$ risulta finito.
2. Sia data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con limite $+\infty$ a $\pm\infty$. Dimostrare che f ammette un punto di minimo su $\mathbb{R}$. Com'è fatta l'immagine di f?
3. a) Calcolare il raggio di convergenza R della serie
   $$f(x) := \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \ . \qquad (1)$$
   b) Determinare il comportamento della serie (1) per *ogni* punto $x \in \mathbb{R}$.
   c) Determinare esplicitamente f', e quindi f, per $x \in (-R, R)$.
   d) Provare a calcolare $f(\pm R)$. Qual è la difficoltà?
4. Sia X l'insieme delle successioni di numeri reali (x_n) con $n = 0, 1, 2, \ldots$ che soddisfano la seguente condizione:
   $$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{per ogni } n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (2)$$
   a) Dimostrare che X è uno spazio vettoriale.
   b) Dimostrare che dati $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ esiste una ed una sola successione $(x_n) \in X$ tale che $x_0 = a_0$ ed $x_1 = a_1$. Qual è la dimensione di X?
   c) Trovare tutte le successioni $(x_n) \in X$ della forma $x_n = \lambda^n$ con $\lambda \neq 0$ numero reale.
   d) Dare una formula esplicita per la successione $(x_n) \in X$ tale che $x_0 = x_1 = 1$.

Scritto del secondo appello, 10 luglio 2003

Prima parte

1. Determinare il dominio della funzione $\sqrt{|x+1|-2}$.
2. Dire quali tra le seguenti funzioni sono derivabile su tutto $\mathbb{R}$: $e^{|x|}$, $|e^x|$, e^{x^2}.
3. Dire per quali x la serie $\sum_0^{+\infty}(-1)^n|x|^{n/2}$ converge, e calcolarne la somma.
4. Trovare una primitiva di $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.
5. Dare un esempio di funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua, con limite $+\infty$ a $+\infty$, ma che non sia definitivamente crescente.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_1^{+\infty} n^n(3+\sin n)\,x^n$.
7. Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $e^z=-1$.
8. Enunciare il teorema di Rolle.

Seconda parte

1. Studiare, al variare di $a\in\mathbb{R}$, la convergenza di $\int_1^\infty \big[e^{-1/x}-\cos(a/\sqrt{x})\big]\,dx$.
2. Si consideri la serie di potenze $\sum_2^\infty \dfrac{x^n}{n(n-1)}$.
   a) Determinarne il raggio di convergenza;
   b) discutere il comportamento della serie al variare di $x\in\mathbb{R}$;
   c) calcolare esplicitamente il valore.
3. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che:
   a) dati due zeri distinti (cioè punti in cui f si annulla), esiste un punto di massimo o minimo relativo tra essi strettamente compreso;
   b) se f è derivabile due volte con f'' strettamente positiva, allora f ha al più due zeri;
   c) se f è derivabile n volte con D^nf strettamente positiva, allora f ha al più n zeri.
4. Dei seguenti insiemi di funzioni, dire quali hanno cardinalità numerabile, quali del continuo (cioè di $\mathbb{R}$), quali ancora maggiore:
   a) funzioni da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$;
   b) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$;
   c) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue;
   d) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive.
   e) funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ bigettive.

Scritto del terzo appello, 8 settembre 2003

Prima parte

1. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ ax^2 + b & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$
2. Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} \int_0^x e^{-t^2} dt$.
3. Per quali numeri reali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(1/x^a)}{x^2} dx$ è finito?
4. Calcolare una primitiva di $(\sin(x))^2$.
5. Sia X un insieme di 5 elementi. Quante sono le funzioni da X in X?
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_1^{\infty} n^{3n+5} x^n$.
7. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z - 2i + 1| \leq 1$.
8. Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Seconda parte

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\sum_1^{+\infty} \left[e^{1/n} + a\sin(1/n) - 1\right]$.
2. Siano $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continue. Dimostrare che
   a) $h(x) := f(g(x))$ è uniformemente continua.
   b) Se inoltre f e g sono limitate allora $u(x) := f(x)g(x)$ è uniformemente continua.
3. Studiare al variare di $\alpha \geq 0$, la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{4\log(1+a_n)}{\log(5)} \end{cases}$$

   Cosa succede per $-1 < \alpha < 0$?

Scritto del quarto appello, 13 gennaio 2004

Prima parte

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor in zero all'ordine n di $(1+x)^{-1}$ e di $\log(1-x)$.
2. Calcolare il valore di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3. Disegnare il grafico della funzione $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{a+1}+x^a}\,dx$ è finito.
5. Calcolare le radici quarte complesse di -4.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} x \cos x\,dx$.
7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(e^{3x}+e^{-3x})}{\log x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\log x}$.
8. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Seconda parte

1. Determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che sia massimo l'ordine di infinitesimo in 0 della funzione

$$f(x) = \int_0^x 1 + \alpha e^t + \beta \sin(\beta t)\,dt\ .$$

Per tali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, indicare poi la parte principale di f.

2. a) Dato $n \geq 1$ intero, calcolare $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq h\leq n \\ h \text{ pari}}} \binom{n}{h}$.

b) Dato $n \geq 1$ intero, calcolare $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq h\leq n \\ h\equiv 0 \mod(4)}} \binom{n}{h}$.

[*Suggerimento per a): sviluppare* $(1+1)^n$ *e* $(1-1)^n$ *con il binomio di Newton.*]

3. Si definisce il prodotto infinito di una successione di numeri reali a_n come il limite (se esiste)

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} \prod_{n=0}^{m} a_n\ . \tag{1}$$

Dimostrare che:
a) se $a_n \geq 1$ per ogni n allora il limite in (1) esiste ed appartiene a $[1, +\infty]$;
b) se $a_n \neq 0$ per ogni n ed il limite in (1) esiste ed è finito, allora $a_n \to 1$.
c) data una successione di numeri reali $b_n \geq 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \iff \prod_{n=0}^{\infty}(1+b_n) < +\infty\ . \tag{2}$$

Scritto del V appello, 11 febbraio 2004

Prima parte

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor in zero all'ordine n di e^{-x} e di $\dfrac{1}{1-x^2}$.
2. Calcolare la derivata di $f(x) = 4^{-x} e^{2x \log 2}$.
3. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{1-x}$.
4. Dire per quali valore di $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2 + x^a + \sin(ax)}\,dx$ è finito.
5. Calcolare $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{-3}$.
6. Determinare l'intersezione $\displaystyle\bigcap_{r>0} Q_r$ dove $Q_r := [0, 2r] \times [-r, r]$, con r numero reale positivo.
7. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^3)}{x^2 \cos x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^x$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \log x$.
8. Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Seconda parte

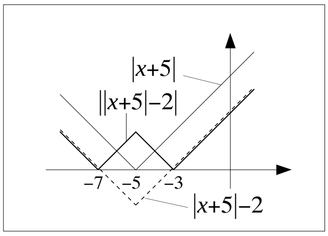
1. Discutere, al variare del parametro reale $a > 0$ la convergenza assoluta o meno della serie
$$\sum_1^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n^a}\right) - \tan\left(\frac{1}{n^a}\right)\right].$$
2. a) Dimostrare che $\cos(\sqrt{x})$ è derivabile in $[0, \infty[$ e calcolarne la derivata.
b) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari e di classe $C^2(\mathbb{R})$, dimostrare che $f(\sqrt{x})$ è derivabile in $[0, \infty[$, e calcolarne la derivata.
3. Dati $a, b > 0$, sia $T_{a,b}$ il triangolo rettangolo (chiuso) di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$.
a) Dire per quali a, b il triangolo $T_{a,b}$ è contenuto in $S := \{(x, y) : \ 0 \le y \le e^{-x}\}$.
b) Tra i triangoli di cui al punto a), determinare quelli di area massima (se esistono).

Elementi di Analisi Matematica, I modulo, a.a. 2002/03 - Soluzioni

Compitino di prova, 14 novembre 2002

Prima parte

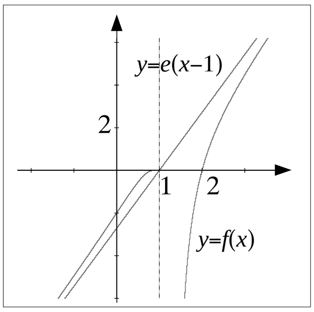
1. Il dominio è $(-5, 1] \cup [2. +\infty)$.
2. Sì!
3. f è singolare solo per $x = a$, e quindi, per essere pari, deve necessariamente essere $a = 0$ (che è chiaramente sufficiente).
4. Siccome la funzione e^{-x} è strettamente decrescente, basta risolvere il problema per $f(x) = x(ax + b)$, per cui i punti di minimo o massimo assoluti coincidono con quelli per cui si annulla la derivata. Dunque deve essere $f'(-1/2) =$, ovvero $a = b \neq 0$.
5. $\dfrac{\pi}{12} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{12}$.
6. $f'(x) = 0$. Notare che infatti $f(x) = \pi/2$ per $x > 0$ e $f(x) = -\pi/2$ per $x < 0$.
7. Disegnando il grafico di f (a lato) si vede che $x = -7$ e $x = -3$ sono punti di minimo (assoluto) di f, mentre $x = -5$ è un punto di massimo locale.



8. Vanno bene sia la semiretta $(-\infty, 0]$ che la semiretta $[0, +\infty)$, dove $f^{-1}(y) = \sqrt{1 + y/4}$ e $f^{-1}(y) = -\sqrt{1 + y/4}$, rispettivamente.

Seconda parte

1. Siccome il termine di sinistra della disequazione è una funzione pari di x, possiamo limitarci agli x positivi. Ponendo $f(x) := e^x - x + \cos x$, vogliamo dunque calcolare il valore minimo di f. Osserviamo che $f''(x) = e^x - \cos x \geq 0$ per $x \geq 0$ (perché $e^x \geq 1$ e $\cos x \leq 1$), e quindi f è convessa. Inoltre $f'(0) = 0$, e quindi 0 è il punto di minimo assoluto di f (ristretta alla semiretta $x \geq 0$). Pertanto $\min f = f(0) = 2$, e la disequazione è verificata se e solo se $a \leq 2$.



2. La funzione f è definita (e derivabile) per $x \neq 1$, tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, tende a $-\infty$ per $x \to 1^+$, e tende a 0 per $x \to 1^-$. Inoltre, facendo i conti (tanti) si ottiene
$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}}$$
$$f''(x) = -\frac{x}{(x-1)^4} e^{\frac{x}{x-1}} \ ,$$
quindi la funzione è sempre strettamente crescente, convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$. Usando l'approssimazione $e^y \simeq 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$ si ottiene inoltre $f(x) = e(x-1) + o(1)$ per $x \to \pm\infty$, che dà gli asintoti di f. Osserviamo infine che $f'(x)$ tende a 0 per $x \to 1^-$. Questo permette di ottenere il disegno riportato in figura.
3. Si osservi innanzitutto che il termine di sinistra dell'equazione non è definito per $x = 0$, perché si annulla il denominatore, e quindi possiamo assumere che sia $x \neq 0$. In questo caso, per $\alpha = 0$, l'equazione non ha soluzioni. Per $\alpha \neq 0$, invece, l'equazione diventa $x + \log(x + 1) = 1/\alpha$. Si vede ora che la funzione $f(x) := x + \log(x + 1)$ è definita per $x > -1$, strettamente crescente, ed ha limite $+\infty$ in $+\infty$ e $-\infty$ in -1^+, e quindi c'è sempre una ed una sola soluzione.

Primo compitino, 28 novembre 2002

Prima parte, gruppo A

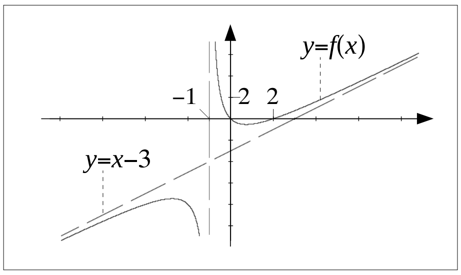
1. Deve essere $\log(x+1)+1 \geq 0$, ovvero $x \geq 1/e - 1$.
2. $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right]$.
3. Essendo $e^x \sim 1$ e $\sin x \sim x$, si ha $x^4 e^x \sin(x^2) \sim x^6$ che è $o(x^a)$ se e solo se $a < 6$.
4. Si tratta del ben noto grafico della funzione $1/x$ traslato a destra di 1 ed in alto di 2.
5. Siccome $f''(x) = 6ax + 4b$, deve essere $f'(1/6) = a + 4b = 0$, ovvero $a = -4b$ (e $a \neq 0$).
6. All'interno del campo di esistenza, la funzione si semplifica a $f(x) = x - 1$, per cui $f(x) = 1$ e $f''(x) = 0$.
7. Per $x \to +\infty$, ogni potenza è "o piccolo" di ogni esponenziale con base maggiore di 1, quindi il limite è 0.
8. Siccome numeratore è limitato, ed il denominatore tende a $+\infty$, il limite è 0.

Prima parte, gruppo B

1. Deve essere $\log(x+2)+2 \geq 0$, ovvero $x \geq 1/e^2 - 2$.
2. $x \in \left[\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}\right]$.
3. Essendo $e^x \sim 1$ e $\cos x \sim 1$, si ha $x^4 e^x \sin(x^2) \sim x^4$ che è $o(x^a)$ se e solo se $a < 4$.
4. Si tratta del ben noto grafico della funzione $1/x$ traslato a sinistra di 1 ed in alto di 2.
5. Siccome $f''(x) = 6ax + 8b$, deve essere $f'(1/6) = a + 8b = 0$, ovvero $a = -8b$ (e $a \neq 0$).
6. All'interno del campo di esistenza, la funzione si semplifica a $f(x) = x + 2$, per cui $f(x) = 1$ e $f''(x) = 0$.
7. Per $x \to 0^+$, il logaritmo è "o piccolo" di ogni potenza negativa, quindi il limite è 0.
8. Siccome numeratore è limitato, ed il denominatore tende a $+\infty$, il limite è 0.

Seconda parte

1. La funzione f è definita per $x \neq -1$, positiva in $(-1,0) \cup (2,+\infty)$, nulla in 0 e 2, e negativa altrove; $f(x) = x - 3 + o(1)$ per $x \to \pm\infty$ ed $f(x) = 3/(x+1) + o(1/(x+1))$ per $x \to -1$, e quindi $f(\pm\infty) = \pm\infty$, $f(1^{\pm}) = \pm\infty$.
   Inoltre $f'(x) = (x^2 + 2x - 2)(x+1)^{-2}$ si annulla in $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$; dallo studio del segno si ottiene che f è crescente negli intervalli $(-\infty, x_1]$ e $[x_2, +\infty)$, e decrescente negli intervalli $[x_1, -1)$ e $(-1, x_2]$; in particolare x_1 ed x_2 sono punti di massimo e minimo locale, rispettivamente. La derivata seconda è $f''(x) = 3(x+1)^{-3}$, e quindi f è concava nell'intervallo $(-\infty, -1)$ e convessa in $(-1, +\infty)$.



2. Siccome il denominatore è x^2, ci basta determinare l'espansione di Taylor all'ordine 2 (per $x \to 0$) del denominatore. Usando gli sviluppi noti:

$$a\cos x - be^x + \sin x = (a-b) + (1-b)x - \frac{a+b}{2}x^2 + o(x^3) \; .$$

Si presentano quindi tre casi:
1) se $a-b\neq 0$ (ovvero $a\neq b$), allora il limite è $+\infty$ per $a>b$ e $-\infty$ per $a<b$;
2) se $a-b=0$ e $1-b\neq 0$ (ovvero $a=b\neq 1$) allora il limite non esiste (per essere precisi, è $+\infty$ da un lato e $-\infty$ dall'altro);
3) se $a-b=0$ e $1-b+=0$ (ovvero $a=b=1$) allora il limite è $\frac{a+b}{2}=1$.

3. a) Usiamo lo sviluppo di $\sin x$. Lo sviluppo $\sin t = t+o(t^2)$ (con $t=x$ nel primo termine e $t=x^2$ nel secondo) dà $f(x)=o(x^3)$ e dunque non è sufficiente. Proviamo allora $\sin t = t - t^3/6 + o(t^4)$:

$$\begin{aligned}(\sin x)^2-\sin(x^2) &= \big(x-x^3/6+o(x^4)\big)^2-\big(x^2-x^6/6+o(x^8)\big)\\ &= \big(x^2-x^4/3+o(x^5)\big)-\big(x^2+o(x^5)\big)\\ &= -x^4/3+o(x^5)\ .\end{aligned}$$

b) Si procede come per a):

$$\begin{aligned}(\sin x)^n-\sin(x^n) &= \big(x-x^3/6+o(x^4)\big)^n-\big(x^n-x^{2n}/6+o(x^{4n})\big)\\ &= \big(x^n-nx^{n+2}/6+o(x^{n+2})\big)-\big(x^n+o(x^{2n-1})\big)\\ &= -nx^{n+2}/6+o(x^{n+2})\ .\end{aligned}$$

Il punto delicato è sviluppare la potenza n-esima nella prima riga: un modo è raccogliere x e usare lo sviluppo $(1+t)^n = 1+nt+o(t)$:

$$\begin{aligned}\big[x-x^3/6+o(x^4)\big]^n &= x^n\,\big[1+\underbrace{-x^2/6+o(x^2)}_{t}\big]^n\\ &= x^n\,\big[1+n(-x^2/6+o(x^2))+o(-x^2/6+o(x^2))\big]\\ &= x^n\,\big[1-nx^2/6+o(x^2)\big]\ .\end{aligned}$$

Un conto più accurato mostra in effetti che il resto nello sviluppo di f è $o(x^{n+3})$.

4. a) f è ben definita per $x\geq 1$, $f(1)=0$ e $f(+\infty)=+\infty$. Inoltre $f'(x)=1+\log x\geq 1$ per $x\geq 1$, quindi f è crescente nell'intervallo $[1,+\infty)$ ed è quindi invertibile. Siccome f mappa $[1,+\infty))$ su $[0,+\infty)$, f^{-1} mappa $[0,+\infty)$ su $[1,+\infty))$. Inoltre $f^{-1}(+\infty)=+\infty$.

b) Indichiamo ora con $x=x(y)$ l'inversa di f (come funzione di y). Siccome $x\log x = y$ e $x\to+\infty$ per $y\to+\infty$,

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{x(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\log(x(y))} = \frac{1}{+\infty} = 0\ .$$

c) Più difficile. Siccome $x = y/\log x$, dobbiamo esplicitare $\log x$ in funzione di y (almeno approssimativamente). Ora, $y = x\log x$ implica

$$\log y = \log x + \log\log x = \log x + o(\log x) \tag{1}$$

(perché $\log\log x = o(\log x)$ per $x\to+\infty$ e quindi anche per $y\to+\infty$). In particolare $\log y\sim\log x$, quindi la precedente equazione diventa

$$\log x = \log y - o(\log y) = \log y\,(1+o(1))\ . \tag{2}$$

Pertanto

$$x = \frac{y}{\log x} = \frac{y}{\log y}(1+o(1))^{-1} = \frac{y}{\log y}(1+o(1)) = \frac{y}{\log y}+o\Big(\frac{y}{\log y}\Big)\ .$$

d) Andando oltre, dalla (2) si ottiene $\log\log x = \log\log y + o(1)$, e sostituendo nella (1)

$$\log x = \log y + \log\log y + o(1)$$

e poi

$$\begin{aligned} x = \frac{y}{\log x} &= \frac{y}{\log y + \log\log y + o(1)} \\ &= \frac{y}{\log y}\Big[1 + \frac{\log\log y}{\log y} + o\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big]^{-1} \\ &= \frac{y}{\log y}\Big[1 - \frac{\log\log y}{\log y} + o\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big] = \frac{y}{\log y} - \frac{y\log\log y}{\log^2 y} + o\Big(\frac{y}{\log^2 y}\Big)\ . \end{aligned}$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2: molte "distrazioni" nella discussione del limite. In alcuni casi, sono stati semplicemente enunciati i risultati.
- Seconda parte, esercizio 3: la semplificazione degli errori è stata fatta spesso in modo approssimativo.
- Seconda parte, esercizio 4b): molte pseudo-dimostrazioni che alla fine si possono riassumere in "si vede a occhio che le cose vanno proprio così".
- Seconda parte, esercizio 4b: usando de L'Hôpital, alcuni hanno sbagliato ad applicare la formula per la derivata della funzione inversa.

Secondo compitino, 19 dicembre 2002

Prima parte, gruppo A

1. Si tratta della circonferenza (piena!) di centro $(1,-1)$ e raggio 1.
2. Usando $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + o(t^6)$ si ottiene $\sin(2x^2) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{4}{15}x^{10} + o(x^{12})$.
3. 1 e 0.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 1 + \frac{2}{x^2+1}dx = \Big|x + 2\arctan x\Big|_0^1 = 1 + \frac{\pi}{2}$.
5. Per parti: $\dfrac{3x-1}{9}e^{3x}$.
6. $\displaystyle A = \int_0^2 \sqrt{2x} - x\,dx = \left|\frac{(2x)^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2}\right|_0^2 = \frac{2}{3}$.
7. $\dfrac{y'}{y^2+1} = 3x^2+1$, $\arctan y = x^3 + x + c$; $y(0) = 0$ implica $c = 0$, e quindi $y = \tan(x^3+x)$.
8. $y = e^{-x}(\alpha + \beta x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

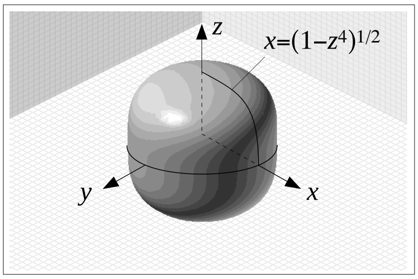
Prima parte, gruppo B

1. Si tratta della circonferenza (piena!) di centro $(-1,1)$ e raggio 1.
2. Usando $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+o(t^4)$ si ottiene $e^{-x^3} = 1-x^3+\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{6}x^9+\frac{1}{24}x^{12}+o(x^{12})$.
3. 0 e $+\infty$.
4. $\displaystyle\int_0^1 1 - \frac{4}{x^2+1}dx = \Big|x - 4\arctan x\Big|_0^1 = 1 - \pi$.
5. Per parti: $\dfrac{x}{2}\sin(2x) + \dfrac{1}{4}\cos(2x)$.
6. $\displaystyle A = \int_0^1 \sqrt{x} - x\,dx = \left|\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{6}$.
7. $\dfrac{y'}{y^2+1} = e^x$, $\arctan y = e^x + c$; $y(0) = 0$ implica $c = -1$, e quindi $y = \tan(e^x - 1)$.
8. $y = e^{-x}(\alpha\cos x + \beta\sin x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo A

1. Tramite il cambio di variabile $e^x = t$ otteniamo
$$\int_{-\infty}^0 \frac{|3e^{2x} - e^x|}{e^{2x} - e^x - 6}dx = \int_0^1 \frac{|3t-1|}{t^2-t-6}dt$$
$$= \int_0^{1/3} \frac{1-3t}{t^2-t-6}dt + \int_{1/3}^1 \frac{3t-1}{t^2-t-6}dt$$
e siccome $\dfrac{3t-1}{t^2-t-6} = \dfrac{8/5}{t-3} + \dfrac{7/5}{t+2}$ ha come primitiva $\dfrac{8}{5}\log|t-3| + \dfrac{7}{5}\log|t+2|$,
$$= -\left|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\right|_0^{1/3} + \left|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\right|_{1/3}^1$$
$$= 9\log 3 - \frac{33}{5}\log 2 - \frac{14}{5}\log 7 \simeq -0,136\ .$$

2. Conviene considerare le sezioni di A lungo l'asse z. Infatti, fissato $z \in \mathbb{R}$, A_z è l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 + y^2 \leq 1 - z^4$, e dunque si tratta dell'insieme vuoto se $1 - z^4 < 0$, ovvero se $|z| > 1$, e del cerchio (pieno) di centro l'origine e raggio $\sqrt{1 - z^4}$ se $|z| \leq 1$. Questo permette di tracciare una raffigurazione sommaria di A (figura a lato); si noti tuttavia che per calcolare il volume questo non è necessario, ed infatti



$$\mathrm{vol}(A) = \int_{-1}^{1} \mathrm{area}(A_z)\, dz = \int_{-1}^{1} \pi(1 - z^4)\, dz = \frac{8\pi}{5} .$$

3. Usiamo lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange di e^t all'ordine 2:

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{e^\xi}{6}t^3 .$$

Per $t \leq 0$ si ha $t \leq \xi \leq 0$, e quindi $0 \leq e^\xi \leq 1$ e

$$\left| e^t - \Big(1 + t + \frac{t^2}{2}\Big) \right| \leq \left| \frac{t^3}{6} \right| .$$

Sostituendo $t = -x^2$, ed integrando per x compreso tra 0 e 1/10 otteniamo

$$\left| \int_0^{1/10} e^{-x^2} dx - \int_0^{1/10} 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} dx \right| \leq \int_0^{1/10} \frac{x^6}{6}\, dx$$

ovvero

$$\left| \int_0^{1/10} e^{-x^2} dx - \Big(\frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{10^6} \Big) \right| \leq \frac{1}{42 \cdot 10^7} < \frac{1}{10^8} .$$

Pertanto l'integrale vale $\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{3 \cdot 10^3} + \dfrac{1}{10^6} \pm 10^{-8} = 0,0996676 \pm 10^{-8}$.

4. a) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea $y'' + 5y' + 4y = 0$ è $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 4)(\lambda + 1)$, e quindi la soluzione generale è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = 2e^x$ della forma $a\, e^x$, e si ottiene $a = 1/5$. Si cerca poi una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = \sin x$ della forma $a \sin x + b \cos x$, e si ottiene $a = 3/34$ e $b = -5/34$. Dunque la soluzione generale dell'equazione (*) con $a = 3$ e $c(x) = 2e^x + \sin x$ è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{e^x}{5} + \frac{3 \sin x - 5 \cos x}{34} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = 2x^2$ della forma $ax^2 + bx + c$, e si ottiene l'identità $4ax^2 + (10a + 4b)x + (2a + 5b + c) = 2x^2$, che dà luogo al sistema

$$\begin{cases} 4a = 2 \\ 4b = -10a \\ 4c = -2a - 5b \end{cases} , \qquad \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -5/4 \\ c = 21/16 \end{cases} .$$

Quindi la soluzione generale di (*) con $a = 3$ e $c(x) = 2x^2$ è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{4} + \frac{21}{16} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Siccome e^{-x} ed e^{-4x} convergono entrambi a zero per $x \to +\infty$, la parte principale di *tutte* le soluzioni è $x^2/2$.

c) Siccome le soluzioni dell'equazione omogenea tendono a zero come degli esponenziali per $x \to +\infty$, la parte principale di *tutte* le soluzioni è la stessa, e corrisponde a quella di una soluzione particolare. Dato $c(x) = \sum_0^k c_h x^h$ polinomio di grado k (per cui $c_k \neq 0$), cerchiamo una soluzione particolare tra i polinomi di grado k, ovvero della forma $\bar{y} = \sum_0^k a_h x^h$. L'equazione si riduce allora alla seguente identità di polinomi:

$$\sum_{h=0}^{k} \big[(h+2)(h+1)a_{h+2} + 5(h+1)a_{h+1} + 4a_h\big] x^h = \sum_{h=0}^{k} c_h x^h \ ,$$

dove si è posto $a_h = 0$ quando $h > k$. Otteniamo pertanto il sistema

$$\begin{cases} 4a_k = c_k \\ 4a_{k-1} = c_{k-1} - 5ka_k \\ 4a_{k-2} = c_{k-2} - 5(k-1)a_{k-1} - k(k-1)a_k \\ \quad \vdots \\ 4a_h = c_h - 5(h+1)a_{h+1} - (h+2)(h+1)a_{h+2} \\ \quad \vdots \\ 4a_0 = c_0 - 5a_1 - 2a_2 \ . \end{cases}$$

Questo sistema è chiaramente risolubile, e quindi esiste una soluzione particolare della forma cercata. Inoltre, la prima equazione permette di determinare il termine di ordine più alto di $\bar{y}$, e cioè $\frac{c_k}{4} x^k$, che risulta essere la parte principale per $x \to +\infty$ di *tutte* le soluzioni.

d) Data l'equazione omogenea $y'' + Ay' + By = 0$, le soluzioni sono sempre combinazioni lineari di (I) $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$, (II) $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$, (III) $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$.
Nel primo e nel secondo caso le soluzioni non sono mai tutte limitate. Nel terzo caso, le soluzioni sono limitate se e solo se $\alpha = 0$, cioè se il polinomio caratteristico ha soluzioni immaginarie pure, vale a dire è della forma $\lambda^2 + \beta^2$, cosa che si verifica per $A = 0$ e $B > 0$. Imponendo queste condizioni nell'equazione $(*)$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a^2 - 4 = 0 \\ a + 1 > 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} a^2 = \pm 2 \\ a + 1 > 0 \end{cases} , \quad a = 2 \ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Come per il gruppo A: tramite il cambio di variabile $e^x = t$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|-2e^{2x} + e^x|}{e^{2x} + e^x - 6} dx = \int_0^1 \frac{|-2t+1|}{t^2+t-6} dt$$
$$= \int_0^{1/2} \frac{1-2t}{t^2+t-6} dt + \int_{1/2}^{1} \frac{2t-1}{t^2+t-6} dt$$

e siccome $\dfrac{2t-1}{t^2+t-6} = \dfrac{7/5}{t+3} + \dfrac{3/5}{t-2}$ ha come primitiva $\dfrac{7}{5}\log|t+3| + \dfrac{3}{5}\log|t-2|$,

$$= -\Big|\frac{7}{5}\log|t+3| + \frac{3}{5}\log|t-2|\Big|_0^{1/2} + \Big|\frac{7}{5}\log|t+3| + \frac{3}{5}\log|t-2|\Big|_{1/2}^1$$
$$= \frac{1}{5}\log 3 + \frac{37}{5}\log 2 - \frac{14}{5}\log 7 \simeq -0,099\ .$$

2. Si procede come per il gruppo A:

$$\mathrm{vol}(A) = \int_{-1}^{1} \mathrm{area}(A_z)\,dz = \int_{-1}^{1} \pi(1-z^6)\,dz = \frac{12\pi}{7}\ .$$

3. Uguale al gruppo A.

4. a) La soluzione generale dell'equazione omogenea $y'' + 5y' + 4y = 0$ è $y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = 2e^{-x}$ della forma $a\, xe^{x}$ (perché e^{-x} già risolve l'equazione omogenea), e si ottiene $a = 2/3$. Poi si procede come per il gruppo A, e si ottiene che la soluzione generale di (*) con $a = 3$ e $c(x) = 2e^{-x} + \sin x$ è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{2x\, e^{x}}{3} + \frac{3\sin x - 5\cos x}{34} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea con $c(x) = x^2$ della forma $ax^2 + bx + c$, e alla fine si ottiene che la soluzione generale di (*) con $a = 3$ e $c(x) = x^2$ è

$$y = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-4x} + \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{8} + \frac{21}{32} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

la cui parte principale è $x^2/4$.

c) e d) sono uguali al gruppo A.

COMMENTI

- Prima parte: molti errori nell'esercizio 1.
- Seconda parte, esercizio 1: alcuni non si sono accorti che per liberarsi del modulo che appare al numeratore dell'integranda basta spezzare l'intervallo di integrazione in due (oppure hanno ignorato il problema, decidendo che il segno è costante nell'intervallo di integrazione).
- Seconda parte, esercizio 3: il punto dell'esercizio è, sostanzialmente, trovare l'espansione di Taylor di e^{-x^2} di grado *più basso* il cui integrale differisce da quello di e^{-x^2} per meno di 10^{-7}, giustificando rigorosamente la risposta. In effetti basta usare i primi tre termini dello sviluppo, vale a dire, $1 - x^2 + x^4/2$. Prendere invece i primi quattro o cinque termini e dichiarare che "ovviamente" l'errore è nei limiti richiesti, vuol dire mancare il punto dell'esercizio (pur essendo la risposta corretta).
- Seconda parte, esercizio 4a): alcuni si sono limitati ad esibire una soluzione particolare. Per quanto questo sia formalmente corretto, il punto dell'esercizio sarebbe invece di spiegare COME si è arrivati a tale soluzione ...
- Seconda parte, esercizio 4b: alcuni hanno calcolato la parte principale della soluzione per $x \to 0$ invece che per $x \to +\infty$. Altri non si sono accorti che la parte principale di tutte le soluzioni è la stessa, e che quindi non c'è bisogno di calcolare la soluzione che soddisfa i dati iniziali indicati. Altri ancora hanno calcolato detta soluzione e poi hanno omesso di indicarne la parte principale.

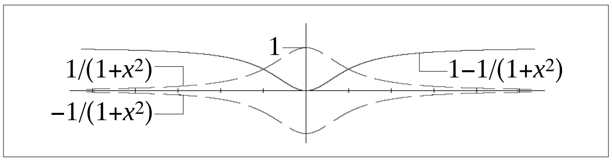
- Seconda parte, esercizio 4b): è opinione diffusa che $9 + 25 = 36 \ldots$
- Seconda parte, esercizio 4c): se si parte dall'assunto che *di sicuro* c'è una soluzione particolare tra i polinomi di grado k, è allora facile vedere che il termine di grado massimo deve essere uguale a quello di $c(x)$ diviso per 4. Dimostrare quest'assunto è più difficile.

Scritto del primo appello, 13 gennaio 2003

Prima parte, gruppo A

1. $\sin x \le 1/2$, ovvero $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big[\Big(\frac{5}{6}+2n\Big)\pi, \Big(\frac{13}{6}+2n\Big)\pi\Big]$.

2. Si tratta del (ben noto!) grafico di $1/(1+x^2)$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato in basso di 1.



3. $\displaystyle\int 9x^2 \log x\,dx = 3x^2 \log x - \int 3x^3 \frac{1}{x}\,dx = 3x^3 \log x - x^3 = x^3(3\log x - 1)$.

4. $1000^{10} = 10^{30} < 100! < 100^{150} = 10^{300}$.

5. $1 + \sin(ax) - e^{3x} = (a-3)x - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$. Il limite è finito per $a = 3$, e vale $-\frac{9}{2}$.

6. $\frac{y'}{1+y} = \sin x$, $\log|1+y| = c - \cos x$ e deve essere $c = 1$. Quindi $e^{1-\cos x} - 1$.

7. $y = \alpha^{-2x} + \beta e^{-x} + e^x$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

8. $\frac{(2x^7+1)^{1/5}-(x^7+1)^{1/5}}{(2x^{35}+1)^{1/25}-(x^{21}+1)^{1/15}} = \frac{\left(1+\frac{2}{5}x^7+o(x^7)\right)-\left(1+\frac{1}{5}x^7+o(x^7)\right)}{\left(1+\frac{2}{25}x^{35}+o(x^{35})\right)-\left(1+\frac{1}{15}x^{21}+o(x^{21})\right)} = \frac{\frac{1}{5}x^7+o(x^7)}{-\frac{1}{15}x^{21}+o(x^{21})} \sim -\frac{3}{x^{14}}$.
   Quest'ultima funzione tende a $-\infty$ in per $x \to 0$ (la potenza è pari!).

Prima parte, gruppo B

1. $\sin x < 1/2$, ovvero $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big]\Big(\frac{5}{6}+2n\Big)\pi, \Big(\frac{13}{6}+2n\Big)\pi\Big[$.

2. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'origine (oppure del grafico di e^{-x} riflesso rispetto all'asse delle y) e traslato a destra di 1.

3. $x^4(4\log x - 1)$.

4. $1000^{20} = 10^{60} < 100! < 100^{500} = 10^{1000}$.

5. Come il gruppo A.

6. Come il gruppo A.

7. $y = (\alpha + \beta x)e^{-x} + e^x$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

8. Come il gruppo A.

Seconda parte, gruppo A

1. Ponendo $f(x) := x^3/(x-1)$, l'equazione può essere riscritta come $f(x) = a^2$. Siccome $f'(x) = x^2(2x-3)/(x-1)^2$, possiamo studiare gli intervalli di monotonia della funzione: f è (strettamente) decrescente in $(-\infty, 1)$, con limiti $\pm\infty$ agli estremi (e quindi l'equazione $f(x) = a^2$ ha una ed una sola soluzione per ogni a), f è decrescente in $(1, 3/2]$ con limite $+\infty$ in 1, e valore $27/4$ in $3/2$ (quindi l'equazione ha una ed una sola soluzione per $a^2 \ge 27/4$), infine f è crescente in $(3/2, +\infty)$ (quindi l'equazione ha una ed una sola soluzione per

$a^2 > 27/4$). Concludendo, l'equazione ha una soluzione per $a^2 < 27/4$, due per $a = 27/4$ e tre per $a > 27/4$.

2. a) La soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = ae^{-x} + be^{3x}$ con $a, b \in \mathbb{R}$; cercando una soluzione particolare del tipo $y = ax + b$ otteniamo $a = -2/3$ e $b = -11/9$, e dunque la soluzione della non omogenea è

$$y = ae^{-x} + be^{3x} - \frac{6x+11}{9}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, ed il suo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 2 è

$$y = \Big(a + b - \frac{11}{9}\Big) + \Big(- a + 3b - \frac{2}{3}\Big)x + \frac{a+9b}{2}x^2 + o(x^2) \ .$$

Dunque l'ordine di infinitesimo è massimo quando si annullano i primi due termini, vale a dire, per $a = 3/4$ e $b = 17/36$, nel qual caso la parte principale di y è $5x^2/2$.

b) – c) Esiste tuttavia un'approccio più semplice che funziona per g qualunque e che non consiste nel risolvere esplicitamente l'equazione. Infatti, data una funzione $y(x)$, il suo sviluppo di Taylor al secondo ordine in 0 è $y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)x^2/2 + o(x^2)$, ed in particolare abbiamo un'infinitesimo di ordine 2 (o più) solo se

$$y(0) = y'(0) = 0 \ . \tag{$**$}$$

D'altra parte, c'è solo una soluzione dell'equazione $(*)$ che soddisfa queste condizioni, ed è necessariamente quella con ordine di infinitesimo maggiore. Inoltre, una volta noti $y(0)$ ed $y'(0)$, la $(*)$ permette di ottenere $y''(0)$:

$$y''(0) = f(0) + 3y(0) + 2y'(0) = g(0) \ .$$

e ricordando la $(**)$, lo sviluppo al secondo ordine di y diventa

$$y(x) = \frac{g(0)}{2}x^2 + o(x^2) \ .$$

Questo risolve il problema quando $g(0) \neq 0$. Se invece $g(0) = 0$, sappiamo solo che y ha ordine di infinitesimo tre o più, e dobbiamo quindi calcolare le successive derivate di y. Per fare questo, basta osservare che derivando k volte l'equazione $(*)$ si ottiene

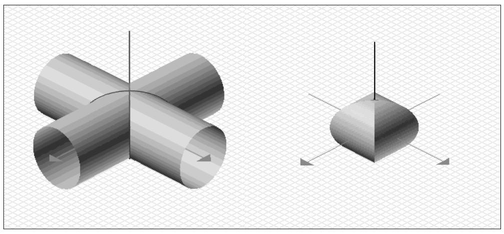
$$y(k+2)(0) = g^{(k)}(0) + 3y^{(k)}(0) + 2y^{(k+1)}(0) \ .$$

Se allora g ha tutte le derivate in 0 nulle fino all'n-esima esclusa, si vede che y ha tutte le derivate in 0 nulle fino all'$(n+2)$-esima esclusa, mentre la $(n+2)$-esima è uguale a $g^{(n)}(0)$. Quindi

$$y(x) = \frac{g^{(n)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2} + o(x^{n+2}) \ .$$

In particolare, per $g(x) = x^n$ otteniamo $y(x) = (n+2)(n+1)x^{n+2} + o(x^{n+2})$. Infine, se g ha tutte le derivate in 0 nulle (e questo può succedere anche se g non è la funzione zero), lo stesso vale per y, che ha quindi ordine di infinitesimo $+\infty$.

3. Gli insiemi C e C' sono due cilindri illimitati (pieni) di raggio 1 ed assi z e y, rispettivamente. Il solido C'', viceversa, è difficile da disegnare (vedi figura sotto).



Tuttavia si vede immediatamente che l'intersezione di C'' con il piano di equazione $x = a$ consiste dei punti (a, y, z) tali che $y^2 \leq 1 - a^2$ e $z^2 \leq 1 - a^2$. Nel piano yz, queste due disuguaglianze descrivono il quadrato con centro l'origine e lato $2\sqrt{1-a^2}$ (se $|a| \leq 1$, altrimenti si ha l'insieme vuoto). Quindi

$$\mathrm{vol}(C'') = \int_{-1}^{1} \mathrm{area}(C''_a)\, da = \int_{-1}^{1} 4(1-a^2)\, da = \frac{16}{3} \ .$$

4. Studiamo la funzione $f(x) = \tan x - ax$ nell'intervallo $[0, \pi/2)$. Si vede facilmente che per $a \leq 1$, $f'(x) = 1/\cos^2 x - a > 0$ per ogni $x > 0$, e quindi la funzione è strettamente crescente, e siccome $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x > 0$. Invece, se $a > 1$, $f'(x)$ è negativa per $x \leq \arccos(1/\sqrt{a})$ e positiva altrimenti, e quindi la funzione è strettamente decrescente in $I_1 := [0, \arccos(1/\sqrt{a})]$, e strettamente crescente in $I_2 := [\arccos(1/\sqrt{a}), \pi/2)$. In particolare, siccome $f(0) = 0$, f è negativa nel resto di I_1, assume un valore negativo nell'estremo sinistro di I_2 e tende a $+\infty$ in quello destro, e quindi assume il valore 0 una ed una sola volta in I_2.

   Riassumendo, il numero di soluzioni dell'equazione $\tan x = ax$ in $(0, \pi/2)$ è zero per $a \leq 1$, ed uno per $a > 1$. Inoltre, per $a > 1$, la soluzione x_a soddisfa $x_a > \arccos(1/\sqrt{a})$ e quindi tende a $\pi/2$ per $a \to +\infty$.
   Volendo precisare ulteriormente, se scriviamo x come $\pi/2 - y$, l'equazione diventa

$$g(y) = \frac{1}{a} \quad \text{dove si è posto } g(y) := \Big(\frac{\pi}{2} - y\Big) \tan y \ .$$

   Sostituendo a $g(y)$ il suo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 1, e cioè $\pi y/2$, otteniamo $y \sim 2/(\pi a)$ per $a \to +\infty$ (rendere rigoroso quest'ultimo passaggio non è però così facile). Concludendo,

$$x_a = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi a} + o(1/a) \ .$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Prendo $f(x) := x^3/(x-1)$, come per il gruppo A, e l'equazione diventa $f(x) = -a^2$. Siccome $-a^2 < 27/4$ per ogni a, l'equazione ha sempre una ed una sola soluzione.

2. Si procede come per il gruppo A. Anzi, le domande b) e c) sono le stesse, mentre per la a) si ottiene $y(x) = x^2/2 + o(x^2)$.

3. Uguale al gruppo A.

4. Uguale al gruppo A.

Commenti

- Prima parte, esercizio 5: molti hanno calcolato il limite applicando de L'Hôpital due volte, ed ottenendo quindi $-9/2$ qualunque sia a. Il problema è questo: dopo il primo passaggio si ha di nuovo una forma indeterminata solo quando $a = 3$; in tutti gli altri casi non si può più applicare de L'Hôpital.
- Prima parte, esercizio 6: molti hanno posto automaticamente a zero la costante che appare nella soluzione dell'equazione a variabili separabili, invece di usare la condizione iniziale per determinare quella giusta.
- Seconda parte, esercizio 2a): molti hanno calcolato la soluzione generale dell'equazione omogenea, ne hanno scritto lo sviluppo di Taylor all'ordine 2, ma poi non hanno determinato per quali valori del parametro il suo ordine di infinitesimo risultava massimo.
- Seconda parte, esercizio 3b): in molti hanno cercato di determinare la sezione di C'' a partire dal disegno. Invece, si trattava di procedere analiticamente. Altri sono stati messi in crisi dal sistema di disequazioni $y^2 \leq 1 - a^2$ e $z^2 \leq 1 - a^2$, e se la sono cavata osservando che questo implica (giustamente) $y^2 + z^2 \leq 2 - 2a^2$. Purtroppo questo significa che la sezione cercata è *contenuta* in un cerchio pieno di raggio $\sqrt{2 - 2a^2}$, ma non che è uguale!
- Seconda parte, esercizio 4: si poteva cercare di risolvere l'esercizio dimostrando che la funzione $f(x) := \tan x/x$ è crescente. Per quanto ne so, questo è però difficile da dimostrare.

Scritto del secondo appello, 7 febbraio 2003

Prima parte

1. Una primitiva f è data da $f(x) := e^x - 1$ per $x \geq 0$ e $f(x) := -e^{-x} + 1$ per $x < 0$. Infatti f deve essere della forma $e^x + a$ per $x \geq 0$ e della forma $-e^{-x} + b$ per $x \leq 0$, quindi a e b devono essere scelti in modo tale che le due funzioni coincidano in 0, vale a dire $a+1 = b-1$.

2. Deve essere $x^2 - 1 \geq 0$, ovvero $x \geq 1$ e $x \leq -1$.

3. $\dfrac{\sin(x^8)}{\log(1+x^4)} = \dfrac{x^8 + o(x^{23})}{x^4 + o(x^7)} \sim x^4.$

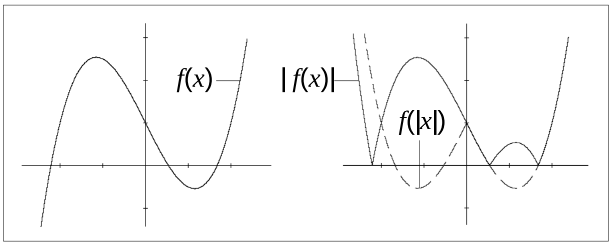
4. $\dfrac{\sin(ax) - x}{x^3} = \dfrac{(a-1)x + o(x^2)}{x^2}$. Il limite è finito solo per $a = 1$, e in tal caso vale 0.

5. Sono $+\infty$ e 0, rispettivamente.

6. $\displaystyle\int_{-2}^{6} \sqrt[3]{x+2}\, dx = \int_0^8 t^{1/3}\, dt = \left|\frac{3}{4} t^{4/3}\right|_0^8 = 12.$

7. La soluzione generale dell'equazione è $y = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Le condizioni iniziali danno $y = \cos(2x) - \sin(2x)$.

8.



Seconda parte

1. a) La funzione f tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$, e studiandone la derivata si vede che è strettamente decrescente per $x \leq x_\lambda$, e strettamente crescente per $x \geq x_\lambda$, dove $x_\lambda := \lambda/(1-\lambda)$. Dunque il valore minimo viene assunto in x_λ, ed è

$$C_\lambda := f(x_\lambda) = \frac{1}{\lambda^\lambda (1-\lambda)^{1-\lambda}}$$

b) Dividendo entrambe i termini per b e ponendo $a/b = x$, la disequazione $a + b \geq C a^\lambda b^{1-\lambda}$ può essere riscritta come $x + 1 \geq C x^\lambda$, ovvero $f(x) \geq C$. La miglior costante è dunque il minimo dei valori $f(x)$ per $x > 0$, e cioè C_λ.

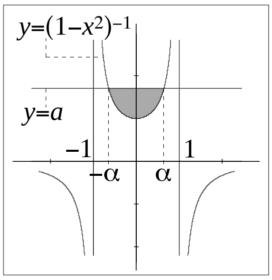
c) Si procede come nel punto b): la costante migliore è allora il minimo dei valori $f(x)$ con x rapporto di interi positivi, ovvero con x razionale positivo. Siccome f è continua ed i razionali approssimano i reali, tale valore minimo è di nuovo C_λ (per essere precisi, dovremmo parlare in questo caso dell'estremo inferiore dei valori $f(x)$ con x razionale positivo, in quanto il punto x_λ in cui f raggiunge il valore C_λ potrebbe non essere razionale).

d) Si procede come nel punto b): la costante migliore è allora il minimo dei valori $f(x)$ con x rapporto di potenze intere positive di 2, ovvero con x della forma 2^n con n intero relativo. Per $\lambda = 3/4$, $x_\lambda = 3$, che non è una potenza di 2. Dunque il valore minimo viene raggiunto in 2 oppure in 4. Siccome $f(2) = 2^{1/4}/2$ è minore di $f(4) = 2^{1/2} \cdot 3/4$, la costante cercata è $f(2) = 2^{1/4}/2$.

2. b) Per $c = 0$, l'equazione $(*)$ è lineare omogenea del secondo ordine, e dunque l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2; basta dunque trovarne due linearmente indipendenti (cioè che non siano una multipla dell'altra). Prendendo y della forma x^λ, l'equazione diventa $(\lambda^2 - a)x^{\lambda-2} = 0$, ed è verificata se e solo se $\lambda^2 = a$. Dunque, per $a > 0$, due soluzioni di $(*)$ sono $x^{\pm\sqrt{a}}$, e la soluzione generale è
$$y = \alpha x^{\sqrt{a}} + \beta x^{-\sqrt{a}} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Per $a < 0$, le radici di a sono immaginarie: $\pm i\sqrt{-a}$. Quindi
$$x^{\pm i\sqrt{-a}} = e^{\pm i\sqrt{-a}\,\log x} = \cos(\sqrt{-a}\,\log x) \pm i \sin(\sqrt{-a}\,\log x)\ .$$
La soluzione generale di $(*)$ è
$$y = \alpha \cos(\sqrt{-a}\,\log x) + \beta \sin(\sqrt{-a}\,\log x) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Per $a = 0$, l'equazione diventa $y'' - y/x = 0$, e ponendo $y' = z$ otteniamo l'equazione a variabili separabili $z' = z/x$, che ha per soluzione $z = \alpha/x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Infine
$$y = \alpha \log x + \beta \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
c) Per risolvere l'equazione non omogenea, basta trovare una soluzione particolare. Prendendo y della forma $y = \gamma x^3$, l'equazione diventa $(9 - a)\gamma x = x$ (la scelta dell'esponente 3 è obbligata dal fatto che il termine a sinistra dell'equazione deve essere un multiplo di x). Dunque, per $a \neq 9$, la soluzione generale è
$$y = \alpha x^{\sqrt{a}} + \beta x^{-\sqrt{a}} + \frac{1}{9-a} x^3 \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Per $a = 9$, si può ricorrere alla riduzione dell'ordine (omettiamo i conti).

3. Usando lo sviluppo di Taylor di $\log(1 + x)$ all'ordine 3 per $x := 2/10$ otteniamo
$$\log\Big(\frac{12}{10}\Big) = \frac{2}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{100} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{1000} + R_3\Big(\frac{2}{10}\Big)$$
e
$$\Big|R_3\Big(\frac{2}{10}\Big)\Big| = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^4}\cdot\frac{16}{10^4} \leq \frac{4}{10^4} < 10^{-3}\ .$$

4. Siccome $-x^2+4x-3 = -(x-2)^2+1$, ed il problema è chiaramente invariante per traslazioni orizzontali, possiamo sostituire la curva $y = (-x^2+4x-3)^{-1}$ con $y = (1-x^2)^{-1}$. Poiché $1-x^2$ è positiva nell'intervallo $(-1, 1)$, nulla in ± 1 e negativa altrove, il grafico di $(1-x^2)^{-1}$ risulta essere come in figura. A questo punto, la regione che ci interessa è vuota per $a < 1$, mentre per $a \geq 1$ la sua area è data dal seguente integrale, dove si è posto $\alpha := \sqrt{1 - 1/a}$:



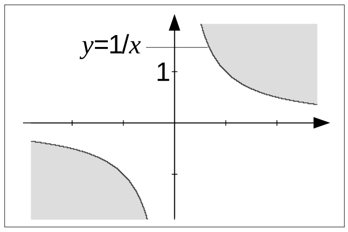
$$A = \int_{-\alpha}^{\alpha} a - \frac{1}{1-x^2}\,dx = 2\alpha a + \int_0^{\alpha} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= 2\alpha a + \log\Big(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\Big)\ .$$

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 1: moltissimi errori.
- Seconda parte, esercizio 2: una soluzione più elegante si ottiene con il cambio di variabile $t = \log x$. Ponendo infatti $z(t) = z(\log x) = y(x)$, l'equazione $(*)$ diventa $z'' - az = c(e^t)\,e^{2t}$, che è lineare a coefficienti costanti.

Scritto del terzo appello, 12 giugno 2003

Prima parte



1. Deve essere $\log(x^3+1) \geq 0$, cioè $x^3+1 \geq 1$, cioè $x \geq 0$.
2. Usando il cambio di variabli $y = x^2$ si ottiene $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$.
3. La funzione è uguale a x^2, ed ha derivata $2x$.
4. Si tratta della zona in grigio nella figura accanto.
5. La funzione $x \cos x$ è dispari, quindi l'integrale è 0.
6. $f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3)e^{x^3-3x^2-9x+1}$ si annulla in -1 (massimo locale) e 3 (minimo locale).
7. Si tratta dell'equazione a variabili separabili $\dot{y}/y^2 = -2x$, per cui $-1/y = c - x^2$. Ricordando che $y = 1$ per $x = 0$, abbiamo allora $-1/y = 1 - x^2$, ovvero $y = 1/(x^2-1)$.
8. Rispettivamente 0, 0 e 1.

Seconda parte

1. L'intersezione V_z di V con il piano parallelo al piano xy e passante per il punto $z > 0$ è l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $z \leq e^{-x^2-y^2}$, ovvero $x^2 + y^2 \leq -\log z$. In altre parole, l'insieme vuoto per $z > 1$, ed un cerchio (pieno) di raggio $\sqrt{-\log z}$ per $0 < z < 1$. Pertanto il volume di V è
$$\mathrm{vol}(V) = \int_0^1 \mathrm{area}(V_z)\, dz = \int_0^1 \pi(-\log z)\, dz = \pi\Big| z(1 - \log z)\Big|_0^1 = \pi\ .$$

2. La soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{y} + 4y = 0$ è $y = \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A questo punto, le soluzioni dell'equazione non omogenea
$$\ddot{y} + 4y = \sin(ax) \tag{1}$$
sono della forma
$$y = \bar{y} + \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$$
dove $\bar{y}$ è una qualunque soluzione particolare della (1). Pertanto, se $\bar{y}$ è limitata (risp. illimitata), allora *tutte* le soluzioni della (1) sono limitate (risp. illimitate) a prescindere dai dati iniziali. Cerchiamo ora una soluzione particolare della (1) del tipo
$$\bar{y} = \gamma\sin(ax) + \delta\cos(ax)\ .$$
L'equazione diventa allora
$$(\gamma(-a^2+4) - 1)\sin(ax) + \delta(-a^2+4)\cos(ax) = 0 \tag{2}$$
che è verificata se (e solo se) γ e δ soddisfano il sistema
$$\begin{cases} \gamma(-a^2+4) - 1 = 0\ , \\ \delta(-a^2+4) = 0\ . \end{cases}$$
Per $a = \pm 2$ il sistema non è risolubile perché la prima equazione diventa $-1 = 0$. Per $a \neq \pm 2$, invece, il sistema ammette una ed una sola soluzione $\gamma = 1/(4-a^2)$ e $\delta = 0$. Ma allora $\bar{y}$, e di conseguenza *tutte* le soluzioni della (1), sono limitate.

Non resta che considerare i casi $a = \pm 2$. Proviamo a cercare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y} = \gamma x \, \sin(ax) + \delta x \, \cos(ax) \ .$$

Ricordando che $a^2 = 4$, l'equazione diventa allora

$$-(2a\delta + 1)\sin(ax) + 2a\gamma\cos(ax) = 0$$

che è verificata per $\gamma = 0$ e $\delta = -1/(2a)$. Siccome $\bar{y}$ è una funzione illimitata, ne deduciamo che per $a = \pm 2$ *tutte* le soluzioni di (1) sono illimitate.

3. I punti del grafico di ascissa x sono della forma $(x, 1/(1+x^2))$, e la loro distanza dall'origine (al quadrato) è

$$g(x) = x^2 + \frac{1}{(1+x^2)^2} \ .$$

Osserviamo ora che minimizzare la distanza o il suo quadrato è la stessa cosa. Inoltre, essendo g una funzione pari, possiamo limitarci a trovare i punti di minimo per $x \geq 0$. La derivata di g è

$$g'(x) = 2x\left(1 - \frac{2}{(1+x^2)^3}\right)$$

che si annulla per $x = 0$ e per $(1+x^2)^3 = 2$, ovvero $x = \sqrt{\sqrt[3]{2} - 1}$, e dallo studio del segno si vede che g decresce prima di quest'ultimo punto, e cresce dopo, e quindi si tratta del punto di minimo assoluto. Pertanto i punti del grafico di f che minimizzano la distanza dall'origine sono quelli di ascissa

$$\pm\sqrt{\sqrt[3]{2} - 1} \ .$$

4. a) Un calcolo diretto dà $(1+x)^a = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$.

b) Raccogliendo x^a ed utilizzando lo sviluppo al punto a) otteniamo

$$\begin{aligned}
(x+1)^a &+ (x-1)^a - 2x^a = \\
&= x^a\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^a + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^a - 2\right] \\
&= x^a\left[1 + \frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1 - \frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\right] \\
&= a(a-1)\, x^{a-2} + o(x^{a-2}) \ .
\end{aligned}$$

Quindi la parte principale cercata è $a(a-1)\, x^{a-2}$.

c) Usando il punto b) ed il principio di sostituzione degli infinitesimi si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+1)^a + (x^3-1)^a - 2x^{3a}}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} a(a-1)x^{a-7} = \begin{cases} +\infty & \text{per } a > 7, \\ 42 & \text{per } a = 7, \\ 0 & \text{per } a < 7. \end{cases}$$

Scritto del terzo appello, 12 giugno 2003

Commenti

- Prima parte: molti errori negli esercizi 1 e 4, e questo è grave perché si tratta di nozioni di base! Stranamente, quasi nessuno ha fatto il 6, che pure è molto semplice.
- Seconda parte, esercizio 2: alcuni hanno risolto l'equazione omogenea, e poi hanno trovato una soluzione particolare della non omogenea della forma $\bar{y} = \gamma \sin(ax) + \delta \cos(ax)$ senza accorgersi che qualcosa ve storto per $a = \pm 2$.
- Seconda parte, esercizio 3: alcuni hanno studiato la funzione $f(x)$, cosa che non era minimamente richiesta, e alla fine hanno detto che il punti di minima distanza dall'origine del grafico era quello di ascissa 0 (che non è vero) senza neanche darsi la pena di giustificarlo.
- Seconda parte, esercizio 4: tutti hanno fatto il punto a) – e ci mancherebbe! – senza poi capire come usarlo per fare i punti b) e c).

Scritto del quarto appello, 10 luglio 2003

Prima parte

1. Deve essere $2-|x+1|\geq 0$, ovvero $-3\leq x\leq 1$.
2. Siccome $D(\log(x^x)) = D(x\log x) = \log x + 1$.
3. Per parti: $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx = \Big| -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \Big| -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$.
4. $\log|\sin x - 1|$.
5. rispettivamente 1, $+\infty$, 0.
6. $dps\sin(x^3+x^9) = (x^3+x^9) - \frac{1}{6}(x^3+x^9)^3 + o\big((x^3+x^9)^4\big) = x^3 + \frac{5}{6}x^9 + o(x^{12})$.
7. L'equazione si riscrive come $(xy)' = e^x$, ovvero $xy = e^x + a$, ovvero $y = \dfrac{e^x+a}{x}$ con $a\in\mathbb{R}$.

Seconda parte

1. Usando gli sviluppi di Taylor in 0 di e^t e $\cos t$ all'ordine 2 e 4 rispettivamente otteniamo

$$e^{-1/x} - \cos\Big(\frac{a}{\sqrt{x}}\Big) = \Big[1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] - \Big[1 - \frac{a^2}{2x} + \frac{a^4}{24x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]$$

$$= \frac{a^2-2}{2x} + \frac{12-a^4}{24x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \sim \begin{cases} \dfrac{a^2-2}{2x} & \text{per } a\neq\pm\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{3x^2} & \text{per } a = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. Usando lo sviluppo di Taylor di $\sin x$ all'ordine 1 in 0 otteniamo

$$\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x(1+x)}{x(1+x)\sin x} = \frac{-x^2+o(x^2)}{x(1+x)\sin x}$$

e per il principio di sostituzione degli infinitesimi

$$\lim_{x\to 0}\Big[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{\sin x}\Big] = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x\cdot 1\cdot x} = -1 .$$

3. Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea è $\lambda^2+2\lambda+2$, con zeri $\lambda = -1\pm i$. La soluzione generale dell'omogenea è dunque

$$y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x) \quad \text{con } a,b\in\mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della non omogenea del tipo $\bar{y} = c\sin x + d\cos x$. Sostituendo nell'equazione si ottiene che c e d devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} c-2d = 1 \\ 2c+d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1/5 \\ d = -2/5 \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare è $\bar{y} = \frac{1}{5}(\sin x - 2\cos x)$, e la soluzione generale

$$y = e^{-x}(a\cos x + b\sin x) + \frac{\sin x - 2\cos x}{5} \quad \text{con } a,b\in\mathbb{R}.$$

A questo punto si vede facilmente che le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ sono soddisfatte prendendo $a = 2/5$ e $b = 1/5$.

Scritto del quinto appello, 8 settembre 2003

Prima parte

1. Tutto $\mathbb{R}$.
2. 0, perché $f(x) = x^0 = 1$ per $x > 0$.
3. $y = e^{2x} + e^{-2x}$.
4. $\dfrac{1}{3}\log|1+x^3|$.
5. 0, $+\infty$, 1.
6. $f'(x) = e^{(\dots)}3(x^2-2x-3)$ si annulla in -1 (massimo locale) e 3 (minimo locale).
7. $f(x) = 1 - \dfrac{x^6}{2} + \dfrac{x^{12}}{24} + o(x^{17})$.
8. Si tratta dell'insieme dei punti compresi tra i due rami dell'iperbole $y = 1/x$.

Seconda parte

1. Tramite il cambio di variabile $e^{-x} = t$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{|3e^{-2x}-e^{-x}|}{e^{-2x}-e^{-x}-6}dx &= \int_0^1 \frac{|3t-1|}{t^2-t-6}dt\\ &= \int_0^{1/3} \frac{1-3t}{t^2-t-6}dt + \int_{1/3}^1 \frac{3t-1}{t^2-t-6}dt\end{aligned}$$

e siccome $\dfrac{3t-1}{t^2-t-6} = \dfrac{8/5}{t-3} + \dfrac{7/5}{t+2}$ ha come primitiva $\dfrac{8}{5}\log|t-3| + \dfrac{7}{5}\log|t+2|$,

$$\begin{aligned}&= -\Big|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\Big|_0^{1/3} + \Big|\frac{8}{5}\log|t-3| + \frac{7}{5}\log|t+2|\Big|_{1/3}^1\\ &= 9\log 3 - \frac{33}{5}\log 2 - \frac{14}{5}\log 7 \simeq -0,136\ .\end{aligned}$$

2. I punti del grafico di ascissa x sono della forma $(x, 2/(1+x^2))$, ed il quadrato della distanza dall'origine è

$$g(x) = x^2 + \frac{4}{(1+x^2)^2}\ .$$

Osserviamo ora che i punti di minimo della distanza, cioè $\sqrt{g(x)}$ o di $g(x)$ sono gli stessi. Inoltre, essendo g una funzione pari, possiamo limitarci a trovare i punti di minimo per $x \geq 0$. La derivata di g è

$$g'(x) = 2x\left(1 - \frac{8}{(1+x^2)^3}\right)$$

che si annulla per $x = 0$ e per $(1+x^2)^3 = 8$, ovvero $x = \sqrt{\sqrt[3]{8}-1} = 1$. Dallo studio del segno si vede che g decresce prima di quest'ultimo punto, e cresce dopo, e quindi si tratta del punto di minimo assoluto. Pertanto i punti del grafico di f che minimizzano la distanza dall'origine sono $(\pm 1, 1)$.

3. La soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{y} + 4y = 0$ è $y = \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. A questo punto, le soluzioni dell'equazione non omogenea

$$\ddot{y} + 4y = \sin(ax) \tag{1}$$

sono della forma

$$y = \bar{y} + \alpha \sin(2x) + \beta \cos(2x)$$

dove $\bar{y}$ è una qualunque soluzione particolare della (1). Pertanto, se $\bar{y}$ è limitata (risp. illimitata), allora *tutte* le soluzioni della (1) sono limitate (risp. illimitate) a prescindere dai dati iniziali. Cerchiamo ora una soluzione particolare della (1) del tipo

$$\bar{y} = \gamma \sin(ax) + \delta \cos(ax) \ .$$

Si vede che una tale soluzione esiste se e solo se γ e δ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \gamma(-a^2+4) - 1 = 0 \ , \\ \delta(-a^2+4) = 0 \ . \end{cases}$$

Per $a \neq \pm 2$ il sistema è risolubile, e di conseguenza *tutte* le soluzioni della (1), sono limitate. Per $a = \pm 2$, invece, il sistema non è risolubile. Si riesce tuttavia a trovare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y} = \gamma x \ \sin(ax) + \delta x \ \cos(ax) \ ,$$

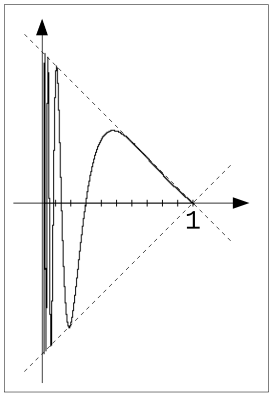
e dunque *tutte* le soluzioni di (1) sono illimitate.

Elementi di Analisi Matematica, II modulo, a.a. 2002/03 - Soluzioni

PRIMO COMPITINO, 3 APRILE 2003

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Deve essere $ae^0 = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{bx}-1}{x}$, ovvero $a = b$.
2. $(1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}\right)^{10} = 2^5 e^{-5\pi i/2} = 32\,e^{-\pi i/2} = -32\,i$.
3. a) e c) sono numerabili, b) è più che numerabile.
4. Si tratta dei punti z la cui distanza dal punto $z_0 = i - 1$ è compresa tra 1 e $\sqrt{2}$: in altre parole, è una corona circolare con centro di coordinate $(-1, 1)$ e raggi 1 e $\sqrt{2}$.
5. Si ha $\sqrt[n^2]{n!} \le \sqrt[n^2]{n^n} = (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n} = e^{\log n/n}$ che tende a 1 perché $\log n/n$ tende a 0. D'altra parte $\sqrt[n^2]{n!} \ge 1$ e dunque il limite cercato è 1.
6. a) $f(x) := -x$. Per b) l'esempio è più complicato, e serve una funzione che oscilli vicino a 0 in modo da assumere sia l'estremo superiore che l'estremo inferiore dei valori quando x tende a 0. Ad esempio, $f(x) := (1-x)\sin(1/x)$ (figura accanto)



7. $(4n^2-1)/(4n^2) = 1 - 1/(4n^2)$ è una successione crescente che parte dal valore 3/4 ed ha limite 1. Siccome l'esponenziale è una funzione crescente, $e^{3/4}$ è il minimo di A, mentre e è l'estremo superiore (ma non massimo).

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Deve essere $a\sin 0 = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{bx}-1}{x}$, ovvero a qualunque e $b = 0$.
2. $(i-1)^{10} = \left(\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4}\right)^{10} = 2^5 e^{15\pi i/2} = 32\,e^{-\pi i/2} = -32\,i$.
3. a) e b) sono numerabili, c) è più che numerabile.
4. Si tratta dei punti z la cui distanza dal punto $z_0 = -i - 1$ è compresa tra 1 e $\sqrt{2}$: in altre parole, è una corona circolare con centro di coordinate $(-1, -1)$ e raggi 1 e $\sqrt{2}$.
5. Si ha $\sqrt[n^3]{n!} \le \sqrt[n^3]{n^n} = (n^n)^{1/n^3} = n^{1/n^2} = e^{\log n/n^2}$ che tende a 1 perché $\log n/n^2$ tende a 0. D'altra parte $\sqrt[n^3]{n!} \ge 1$ e dunque il limite cercato è 1.
6. a) $f(x) := -x$; b) $f(x) := x\sin(1/(1-x))$.
7. $(4n^2-1)/(4n^2) = 1 - 1/(4n^2)$ è una successione crescente che parte dal valore 3/4 ed ha limite 1. Siccome il logaritmo è una funzione crescente, $\log(3/4)$ è il minimo di A, mentre 0 è l'estremo superiore (ma non massimo).

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) X_1 è numerabile. Siccome X_1 è infinito, basta costruire una mappa ϕ da X_1 in $\mathbb{N}^5$ iniettiva, e ricordare che $\mathbb{N}^5$ è numerabile (in quanto prodotto finito di numerabili). Dato dunque $A \in X_1$, ordiniamo i suoi 5 elementi in senso crescente: $x_1 < x_2 < \cdots < x_5$, e poniamo quindi $\phi(A) := (x_1, \ldots, x_5)$.

   b) Generalizzando la dimostrazione di a) si vede che la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con k-elementi è numerabile per ogni k intero, e dunque X_2, che è unione di queste famiglie, è anch'essa numerabile (unione numerabile di numerabili è numerabile).

c) X_3 è numerabile. Il punto è osservare che una successione (x_n) a valori interi converge a zero se e solo se esiste k tale che $x_n = 0$ per ogni $n \geq k$. Indicando dunque con Y_k l'insieme delle successioni (x_n) tali che $x_n = 0$ per $n \geq k$, abbiamo che X_3 è unione degli insiemi Y_k, e basta quindi dimostrare che ciascun Y_k è numerabile. Per far questo, basta considerare l'applicazione $\phi : Y_k \to \mathbb{Z}^k$ che associa ad ogni successione $(x_n) \in Y_k$ la successione troncata $(x_0, \dots, x_{k-1})$: chiaramente ϕ è iniettiva (ed anche surgettiva, ma non ci serve), e siccome $\mathbb{Z}^k$ è numerabile, lo è pure Y_k.

d) X_4 è più che numerabile. Per dimostrarlo costruiamo un'applicazione iniettiva da $2^{\mathbb{N}}$, che sappiamo essere più che numerabile, in X_4. Ad ogni successione (y_n) in $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ associamo la successione (x_n) in X_4 così definita:

$$x_n := \frac{y_n}{2^n} .$$

Non è difficile vedere che l'applicazione $\phi : (y_n) \mapsto (x_n)$ è iniettiva. Volendo (ma non era richiesto) si può anche dimostrare che $X_4 \sim 2^{\mathbb{N}}$; infatti $X_4 \preceq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \preceq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$.

2. a) Siccome $y \mapsto |y|$ è continua, $|f|$ è composizione di funzioni continue, e dunque è continua. Dall'identità $y^- = \frac{1}{2}(|y| - y)$ otteniamo

$$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \tag{1}$$

che dunque è una funzione continue (usiamo il fatto che $|f|$ è continua, che somma di funzioni continue è continua, etc.).

b) Se $|f|$ è continua, non è detto che lo sia f: si prenda ad esempio la funzione f definita come segue: $f(x) := 1$ per $x \geq 0$ ed $f(x) := -1$ per $x < 0$.

c) Se $|f|$ ed f^- sono continue, allora lo è anche f, infatti dalla (1) otteniamo

$$f = |f| - 2f^- .$$

d) Il punto chiave è osservare che $\min\{y_1, y_2\} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - |y_1 - y_2|)$, da cui si ottiene

$$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \tag{2}$$

che è dunque una funzione continua.

3. La funzione f è continua e strettamente crescente in quanto somma di funzioni che sono *notoriamente* continue e strettamente crescenti. Quindi f è iniettiva, e l'immagine di f è un intervallo perché il dominio di f è un intervallo (tutto $\mathbb{R}$). Siccome f tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, l'immagine di f deve essere tutto $\mathbb{R}$, e quindi f è surgettiva.
A questo punto sappiamo che $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ben definita e continua, e siccome $1/\log y \to 0$ per $y \to +\infty$, il limite di $f^{-1}(1/\log y)$ è $x = f^{-1}(0)$. Per trovare il valore di x non resta ora che risolvere l'equazione $x^5 + 3x^3 + 2x - 6 = 0$, e si vede facilmente (cercando tra le soluzioni razionali) che $x = 1$.

4. Il fatto che x_n è strettamente crescente segue immediatamente dal fatto che $a^n e^{-x_n}$ è sempre positivo. Pertanto la successione x_n ammette sicuramente limite L, finito o infinito.

a) Dimostriamo ora che L deve essere infinito per $a = 1$. Infatti, supponendo per assurdo che L sia finito, passando al limite nell'identità $x_{n+1} = x_n + a^n e^{-x_n}$ otterremmo $L = L + e^{-L}$, e quindi $0 = e^{-L}$, che non si verifica mai.

b) Similmente, passando a limite per $a > 1$ otteniamo $L = L + \infty = \infty$.

c) Per $a < 1$ il precedente ragionamento porta all'identità $L = L$, che non ci dice nulla di significativo. Siccome $x_n \geq x_0 = 1$ per ogni n, abbiamo tuttavia la maggiorazione

$$x_{n+1} = x_n + a^n e^{-x_n} \leq x_n + a^n$$

e ricordando che $x_1 = 1$, si deduce

$$x_{n+1} \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a} \ ,$$

e dunque L deve essere finito.

5. a) Siccome $x_n \to L$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha

$$L - \varepsilon \leq x_n \leq L + \varepsilon \ . \tag{3}$$

In particolare, preso $n \geq n_\varepsilon$, tutti i valori $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$, soddisfano la (3). Quindi

$$n(L - \varepsilon) \leq x_{2n+1} + \cdots + x_{2n} \leq n(L + \varepsilon)$$

e dividendo per n

$$L - \varepsilon \leq y_n \leq L + \varepsilon \ ,$$

e dunque $y_n \to L$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che dato una insieme di numeri reali tutti maggiori di a (risp. minori di b), anche la media aritmetica risulta maggiore di a (risp. minore di b). La dimostrazione del fatto che $z_n \to L$ è identica.

b) Prendendo ad esempio $x_n := (-1)^n$ – che non converge! – si ha

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \quad \text{e} \quad z_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/(3n) & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

ed entrambe convergono a 0.

c) Il punto chiave è scrivere z_n in termini di y_n:

$$z_n = \frac{1}{3n} \sum_{k=n+1}^{4n} x_k = \frac{1}{3n} \sum_{n+1}^{2n} x_k + \frac{1}{3n} \sum_{2n+1}^{4n} x_k = \frac{1}{3} \Big(\frac{1}{n} \sum_{n+1}^{2n} x_k \Big) + \frac{2}{3} \Big(\frac{1}{n} \sum_{2n+1}^{4n} x_k \Big)$$

ovvero

$$z_n = \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} y_{2n} \ . \tag{4}$$

Da questa identità (e dalle proprietà dei limiti) segue immediatamente che se y_n converge ad L allora z_n converge a $\frac{1}{3}L + \frac{2}{3}L = L$.

d) Difficile. Prima di tutto facciamo vedere che (y_n) può essere una qualunque successione. In altre parole, facciamo vedere che assegnati arbitrariamente i valori di y_n possiamo trovare degli x_n che risolvono il sistema di (infinite) equazioni lineari

$$\begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = (x_3 + x_4)/2 \\ y_3 = (x_4 + x_5 + x_6)/3 \\ y_4 = (x_5 + x_6 + x_7 + x_8)/4 \\ \quad \vdots \\ y_n = (x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n})/n \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Per dimostrare che il sistema è risolubile, si procede per induzione. La prima equazione è chiaramente risolubile, e determina x_2. Supponendo poi di aver già risolto le prime n equazioni, trovando $x_2, \dots x_{2n}$, si vede subito che possiamo risolvere anche la $(n+1)$-esima equazione, perché abbiamo ben due variabili libere (x_{2n+1} e x_{2n+2}).
Per concludere la dimostrazione, facciamo vedere che presa una successione convergente (z_n) a piacere. possiamo costruire (y_n) non convergente in modo tale che valga la (4) per ogni $n \geq 1$, vale a dire

$$y_{2n} = \frac{3}{2} z_n - \frac{1}{2} y_n \ . \tag{5}$$

Infatti possiamo prendere y_d in modo arbitrario per ogni d dispari, e poi utilizzare la (5) per definire $y_{2^k d}$ per ogni k intero (per ricorrenza), ottenendo quindi una successione (y_n) che soddisfa la (5) e quindi anche la (4). Inoltre, avendo posto $y_d := 1$ quando $d \equiv 1 \pmod 4$, e $y_d := -1$ quando $d \equiv -1 \pmod 4$, abbiamo la certezza che y_n non converge.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Si procede come per il gruppo A. Nel punto d), l'applicazione iniettiva $\phi : 2^{\mathbb{N}} \to X_4$ è quella che ad ogni successione (y_n) in $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ associa la successione (x_n) in X_4 data dalla formula $x_n := y_n/(2n)$.
2. Si procede come per il gruppo A, con opportune modifiche: per a) si usa l'identità $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$; per c) si usa l'identità $f = 2f^+ - |f|$; per d) si usa $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$.
3. Come per il gruppo A: il limite è dato dalla soluzione dell'equazione $x^7 + 4x^3 + x + 6 = 0$ (che sappiamo già essere unica), ovvero $x = -1$.
4. Uguale al gruppo A.
5. Uguale al gruppo A.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1a): in molti hanno scritto che X_1 è uguale a $\mathbb{N}^5$ (ovvero $\mathbb{N}^6$ per il gruppo B). Questo è un errore: i sottoinsiemi di di $\mathbb{N}$ con 5 elementi non sono ordinati mentre per i vettori in $\mathbb{N}^5$ l'ordine delle coordinate conta – in altre parole, $\{1,3,4,8,9\} = \{3,1,8,9,4\}$, mentre $(1,3,4,8,9) \neq (3,1,8,9,4)$. Inoltre gli elementi di un insieme in X_1 sono (per definizione) cinque e tutti distinti, mentre le coordinate di un vettore in $\mathbb{N}^5$ possono essere tutte uguali – in altre parole, $(1,1,1,2,1) \in \mathbb{N}^5$, ma l'insieme delle sue coordinate è $\{1,2\}$ che non appartiene a X_1.
- Seconda parte, esercizio 1b): tra le soluzioni proposte, una molto elegante è questa: ad ogni $A = \{i_1, \dots, i_k\}$ sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ associamo il numero intero $x_A = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_k}$, ovvero il numero intero la cui i-esima cifra in base 2 è 1 se $i \in A$ ed è 0 altrimenti (poniamo anche $x_A = 0$ quando A è vuoto). La mappa $A \mapsto x_A$ da X_2 in $\mathbb{N}$ è bigettiva!
- Seconda parte, esercizio 2a): molti hanno cercato di dimostrare la continuità di $|f|$ distinguendo i punti x in tre classi a seconda che sia $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ oppure $f(x) = 0$, in modo da poter dire esplicitamente quanto vale $|f|$; così facendo, però, la dimostrazione può diventare molto complicata per i punti della terza classe che non siano punti isolati (e ce ne sono!).
- Seconda parte, esercizio 2d): come per il punto a), molti hanno cercato di dimostrare la continuità di $\min\{f,g\}$ ($\max\{f,g\}$ per il gruppo B) distinguendo i punti x in tre classi a

seconda che sia $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$ oppure $f(x) = g(x)$, andando incontro alle stesse difficoltà indicate nel punto precedente. In realtà è possibile dimostrare la continuità di $\min\{f, g\}$ anche senza usare l'identità (2): dato $x_0 \in \mathbb{R}$, essendo f e g continue in x_0, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta', \delta'' > 0$ tali che

$$|x - x_0| \leq \delta' \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon \ ,$$
$$|x - x_0| \leq \delta'' \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon \ .$$

Ma allora, posto $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$, $|x - x_0| \leq \delta$ implica

$$\max\{f(x_0), g(x_0)\} - \varepsilon \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq \max\{f(x_0), g(x_0)\} + \varepsilon \ .$$

- Seconda parte, esercizio 3: l'unica difficoltà di questo esercizio consiste nel dare delle dimostrazioni *complete* degli enunciati. Quindi, per far vedere che f è surgettiva, non basta dire che f ha limite $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, ma bisogna anche sottolineare il ruolo della continuità e del fatto che f è definita su un intervallo (intervallo in senso lato, in questo caso tutta la retta). Analogamente, anche la continuità dell'inversa di f segue dal fatto che il dominio è un intervallo.
- Seconda parte, esercizio 4: in molti hanno cercato di dimostrare la monotonia della successione per induzione, mentre in realtà l'induzione non serve, e basta osservare che $x_{n+1} - x_n = a^n e^{-x_n}$, che è sempre un numero positivo. Per dimostrare c) alcuni hanno osservato che $|x_{n+1} - x_n| \leq a^n$, e siccome per n sufficientemente grande a^n è più piccolo di un qualunque ε positivo assegnato, ne hanno dedotto che la successione è di Cauchy (e dunque convergerebbe). Purtroppo la definizione di successione di Cauchy richiede un controllo su tutte le differenze $|x_m - x_n|$, che è più complicato da dimostrare.
- Seconda parte, esercizio 5a): alcuni hanno inspiegabilmente sostenuto che (y_n) e (z_n) sono sottosuccessioni di x_n. Altri hanno usato la seguente dimostrazione: siccome $x_n \to L$, anche $x_{n+k} \to L$ per ogni k e dunque, siccome il limite della somma è la somma dei limiti,

  $$y_n = \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \to \frac{nL}{n} = L \ .$$

  Questo è un errore grave, perché la regola sui limite delle somme si applica solo a successioni che si scrivono come somma di un numero *finito e costante* di successioni, mentre in questo caso il numero degli addendi è n, che non è costante.
- Seconda parte, esercizio 5c): molti hanno utilizzato la formula $z_n = (y_n + y_{2n} + y_{3n})/3$, che però è sbagliata. L'errore nasce dall'aver scritto y_{2n} come media dei valori $x_{2n+1}, \ldots, x_{3n}$ invece che di $x_{2n+1}, \ldots, x_{4n}$. Per inciso, una volta ottenuta la formula corretta, si può applicare il fatto che il limite della somma è la somma dei limiti, invece di ridimostrarlo come hanno fatto alcuni!
- Seconda parte, esercizio 5d): una soluzione molto semplice ed elegante abbozzata in uno degli scritti consiste nel costruire x_n per ricorrenza come segue: per n è multiplo di 4 si prende

  $$x_n := -\sum_{k=n/4+1}^{n-1} x_k \ , \tag{6}$$

  per n è multiplo di 2 ma non di 4

  $$x_n := n - \sum_{k=n/2+1}^{n-1} x_k \ , \tag{7}$$

infine, per n dispari si prende x_n come si vuole. Ora è facile vedere che la (6) implica $z_n = 0$ per ogni n, mentre la (7) implica $y_n = 1$ per ogni n dispari. Dunque z_n converge a 0, ma se per assurdo convergesse anche y_n, dovrebbe convergere a 1, e questo contraddirrebbe quanto dimostrato al punto c).

Secondo compitino, 22 maggio 2003

Prima parte, gruppo A

1. f_a converge a 0 per $a > 0$ ed è integrabile per $a > 1$.
2. a) finito, b) più che numerabile, c) più che numerabile, d) numerabile.
3. Le seconda no e le altre due sì (per esempio, per il criterio del rapporto).
4. $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-tx}dx = \Big|x\frac{e^{-tx}}{-t}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{e^{-tx}}{-t}dx = \Big|x\frac{e^{-tx}}{t}\Big|_\infty^1 + \Big|\frac{e^{-tx}}{t^2}\Big|_\infty^1 = \frac{e^{-tx}(1+t)}{t^2}.$
5. Siccome la successione e^{-n} è *strettamente* decrescente, $e^0 = 1$ è il massimo valore raggiunto, mentre $e^{-\infty} = 0$ è l'estremo inferiore (mai raggiunto).
6. Siccome $1 \le 2 + \cos n \le 3$, allora $2 \le \sqrt[n]{2^n(2+\cos n)} \le 2\sqrt[n]{3} \to 2$ e dunque $R = 1/2$.
7. $\big(1+\sqrt{3}i\big)^6 = \big(2e^{i\pi/3}\big)^6 = 2^6 e^{2\pi i} = 64$.
8. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f.

Prima parte, gruppo B

1. f_a converge a 0 ed è integrabile per ogni a reale (e.g., perché $x^a e^{-x} = o(1/x^2)$ per ogni a).
2. a) numerabile, b) finito, c) più che numerabile, d) più che numerabile.
3. Le prime due sì e l'ultima no (per esempio, per il criterio del rapporto).
4. $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{|\log x|^a}{x}dx = \int_{-\infty}^{-1} |t|^a dt = \int_1^\infty t^a dt = \begin{cases} +\infty & \text{per } a \ge -1 \\ -1/(a+1) & \text{per } a < -1 \end{cases}.$
5. Siccome la funzione e^x è crescente, $e^1 = e$ è il massimo valore raggiunto, mentre $e^{-\infty} = 0$ è l'estremo inferiore (mai raggiunto).
6. Siccome $1 \le 2 - \cos n \le 3$, allora $\sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{n(2-\cos n)} \le \sqrt[n]{3n}$ e convergono tutti a 1. Dunque $R = 1$.
7. Posto $z = \rho e^{i\theta}$, $z^4 = 14$ diventa $\rho^4 e^{i4\theta} = 4e^{i\pi}$. Dunque $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \pi/4 + k\pi/2$ con $k = 0, 1, 2, 3$. Ovvero $z = \pm 1 \pm i$.
8. $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n.$

Seconda parte, gruppo A

1. Per prima cosa determiniamo il comportamento asintotico del termine generico $x_n := (n^2 - 1)^a - (n^2+1)^a$. Raccogliendo n^{2a} ed applicando quindi la formula $(1+x)^b = 1 + bx + o(x)$ per $x \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} x_n &= n^{2a}\Big[\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^a - \Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^a\Big] \\ &= n^{2a}\Big[1 - \frac{a}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)^a - 1 - \frac{a}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)^a\Big] \\ &\sim -2an^{2(a-1)}\,. \end{aligned}$$

   Escludendo il caso $a = 0$, che da luogo alla serie nulla, si vede dunque che il segno di x_n è definitivamente costante (positivo per $a < 0$ e negativo per $a > 0$) ed è dunque possibile

applicare i teoremi di confronto asintotico (con le serie armoniche). In particolare $\sum x_n$ converge quando $2(a-1) < -1$, ovvero $a < 1/2$, e diverge a $-\infty$ quando $2(a-1) \geq -1$, ovvero $a \geq 1/2$.

2. L'osservazione da tenere a mente è che il limite di $x^\gamma \sin(1/x^\beta)$ per $x \to 0^+$ esiste se e solo se $\gamma > 0$, ed in tal caso è uguale a 0. Lo stesso discorso vale per $x^\gamma \cos(1/x^\beta)$. Inoltre, siccome la funzione f è di classe C^∞ su $(0, +\infty)$, basta solo verificare derivabilità e continuità in 0. Detto questo si vede facilmente che:

   a) f continua in 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$;

   b) f derivabile in 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)/x \Leftrightarrow \alpha > 1$ (ed allora $f'(0) = 0$).

   Inoltre, tenendo conto della formula

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos(1/x^\beta) + \alpha x^{\alpha-1}\sin(1/x^\beta)\big) \\ &= -\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos(1/x^\beta) + o(x^{\alpha-\beta-1})\ , \end{aligned}$$

   c) f' continua in 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > \beta + 1$.

   d) f' derivabile in 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)/x \Leftrightarrow \alpha > \beta + 2$ (ed allora $f''(0) = 0$).

   Per affrontare il caso generale, abbiamo bisogno di un'espressione maneggevole della derivata n-esima di f. Facendo un po' di tentativi, ci si rende conto che

$$D^n f(x) = \begin{cases} +\beta^n x^{\alpha-n\beta-n}\sin(1/x^\beta) + R_n(x) & \text{per } n \text{ pari,} \\ -\beta^n x^{\alpha-n\beta-n}\cos(1/x^\beta) + R_n(x) & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases} \tag{1}$$

   con $R_n(x) = o(x^{\alpha-n\beta-n})$. Prima di dimostrare la formula (1), facciamo vedere che ci basta per concludere l'esercizio. In effetti, per induzione su n vediamo subito che

   e) $D^n f$ derivabile in 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} D^{n-1}f(x)/x \Leftrightarrow \alpha > n(\beta+1) - \beta$ (ed allora $D^n f(0) = 0$);

   f) $D^n f$ continua in 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} D^n f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > n(\beta + 1)$.

   Per concludere, non ci resta che dimostrare la (1). Sfortunatamente, cosí com'è enunciata, non possiamo dimostrarla per induzione, perché sapere che R_n è trascurabile rispetto a $x^{\alpha-n(\beta+1)}$ non ci da alcuna informazione sulla derivata di R_n. Consideriamo quindi un enunciato più preciso sulla struttura del resto, e cioè R_n è della forma

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{\alpha-k\beta-n} P_{n,k}(1/x^\beta)$$

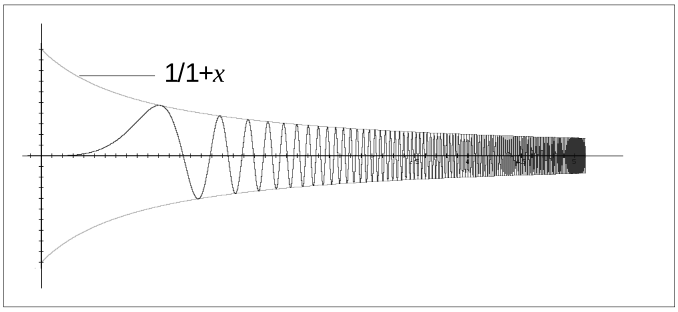
   con $P_{n,k}$ combinazione lineare di seni e coseni. Ora la dimostrazione di uno (1) viene facilmente per induzione su n.

3. a) Per il teorema di Lagrange, per ogni n intero esiste x_n compreso tra n e $2n$ tale che

$$f'(x_n) = \frac{f(2n) - f(n)}{n}$$

   e siccome f tende a 0 a $+\infty$, ne deduciamo che $f'(x_n)$ tende a 0, e quindi L, *se esiste*, deve essere 0. Un'altra dimostrazione è questa: supponiamo per assurdo che sia $L > 0$. Allora esiste x_0 tale che $f'(x) \geq L/2 > 0$ per $x \geq x_0$, e dunque $f(x) \geq f(x_0) + L(x - x_0)/2$ che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, contraddicendo l'ipotesi che f tenda a 0. Analogamente si dimostra che L non può essere negativo.

b) Ad esempio $f(x) := \dfrac{\sin(x^4)}{1+x}$.



c) Se $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f''(x)|\,dx$ è finito, allora deve esiste l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f''(x)\,dx = \Big| f'(x) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) - f'(0) \ .$$

d) dall'esempio nel punto b) si intuisce che il limite della derivata f' può non esistere solo in presenza di oscillazioni sempre più frequenti (anche se di ampiezza sempre minore) nella funzione f, cosa che richiede sempre più frequenti cambi di segni di f'. Il fatto che f'' è limitata dovrebbe quindi prevenire questo fenomeno. Come faremo vedere ora, basta di meno, e cioè che f' sia uniformemente continua (ricordiamoci che f'' limitata implica infatti f' Lipschitziana).

Fissiamo $d > 0$, e consideriamo un punto x tale che $f'(x) \geq d$. Applicando la definizione di uniforme continuità con $\varepsilon = d/2$, otteniamo che deve esistere $\delta > 0$, che dipende da d ma non da x, tale che

$$|f'(t) - f(x)| \leq d/2 \quad \text{per } t \in [x-\delta, x+\delta];$$

in particolare $f'(t) \geq f'(x) - d/2 \geq d/2$ per $t \in [x, x+\delta]$, e per il teorema di Lagrange

$$f(x+\delta) - f(x) \geq d\delta/2 \ . \tag{2}$$

Siccome $f(x) - f(x+\delta)$, tende a 0 per $x \to +\infty$, mentre invece $d\delta/2$ è un numero positivo fissato, la (2) implica che $f'(x)$ non può assumere valori maggiori di d da un certo punto in poi. Un discorso analogo vale per i valori minori di un qualunque d negativo; se ne deduce quindi che $f'(x)$ tende a 0.

4. a) Dato $h > 0$ intero, poniamo

$$q_h := \big[\underbrace{9\,9 \cdots 9\,9}_{h \text{ cifre}}\big] \quad \text{e} \quad y_q := \big[0, \underbrace{0\,0 \cdots 0\,1}_{h \text{ cifre}}\underbrace{0\,0 \cdots 0\,1}_{h \text{ cifre}} \cdots\big]$$

(per evitare confusione, mettiamo l'espressione decimale di un numero reale tra parentesi quadre). Allora

$$y_h = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-nh} = 10^{-h} \sum_{n=0}^{\infty} (10^{-h})^n = \frac{10^{-h}}{1-10^{-h}} = \frac{1}{10^h - 1} = \frac{1}{q_h} \ .$$

b) Per numero periodico (positivo) intendiamo un numero reale x la cui espressione decimale si ripete *da un certo un punto in poi* con periodo di lunghezza h, cioè un numero della forma

$$x = \big[b_0, \underbrace{b_1\,b_2 \,\cdots\, b_k}_{k \text{ cifre}}\,\underbrace{a_1\,a_2 \,\cdots\, a_h}_{h \text{ cifre}}\,\underbrace{a_1\,a_2 \,\cdots\, a_h}_{h \text{ cifre}} \cdots\big]$$

con b_0 intero, b_i ed a_i cifre tra 0 e 9, k intero positivo o nullo. Posti dunque

$$b := \big[b_0, b_1 \cdots b_k\big] = b_0 + \sum_1^k b_i 10^{-i} \quad \text{e} \quad a := \big[a_1 \cdots a_n\big] = \sum_1^h a_i 10^{h-i} ,$$

x si scrive come $x = b + 10^{-k} a\, y_h$ ed è quindi razionale.

c) Ogni numero razionale x si può scrivere come

$$x = \frac{m}{10^k n} = m \cdot 10^{-k} \cdot n^{-1}$$

con m intero, k intero positivo o nullo, ed n intero positivo primo con 10. Supponiamo ora di sapere che n divide q_h per qualche h, ovvero $q_h = n \cdot m'$: allora

$$x = m \cdot m' \cdot 10^{-k} \cdot q_h^{-1} = m \cdot m' \cdot 10^{-k} \cdot y_h$$

ed essendo y_h un numero periodico, anche x resta periodico (stiamo usando il fatto che moltiplicare un numero periodico per una potenza di 10 oppure per un numero intero dà un numero periodico).
Non ci resta che dimostrare che dato n intero positivo primo con 10 esiste h tale che n divide $q_h = 10^h - 1$, ovvero $10^h \equiv 1 \pmod{n}$. Ma questo segue dal fatto che l'insieme dei numeri interi compresi tra 0 ed $n-1$ e primi con n è un gruppo finito rispetto alla moltiplicazione modulo n. In particolare, basta prendere h uguale all'ordine del gruppo (un numero sicuramente minore di n).

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Si procede come per il gruppo A, ottenendo, per $a \neq 0$, $x_n = [(n+2)^a - n^a] \sim 2an^{a-1}$ (per $a = 0$ si ha la serie nulla). Dunque la serie converge per $a \leq 0$ e diverge a $+\infty$ per $a > 0$. In questo caso, inoltre, il valore della serie può essere calcolato esattamente, infatti

$$\begin{aligned}\sum_1^m x_n &= (3^a - 1) + (4^a - 2^a) + (5^a - 3^a) + (6^a - 4^a) + \cdots \\ &= -1 - 2^a + (m+1)^a + (m+2)^a \ .\end{aligned}$$

   che converge a $-1 - 2^a$.
2. Uguale al gruppo A.
3. Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A.

COMMENTI

- Gruppo A, prima parte, esercizio 4: la presenza del modulo nell'integrale sembra aver creato molti (inspiegabili?) problemi.
- Gruppo A, prima parte, esercizio 8: si potevano dare diverse risposte, ma molti hanno scritto enunciati troppo approssimativi, omettendo ad esempio l'ipotesi (essenziale) che f sia continua.
- Seconda parte, esercizio 1, seconda parte: pochi scrivono sviluppo asintotico di del termine generico della serie, che pure darebbe facilmente la risposta cercata.

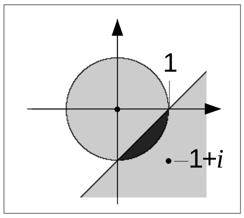
- Seconda parte, esercizio 2: i punti e) ed f) sono facili da dimostrare una volta trovata l'espressione giusta per la derivata n-esima di f. Questa espressione si indovina facilmente, ma resta difficile da dimostrare in modo rigoroso.
- Seconda parte, esercizio 3: nessuno ha dimostrato il punto d), anche se in due hanno suggerito che la chiave di tutto è l'uniforme continuità di f' (cosa di cui noi non ci eravamo accorti).
- Seconda parte, esercizio 4: per il punto a), il trucco è scrivere y_h come serie geometrica, invece di cominciare da q_h. Una volta ottenuto a), quasi tutti hanno dimostrato anche b), anche se spesso in modo un po' impreciso (ad esempio, dimenticando che un numero periodico può avere un antiperiodo) o farraginoso. I pochi che hanno dimostrato il punto c) hanno fatto ricorso all'algoritmo della divisione, con le inevitabili difficoltà che questa scelta comporta.

Scritto del I appello, 12 giugno 2003

Prima parte

1. a) numerabile, b) più che numerabile, c) numerabile.
2. Ad esempio $f(x) := x$.
3. Per $x \to +\infty$ si ha $x^a \sin\big(1/(x+x^2)\big) \sim x^a/(x+x^2) \sim x^{a-2}$, e dunque l'integrale risulta finito se e solo se $a < 1$.
4. $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n e^{-n} = \sum_0^\infty (-1/e)^n = \frac{1}{1-(-1/e)} = \frac{e}{e+1}$.
5. $f'(x) = 4x\, e^{2x+1}$.
6. $\displaystyle R_1 = \bigg(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+n^2}}\bigg)^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+n^2} = 1;$

   $\displaystyle R_2 = \bigg(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}}\bigg)^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2}.$
7. Ad esempio $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{per } x \ge 0, \\ -x^2 & \text{per } x < 0. \end{cases}$
8. Le soluzioni della disequazione $1 \ge |z|$ sono i punti (del piano complesso) con distanza da 0 inferiore a 1, ovvero il cerchio di centro l'origine e raggio 1, mentre le soluzioni di $|z| \ge |z - 1 + i|$ sono i punti più vicini a $1 - i$ che a 0, ovvero il semipiano sotto la retta $y = x - 1$. Le soluzioni sono l'intersezione di queste due regioni, ovvero la zona in grigio scuro nella figura accanto.



Seconda parte

1. a) Per x che tende a 0 si ha $\sin(x^3 + x^4) \sim x^3 + x^4 \sim x^3$, mentre $\sin(e^{-x}$ converge a $\sin(1)$, che è un numero diverso da 0. Quindi
$$f_a(x) \sim \sin(1)\, x^{a+3} \,. \tag{3}$$
   b) Siccome f_a è continua in $(0, +\infty)$ ma per certi a può avere un asintoto in 0, l'integrale si spezza in due integrali impropri elementari: quello da 0 a 1, e quello da 1 a $+\infty$. Per via della (3) e del teorema del confronto asintotico, f_a è (assolutamente) integrabile su $(0, 1)$ se e solo se $a + 3 > -1$, ovvero $a > -4$. Si osservi che la (3) implica anche che f_a è positiva in un intorno di 0, e quindi si può applicare il teorema del confronto asintotico nei due sensi. Per il secondo integrale improprio usiamo la stima
$$|f_a(x)| \le x^a \sin(e^{-x}) \le x^a e^{-x}$$
   (valida per $e^{-x} \le \pi/2$, e quindi anche per $x \ge 0$), e siccome $x^a e^{-x}$ è "o" piccolo di qualunque potenza di x per qualunque a, per il teorema del confronto asintotico $x^a e^{-x}$ – e quindi anche f_a – sono assolutamente integrabile su $(1, +\infty)$ per ogni a.
   Concludendo, l'integrale improprio di f_a su $(0, +\infty)$ è finito se e solo se $a > -4$.
2. Si prenda $M > \inf f$. Siccome f ha limite $+\infty$ a $\pm\infty$, devono esistere x_1 ed x_2 finiti tale che $f(x) \ge M$ per $x \le x_1$ e per $x \ge x_2$. Ora, f deve certamente avere un punto di minimo x_m sull'intervallo chiuso $I := [x_1, x_2]$, ed è facile verificare che questo è anche un punto di minimo su $\mathbb{R}$. Infatti, per la scelta di M, f deve assumere anche valori inferiori ad M, e può farlo solo nell'intervallo I (tra l'altro, questo implica che I non è vuoto, ovvero che

$x_1 \le x_2$), per cui il valore minimo di f su I è certamente inferiore ad M, e quindi anche ad ogni valore assunto da f fuori da I.

3. a) $R = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} \right)^{-1} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = 1.$

   b) dal punto a) sappiamo già che la serie (1) converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Restano i casi $x = \pm 1$. In entrambi i casi la serie converge per il criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.

   c) Dalla teoria delle serie di potenze sappiamo che per ogni $x \in (-1,1)$ si ha

$$f'(x) = \sum_0^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_0^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \ .$$

   Trovando la primitiva che vale 0 in 0 (perché $f(0) = 0$) otteniamo infine

$$f(x) = \arctan x \quad \text{per } x \in (-1,1). \tag{4}$$

   d) Dalla (4) uno vorrebbe dedurre che $f(\pm 1) = \arctan(\pm 1) = \pm\pi/2$. La difficoltà è che la teoria delle serie di potenze garantisce la validità della (4) solo all'interno dell'intervallo di convergenza $(-1,1)$. Per poter estendere questa identità agli estremi $x = \pm 1$, basterebbe dimostrare che $f(x)$ è continua a sinistra in 1 e a destra in -1, ma questo non è facile. Un modo per farlo, è osservare che le funzioni f_m date dalle somme parziali della serie (1), sono tutte Lipschitziane con costante di Lipschitz minore o uguale a 2, e dunque lo stesso deve valere per il limite f. Infatti, posto

$$f_m(x) := \sum_0^m \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \ ,$$

   abbiamo

$$f'_m(x) = \sum_0^m (-1)^n x^{2n} = \frac{1-(-x^2)^{m+1}}{1+x^2} \ .$$

   Dunque

$$|f'_m(x)| \le \frac{1+(x^2)^{m+1}}{1+x^2} \le 2$$

   da cui si deduce che per ogni $x, y \in [-1,1]$ con $x \ne y$ vale

$$|f_m(x) - f_m(y)| \le 2|x-y| \ ,$$

   e questa condizione passa al limite per $m \to +\infty$, dimostrando che f ha costante di Lipschitz minore o uguale a 2, ed in particolare è continua.

4. a) Si tratta di verificare che X è un sottospazio dello spazio vettoriale delle successioni, ovvero che è chiuso per somma e moltiplicazione per costante.

   b) Chiaramente, posto $x_0 := a_0$ e $x_1 := a_1$, x_2 risulta univocamente determinato dalla condizione $x_2 = x_1 + x_0$; a sua volta, x_3 risulta univocamente determinato dalla condizione $x_3 = x_2 + x_1$, e così via. La versione formalizzata di quest'argomentazione è la seguente. Unicità: date (x_n) ed (x'_n) in X tali che $x_0 = x'_0$ e $x_1 = x'_1$, si dimostra per induzione che

$$x_n = x'_n \tag{6}$$

per ogni n; infatti, supponendo che la (6) sia vero per tutti gli indici minori o uguali ad n, con $n \geq 1$, si ottiene dalla (2) che deve essere vero pure per $n+1$. Esistenza: solita costruzione per induzione.
Per concludere, osserviamo che l'applicazione lineare da X in $\mathbb{R}^2$ che associa ad ogni successione (x_n) il vettore (x_0, x_1) è, per quanto visto, iniettiva e surgettiva, e dunque X ha dimensione 2.

c) Imponendo $x_n = \lambda^n$, la condizione (2) diventa $\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$ per ogni n, che dividendo λ^n dà luogo all'equazione $\lambda^2 = \lambda + 1$, risolta da

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ . \tag{5}$$

d) X è uno spazio vettoriale di dimensione 2, e le successioni (λ_1^n) e (λ_2^n) trovate in c) sono linearmente indipendenti – perché lo sono i vettori $(1, \lambda_1)$ e $(1, \lambda_2)$ – e quindi sono una base di X. Pertanto ogni successione (x_n) in X è combinazione lineare di queste due, ovvero devono esistere α_1 e α_2 tali che $x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$ per ogni n. Per trovare questi due parametri, basta limitarsi a imporre l'identità per $n = 0, 1$. Nel nostro caso otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 1 = x_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \ , \\ 1 = x_1 = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \ . \end{cases}$$

Risolvendolo con $\lambda_{1,2}$ dati in (5) otteniamo

$$\alpha_{1,2} := \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$$

e dunque la successione cercata è

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \ .$$

Commenti

- Prima parte, esercizio 4: quasi nessuno si è accorto che si tratta di una serie geometrica, una delle poche che può essere calcolata esplicitamente.
- Prima parte, esercizio 6: ad essere precisi, la seconda serie di potenze andrebbe riscritta come $\sum a_m x^m$ con $a_m = 0$ per m dispari e $a_m = 1/2^{m/2}$ per m pari. Pertanto il raggio di convergenza è dato da

  $$R_2 = \Big(\limsup_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} \Big)^{-1}$$

  ma trascurando gli m dispari, che non influiscono sul limsup, e facendo il cambio di variabile $m = 2n$, ritorniamo al conto fatto in precedenza.
- Prima parte, esercizio 8: solo una persona l'ha risolto correttamente!
- Seconda parte, esercizio 3a): per il calcolo del raggio di convergenza della serie (1) vale lo stesso discorso fatto per la seconda serie dell'esercizio 6 della prima parte: ad essere precisi la serie andrebbe riscritta come $\sum a_m x^m$ con $a_m = 0$ per m pari e $a_m = (-1)^{(n-1)/2}/m$ per m dispari, e il raggio di convergenza sarebbe dato da

  $$R = \Big(\limsup_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} \Big)^{-1}$$

ma di nuovo ci si riconduce al conto fatto in precedenza. Notare che applicare il criterio del rapporto per trovare R, come molti hanno fatto, non è del tutto corretto, perché $|a_m|/|a_{m+1}|$ non è definito per m pari, ed è 0 per m dispari. La versione corretta del criterio del rapporto in questo caso sarebbe questa:

$$R = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{2n-1}|}{|a_{2n+1}|}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1}} = \sqrt{1} = 1 \ .$$

(Notare la presenza della radice quadrata, dovuta al fatto che si sta considerando il rapporto non di due coefficienti consecutivi, ma intervallati di 2.)

- Seconda parte, esercizio 3c): quasi nessuno si è accorto che la serie di potenze derivata è una serie geometrica, e pertanto può essere calcolata esplicitamente.
- Seconda parte, esercizio 4d): la successione in questione è quella di Fibonacci, di cui abbiamo dato così una formula esplicita.

SCRITTO DEL SECONDO APPELLO, 10 LUGLIO 2003

PRIMA PARTE

1. $|x+1|-2 \geq 0$, ovvero $x \geq 1$ e $x \leq -3$.
2. La seconda e la terza.
3. La serie si scrive come $\sum_0^\infty \big(-\sqrt{|x|}\big)^n$, e converge per $-1<x<1$ a $\dfrac{1}{1+\sqrt{|x|}}$.
4. $\log(1+\sin x)$.
5. Ad esempio $x+2\sin x$.
6. Il raggio di convergenza è 0.
7. Posto $z=x+iy$, deve essere $e^x e^{iy} = e^{\pi i}$, ovvero $x=0$ e $y=\pi+2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

SECONDA PARTE

1. La funzione $f(x) := e^{-1/x} - \cos(a/\sqrt{x})$ è continua su $[0,+\infty)$ e per $x \to +\infty$ la parte principale è data da

$$\begin{aligned} f(x) &= \Big[1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]-\Big[1-\frac{a^2}{2x}+\frac{a^4}{24x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] \\ &= \frac{a^2-2}{2x}+\frac{12-a^4}{24x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \sim \begin{cases} \dfrac{a^2-2}{2x} & \text{per } a \neq \pm\sqrt{2}, \\ \dfrac{1}{3x^2} & \text{per } a = \pm\sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque f ha segno definitivamente costante, ed applicando il teorema di confronto asintotico otteniamo che l'integrale di f è finito se e solo se $a=\pm\sqrt{2}$.

2. a) Il raggio di convergenza è 1.
b) Quindi la serie converge assolutamente per $-1<x<1$, e non converge per $x>1$ (allorché diverge a $+\infty$) e per $x<-1$. Per $x=\pm 1$ la serie converge assolutamente per confronto con la serie $\sum 1/n^2$.
c) Sia $f(x)$ corrispondente alla somma della serie. La derivata seconda di f è allora data da

$$f''(x) = D^2\Big[\sum_2^\infty \frac{x^n}{n(n-1)}\Big] = \sum_2^\infty x^{n-2} = \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } -1<x<1.$$

Integrando due volte, e ricordando che $f(0)=0$ ed $f'(0)=0$, otteniamo infine

$$f(x) = \sum_2^\infty \frac{x^n}{n(n-1)} = (1-x)\log(1-x)+x \quad \text{per } -1<x<1.$$

L'uguaglianza vale anche per $x=\pm 1$ perché la funzione f è continua su tutto $[-1,1]$. La dimostrazione è delicata, e si basa sul fatto che le somme parziali della serie sono equi-Lipschitziane. Un modo alternativo è calcolare direttamente $f(\pm 1)$. Infatti, per $x=1$ abbiamo la serie telescopica

$$f(1) = \sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)} = \sum_2^\infty \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = \Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)+\cdots = 1$$

mentre per $x = -1$ abbiamo

$$f(-1) = \sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = \sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -1 + 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

e ricordando che l'ultima serie converge a $\log 2$ (senza però dimostrarlo!) otteniamo $f(-1) = -1 + 2\log 2$.

3. a) Siano $x_0 < x_1$ i punti in cui f si annulla. Abbiamo allora due possibilità: almeno uno tra il punto di massimo ed il punto di minimo di f nell'intervallo $[x_0, x_1]$ è interno all'intervallo stesso, oppure f è costante sull'intervallo. In entrambe i casi abbiamo la tesi. (In effetti, questa è parte della dimostrazione del teorema di Rolle).
c) Indichiamo con $N(f)$ il numero di zeri della funzione f (ammettendo ovviamente il valore $+\infty$). L'osservazione base è la seguente: se f è derivabile ovunque, tra due zeri distinti di f esiste sempre un punto in cui si annulla la derivata (teorema di Rolle, oppure punto precedente), ovvero $N(Df) \geq N(f)-1$. Se f è derivabile due volte, allora possiamo applicare lo stesso ragionamento due volte di seguito, ed otteniamo $N(D^2f) \geq N(Df)-1 \geq N(f)-2$. Procedendo a questo modo si dimostra quindi che per una funzione f derivabile n volte si ha
$$N(D^n f) \geq N(f) - n\ .$$
Ora, $D^n f > 0$ implica $N(D^n f) = 0$, da cui segue $0 \geq N(f) - n$, ovvero $N(f) \leq n$.

4. a) Sia X_1 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Siccome $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, abbiamo
$$X_1 = \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}\ .$$
b) D'altra parte, detto X_2 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$,
$$X_2 \sim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \succeq 2^{\mathbb{R}} \succ \mathbb{R}\ .$$
c) Sia X_3 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ continue. L'applicazione $\phi : X_3 \to X_1$ che ad ogni $f \in X_3$ associa la sua restrizione ai razionali è iniettiva. Questo segue dal fatto che due funzioni *continue* che coincidono sui razionali devono coincidere ovunque. Ma allora $X_3 \preceq X_1$, che ha la cardinalità del continuo. D'altra parte, X_3 contiene l'insieme delle funzioni costanti, che pure ha la cardinalità del continuo. Quindi
$$X_3 \sim \mathbb{R}\ .$$
d) Sia X_4 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ iniettive. Per ogni $A \subset \mathbb{R}$, definiamo la funzione $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue:
$$f_a(x) := \begin{cases} e^x & \text{se } x \in A, \\ -e^x & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$
Si verifica facilmente che f_A è iniettiva, ovvero appartiene a X_4. Inoltre, A coincide con l'insieme dei punti in cui f_A è positiva, e dunque l'applicazione ϕ che associa ad ogni $A \subset \mathbb{R}$ la funzione $f_A \in X_4$ è necessariamente iniettiva. Abbiamo quindi dimostrato che X_4 ha cardinalità maggiore o uguale a quella delle parti di $\mathbb{R}$, ovvero
$$X_4 \succeq \mathbb{R}\ .$$
e) Difficile. Definiamo i seguenti insiemi: X_5 l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ bigettive, X la famiglia dei sottoinsiemi A di $\mathbb{R}$ tali che $A \sim \mathbb{R}$, e $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dato $A \in X$,

abbiamo $A \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^*$, e dunque esiste $\phi_A : A \to \mathbb{R}^*$ corrispondenza bigettiva. Definiamo ora $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue:

$$f_A(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \notin A, \\ \phi_A^{-1}(-\phi_A(x)) & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

In altre, f_A lascia fisso ogni punto che non appartiene ad A, e manda ogni punto di A nel suo "opposto" (cioè quello corrispondente al suo opposto nell'identificazione di A con $\mathbb{R}^*$). Dunque f_A è una bigezione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, ovvero appartiene ad X_5. Inoltre l'insieme dei punti che f_A non lascia in se stessi coincide con A, e quindi l'applicazione che ad ogni A associa f_A è iniettiva. Abbiamo dunque dimostrato che $X \preceq X_5$, e per concludere non resta che far vedere che la famiglia X ha la cardinalità delle parti di $\mathbb{R}$. Per fare questo basta osservare che X è in corrispondenza bigettiva con la famiglia X' dei complementari degli insiemi in X, e l'unione di X ed X' coincide con le parti di $\mathbb{R}$.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2: nessuno sembra essersi accorto del fatto che la derivata seconda di questa serie dà luogo ad una serie nota.
- Seconda parte, esercizio 3a): tutti (più o meno) hanno applicato il Teorema di Weierstrass all'intervallo determinato dai due zeri per trovare un punto di massimo ed uno di minimo. Non molto hanno chiarito però che questi punti sono anche di massimo e minimo relativo su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se sono interni all'intervallo (cosa che deve essere vera per almeno uno dei due, altrimenti …). La funzione $\sin x$ ha come zeri 0 e π, e compreso tra essi c'è solo il massimo locale $\pi/2$, mentre 0 e π, che sono i punti di minimo della restrizione della funzione all'intervallo $[0, \pi]$, non sono punti di minimo locale su $\mathbb{R}$.
- Seconda parte, esercizio 4: abbiamo usato senza dimostrarlo il fatto che $(A^B)^C \sim A^{B\times C}$. In effetti, un elemento di $A^{B\times C}$ è una funzione f da $B \times C$ in A. A questa f possiamo dunque associare $F : C \to A^B$
- Seconda parte, esercizio 4: volendo andare oltre, si noti che $X_5 \subset X_4 \subset X_2$, e quindi $X_5 \preceq X_4 \preceq X_2$, ed inoltre

  $$X_2 = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$$

  e dunque $X_5 \sim X_4 \sim X_2 \sim 2^{\mathbb{R}}$.

Prima parte

1. Siccome $e^{x^2} = 1 + o(x)$, f è continua in 0 se $b = 0$, e risulta poi derivabile per ogni a.
2. Applicando la regola di de l'Hôpital, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} \int_0^x e^{-t^2} dt = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{\cos x} = 1$.
3. Tutti, perché il numeratore dell'integranda è limitato e $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$.
4. $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{x - \sin x \cos x}{2}$.
5. 5^5.
6. Siccome $\sqrt[n]{n^{3n+5}} = n^{3+5/n} \geq n^3 \to +\infty$, il raggio di convergenza è 0.
7. Si tratta delle circonferenza (piena) di centro $-1 + 2i = (-1, 2)$ e raggio 1.

Seconda parte

1. Usando gli sviluppi di Taylor di e^x e $\sin x$ in 0 otteniamo
$$e^{1/n} + a \sin(1/n) - 1 = \frac{1+a}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) \ .$$
Quindi, se $a \neq -1$, i termini della serie sono asintoticamente equivalenti a $(1 + a)/n$ ed in particolare hanno segno definitivamente costante (positivo per $a > -1$ e negativo per $a < -1$). Per il teorema del confronto asintotico, la serie diverge a $+\infty$ per $a > -1$ e a $-\infty$ per $a < -1$. Per $a = -1$ i termini sono asintoticamente equivalenti a $1/n^2$, ed in particolare sono definitivamente positivi. Per il teorema del confronto asintotico, la serie converge.
2. a) Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome f è uniformemente continua, esiste $\gamma > 0$ tale che
$$|y_1 - y_2| \leq \gamma \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| \leq \varepsilon \ . \tag{1}$$
Siccome g è uniformemente continua, esiste anche $\delta > 0$ tale che
$$|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq \gamma \ . \tag{2}$$
Combinando la (1) e la (2) otteniamo subito che
$$|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f(g(x_1)) - f(g(x_2))| \leq \varepsilon \ .$$
b) In ultima analisi, abbiamo bisogno di stimare il modulo della differenza tra $f(x_1)g(x_1)$ e $f(x_2)g(x_2)$ usando $|f(x_1) - f(x_2)|$ e $|g(x_1) - g(x_2)|$. Applichiamo allora il solito trucco:
$$\begin{aligned} \big|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)\big| &= \\ &= \big|f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)\big| \\ &\leq \big|f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2)\big| + \big|f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)\big| \\ &= |f(x_1)| \cdot |g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2)| \cdot |f(x_1) - f(x_2)| \ . \end{aligned} \tag{3}$$
Siccome f e g sono limitate, esiste una costante M finita che maggiora $|f|$ e $|g|$. Quindi la (3) diventa
$$\big|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)\big| \leq M\big(|f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)|\big) \ . \tag{4}$$

Siccome f e g sono uniformemente continue, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta' > 0$ e $\delta'' > 0$ tali che

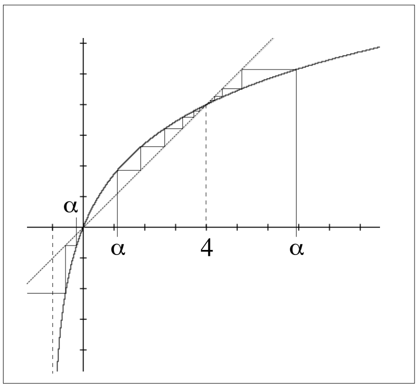
$$|x_1 - x_2| \leq \delta' \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \;, \tag{5}$$

$$|x_1 - x_2| \leq \delta'' \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \;. \tag{6}$$

Posto allora $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$, abbiamo che (4), (5) e (6) implicano

$$|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow \big|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)\big| \leq M\Big(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\Big) = \varepsilon \;.$$

3. Disegnando la funzione $f(x) := 4\log(1+x)/\log 5$ (figura accanto) si vede subito che l'equazione $f(x) = x$ ha soluzioni $x = 0, 4$, e che 0 è un punto fisso repulsivo, mentre 4 è un punto attrattivo. In particolare, se $\alpha > 4$, si dimostra facilmente per induzione che a_n resta maggiore di 4, è decrescente (ed è pertanto definita per tutti gli indici n) e quindi converge a 4. Viceversa, se $0 < \alpha < 4$, allora a_n resta minore di 4 ed è crescente, e pure in questo caso converge a 4. Ovviamente, per $\alpha = 0, 4$ abbiamo successioni costanti. Infine, per $\alpha < 0$ la successione risulta decrescente ed è ben definita solo per un numero finito di indici.



Verifichiamo solo il primo di questi enunciati: siccome $4 < f(x) < x$ per $x > 4$, $a_n > 4$ implica $a_n > f(a_n) = a_{n+1} > 4$. Dunque, per induzione su n, $\alpha = a_1 > 4$ implica che a_n è ben definita, decrescente, e maggiore di 4 per tutti gli n.

Prima parte

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}$.

3. Siccome $\sin(2x + \pi/2) = \cos(2x)$, si tratta del grafico della funzione coseno “compresso” orizzontalmente di un fattore 2.

4. La parte principale dell'integrando per $x \to 0$ è $1/x^a$, mentre per $x \to +\infty$ è $1/x^{a+1}$. L'integrabilità in 0 si ha per $a < 1$, mentre l'integrabilità a $+\infty$ si ha per $a + 1 > 1$. Quindi l'integrale è finito per $0 < a < 1$.

5. Siccome $-4 = re^{\pi i}$, le radici quarte sono $z = \sqrt{2}e^{k\pi i/4}$ con $k = 0, \ldots, 3$, ovvero $z = \pm 1 \pm i$.

6. $x \cos x$ è una funzione dispari, e quindi l'integrale è nullo.

7. 0, 0, $-\infty$.

Seconda parte

1. Calcoliamo lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di $f'(x)$:
$$f'(x) = 1 + \alpha e^x + \beta \sin(\beta x) = (1+\alpha) + (\alpha + \beta^2)x + \frac{\alpha}{2}x^2 + o(x^2)$$
e quindi, tenuto conto del fatto che $f(0) = 0$,
$$f(x) = (1+\alpha)x + \frac{\alpha - \beta^2}{2}x^2 + \frac{\alpha}{6}x^3 + o(x^3)\ .$$
L'ordine di infinitesimo massimo lo si ottiene imponendo che i primi due termini di questo sviluppo siano nulli:
$$\begin{cases} 1+\alpha = 0 \\ \alpha + \beta^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \pm 1 \end{cases}$$
In entrambi i casi la parte principale di $f(x)$ è $-x^3/6$.

2. a) Fissato $n \geq 1$, indichiamo con S_p e S_d la somma di $\binom{n}{h}$ su tutti gli $h = 0, 1, \ldots, n$ rispettivamente pari e dispari. Sviluppando quindi $(1+1)^n$ e $(1-1)^n$ con la formula di Newton otteniamo
$$2^n = (1+1)^n = \sum_0^n \binom{n}{h} = S_p + S_d\ ,$$
$$0 = (1-1)^n = \sum_0^n \binom{n}{h}(-1)^h = S_p - S_d\ .$$
Le incognite S_p ed S_d risolvono il sistema
$$\begin{cases} S_p + S_d = 2^n \\ S_p - S_d = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} S_p = 2^{n-1} \\ S_d = 2^{n-1} \end{cases}$$
ed in particolare $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq h \leq n \\ h \text{ pari}}} \binom{n}{h} = S_p = 2^{n-1}$.

   b) Per ogni $n \geq 1$, indichiamo con S_0, S_1, S_2 ed S_3 la somma di $\binom{n}{h}$ su tutti gli $h = 0, 1, \ldots, n$ rispettivamente congrui a 0, 1, 2 e 3 modulo 4. Per quanto visto al punto b)
$$2^{n-1} = S_p = S_0 + S_2\ , \quad 2^{n-1} = S_d = S_1 + S_3\ . \tag{3}$$

Per determinare le incognite S_0, S_1, S_2 ed S_3 ci mancano altre due equazioni. Le otteniamo sviluppando $(1+i)^n$ con la formula di Newton:

$$2^{n/2}e^{in\pi/4} = (1+i)^n = \sum_0^n \binom{n}{h} i^h = S_0 - S_2 + i(S_1 - S_3)$$

ovvero

$$2^{n/2}\cos(n\pi/4) = \mathrm{Re}(1+i)^n = S_0 - S_2\ , \quad 2^{n/2}\sin(n\pi/4) = \mathrm{Im}(1+i)^n = S_1 - S_3\ .$$

Ricordando la (3) otteniamo quindi i due sistemi

$$\begin{cases} S_0 + S_2 = 2^{n-1} \\ S_0 - S_2 = 2^{n/2}\cos(n\pi/4) \end{cases}, \quad \begin{cases} S_1 + S_3 = 2^{n-1} \\ S_1 - S_3 = 2^{n/2}\sin(n\pi/4) \end{cases};$$

infine

$$\begin{cases} S_0 = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4) \\ S_1 = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\sin(n\pi/4) \\ S_2 = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4) \\ S_3 = 2^{n-2} - 2^{\frac{n-2}{2}}\sin(n\pi/4) \end{cases}$$

ed in particolare $\displaystyle\sum_{\substack{0\le h\le n \\ h\equiv 0 \bmod(4)}} \binom{n}{h} = S_0 = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(n\pi/4).$

3. a) Se $a_n \ge 1$ la successione $\displaystyle\prod_{n=0}^m a_n$ è crescente in m, e quindi ammette limite.

b) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} \frac{\prod_{n=0}^m a_n}{\prod_{n=0}^{m-1} a_n} = \frac{\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^m a_n}{\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m-1} a_n} = 1.$

c) Osserviamo innanzitutto che per ogni $m \ge 1$

$$(1+b_1)\cdots(1+b_m) = 1 + b_1 + \cdots + b_n + \text{vari prodotti dei numeri } b_n,$$

quindi $\displaystyle\prod_1^m (1+b_n) \ge \sum_1^m b_n$, e passando al limite per $m \to +\infty$

$$\prod_1^\infty (1+b_n) \ge \sum_1^\infty b_n\ . \tag{4}$$

D'altra parte, la disuguaglianza $1 + x \le e^x$ implica che per ogni $m \ge 1$,

$$\prod_{n=0}^m (1+b_n) \le \prod_{n=0}^m e^{b_n} \le \exp\Big(\sum_{n=0}^m b_n\Big)$$

da cui segue immediatamente

$$\prod_{n=0}^\infty (1+b_n) \le \exp\Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big)\ . \tag{5}$$

La (4) e la (5) implicano l'equivalenza in (2).

Scritto del V appello, 11 febbraio 2004

Prima parte

1. $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!} x^n + o(x^n)$; $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})$.
2. $f(x) = 4^{-x}(e^{2\log 2})^x = 4^{-x}4^x = 1$, e quindi $f'(x) = 0$.
3. Si tratta dell'iperbole $y = 1/x$ riflessa rispetto all'asse delle y e poi traslata a destra di 1.
4. La funzione integranda è continua e positiva su $[0, +\infty[$, ed asintoticamente equivalente a x^a per $x \to +\infty$, per cui l'integrale è finito se e solo se $a > 1$.
5. $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{-3} = \left(2e^{i\pi/3}\right)^{-3} = 2^{-3}e^{-i\pi} = -1/8$.
6. Si tratta dell'origine (o meglio, dell'insieme il cui unico elemento è $(0, 0)$).
7. 0, $+\infty$, $+\infty$.

Seconda parte

1. Usando gli sviluppi di Taylor in 0 di $\sin x$ e $\cos x$ si ottiene
$$\sin x - \tan x = \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x(\cos x - 1)}{\cos x} \sim \frac{x(-x^2/2)}{1} = -\frac{x^3}{2}$$
e quindi, per n che tende a $+\infty$
$$\sin\left(\frac{1}{n^a}\right) - \tan\left(\frac{1}{n^a}\right) \sim -\frac{1}{2n^{3a}} \ .$$
Ne consegue che il segno del termine generico della successione è costante (negativo) da un certo punto in poi (in realtà sempre), ed è quindi possibile applicare il teorema del confronto asintotico: la serie converge per $a > 1/3$ e diverge a $-\infty$ altrimenti.

2. b) La funzione $g(x) := f(\sqrt{x})$ è chiaramente derivabile in $]0, +\infty[$, con derivata data dalla formula
$$g'(x) := \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \quad \text{per } x > 0.$$
Siccome f è pari, deve essere $f'(0) = 0$, e quindi possiamo calcolare il limite di $g'(x)$ per $x \to 0$ usando de L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{f''(t)}{2} = \frac{f''(0)}{2} \ .$$
Pertanto f è derivabile anche in 0, con derivata uguale a $f''(0)/2$.

3. a) Il triangolo $T_{a,b}$ è contenuto in S se e solo se il segmento di estremi $(0, b)$ e $(a, 0)$ giace al di sotto del grafico della funzione e^{-x}, ovvero
$$b(1 - x/a) \leq e^{-x} \quad \text{per } x \geq 0 \tag{1}$$
(la disuguaglianza è automaticamente verificata per $x \geq a$, e quindi imporla per $0 \leq x \leq a$ oppure per $0 \leq x$ è la stessa cosa, e la seconda scelta risulta più comoda).
Fissato $a > 0$, vogliamo determinare i valori di b per cui vale la (1). Cerchiamo quindi di calcolare il valore minimo della funzione $f(x) := e^{-x} - b(1 - x/a)$ sulla semiretta $x \geq 0$: la derivata è $f'(x) = -e^{-x} + b/a$ e risulta positiva per $x \geq \log(a/b)$ e negativa altrimenti.

Abbiamo quindi due possibilità: i) se $\log(a/b) \leq 0$, ovvero $b \geq a$, allora f è crescente nell'intervallo $[0, a]$ e raggiunge il minimo in 0, quindi il minimo vale $f(0) = 1 - b$ e la (1) si riduce a $b \leq 1$; ii) Se $0 < \log(a/b)$, ovvero $b < a$, allora f raggiunge il minimo in $\log(a/b)$, quindi il minimo vale $(b/a) - b + (b/a)\log(a/b)$, e la (1) si riduce, con un po' di conti, a $b \leq ae^{1-a}$. Mettendo insieme le due soluzioni, otteniamo che per $a \leq 1$ i valori di b ammissibili sono quelli per cui $b \leq 1$, mentre per $a > 1$ i valori di b ammissibili sono quelli per cui $b \leq ae^{1-a}$.
b) Per $0 < a \leq 1$ il triangolo di area massima tra quelli ammissibili si ha per $b = 1$, ed ha area $a/2$. Invece per $a > 1$, il triangolo di area massima tra quelli ammissibili si ha per $b = ae^{a-1}$, ed ha area $a^2 e^{a-1}/2$. Si tratta ora di trovare il massimo della funzione

$$g(a) := \begin{cases} a/2 & \text{per } 0 < a \leq 1, \\ \\ a^2 e^{a-1}/2 & \text{per } 1 < a. \end{cases}$$

La funzione $g(a)$ è continua per $a > 0$ e chiaramente crescente per $a \leq 1$; studiandone la derivata $g'(a) = a(2 - a)e^{1-a}/2$ per $a > 1$, si vede anche che g è crescente per $a \leq 2$ e decrescente poi. Quindi g ha massimo per $a = 2$, ed il massimo vale $g(2) = 2e$. In conclusione, il triangolo di area massima si ha per $a = 2$ e $b = 2e$.

Versione: 17 settembre 2013

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2012-13

Giovanni Alberti e Vincenzo M. Tortorelli

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 15 dicembre 2012]

Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria.
   - 1.2 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, immagine, funzione inversa; funzioni crescenti e descrescenti. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.3 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
2. Numeri reali, successioni, limiti, continuità
   - 2.1 Numeri interi, razionali e reali. *Completezza dei numeri reali.*
   - 2.2 Successioni e limiti di successioni. Limite infinito. Proprietà elementari dei limiti.
   - 2.3 Limiti di funzioni. Continuità: definizione e significato. *Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso.*
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Interpretazioni fisiche: velocità e accelerazione.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Teorema di Lagrange. Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione (all'infinito e in zero).
   - 3.5 Teorema di Cauchy. Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - 3.6 Teoremi di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito ed in zero.
4. Integrali
   - 4.1 Definizione dell'integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Un'interpretazione fisica dell'integrale.
   - 4.2 Primitiva di una funzione e prima versione del teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - 4.3 Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
   - 4.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide. Lunghezza di un cammino nel piano e nello spazio.
   - 4.5 Integrali impropri di funzioni positive. Criterio del confronto e del confronto asintotico.
   - 4.6 Integrali impropri di funzioni a segno variabile: convergenza e convergenza assoluta.
5. Serie
   - 5.1 Serie a termini positivi. Esempi fondamentali. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio del confronto, del confronto asintotico, della radice, dell'integrale.
   - 5.2 Serie a segno variabile; convergenza e convergenza assoluta.

5.3 *Sviluppo in serie di Taylor della funzione* e^x *ed espressione della costante di Nepero e come serie. Espressione di* π *come serie.*

6. Equazioni differenziali

6.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica. Significato dei dati iniziali.
6.2 Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee.
6.3 *Equazione dell'oscillatore armonico semplice, smorzato e forzato. Risonanza.*

T E S T I

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\arcsin(2e^t)$.

2. Trovare le soluzioni dell'equazione $\cos(x-1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log((2x)^x)$; b) $\tan(1-2x)$; c) $\dfrac{x}{1-x^2}$.

4. Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3 - 3x)$ nell'intervallo $-2 \leq x \leq 3$.

5. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log(\sin x)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-3^x}{(2^x-1)^2}$.

6. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt[3]{x}}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+2x^4)}{x^3}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - \sin x}{2^x}$.

7. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp(2x^3) - \exp(3x^2)$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che: $-\dfrac{1}{x^2} \leq y \leq \cos x - 2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\arcsin(\log t)$.

2. Trovare le soluzioni dell'equazione $\sin(x+1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nell'intervallo $-1 \leq x \leq 2$.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log((3x)^x)$; b) $\tan(1-3x)$; c) $\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

4. Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3 - 3x)$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

5. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-5^x}{(2^x+1)^2}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \log(\cos x)$.

6. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log x}{\sqrt[4]{x}}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1-2x^4)}{x^4}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sin x}{3^x}$.

7. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \log(1+3x^4) - \log(1+4x^3)$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che: $-\dfrac{1}{x^2} + 1 \leq y \leq \cos x - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\arccos(3e^t)$.

2. Trovare le soluzioni dell'equazione $\cos(x+1) = 1/\sqrt{2}$ nell'intervallo $-2 \leq x \leq 0$.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log(x^{3x})$; b) $\tan(1+2x)$; c) $\dfrac{x}{x^2+1}$.

4. Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3 - 3x)$ nell'intervallo $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$.

5. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log(1+e^x)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+3^x}{(2^x+1)^2}$.

6. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt[4]{x}}$; b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(2-x^4)}{x}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sin x}{4x}$.

7. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \cos(x^3) - \cos(x^2)$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che: $\dfrac{1}{x^2} \geq y \geq 2 - \cos x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\arccos(\log t)$.

2. Trovare le soluzioni dell'equazione $\sin(x+2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nell'intervallo $-2 \leq x \leq 1$.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log(x^{2x})$; b) $\tan(1+3x)$; c) $\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

4. Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3 - 3x)$ nell'intervallo $-3 \leq x \leq 2$.

5. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+5^x}{(2^x-1)^2}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \exp(\sin x)$.

6. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{\sqrt[3]{x}}$; b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log(2+x^4)}{x}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-\sin x}{5x}$.

7. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp(x^2) - \cos(x^2)$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che: $\dfrac{1}{x^2} - 1 \geq y \geq 1 - \cos x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
   a) $\log(1-3x^2) + \big[\log(1-x)\big]^2$;
   b) $\log(1-3x^2) + 3\big[\log(1-x)\big]^2$;
   c) $\log(1-3x^3) - 3\big[\log(1-x)\big]^3$.

2. a) Dire se è vero o meno che $x^3 \geq 15 \log x - 3$ per ogni $x > 0$.
   b) Determinare i numeri reali a tali che $x^3 \geq 15 \log x + a$ per ogni $x > 0$.

3. Si consideri la funzione
   $$f(x) := x^5 e^{-x},$$
   e per ogni $a > 0$ sia T_a il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle y, la retta passante per l'origine e per il punto $(a, f(a))$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di $f(x)$ per $x \geq 0$ e disegnare T_a per un a a vostra scelta.
   b) Calcolare l'area di T_a.
   c) Trovare il valore massimo e minimo di quest'area.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

a) $\log(1-x^2)+\big[\log(1+2x)\big]^2$;
b) $4\log(1-x^2)+\big[\log(1+2x)\big]^2$;
c) $8\log(1-x^3)+\big[\log(1+2x)\big]^3$.

2. a) Dire se è vero o meno che $x^3 \geq 18\,\log x - 5$ per ogni $x>0$.
b) Determinare i numeri reali a tali che $x^3 \geq 18\,\log x + a$ per ogni $x>0$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) := x^{11}e^{-2x}\,,$$
e per ogni $a>0$ sia T_a il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle y, la retta passante per l'origine e per il punto $(a, f(a))$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$.
a) Tracciare un disegno approssimativo di $f(x)$ per $x \geq 0$ e disegnare T_a per un a a vostra scelta.
b) Calcolare l'area di T_a.
c) Trovare il valore massimo e minimo di quest'area.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3

1. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
a) $\log(1-x^2)+\big[\log(1-2x)\big]^2$;
b) $4\log(1-x^2)+\big[\log(1-2x)\big]^2$;
c) $8\log(1-x^3)-\big[\log(1-2x)\big]^3$.

2. a) Dire se è vero o meno che $x^4 \geq 20\,\log x - 3$ per ogni $x>0$.
b) Determinare i numeri reali a tali che $x^4 \geq 20\,\log x + a$ per ogni $x>0$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) := x^5e^{-2x}\,,$$
e per ogni $a>0$ sia T_a il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle y, la retta passante per l'origine e per il punto $(a, f(a))$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$.
a) Tracciare un disegno approssimativo di $f(x)$ per $x \geq 0$ e disegnare T_a per un a a vostra scelta.
b) Calcolare l'area di T_a.
c) Trovare il valore massimo e minimo di quest'area.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4

1. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
a) $\log(1+3x^2)+\big[\log(1-x)\big]^2$;
b) $\log(1+3x^2)-3\big[\log(1-x)\big]^2$;
c) $\log(1+3x^3)+3\big[\log(1-x)\big]^3$.

2. a) Dire se è vero o meno che $x^4 \geq 24\,\log x - 5$ per ogni $x>0$.
b) Determinare i numeri reali a tali che $x^4 \geq 24\,\log x + a$ per ogni $x \geq 0$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) := x^{11}e^{-x}\,,$$
e per ogni $a>0$ sia T_a il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle y, la retta passante per l'origine e per il punto $(a, f(a))$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$.

a) Tracciare un disegno approssimativo di $f(x)$ per $x \geq 0$ e disegnare T_a per un a a vostra scelta.

b) Calcolare l'area di T_a.

c) Trovare il valore massimo e minimo di quest'area.

PRIMA PARTE.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 \exp(1-x)$; b) $\sqrt{1+x^2}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin(2x)}{\log(1+x^4)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{\sqrt{x}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(-x+\sin x)$.

3. Determinare la primitiva $\displaystyle\int \frac{x^3}{\exp(x^4)}\,dx$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 3x^2 \log x\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x \sin(1/x^a)\,dx$ risulta essere finito.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-a})$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^x \sin t$ che soddisfa $x(\pi) = 0$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = 1 - e^x$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq x^2$.

SECONDA PARTE.

1. a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 8t\,. \qquad (*)$$
b) Trovare la soluzione della (*) che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$.
c) Trovare le soluzioni della (*) che soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

2. Dire per quali $a > 0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a - n\sin(1/n)}{n^a}$$
converge ad un numero finito (fare attenzione al caso $a = 1$).

3. a) Fissato $a > 0$, tracciare un grafico approssimativo della funzione
$$f(x) := \frac{1}{(1+x^4)^a}\,.$$
b) Sia A il *solido di rotazione* nello spazio ottenuto facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse delle x. Tracciare un disegno approssimativo di A e dire per quali valori di a il volume è finito.
c) Sia B il solido di rotazione ottenuto facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse delle y. Tracciare un disegno approssimativo di B e dire per quali valori di a il volume è finito.

Prima parte.

1. Risolvere la disequazione $\dfrac{x-1}{x^2-4} > 0$.

2. Trovare i *valori* di minimo e di massimo di $\log(5-x^2)$ relativamente all'intervallo $[-1,2]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-1}{4^x+1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\log(2x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{\sin(2x^2)}$.

4. Trovare la parte principale per $x\to 0$ della funzione $\log(1+x)-x$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3-2x}\,dx$.

6. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ la funzione $\dfrac{1}{1+at}$ risolve l'equazione differenziale $\dot{x}+4x^2=0$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x}-2\dot{x}+5x=0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano $x>0$ e $\dfrac{1}{x}\le y\le \log(x+1)$.

Seconda parte.

1. a) Dire se la disequazione $x^4+28\ge 4x^3$ è soddisfatta per ogni $x\in\mathbb{R}$ oppure no.
   b) Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ la disequazione $x^4+a\ge 4x^3$ è soddisfatta per ogni $x\in\mathbb{R}$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \sqrt{x^6+1}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) nel piano tali che $x\ge 0$ e $x^3\le y\le f(x)$.
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

3. Dato $a>0$ si consideri la serie a termini positivi
   $$\sum_{n=2}^{+\infty} (\log n)^{-(\log n)^a}\,.$$
   a) Dire se questa serie converge a un numero finito o meno per $a=1$.
   b) Dire per quali a la serie converge a un numero finito.
   [*Suggerimento: riscrivere il termine della serie nella forma* n^{b_n} *con* b_n *opportuno.*]

Prima parte, gruppo 1

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin x \leq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 e^{-x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(2^x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{x^{10}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{\log(1-x^2)}$.
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x e^{2x}\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{e^x}\, dx$ risulta essere finito.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^a}{1+n^{3a}}$ è finita.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{e^t}{2x}$ che soddisfa $x(0) = 2$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq x$.

Prima parte, gruppo 2

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3 e^{2x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \log x$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\log(1-2x^3)}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x^{-3})$.
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^3 \log(2x)\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^a)}{x^{3a}}\, dx$ risulta essere finito.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^a}{n^2}$ è finita.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{e^t}{3x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq x$.

Prima parte, gruppo 3

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin x \geq -1/2$ comprese tra 0 e 2π.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x e^{-2x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^3)}{3x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(2^x)$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{10} 2^x$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^2 \log(3x)\, dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \sin\Big(\frac{1}{x^2}\Big) dx$ risulta essere finito.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a}{e^n}$ è finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{2x}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq x$.

Prima parte, gruppo 4

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq -1/2$ comprese tra 0 e 2π.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3 e^{-x}$; b) $\log\Big(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\Big)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^3)}{3x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{10}}{\log x}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(2^x)$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x e^{-x}\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{x^2}\, dx$ risulta essere finito.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^a \sin\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$ è finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{3x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq -x$.

Seconda parte, gruppo 1

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + ax = 2e^{-2t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 5$.
b) Dire per quali valori di a si ha che *ogni* soluzione di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

2. Dato $a > 0$ si consideri l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^3 - \log(1+3x^3)}{x^{2a}}\, dx\,.$$
a) Dire per quali a la funzione integranda converge ad un limite finito per $x \to 0^+$.

b) Spezzare questo integrale improprio in integrali impropri semplici e dire quindi per quali a esso esiste ed è finito.

3. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione $f(x) := (x^2 + a)^3$.
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
b) Trovare il valore di a e di x_0 per cui il grafico della funzione $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{4}x$ nel punto di ascissa x_0.
c) Trovare i valori di a per cui $f(x) \geq \frac{27}{4}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 6\dot{x} + ax = -e^{-3t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 10$.
b) Dire per quali valori di a si ha che *ogni* soluzione di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

2. Dato $a > 0$ si consideri l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{4x^3 - \log(1 + 4x^3)}{x^a}\, dx\,.$$
a) Dire per quali a la funzione integranda converge ad un limite finito per $x \to 0^+$.
b) Spezzare questo integrale improprio in integrali impropri semplici e dire quindi per quali a esso esiste ed è finito.

3. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione $f(x) := (4x^2 + a)^3$.
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
b) Trovare il valore di a e di x_0 per cui il grafico della funzione $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{2}x$ nel punto di ascissa x_0.
c) Trovare i valori di a per cui $f(x) \geq \frac{27}{2}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + ax = -4e^{-2t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 8$.
b) Dire per quali valori di a si ha che *ogni* soluzione di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

2. Dato $a > 0$ si consideri l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2 - \log(1 + 2x^2)}{x^a}\, dx\,.$$
a) Dire per quali a la funzione integranda converge ad un limite finito per $x \to 0^+$.
b) Spezzare questo integrale improprio in integrali impropri semplici e dire quindi per quali a esso esiste ed è finito.

3. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione $f(x) := (x^2 + a)^3$.
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
b) Trovare il valore di a e di x_0 per cui il grafico della funzione $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{4}x$ nel punto di ascissa x_0.
c) Trovare i valori di a per cui $f(x) \geq \frac{27}{4}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 4

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 6\dot{x} + ax = 4e^{-3t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 13$.
b) Dire per quali valori di a si ha che *ogni* soluzione di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

2. Dato $a > 0$ si consideri l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^2 - \log(1+3x^2)}{x^{2a}}\, dx\,.$$
a) Dire per quali a la funzione integranda converge ad un limite finito per $x \to 0^+$.
b) Spezzare questo integrale improprio in integrali impropri semplici e dire quindi per quali a esso esiste ed è finito.

3. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione $f(x) := (4x^2 + a)^3$.
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
b) Trovare il valore di a e di x_0 per cui il grafico della funzione $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{2}x$ nel punto di ascissa x_0.
c) Trovare i valori di a per cui $f(x) \geq \frac{27}{2}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(1-x^2)$; b) $4^{2x}/2^{3x}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{e^x}{x^2-4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^{10}\, 2^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{1+4x^6}}$.
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{x^4(x+4)}{\log(1+2x^3)}$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}\, dx$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n - n^2}{1+n^a}$ risulta essere finita.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x \cos t = 0$ che soddisfa $x(0) = 2$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = |e^x - 1|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sin x}{\sqrt{8-x^3}}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\exp(1+x^2)$; b) $2^{6x}/4^{2x}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt[5]{x}\, \log x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{4+x^6}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{e^x}{x^2-4}$.
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{\log(1+3x^3)}{x^2(x+3)}$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(3x)^2}\, dx$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + \sin n}{4+n^{2a}}$ risulta essere finita.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x \cos t = 0$ che soddisfa $x(0) = 4$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = e^{|x|} - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-4}}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(x^3-1)$; b) $3^{5x}/9^{2x}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+9x^6}}{x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x^2-1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt[6]{x}\, \log x$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-\exp(x^3)}{x(x+4)}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+(3x)^2}\,dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\log n}{4+n^{2a}}$ risulta essere finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x\,\sin t = 0$ che soddisfa $x(0) = 4$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = |1 - e^x|$.

Prima parte, gruppo 4

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3-8}}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(x^2-1)$; b) $9^{3x}/3^{4x}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x^2+9x^6}}{x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^5\,4^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x^2-1}$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{x(x^2+3)}{1-\exp(x^2)}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n - n^3}{1+n^a}$ risulta essere finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x\,\sin t = 0$ che soddisfa $x(0) = 2$.

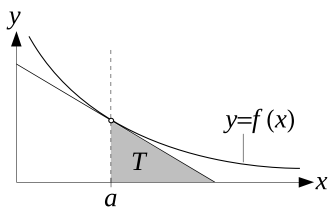
8. Disegnare il grafico di $f(x) = -e^{|x|}$.

Seconda parte, gruppo 1

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1 + 2x^2$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(x^3 - 3x)$.
   b) Risolvere la disequazione $f(x) \leq e^{6x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
   $$f(x) \leq y \leq e^{6x}\,.$$
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

3. Sia f una funzione definita su $(0, +\infty)$, derivabile, positiva e tale che $f'(x) < 0$ per ogni x. Fissato $a > 0$, sia T il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per il punto $(a, 0)$, e la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a (vedere la figura accanto).



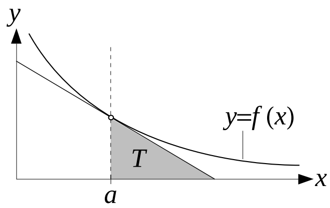
   a) Calcolare l'area di T.
   b) Determinare le funzioni f per cui l'area di T vale 1 per ogni scelta di $a > 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[3]{\cos(6x)} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[3]{\cos(6x)} - 1 + 6x^2$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(3x - x^3)$.
   b) Risolvere la disequazione $f(x) \le e^{-6x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
   $$f(x) \le y \le e^{-6x}\,.$$
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

3. Sia f una funzione definita su $(0, +\infty)$, derivabile, positiva e tale che $f'(x) < 0$ per ogni x. Fissato $a > 0$, sia T il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per il punto $(a, 0)$, e la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a (vedere la figura accanto).



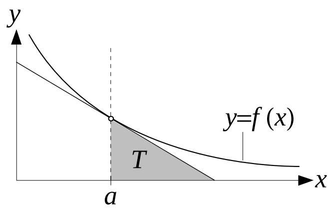
   a) Calcolare l'area di T.
   b) Trovare tutte le funzioni f per cui l'area di T vale 1/2 per ogni scelta di $a > 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(4x)} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(4x)} - 1 + 4x^2$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(x^3 - 3x^2)$.
   b) Risolvere la disequazione $f(x) \le e^{4x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
   $$f(x) \le y \le e^{4x}\,.$$
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

3. Sia f una funzione definita su $(0, +\infty)$, derivabile, positiva e tale che $f'(x) < 0$ per ogni x. Fissato $a > 0$, sia T il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per il punto $(a, 0)$, e la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a (vedere la figura accanto).



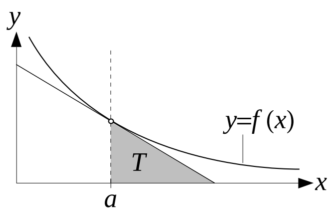
   a) Calcolare l'area di T.
   b) Trovare tutte le funzioni f per cui l'area di T vale 1/2 per ogni scelta di $a > 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(2x)} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(2x)} - 1 + x^2$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(3x^2 - x^3)$.
   b) Risolvere la disequazione $f(x) \le e^{-4x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
   $$f(x) \le y \le e^{-4x}\,.$$
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

3. Sia f una funzione definita su $(0, +\infty)$, derivabile, positiva e tale che $f'(x) < 0$ per ogni x. Fissato $a > 0$, sia T il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per il punto $(a, 0)$, e la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a (vedere la figura accanto).



a) Calcolare l'area di T.

b) Trovare tutte le funzioni f per cui l'area di T vale 1 per ogni scelta di $a > 0$.

Prima parte, gruppo 1

1. Risolvere la disequazione $\log \log x > 0$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan x}{x^2}$; b) $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$; c) $\lim_{x \to -\infty} xe^x$.
3. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 6 di $\log(1 - 2x^3)$.
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4x \cos(x^2)\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^a - 2}{x^2 + 1} dx$ è finito.
6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2t(1 + x^2)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \le y \le \cos x$.

Prima parte, gruppo 2

1. Risolvere la disequazione $\exp(\exp(x)) > 2$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to +\infty} \cos(x^2 + 1)$; b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2}$; c) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^4}{\log(1 + x^4)}$.
3. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 8 di $\cos(2x^2)$.
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4x \exp(x^2)\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a + 3}{x^3 + 1} dx$ è finito.
6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(1 + x^2)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \le y \le \sin x$.

Prima parte, gruppo 3

1. Risolvere la disequazione $\log \log x > 1$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + e^x}{x^2 + 1}$; b) $\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$; c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3)}{4x^2}$.
3. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 8 di $\log(1 - 2x^4)$.
4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^a+2}dx$ è finito.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = -2te^x$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\cos x \le y \le 0$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. Risolvere la disequazione $\exp(\exp(x)) > 4$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)-1}{2x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(1-x^2)$.

3. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 6 di $\sin(3x^2)$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 2x\, \exp(x^2)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^a+3}dx$ è finito.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = -3t^2e^x$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\sin x \le y \le 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = e^{at}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 1$.
b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = -1$.
c) Trovare la soluzione generale della (*) per a qualunque.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{x}{(x^2-1)^2}\,.$$
b) Per ogni numero reale $a > 0$ dire quante sono le soluzioni x dell'equazione $f(x) = a$ che soddisfano $x \le 2$.
c) Per ogni $a > 0$ indichiamo con $x(a)$ la più grande di tutte le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$; determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

3. Dire per quali numeri reali a la seguente serie a termini positivi è finita:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n^2+1)^a - n^{2a}\right].$$
[*Suggerimento: raccogliere* n^{2a}.]

Seconda parte, gruppo 2

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = e^{at}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 2$.
b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 1$.
c) Trovare la soluzione generale della (*) per a qualunque.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{-x}{(x^2-4)^2}\,.$$
b) Per ogni numero reale $a > 0$ dire quante sono le soluzioni x dell'equazione $f(x) = a$ che soddisfano $x \geq -1$.
c) Per ogni $a > 0$ indichiamo con $x(a)$ la più piccola di tutte le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$; determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

3. Dire per quali numeri reali a la seguente serie a termini positivi è finita:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big[(n^3+1)^a - n^{3a}\big]\,.$$
[*Suggerimento: raccogliere* n^{3a}.]

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq -1/2$ comprese tra $-\pi$ e π.
2. Determinare i *valori* minimo e massimo di $f(x) := x^3 - 3x$ relativamente all'intervallo $[0, 3]$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{3x^3}{\exp(-x^2) - 1}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 (in 0) di $\sqrt[3]{1 + 9x^4}$.
5. Determinare la primitiva $\displaystyle\int 4\sin(1 - 2x)\, dx$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^x\, dx$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = -x^2t^2$ che soddisfa $x(0) = 3$.
8. Disegnare il grafico di $|\sin x|$ e risolvere *graficamente* la disequazione $|\sin x| \geq x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq -1/2$ comprese tra 0 e 2π.
2. Determinare i *valori* minimo e massimo di $f(x) := x^3 - 3x$ relativamente all'intervallo $[-3, 0]$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{4x^4}{1 - \exp(-2x^2)}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 (in 0) di $\sqrt[4]{1 + 8x^3}$.
5. Determinare la primitiva $\displaystyle\int 4x\, \cos(2x)\, dx$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1 - 2x)^3}$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = -2x^3t^3$ che soddisfa $x(0) = 1$.
8. Disegnare il grafico di $|\cos x|$ e l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 \leq y \leq |\cos x|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \leq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.
2. Determinare i *valori* minimo e massimo di $f(x) := 3x - x^3$ relativamente all'intervallo $[0, 2]$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{4x^3}{\log(1 - x^2)}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 (in 0) di $\sqrt[3]{1 - 9x^3}$.
5. Determinare la primitiva $\displaystyle\int 4x\, \cos(x^2 - 1)\, dx$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x\log x\,dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = -x^2e^t$ che soddisfa $x(0) = 2$.

8. Disegnare il grafico di $|\cos x|$ e risolvere *graficamente* la disequazione $|\cos x| \le x^2$.

Prima parte, gruppo 4

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \le 1/2$ comprese tra $-\pi$ e π.

2. Determinare i *valori* minimo e massimo di $f(x) := 3x - x^3$ relativamente all'intervallo $[-2, 0]$.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{4x^4}{\log(1-4x^2)}$.

4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 (in 0) di $\sqrt[4]{1-8x^4}$.

5. Determinare la primitiva $\displaystyle\int 4\log(2x+1)\,dx$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = -x^3e^t$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare il grafico di $|\sin x|$ e l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 \le y \le |\sin x|$.

Seconda parte, gruppo 1

1. a) Disegnare il grafico di $f(x) := x^2\log x$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > 0$ e $f(x) \le y \le x^2$ e calcolarne l'area.

2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\dot{x} + \frac{2x}{t} = \exp(t^3)\,.$$
   b) Tra tutte le soluzioni individuare quelle che tendeno a 0 per $t \to 0$, se ce ne sono.

3. Una macchina stampa un certo oggetto di plastica, e la velocità di stampa v (numero di pezzi prodotti in un secondo) può essere fissata a piacere tra 1 e 10. Tuttavia tanto maggiore si prende v quanto maggiore è la frazione p di pezzi che risultano essere difettosi e vanno quindi scartati; si sa anzi che in prima approssimazione
$$p = \frac{v^3}{10^3}\,.$$
   Detta v_{eff} la velocità effettiva della macchina (cioè il numero di pezzi *non difettosi* prodotti in un secondo), come bisogna prendere v in modo da rendere v_{eff} più grande possibile?

Seconda parte, gruppo 2

1. a) Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{\log x}{x^2}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > 0$ e $\dfrac{1}{x^2} \le y \le f(x)$ e calcolarne l'area.

2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\dot{x} + \frac{3x}{t} = \sin(t^4)\,.$$
b) Tra tutte le soluzioni individuare quelle che tendeno a 0 per $t \to 0$, se ce ne sono.

3. Una macchina stampa un certo oggetto di plastica, e la velocità di stampa v (numero di pezzi prodotti in un secondo) può essere fissata a piacere tra 1 e 10. Tuttavia tanto maggiore si prende v quanto maggiore è la frazione p di pezzi che risultano essere difettosi e vanno quindi scartati; si sa anzi che in prima approssimazione
$$p = \frac{v^4}{10^4}\,.$$
Detta v_{eff} la velocità effettiva della macchina (cioè il numero di pezzi *non difettosi* prodotti in un secondo), come bisogna prendere v in modo da rendere v_{eff} più grande possibile?

Prima parte, gruppo 1

1. Risolvere la disequazione $\exp(x^2 - 1) > 1$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x \log x$; b) $(1 + e^{-x})^{-2}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x^2)}{3x^2}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 6 (in 0) della funzione $\sin(-2x^2)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + e^{-n}}{(1 + n^2)^a}$ converge ad un numero finito.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq x$.

Prima parte, gruppo 2

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2 - 1) > 0$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 \log x$; b) $(1 + e^{-x})^{-2}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^3}{\tan(2x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{1-x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 8 (in 0) della funzione $\cos(2x^2)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n}{(1 + n^3)^a}$ converge ad un numero finito.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq x$.

Prima parte, gruppo 3

1. Risolvere la disequazione $\log(2 - x^2) > 0$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x \log x$; b) $(1 + e^{-x})^2$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \log\log x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^3}{\tan(2x^3)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{xe^x}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 6 (in 0) della funzione $\log(1 - 4x^3)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^a}{e^n}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = 0$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{x+1}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq -x$.

Prima parte, gruppo 4

1. Risolvere la disequazione $\exp(x^2 - 1) < 1$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 \log x$; b) $(1 + e^{-x})^2$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(e^x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x^3)}{2x^2}$.

4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione e^{-2x^2}.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^a}{(1+n)^a}$ converge ad un numero finito.

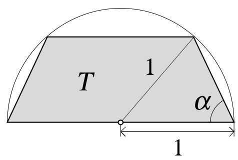
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = -\frac{\pi}{2} - \arctan x$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq x$.

Seconda parte, gruppo 1

1. a) Per ogni numero reale $a > 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$3 - x = \frac{a}{x^2}\,. \qquad (*)$$
b) Per ogni $a > 0$, sia $x(a)$ la soluzione negativa dell'equazione (*). Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

2. Calcolare il perimetro del trapezio isoscele T in figura in funzione del coseno di α, e dire per quale α tale perimetro è massimo.

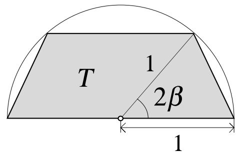


3. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{1}{x^x - 1} = \frac{1}{e^{x\log x} - 1}\,.$$
Studiare il dominio di definizione e il segno di $f(x)$, e quindi discutere i seguenti integrali impropri, cioè dire se esistono e, in caso affermativo, se sono finiti:
$$\text{a)} \int_2^{+\infty} f(x)\, dx\,, \quad \text{b)} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx\,.$$

Seconda parte, gruppo 2

1. a) Per ogni numero reale $a > 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$4 - x = \frac{a}{x^3}\,. \qquad (*)$$

b) Sia $x(a)$ la più piccola delle soluzioni dell'equazione (*) per ogni $a > 0$ per cui esiste almeno una soluzione. Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.



2. Calcolare il perimetro del trapezio isoscele T in figura in funzione del seno di β, e dire per quale β tale perimetro è massimo.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{1}{x^x - 1} = \frac{1}{e^{x \log x} - 1} \, .$$
Studiare il dominio di definizione e il segno di $f(x)$, e quindi discutere i seguenti integrali impropri, cioè dire se esistono e, in caso affermativo, se sono finiti:
$$\text{a)} \int_0^{1/2} f(x)\, dx \, , \quad \text{b)} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx \, .$$

Prima parte, gruppo 1

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\log(2-x^2)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}}$; b) $\arctan(x^2)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\log x}{1-\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{xe^x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\log x$.

4. Determinare la parte principale per $x\to+\infty$ della funzione $\sin\left(\dfrac{2x}{1+x^3}\right)$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^3\log x\,dx$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 4x\sin(x^2)\,dx$.

7. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ la funzione t^a risolve l'equazione differenziale $\ddot{x}+\dfrac{\dot{x}}{t}+\dfrac{4x}{t^2}=0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $1-e^x\le y\le e^x-1$.

Prima parte, gruppo 2

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\log(1-x^2)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$; b) $x\arctan x$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x + x}{\log x - x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{xe^x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1-2x)}{\sin(x^2)}$.

4. Determinare la parte principale per $x\to+\infty$ della funzione $\log\left(1-\dfrac{1}{x^2+\log x}\right)$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^4\log x\,dx$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{2} 4x\exp(x^2)\,dx$.

7. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ la funzione t^a risolve l'equazione differenziale $\ddot{x}+\dfrac{\dot{x}}{t}-\dfrac{4x}{t^2}=0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $e^x-1\le y\le 1-e^x$.

Prima parte, gruppo 3

1. Risolvere la disequazione $\log(2-x^2)\ge 0$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{3x}}$; b) $\arctan(x^3)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x + x}{\log x - x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x\log x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\log x$.

4. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $\sin\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$.

5. Calcolare la primitiva $\int x^2 \log x \, dx$.

6. Calcolare $\int_{-1}^{1} 4x \exp(x^2) \, dx$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione t^a risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} - \frac{\dot{x}}{t} + \frac{x}{t^2} = 0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \geq e^x - 1$ e $y \geq 1 - e^x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = -5e^{-2t} \tag{*}$$
b) Trovare la soluzione x di (*) tale che $x(0) = 1$ e $x(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$.

2. Dire se la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ è finita oppure no.

3. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \frac{1}{\cos x} - 1$.
b) Discutere il seguente integrale improprio al variare di $a > 0$ (cioè dire esiste e, in caso affermativo, se è finito):
$$\int_0^{\pi/4} \frac{f(x^a)}{x^2} dx \,.$$
c) Discutere il seguente integrale improprio:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx \,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 6e^{-2t} \tag{*}$$
b) Trovare la soluzione x di (*) tale che $x(0) = 1$ e $x(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$.

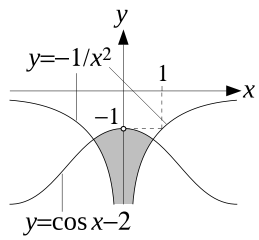
2. Dire se la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$ è finita oppure no.

3. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \frac{1}{\cos x} - 1$.
b) Discutere il seguente integrale improprio al variare di $a > 0$ (cioè dire esiste e, in caso affermativo, se è finito):
$$\int_0^{\pi/4} \frac{f(x^a)}{x^2} dx \,.$$
c) Discutere il seguente integrale improprio:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx \,.$$

SOLUZIONI

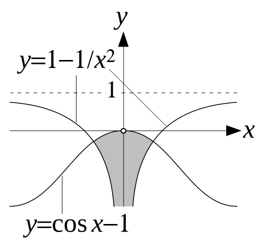
PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Deve essere $-1 \leq e^{2t} \leq 1$, e quindi $t \leq \log \frac{1}{2} = -\log 2$.
2. $1 - \frac{\pi}{4}$ e $1 + \frac{\pi}{4}$.
3. a) $\big[x(\log x + \log 2)\big]' = \log x + \log 2 + 1$; b) $\dfrac{-2}{\cos^2(1-2x)} = -2\big[1 + \tan^2(1-2x)\big]$; c) $\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.
4. $\min = e^{-2}$ e $\max = e^{18}$.
5. a) $-\infty$; b) 0.
6. a) 0; b) 0; c) $+\infty$.
7. $-3x^2$.
8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Deve essere $-1 \leq \log t \leq 1$ e quindi $\frac{1}{e} \leq t \leq e$.
2. $\frac{\pi}{4} - 1$ e $\frac{3\pi}{4} - 1$.
3. a) $\log x + \log 3 + 1$; b) $\dfrac{-3}{\cos^2(1-3x)} = -3\big[1 + \tan^2(1-3x)\big]$; c) $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.
4. $\min = e^{-2}$ e $\max = 1$.
5. a) $-\infty$; b) 0.
6. a) $-\infty$; b) -2; c) 0.
7. $-4x^3$.
8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.

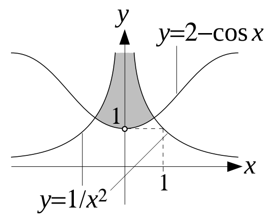


PRIMA PARTE, GRUPPO 3

1. Deve essere $-1 \leq 3e^t \leq 1$, e quindi $t \leq \log \frac{1}{3} = -\log 3$.
2. $-1 - \frac{\pi}{4}$ e $-1 + \frac{\pi}{4}$.
3. a) $(3x \log x)' = 3(\log x + 1)$; b) $\dfrac{2}{\cos^2(1+2x)} = 2\big[1 + \tan^2(1+2x)\big]$; c) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.
4. $\min = 1$ e $\max = e^2$.
5. a) 0; b) 0.
6. a) 0; b) non esiste; c) $\frac{1}{4}$.

7. $\dfrac{x^4}{2}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. Deve essere $-1 \leq \log t \leq 1$ e quindi $\dfrac{1}{e} \leq t \leq e$.

2. $\dfrac{\pi}{4} - 2$ e $\dfrac{3\pi}{4} - 2$.

3. a) $2(\log x + 1)$; b) $\dfrac{3}{\cos^2(1+3x)} = 3\big[1 + \tan^2(1+3x)\big]$; c) $\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$.

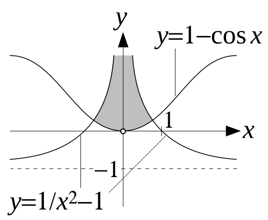
4. $\min = e^{-18}$ e $\max = e^2$.

5. a) $+\infty$; b) non esiste.

6. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $-\dfrac{1}{5}$.

7. x^2.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) Usando il fatto che $\log(1+t) = t + O(t^2)$ per $t \to 0$ si ottiene

$$\begin{aligned}\log(1-3x^2) + \big[\log(1-x)\big]^2 &= -3x^2 + O(x^4) + [-x + O(x^2)]^2 \\ &= -3x^2 + x^2 + O(x^3) \sim -2x^2 \,.\end{aligned}$$

b) In questo caso il ragionamento precedente porta solo a dire che la funzione è $O(x^3)$. Proviamo dunque a cercare lo sviluppo all'ordine 3, e per farlo usiamo lo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ (solo per il secondo addendo della funzione, visto che il primo è già sviluppato all'ordine 3):

$$\begin{aligned}&\log(1-3x^2) + 3\big[\log(1-x)\big]^2 \\ &\qquad = -3x^2 + O(x^4) + 3\Big[(-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + O(x^3)\Big]^2 \\ &\qquad = -3x^2 + O(x^4) + 3\Big[x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big]^2 \\ &\qquad = -3x^2 + O(x^4) + 3[x^2 + x^3 + O(x^4)] \\ &\qquad = 3x^3 + O(x^4) \sim 3x^3 \,.\end{aligned}$$

c) Procediamo come al punto precedente, cercando lo sviluppo all'ordine 4:

$$\begin{aligned}&\log(1-3x^3) - 3\big[\log(1-x)\big]^3 \\ &\qquad = -3x^3 + O(x^6) + 3\Big[x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big]^3 \\ &\qquad = -3x^3 + O(x^6) + 3\Big[x^3 + \frac{3}{2}x^4 + O(x^5)\Big] \\ &\qquad = \frac{9}{2}x^4 + O(x^5) \sim \frac{9}{2}x^4 \,;\end{aligned}$$

per sviluppare il cubo nella seconda riga ho usato il binomio di Newton

$$(a+b)^3 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

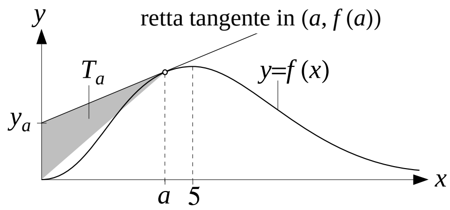
con $a := x$ e $b := \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$, e ho semplificato gli addendi $3ab^2$ e b^3 usando il fatto che $b = O(x^2)$.

2. a) Consideriamo la funzione $f(x) := x^3 - 15\log x + 3$. La domanda diventa quindi se è vero o meno che $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$.

   Per rispondere cerchiamo il valore minimo della funzione $f(x)$ sull'insieme di definizione $x > 0$. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = 3x^2 - \frac{15}{x} = \frac{3}{x}(x^3 - 5)$$
otteniamo che f è decrescente nell'intervallo $(0, \sqrt[3]{5}]$ e crescente in $[\sqrt[3]{5}, +\infty)$. Ne segue che $\sqrt[3]{5}$ è il punto di minimo *assoluto* di f, e quindi il valore minimo è
$$f(\sqrt[3]{5}) = 5(1 - \log 5) + 3 \simeq -0{,}05\,.$$
Pertanto non è vero che $f(x) \geq 0$ per ogni x.

   b) Procediamo come per il punto a), ponendo $f(x) := x^3 - 15\log x - a$. Il problema è quindi determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ il valore minimo di f risulta essere positivo (o nullo). Come prima, il punto di minimo assoluto di f è $\sqrt[3]{5}$ e quindi il valore minimo è
$$f(\sqrt[3]{5}) = 5(1 - \log 5) - a\,.$$
Pertanto i valori di a per cui questo minimo è positivo o nullo sono
$$a \leq 5(1 - \log 5)\,.$$

3. a) La funzione $f(x)$ è definita e positiva per tutti gli $x \geq 0$, e ha limite 0 a $+\infty$. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) := (5 - x)x^4 e^{-x}$$
si ottiene che f è crescente nell'intervallo $[0, 5]$ e decrescente in $5, +\infty$; usando queste informazioni tracciamo il grafico di f nella figura sottostante.

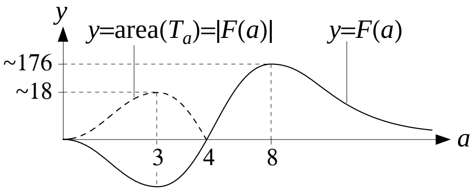


b) Se scegliamo come base del triangolo T_a il lato che sta sull'asse delle y, vale a dire il segmento di estremi 0 e y_a allora la lunghezza della base è $|y_a|$ e l'altezza è a (si noti che y_a può essere negativo).

   Per ottenere l'area di T_a dobbiamo quindi determinare y_a; per far questo ricordiamo che l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$ è $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ e quindi
$$y_a = -af'(a) + f(a) = (a - 4)a^5 e^{-a}\,.$$
Pertanto area$(T_a) = |F(a)|$ dove
$$F(a) := \frac{1}{2}a\,y_a = \frac{1}{2}(a - 4)a^6 e^{-a}\,.$$

c) Per trovare il massimo e il minimo dell'area di T_a studiamo la funzione $F(a)$ per $a \geq 0$. Si vede subito che $F(a)$ è negativa per $0 \leq a < 4$, positiva per $a > 4$, e tende a 0 per $a \to +\infty$.

   Studiando inoltre il segno della derivata
$$F'(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 11a + 24)a^5 e^{-a}$$
si ottiene che F è crescente nell'intervallo $[3, 8]$ e decrescente altrove; usando queste informazioni tracciamo il grafico di $F(a)$ e di area(T_a) nella figura sotto (il primo con tratto continuo, il secondo tratteggiato).



Pertanto il valore minimo dell'area di T_a è 0 e viene assunto per $a = 4$ (oppure quando a tende a 0 o a $+\infty$); inoltre, confrontando il valore assoluto di F nel punto di minimo $a = 3$, vale a dire $|F(3)| \simeq 18$, con il valore nel punto di massimo $a = 8$, vale a dire $F(8) \simeq 176$, si ottiene che il valore massimo dell'area di T_a viene assunto per $a = 8$.

Seconda parte, gruppo 2

1. Analogo al gruppo 1.

a)
$$\begin{aligned}\log(1-x^2) + \big[\log(1+2x)\big]^2 &= -x^2 + O(x^4) + [2x + O(x^2)]^2 \\ &= -x^2 + O(x^4) + 4x^2 + O(x^3) \\ &= 3x^2 + O(x^3) \sim 3x^2\,.\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}4\log(1-x^2) + \big[\log(1+2x)\big]^2 &= -4x^2 + O(x^4) + \big[2x - 2x^2 + O(x^3)\big]^2 \\ &= -4x^2 + O(x^4) + 4x^2 - 8x^3 + O(x^4) \\ &= -8x^3 + O(x^4) \sim -8x^3\,.\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}8\log(1-x^3) + \big[\log(1+2x)\big]^3 &= -8x^3 + O(x^6) + \big[2x - 2x^2 + O(x^3)\big]^3 \\ &= -8x^3 + O(x^6) + 8x^3 - 24x^4 + O(x^5) \\ &= -24x^4 + O(x^5) \sim -24x^4\,.\end{aligned}$$

2. Analogo al gruppo 1.

b) La domanda equivale a chiedere per quali $a \in \mathbb{R}$ il valore minimo della funzione
$$f(x) := x^3 - 18\log x - a$$
è positivo o nullo. Studiando il segno della derivata $f'(x) = 3x^{-1}(x^3 - 6)$ si ottiene che $\sqrt[3]{6}$ è il punto di minimo assoluto di f, e quindi il valore minimo è $f(\sqrt[3]{6}) = 6(1 - \log 6) - a$. Pertanto i valori di a per cui questo minimo è positivo o nullo sono
$$a \le 6(1 - \log 6) \simeq -4{,}75\,. \tag{1}$$
a) Siccome -5 risulta tra i valori di a che soddisfano la condizione (1), è effettivamente vero che $x^3 - 18\log x + 5 \ge 0$ per ogni x.

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso
$$\text{area}(T_a) = |F(a)| \quad \text{con } F(a) := (a-5)a^{12}e^{-2a}\,;$$
la funzione $F(a)$ si annulla per $a = 5$ e i suoi punti di minimo e massimo assoluto sono rispettivamente $a = 4$ e $a = 15/2$, e quindi i valori minimo e il massimo sono rispettivamente $F(4) \simeq -5{,}6 \cdot 10^3$ e $F(15/2) \simeq 2{,}4 \cdot 10^4$.

Pertanto il valore minimo dell'area di T_a è 0 e viene assunto per $a = 5$, mente dal confronto dei valori assoluti del massimo e del minimo di F si ottiene che il valore massimo dell'area di T_a viene assunto per $a = 15/2$.

Seconda parte, gruppo 3

1. Analogo al gruppo 1.

a)
$$\log(1-x^2) + \big[\log(1-2x)\big]^2 = -x^2 + O(x^4) + [-2x + O(x^2)]^2$$

$$\begin{aligned}
&= -x^2 + O(x^4) + 4x^2 + O(x^3)\\
&= 3x^2 + O(x^3) \sim 3x^2 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)}\quad 4\log(1-x^2) + \big[\log(1-2x)\big]^2 &= -4x^2 + O(x^4) + \big[-2x - 2x^2 + O(x^3)\big]^2\\
&= -4x^2 + O(x^4) + 4x^2 + 8x^3 + O(x^4)\\
&= 8x^3 + O(x^4) \sim 8x^3 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)}\quad 8\log(1-x^3) - \big[\log(1-2x)\big]^3 &= -8x^3 + O(x^6) - \big[-2x - 2x^2 + O(x^3)\big]^3\\
&= -8x^3 + O(x^6) + 8x^3 + 24x^4 + O(x^5)\\
&= 24x^4 + O(x^5) \sim 24x^4 .
\end{aligned}$$

2. Analogo al gruppo 1.
   b) La domanda equivale a chiedere per quali $a \in \mathbb{R}$ il valore minimo della funzione
   $$f(x) := x^4 - 20\log x - a$$
   è positivo o nullo. Studiando il segno della derivata $f'(x) = 4x^{-1}(x^4 - 5)$ si ottiene che $\sqrt[4]{5}$ è il punto di minimo assoluto di f, e quindi il valore minimo è $f(\sqrt[4]{5}) = 5(1 - \log 5) - a$. Pertanto i valori di a per cui questo minimo è positivo o nullo sono
   $$a \le 5(1 - \log 5) \simeq -3{,}05 . \tag{2}$$
   a) Siccome -3 non risulta tra i valori di a che soddisfano la condizione (2), non è vero che $x^3 - 18\log x + 5 \ge 0$ per ogni x.

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso
   $$\text{area}(T_a) = |F(a)| \quad \text{con } F(a) := (a-2)a^6 e^{-2a} ;$$
   la funzione $F(a)$ si annulla per $a = 2$ e i suoi punti di minimo e massimo assoluto sono rispettivamente $a = 3/2$ e $a = 4$, e quindi i valori minimo e massimo sono rispettivamente $F(3/2) \simeq -0{,}28$ e $F(4) \simeq 2{,}7$. Pertanto il valore minimo dell'area di T_a è 0 e viene assunto per $a = 2$ mentre dal confronto dei valori assoluti del massimo e del minimo di F si ottiene che il valore massimo dell'area di T_a viene assunto per $a = 4$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4

1. Analogo al gruppo 1.

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad \log(1+3x^2) + \big[\log(1-x)\big]^2 &= 3x^2 + O(x^4) + [-x + O(x^2)]^2\\
&= 3x^2 + O(x^4) + x^2 + O(x^3)\\
&= 4x^2 + O(x^3) \sim 4x^2 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)}\quad \log(1+3x^2) - 3\big[\log(1-x)\big]^2 &= 3x^2 + O(x^4) - 3\Big[-x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big]^2\\
&= 3x^2 + O(x^4) - 3x^2 - 3x^3 + O(x^4)\\
&= -3x^3 + O(x^4) \sim -3x^3 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)}\quad \log(1+3x^3) + 3\big[\log(1-x)\big]^3 &= 3x^3 + O(x^6) + 3\Big[-x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big]^3\\
&= 3x^3 + O(x^6) - 3x^3 - \frac{9}{2}x^4 + O(x^5)\\
&= -\frac{9}{2}x^4 + O(x^5) \sim -\frac{9}{2}x^4 .
\end{aligned}$$

2. Analogo al gruppo 1.
   b) La domanda equivale a chiedere per quali $a \in \mathbb{R}$ il valore minimo della funzione
   $$f(x) := x^4 - 24\log x - a$$

è positivo o nullo. Studiando il segno della derivata $f'(x) = 4x^{-1}(x^4 - 6)$ si ottiene che $\sqrt[4]{6}$ è il punto di minimo assoluto di f, e quindi il valore minimo è $f(\sqrt[4]{6}) = 6(1 - \log 6) - a$. Pertanto i valori di a per cui questo minimo è positivo o nullo sono

$$a \leq 6(1 - \log 6) \simeq -4{,}75\,. \tag{3}$$

a) Siccome -5 risulta tra i valori di a che soddisfano la condizione (3), è effettivamente vero che $x^4 - 24\log x + 5 \geq 0$ per ogni x.

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso

$$\text{area}(T_a) = |F(a)| \quad \text{con } F(a) := \frac{1}{2}(a - 10)a^{12}e^{-a}\,;$$

la funzione $F(a)$ si annulla per $a = 10$ e i suoi punti di minimo e massimo assoluto sono rispettivamente $a = 8$ e $a = 15$, e quindi i valori minimo e massimo sono rispettivamente $F(8) \simeq -2{,}3 \cdot 10^7$ e $F(15) \simeq 9{,}9 \cdot 10^7$. Pertanto il valore minimo dell'area di T_a è 0 e viene assunto per $a = 10$ mentre dal confronto dei valori assoluti del massimo e del minimo di F si ottiene che il valore massimo dell'area di T_a viene assunto per $a = 15$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 8. Alcuni dei presenti hanno confuso il grafico di $1/x^2$ con quello di $1/x$ (sono effettivamente simili per $x > 0$, ma la prima funzione è pari e sempre positiva, mentre la seconda è dispari e negativa per $x < 0$).

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno svolto l'esercizio fino in fondo ottenendo risultati corretti, ma quasi nessuno ha trattato appropriatamente i resti nello sviluppo usato per il punto c); alcuni hanno completamente trascurato i resti in tutti e tre i punti.

- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno fatto errori nella sostituzione usata per passare dallo sviluppo di $\log(1 + t)$ a quello di $\log(1 - x^2)$ o delle altre funzioni presenti nelle varie versioni di questo esercizio.

- Seconda parte, esercizio 2. Per rispondere alla domanda a) è necessario confrontare un certo numero (-3 o -5 a seconda dei gruppi) con un altro, dato da un'espressione più complicata ($5(1 - \log 5)$ o $6(1 - \log 6)$ a seconda dei gruppi); per farlo è necessario usare la calcolatrice.

- Seconda parte, esercizio 2. Per rispondere al punto a) diverse persone hanno usato un disegno approssimativo dei grafici delle funzioni x^3 e $15\log x - 3$ (mi riferisco al gruppo 1, ma vale un discorso analogo per gli altri gruppi) per sostenere a seconda dei casi che questi grafici non si intersecano oppure che si intersecano. In realtà i due grafici sono molto vicini, e quindi non è possibile usare un disegno approssimativo per decidere se si intersecano o meno.

- Seconda parte, esercizio 2. Nel rispondere al punto b) diversi dei presenti hanno cercato il valore del parametro a per il quale i grafici della funzione x^3 e della funzione $15\log x + a$ (mi riferisco al gruppo 1) sono tangenti in un punto, impostando però il problema in modo "strano", cioè imponendo solamente che in tal punto i valori delle derivate delle due funzioni coincidano (bisognerebbe anche imporre che i valori delle funzioni coincidano).

- Seconda parte, esercizio 2. Per errore la versione del gruppo 4 di questo esercizio che è stata stampata e distribuita in classe non era quella definitiva, e in particolare la disuguaglianza da discutere al punto a) era $x^4 \geq 24\log x + 5$ invece di $x^4 \geq 24\log x - 5$, come riportato qui.

- Seconda parte, esercizio 3. Per rispondere alla domanda c) è necessario confrontare il valore assoluto della funzione F nei punti di minimo e di massimo; per farlo è necessario usare la calcolatrice.

PRIMA PARTE.

1. a) $(2x - x^2)\exp(1-x)$; b) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-1/2}$.

2. a) 2; b) 0; c) 0.

3. Uso il cambio di variabile $y = x^4$: $\displaystyle\int \frac{x^3}{\exp(x^4)}\,dx = \frac{1}{4}\int e^{-y}\,dy = -\frac{1}{4}e^{-y}+c = -\frac{1}{4}\exp(-x^4)+c$.

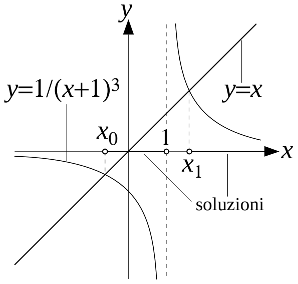
4. Integro per parti: $\displaystyle\int_0^1 3x^2\log x\,dx = \Big|x^3\log x\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{3}$.

5. Siccome $x\sin(1/x^a) \sim 1/x^{a-1}$ per $x \to +\infty$, deve essere $a-1>1$, ovvero $a>2$.

6. Siccome $\log(1+n^{-a}) \sim 1/n^a$ per $n \to +\infty$, deve essere $a>1$.

7. Equazione a variabili separabili: $e^{-x}\dot{x} = \sin t$, cioè $\int e^{-x}dx = \int \sin t\,dt$, cioè $e^{-x} = \cos t + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene $c = 2$ e quindi $x = -\log(\cos t + 2)$.

8. Le soluzioni sono $x \in [x_0, 0]$ dove x_0 è dato nella figura accanto.



SECONDA PARTE.

1. a) La (*) è un'equazione differenziale del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. L'equazione omogenea associata è $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$, e l'equazione caratteristica di quest'ultima, vale a dire $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, ha due soluzioni coincidenti $\lambda = 2$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) := e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Siccome il termine noto $8t$ è un polinomio di primo grado, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (*) tra i polinomi di primo grado, vale a dire una soluzione della forma $x(t) = a_0 + a_1 t$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Per le funzioni di questo tipo l'equazione (*) si riduce a
$$(4a_1 - 8)t + (4a_0 - 4a_1) = 0$$
ed è verificata se $4a_1 - 8 = 0$ e $4a_0 - 4a_1 = 0$, cioè per $a_0 = a_1 = 2$. Dunque la soluzione particolare cercata è $x(t) = 2 + 2t$, e di conseguenza la soluzione generale della (*) è
$$x(t) := 2 + 2t + e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
b) Dalla formula (1) si ottiene che $\dot{x}(t) = 2 + e^{2t}(2c_1 + c_2 + 2c_2 t)$ e quindi le condizioni iniziali diventano
$$\begin{cases} 0 = x(0) = 2 + c_1 \\ 0 = \dot{x}(0) = 2 + 2c_1 + c_2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$
e dunque la soluzione cercata è
$$x(t) := 2 + 2t + e^{2t}(2t - 2)\,.$$
c) Dalla formula (1) è evidente che quando c_2 è diverso da 0 la soluzione soddisfa $x(t) \sim c_2 t e^{2t}$ e dunque non è $O(e^{2t})$ (e anzi $e^{2t} \ll x(t)$). Se invece $c_2 = 0$ allora $x(t)$ è somma di addendi che sono tutti $O(e^{2t})$ e quindi è essa stessa $O(e^{2t})$. In altre parole le soluzioni cercate sono tutte e solo quelle con $c_2 = 0$, vale a dire
$$x(t) := 2 + 2t + c_1 e^{2t} \quad \text{con } c_1 \in \mathbb{R}.$$

2. Siccome $n\sin(1/n)$ converge a 1 per $n \to +\infty$, per $a \neq 1$ si ha che il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{a - n\sin(1/n)}{n^a} \sim \frac{a-1}{n^a} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
e quindi la serie converge se e solo se $a > 1$.

Per $a = 1$ il discorso cambia: in questo caso il numeratore $1 - n\sin(1/n)$ tende a 0 per $n \to +\infty$ e dobbiamo quindi cercarne la parte principale: usando il fatto che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ per $x \to 0$ e ponendo $x = 1/n$ otteniamo

$$1 - n\sin(1/n) = 1 - n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\Big(\frac{1}{n^5}\Big)\right] = \frac{1}{6n^2} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big) \sim \frac{1}{6n^2}\,.$$

Pertanto il termine generico della serie soddisfa

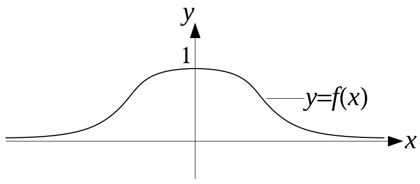
$$\frac{1 - n\sin(1/n)}{n} \sim \frac{1}{6n^3} \quad \text{per } n \to +\infty,$$

e quindi la serie converge. Riassumendo, la serie converge per $a \geq 1$.

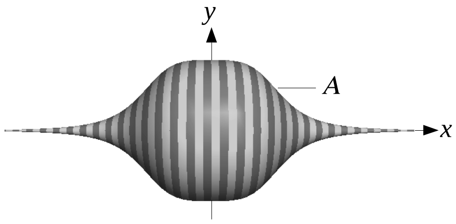
3. a) la funzione $f(x)$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, pari, positiva, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando il segno della derivata prima

$$f'(x) = \big[(1 + x^4)^{-a}\big]' = -a(1 + x^4)^{-a-1}4x^3$$

si ottiene che la funzione cresce per $x \leq 0$ e descresce per $x \geq 0$. Sulla base di quanto appena detto disegniamo il grafico di f.



b) Partendo dal grafico di $f(x)$ disegnato sopra disegniamo la figura solida A:

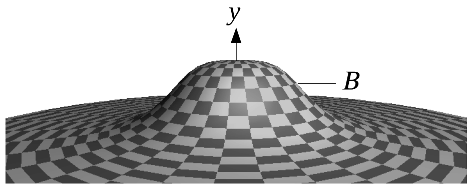


La formula per il volume dei solidi di rotazione dà

$$\begin{aligned}\text{volume}(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\big[f(x)\big]^2\,dx \\ &= \pi\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^4)^{2a}}\,dx = 2\pi\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^4)^{2a}}\,dx\,,\end{aligned}$$

e siccome la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $1/x^{8a}$ per $x \to +\infty$, questo integrale improprio ha valore finito se e solo se $8a > 1$, ovvero $a > 1/8$.

c) Siccome la funzione $f(x)$ è pari, otteniamo B facendo ruotare attorno all'asse delle y il grafico della funzione $f(x)$ ristretta alla semiretta $x \geq 0$:



Per poter applicare la formula per il volume dei solidi di rotazione dobbiamo esplicitare x come funzione di y (ovvero calcolare l'inversa della restrizione di $f(x)$ alla semiretta $x \geq 0$): partendo dall'equazione

$$y = (1 + x^2)^{-a}$$

con $x \geq 0$ otteniamo

$$x = (y^{-1/a} - 1)^{1/4}$$

con $0 < y \le 1$. Pertanto

$$\text{volume}(B) = \int_0^1 \pi(y^{-1/a} - 1)^{1/2}\, dy\,,$$

e siccome la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $y^{-1/(2a)}$ per $y \to 0^+$, questo integrale improprio ha valore finito se e solo se $1/(2a) < 1$, ovvero $a > 1/2$.

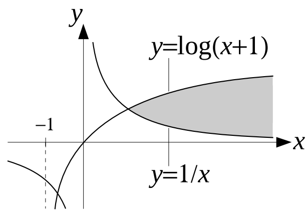
COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Tra i presenti sembra esserci stata un po' di confusione sul significato dell'espressione $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$. Inoltre alcuni hanno riferito la domanda alla soluzione trovata al punto b).

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti non si sono accorti che il caso $a = 1$ va trattato a parte perché il numeratore del termine generico della serie tende a zero per $n \to +\infty$, e anzi hanno scritto che questo termine è asintoticamente equivalente a $0/n$, cosa che non ha senso.

PRIMA PARTE.

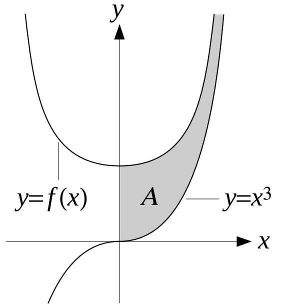
1. Deve essere $x > 2$ oppure $-2 < x < 1$.
2. Il valore massimo è $\log 5$ e quello minimo 0 (presi rispettivamente per $x = 0$ e $x = 2$).
3. a) 0; b) 0; c) 2.
4. $-\dfrac{x^2}{2}$.
5. $\dfrac{\log 3}{2}$.
6. $a = 4$.
7. $x(t) = e^t(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura accanto.



SECONDA PARTE.

1. Rispondiamo direttamente alla domanda b). La disequazione $x^4 + a \geq 4x^3$ può essere riscritta come $x^4 - 4x^3 + a \geq 0$, ed è quindi verifica per ogni $x \in \mathbb{R}$ quando il valore minimo della funzione
$$f(x) := x^4 - 4x^3 + a$$
è positivo o nullo.
   La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e studiando il segno della derivata
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$
si ottiene che f decresce per $x \leq 3$ e cresce per $x \geq 3$. Pertanto 3 è il punto di minimo assoluto di f; da questo segue che il valore minimo di f è
$$\min f = f(3) = -27 + a\,,$$
e pertanto la disequazione è soddisfatta se
$$a \geq 27\,.$$
In particolare la risposta alla domanda a) è affermativa.

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è pari e positiva. Inoltre il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è $+\infty$, e dallo studio del segno della derivata
$$f'(x) = \frac{3x^5}{\sqrt{x^6 + 1}}$$
si ottiene che $f(x)$ decresce per $x \leq 0$ e cresce per $x \geq 0$. Studiando inoltre il segno della derivata seconda si ottiene che f è convessa.
   Sulla base di queste informazioni si traccia il grafico nella figura sotto.



b) Siccome $f(x) \geq x^3$ per ogni x, l'insieme A è quello disegnato nella figura sopra.

c) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_0^{+\infty} f(x) - x^3 \, dx \,. \tag{1}$$

Dobbiamo dunque capire se questo integrale improprio è finito o infinito. Siccome l'integrale è improprio solo a $+\infty$, si tratta di trovare la parte principale di $f(x) - x^3$ per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) - x^3 = \sqrt{x^6+1} - x^3 &= x^3 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^6}} - 1 \right] \\ &= x^3 \left[1 + \frac{1}{2x^6} + O\Big(\frac{1}{x^{12}}\Big) - 1 \right] \sim \frac{1}{2x^3} \,, \end{aligned} \tag{2}$$

dove la terza uguaglianza la abbiamo ottenuta usando lo sviluppo di Taylor

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} + O(t^2) \quad \text{per } t \to 0.$$

Usando la stima (2), il principio del confronto asintotico, e il fatto che l'integrale di $1/x^3$ tra 1 e $+\infty$ è finito, otteniamo infine che l'integrale improprio in (1) è finito.

3. Rispondiamo direttamente alla domanda b). Volendo scrivere il termine generico della serie $a_n := (\log n)^{-(\log n)^a}$ nella forma n^{b_n}, l'esponente b_n deve essere il logaritmo di a_n in base n, ovvero

$$\begin{aligned} b_n = \frac{\log a_n}{\log n} &= \frac{\log\big((\log n)^{-(\log n)^a}\big)}{\log n} \\ &= \frac{-(\log n)^a \log\log n}{\log n} = -(\log n)^{a-1} \log\log n \,. \end{aligned}$$

Studiamo ora il limite di b_n quando $n \to +\infty$, in modo da poter applicare il principio del confronto con la serie di tipo $\sum 1/n^c$. Usando il fatto che $\log\log n = o(\log n)$ per $n \to +\infty$ otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1, \\ -\infty & \text{se } a \geq 1. \end{cases}$$

Pertanto, se $a < 1$, l'esponente b_n soddisfa $b_n \geq -1$ "da un certo punto in poi" (cioè per tutti gli indici n più grandi di un certo n_0) e quindi

$$a_n = n^{b_n} \geq \frac{1}{n} \,;$$

siccome la serie $\sum 1/n$ diverge a $+\infty$, per il principio del confronto lo stesso vale per $\sum a_n$.

Viceversa, quando $a \geq 1$ abbiamo che l'esponente b_n soddisfa $b_n \leq -2$ da un certo punto in poi, e quindi

$$a_n = n^{b_n} \leq \frac{1}{n^2} \,;$$

siccome la serie $\sum 1/n^2$ converge a un numero finito, lo stesso vale per $\sum a_n$.

Riassumendo, la serie di partenza converge ad un numero finito se e solo se $a \geq 1$.

COMMENTI

- Seconda parte esercizio 1. Diversi dei presenti hanno detto che "si vede" dal disegno dei grafici delle funzioni $x^4 + 28$ e $4x^3$ che la disequazione al punto a) è sempre soddisfatta. Questa risposta non è accettabile, visto che mettendo 26 al posto di 28 la disuguaglianza non è sempre soddisfata, e non credo che sia possibile vedere una differenza tra 26 e 28 in un disegno fatto a mano libera.

- Seconda parte esercizio 1. Nel rispondere al punto b) alcuni dei presenti hanno trovato i punti in cui si annulla la derivata della funzione $x^4 - x^3$, vale a dire 0 e 3, ed hanno deciso sulla base del valore della funzione in questi punti che il secondo è un punto di minimo assoluto. Questo ragionamento non è corretto, perché non è detto a priori che il punto di minimo assoluto esista (in particolare 3 avrebbe potuto essere un punto di minimo locale).

Prima parte, gruppo 1

1. Le soluzioni sono i numeri x in $\Big[0, \dfrac{\pi}{6}\Big] \cup \Big[\dfrac{5\pi}{6}, 2\pi\Big]$.

2. a) $(2x-x^2)e^{-x}$; b) $\Big[\log\Big(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\Big)\Big]' = \big[\log(x^2+1)-\log(x^2-1)\big]' = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{-4x}{x^4-1}$.

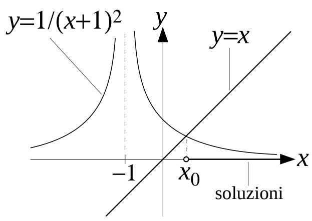
3. a) 1; b) $+\infty$; c) -2.

4. Integriamo per parti (derivando il fattore x e integrando e^{2x}):
$$\int xe^{2x}\,dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \Big(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\Big)e^{2x} + c\,.$$

5. L'integrale converge per tutti i numeri reali $a > 0$. Infatti si ha $x^{a+2} \ll e^x$ per $x \to +\infty$ e quindi $x^a/e^x \ll x^a/x^{a+2} = 1/x^2$, e questa funzione ha integrale finito.

6. Siccome $n^a/(1+n^{3a}) \sim 1/n^{2a}$ per $n \to +\infty$, per il principio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $2a > 1$, ovvero $a > 1/2$.

7. Equazione a variabili separabili: $2x\dot{x} = e^t$, quindi $\int 2x\,dx = \int e^t dt$, e pertanto $x^2 = e^t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta per $c = 3$, e dunque $x(t) = \sqrt{e^t+3}$.



8. Le soluzioni sono $x \geq x_0$ dove x_0 è preso come nella figura accanto.

Prima parte, gruppo 2

1. Le soluzioni sono i numeri x in $\Big[0, \dfrac{\pi}{3}\Big] \cup \Big[\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\Big]$.

2. a) $(3x^2+2x^3)e^{2x}$; b) $\Big[\log\Big(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\Big)\Big]' = \big[\log(x^2-1)-\log(x^2+1)\big]' = \dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{4x}{x^4-1}$.

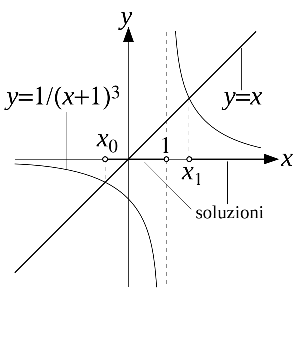
3. a) 0; b) $-\dfrac{1}{2}$; c) 1.

4. Integriamo per parti (derivando il fattore $\log(2x)$ e integrando x^3):
$$\int x^3\log(2x)\,dx = \frac{x^4}{4}\log(2x) - \int \frac{x^4}{4}\frac{2}{2x}\,dx = \frac{x^4}{4}\log(2x) - \frac{x^4}{16} + c\,.$$

5. Siccome $\dfrac{\sin(x^a)}{x^{3a}} \sim \dfrac{1}{x^{2a}}$ per $x \to 0$, deve essere $2a < 1$, ovvero $a < 1/2$.

6. La serie converge per ogni $a > 0$. Infatti $\log n = o(n^{1/(2a)})$ per $n \to +\infty$, quindi $(\log n)^a/n^2 = o(n^{1/2-2}) = o(n^{-3/2})$, ed è noto che la serie $\sum n^{-3/2}$ converge.

7. Equazione a variabili separabili: $3x^2\dot{x} = e^t$, quindi $\int 3x^2\,dx = \int e^t dt$, e pertanto $x^3 = e^t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta se $c = 7$, e dunque $x(t) = \sqrt[3]{e^t+7}$.



8. Le soluzioni sono $x_0 \leq x < 1$ e $x \geq x_1$ dove x_0 e x_1 sono presi come nella figura accanto.

Prima parte, gruppo 3

1. Le soluzioni sono i numeri x in $\Big[0, \dfrac{7\pi}{6}\Big] \cup \Big[\dfrac{11\pi}{6}, 2\pi\Big]$.

2. a) $(1-2x)e^{-2x}$; b) $\Big[\log\Big(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\Big)\Big]' = \big[\log(x^3+1)-\log(x^3-1)\big]' = \dfrac{3x^2}{x^3+1} - \dfrac{3x^2}{x^3-1} = \dfrac{-6x^2}{x^6-1}$.

3. a) $\dfrac{1}{3}$; b) 1; c) 0.

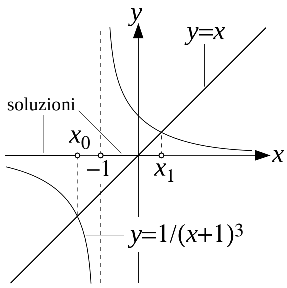
4. Integriamo per parti (derivando $\log(3x)$ e integrando x^2):
$$\int x^2 \log(3x)\,dx = \frac{x^3}{3}\log(3x) - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{3}{3x}\,dx = \frac{x^3}{3}\log(3x) - \frac{x^3}{9} + c\,.$$

5. Siccome $x^a \sin\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big) \sim \dfrac{1}{x^{2-a}}$ per $x \to +\infty$, deve essere $2-a>1$, ovvero $a<1$.

6. Tutti gli $a>0$ (analogo all'esercizio 5 del gruppo 1).

7. Equazione a variabili separabili: $2x\dot{x} = \cos t$, quindi $\int 2x\,dx = \int \cos t\,dt$, e pertanto $x^2 = \sin t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta se $c=4$, e dunque $x(t) = \sqrt{\sin t + 4}$.

8. Le soluzioni sono $x \le x_0$ e $-1 < x \le x_1$ e dove x_0 e x_1 sono presi come nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. Le soluzioni sono i numeri x in $\Big[0, \dfrac{2\pi}{3}\Big] \cup \Big[\dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\Big]$.

2. a) $(3x^2-x^3)e^{-x}$; b) $\Big[\log\Big(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\Big)\Big]' = \big[\log(x^3-1)-\log(x^3+1)\big]' = \dfrac{3x^2}{x^3-1} - \dfrac{3x^2}{x^3+1} = \dfrac{6x^2}{x^6-1}$.

3. a) 0; b) $+\infty$; c) $+\infty$.

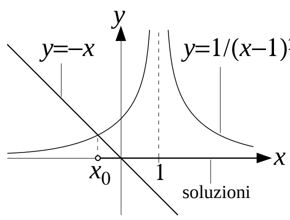
4. Integriamo per parti (derivando x e integrando e^{-x}):
$$\int xe^{-x}\,dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,dx = -(x+1)e^{-x} + c\,.$$

5. Tutti gli $a>0$ (analogo all'esercizio 6 del gruppo 2).

6. Siccome $n^a \sin\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big) \sim \dfrac{1}{n^{3-a}}$ per $n \to +\infty$, deve essere $3-a>1$, ovvero $a<2$.

7. Equazione a variabili separabili: $3x^2\dot{x} = \cos t$, quindi $\int 3x^2\,dx = \int \cos t\,dt$, e pertanto $x^3 = \sin t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta se $c=8$, e dunque $x(t) = \sqrt[3]{\sin t + 8}$.

8. Le soluzioni sono $x \le x_0$ dove x_0 è preso come nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) Per $a=5$ l'equazione omogenea associata alla (*) è $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$; l'equazione caratteristica corrispondente è allora $\lambda^2+4\lambda+5=0$ ed ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = -2\pm i$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(c_1\cos t + c_2 \sin t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Siccome il termine noto della (*) è un multiplo dell'esponenziale e^{-2t} e questa funzione non è una soluzione dell'equazione omogenea, possiamo trovare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x} = ce^{-2t}$. Sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo $ce^{-2t} = 2e^{-2t}$, e questa

identità vale per ogni t se $c = 2$. Pertanto la soluzione particolare cercata è $\tilde{x}(t) = 2e^{-2t}$, e la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (*) è $\lambda^2 + 4\lambda + a = 0$ ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-a}\,.$$

Dobbiamo dunque considerare diversi casi:

(i) Se $a > 4$ allora $\lambda_{1,2}$ sono numeri complessi della forma $-2 \pm \omega i$, e quindi la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))\,,$$

e in particolare soddisfa $x_{\text{om}}(t) = O(e^{-2t}) = o(e^{-t})$ per qualunque scelta di c_1 e c_2. Inoltre possiamo trovare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = ce^{-2t}$, che dunque soddisfa $\tilde{x}(t) = o(e^{-t})$. Pertanto ogni soluzione della (*), essendo della forma $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}$, soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$.

(ii) Se $a = 4$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, e la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t)\,,$$

e in particolare si ha che $x_{\text{om}}(t) = o(e^{-t})$ (ricordo che $t = o(e^t)$). Inoltre possiamo trovare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = ct^2e^{-2t}$, e quindi $\tilde{x}(t) = o(e^{-t})$ perché $t^2 = o(e^t)$. Pertanto anche in questo caso ogni soluzione della (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$.

(iii) Se $a < 4$ allora λ_1 e λ_2 sono numeri reali diversi da -2 e quindi possiamo trovare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = ce^{-2t} = o(e^{-t})$. Pertanto le soluzioni della (*) soddisfano $x(t) = o(e^{-t})$ se e solo se $x_{\text{om}}(t) = o(e^{-t})$, e siccome

$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,,$$

questo succede se e solo se $\lambda_1, \lambda_2 < -1$, cioè $-2 + \sqrt{4-a} < -1$, cioè $a > 3$.

Mettendo insieme quanto detto sopra otteniamo che gli a cercati sono quelli tali che $a > 3$.

2. a) Cerchiamo la parte principale della funzione integranda

$$f(x) := \frac{3x^3 - \log(1+3x^3)}{x^{2a}}$$

per $x \to 0$: usando lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ (per $t \to 0$) otteniamo

$$f(x) = \frac{3x^3 - \left[3x^3 - \frac{1}{2}(3x^3)^2 + O((3x^3)^3)\right]}{x^{2a}} = \frac{\frac{9}{2}x^6 + O(x^9)}{x^{2a}} \sim \frac{9}{2}x^{6-2a}\,.$$

Pertanto la funzione $f(x)$ ammette limite finito per $x \to 0^+$ se e solo se $6 - 2a \geq 0$, vale a dire $a \leq 3$.

b) La funzione integranda $f(x)$ è continua sulla semiretta $(0, +\infty)$ ma non è definita in 0. Quindi spezziamo l'integrale improprio come somma di due integrali impropri semplici: $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Siccome $f(x) \sim \frac{9}{2}x^{6-2a}$ per $x \to 0$, per il principio del confronto asintotico il primo di questi due integrali impropri esiste ed è finito se e solo se $6 - 2a > -1$, cioè $a < 7/2$. D'altra parte quando $t \to +\infty$ si ha $\log(1+t) \sim \log t = o(t)$ e quindi

$$f(x) = \frac{3x^3 - o(3x^3)}{x^{2a}} \sim 3x^{3-2a} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

e quindi, sempre per il principio del confronto asintotico, il secondo integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $3 - 2a < -1$, cioè $a > 2$.

Dunque l'integrale improprio di partenza esiste ed è finito se e solo se $2 < a < 7/2$.

3. a) Ci basta far vedere che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Un semplice calcolo mostra che

$$f''(x) = 6(5x^2 + a)(x^2 + a)$$

e siccome $a > 0$ ciascuno dei fattori alla destra dell'uguale è una funzione sempre positiva, e lo stesso vale quindi per f''.
b) La retta di equazione $y = \frac{27}{4}x$ interseca il grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0 se $\frac{27}{4}x_0 = f(x_0)$, ed è tangente al grafico di f se il suo coefficiente angolare coincide con la derivata di f in x_0, vale a dire se $\frac{27}{4} = f'(x_0)$. Quindi i valori cercati di a e di x_0 sono quelli che risolvono il sistema

$$\begin{cases} \frac{27}{4}x_0 = (x_0^2 + a)^3 \\ \frac{27}{4} = 6x_0(x_0^2 + a)^2 \end{cases},$$

quindi, ricavando $x_0^2 + a$ dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda

$$\begin{cases} x_0^2 + a = \left(\frac{27}{4}x_0\right)^{1/3} \\ \frac{27}{4} = 6x_0\left(\frac{27}{4}x_0\right)^{2/3} \end{cases},$$

e ricavando x_0 dalla seconda equazione e poi a dalla prima

$$\begin{cases} a = \left(\frac{27}{4}x_0\right)^{1/3} - x_0^2 = \frac{5}{4} \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

c) Se $a = 5/4$ ed il grafico di f è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{4}x$, e siccome f è convessa, questo grafico si trova al di sopra della retta, ovvero

$$\left(x^2 + \frac{5}{4}\right)^3 \geq \frac{27}{4}x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Ma allora per ogni $a \geq 5/4$ si ha che

$$f(x) := (x^2 + a)^3 \geq \left(x^2 + \frac{5}{4}\right)^3 \geq \frac{27}{4}x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Viceversa se $a < 5/4$ allora la disuguaglianza $f(x) \geq \frac{27}{4}x$ non vale per ogni x, ed in particolare non vale per $x = 1/2$.

In conclusione, i valori di a cercati sono $a \geq 5/4$.

Seconda parte, gruppo 2

1. a) In questo caso la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\text{om}}(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Cercando una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x} = ce^{-3t}$, otteniamo che c deve essere -1, cioè $\tilde{x}(t) = -e^{-3t}$; pertanto la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t - 1) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (*) è $\lambda^2 + 6\lambda + a = 0$ ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - a}\,.$$

Procedendo come per il gruppo 1 si vede che quando queste soluzioni sono complesse oppure reali e coincidenti allora la soluzione della (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$. Invece quando queste soluzioni sono reali e distinte (cioè per $a < 9$) allora si ha che $x(t) = o(e^{-t})$ se e solo se $\lambda_1, \lambda_2 < -1$, cioè $-2 + \sqrt{4 - a} < -1$, cioè $a > 5$. Riassumendo, gli a cercati sono quelli tali che $a > 5$.

2. a) La funzione integranda soddisfa

$$f(x) := \frac{4x^3 - \log(1 + 4x^3)}{x^a} \sim 8x^{6-a} \quad \text{per } x \to 0,$$

e quindi ammette limite finito per $x \to 0^+$ se e solo se $6 - a \geq 0$, vale a dire $a \leq 6$.
b) Anche in questo caso spezziamo l'integrale improprio come somma dei due integrali impropri semplici $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Siccome $f(x) \sim 8x^{6-a}$ per $x \to 0$, il primo di questi due

integrali impropri esiste ed è finito se e solo se $6-a > -1$, cioè $a < 7$. D'altra parte $f(x) \sim 4x^{3-a}$ per $x \to +\infty$, e quindi il secondo integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $3-a < -1$, cioè $a > 4$. Riassumendo, l'integrale improprio di partenza esiste ed è finito se e solo se $4 < a < 7$.

3. a) Sostanzialmente uguale al gruppo 1.
   b) I valori cercati di a e di x_0 sono quelli che risolvono il sistema
$$\begin{cases} \frac{27}{2}x_0 = f(x_0) = (4x_0^2 + a)^3 \\ \frac{27}{2} = f'(x_0) = 24x_0(4x_0^2 + a)^2 \end{cases},$$
   cioè $x_0 = 1/4$ e $a = 5/4$.
   c) I valori di a cercati sono quelli per cui $a \geq 5/4$.

Seconda parte, gruppo 3

1. a) In questo caso la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) è
$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Cercando una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x} = ce^{-2t}$, otteniamo che c deve essere -1, cioè $\tilde{x}(t) = -e^{-2t}$; pertanto la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - 1) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   b) Sostanzialmente uguale al gruppo 1: gli a cercati sono quelli tali che $a > 3$.

2. a) La funzione integranda soddisfa
$$f(x) := \frac{2x^2 - \log(1 + 2x^2)}{x^a} \sim 2x^{4-a} \quad \text{per } x \to 0,$$
   e quindi ammette limite finito per $x \to 0^+$ se e solo se $4 - a \geq 0$, vale a dire $a \leq 4$.
   b) Spezziamo l'integrale improprio di partenza come somma degli integrali impropri semplici $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Siccome $f(x) \sim 2x^{4-a}$ per $x \to 0$, il primo di questi due integrali impropri esiste ed è finito se e solo se $4 - a > -1$, cioè $a < 5$. D'altra parte $f(x) \sim 2x^{2-a}$ per $x \to +\infty$, e quindi il secondo integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $2 - a < -1$, cioè $a > 3$. Riassumendo, l'integrale improprio di partenza esiste ed è finito se e solo se $3 < a < 5$.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4

1. a) In questo caso la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) è
$$x_{\text{om}}(t) = e^{-3t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Cercando una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x} = ce^{-3t}$, otteniamo che c deve essere 1, cioè $\tilde{x}(t) = e^{-3t}$; pertanto la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + 1) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   b) Sostanzialmente uguale al gruppo 2: gli a cercati sono quelli tali che $a > 5$.

2. a) La funzione integranda soddisfa
$$f(x) := \frac{3x^2 - \log(1 + 3x^2)}{x^{2a}} \sim \frac{9}{2}x^{4-2a} \quad \text{per } x \to 0,$$
   e quindi ammette limite finito per $x \to 0^+$ se e solo se $4 - 2a \geq 0$, vale a dire $a \leq 2$.
   b) Spezziamo l'integrale improprio di partenza come somma degli integrali impropri semplici $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Siccome $f(x) \sim \frac{9}{2}x^{4-2a}$ per $x \to 0$, il primo di questi due integrali impropri esiste ed è finito se e solo se $4 - 2a > -1$, cioè $a < 5/2$. D'altra parte $f(x) \sim 3x^{2-2a}$ per $x \to +\infty$, e quindi il secondo integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $2 - 2a < -1$,

cioè $a > 3/2$. Riassumendo, l'integrale improprio di partenza esiste ed è finito se e solo se $3/2 < a < 5/2$.

3. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1a). Molti dei presenti hanno sostenuto che il termine noto dell'equazione (*) risolve l'equazione omogenea, mentre non è così: per esempio, nel caso del gruppo 1, il termine noto è $2e^{-2t}$, mentre la soluzione generale dell'equazione omogenea è $e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$; nonostante il fatto che in questa formula appaia l'espressione e^{-2t}, non è possibile scegliere le costanti c_1 e c_2 in modo da ottenere e^{-2t} (in ogni caso ci sarà anche un $\cos t$ o un $\sin t$).

- Seconda parte, esercizio 1b). Nel risolvere questo esercizio, diversi dei presenti hanno considerato solo uno dei tre casi discussi nella soluzione data sopra.

- Seconda parte, esercizio 2a). Stranamente diversi dei presenti, invece di dire per quali a la funzione integranda $f(x)$ ha limite finito per $x \to 0$, hanno determinato gli a per cui l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$ è finito.

- Seconda parte, esercizio 2b). Alcuni dei presenti hanno usato usato lo sviluppo $\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ anche per calcolare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$, cosa che non è corretta.

- Seconda parte, esercizio 2b). Alcuni dei presenti hanno spezzato l'integrale improprio proposto come somma di due integrali scrivendo la funzione f come somma di due funzioni—per esempio, nel caso del gruppo 1,
$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^3 - \log(1+3x^3)}{x^{2a}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{3x^3}{x^{2a}}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+3x^3)}{x^{2a}}\,dx\,.$$
Così facendo, tuttavia, non si ottengono due integrali impropri semplici.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Deve essere $4 - x^2 > 0$, ovvero $-2 < x < 2$.

2. a) $2x \sin(1 - x^2)$; b) $\left[4^{2x}/2^{3x}\right]' = (2^x)' = \log 2 \cdot 2^x$.

3. a) $-\infty$; b) 0; c) $\dfrac{1}{2}$.

4. $2x$.

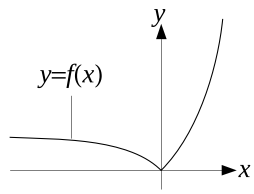
5. Usando il cambio di variabile $y = 2x$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (2x)^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2}\, dy = \frac{1}{2} \Big| \arctan y \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}\,.$$

6. Siccome $\dfrac{\cos n - n^2}{1 + n^a} \sim \dfrac{-1}{n^{a-2}}$ per $n \to +\infty$, deve essere $a > 3$.

7. Equazione lineare del primo ordine, che si risolve moltiplicando per il fattore integrante $e^{\sin t}$: $0 = e^{\sin t}(\dot{x} + x \cos t) = (e^{\sin t} x)'$ ovvero $x(t) = ce^{-\sin t}$ con $c \in \mathbb{R}$; imponendo che valga la condizione iniziale $x(0) = 2$ si ottiene $x(t) = 2e^{-\sin t}$.

8. Il grafico della funzione $f(x)$ è quello disegnato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Deve essere $8 - x^3 > 0$, ovvero $x < 2$.

2. a) $2x \exp(1 + x^2)$; b) $\left[2^{6x}/4^{2x}\right]' = (2^{2x})' = (4^x)' = \log 4 \cdot 4^x$.

3. a) 0; b) $+\infty$; c) $+\infty$.

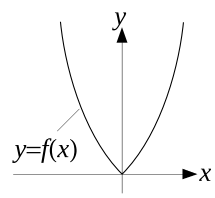
4. x.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (3x)^2}\, dx = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2}\, dy = \frac{1}{3} \Big| \arctan y \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{3}.$

6. Siccome $\dfrac{n^3 + \sin n}{4 + n^{2a}} \sim \dfrac{1}{n^{2a-3}}$ per $n \to +\infty$, deve essere $a > 2$.

7. $x(t) = 4e^{-\sin t}$.

8. Il grafico della funzione $f(x)$ è quello disegnato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3

1. Deve essere $x^2 > 4$, ovvero $x > 2$ oppure $x < -2$.

2. a) $3x^2 \cos(x^3 - 1)$; b) $\left[3^{5x}/9^{2x}\right]' = (3^x)' = \log 3 \cdot 3^x$.

3. a) 3; b) $+\infty$; c) 0.

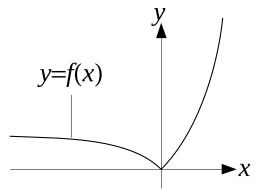
4. $-\dfrac{x^2}{4}$.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+(3x)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{3}\Big|\arctan y\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{6}.$

6. Siccome $\dfrac{n^2+\log n}{4+n^{2a}} \sim \dfrac{-1}{n^{2a-2}}$ per $n \to +\infty$, deve essere $a > 3/2$.

7. $x(t) = 4e^{\cos t - 1}$.

8. Il grafico della funzione $f(x)$ è quello disegnato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 4

1. Deve essere $x^3 - 8 > 0$, ovvero $x > 2$.

2. a) $2x\,\cos(x^2-1)$; b) $\big[9^{3x}/3^{4x}\big]' = (3^{2x})' = (9^x)' = \log 9 \cdot 9^x$.

3. a) $+\infty$; b) 0; c) $-\infty$.

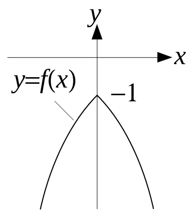
4. $-\dfrac{3}{x}$.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\Big|\arctan y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$

6. Siccome $\dfrac{\log n - n^3}{1+n^a} \sim \dfrac{-1}{n^{a-3}}$ per $n \to +\infty$, deve essere $a > 4$.

7. $x(t) = 2e^{\cos t - 1}$.

8. Il grafico della funzione $f(x)$ è quello disegnato nella figura accanto.



Seconda parte, gruppo 1

1. a) Usando lo sviluppo $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + O(y^4)$ con $y = 4x$ otteniamo $\cos(4x) = 1 - 8x^2 + O(x^4)$; usando quindi lo sviluppo $(1+t)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}t + O(t^2)$ con $t = -8x^2 + O(x^4)$,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\cos(4x)} &= [1 - 8x^2 + O(x^4)]^{1/4}\\ &= 1 + \tfrac{1}{4}t + O(t^2)\\ &= 1 + \tfrac{1}{4}[-8x^2 + O(x^4)] + O(x^4) = 1 - 2x^2 + O(x^4)\,,\end{aligned}$$

e quindi la parte principale di $\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1$ è $-2x^2$.

b) Con gli sviluppi usati al punto precedente si ottiene solamente

$$\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1 + 2x^2 = O(x^4)\,.$$

Servono quindi sviluppi più precisi. Partendo da $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + O(y^6)$ otteniamo $\cos(4x) = 1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4 + O(x^6)$; usando quindi lo sviluppo $(1+t)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}t - \frac{3}{32}t^2 + O(t^3)$ con

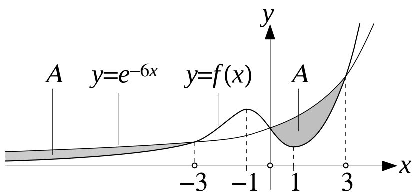
$$t = -8x^2 + \tfrac{32}{3}x^4 + O(x^6) = -8x^2 + O(x^4)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\cos(4x)} &= [1 - 8x^2 + \tfrac{32}{3}x^4 + O(x^6)]^{1/4}\\ &= 1 + \tfrac{1}{4}t - \tfrac{3}{32}t^2 + O(t^3)\\ &= 1 + \tfrac{1}{4}\big[-8x^2 + \tfrac{32}{3}x^4 + O(x^6)\big] - \tfrac{3}{32}\big[-8x^2 + O(x^4)\big]^2 + O((-8x^2)^3)\\ &= 1 - 2x^2 + \tfrac{8}{3}x^4 - 6x^4 + O(x^6) = 1 - 2x^2 - \tfrac{10}{3}x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$

Pertanto
$$\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1 + 2x^2 = -\frac{10}{3}x^4 + O(x^6) \sim -\frac{10}{3}x^4 \,.$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ ed è sempre positiva; il limite per $x \to +\infty$ è $+\infty$, mentre quello per $x \to -\infty$ è 0. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = 3(x^2 - 1)\exp(x^3 - 3x)$$
si ottiene inoltre che f è crescente negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$ e decrescente in $[-1, 1]$. A partire da queste informazioni si ottiene il grafico di f disegnato nella figura sotto (si noti che in questa figura le scale non sono rispettate).



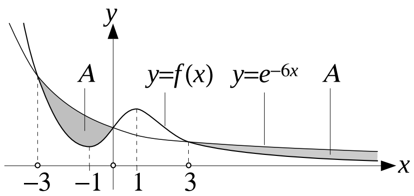
b) La disequazione $f(x) \leq e^{6x}$ equivale a $x^3 - 3x \leq 6x$, ovvero $x(x^2 - 9) \leq 0$; studiando separatamente il segno dei fattori x e $x^2 - 9$ si ottiene che le soluzioni della disequazione sono $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$. Utilizzando questo fatto si ottiene il disegno di A nella figura sopra.
c) Per quanto visto al punto precedente, l'area di A è data da
$$\text{area}(A) = \int_{-\infty}^{-3} e^{6x} - f(x)\,dx + \int_0^3 e^{6x} - f(x)\,dx \,. \tag{1}$$
Osserviamo ora che il secondo integrale non è improprio, ed è quindi finito. Riguardo al primo integrale, invece, osserviamo che è improprio a $-\infty$, e che per $x \leq -3$ si ha $0 \leq f(x) \leq e^{6x}$, e quindi
$$0 \leq e^{6x} - f(x) \leq e^{6x}\,;$$
poiché l'integrale $\int_{-3}^{+\infty} e^{6x} dx$ è finito, per il principio del confronto anche il primo integrale in (1) è finito, e quindi l'area di A è finita.

3. a) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a è
$$y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$
e quindi interseca l'asse delle x nel punto di ascissa $a - f(a)/f'(a)$. Pertanto il triangolo T ha altezza $f(a)$ e base di lunghezza $-f(a)/f'(a)$ (si noti che questo numero è positivo perché $f(a)$ è positivo e $f'(a)$ è negativo). Pertanto
$$\text{area}(T) = -\frac{(f(a))^2}{2f'(a)}\,.$$
b) Vogliamo trovare le funzioni positive f definite su $(0, +\infty)$ per cui
$$-\frac{(f(a))^2}{2f'(a)} = 1$$
per ogni $a > 0$. Questo significa che la funzione f risolve l'equazione differenziale a variabili separabili
$$-\frac{f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}\,.$$
Risolvendo questa equazione secondo la solita procedura si ottiene
$$\int \frac{1}{2}\,dx = \int -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}\,dx = \int -\frac{1}{f^2}\,df \quad \text{ovvero} \quad \frac{x}{2} + c = \frac{1}{f(x)}\,,$$
e dunque
$$f(x) = \frac{2}{x + c} \quad \text{con } c \geq 0$$
(la condizione $c \geq 0$ segue dal fatto che f deve essere definita per ogni $x > 0$).

Seconda parte, gruppo 2

1. Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\cos(6x)} &= [1 - 18\,x^2 + 54\,x^4 + O(x^6)]^{1/3} \\ &= 1 + \tfrac{1}{3}\big[-18\,x^2 + 54\,x^4 + O(x^6)\big] - \tfrac{1}{9}\big[-18\,x^2 + O(x^4)\big]^2 + O((-18\,x^2)^3) \\ &= 1 - 6x^2 + 18\,x^4 - 36\,x^4 + O(x^6) = 1 - 6x^2 - 18\,x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$
Pertanto a) $\sqrt[3]{\cos(6x)} - 1 \sim -6x^2$; b) $\sqrt[3]{\cos(6x)} - 1 + 6x^2 \sim -18x^4$.

2. Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo il grafico di f e l'insieme A disegnati nella figura sotto. Anche in questo caso l'area di A è finita.

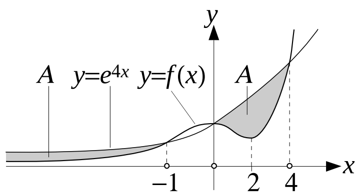


3. Uguale al gruppo 1, tranne per il fatto che le funzioni f cercate al punto b) risolvono l'equazione differenziale $-f'(x)/(f(x))^2 = 1$ e sono quindi date da
$$f(x) = \frac{1}{x+c} \quad \text{con } c \geq 0.$$

Seconda parte, gruppo 3

1. Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(4x)} &= [1 - 8x^2 + \tfrac{32}{3}x^4 + O(x^6)]^{1/2} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\big[-8x^2 + \tfrac{32}{3}x^4 + O(x^6)\big] - \tfrac{1}{8}\big[-8x^2 + O(x^4)\big]^2 + O((-8x^2)^3) \\ &= 1 - 4x^2 + \tfrac{16}{3}x^4 - 8x^4 + O(x^6) = 1 - 4x^2 - \tfrac{8}{3}x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$
Pertanto a) $\sqrt{\cos(4x)} - 1 \sim -4x^2$; b) $\sqrt{\cos(4x)} - 1 + 4x^2 \sim -\frac{8}{3}x^4$.

2. Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo il grafico di f e l'insieme A disegnati nella figura sotto. Anche in questo caso l'area di A è finita.



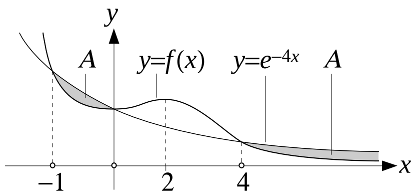
3. Uguale al gruppo 2.

Seconda parte, gruppo 4

1. Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(2x)} &= [1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + O(x^6)]^{1/2} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}\big[-2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + O(x^6)\big] - \tfrac{1}{8}\big[-2x^2 + O(x^4)\big]^2 + O((-2x^2)^3) \\ &= 1 - x^2 + \tfrac{1}{3}x^4 - \tfrac{1}{2}x^4 + O(x^6) = 1 - x^2 - \tfrac{1}{6}x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$

Pertanto a) $\sqrt{\cos(2x)} - 1 \sim -x^2$; b) $\sqrt{\cos(2x)} - 1 + x^2 \sim -\frac{1}{6}x^4$.

2. Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo il grafico di f e l'insieme A disegnati nella figura sotto. Anche in questo caso l'area di A è finita.



3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Prima parte, esercizio 4. Molti dei presenti hanno dato come risposta funzioni che non sono della forma ax^b, come invece deve essere per le parti principali.

- Prima parte, esercizio 5. Molti dei presenti, pur avendo capito come calcolare l'integrale, applicato in modo errato la formula di cambio di variabile.

- Seconda parte, esercizio 1. Quasi tutti i presenti hanno dato una soluzione sbagliata del punto b); tipicamente l'errore è consistito nell'usare lo sviluppo al quarto ordine di $\cos x$ (com'è giusto) ma solo lo sviluppo al primo ordine di $(1+x)^a$, o viceversa usare lo sviluppo al secondo ordine di $(1+x)^a$ ma solo lo sviluppo al secondo ordine di $\cos x$.

  In entrambi i casi l'errore sarebbe stato evidente sei si fosse tenuto conto dei resti (a questo proposito bisogna aggiungere che molti dei presenti hanno anche indicato alcuni resti, ma spesso in modo poco più che estemporaneo).

- Seconda parte, esercizio 2. Nel risolvere il punto b), molti dei presenti non hanno saputo usare le informazioni ottenute risolvendo la disequazione con il disegno per tracciare correttamente l'insieme A.

- Seconda parte, esercizio 2. Anche tra coloro che hanno disegnato correttamente l'insieme A sono stati pochi quelli che hanno dato una spiegazione corretta del fatto che l'area di A è finita. Inoltre alcune delle spiegazioni proposte sono grossolanamente errate (per esempio c'è chi ha sostenuto che l'integrale improprio di una funzione su una semiretta è finito quando la funzione tende a zero all'infinito).

PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. $x > e$.

2. a) $+\infty$; b) 1; c) 0.

3. $-2x^3 - 2x^6$.

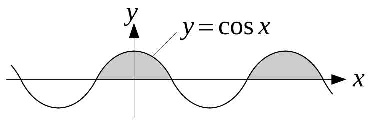
4. Ponendo $y = x^2$ si ottiene $\displaystyle\int 4x\cos(x^2)\,dx = 2\int \cos y\,dy = 2\sin y + c = 2\sin(x^2) + c$.

5. L'integrale è improprio all'infinito, dove $\dfrac{x^a - 2}{x^2 + 1} \sim x^{a-2}$, ed è dunque finito se e solo se $a < 1$.

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3}$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = 2t(1 + x^2)$ cioè $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int 2t\,dt$, cioè $\arctan x = t^2 + c$, e infine $x = \tan(t^2 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. $x > \log\log 2$.

2. a) non esiste; b) 0; c) 2.

3. $1 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^8$.

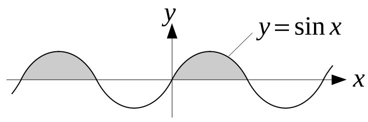
4. Ponendo $y = x^2$ si ottiene $\displaystyle\int 4x\ \exp(x^2)\,dx = 2\int \exp(y)\,dy = 2\exp(y) + c = 2\exp(x^2) + c$.

5. L'integrale è improprio all'infinito, dove $\dfrac{x^a + 3}{x^3 + 1} \sim x^{a-3}$, ed è dunque finito se e solo se $a < 2$.

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = 3t^2(1 + x^2)$ cioè $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int 3t^2\,dt$, cioè $\arctan x = t^3 + c$, e infine $x = \tan(t^3 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3

1. $x > e^e$.

2. a) $+\infty$; b) 1; c) 0.

3. $-2x^4 - 2x^8$.

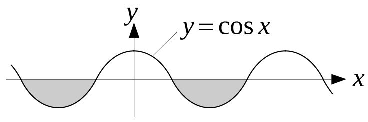
4. Ponendo $y = x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\ \cos(x^2)\,dx = \int_0^{\pi} \cos y\,dy = \Big|\sin y\Big|_0^{\pi} = 0$.

5. L'integrale è improprio all'infinito, dove $\dfrac{x^2-1}{x^a+2} \sim x^{2-a}$, ed è dunque finito se e solo se $a > 3$.

6. Il termine generico della serie è asintoticamente equivalente a $1/n$ e quindi la somma è $+\infty$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -2te^x$ cioè $\int -e^{-x} dx = \int 2t\, dt$, cioè $e^{-x} = t^2 + c$, e infine $x = -\log(t^2 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. $x > \log\log 4$.

2. a) $+\infty$; b) $1/2$; c) 0.

3. $3x^2 - \frac{9}{2}x^6$.

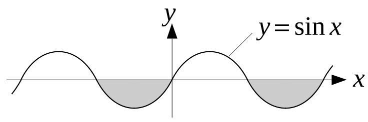
4. Ponendo $y = x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^2 2x \exp(x^2)\, dx = \int_0^4 e^y\, dy = \Big|e^y\Big|_0^4 = e^4 - 1$.

5. L'integrale è improprio all'infinito, dove $\dfrac{x^3+1}{x^a+3} \sim x^{3-a}$, ed è dunque finito se e solo se $a > 4$.

6. Il termine generico della serie tende a 1 e quindi la somma è $+\infty$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -3t^2e^x$ cioè $\int -e^{-x} dx = \int 3t^2\, dt$, cioè $e^{-x} = t^3 + c$, e infine $x = -\log(t^3 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. Rispondiamo direttamente alla domanda più generale, vale a dire c).
   L'equazione omogenea associata alla (*) è
   $$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0\,,$$
   l'equazione caratteristica è quindi $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = -1, -3$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
   $$x_{\mathrm{om}}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Risolviamo ora l'equazione non omogenea (*) cercandone una soluzione particolare; nel far questo dobbiamo considerare diversi casi.
   Primo caso: $a \neq -1, -3$. Cerchiamo una soluzione particolare della forma
   $$\tilde{x}(t) = ce^{at}\,.$$
   Con questa sostituzione l'equazione (*) si riduce a $c(a^2 + 4a + 3)e^{at} = e^{at}$, ed è verificata per $c = 1/(a^2 + 4a + 3)$; pertanto la soluzione particolare cercata è
   $$\tilde{x}(t) = \frac{e^{at}}{a^2 + 4a + 3}$$
   e la soluzione generale della (*) è
   $$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + \frac{e^{at}}{a^2 + 4a + 3} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Secondo caso: $a = -1$. In questo caso la funzione ce^{-t} risolve l'equazione omogenea e quindi non può risolvere la non omogenea (e infatti nella formula per $\tilde{x}$ data sopra si annulla il

denominatore). Dobbiamo quindi cercare una soluzione particolare della (*) della forma

$$\tilde{x}(t) = cte^{-t}\,.$$

Imponendo questa sostituzione la (*) diventa $2ce^{-t} = e^{-t}$ ed è dunque verificata per $c = 1/2$. Pertanto la soluzione particolare cercata è

$$\tilde{x}(t) = \frac{t}{2}e^{-t}\,,$$

e la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + \frac{t}{2}e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Terzo caso: $a = -3$. Analogo al caso $a = -1$; procedendo allo stesso modo si ottiene

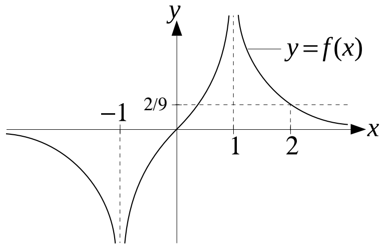
$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} - \frac{t}{2}e^{-3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq \pm 1$, positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$ (si noti che il denominatore è sempre positivo). Osserviamo poi che $f(x)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, tende a $+\infty$ per $x \to 1$, e tende a $-\infty$ per $x \to -1$. Infine, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = -\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,,$$

si ottiene che f è crescente per $-1 < x < 1$ e decrescente per $x < -1$ e per $x > 1$.

Usando queste informazioni tracciamo il disegno sottostante.



b) Siccome $f(2) = 2/9$, dal disegno sopra risulta chiaro che l'equazione $f(x) = a$ ha due soluzioni $x \leq 2$ quando $a \geq 2/9$, e una sola quando $0 < a < 2/9$.

c) Dal disegno sopra risulta chiaro che $x(a)$ tende a $+\infty$ quando $a \to 0^+$. Siccome $f(x) \sim 1/x^3$ per $x \to +\infty$, quando a tende a 0^+ si ha che

$$a = f(x(a)) \sim 1/(x(a))^3\,,$$

e dunque

$$x(a) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\,.$$

3. Raccogliendo n^{2a} ed usando lo sviluppo di Taylor $(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$ con $x = 1/n^2$ otteniamo che il termine generico della serie soddisfa

$$\begin{aligned}(n^2+1)^a - n^{2a} &= n^{2a}\big[(1+1/n^2)^a - 1\big] \\ &= n^{2a}\big[1 + a/n^2 + o(1/n^2) - 1\big] \sim an^{2a-2}\end{aligned}$$

e dunque, per il principio del confronto asintotico, la serie converge se e solo se $2a - 2 < -1$, vale a dire

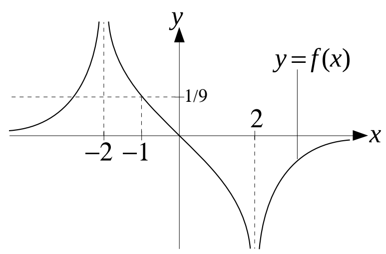
$$a < 1/2\,.$$

Volendo essere precisi osserviamo che l'uso dello sviluppo di Taylor $(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$ con $x = 1/n^2$ è legittimo perché $1/n^2$ tende a 0 per $n \to +\infty$, Osserviamo inoltre che questo sviluppo non ha senso per $a = 0$, ma in quel caso si vede subito che il termine generico della serie è esattamente zero, e quindi la serie converge.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. Analogo al gruppo 1. Anche in questo caso rispondiamo direttamente alla domanda c).
L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (*) è $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = 1, 3$; pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Risolviamo l'equazione non omogenea (*) cercandone una soluzione particolare.
Primo caso: $a \neq 1, 3$. Cercando una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = ce^{at}$ otteniamo che c deve essere uguale a $1/(a^2 - 4a + 3)$; pertanto la soluzione particolare cercata è
$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{at}}{a^2 - 4a + 3}$$
e quindi la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{e^{at}}{a^2 - 4a + 3} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Secondo caso: $a = 1$. In questo caso dobbiamo cercare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = cte^t$. Facendo i conti otteniamo che $c = -1/2$; pertanto la soluzione particolare cercata è
$$\tilde{x}(t) = -\frac{t}{2} e^{-t},$$
e la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} - \frac{t}{2} e^t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Terzo caso: $a = 3$. Analogo al caso $a = 1$:
$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{t}{2} e^{3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Analogo al gruppo 1.
a) La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq \pm 2$, positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$; inoltre $f(x)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, tende a $+\infty$ per $x \to -2$, e tende a $-\infty$ per $x \to +2$. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 2)^3},$$
si ottiene che f è decrescente per $-2 < x < 2$ e crescente per $x < -2$ e per $x > 2$.



b) Siccome $f(-1) = 1/9$, dal disegno risulta chiaro che l'equazione $f(x) = a$ ha una soluzione $x \geq -1$ quando $0 < a \leq 1/9$, nessuna quando $a > 1/9$.
c) Dal disegno sopra risulta chiaro che $x(a)$ tende a $-\infty$ quando $a \to 0^+$. Siccome $f(x) \sim -1/x^3$ per $x \to -\infty$, per $a \to 0^+$ si ha che $a \sim -1/(x(a))^3$ e dunque
$$x(a) \sim -\frac{1}{\sqrt[3]{a}}.$$

3. Analogo al gruppo 1. Il termine generico della serie soddisfa
$$\begin{aligned}(n^3 + 1)^a - n^{3a} &= n^{3a}\big[(1 + 1/n^3)^a - 1\big] \\ &= n^{3a}\big[1 + a/n^3 + o(1/n^3) - 1\big] \sim an^{3a-3}\end{aligned}$$
e dunque la serie converge se e solo se $3a - 3 < -1$, vale a dire
$$a < 2/3.$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1c). Al momento di trovare una soluzione particolare dell'equazione (*) della forma ce^{at}, diversi dei presenti hanno avuto problemi al momento di calcolare la costante c in funzione di a.

- Seconda parte, esercizio 1c). Diversi dei presenti hanno risolto l'equazione cercando una soluzione particolare della forma ce^{at} senza accorgersi che per certi valori di a bisognava invece cercare una soluzione della forma cte^{at} (questo pur avendo risolto correttamente il punto b)).

- Seconda parte, esercizio 1c). Diversi dei presenti hanno pensato di dover discutere a parte il caso $a = 0$. In realtà questo non è necessario (ma ovviamente non è neanche sbagliato) perché le equazioni differenziali non omogenee il cui termine noto è costante sono un caso particolare di quelle il cui termine noto è un esponenziale.

- Seconda parte, esercizio 2a). Nel calcolare la derivata di f molti dei presenti non hanno fatto le dovute semplificazioni, e di conseguenza hanno avuto grosse difficoltà con lo studio del segno.

- Seconda parte, esercizio 3. Alcuni hanno risolto l'esercizio presupponendo che l'esponente a sia intero, ed usando quindi la formula del binomio di Newton per sviluppare $(n^2+1)^a$ (mi riferisco al gruppo 1)). Questa soluzione, anche se non completa, è comunque apprezzabile.

Prima parte, gruppo 1

1. $-\dfrac{2\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$.

2. L'unico punto dell'intervallo in cui si annulla la derivata $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ è 1; inoltre $f(0) = 0$, $f(1) = -2$ e $f(3) = 18$. Pertanto il valore minimo è -2 e il massimo è 18.

3. $-3x$.

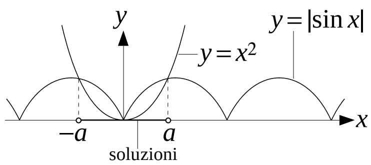
4. $1 + 3x^4$.

5. Ponendo $t = 1-2x$ si ottiene $\displaystyle\int 4\sin(1-2x)\,dx = -2\int \sin t\,dt = 2\cos t + c = 2\cos(1-2x)+c/$

6. Integrando per parti si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^x\,dx = \Big|xe^x\Big|_{-\infty}^{1} - \int_{-\infty}^{1} e^x\,dx = e - \Big|e^x\Big|_{-\infty}^{1} = e - e = 0.$

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -x^2t^2$ cioè $-\int 1/x^2\,dx = \int t^2\,dt$ cioè $1/x = t^3/3 + c$, e imponendo la condizione $x(0) = 3$ si ottiene $c = 1/3$.
   Quindi $x = 3/(1 + t^3)$.

8. La soluzione è $-a \le x \le a$ come nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 2

1. $0 \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$ e $\dfrac{4\pi}{3} \le x \le 2\pi$.

2. La derivata $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ si annulla in -1; inoltre $f(-3) = -18$, $f(-1) = 2$ e $f(0) = 0$. Pertanto il valore minimo è -18 e il massimo è 2.

3. $2x^2$.

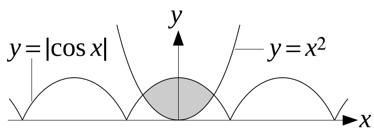
4. $1 + 2x^3$.

5. Integrando per parti si ottiene
$$\int 4x\,\cos(2x)\,dx = 2x\,\sin(2x) - \int 2\,\sin(2x)\,dx = 2x\,\sin(2x) + \cos(2x) + c\,.$$

6. Ponendo $t = 1 - 2x$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^3} = \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\Big| -\frac{1}{2t^2}\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{1}{4}.$

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -2x^3t^3$ cioè $-\int 1/x^3\,dx = \int 2t^3\,dt$ cioè $1/(2x^2) = t^4/2+c$, e imponendo la condizione $x(0) = 1$ si ottiene $c = 1/2$.
   Quindi $x = 1/\sqrt{1 + t^4}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 3

1. $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{5\pi}{3}$.

2. La derivata $f'(x) = 3(1 - x^2)$ si annulla in 1; inoltre $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -2$. Pertanto il valore minimo è -2 e il massimo è 2.

3. $-4x$.

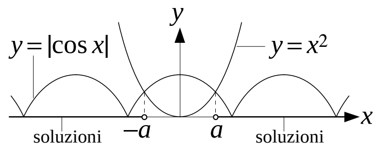
4. $1 - 3x^3$.

5. Ponendo $t = x^2 - 1$ si ottiene $\int 4x \cos(x^2-1)\, dx = 2\int \cos t\, dt = 2\sin t + c = 2\sin(x^2-1) + c$.

6. Integrando per parti si ottiene $\int_0^1 x\log x\, dx = \Big|\frac{x^2}{2}\log x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx = -\Big|\frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot x = -x^2 e^t$ cioè $-\int 1/x^2\, dx = \int e^t\, dt$ cioè $1/x = e^t + c$, e imponendo la condizione $x(0) = 2$ si ottiene $c = -1/2$.
Quindi $x = 1/(e^t - 1/2)$.

8. Le soluzioni sono $x \le -a$ e $x \ge a$ come nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 4

1. $-\pi \le x \le -\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3} \le x \le \pi$.

2. La derivata $f'(x) = 3(1-x^2)$ si annulla in -1; inoltre $f(-2) = 2$, $f(-1) = -2$ e $f(0) = 0$. Pertanto il valore minimo è -2 e il massimo è 2.

3. $-x^2$.

4. $1 - 2x^4$.

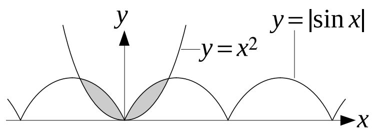
5. Ponendo $t = 2x - 1$ si ottiene

$$\int 4\log(2x+1)\, dx = 2\int \log t\, dt = 2t(\log t - 1) + c = (4x+2)(\log(2x+1) - 1) + c\,.$$

6. Ponendo $t = 1 - x$ si ottiene $\int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^4 t^{-1/2} dt = \Big|2t^{1/2}\Big|_0^4 = 4$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot x = -x^3 e^t$ cioè $-\int 1/x^3\, dx = \int e^t\, dt$ cioè $1/(2x^2) = e^t + c$, e imponendo la condizione $x(0) = 1$ si ottiene $c = -1/2$.
Quindi $x = 1/\sqrt{2e^t - 1}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



Seconda parte, gruppo 1

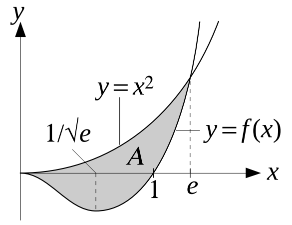
1. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x > 0$, è negativa per $x < 1$ e positiva altrimenti, e infine tende a 0 per $x \to 0^+$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata

$$f'(x) := x(2\log x + 1)$$

si ottiene inoltre che che $f(x)$ è decrescente per $x < \varepsilon(-1/2) = 1/\sqrt{e}$ e crescente altrimenti. Inoltre $f'(x)$ tende a 0 per $x \to 0^+$, e questo significa che la retta tangente al grafico nell'origine è orizzontale. Studiando il segno della derivata seconda

$$f''(x) := 2\log x + 3$$

si ottiene infine che la funzione è concava per $x \le \exp(-3/2)$ e convessa altrimenti. Sulla base di queste informazioni tracciamo il grafico nella figura sotto (nel farlo non abbiamo rispettato le proporzioni reali).



b) La disequazione $f(x) \leq x^2$ è soddisfatta per $x \leq e$ e questo permette di disegnare l'insieme A come nella figura sopra. Inoltre

$$\begin{aligned}\text{area}(A) = \int_0^e x^2 - f(x)\,dx &= \int_0^e x^2(1 - \log x)\,dx \\ &= \left|\frac{x^3}{3}(1-\log x)\right|_0^e + \int_0^e \frac{x^2}{3}\,dx = \left|\frac{x^3}{9}\right|_0^e = \frac{e^3}{9}\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio abbiamo integrato per parti derivando il fattore $1 - \log x$).

2. a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine, che risolviamo moltiplicandola per il fattore integrante $\exp(A(t))$ dove $A(t)$ è una primitiva del coefficiente $a(t) := 2/t$, ovvero $\exp(A(t)) = \exp(2\log t) = t^2$. Così facendo otteniamo

$$(t^2 x)' = t^2\dot{x} + 2tx = t^2 \exp(t^3)\,,$$

dunque

$$t^2 x = \int t^2 \exp(t^3)\,dt = \frac{1}{3}\exp(t^3) + c$$

(la primitiva è stata calcolata usando la sostituzione $s = t^3$), e infine

$$x(t) = \frac{1}{3t^2}\big(\exp(t^3) + c\big) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

b) Usando lo sviluppo $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$ nalla formula risolutiva data sopra si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{3t^2}\big(1 + c + t^3 + o(t^3)\big) = \frac{1+c}{3t^2} + \frac{t}{3} + o(t)\,.$$

Dunque se $c \neq -1$ la parte principale di $x(t)$ per $t \to 0$ è $(1+c)/t^2$ e in particolare $x(t)$ tende a $\pm\infty$ per $t \to 0^{\pm}$. Invece se $c = -1$ la parte principale di $x(t)$ è $t/3$ e quindi $x(t)$ tende a 0. Pertanto la soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{1}{3t^2}\big(\exp(t^3) - 1\big)\,.$$

3. Il numero di pezzi prodotti in un tempo fissato T è vT, e di questi quelli difettosi sono circa pvT; pertanto il numero di pezzi "buoni" è

$$vT - pvT = (1-p)vT$$

e quindi

$$v_{\text{eff}} = \frac{(1-p)vT}{T} = (1-p)v = v - \frac{v^4}{10^3}\,.$$

Dobbiamo dunque cercare il valore massimo della funzione $f(v) := v - v^4/10^3$ nell'intervallo $1 \leq v \leq 10$. Studiando il segno della derivata $f'(v) = 1 - v^3/250$ otteniamo che f cresce per $v \leq \sqrt[3]{250} \simeq 6{,}30$ e decresce altrimenti. Pertanto la velocità ottimale è

$$v_{\text{opt}} := \sqrt[3]{250} \simeq 6{,}30\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x > 0$, è negativa per $x < 1$ e positiva altrimenti, e infine tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$ e a 0 per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata

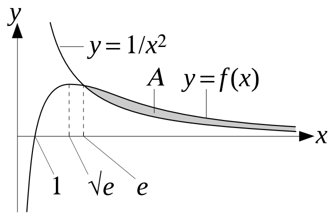
$$f'(x) := \frac{-2\log x + 1}{x^3}$$

si ottiene inoltre che $f(x)$ è crescente per $x < \exp(1/2) = \sqrt{e}$ e decrescente altrimenti. Studiando il segno della derivata seconda

$$f''(x) := \frac{6\log x - 5}{x^4}$$

si ottiene infine che la funzione è concava per $x \leq \exp(5/6)$ e convessa altrimenti.

Sulla base di queste informazioni tracciamo il grafico nella figura sotto (nel farlo non abbiamo rispettato le proporzioni reali).



b) La disequazione $f(x) \geq 1/x^2$ è soddisfatta per $x \geq e$ e questo permette di disegnare l'insieme A come nella figura sopra. Inoltre

$$\begin{aligned}\text{area}(A) = \int_e^{+\infty} f(x) - \frac{1}{x^2}\,dx &= \int_e^{+\infty} \frac{\log x - 1}{x^2}\,dx \\ &= \left| -\frac{\log x - 1}{x}\right|_e^{+\infty} + \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left| -\frac{1}{x}\right|_e^{+\infty} = \frac{1}{e}\,.\end{aligned}$$

2. Analogo al gruppo 1. a) Moltiplicando l'equazione per il fattore integrante t^3 otteniamo $(t^3x)' = t^3\sin(t^4)$, quindi

$$t^3x = \int t^3\sin(t^4)\,dt = -\frac{1}{4}\cos(t^4) + c$$

e infine

$$x(t) = \frac{c - \cos(t^4)}{4t^3} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

b) La soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{1 - \cos(t^4)}{4t^3}\,.$$

3. Analogo al gruppo 1. La velocità effettiva della macchina è circa

$$v_{\text{eff}} = (1-p)v = v - \frac{v^5}{10^4}\,.$$

Studiando il segno della derivata di $v - v^5/10^4$ nell'intervallo $1 \leq v \leq 10$ otteniamo che la velocità ottimale è

$$v_{\text{opt}} := \sqrt[4]{2\cdot 10^3} \simeq 6{,}69\,.$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1a). Nello svolgimento di questo esercizio i presenti hanno fatto in massa alcuni gravi errori. Tra questi spicca l'aver detto che l'insieme di definizione della funzione è tutto $\mathbb{R}$ (o tutto $\mathbb{R}$ tranno lo zero), accompagnato talvolta dal calcolo dei limiti della funzione a $\pm\infty$ (ma non in 0, che invece è essenziale). Inoltre molti hanno tracciato un grafico che non è in accordo con quanto scritto, oppure che richiede informazioni (per esempio sul segno della derivata, o sul limite in 0) che non sono presenti nel testo.

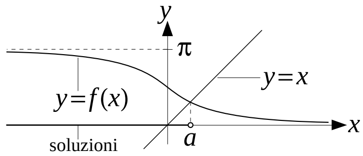
- Seconda parte, esercizio 1b). Il punto chiave qui è trovare l'intervallo di integrazione per l'integrale che serve a calcolare l'area, e questo lo si fa risolvendo una certa disequazione ($f(x) \leq x^2$ nel caso del gruppo 1). Molti dei presenti non hanno neanche considerato il problema; altri hanno indicato gli estremi di integrazione corretti, senza spiegare come li hanno ottenuti. Infine in diversi hanno sbagliato il calcolo dell'integrale.

- Seconda parte, esercizio 2a). Diversi dei presenti hanno applicato in modo errato la formula risolutiva dell'equazione lineare del primo ordine, decidendo che la funzione $A(t)$ nel fattore integrante $\exp(A(t))$ era la primitiva di $1/t$ invece che $2/t$ o $3/t$ (a seconda dei gruppi). Molti altri hanno avuto problemi con la semplificazione $\exp(a \log t) = t^a$. Infine alcuni hanno deciso, contro ogni evidenza, che l'equazione in questione è a variabili separabili.

- Seconda parte, esercizio 3). Molti di quelli che hanno provato a risolvere questo esercizio hanno frainteso il testo, intendendo con p il numero di pezzi difettosi (per secondo) invece che la frazione di pezzi difettosi, nonostante che questo punto fosse stato sottolineato da noi in aula.

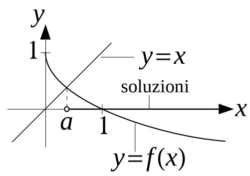
Prima parte, gruppo 1

1. Deve essere $x^2 - 1 > 0$ ovvero $x > 1$ oppure $x < -1$.
2. a) $\log x + 1$; b) $2e^{-x}(1 + e^{-x})^{-3} = 2e^{2x}(1 + e^x)^{-3}$.
3. a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $2/3$.
4. $-2x^2 + \frac{4}{3}x^6$.
5. Ponendo $y = -x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^y\,dy = \frac{1}{2}\Big| e^y \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}$.
6. Per $n \to +\infty$ il termine generico della serie è asintoticamente equivalente a $1/n^{2a}$ e quindi la serie converge se e solo se $2a > 1$, ovvero $a > 1/2$.
7. $x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
8. La soluzione è $x \leq a$ dove a è dato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 2

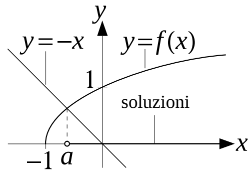
1. Deve essere $x^2 - 1 > 1$ ovvero $x > \sqrt{2}$ oppure $x < -\sqrt{2}$.
2. a) $2x \log x + x = x(2 \log x + 1)$; b) $2e^{-x}(1 + e^{-x})^{-3} = 2e^{2x}(1 + e^x)^{-3}$.
3. a) 0; b) $-\infty$; c) 0.
4. $1 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^8$.
5. Ponendo $y = 1 - x$ si ottiene $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = -\int_2^0 y^{-1/2}\,dy = \Big| 2y^{1/2} \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}$.
6. Per $n \to +\infty$ il termine generico della serie è asintoticamente equivalente a $1/n^{3a-1}$ e quindi la serie converge se e solo se $3a - 1 > 1$, ovvero $a > 2/3$.
7. $x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
8. La soluzione è $x \geq a$ dove a è dato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 3

1. Deve essere $2 - x^2 > 1$ ovvero $-1 < x < 1$.
2. a) $\log x + 1$; b) $-2e^{-x}(1 + e^{-x}) = -2e^{-2x}(1 + e^x) = -2e^{-x} - 2e^{-2x}$.
3. a) $-\infty$; b) $\frac{3}{2}$; c) $-\infty$.
4. $-4x^3 - 8x^6$.
5. Ponendo $y = -x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{0} e^y\,dy = \frac{1}{2}\Big| e^y \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}$.
6. Qualunque sia a, per $n \to +\infty$ il termine generico della serie tende a 0 più rapidamente di qualunque potenza negativa di n, e in particolare più rapidamente di $1/n^2$. Dunque la serie

converge per ogni a per via del criterio del confronto asintotico.



7. $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-5t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. La soluzione è $x \geq a$ dove a è dato nella figura accanto.

Prima parte, gruppo 4

1. Deve essere $x^2 - 1 < 0$ ovvero $-1 < x < 1$.

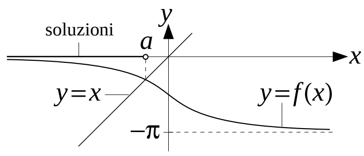
2. a) $2x \log x + x = x(2\log x + 1)$; b) $-2e^{-x}(1 + e^{-x}) = -2e^{-2x}(1 + e^x) = -2e^{-x} - 2e^{-2x}$.

3. a) 1; b) $+\infty$; c) 0.

4. $1 - 2x^2 + 2x^4$.

5. Ponendo $y = 1 + x$ si ottiene $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_0^3 y^{-1/2} dy = \Big|2y^{1/2}\Big|_0^3 = 2\sqrt{3}$.

6. Qualunque sia a, per $n \to +\infty$ il termine generico della serie tende a 1 e quindi la serie diverge sempre a $+\infty$.

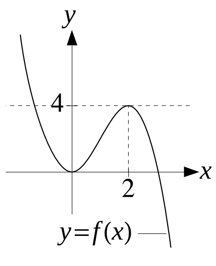


7. $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. La soluzione è $x \leq a$ dove a è dato nella figura accanto.

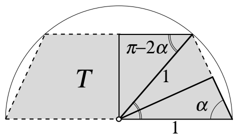
Seconda parte, gruppo 1

1. a) Moltiplicando entrambi i termini per x^2 l'equazione (*) diventa
$$3x^2 - x^3 = a\,. \tag{1}$$
La funzione $f(x) := 3x^2 - x^3$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, tende a $\pm\infty$ per $x \to \mp\infty$, e studiandone il segno della derivata $f'(x) = 3x(2 - x)$ si ottiene che f è crescente per $0 \leq x \leq 2$ e decrescente altrimenti. In particolare $x = 0$ è un punto di minimo locale a cui corrisponde il valore $f(0) = 0$, mentre 2 è un punto di massimo locale a cui corrisponde il valore $f(2) = 4$. Quanto detto permette di tracciare sommariamente il grafico di $f(x)$ nella figura sotto (disegnato senza rispettato le proporzioni) e di ottenere la seguente tabella: per $a > 4$ l'equazione (1), e quindi anche la (*), ha una sola soluzione; per $a = 4$ ne ha due; per $0 < a < 4$ ne ha tre.



b) Dalla figura sopra risulta chiaro che per ogni $a > 0$ esiste una sola soluzione negativa dell'equazione (*), e che questa soluzione tende a 0 per $a \to 0^+$. Inoltre per $x \to 0$ si ha che $f(x) \sim 3x^2$ e quindi l'equazione $a = f(x)$ diventa $a \sim 3\,x(a)^2$, ovvero
$$x(a) \sim -\sqrt{a/3} \quad \text{per } a \to 0^+.$$

2. Come si vede dalla figura sotto, la base maggiore del trapezio ha lunghezza 2, il lato obliquo ha lunghezza $2\cos\alpha$, e la base minore ha lunghezza $2\cos(\pi - 2\alpha)$. Siccome
$$\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) = 1 - 2\cos^2\alpha\,,$$
il perimetro di T è $P = 4(1 + \cos\alpha - \cos^2\alpha)$.



Osserviamo ora che α deve essere compreso tra $\pi/4$ e $\pi/2$ (nel primo estremo la base minore si riduce ad un punto e il trapezio diventa un triangolo isoscele, nel secondo la base minore viene a coincidere con la base maggiore e il trapezio si riduce ad un segmento). Pertanto $\cos\alpha$ è compreso tra $1/\sqrt{2}$ e 0.

Ponendo dunque $t = \cos\alpha$, dobbiamo trovare il valore di t compreso tra 0 e $1/\sqrt{2}$ per cui risulta massima l'espressione

$$P = 4(1 + t - t^2)\,.$$

Studiandone la derivata otteniamo che questa funzione cresce per $0 \le t \le 1/2$ e poi decresce. Pertanto il valore massimo viene raggiunto per $t = 1/2$, ovvero per $\alpha = \pi/3$.

3. La funzione $e^{x\log x} - 1$ è definita per $x > 0$, si annulla per $x\log x = 0$ ovvero per $x = 1$, ed è positiva per $x\log x > 0$, cioè per $x > 1$, e negativa altrimenti. Inoltre questa funzione tende a 0 per $x \to 0^+$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

   Pertanto la funzione $f(x)$, che è il suo reciproco, è definita per $x > 0$ e $x \ne 1$, è positiva per $x > 1$ e negativa per $0 < x < 1$. Inoltre $f(x)$ tende a $\pm\infty$ per $x \to 1^\pm$, tende a 0 per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$.

   a) Per quanto appena detto questo integrale è improprio a $+\infty$ ed esiste, trattandosi dell'integrale di una funzione positiva. Inoltre per $x > 2$ si ha $x^x > x^2$, quindi

$$f(x) = \frac{1}{x^x - 1} \sim \frac{1}{x^x} \le \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

   e pertanto applicando il principio del confronto asintotico (con l'integrale di $1/x^2$) otteniamo che l'integrale improprio a) è finito.

   b) Per quanto visto sopra l'integrale di $f(x)$ tra 0 e $+\infty$ è improprio in 0, 1 e $+\infty$, e va quindi spezzato come somma di quattro integrali da studiare separatamente:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

   Cominciamo con lo studiare il comportamento di $f(x)$ per x vicino a 1. Per farlo conviene usare la sostituzione $x = 1 + y$ e cercare la parte principale per $y \to 0$ di

$$f(1+y) = \frac{1}{\exp\big((1+y)\log(1+y)\big) - 1}\,.$$

   Osserviamo che per $y \to 0$ si ha $(1+y)\log(1+y) \sim y$, e siccome $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$,

$$\exp\big((1+y)\log(1+y)\big) - 1 \sim y \quad \text{per } y \to 0,$$

   e dunque

$$f(1+y) \sim 1/y \quad \text{per } y \to 0.$$

   Da questo segue che il secondo integrale improprio alla destra dell'uguale in (3) è uguale a $-\infty$ mentre il terzo è uguale a $+\infty$. Questo è sufficiente a dire che l'integrale improprio alla sinistra dell'uguale non esiste.

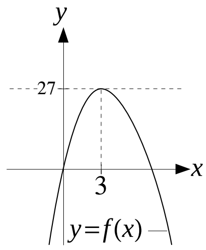
Seconda parte, gruppo 1

1. a) Moltiplicando entrambi i termini per x^3 l'equazione (*) diventa

$$4x^3 - x^4 = a\,. \tag{3}$$

   La funzione $f(x) := 3x^2 - x^3$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, tende a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$, e studiandone il segno della derivata $f'(x) = 4x^2(3 - x)$ si ottiene che f è crescente per $x \le 3$ e decrescente altrimenti. In particolare $x = 3$ è un punto di massimo assoluto a cui corrisponde il valore $f(3) = 27$. Quanto detto permette di tracciare sommariamente il grafico di $f(x)$ nella figura sotto (disegnato senza rispettato le proporzioni) e di ottenere la seguente tabella: per $a > 27$

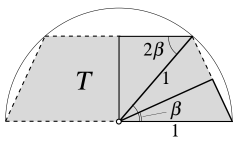
l'equazione (3), e quindi anche la (*), non ha soluzioni; per $a = 27$ ne ha una; per $0 < a < 27$ ne ha due.



b) Dalla figura sopra risulta evidente che per ogni $a < 27$ l'equazione (*) ammette due soluzioni di cui la più piccola tende a 0 per $a \to 0^+$. Inoltre per $x \to 0$ si ha che $f(x) \sim 4x^3$ e quindi l'equazione $a = f(x)$ diventa $a \sim 4\,x(a)^3$, ovvero

$$x(a) \sim \sqrt[3]{a/4} \quad \text{per } a \to 0^+.$$

2. Analogo al gruppo 1. Come si vede dalla figura sotto, la base maggiore del trapezio ha lunghezza 2, il lato obliquo ha lunghezza $2\sin\beta$, e la base minore ha lunghezza $2\cos(2\beta)$. Siccome $\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2\beta$, il perimetro di T è $P = 4(1 + \sin\beta - \sin^2\beta)$.



Osserviamo ora che β deve essere compreso tra 0 e $\pi/4$e quindi $\sin\beta$ è compreso tra 0 e $1/\sqrt{2}$. Ponendo dunque $t = \sin\beta$, dobbiamo trovare il valore di t compreso tra 0 e $1/\sqrt{2}$ per cui risulta massima l'espressione $P = 4(1 + t - t^2)$. Come già visto per il gruppo 1 il massimo è raggiunto per $t = 1/2$, ovvero per $\beta = \pi/6$.

3. Lo studio del dominio e del segno di $f(x)$ è uguale al gruppo 1.

a) Analogo al gruppo 1: per studiare questo integrale improprio bisogna determinare il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to 0^+$. Usando il fatto che $e^y - 1 \sim y$ per $y \to 0$ e che $x\log x$ tende a 0 per $x \to 0^+$ otteniamo che

$$f(x) = \frac{1}{e^{x\log x} - 1} \sim \frac{1}{x\log x} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

e come si è visto a lezione, l'integrale improprio di $1/(x\log x)$ tra 0 e 1/2 lo si può calcolare tramite il cambio di variabile $y = \log x$, ottenendo che vale $-\infty$. Pertanto, per il teorema del confronto asintotico, anche l'integrale di $f(x)$ tra 0 e 1/2 vale $-\infty$.

b) Uguale al gruppo 1: l'integrale non esiste.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2. Per trovare i punti di massimo della funzione P è conveniente fare la sostituzione $t = \cos\alpha$ o $t = \sin\beta$ (a seconda del gruppo) ma non è affatto necessario. Quello che invece è necessario è individuare chiaramente l'intervallo degli α o dei β ammissibili.

- Seconda parte, esercizio 3. Molti hanno avuto difficoltà a determinare l'insieme di definizione ed il segno della funzione, il che è grave.

- Seconda parte, esercizio 3b). Quasi nessuno dei presenti ha spezzato correttamente l'integrale come somma di quattro integrali impropri semplici. Inoltre molti hanno detto che questo integrale non esiste perché il punto 1 non appartiene all'insieme di definizione della funzione da integrare (cosa che non è corretta).

Prima parte, gruppo 1

1. Deve essere $2 - x^2 > 0$, vale a dire $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

2. a) $\left[\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}}\right]' = \left[e^{-x} - e^{-3x}\right]' = 3e^{-3x} - e^{-x}$; b) $\dfrac{2x}{1+x^4}$.

3. a) -1; b) 1; c) 0.

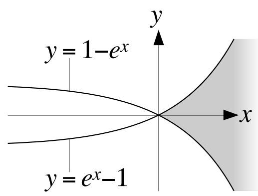
4. $\dfrac{2}{x^2}$.

5. Integriamo per parti: $\displaystyle\int x^3 \log x\, dx = \frac{x^4}{4}\log x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{16}(4\log x - 1) + c$.

6. Usiamo il cambio di variabile $y = x^2$: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 4x\sin(x^2)\, dx = 2\int_0^{\pi} \sin y\, dy = 4$.

7. Ponendo $x(t) := t^a$ l'equazione diventa $\big(a^2 + 4\big)t^a = 0$ e sarebbe soddisfatta se $a^2 + 4 = 0$, ma questo non si verifica per alcun a.

8. L'insieme dato corrisponde all'area in grigio nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 2

1. Deve essere $1 - x^2 > 0$, vale a dire $-1 < x < 1$.

2. a) $\left[\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}\right]' = \left[e^{-x} + e^{-3x}\right]' = -e^{-x} - 3e^{-3x}$; b) $\dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$.

3. a) 1; b) 0; c) -2.

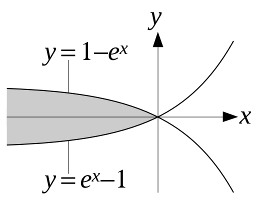
4. $-\dfrac{1}{x^2}$.

5. Integriamo per parti: $\displaystyle\int x^4 \log x\, dx = \frac{x^5}{5}\log x - \int \frac{x^5}{5}\frac{1}{x}dx = \frac{x^5}{25}(5\log x - 1) + c$.

6. Usiamo il cambio di variabile $y = x^2$: $\displaystyle\int_0^{2} 4x\exp(x^2)\, dx = 2\int_0^{4} \exp(y)\, dy = 2(e^4 - 1)$.

7. Ponendo $x(t) := t^a$ l'equazione diventa $\big(a^2 - 4\big)t^a = 0$ ed è quindi soddisfatta se e solo se $a^2 - 4 = 0$, vale a dire se e solo se $a = \pm 2$.

8. L'insieme dato corrisponde all'area in grigio nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 3

1. Deve essere $2 - x^2 \geq 1$, vale a dire $-1 \leq x \leq 1$.

2. a) $\left[\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{3x}}\right]' = \left[e^{-2x} + e^{-4x}\right]' = -2e^{-2x} - 4e^{-4x}$; b) $\dfrac{3x^2}{1+x^6}$.

3. a) -1; b) $-\infty$; c) 0.

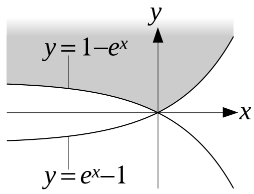
4. $-\dfrac{1}{x}$.

5. Integriamo per parti: $\displaystyle\int x^2 \log x\, dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{9}(3\log x - 1) + c.$

6. Usiamo il cambio di variabile $y = x^2$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} 4x \exp(x^2)\, dx = 2\int_{1}^{1} \exp(y)\, dy = 0.$

7. Ponendo $x(t) := t^a$ l'equazione diventa $\big(a^2 - 2a + 1\big)t^a = 0$ ed è quindi soddisfatta se e solo se $a^2 - 2a + 1 = 0$, vale a dire se e solo se $a = 1$.

8. L'insieme dato corrisponde all'area in grigio nella figura accanto.



Seconda parte, gruppo 1

1. a) L'equazione omogenea associata alla (*) è $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$; la corrispondete equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = -1, 3$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\text{om}}(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{3t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della (*) della forma $x(t) = ae^{-2t}$. In questo caso l'equazione diventa $(5a + 5)e^{-2t} = 0$ ed è quindi soddisfatta se $a = -1$. Pertanto la soluzione particolare cercata è $x(t) = -e^{-2t}$, e la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{3t} - e^{-2t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Affinché la soluzione $x(t)$ data sopra tenda a 0 per $t \to +\infty$ deve essere $\alpha_2 = 0$. Imponendo poi che $x(0) = 1$ otteniamo $\alpha_1 = 1$, e quindi la soluzione cercata è

$$x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}\,.$$

2. Applichiamo il criterio del rapporto: se indichiamo con a_n l'n-esimo addendo della serie, vale a dire $a_n := (n!)^2/(2n)!$, allora

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!}\\ &= \left(\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!}\\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Dunque quando $n \to +\infty$ il rapporto a_{n+1}/a_n tende a $1/4$, che è un numero strettamente minore di 1, e per il criterio del rapporto la serie $\sum a_n$ converge ad un numero finito.

3. a) Usando lo sviluppo di Taylor $\cos x = 1 - x^2/2 + O(x^4)$ otteniamo

$$f(x) := \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{x^2/2 + O(x^4)}{1 + O(x^2)} \sim \frac{x^2}{2}\,.$$

b) Si vede facilmente che la funzione $f(x^a)/x^2$ è ben definita, continua e positiva nell'intervallo $(0, \pi/2)$ ma non è definita in 0. Quindi l'integrale in questione è improprio in 0, esiste sempre, e resta da capire quando è finito. Osserviamo ora che per $x \to 0$ si ha

$$\frac{f(x^a)}{x^2} \sim \frac{(x^\alpha)^2/2}{x^2} = \frac{1}{2x^{2-2\alpha}}$$

e dunque, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio è finito se e solo se $2 - 2\alpha < 1$, vale a dire $\alpha > 1/2$.

c) Si vede facilmente che la funzione $f(x^a)/x^2$ è ben definita, continua e positiva nell'intervallo $(0, \pi/2)$ ma non è definita né in 0 (come già osservato sopra) né in $\pi/2$, perché per $x = \pi/2$ si ha $\cos x = 0$ e quindi $f(x)$ stessa non è definita. Pertanto l'integrale in questione è improprio

in 0 e in $\pi/2$, e va studiato spezzandolo come somma di due integrali impropri semplici, per esempio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx \,. \tag{1}$$

Il primo di questi due integrali lo abbiamo già studiato al punto precedente, e risulta essere finito. Il secondo, essendo la funzione integranda positiva, esiste sicuramente e si tratta di capire quindi se è finito o meno. Per fare questo usiamo il cambio di variabile $x = \pi/2 - x$ per riscriverlo come un integrale improprio in 0:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^2 \cos x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin y}{(\pi/2-y)^2 \sin y} dy \tag{2}$$

(si noti che $\cos x = \cos(\pi/2 - y) = \sin y$). Osserviamo ora che per $y \to 0$ si ha

$$\frac{1-\sin y}{(\pi/2-y)^2 \sin y} \sim \frac{1}{(\pi/2)^2 \sin y} \sim \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{y}$$

e dunque, sempre per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio in (2) è uguale a $+\infty$. Ritornando alla (1) otteniamo quindi che

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx = +\infty \,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. Analogo al gruppo 1. a) Le soluzioni dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$ sono $\lambda = 1, -3$, e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$x_{\rm om}(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-3t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
Cercando una soluzione particolare della (*) della forma $x(t) = ae^{-2t}$ otteniamo che deve essere $a = -2$ e quindi la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-3t} - 2e^{-2t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
b) Affinché la soluzione $x(t)$ data sopra tenda a 0 per $t \to +\infty$ deve essere $\alpha_1 = 0$ e imponendo che $x(0) = 1$ otteniamo $\alpha_2 = 3$, e quindi la soluzione cercata è
$$x(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t} \,.$$

2. Analogo al gruppo 1. Detto a_n l'n-esimo addendo della serie si ha che
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^3 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^3}{4n^2} = \frac{n}{4} \,.$$
Dunque quando $n \to +\infty$ il rapporto a_{n+1}/a_n tende a $+\infty$, e per il criterio del rapporto la serie $\sum a_n$ converge ad un numero finito.

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2. Pur avendo impostato correttamente il problema usando il criterio del rapporto quasi tutti i presenti hanno fatto errori nel manipolare e semplificare i fattoriali.

Versione: 20 settembre 2014

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2013-14

Giovanni Alberti e Vincenzo M. Tortorelli

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 15 dicembre 2013]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria.
   - 1.2 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, immagine, funzione inversa; funzioni crescenti e descrescenti. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.3 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - 2.1 Limiti di funzioni e funzioni continue.
   - 2.2 Proprietà elementari dei limiti. Forme indeterminate.
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Interpretazioni fisiche: velocità e accelerazione.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Teoremi di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - 3.5 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione (all'infinito e in zero).
   - 3.6 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali. *Il numero e. Giustificazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ tramite gli sviluppi di Taylor.*
4. Alcuni risultati astratti
   - 4.1 *Numeri interi, razionali e reali. Completezza dei numeri reali.*
   - 4.2 Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i imiti di funzioni.
   - 4.3 *Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass). Teorema di esistenza degli zeri.*
   - 4.4 Teoremi di Lagrange e di Cauchy. *Dimostrazione della formula di Taylor con resto di Lagrange.*
   - 4.5 Prime nozioni di calcolo combinatorico. Disposizioni con e senza ripetizioni, combinazioni, permutazioni.
5. Integrali
   - 5.1 Definizione dell'integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Un'interpretazione fisica dell'integrale.
   - 5.2 Primitiva di una funzione e prima versione del teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - 5.3 Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.

5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e dei solidi di rotazione in particolare.

6. Integrali imrpropri e serie numeriche

6.1 Integrali impropri semplici. Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
6.2 Integrali impropri non semplici.
6.3 Serie. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio dell'integrale, del confronto, e del confronto asintotico. Esempi fondamentali: la serie geometrica ($\sum a^n$) e la serie armonica generalizzata ($\sum 1/n^a$). Criterio della convergenza assoluta per serie a segno variabile.

7. Equazioni differenziali

7.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica. Significato dei dati iniziali.
7.2 Equazioni lineari del primo ordine.
7.3 Equazioni a variabili separabili.
7.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Calcolo della soluzione particolare per certe classi di termini noti.

T E S T I

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{1}{1-\sqrt{x^2-1}}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 \log x$; b) e^{x^3-1}; c) $\dfrac{4^{x-1}}{2^{x-2}}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\log(2x)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\,\sin(1/x)$.

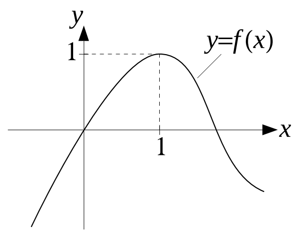
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x^3 + \log(1-x^3)$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle formate da tre lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere), seguite da un numero compreso tra 1 e 40.

6. Trovare $c \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\sin(x-\pi) = \cos(x+c)$.

7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \ge \frac{1}{2x}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \le y \le 1 - e^{-x}$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sqrt{4-x}}{1+\sqrt{x^2-1}}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3 \log x$; b) e^{x^2-1}; c) $\dfrac{9^{x-1}}{3^{x-2}}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{x^2+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2}{\log(2x^2)}$.

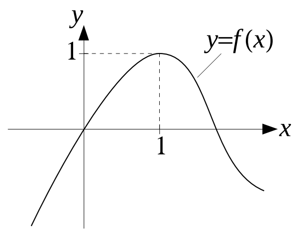
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x^4 - \sin(x^4)$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle formate da due lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere), seguite da un numero compreso tra 1 e 30.

6. Trovare $c \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\cos(x-\pi) = \sin(x+c)$.

7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \ge x^2 - \frac{1}{2}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \le y \le 0$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{1}{-1+\sqrt{1-x^2}}$.

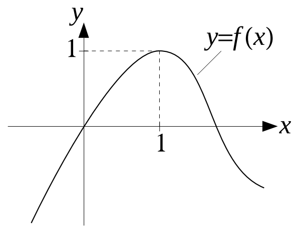
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^4 \log x$; b) e^{x^3+2}; c) $\dfrac{2^{x+2}}{4^{x+1}}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x^2)$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^{-1}+\log x)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin(1/x)$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x^4 + \log(1-x^4)$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle formate da tre lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere), seguite da un numero compreso tra 1 e 30.

6. Trovare $c \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\sin(x + \pi) = \cos(x - c)$.



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \geq -\frac{1}{x}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq e^x - 1$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sqrt{x-4}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

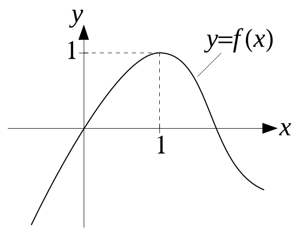
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^{-1} \log x$; b) e^{x^2+2}; c) $\dfrac{3^{x+2}}{9^{x+1}}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + x^2)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^{-1} + \log x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 + x^2}{\log(3x^2)}$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x^3 - \sin(x^3)$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle formate da due lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere), seguite da un numero compreso tra 1 e 40.

6. Trovare $c \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\cos(x + \pi) = \sin(x - c)$.



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \geq e^{-x}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \geq y \geq e^x - 1$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Determinare l'insieme degli $x \in (0, \pi)$ tali che $\tan(x/2) \geq 1$.

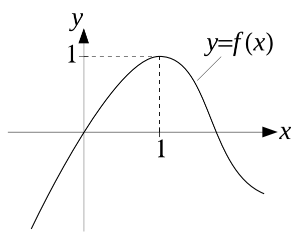
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(1 + 2x^2)$; b) $x^3 e^{-x}$; c) $\log \left[\dfrac{(x+1)^4}{x^3}\right]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 2^x$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1}{x}$.

4. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) := x^3 - 12x + 20$ relativamente all'intervallo $-3 \leq x \leq 0$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle di 8 lettere che si possono scrivere usando 3 volte la lettera A e 5 volte la B.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$-\log x \ll x^2 \ll 3 \ll x^2 + x^{-2} \quad \text{per } x \to 0^+.$$



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq f(x + 1)$.

8. Disegnare il grafico di $|\sin x|$ e risolvere (graficamente) la disequazione $|\sin x| \geq x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Determinare l'insieme degli $x \in (0, \pi)$ tali che $\sin(2x) \leq 1/2$.

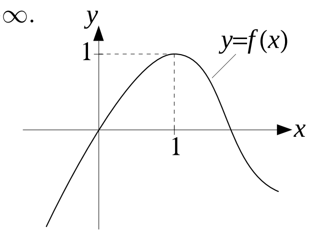
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(1 - 2x^2)$; b) $x^2 e^{-x}$; c) $\log\left[\dfrac{(x+1)^3}{x^4}\right]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 2^x$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$.

4. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) := x^3 - 12x - 20$ relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 3$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle di 7 lettere che si possono scrivere usando 3 volte la lettera A e 4 volte la B.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\frac{x^4}{x^2+1} \ll \log(x+1) \ll \frac{2^x}{3^x} \ll x^3 \quad \text{per } x \to +\infty.$$



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \leq |f(x)|$.

8. Disegnare il grafico di $|\cos x|$ e risolvere (graficamente) la disequazione $|\cos x| \geq x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 7.

1. Determinare l'insieme degli $x \in (0, \pi)$ tali che $\cos(2x) \leq 1/2$.

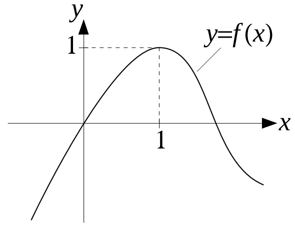
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(1 - x^3)$; b) $x^2 e^{2x}$; c) $\log\left[\dfrac{(x-1)^3}{x^4}\right]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(\pi + e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{1+x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(1/x)$.

4. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) := x^3 - 12x + 10$ relativamente all'intervallo $-3 \leq x \leq 1$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle di 7 lettere che si possono scrivere usando 2 volte la lettera A e 5 volte la B.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$-\log x \ll \frac{1+x}{x^2} \ll x^3 \ll 2 \quad \text{per } x \to 0^+.$$



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\frac{1}{2}f(x) \leq y \leq f(x)$.

8. Disegnare il grafico di $|\arctan x|$ e risolvere (graficamente) la disequazione $|\arctan x| \geq 2 - x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 8.

1. Determinare l'insieme degli $x \in (0, 2\pi)$ tali che $\sin(x/2) \leq 1/2$.

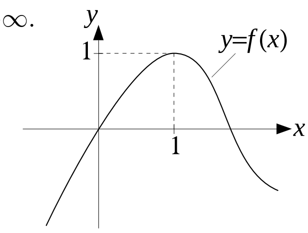
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(1+x^3)$; b) $x^3 e^{2x}$; c) $\log\left[\frac{(x-1)^4}{x^3}\right]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \arctan(1-e^x)$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2^x}$; c) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x^4)}{x^3}$.

4. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) := x^3 - 12x - 10$ relativamente all'intervallo $0 \le x \le 4$.

5. Determinare il numero delle possibili sigle di 8 lettere che si possono scrivere usando 4 volte la lettera A e 4 volte la B.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\log(x+1) \ll \frac{3^x}{2^x} \ll \frac{x^2}{x^5+1} \ll x^2 \quad \text{per } x \to +\infty.$$



7. Sia f la funzione il cui grafico è dato nella figura accanto. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $f(x-1) \le y \le f(x)$.

8. Disegnare il grafico di $|e^x - 1|$ e risolvere (graficamente) la disequazione $|e^x - 1| \le 2 - x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Dire se la disequazione $x^4 - \frac{9}{10} \ge 2\log x$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^4 + a \ge 2\log x$ vale per ogni $x > 0$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\exp(x^2)}\,.$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x)$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x) + ax$.

3. Data la funzione
$$f(x) := x^3(x-2)\,,$$
   per ogni $a > 0$ indichiamo con R_a la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a, e con $g(a)$ l'ascissa del punto di intersezione di R_a con dell'asse delle x (quando esiste).
   a) Calcolare $g(a)$ per ogni $a > 0$.
   b) Determinare l'insieme di tutti $g(a)$ con $a > 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Dire se la disequazione $x^6 - \frac{4}{5} \ge 3\log x$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^6 + a \ge 3\log x$ vale per ogni $x > 0$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\cos x}\,.$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x)$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x) + ax$.

3. Data la funzione
$$f(x) := x^5(x-3)\,,$$

per ogni $a > 0$ indichiamo con R_a la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a, e con $g(a)$ l'ascissa del punto di intersezione di R_a con dell'asse delle x (quando esiste).

a) Calcolare $g(a)$ per ogni $a > 0$.

b) Determinare l'insieme di tutti $g(a)$ con $a > 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) Dire se la disequazione $x^2 - \frac{3}{5} \geq 4 \log x$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^2 + a \geq 4 \log x$ vale per ogni $x > 0$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{\sin(3x)}}{\exp(x^2)} \, .$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x)$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x) + ax$.

3. Data la funzione
$$f(x) := x^5(x-9) \, ,$$
   per ogni $a > 0$ indichiamo con R_a la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a, e con $g(a)$ l'ascissa del punto di intersezione di R_a con dell'asse delle x (quando esiste).

   a) Calcolare $g(a)$ per ogni $a > 0$.

   b) Determinare l'insieme di tutti $g(a)$ con $a > 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) Dire se la disequazione $x^3 - \frac{1}{3} \geq 6 \log x$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^3 + a \geq 6 \log x$ vale per ogni $x > 0$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{\sin(3x)}}{\cos x} \, .$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x)$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x) + ax$.

3. Data la funzione
$$f(x) := x^3(x-6) \, ,$$
   per ogni $a > 0$ indichiamo con R_a la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a, e con $g(a)$ l'ascissa del punto di intersezione di R_a con dell'asse delle x (quando esiste).

   a) Calcolare $g(a)$ per ogni $a > 0$.

   b) Determinare l'insieme di tutti $g(a)$ con $a > 0$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4^x+1}{3^x-1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(2x))^4}{\log(1+2x^4)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(e^{x-2})$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 di $\log(1-2x^2)$.
3. Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt[3]{1-3x}\,dx$.
4. Dire per quali $a>0$ la serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{1-n^a+3n^{2a}}$ risulta essere finita.
5. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{2a}\,e^{-x}\,dx$ risulta essere finito.
6. Cercare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{x}+x=e^t+2$.
7. Trovare la soluzione di $\dot{x}=(1+x^2)e^t$ che soddisfa $x(0)=1$.
8. Disegnare il grafico di $y=\log|x-1|$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x-1}{4^x+1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\log(1+2x))^4}{\sin(2x^4)}$.
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 di $1-\cos(2x)$.
3. Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_0^{1/4} \sqrt[4]{1-4x}\,dx$.
4. Dire per quali $a>0$ la serie a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{2-n^a+2n^{3a}}$ risulta essere finita.
5. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{2a}\,\log x\,dx$ risulta essere finito.
6. Cercare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{x}+2x=e^t+2$.
7. Trovare la soluzione di $\dot{x}=(1+x^2)\sin t$ che soddisfa $x(0)=1$.
8. Disegnare il grafico di $y=|\log(x-1)|$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a\ge 0$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x}-2a\dot{x}+4x=4t \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a=2$.
   b) Trovare la soluzione generale della (*) per a qualunque.
   c) Dire per quali valori di a esiste una soluzione $x(t)$ della (*) tale che $x(t)\gg e^{4t}$ per $t\to+\infty$.
2. Dire per quali $a>0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^a}\,dx$ risulta essere finito.

3. a) Disegnare l'insieme E dei punti (x, y) tali che $9x^2 + y^2 \leq 9$.
   b) Calcolare il volume del solido A ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse delle x.
   c) Calcolare il volume del solido B ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse delle y.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dato $a \geq 0$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 9x = 9t \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 3$.
   b) Trovare la soluzione generale della (*) per a qualunque.
   c) Dire per quali valori di a esiste una soluzione $x(t)$ della (*) tale che $x(t) \gg e^{9t}$ per $t \to +\infty$.

2. Uguale al gruppo 1.

3. a) Disegnare l'insieme E dei punti (x, y) tali che $4x^2 + y^2 \leq 4$.
   b) Calcolare il volume del solido A ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse delle x.
   c) Calcolare il volume del solido B ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse delle y.

Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arcsin(1-x^2)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{2+x^2}$; b) $\tan(x^2)$; c) $\log\big((x+1)^{2x}\big)$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $e^{4x^4} - \cos(2x^2)$.
4. Determinare il numero N delle possibili sigle formate da una cifra (compreso tra 1 e 9) seguita da tre lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere).
5. Calcolare il seguente integrale indefinito: $\displaystyle\int e^{3\sin x+1}\cos x\, dx$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = 2$.
7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n)\log\Big(1 + \frac{1}{n^a}\Big)$ converge ad un valore finito.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $-\arctan x \le y \le \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arcsin(x^2-3)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{1-x^2}$; b) $\tan(x^3)$; c) $\log\big((x+1)^{3x}\big)$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $e^{-x^6} - \cos(2x^3)$.
4. Determinare il numero N delle possibili sigle formate da una cifra (compreso tra 1 e 9) seguita da due lettere dell'alfabeto italiano (di 21 lettere).
5. Calcolare il seguente integrale indefinito: $\displaystyle\int \frac{\sin(1-2\log x)}{x} dx$.
6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2x/t = 0$ che soddisfa $x(1) = 2$.
7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^a + 1)\log\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)$ converge ad un valore finito.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{(x-1)^3} \le y \le \arctan(x-1)$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arccos(2x^2-3)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{2x^2-1}$; b) $\tan(e^x)$; c) $\log\big((x-1)^{3x}\big)$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\log(1+2x^2) - 2\sin(x^2)$.
4. Determinare il numero N delle possibili sigle formate da una cifra (compreso tra 1 e 9) seguita da tre lettere dell'alfabeto italiano (di 21 lettere).

5. Calcolare il seguente integrale indefinito: $\displaystyle\int e^{1-3\cos x}\sin x\,dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+3t^2x=0$ che soddisfa $x(1)=1$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-n^3)\log\Big(1-\frac{1}{n^a}\Big)$ converge ad un valore finito.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^3}\le y\le\arctan x$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arccos\big(x^2-\frac14\big)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sqrt{1+x^2}$; b) $\tan(\log x)$; c) $\log\big((x-1)^{2x}\big)$.

3. Trovare la parte principale per $x\to 0$ di $4\sin(x^2)-\log(1+4x^2)$.

4. Determinare il numero N delle possibili sigle formate da una cifra (compreso tra 1 e 9) seguita da due lettere *diverse* dell'alfabeto italiano (di 21 lettere).

5. Calcolare il seguente integrale indefinito: $\displaystyle\int\frac{\cos(2\log x+2)}{x}dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+3x/t=0$ che soddisfa $x(1)=3$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-n^a)\log\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)$ converge ad un valore finito.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $\displaystyle -\arctan(x-1)\le y\le\frac{1}{(x-1)^2}$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a>0$ consideriamo l'equazione
$$x^3=a(x^2-4)\,. \tag{*}$$
a) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione (*) per $a=5$.
b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione (*) per ogni $a>0$.
c) Per ogni $a>0$ indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni di (*). Determinare il limite e quindi la parte principale di $x(a)$ per $a\to+\infty$.

2. Dato $a\in\mathbb{R}$, sia $x(t)$ la soluzione dell'equazione differenziale
$$\dot{x}=x(x-2)$$
che soddisfa la condizione iniziale $x(0)=a$.
a) Calcolare $x(t)$ per $a=1$ e disegnarne il grafico.
b) Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ l'insieme di definizione della soluzione $x(t)$ è tutto $\mathbb{R}$.

3. Dato $a>0$, consideriamo le funzioni
$$f(x):=\frac{ax^2}{x^3+2}\quad\text{e}\quad g(x):=\sin(2/x)\,,$$
e indichiamo con A l'insieme dei punti (x,y) tali che $x\ge1$ e $f(x)\le y\le g(x)$.
a) Trovare la parti principali di $f(x)$, $g(x)$ e $g(x)-f(x)$ per $x\to+\infty$.

b) Dire per quali a l'insieme A è limitato.

c) Dire per quali a l'insieme A ha area finita.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a > 0$ consideriamo l'equazione
$$2x^3 = a(4 - x^2)\,. \tag{*}$$
a) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione (*) per $a = 11$.
b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione (*) per ogni $a > 0$.
c) Per ogni $a > 0$ indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*). Determinare il limite e quindi la parte principale di $x(a)$ per $a \to +\infty$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, sia $x(t)$ la soluzione dell'equazione differenziale
$$\dot{x} = x(x + 4)$$
che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = a$.
a) Calcolare $x(t)$ per $a = -2$ e disegnarne il grafico.
b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'insieme di definizione della soluzione $x(t)$ è tutto $\mathbb{R}$.

3. Dato $a > 0$, consideriamo le funzioni
$$f(x) := \frac{ax}{x^3 + 1} \quad \text{e} \quad g(x) := \sin(1/x^2)\,,$$
e indichiamo con A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $f(x) \leq y \leq g(x)$.
a) Trovare la parti principali di $f(x)$, $g(x)$ e $g(x) - f(x)$ per $x \to +\infty$.
b) Dire per quali a l'insieme A è limitato.
c) Dire per quali a l'insieme A ha area finita.

Prima parte, gruppo 1.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \geq -1$ per $0 \leq x \leq \pi/2$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1+x^2)^5}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{(x+1)^{2x}}{2^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-\cos(2x^2)}{x^2 \sin(x+x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $\dfrac{x^5}{1+x}$; b) $3^{-x}+x^5$; c) $\dfrac{1}{\cos^6(1/x)}$; d) $\dfrac{x^4}{3+\log x}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{1-2x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + x = 3t$ che soddisfa $x(0) = 1$.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2a}}{n^2+2^n}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^4}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \leq \sqrt{3}$ per $0 \leq x \leq \pi/2$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1-x^3)^4}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{3x}}{3^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-\cos(2x^3)}{x^3 \sin(x-x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $\dfrac{x^6}{1+x^2}$; b) $\dfrac{1}{3^x+x^5}$; c) $\dfrac{1}{\sin^6(1/x)}$; d) $x^4 \log x$.

5. Calcolare $\displaystyle\int x\, e^{1-2x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + x = 3t$ che soddisfa $x(0) = 2$.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+\sin n}{n^a+n^2}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = \left|1 - \dfrac{1}{x^3}\right|$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \geq 1$ per $0 \leq x \leq \pi$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1-x^2)^5}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{2^{2x}}{(x+1)^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-e^{-2x^2}}{x^4 \sin(x+x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $\dfrac{x^5}{1+x^2}$; b) $\dfrac{1}{\cos^4(1/x)}$; c) $3^{-x}+x^2$; d) $\dfrac{x^3}{2+\log x}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{3-2x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+x=2t$ che soddisfa $x(0)=3$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\log n}{n^a+n^2}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{(|x|-1)^4}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \geq -1$ per $-\pi/2 \leq x \leq 0$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1+x^3)^4}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{(x+1)^{2x}}{2^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-\cos(2x^2)}{x^4 \sin(x-x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
   a) $\dfrac{1}{\cos^6(1/x)}$; b) $\dfrac{x^5}{1+x}$; c) $3^{-x}+x^5$; d) $\dfrac{x^4}{3+\log x}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int x\, e^{3-2x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x}+x=2t$ che soddisfa $x(0)=1$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{3a}}{n^3+3^n}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1-\dfrac{1}{(x-1)^3}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \leq \sqrt{3}$ con $-\pi/2 \leq x \leq 0$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1-x^2)^4}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{3x}}{3^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1 - e^{-2x^2}}{x^3 \sin(x + x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
$$\text{a) } \frac{1}{\sin^6(1/x)}; \quad \text{b) } \frac{x^6}{1+x^2}; \quad \text{c) } \frac{1}{3^x + x^5}; \quad \text{d) } x^4 \log x.$$

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{4-x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - x = t$ che soddisfa $x(0) = 2$.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + \sin n}{n^a + n^3}$ converge a un numero finito.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = \left|1 - \dfrac{1}{x^4}\right|$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Risolvere la disequazione $\tan(2x) \geq 1$ per $-\pi \leq x \leq 0$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x}{(1+x^2)^4}$; b) $\sqrt[x]{\dfrac{2^{2x}}{(x+1)^{-x}}}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{e^{-2x^3} - 1}{x \sin(x - x^3)}$.

4. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine per rispetto alla relazione $\ll$ per x che tende a $+\infty$ (per esempio b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a):
$$\text{a) } 3^{-x} + x^2; \quad \text{b) } \frac{x^5}{1+x^2}; \quad \text{c) } \frac{1}{\cos^4(1/x)}; \quad \text{d) } \frac{x^3}{2 + \log x}.$$

5. Calcolare $\displaystyle\int x\, e^{4-x^2}\, dx$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - x = t$ che soddisfa $x(0) = 3$.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + \log n}{n^a + n^3}$ converge a un numero finito.

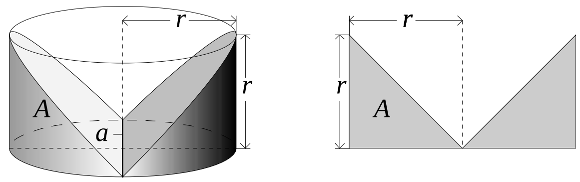
8. Disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{(|x| - 1)^3}$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Dire se la disequazione $2x^2 + 3x - 2 \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la disequazione $2x^2 + 3x - c \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := 1 - \big(\cos(1/x^a)\big)^x$.
   a) Calcolare al variare di a il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste ed è finito.

3. Da un cilindro di raggio di base r e altezza r viene rimosso un pezzo tramite un taglio a "V", ottenendo il solido A descritto da due diverse proiezioni assonometriche nella figura sottostante (quella di destra corrisponde alla proiezione ortogonale lungo la direzione dello spigolo del taglio, vale a dire l'asse a nel disegno di sinistra).



a) Disegnare le sezioni piane di A ortogonali allo spigolo del taglio, vale a dire all'asse a nel figura sopra a sinistra, e calcolarne l'area.

b) Calcolare il volume di A.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Dire se la disequazione $3x^2 + x - 2 \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la disequazione $3x^2 + x - c \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := 1 - (1 - 1/(2x^a))^{\sin x}$.
   a) Calcolare al variare di a il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) Dire se la disequazione $2x^2 - 3x + 1 \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la disequazione $2x^2 - 3x + c \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := 1 - \big(\cos(2/x^a)\big)^{x^2}$.
   a) Calcolare al variare di a il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) Dire se la disequazione $3x^2 - x - 1 \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $c \in \mathbb{R}$ la disequazione $3x^2 - x - c \geq \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione $f(x) := 1 - (1 - 1/x^a)^{x \sin x}$.
   a) Calcolare al variare di a il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

3. Uguale al gruppo 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare un numero reale a per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x-\pi) = \sin(x+a)$.

2. Trovare il *valore minimo* della funzione $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$ per $-1 \le x \le 3$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x\cos x}$.

4. L'allenatore di una squadra giovanile di calcio a 5 ha a disposizione 8 giocatori che possono ricoprire tutti i ruoli incluso quello di portiere. Quante diverse formazioni può schierare?

5. Calcolare $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1+x^{2a}}{e^x}\,dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = \sqrt{t}e^{3x}$ che soddisfa $x(1) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \ge -\dfrac{1}{x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare un numero reale a per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x+a) = \sin(x-\pi)$.

2. Trovare il *valore minimo* della funzione $f(x) := \dfrac{-1}{x^2 - 4x + 6}$ per $-1 \le x \le 1$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+4x^2) - 2x^2}{x\cos x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\log x)^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{x-1}$.

4. L'allenatore di una squadra giovanile di calcio a 5 ha a disposizione 1 portiere e 7 giocatori che possono ricoprire tutti gli altri i ruoli. Quante diverse formazioni può schierare?

5. Calcolare $\displaystyle\int_3^4 \frac{3}{(x-1)(x+2)}\,dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x \sin x}{x^{2a}}\,dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = \dfrac{e^{2x}}{1+t^2}$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\log(x+1) \le y \le \dfrac{1}{x} + 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare un numero reale a per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x-\pi/2) = \sin(x+a)$.

2. Trovare il *valore minimo* della funzione $f(x) := \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$ per $-3 \le x \le 1$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{-\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos x}{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{4x} - e^{2x}}$.

4. L'allenatore di una squadra giovanile di calcio a 7 ha a disposizione 9 giocatori che possono ricoprire tutti i ruoli incluso quello di portiere. Quante diverse formazioni può schierare?

5. Calcolare $\displaystyle\int_3^6 \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,dx$.

6. Dire per quali $a>0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{\cos(2x)}{x^{3a}}dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{t}}$ che soddisfa $x(1)=0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $e^{-x} \le y \le -\dfrac{1}{x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare un numero reale a per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x+a) = \sin(x-\pi/2)$.

2. Trovare il *valore minimo* della funzione $f(x) := \dfrac{-1}{x^2+4x+6}$ per $-1 \le x \le 1$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\log(1+5x^2)-2x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x-1}{(x-1)^2}$.

4. L'allenatore di una squadra giovanile di calcio a 7 ha a disposizione 1 portiere e 8 giocatori che possono ricoprire tutti gli altri i ruoli. Quante diverse formazioni può schierare?

5. Calcolare $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{(x-1)(x+2)}\,dx$.

6. Dire per quali $a>0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a-1}{x^{2a}+1}dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^{3x}}{1+t^2}$ che soddisfa $x(0)=0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\log(x+1) \ge \dfrac{1}{x}+1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dato $a>0$ si consideri la funzione
$$f(x) = 2\exp(-ax^2)\,.$$
a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.
b) Calcolare la distanza dall'origine del punto del grafico di f di ascissa x e trovare il valore di x per cui questa distanza è minima.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2a+8)x = e^{-4t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a=4$.
b) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) che quando t tende a $+\infty$ si scrive come $x(t) = ce^t + o(e^t)$ con $c \neq 0$.
c) Scrivere le soluzioni che soddisfano quanto richiesto al punto precedente.

3. Per ogni $x \geq 0$ sia $f(x) := \exp(x^2) - \exp(x^{1/2})$. Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a > 0$ si consideri la funzione
$$f(x) = -3\exp(-ax^2)\,.$$
   a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.
   b) Calcolare la distanza dall'origine del punto del grafico di f di ascissa x e trovare il valore di x per cui questa distanza è minima.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (4a+3)x = e^{-3t}\,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 3/2$.
   b) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) che quando t tende a $+\infty$ si scrive come $x(t) = ce^{t/2} + o(e^{t/2})$ con $c \neq 0$.
   c) Scrivere le soluzioni che soddisfano quanto richiesto al punto precedente.

3. Per ogni $x \geq 0$ sia $f(x) := \exp(x^{1/2}) - \exp(x^3)$. Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a > 0$ si consideri la funzione
$$f(x) = -2\exp(-ax^2)\,.$$
   a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.
   b) Calcolare la distanza dall'origine del punto del grafico di f di ascissa x e trovare il valore di x per cui questa distanza è minima.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2a+8)x = e^{-4t}\,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 4$.
   b) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) che quando t tende a $+\infty$ si scrive come $x(t) = ce^{t} + o(e^{t})$ con $c \neq 0$.
   c) Scrivere le soluzioni che soddisfano quanto richiesto al punto precedente.

3. Per ogni $x \geq 0$ sia $f(x) := \exp(x^{1/3}) - \exp(x^2)$. Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Dato $a > 0$ si consideri la funzione
$$f(x) = 3\exp(-ax^2)\,.$$
   a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.
   b) Calcolare la distanza dall'origine del punto del grafico di f di ascissa x e trovare il valore di x per cui questa distanza è minima.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (4a+3)x = e^{-3t} \,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 3/2$.

b) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) che quando t tende a $+\infty$ si scrive come $x(t) = ce^{t/2} + o(e^{t/2})$ con $c \neq 0$.

c) Scrivere le soluzioni che soddisfano quanto richiesto al punto precedente.

3. Per ogni $x \geq 0$ sia $f(x) := \exp(x^3) - \exp(x^{1/3})$. Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale la seguente identità: $\sin(x + \pi/3) = \cos(x - \alpha)$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^3)}{\log(2+x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\log(1+x^3)}{x^3 - \sin(x^3)}$.
3. Trovare il *punto di massimo* della funzione xe^{-x} relativamente all'intervallo $2 \le x \le 4$.
4. Quante sono i numeri di 4 cifre che iniziano con una cifra dispari?
5. Calcolare l'area dell'insieme del piano delimitato dai grafici delle funzioni $x^2 - 1$ e $x + 1$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt[3]{1 + n^{-2a}} - 1\Big)$ converge.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^{2t}x^2$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} - 1 \le -1/x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale la seguente identità: $\sin(x - \pi/6) = \cos(x - \alpha)$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \exp(x^4)}{x^2\log(1+2x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+4x^4)}{\log(1+x^2)}$.
3. Trovare il *punto di minimo* della funzione xe^{-x} relativamente all'intervallo $2 \le x \le 4$.
4. Quante sono i numeri di 3 cifre distinte che iniziano con una cifra dispari?
5. Calcolare l'area dell'insieme del piano delimitato dai grafici delle funzioni $1 - 2x^2$ e $2x - 3$
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt[2]{1 + n^{-2a}} - 1\Big)$ converge.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^{2t}x^2$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -1$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \ge y \ge 1/x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale la seguente identità: $\sin(x - \pi/3) = \cos(x - \alpha)$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\log(1-2x^2)}{1 - \exp(x^4)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2+x^2)}{\log(1+x^3)}$.
3. Trovare il *punto di massimo* della funzione xe^{-x} relativamente all'intervallo $0 \le x \le 2$.
4. Quante sono i numeri di 4 cifre distinte che iniziano con una cifra dispari?
5. Calcolare l'area dell'insieme del piano delimitato dai grafici delle funzioni $x^2 + 1$ e $x + 3$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt[3]{1 + n^{-3a}} - 1\Big)$ converge.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^{-t}x^2$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 2$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq -1/x$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Trovare un angolo $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale la seguente identità: $\sin(x + \pi/6) = \cos(x - \alpha)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1 + 4x^2)}{\log(1 + x^4)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - \sin(x^3)}{x^2 \log(1 - x^4)}$.

3. Trovare il *punto di minimo* della funzione xe^{-x} relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 2$.

4. Quante sono i numeri di 3 cifre che iniziano con una cifra dispari?

5. Calcolare l'area dell'insieme del piano delimitato dai grafici delle funzioni $3 - 2x^2$ e $2x - 1$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sqrt[2]{1 + n^{-3a}} - 1\Big)$ converge.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^{-t}x^2$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -2$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} - 1 \geq 1/x^2$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} (e^x - e)^{1+2a}\,dx$.

2. Usando un trapano con una punta di diametro 5 millimetri, faccio un foro perfettamente centrato che passa da parte a parte una sfera piena di diametro 13 millimetri. Calcolare il volume dell'oggetto così ottenuto.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente, e dato p punto del grafico di f, indichiamo con T_p il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per p, e la retta normale al grafico di f in p (vale a dire la retta passante per p e ortogonale alla retta tangente).
   a) Disegnare T_p e calcolarne l'area (in funzione dell'ascissa di p).
   b) Determinare le funzioni f per cui l'area di T_p è la stessa per tutti i punti p del grafico di f.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} (e^x - e)^{1+3a}\,dx$.

2. Usando un trapano con una punta di diametro 8 millimetri, faccio un foro perfettamente centrato che passa da parte a parte una sfera piena di diametro 17 millimetri. Calcolare il volume dell'oggetto così ottenuto.

3. Uguale al gruppo 1.

Prima parte, gruppo 1.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 e^{-2x}$; b) $\log\left[\dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^3}\right]$.

2. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$
   a) $\dfrac{1+3^x}{1+2^x}$; b) $x^3 3^{-x}$; c) $\dfrac{2^x}{\log x}$; d) $2^x + x^2$.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{1+e^{-2x}}$.

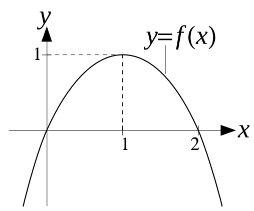
4. Sapendo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-2(x-1)^2\big)\,dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$ è improprio e semplice.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - x = -1$ tale che $x(0) = 0$.

7. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$.

8. Disegnare il grafico di $|f(2x)|$ dove f è la funzione in figura.



Prima parte, gruppo 2.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left[\dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^3}\right]$; b) $x^2 e^{-3x}$.

2. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$
   a) $\dfrac{1+2^{3x}}{2+2^x}$; b) $x^4 4^{-x}$; c) $3^x \log x$; d) $3^x - x^3$.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{\cos(x^2)}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}$.

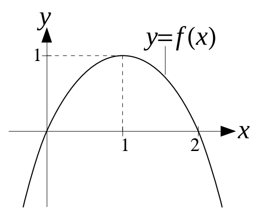
4. Sapendo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-3(x+1)^2\big)\,dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$ è improprio e semplice.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + x = -1$ tale che $x(0) = 0$.

7. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n}$.

8. Disegnare il grafico di $\frac{1}{2} f(x+1)$ dove f è la funzione in figura.



Prima parte, gruppo 3.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3 e^{-2x}$; b) $\log\left[\dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^2}\right]$.

2. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$
   a) $\dfrac{1+2^x}{1+2^{3x}}$; b) $x^{-4}4^x$; c) $3^{-x}\log x$; d) 3^{-x}.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}{1+e^{-3x}}$.

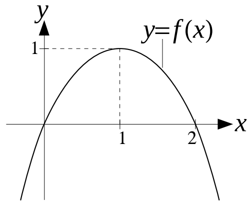
4. Sapendo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-3(x-1)^2\big)\,dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$ è improprio e semplice.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - x = 1$ tale che $x(0) = 0$.

7. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}$.

8. Disegnare il grafico di $|f(x)| - 1$ dove f è la funzione in figura.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left[\dfrac{(1-x)^3}{(1+x)^2}\right]$; b) x^3e^{-3x}.

2. Mettere le funzioni che seguono nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$
   a) $\dfrac{1+3^x}{2+4^x}$; b) $x^{-3}3^x$; c) $2^{-x}\log x$; d) 2^{-x}.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{\cos(x^3)}{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1+x^2}}$.

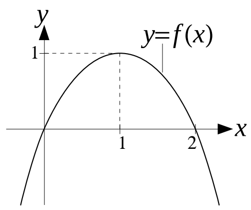
4. Sapendo che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-2(x+1)^2\big)\,dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_a^4 \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx$ è improprio e semplice.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + x = 1$ tale che $x(0) = 0$.

7. Calcolare $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

8. Disegnare il grafico di $|f(x) - 1|$ dove f è la funzione in figura.



SECONDA PARTE.

1. Dato $a > 0$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + x = 1 + \sin(at)\,. \qquad (*)$$
   a) Per ogni $a > 1$ trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.
   b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 1$.

2. Studiare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+\log n}{n^2\log^a n}$.

3. a) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^5 - ax^3 + 9x$ è crescente, e per tali a tracciarne approssimativamente il grafico.

   b) Per ogni a per cui f è iniettiva determinare le parti principali della funzione inversa $f^{-1}(y)$ per $y \to 0$ e per $y \to +\infty$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{\log x}{x} = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\log(1+5x^2) - 3x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{-\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2^x - 1}{(x-1)^2}$.
3. Quante sono le possibili targhe automobilistiche formate da 2 lettere (dell'alfabeto italiano), 3 cifre (comprese tra 1 e 9), e poi di nuovo 2 lettere, con il vincolo che le prime 2 lettere siano vocali e le ultime 2 siano consonanti.
4. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-ax}\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a - \sin(n^a)}{2^n + n^{2a}}$ converge.
6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a \log t$ risolve l'equazione differenziale $t\dot{x} + 2x = t^a$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 2|\sin x| - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{\log x}{x^2} = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{3x} - e^{4x}}$.
3. Quante sono le possibili targhe automobilistiche formate da 2 lettere (dell'alfabeto italiano), 3 cifre (comprese tra 1 e 9), e poi di nuovo 2 lettere, con il vincolo che le 4 lettere siano tutte diverse.
4. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int x e^{-ax}\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a - \log(n^a)}{2^{-n} + n^{2a}}$ converge.
6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a \log t$ risolve l'equazione differenziale $t\dot{x} + 3x = t^a$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$.
8. Disegnare il grafico della funzione $y = 2|\cos x - 1|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $e^x \log x = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^2) - x^2}{x \sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2\log x)^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(e^x)$.
3. Quante sono le possibili targhe automobilistiche formate da 2 lettere (dell'alfabeto italiano), 3 cifre (comprese tra 1 e 9), e poi di nuovo 2 lettere, con il vincolo che le prime 2 lettere e le 3 cifre siano tutte diverse.

4. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{ax}\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a - \cos(n^a)}{\log n + n^{3a}}$ converge.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a \log t$ risolve l'equazione differenziale $t\dot{x} - x = t^a$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = 1 - \sin|x|$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\displaystyle\frac{\log(1+x)}{\log x} = o(x^a)$ per $x \to 0^+$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{2\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - e^{4x}}{x\cos x}$.

3. Quante sono le possibili targhe automobilistiche formate da 2 lettere (dell'alfabeto italiano), 3 cifre (comprese tra 1 e 9), e poi di nuovo 2 lettere, con il vincolo che le 3 cifre e le ultime 2 lettere siano tutte diverse.

4. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a + 2^n}{\log n + n^{3a}}$ converge.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := t^a \log t$ risolve l'equazione differenziale $t\dot{x} - 2x = t^a$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = \sin|x - \pi|$.

Seconda parte.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione
$$f(x) := x^3 - 3x^2 + 2x + a\,.$$
a) Che equazione deve soddisfare x affinché la retta tangente la grafico di f nel punto di ascissa x passi per l'origine?

   b) Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ quante sono le rette tangenti al grafico di f che passano per l'origine.

2. Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che
$$|x|^{2a} \le y \le (1 + x^2)^a\,.$$
a) Disegnare approssimativamente l'insieme A per $a = 1/2$.

   b) Dire per quali a l'area di A è finita.

3. Tra tutti i coni (retti e a base circolare) iscritti nella sfera di raggio R trovare quello di volume massimo.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) x^3e^{-x}; b) $\log\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right)$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[5]{x}}{\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x}{1-x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x^2)}{2x^2}$.
3. Determinare il numero delle possibili sigle di 8 lettere che si possono scrivere usando 3 volte la lettera A e 5 volte la B.
4. Trovare il *punto di minimo* della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $-1\le x\le 0$.
5. Per ogni $a>0$ calcolare $\displaystyle\int(\sin x+1)^a\cos x\,dx$.
6. Dire per quali $a>0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x^a+x^{3a}}{2^x}dx$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=10$.
8. Disegnare il grafico di $f(x):=\dfrac{1}{(x-1)^2}-1$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x)\le -x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)$; b) xe^{-2x}.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{\tan(3x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^6 2^x$.
3. Determinare il numero delle possibili sigle di 7 lettere che si possono scrivere usando 3 volte la lettera A e 4 volte la B.
4. Trovare il *punto di massimo* della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $-1\le x\le 0$.
5. Per ogni $a>0$ calcolare $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{(\log x-1)^a}{x}\,dx$.
6. Dire per quali $a>0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(2x)}{x^{3a}}dx$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x}-4\dot{x}+5x=-5$.
8. Disegnare il grafico di $f(x):=\dfrac{1}{(x+1)^3}-1$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x)\ge x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$; b) x^3e^{2x}.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\log\log x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^3}{\tan(2x^3)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^x}$.
3. Determinare il numero delle possibili sigle di 7 lettere che si possono scrivere usando 2 volte la lettera A e 5 volte la B.

4. Trovare il *punto di massimo* della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $0 \le x \le 1$.

5. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + 1)^a \cos x \, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{\cos(2x)}{x^{2a}} dx$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = -10$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{(x-1)^3} + 1$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \le x$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 e^{-x}$; b) $\log\Big(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\Big)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(1+e^x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x^3)}{2x^2}$.

3. Determinare il numero delle possibili sigle di 8 lettere che si possono scrivere usando 4 volte la lettera A e 4 volte la B.

4. Trovare il *punto di minimo* della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $0 \le x \le 1$.

5. Per ogni $a > 0$ calcolare $\displaystyle\int \frac{(\log x - 1)^a}{x} \, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a - 1}{x^{2a} + 2} dx$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 5$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) := -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \ge -x$.

Seconda parte.

1. a) Risolvere l'equazione differenziale $t\dot{x} + 3x = e^{-t^3}$ (per $t > 0$).
   b) Tra tutte le soluzioni trovare quelle che hanno limite finito per $t \to 0^+$ (ammesso che ce ne siano).

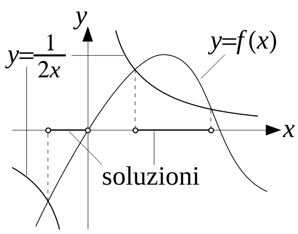
2. Dato $a > 0$, si consideri la funzione $f_a(x) := (x^2 + 2)^a$.
   a) Determinare la parte principale $g_a(x)$ di $f_a(x)$ per $x \to +\infty$ e dire per quali a la funzione f_a è convessa.
   b) Disegnare il grafico di f_a al variare di $a > 0$.
   c) Detto A_a l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \ge 0$ e $g_a(x) \le y \le f_a(x)$, dire per quali a l'area di A_a è finita.

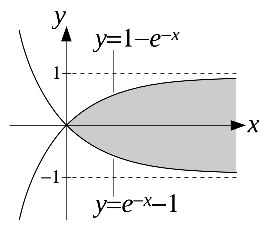
3. a) Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 (in 0) della funzione $\tan x$.
   b) Per ogni $a > 0$ trovare la parte principale di $f(x) := \tan(x^a) - \tan(\log(1 + x^2))$ per $x \to 0$.

SOLUZIONI

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

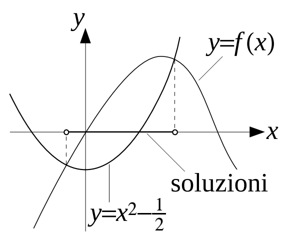
1. L'insieme di definizione è $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.
2. a) $x(1 + 2\log x)$; b) $3x^2 e^{x^3-1}$; c) $\left[\dfrac{4^{x-1}}{2^{x-2}}\right]' = (2^x)' = \log 2 \cdot 2^x$.
3. a) 0; b) 0; c) 2.
4. La parte principale è $-x^6/2$.
5. $N = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 40 = 319.200$.
6. $\pi/2$.
7. La soluzione è indicata nella figura sotto a sinistra.
8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a destra.

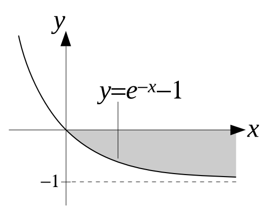




PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. L'insieme di definizione è $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$.
2. a) $x^2(1 + 3\log x)$; b) $2x\, e^{x^2-1}$; c) $\left[\dfrac{9^{x-1}}{3^{x-2}}\right]' = (3^x)' = \log 3 \cdot 3^x$.
3. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 0.
4. La parte principale è $x^{12}/6$.
5. $N = 21 \cdot 20 \cdot 30 = 12.600$.
6. $-\pi/2$.
7. La soluzione è indicata nella figura sotto a sinistra.
8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. L'insieme di definizione è $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

2. a) $x^3(1+4\log x)$; b) $3x^2\, e^{x^3+2}$; c) $\left[\dfrac{2^{x+2}}{4^{x+1}}\right]' = (2^{-x})' = -\log 2 \cdot 2^{-x}$.

3. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$.

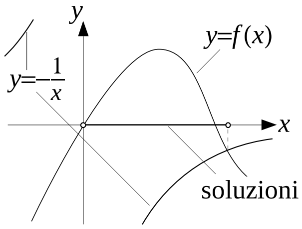
4. La parte principale è $-x^8/2$.

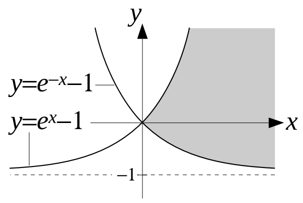
5. $N = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 30 = 239.400$.

6. $-\pi/2$.

7. La soluzione è indicata nella figura sotto a sinistra.

8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. L'insieme di definizione è vuoto.

2. a) $x^{-2}(1-\log x)$; b) $2x\, e^{x^2+2}$; c) $\left[\dfrac{3^{x+2}}{9^{x+1}}\right]' = (3^{-x})' = -\log 3 \cdot 3^{-x}$.

3. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) 0.

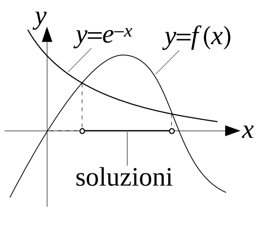
4. La parte principale è $x^9/6$.

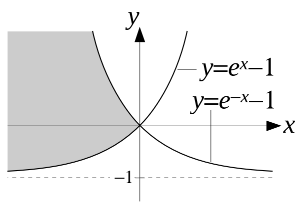
5. $N = 21 \cdot 20 \cdot 40 = 16.800$.

6. $\pi/2$.

7. La soluzione è indicata nella figura sotto a sinistra.

8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$.

2. a) $4x\,\cos(1+2x^2)$; b) $(3x^2-x^3)e^{-x}$;
c) $\left[\log\left(\dfrac{(x+1)^4}{x^3}\right)\right]' = \big(4\log(x+1) - 3\log x\big)' = \dfrac{4}{x+1} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{x-3}{x(x+1)}$.

3. a) $\pi/2$; b) $+\infty$; c) -2.

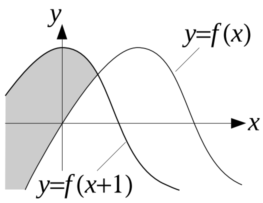
4. I punti di massimo e di minimo assoluto cercati sono rispettivamente $x = -2$ e $x = 0$.

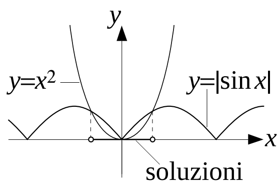
5. $N = \binom{8}{3} = 56$.

6. $x^2 \ll 3 \ll -\log x \ll x^2 + x^{-2}$ per $x \to 0^+$.

7. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a sinistra.

8. La soluzione è indicata nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. $\left(0, \frac{1}{12}\pi\right] \cup \left[\frac{5}{12}\pi, \pi\right)$.

2. a) $4x\,\sin(1-2x^2)$; b) $(2x - x^2)e^{-x}$;
 c) $\left[\log\left(\frac{(x+1)^3}{x^4}\right)\right]' = \big(3\log(x+1) - 4\log x\big)' = \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x} = -\frac{x+4}{x(x+1)}$.

3. a) 1; b) 0; c) $-1/2$.

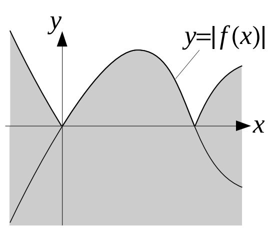
4. I punti di massimo e di minimo assoluto cercati sono rispettivamente $x = 0$ e $x = 2$.

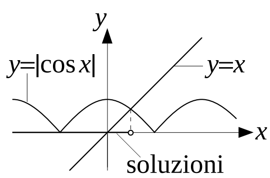
5. $N = \binom{7}{3} = 35$.

6. $\frac{2^x}{3^x} \ll \log(x+1) \ll \frac{x^4}{x^2+1} \ll x^3$ per $x \to +\infty$.

7. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a sinistra.

8. La soluzione è indicata nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 7.

1. $\left[\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right]$.

2. a) $3x^2\,\sin(1-x^3)$; b) $(2x + 2x^2)e^{2x}$;
 c) $\left[\log\left(\frac{(x-1)^3}{x^4}\right)\right]' = \big(3\log(x-1) - 4\log x\big)' = \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} = \frac{4-x}{x(x-1)}$.

3. a) -1; b) 0; c) 1.

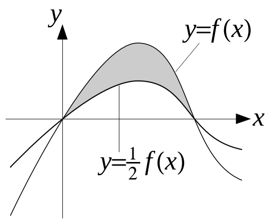
4. I punti di massimo e di minimo assoluto cercati sono rispettivamente $x = -2$ e $x = 1$.

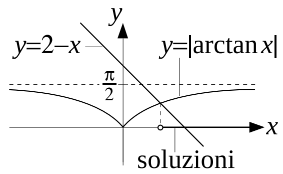
5. $N = \binom{7}{2} = 21$.

6. $x^3 \ll 2 \ll -\log x \ll \dfrac{1+x}{x^2}$ per $x \to 0^+$.

7. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a sinistra.

8. La soluzione è indicata nella figura sotto a destra.





PRIMA PARTE, GRUPPO 8.

1. $\left(0, \frac{1}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right)$.

2. a) $3x^2 \cos(1 + x^3)$; b) $(3x^2 + 2x^3)e^{2x}$;
c) $\left[\log\left(\dfrac{(x-1)^4}{x^3}\right)\right]' = \big(4\log(x-1) - 3\log x\big)' = \dfrac{4}{x-1} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{x+3}{x(x-1)}$.

3. a) $-\pi/2$; b) 0; c) 0.

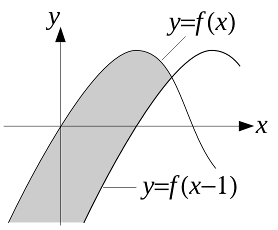
4. I punti di massimo e di minimo assoluto cercati sono rispettivamente $x = 4$ e $x = 2$.

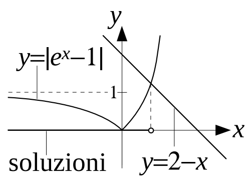
5. $N = \binom{8}{4} = 70$.

6. $\dfrac{x^2}{x^5+1} \ll \log(x+1) \ll x^2 \ll \dfrac{3^x}{2^x}$ per $x \to +\infty$.

7. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura sotto a sinistra.

8. La soluzione è indicata nella figura sotto a destra.





SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Risolviamo direttamente il punto b), da cui poi segue la risposta al punto a).
b) Riscrivendo la disequazione come $a \geq 2\log x - x^4$ otteniamo che è soddisfatta per ogni $x > 0$ se e solo se $a \geq m$ dove m è il valore massimo (o meglio dell'estremo superiore dei valori)

relativamente all'insieme $(0, +\infty)$ della funzione

$$f(x) := 2\log x - x^4$$

L'insieme $(0, +\infty)$ coincide con l'insieme di definizione della funzione f, e studiando il segno della derivata di quest'ultima, vale a dire

$$f'(x) = \frac{2}{x}(1 - 2x^4)\,,$$

si ottiene che $f(x)$ cresce per $x \le 2^{-1/4}$ e decresce altrimenti. Da questo segue che $2^{-1/4}$ è il punto di massimo assoluto di f, e dunque il valore massimo di f è

$$m := f(2^{-1/4}) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1) \simeq -0{,}846\,.$$

a) La disuguaglianza in questione coincide con quella studiata al punto b) per $a = -9/10$, e siccome $-9/10 < m \simeq -0{,}846$, per quanto visto al punto b) la disuguaglianza non vale per ogni $x > 0$.

2. a) Usando lo sviluppo di Taylor $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ otteniamo che

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 + O(x^4) \sim 2x^2 \quad \text{per } x \to 0,$$

e tenendo conto del fatto che $\exp(x^2) \sim 1$ abbiamo che

$$f(x) := \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\exp(x^2)} \sim \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x \quad \text{per } x \to 0^+,$$

ovvero la parte principale di $f(x)$ è $\sqrt{2}x$.

b) Per quanto visto al punto precedente, per $a \ne -\sqrt{2}$ si ha che

$$f(x) + ax = \sqrt{2}x + o(x) + ax \sim (\sqrt{2} + a)x$$

e dunque $(\sqrt{2} + a)x$ è la parte principale cercata.

Per $a = -\sqrt{2}$ la risposta è più complicata, e richiede uno sviluppo piú preciso dei vari elementi che compongono la funzione $f(x)$. Usando gli sviluppi

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + O(t^6) \quad \text{e} \quad \sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} + O(t^2)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\cos(2x)} &= \sqrt{2x^2 - \frac{2x^4}{3} + O(x^6)} \\ &= \sqrt{2x^2}\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{3} + O(x^4)} = \sqrt{2}\,x\Big[1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\Big]\,,\end{aligned}$$

mentre dallo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ otteniamo

$$\exp(x^2) = 1 + x^2 + O(x^4)\,.$$

Mettendo insieme le ultime due formule (e usando ancora una volta il fatto che $\exp(x^2) \sim 1$) otteniamo infine

$$\begin{aligned}f(x) - \sqrt{2}x &= \frac{\sqrt{1-\cos(2x)} - \sqrt{2}x\,\exp(x^2)}{\exp(x^2)} \\ &= \frac{\sqrt{2}\,x\big[1 - x^2/6 + O(x^4)\big] - \sqrt{2}x\big[1 + x^2 + O(x^4)\big]}{\exp(x^2)} \\ &= \frac{-\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3 + O(x^5)}{\exp(x^2)} \sim -\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3\,.\end{aligned}$$

3. a) L'equazione della retta R_a è

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = a^2(4a-6)(x-a) + a^3(a-2)$$

e per definizione $g(a)$ è il valore di x che risolve l'equazione $y = 0$, vale a dire

$$g(a) = \frac{a(3a-4)}{2(2a-3)}$$

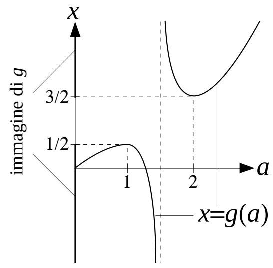
per ogni $a \neq 3/2$ (per $a = 3/2$ la retta R_a è orizzontale e non interseca l'asse delle x).

b) Viene chiesto di determinare l'immagine della funzione $g(a)$ definita per $a > 0$ e $a \neq 3/2$. Osserviamo che

$$\lim_{a\to 0^+} g(a) = 0\,, \qquad \lim_{a\to(3/2)^\pm} g(a) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{a\to+\infty} g(a) = +\infty\,.$$

Inoltre studiando il segno della derivata

$$g'(a) = \frac{3a^2 - 9a + 6}{(2a-3)^2} = \frac{3(a-1)(a-2)}{(2a-3)^2}$$



si ottiene che g cresce negli intervalli $(0,1]$ e $[2,+\infty)$ e decresce in $[1,3/2)$ e in $(3/2,2]$. In particolare 1 è un punto di massimo locale (con valore $g(1) = 1/2$) mentre 2 è un punto di minimo locale (con valore $g(2) = 2$). Sulla base di queste informazioni tracciamo il disegno nella figura accanto, da cui risulta chiaro che l'immagine di g è data dall'unione delle semirette $(-\infty,1/2]$ e $[2,+\infty)$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Come per il gruppo 1, la disequazione al punto b) è verificata per ogni $x > 0$ se e solo se $a \geq m$ dove m è il valore massimo della funzione $f(x) := 3\log x - x^6$. Si verifica quindi che f ha un punto di massimo assoluto in $x = 2^{-1/6}$, e pertanto

$$m := f(2^{-1/6}) = -\frac{1}{2}(\log 2 + 1) \simeq -0{,}846\,.$$

   La disequazione al punto a) coincide con quella considerata al punto b) per $a = -4/5$ e quindi vale per ogni $x > 0$ perché $-4/5 = -0{,}8 > m$.

2. Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ è $\sqrt{2}x$, e quindi che la parte principale di $f(x) + ax$ è $(\sqrt{2} + a)x$ per $a \neq -\sqrt{2}$, ed $\frac{\sqrt{2}}{3}x^3$ per $a = -\sqrt{2}$.

3. Procedendo come per il gruppo 1 si dimostra che

$$g(a) = \frac{(5a-12)a}{3(2a-5)}\,,$$

   e si verifica che l'immagine della funzione g è l'unione delle semirette $(-\infty,4/3]$ e $[3,+\infty)$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Come per il gruppo 1, la disequazione al punto b) è verificata per ogni $x > 0$ se e solo se $a \geq m$ dove m è il valore massimo della funzione $f(x) := 4\log x - x^2$. Si verifica quindi che f ha un punto di massimo assoluto in $x = 2^{1/2}$, e pertanto

$$m := f(2^{1/2}) = 2(\log 2 - 1) \simeq -0{,}614\,.$$

   La disequazione al punto a) coincide con quella considerata al punto b) per $a = -3/5$ e quindi vale per ogni $x > 0$ perché $-3/5 = -0{,}6 > m$.

2. Usando il fatto che $\sin(3x) \sim 3x$ e che il denominatore nella formula che definisce f tende a 1 si ottiene che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ è $\sqrt[3]{3x} = 3^{1/3}x^{1/3}$. Poiché inoltre $x \ll x^{1/3}$ per $x \to 0$, la parte principale di $f(x) + ax$ è $3^{1/3}x^{1/3}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

3. Procedendo come per il gruppo 1 si dimostra che

$$g(a) = \frac{(5a-36)a}{3(2a-15)}\,,$$

   e si verifica che l'immagine della funzione g è l'unione delle semirette $(-\infty,4]$ e $[9,+\infty)$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Come per il gruppo 1, la disequazione al punto b) è verificata per ogni $x > 0$ se e solo se $a \geq m$ dove m è il valore massimo della funzione $f(x) := 6 \log x - x^3$. Si verifica quindi che f ha un punto di massimo assoluto in $x = 2^{1/3}$, e pertanto
$$m := f(2^{1/3}) = 2(\log 2 - 1) \simeq -0{,}614\,.$$
La disequazione al punto a) coincide con quella considerata al punto b) per $a = -1/3$ e quindi vale per ogni $x > 0$ perché $-1/3 = -0{,}333 > m$.

2. Usando il fatto che $\sin(3x) \sim 3x$ e che il denominatore nella formula che definisce f tende a 1 si ottiene che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ è $\sqrt[3]{3x} = 3^{1/3}x^{1/3}$. Poiché inoltre $x \ll x^{1/3}$ per $x \to 0$, la parte principale di $f(x) + ax$ è $3^{1/3}x^{1/3}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

3. Procedendo come per il gruppo 1 si dimostra che
$$g(a) = \frac{3(a-4)a}{2(2a-9)}\,,$$
e si verifica che l'immagine della funzione g è l'unione delle semirette $(-\infty, 3/2]$ e $[6, +\infty)$.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno cercato di dimostrare la disequazione affidandosi ai disegni dei grafici delle funzioni coinvolte. Questo non è corretto perché i grafici sono molto vicini, e non è possibile capire da un disegno fatto a mano se si toccano o meno.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno cercato di dimostrare la disequazione assegnata confrontando il comportamento delle funzioni coinvolte all'infinito. Questo non è corretto, perché permette solo di dimostrare che la disequazione vale per ogni x da un certo punto in poi, mentre la domanda era se la disequazione vale per ogni x positivo.

- Seconda parte, esercizio 3a). Molti dei presenti hanno utilizzato la variabile x sia per indicare il punto il punto del grafico di cui si considera la retta tangente, sia per indicare la variabile indipendente nell'equazione della retta tangente stessa, cosa che ha creato molta confusione, e ovviamente ha portato a soluzioni non corrette. (Per questa ragione nelle soluzioni scritte sopra si è usata la variabile a per l'ascissa del punto di tangenza e la variabile x per l'equazione della retta tangente).

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) $+\infty$; b) 8; c) 1.

2. $-2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$.

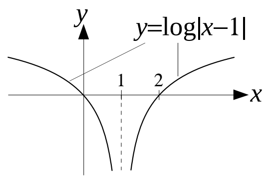
3. Ponendo $t = 1 - 3x$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt[3]{1-3x}\, dx = \int_0^1 \frac{t^{1/3}}{3}\, dt = \left| \frac{t^{4/3}}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}$.

4. Il termine generale della serie è asintoticamente equivalente a $1/n^{2a-3}$ (a meno di un fattore $1/3$) e pertanto la serie è finita se e solo se $a > 2$.

5. Siccome $x^{2a}e^{-x} \ll e^{-x/2}$ l'integrale esiste ed è finito per tutti i valori di a.

6. $x(t) = \dfrac{e^t}{2} + 2$.

7. Equazione a variabili separabili: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int e^t\, dt$ e quindi $\arctan x = e^t + c$; imponendo la condizione $x(0) = 1$ si ottiene $c = -1 + \pi/4$ e infine
$$x(t) = \tan\Big(e^t - 1 + \frac{\pi}{4}\Big)\,.$$

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) $-\infty$; b) -1; c) 8.

2. $2x^2 - \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$.

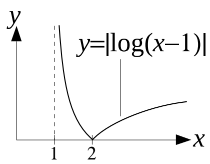
3. Ponendo $t = 1 - 4x$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{1/4} \sqrt[4]{1-4x}\, dx = \int_0^1 \frac{t^{1/4}}{4}\, dt = \left| \frac{t^{5/4}}{5} \right|_0^1 = \frac{1}{5}$.

4. Il termine generale della serie è asintoticamente equivalente a $1/n^{3a-3}$ (a meno di un fattore $1/2$) e pertanto la serie è finita se e solo se $a > 4/3$.

5. Siccome $x^{2a}\log x \gg x^{-1}$ quando $a > -1/2$ e $x^{2a}\log x \ll x^{-1-\delta}$ con $\delta = -a - 1/2 > 0$ quando $a < -1/2$, l'integrale esiste ed è finito se e solo se $a < -1/2$

6. $x(t) = \dfrac{e^t}{3} + 1$.

7. Equazione a variabili separabili: $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \sin t\, dt$ e quindi $\arctan x = -\cos t + c$; imponendo la condizione $x(0) = 1$ si ottiene $c = 1 + \pi/4$ e infine
$$x(t) = \tan\Big(-\cos t + 1 + \frac{\pi}{4}\Big)\,.$$

8. 

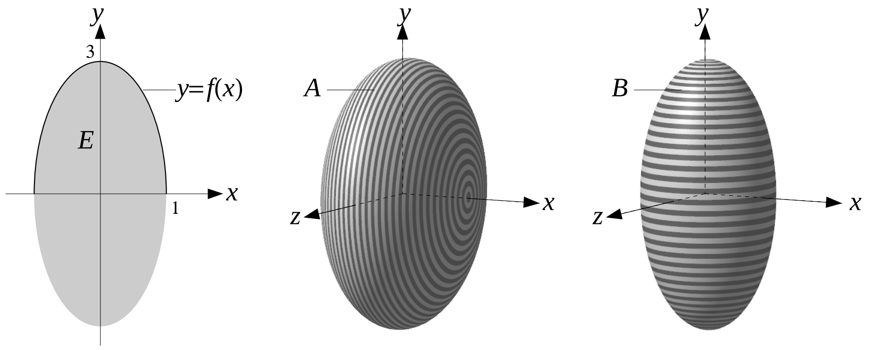
SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Cominciamo con la risposta alla domanda b), che include quella alla domanda a) come caso particolare. Poiché la (*) è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la soluzione generale è della forma
$$x(t) = \tilde{x}(t) + x_{\rm om}(t)$$
Dove $\tilde{x}$ è una soluzione particolare della (*) e $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*). L'equazione caratteristica di quest'ultima è
$$\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0\,, \tag{1}$$
e distinguiamo quindi tre casi sulla base del segno del discriminante $\Delta = 4(a^2 - 4)$.
Caso 1: se $a > 2$, cioè $\Delta > 0$, allora la (1) ha due soluzioni distinte $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$, per cui
$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
Caso 2: se $a = 2$, cioè $\Delta = 0$, allora la (1) ha due soluzioni coincidenti $\lambda_{1,2} = 2$, per cui
$$x_{\rm om}(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$
Caso 3: se $0 \le a < 2$, cioè $\Delta < 0$, allora la (1) ha due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = a \pm \omega i$ con $\omega := \sqrt{4 - a^2}$, per cui
$$x_{\rm om}(t) = e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.\text{t} \tag{4}$$
Cerchiamo ora la soluzione particolare $\tilde{x}$ tra i polinomi di grado 1, vale a dire della forma $\tilde{x}(t) = bt + c$; così facendo la (*) si riduce a $(4b - 4)t + (4c - 2ab) = 0$, e questa identità è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $4b - 4 = 0$ e $4c - 2ab = 0$, vale a dire $b = 1$ e $c = a/2$. Pertanto la soluzione particolare cercata è
$$\tilde{x}(t) = t + \frac{a}{2}\,. \tag{5}$$
c) Osserviamo che la soluzione particolare in (5) soddisfa $\tilde{x}(t) \ll e^{4t}$ per ogni a, e quindi il problema diventa quello di trovare gli a per cui esiste almeno una soluzione $x(t)$ dell'equazione *omogenea* tale che $x(t) \gg e^{4t}$.
Consideriamo i vari casi. Per $a < 2$ la formula (4) implica che $x_{\rm om}(t) = O(e^{at}) \ll e^{4t}$ per ogni scelta delle costanti c_1 e c_2 (ricordo che $a < 2$ e quindi $a < 4$) e quindi nessuno di questi a va bene. Analogamente per $a = 2$ la formula (4) implica che $x_{\rm om}(t) = O(te^{2t}) \ll e^{4t}$ per ogni scelta delle costanti c_1 e c_2, e neanche $a = 2$ va bene.
Nel caso $a > 2$, indichiamo con $\lambda(a) = a + \sqrt{a^2 - 4}$ la maggiore delle due soluzioni dell'equazione caratteristica. Se $\lambda(a) \le 4$ allora la formula (2) implica che $x_{\rm om}(t) = O(e^{\lambda(a)\,t}) = O(e^{4t})$ per ogni scelta delle costanti c_1 e c_2 e quindi a non va bene. Ma se invece $\lambda(a) > 4$ allora la formula (2) implica $x_{\rm om}(t) \sim c_1 e^{\lambda(a)\,t} \gg e^{4t}$ quando $c_1 \neq 0$, e quindi queste soluzioni hanno la proprietà desiderata.
Da quanto appena detto risulta dunque che gli a cercati sono quelli che soddisfano $a > 2$ e $\lambda(a) = a + \sqrt{a^2 - 4} > 4$. Risolvendo questa disequazione otteniamo infine $a > 5/2$.

2. L'integrale è improprio in π e $-\pi$, e quindi va studiato spezzandolo come somma di due integrali impropri semplici, per esempio
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1 + \cos x)^a}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{(1 + \cos x)^a}\, dx + \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{(1 + \cos x)^a}\, dx\,.$$
Poiché inoltre la funzione integranda è pari, i due integrali risultano essere uguali; in particolare l'integrale di partenza è finito se e solo se
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(1 + \cos x)^a}\, dx$$
è finito. Utilizzando il cambio di variabile $x = \pi - t$ e il fatto che $\cos(\pi - t) = -\cos t$ trasformiamo questo integrale nel seguente
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(1 - \cos t)^a}\, dt\,, \tag{6}$$

che è improprio in 0. Usando ora lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di $\cos t$, otteniamo che $1-\cos t \sim t^2/2$ per $t \to 0$ e quindi la funzione integranda in (6) è asintoticamente equivalente (a meno di un fattore 2^a) a $1/t^{2a}$. Per il teorema del confronto asintotico l'integrale in (6), e quindi anche quello di partenza, risultano essere finiti se e solo se $2a < 1$, ovvero $a < 1/2$.

3. a) L'insieme E è un'ellisse con centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati, e per la precisione quello parallelo all'asse delle x ha lunghezza 1 mentre quello parallelo all'asse delle y ha lunghezza 3, come si vede nella figura sotto.
In effetti si può disegnare E anche senza usare il fatto che si tratta di un ellisse. Risolvendo la disequazione $9x^2 + y^2 \leq 9$ rispetto alla variabile y si ottiene infatti che E coincide con l'insieme dei punti (x, y) tali che
$$-f(x) \leq y \leq f(x) \quad \text{dove } f(x) := 3\sqrt{1-x^2}.$$
Osserviamo che la funzione $f(x)$ è definita per $-1 \leq x \leq 1$, pari, e decrescente per $0 \leq x \leq 1$, e sulla base di queste informazioni possiamo tracciare il grafico di f e quindi anche l'insieme E.



b) Il solido A è ottenuto facendo ruotare il grafico $y = f(x)$ attorno all'asse delle x, e quindi la formula per il volume dei solidi di rotazione ci dà
$$\text{volume}(A) = \pi \int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} 9(1-x^2)\, dx = 9\pi \left| x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1} = 12\pi\,.$$
c) Procediamo come al punto b) scambiando gli assi: risolvendo la disequazione $9x^2 + y^2 \leq 9$ rispetto alla variabile x si ottiene che E è l'insieme dei punti (x, y) tali che
$$-g(y) \leq x \leq g(y) \quad \text{dove } g(y) := \sqrt{1-y^2/9};$$
quindi il solido B è ottenuto a partire dalla rotazione del grafico $x = g(y)$ attorno all'asse delle y, e infine
$$\text{volume}(B) = \pi \int_{-3}^{3} \big(g(y)\big)^2\, dy = \pi \int_{-3}^{3} 1 - \frac{y^2}{9}\, dy = \pi \left| y - \frac{y^3}{27} \right|_{-3}^{3} = 4\pi\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. b) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = \tilde{x}(t) + x_{\text{om}}(t)$$
dove la soluzione particolare $\tilde{x}$ è data
$$\tilde{x}(t) = t + \frac{2a}{9}$$
mentre la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ con } \lambda_{1,2} := a \pm \sqrt{a^2-9} & \text{per } a > 3; \\ e^{3t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 3; \\ e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) \text{ con } \omega := \sqrt{9-a^2} & \text{per } 0 \leq a < 3. \end{cases}$$
c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che gli a cercati sono quelli per cui $a > 5$.

2. Uguale al gruppo 1.

3. Analogo al gruppo 1. a) L'insieme E è l'ellisse con centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati di lunghezza 2 (quello parallelo all'asse delle x) e 1 (quello parallelo all'asse delle y).
   b) Il solido A è ottenuto facendo ruotare il grafico $y = 2\sqrt{1-x^2}$ attorno all'asse delle x e quindi
   $$\text{volume}(A) = \pi \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)\, dx = 4\pi \left| x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1} = \frac{16\pi}{3}\,.$$
   c) Il solido B è ottenuto a partire dalla rotazione del grafico $x = \sqrt{1-y^2/4}$ attorno all'asse delle y e quindi
   $$\text{volume}(B) = \pi \int_{-2}^{2} 1 - \frac{y^2}{4}\, dy = \pi \left| y - \frac{y^3}{12} \right|_{-2}^{2} = \frac{8\pi}{3}\,.$$

Commenti

- Prima parte, esercizio 1. Sorprendentemente, molti dei presenti hanno sbagliato il limite b) del gruppo 1 e il limite c) del gruppo 2.

- Prima parte, esercizio 7. Alcuni alcuni dei presenti hanno indicato solo il valore della costante c, invece che la soluzione dell'equazione come era richiesto. Altri non hanno osservato che l'inversa della funzione arcotangente è la tangente, o peggio ancora hanno scambiato la funzione inversa con il reciproco.

- Seconda parte, esercizio 1. Nel risolvere l'equazione per $a < 2$ molti dei presenti hanno scritto $\omega = \sqrt{a^2-4}$, che non è un numero reale (qui mi riferisco al gruppo 1, discorso analogo vale per il gruppo 2). Altri hanno "prudentemente" evitato di scrivere la formula di ω. Infine diverse persone hanno fatto errori gravi nella risoluzione dell'equazione caratteristica, che un'equazione di secondo grado!

- Seconda parte, esercizio 1. Nel risolvere l'equazione al punto b) diversi dei presenti non hanno calcolato la soluzione particolare, ma si sono limitati a dire che deve essere un polinomio di primo grado.

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno avuto difficoltà a impostare correttamente la soluzione del punto c). Molti hanno sbagliato a risolvere la disequazioni $a + \sqrt{a^2-4} \geq 4$ (o l'analoga disequazione per il gruppo 2).

- Seconda parte, esercizio 3. Al momento di scrivere i volumi di A e B come integrali, diversi dei presenti hanno omesso il fattore 2 che in un caso era necessario, mentre altri hanno sbagliato il dominio di definizione dell'integrale.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Deve essere $-1 \le 1 - x^2 \le 1$, vale a dire $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.

2. a) $\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}$; b) $\dfrac{2x}{\cos^2(x^2)} = 2x(1+\tan^2(x^2))$; c) $(2x\log(x+1))' = 2\log(x+1) + \dfrac{2x}{x+1}$.

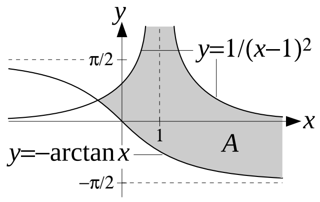
3. $6x^4$.

4. $N = 9 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 71.820$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 3\sin x + 1$ si ottiene
$$\int e^{3\sin x+1}\cos x\,dx = \frac{1}{3}\int e^y\,dy = \frac{e^y}{3} + c = \frac{e^{3\sin x+1}}{3} + c$$

6. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x = ce^{-t^3}$, e ponendo $x(0) = 2$ si ottiene $x = 2e^{-t^3}$.

7. $a > 3$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Deve essere $-1 \le x^2 - 3 \le 1$, vale a dire $-2 \le x \le -\sqrt{2}$ e $\sqrt{2} \le x \le 2$.

2. a) $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3)} = 3x^2(1+\tan^2(x^3))$; c) $(3x\log(x+1))' = 3\log(x+1) + \dfrac{3x}{x+1}$.

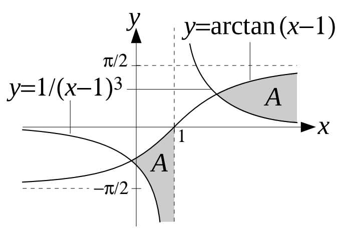
3. x^6.

4. $N = 9 \cdot 21^2 = 3.969$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 1 - 2\log x$ si ottiene
$$\int \frac{\sin(1-2\log x)}{x}dx = -\frac{1}{2}\int \sin y\,dy = \frac{\cos y}{2} + c = \frac{\cos(1-2\log x)}{2} + c$$

6. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x = c/t^2$, e ponendo $x(1) = 2$ si ottiene $x = 2/t^2$.

7. Nessun a.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Deve essere $-1 \le 2x^2 - 3 \le 1$, vale a dire $-\sqrt{2} \le x \le -1$ e $1 \le x \le \sqrt{2}$.

2. a) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-1}}$; b) $\dfrac{e^x}{\cos^2(e^x)} = e^x(1+\tan^2(e^x))$; c) $(3x\log(x-1))' = 3\log(x-1) + \dfrac{3x}{x-1}$.

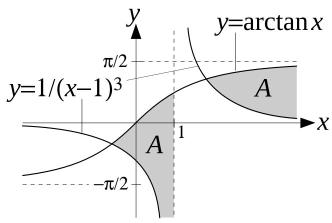
3. $-2x^4$.

4. $N = 9 \cdot 21^3 = 83.349$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 1 - 3\cos x$ si ottiene
$$\int e^{1-3\cos x} \sin x \, dx = \frac{1}{3} \int e^y \, dy = \frac{e^y}{3} + c = \frac{e^{1-3\cos x}}{3} + c$$

6. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x = ce^{-t^3}$, e ponendo $x(1) = 1$ si ottiene $x = e\, e^{-t^3} = e^{1-t^3}$.

7. $a > 4$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Deve essere $-1 \le x^2 - \frac{1}{4} \le 1$, vale a dire $-\frac{\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $\dfrac{1}{x\cos^2(\log x)} = \dfrac{1+\tan^2(\log x)}{x}$; c) $(2x\log(x-1))' = 2\log(x-1) + \dfrac{2x}{x-1}$.

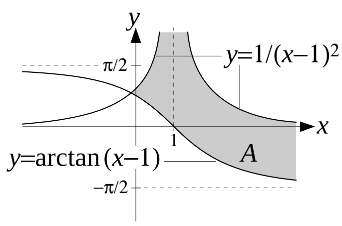
3. $8x^4$.

4. $N = 9 \cdot 21 \cdot 20 = 3.780$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 2\log x + 2$ si ottiene
$$\int \frac{\cos(2\log x + 2)}{x} dx = \frac{1}{2} \int \cos y \, dy = \frac{\sin y}{2} + c = \frac{\sin(2\log x + 2)}{2} + c$$

6. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x = c/t^3$, e ponendo $x(1) = 3$ si ottiene $x = 3/t^3$.

7. $a < 1$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Osserviamo che la domanda a) è un caso particolare di b).
b) Riscriviamo l'equazione (*) come
$$f(x) = 0 \quad \text{con} \quad f(x) := x^3 - ax^2 + 4a \tag{1}$$

e studiamo il grafico di $f(x)$. Osserviamo che questa funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to -\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

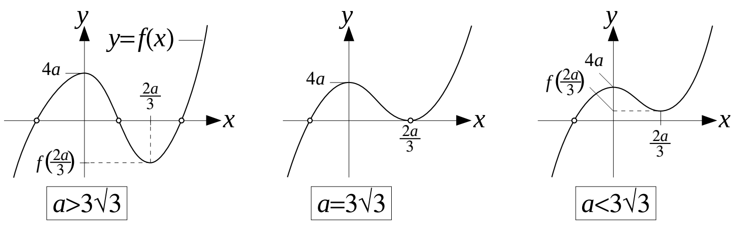
$$f'(x) = 3x^2 - 2ax = x(3x - 2a)$$

si ottiene che f decresce per $0 \le x \le 2a/3$ e cresce altrove; in particolare $x = 0$ è un punto di minimo locale, dove la funzione assume il valore $f(0) = 4a$, mentre $x = 2a/3$ è un punto di minimo locale dove la funzione assume il valore

$$f\Big(\frac{2a}{3}\Big) = \frac{4a}{27}(27 - a^2)\,.$$

Nel disegnare il grafico di $f(x)$ dobbiamo distinguere tre casi a seconda del segno di $f(2a/3)$; per farlo osserviamo che questa quantità è negativa, nulla o positiva a seconda che a sia maggiore, uguale o minore del valore critico

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3} = 5{,}19\ldots$$



Dal disegno risulta chiaro che

- se $a > 3\sqrt{3}$ l'equazione (1), e quindi anche la (*), ha tre soluzioni;
- se $a = 3\sqrt{3}$ l'equazione (*) ha due soluzioni (di cui una coincide con $2a/3 = 2\sqrt{3}$);
- se $a < 3\sqrt{3}$ l'equazione (*) ha una soluzione.

a) Siccome $5 < 3\sqrt{3}$, per $a = 5$ l'equazione (*) ha una sola soluzione.

c) Dal disegno sopra risulta che per $a > 3\sqrt{3}$ la soluzione $x(a)$ è sempre maggiore del punto di minimo locale $2a/3$, e siccome $2a/3$ tende a $+\infty$ quando $a \to +\infty$, allora anche $x(a)$ tende a $+\infty$. Usando ora il fatto che $x(a)$ risolve l'equazione (*) si ottiene

$$x^3(a) = a(x^2(a) - 4) \sim a\, x^2(a)$$

da cui segue che $x(a) \sim a$ per $a \to +\infty$.

2. a) L'equazione $\dot{x} = x(x-2)$ è a variabili separabili e quindi (per $x \neq 0, 2$) la scriviamo come

$$\int \frac{dx}{x(x-2)} = \int dt\,. \tag{2}$$

Osserviamo ora che

$$\int \frac{dx}{x(x-2)} = \int \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\Big)\, dx = \frac{1}{2}\big[\log|x-2| - \log|x|\big] = \frac{1}{2}\log\Big|\frac{x-2}{x}\Big|\,,$$

e quindi la (2) diventa

$$\frac{1}{2}\log\Big|\frac{x-2}{x}\Big| = t + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$

e dunque

$$\frac{x-2}{x} = \pm e^{2t+2c} = \pm e^{2c} e^{2t}\,.$$

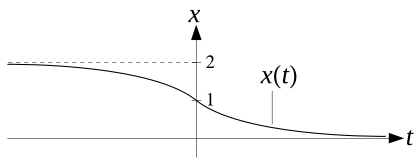
Indicando il numero $\pm e^{2c}$ semplicemente come c ed esplicitando la x otteniamo

$$x(t) = \frac{2}{1 - ce^{2t}} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Imponendo infine che $x(0) = 1$ otteniamo $c = -1$, e dunque

$$x(t) = \frac{2}{1 + e^{2t}}\,.$$

Questa funzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, tende a 0 per $t \to +\infty$ e tende a 2 per $t \to -\infty$; studiando inoltre il segno della derivata si ottiene che $x(t)$ è sempre strettamente decrescente. Sulla base di queste informazioni tracciamo il seguente disegno approssimativo del grafico di $x(t)$.



b) Per $a = 0$ e $a = 2$ si ha che $x(t) = 0$ e $x(t) = 2$ rispettivamente, e in entrambi i casi la soluzione $x(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per tutti gli altri valori di a otteniamo $x(t)$ imponendo la condizione $x(0) = a$ nella formula (3), vale a dire

$$x(t) = \frac{2}{1 - ce^{2t}} \quad \text{con } c := \frac{a-2}{a}\,.$$

Osserviamo che questa funzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se il denominatore $1 - ce^t$ non si annulla mai, vale a dire se e solo se $c \leq 0$, ovvero $0 < a < 2$. Riassumendo, la soluzione $x(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se $0 \leq a \leq 2$.

3. a) Per $x \to +\infty$ si che che $f(x) \sim a/x$ e $g(x) \sim 2/x$ (uso il fatto che $\sin t \sim t$ per $t \to 0$ e il cambio di variabile $t = 2/x$), da cui segue che

$$g(x) - f(x) \sim \frac{2-a}{x} \quad \text{per } x \to +\infty \text{ e } a \neq 2. \tag{4}$$

Per ottenere la parte principale di $g(x) - f(x)$ nel caso $a = 2$ dobbiamo utilizzare degli sviluppi più precisi sia per $f(x)$ che per $g(x)$. Mettendo in evidenza $2/x$ nell'espressione di $f(x)$ otteniamo

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^3+2} = \frac{2}{x}\,\frac{1}{1+2/x^3} = \frac{2}{x}\bigl(1+2/x^3\bigr)^{-1}\,,$$

e usando lo sviluppo $(1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2)$ con il cambio di variabile $t = 2/x^3$,

$$f(x) = \frac{2}{x}\bigl(1 - 2/x^3 + O(1/x^6)\bigr) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^4} + O\Bigl(\frac{1}{x^7}\Bigr)\,.$$

Usando invece lo sviluppo $\sin t = t - t^3/6 + O(t^6)$ e il cambio di variabile $t = 2/x$ otteniamo

$$g(x) = \sin\Bigl(\frac{2}{x}\Bigr) = \frac{2}{x} - \frac{4}{3x^3} + O\Bigl(\frac{1}{x^6}\Bigr)\,.$$

Mettendo insieme questi sviluppi otteniamo infine

$$g(x) - f(x) = -\frac{4}{3x^3} + O\Bigl(\frac{1}{x^4}\Bigr) \sim -\frac{4}{3x^3} \quad \text{per } x \to +\infty \text{ e } a = 2. \tag{4'}$$

b) Utilizzando gli sviluppi (4) e (4') si ottiene che la funzione $g(x) - f(x)$ è asintoticamente equivalente a una funzione positiva per $a < 2$ e a una funzione negativa per $a \geq 2$.
Ne deduciamo che per $a < 2$ la funzione $g(x) - f(x)$ è positiva "da un certo punto in poi", ovvero esiste $x_0 > 1$ tale che $g(x) - f(x) > 0$ per ogni $x \geq x_0$; quindi $g(x) > f(x)$, e questo significa che l'insieme A contiene punti di ascissa x per ogni $x \geq x_0$. Di conseguenza A è un insieme illimitato.
Invece per $a \geq 2$ la funzione $g(x) - f(x)$ è negativa da un certo punto in poi, e quindi esiste $x_0 > 1$ tale che $g(x) < f(x)$ per ogni $x \geq x_0$, e questo significa che l'insieme A non contiene punti di ascissa x per $x \geq x_0$. Dunque A è compreso tra le rette verticali di ascisse 1 e x_0, e tra i grafici delle funzioni f e g, e in particolare è un insieme limitato.

c) Quando A è limitato, vale a dire per $a \geq 2$, la sua area è sicuramente finita, mentre quando A è illimitato, vale a dire per $a < 2$, la sua area potrebbe essere finita o infinita. In questo caso scriviamo A come unione di due sottoinsiemi: quello dei punti (x, y) con ascissa maggiore di x_0, detto A', e quello dei punti con ascissa minore di x_0, detto A''. Siccome A'' è limitato, la sua area è finita, e quindi bisogna capire se A' ha area finita oppure no. Ma l'area di A' è data da

$$\text{area}(A') = \int_{x_0}^{+\infty} g(x) - f(x)\,dx$$

e siccome $g(x) - f(x)$ è asintoticamente equivalente (a meno di un fattore costante) a $1/x$, questo integrale improprio è infinito. quindi A' ha area infinita e lo stesso vale per A.
Riassumendo, A ha area finita se e solo se $a \geq 2$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. b) Analogo al gruppo 1. L'equazione (*) ha tre soluzioni per $a > 6\sqrt{3} = 10{,}39\ldots$, ha due soluzioni per $a = 6\sqrt{3}$, e ha una soluzione per $a < 6\sqrt{3}$.
   a) Siccome $11 > 6\sqrt{3}$, per $a = 11$ l'equazione (*) ha tre soluzioni.
   c) Analogo al gruppo 1. La soluzione $x(a)$ soddisfa $x(a) < -a/3$ e quindi tende a $-\infty$ quando $a \to +\infty$, e per la precisione $x(a) \sim -a$.

2. a) Risolvendo l'equazione come per il gruppo 1 otteniamo
$$x(t) = -\frac{4e^{4t}}{1+e^{4t}}\,.$$
   Dunque $x(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, è decrescente, tende a 0 per $t \to -\infty$ e a 4 per $t \to +\infty$.
   b) La soluzione $x(t)$ è definita per ogni t se e solo se $-4 \le a \le 0$.

3. a) Per $x \to +\infty$ si ha $f(x) \sim a/x^2$ e $g(x) \sim 1/x^2$ e quindi
$$g(x) - f(x) \sim \frac{1-a}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty \text{ e } a \neq 1.$$
   Invece per $a = 1$ si ha $f(x) = 1/x^2 - 1/x^5 + O(1/x^8)$ e $g(x) = 1/x^2 - 1/(6x^6) + O(1/x^{10})$, e quindi
$$g(x) - f(x) \sim \frac{1}{x^5}\,.$$
   b) Argomentando come per il gruppo 1 si ottiene che l'insieme A è limitato se e solo se $g(x)-f(x)$ è asintoticamente equivalente a una funzione negativa, vale a dire se e solo se $a > 1$.
   c) A differenza di quello che succede per il gruppo 1 l'area di A risulta essere sempre finita, anche quando A è illimitato.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Una modo alternativo di risolvere l'esercizio consiste nello scrivere l'equazione (*) come
$$g(x) = a \quad \text{con} \quad g(x) := \frac{x^3}{x^2-4}$$
  (mi riferisco qui al gruppo 1) e studiare quindi il grafico della funzione $g(x)$.
  Il vantaggio di questo approccio è che la funzione g non dipende da a, e quindi c'è un unico grafico da disegnare (senza dover distinguere vari casi come nella soluzione data sopra). Lo svantaggio è che il grafico di questa funzione è leggermente più complesso di quello considerato nella soluzione data sopra.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno risolto l'equazione usando il seguente "principio": se $ab = c$ allora $a = c$ oppure $b = c$, cosa che però non è assolutamente versa se $c \neq 0$. Si tratta di un errore molto grave.

- Seconda parte, esercizio 3a). Sorprendentemente nessuno dei presenti ha ricavato correttamente la parte principale di $g(x) - f(x)$ per il valore critico di a.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Disegnando il grafico della funzione $\tan(2x)$ limitatamente all'intervallo $[0, \pi/2]$ si vede che la disequazione è soddisfatta per $x \in \big[0, \frac{\pi}{4}\big) \cup \big[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\big]$.

2. a) $\dfrac{1-9x^2}{(1+x^2)^6}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{(x+1)^{2x}}{2^{-x}}}\right]' = \big[2(x-1)^2\big] = 4(x+1)$.

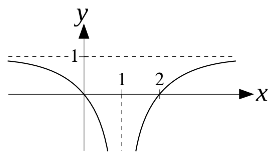
3. $2x$.

4. c $\ll$ d $\ll$ a $\ll$ b.

5. Ponendo $t = 1-2x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{1-2x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{1} e^t\, dt = \frac{e}{4}$.

6. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti: la soluzione generale, che può essere ottenuta sommando la soluzione dell'equazione omogenea ad una soluzione particolare, è $x(t) = ae^{-t} + 3t - 3$ con $a \in \mathbb{R}$, e imponendo la condizione iniziale si ottiene infine
$$x(t) = 4e^{-t} + 3t - 3\,.$$

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \sim n^{2a}/2^n \ll (3/2)^n/2^n = (3/4)^n$ e quindi la serie è finita per ogni $a > 0$ (per confronto con la serie geometrica).

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $x \in \Big[0, \dfrac{\pi}{6}\Big] \cup \Big(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$.

2. a) $\dfrac{1+11x^3}{(1-x^3)^5}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{3x}}{3^{-x}}}\right]' = \big[3(x-1)^3\big]' = 9(x-1)^2$.

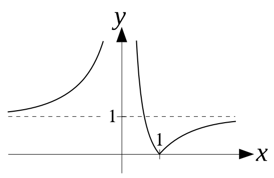
3. $2x^2$.

4. b $\ll$ a $\ll$ d $\ll$ c.

5. Ponendo $t = 1-2x^2$ si ottiene $\displaystyle\int x\, e^{1-2x^2}\, dx = -\frac{1}{4}\int e^t\, dt = -\frac{1}{4}e^t + c = -\frac{1}{4}e^{1-2x^2} + c$.

6. $x(t) = 5e^{-t} + 3t - 3$.

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \gg 2^n/n^{a+2}$ che tende a $+\infty$ e quindi la serie non è finita per alcun a.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. $x \in \Big[\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{4}\Big) \cup \Big[\dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{4}\Big)$.

2. a) $\dfrac{1+9x^2}{(1-x^2)^6}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{2^{2x}}{(x+1)^{-x}}}\right]' = \big[4(x+1)\big]' = 4.$

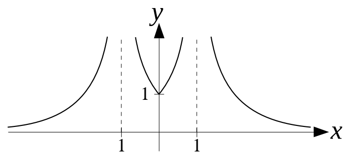
3. $2/x^3$.

4. b $\ll$ c $\ll$ d $\ll$ a.

5. Ponendo $t = 3-2x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{3-2x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{3} e^t\, dt = \frac{e^3}{4}.$

6. $x(t) = 5e^{-t} + 2t - 2$.

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \sim 1$ per $a < 2$, $a_n \sim 1/2$ per $a = 2$ e $a_n \sim 1/n^{a-2}$ per $a > 2$ e quindi la serie è finita quando $a - 2 > 1$ cioè per $a > 3$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left[-\frac{\pi}{8}, 0\right]$.

2. a) $\dfrac{1-11x^3}{(1+x^3)^5}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{(x+1)^{2x}}{2^{-x}}}\right]' = \big[2(x+1)^2\big]' = 4(x+1).$

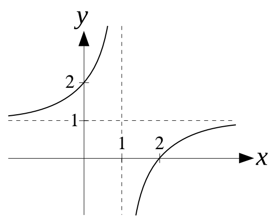
3. $2/x$.

4. a $\ll$ d $\ll$ b $\ll$ c.

5. Ponendo $t = 3-2x^2$ si ottiene $\displaystyle\int x\, e^{3-2x^2}\, dx = -\frac{1}{4}\int e^t\, dt = -\frac{1}{4}e^t + c = -\frac{1}{4}e^{3-2x^2} + c.$

6. $x(t) = 3e^{-t} + 2t - 2$.

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \sim n^{3a}/3^n \ll (3/2)^n/3^n = (1/2)^n$ e quindi la serie è finita ogni $a > 0$ (per confronto con la serie geometrica).

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

2. a) $\dfrac{1+7x^2}{(1-x^2)^5}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{3x}}{3^{-x}}}\right]' = \big[3(x-1)^3\big]' = 9(x-1)^2.$

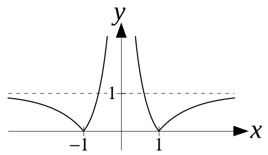
3. $2/x^2$.

4. c $\ll$ b $\ll$ d $\ll$ a.

5. Ponendo $t = 4 - x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, e^{4-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{4} e^t\, dt = \frac{e^4}{2}$.

6. $x(t) = 3e^t - t - 1$.

7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \gg 3^n/n^{3+a}$ che tende a $+\infty$ e quindi la serie non è finita per alcun a.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. $x \in \Big[-\dfrac{7\pi}{8}, -\dfrac{3\pi}{4}\Big) \cup \Big[-\dfrac{3\pi}{8}, -\dfrac{\pi}{4}\Big)$.

2. a) $\dfrac{1-7x^2}{(1+x^2)^5}$; b) $\left[\sqrt[x]{\dfrac{2^{2x}}{(x+1)^x}}\right]' = \big[4(x+1)\big]' = 4$.

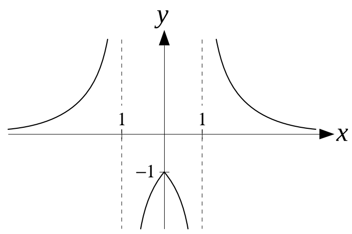
3. $-2x$.

4. c $\ll$ a $\ll$ d $\ll$ b.

5. Ponendo $t = 4 - x^2$ si ottiene $\displaystyle\int x\, e^{4-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int e^t\, dt = -\frac{1}{2}e^t + c = -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + c$.

6. $x(t) = 4e^t - t - 1$.

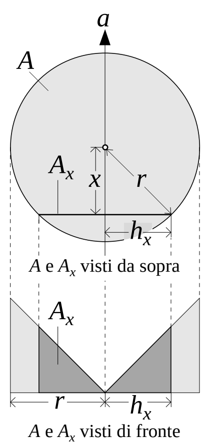
7. Il termine generale a_n della serie soddisfa $a_n \sim 1$ per $a < 3$, $a_n \sim 1/2$ per $a = 3$ e $a_n \sim 1/n^{a-3}$ per $a > 3$ e quindi la serie è finita quando $a - 3 > 1$ cioè per $a > 4$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. b) Riscriviamo la disequazione $2x^2 + 3x - c \geq \log x$ come
$$f(x) \geq c \quad \text{con} \quad f(x) := 2x^2 + 3x - \log x\,,$$
e osserviamo che questa disequazione è soddisfatta per ogni $x > 0$ se e solo se il valore minimo m della funzione $f(x)$ tra tutti gli $x > 0$ (supponendo che esista) soddisfa $m \geq c$. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{4x^2 + 3x - 1}{x}$$
otteniamo che la funzione decresce per $x \leq 1/4$ e cresce per $x \geq 1/4$; da questo segue che $x = 1/4$ è il punto di minimo assoluto di f, e quindi i valori di c cercati sono
$$c \leq m = f(1/4) = \frac{7}{8} + 2\log 2 \simeq 2{,}26\,.$$
a) La disequazione $2x^2 + 3x - 2 \geq \log x$ è quella considerata al punto b) per $c = 2$, e poiché $2 < m$, questa disequazione vale per tutti gli $x > 0$.

2. a) Scriviamo la funzione $f(x)$ nella forma
$$f(x) = 1 - \exp(g(x)) \quad \text{con} \quad g(x) := x \log\cos(1/x^a)\,, \tag{1}$$
e osserviamo che, quando x tende a $+\infty$, $h := \cos(1/x^a) - 1$ converge a 0 e quindi
$$\log\cos(1/x^a) = \log(1+h) \sim h = \cos(1/x^a) - 1 \sim -\frac{1}{2x^{2a}}$$
(nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\cos t - 1 \sim -t^2/2$ per $t \to 0$). Dunque
$$g(x) \sim -\frac{x^{1-2a}}{2} \quad \text{per } x \to +\infty, \tag{2}$$
da cui segue che
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a < 1/2 \\ -1/2 & \text{se } a = 1/2 \\ 0 & \text{se } a > 1/2 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a < 1/2 \\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}} & \text{se } a = 1/2 \\ 0 & \text{se } a > 1/2 \end{cases}. \tag{3}$$
b) Quando $x \geq 1$ si ha che $1/x^a$ è compreso tra 0 e 1, quindi $\cos(1/x^a)$ è strettamente positivo, e pertanto la funzione $f(x)$ è ben definita e continua, da cui segue che l'integrale che ci interessa è improprio solo all'infinito. Inoltre quando x tende a $+\infty$, sappiamo dalla formula (3) che per $a \leq 1/2$ la funzione $f(x)$ tende a un limite strettamente positivo e quindi l'integrale improprio vale $+\infty$. Se invece $a > 1/2$, usando la (1), il fatto che $1 - e^t \sim -t$ per $t \to 0$, e infine la (2) otteniamo
$$f(x) \sim -g(x) \sim \frac{1}{2x^{2a-1}} \quad \text{per } x \to +\infty;$$
applicando quindi il principio del confronto asintotico otteniamo che l'integrale che ci interessa è finito se e solo se $2a - 1 > 1$ ovvero $a > 1$.



3. a) Scegliamo come origine dell'asse a il centro della base del cilindro. Preso allora il punto di coordinata x su questo asse, indichiamo con A_x la sezione corrispondente di A, vale a dire l'intersezione di A con il piano ortogonale all'asse a che passa per il punto x. Come si vede dalla figura accanto, la sezione A_x è data dall'unione di due triangoli rettangoli con base uguale all'altezza h_x, dove
$$h_x = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$
Da questo segue che
$$\text{area}(A_x) = h_x^2 = r^2 - x^2\,.$$
b) Per quanto visto a lezione il volume di A è uguale all'integrale delle aree delle sezioni A_x per x compreso tra $-r$ e r, vale a dire
$$\begin{aligned}\text{volume}(A) &= \int_{-r}^{r} \text{area}(A_x)\,dx \\ &= \int_{-r}^{r} r^2 - x^2\,dx = \Big| r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3} r^3\,.\end{aligned}$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. b) Analogo al gruppo 1. La disequazione in questione vale per ogni $x > 0$ se e solo se $c \leq m$ dove m è il valore minimo della funzione $f(x) := 3x^2 + x - \log x$, e facendo i conti si ottiene $m = f(1/3) = 2/3 + \log 3 \simeq 1{,}76$.

   a) La disequazione che ci interessa è quella considerata al punto b) per $c = 2$, e poiché $2 > m$, non è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. a) Analogo al gruppo 1. Scriviamo $f(x)$ nella forma $f(x) = 1 - \exp(g(x))$ dove
$$g(x) := \sin x\,\log(1 - 1/(2x^a)) \sim -\frac{\sin x}{2x^a} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

da cui si ottiene che

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\,.$$

b) Poiché $g(x)$ tende a 0 per $x \to +\infty$ abbiamo che $f(x) \sim -g(x)$; poiché inoltre $|\sin x| \leq 1$ abbiamo che

$$|f(x)| \sim |g(x)| \leq |\log(1 - 1/(2x^a))| \sim \frac{1}{2x^a}\,.$$

Pertanto, usando i vari criteri del confronto, otteniamo che l'integrale improprio di $|f(x)|$ è finito se $a > 1$, da cui segue anche l'integrale improprio di $f(x)$ è finito se $a > 1$. La discussione di quello che succede per $a \leq 1$ è più complicata e la omettiamo.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 3.

1. b) Analogo al gruppo 1. La disequazione in questione vale per ogni $x > 0$ se e solo se $c \geq -m$ dove m è il valore minimo della funzione $f(x) := 2x^2 - 3x - \log x$, e facendo i conti si ottiene $m = f(1) = -1$.

   a) La disequazione che ci interessa è quella considerata al punto b) per $c = 1$, e poiché $1 = -m$, è soddisfata per ogni $x > 0$.

2. a) Analogo al gruppo 1. Scriviamo $f(x)$ nella forma $f(x) = 1 - \exp(g(x))$ dove

$$g(x) := x^2 \log\cos(2/x^a) \sim -2x^{2-2a} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

   da cui si ottiene che

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a < 1 \\ -2 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } a < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{e^2} & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}.$$

   b) Analogo al gruppo 1: l'integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $a > 3/2$.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. b) Analogo al gruppo 1. La disequazione in questione vale per ogni $x > 0$ se e solo se $c \leq m$ dove m è il valore minimo della funzione $f(x) := 3x^2 - x - \log x$, e facendo i conti si ottiene $m = f(1/2) = 1/4 + \log 2 \simeq 0{,}94$.

   a) La disequazione che ci interessa è quella considerata al punto b) per $c = 1$, e poiché $1 > m$, non è soddisfata per ogni $x > 0$.

2. a) Analogo al gruppo 1. Scriviamo $f(x)$ nella forma $f(x) = 1 - \exp(g(x))$ dove

$$g(x) := x \sin x \, \log(1 - 1/x^a) \sim -x^{1-a} \sin x \quad \text{per } x \to +\infty,$$

   da cui si ottiene che

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } a \leq 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } a \leq 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}.$$

   b) Analogo al gruppo 2: l'integrale improprio esiste ed è finito se $a > 2$; omettiamo la discussione di quello che succede per $a \leq 2$.

3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Prima parte, esercizio 1. Questo esercizio ha creato difficoltà alla maggior parte dei presenti, presumibilmente perché è stato affrontato per la via meno idonea.

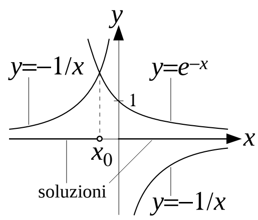
- Prima parte, esercizio 6. Chiaramente è possibile risolvere questo esercizio applicando la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine, ma questo comporta calcoli leggermente più complicati rispetto all'approccio suggerito sopra, vale a dire la risoluzione dell'equazione omogenea e la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

- Seconda parte, esercizio 2a). Per alcuni gruppi questo esercizio richiede di studiare varianti più o meno complicate del seguente problema: trovare il limite di $(1+t)^{1/t}$ per t che tende a 0 (la forma esatta dipende dal gruppo, ma il principio è questo).
  L'approccio di molti dei presenti (riportato a questo caso semplice) è stato quello di usare lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + ta + \cdots$ sostituendo poi ad a il valore $1/t$. Anche se in certe occasioni può dare il risultato giusto, questo procedimento non è corretto perché t non è una costante e anzi tende a $+\infty$, e infatti si ottiene come valore del limite 2 mentre quello corretto è e.
  Per quanto ne so, l'unico modo "semplice" di studiare il comportamento asintotico di funzioni della forma $f(x)^{g(x)}$, vale a dire potenze in cui sia la base che l'esponente sono funzioni, consiste nello scriverle come $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\log(f(x))$ e quindi studiare il comportamento della funzione $g(x)\log(f(x)$. Questo "trucco" è stato spiegato in più occasioni, ma solo uno tra i presenti lo ha messo in pratica.

- Seconda parte, esercizio 3. Sia a' l'asse contenuto nel piano di base del cilindro, passante per il centro della base e ortogonale ad a: per calcolare il volume di A si possono anche considerare le sezioni di A ortogonali all'asse a', ovvero le intersezioni di A con i piani ortogonali al piano della base e paralleli all'asse a: questa sezioni sono tutte rettangoli, e se si sceglie come origine dell'asse a' il centro della base del cilindro, preso un punto y sull'asse a' la corrsipondente sezione A_y ha altezza $|y|$ e base $2\sqrt{r^2-y^2}$, per cui
  $$\begin{aligned}\text{volume}(A) = \int_{-r}^{r} \text{area}(A'_y)\,dy &= \int_{-r}^{r} |y|\cdot 2\sqrt{r^2-y^2}\,dy \\ &= \int_0^r 4y\sqrt{r^2-y^2}\,dy = \int_0^{r^2} 2t^{1/2}\,dt = \frac{4}{3}r^3\end{aligned}$$
  (nel penultimo passaggio si usa il cambio di variabile $t = r^2 - y^2$).

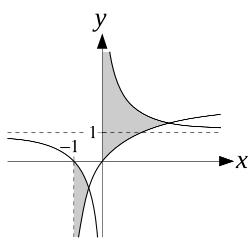
PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Va bene qualunque a della forma $a = -\pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
2. Il valore minimo è $\dfrac{1}{10} = f(-1)$.
3. a) $+\infty$; b) non esiste; c) 3.
4. $N = \dbinom{8}{5} = 56$.
5. $\log(5/3) = \log 5 - \log 3$.
6. L'integrale è finito per ogni a.
7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{3}\log\left(3 - 2t^{3/2}\right)$.
8. Le soluzioni sono $x \in (-\infty, x_0] \cup (0, +\infty)$ dove x_0 è dato nella figura accanto.



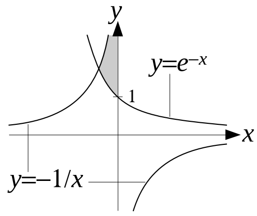
PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Va bene qualunque a della forma $a = \pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
2. Il valore minimo è $-\dfrac{1}{3} = f(1)$.
3. a) 0; b) $+\infty$; c) non esiste.
4. $N = \dbinom{7}{4} = 35$.
5. $\log(5/4) = \log 5 - \log 4$.
6. L'integrale è finito per $a < 1$.
7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{2}\log(1 - 2\arctan t)$.
8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

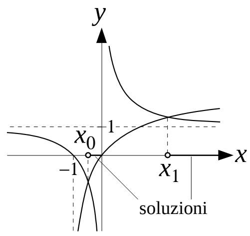
1. Va bene qualunque a della forma $a = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
2. Il valore minimo è $\dfrac{1}{10} = f(1)$.
3. a) 0; b) non esiste; c) 1/2.
4. $N = \dbinom{9}{7} = 36$.
5. $\log(5/2) = \log 5 - \log 2$.
6. L'integrale è finito per $a < 1/3$.



7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{2}\log(5 - 4\sqrt{t})$.
8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.

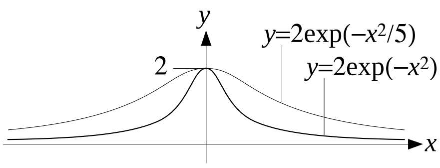
PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Va bene qualunque a della forma $a = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
2. Il valore minimo è $-\dfrac{1}{3} = f(-1)$.
3. a) $1/3$; b) $+\infty$; c) $+\infty$.
4. $N = \dbinom{8}{6} = 28$.
5. $\log 2$.
6. L'integrale è finito per $a > 1$.
7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{3}\log(1 - 3\arctan t)$.
8. Le soluzioni sono $x \in [x_0, 0) \cup (x_1, +\infty)$ dove x_0 e x_1 sono dati nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Per ogni $a > 0$ la funzione $f(x) := 2\exp(-ax^2)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva e pari, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata $f'(x) = -4ax\exp(-ax^2)$ si vede che la funzione cresce per $x \le 0$ e decresce per $x \ge 0$; in particolare 0 è il punto di massimo assoluto, e il valore massimo della funzione è $f(0) = 2$. Sulla base di quanto appena detto tracciamo un disegno approssimativo del grafico di $f(x)$ per $a = 1$ e $a = 1/5$.



b) Il punto del grafico di f di ascissa x ha ordinata $y = f(x)$ e quindi la distanza d di questo punto dall'origine è data da
$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + f^2(x)} = \sqrt{x^2 + 4\exp(-2ax^2)}\,.$$
Vogliamo trovare per quali x il valore di d è minimo, e trattandosi di una funzione pari ci limitiamo a considerare solo gli $x \ge 0$. Studiamo quindi il segno della derivata di d per $x \ge 0$:
$$d' = \frac{x\big(1 - 8a\exp(-2ax^2)\big)}{\sqrt{x^2 + 4\exp(-2ax^2)}}\,.$$
Il denominatore di questa espressione e il fattore x al numeratore sono sempre positivi, mentre studiando il segno del fattore $1 - 8a\exp(-2ax^2)$ al numeratore si hanno due casi: se $\log(8a) \ge 0$, vale a dire se $a \ge 1/8$, tale fattore è positivo per
$$x \ge x_a := \sqrt{\frac{\log(8a)}{2a}}$$
e negativo altrimenti, mentre se $a \le 1/8$ tale fattore è positivo per ogni $x \ge 0$. Nel primo caso la funzione d decresce per $0 \le x \le x_a$ e cresce altrimenti, da cui segue che x_a è il punto di minimo assoluto, mentre nel secondo caso d risulta essere crescente per $x \ge 0$ e quindi 0 è il

punto di minimo assoluto.
Riassumendo, i punti del grafico di f per cui la distanza d è minima sono quelli di ascissa

$$x = \begin{cases} 0 & \text{se } a \le 1/8, \\ \pm x_a & \text{se } a > 1/8. \end{cases}$$

2. a) La (*) è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. La corrispondente equazione caratteristica è $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$ e l'unica soluzione è $\lambda = -4$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\rm om}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Siccome il coefficiente -4 nel termine noto della (*) coincide con la soluzione (doppia) dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\tilde{x}(t) = \alpha t^2 e^{-4t} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo l'identità $2\alpha e^{-4t} = e^{-4t}$, che è verificata per $\alpha = 1/2$. Pertanto la soluzione particolare cercata è $\frac{1}{2}t^2 e^{-4t}$ mentre la soluzione generale è

$$x(t) = \big(c_1 + c_2 t + \tfrac{1}{2}t^2\big)e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Distinguiamo diversi casi a seconda del segno del discriminante dell'equazione caratteristica. Per $\Delta > 0$ l'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 2a - 8}$$

e quindi la soluzione dell'equazione omogenea è

$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se inoltre queste soluzioni sono entrambe diverse da -4, la (*) ammette una soluzione particolare della forma αe^{-4t} (non calcoliamo il valore esatto di α perché non ci serve) e quindi la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se invece λ_1 o λ_2 sono uguali a -4 la soluzione particolare sarà della forma $\alpha t e^{-4t}$. Sia in un caso che nell'altro si vede chiaramente che è possibile trovare una soluzione asintoticamente equivalente a ce^t per $t \to +\infty$ se e solo se λ_1 o λ_2 sono uguali a 1, e quindi i valori di a cercati sono quelli per cui

$$-a \pm \sqrt{a^2 - 2a - 8} = 1\,;$$

spostando il $-a$ a destra dell'uguale ed elevando al quadrato otteniamo un'equazione di primo grado $-2a - 8 = 2a + 1$ la cui soluzione è

$$a = -9/4\,.$$

Per $\Delta < 0$ la soluzione generale della (*) è invece della forma

$$x(t) = e^{rt}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) + \alpha e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

e quindi non può mai essere asintoticamente equivalente a ce^t.
Resta da considerare il caso $\Delta = 0$, che si verifica per $a = 4, -2$. Per $a = 4$ la soluzione della (*) è data dalla formula (1) e non è mai asintoticamente equivalente a ce^t. Per $a = -2$ la soluzione è della forma

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t} + \alpha e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

e di nuovo non può mai essere asintoticamente equivalente a ce^t.
Riassumendo, l'unico valore di a che soddisfa quanto richiesto è $a = -9/4$.

c) Per $a = -9/4$ le soluzioni dell'equazione caratteristica sono 1 e 7/2, una soluzione particolare della (*) è $\tilde{x}(t) = \alpha e^{-4t}$ con $\alpha = 2/75$, e infine la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{7t/2} + \frac{2}{75}e^{-4t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

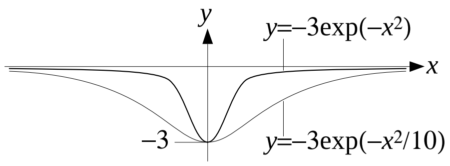
Siccome 7/2 è maggiore di 1, questa soluzione è asintoticamente equivalente a ce^t se e solo se $c_2 = 0$ e $c_1 = c$. Dunque le soluzioni cercate sono quelle della forma

$$x(t) = ce^t + \frac{2}{75}e^{-4t} \quad \text{con } c \neq 0.$$

3. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \geq 0$ ed vale zero se
$$\exp(x^2) = \exp(x^{1/2}) \;\Leftrightarrow\; x^2 = x^{1/2} \;\Leftrightarrow\; x(x^{3/2} - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,\, x \geq 1\,.$$
Quindi l'integrale che ci interessa è improprio per $x = 0$, $x = 1$ e $x = +\infty$, e per studiarlo lo scomponiamo in integrali impropri semplici come segue:
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = \int_0^{1/2} \cdots + \int_{1/2}^{1} \cdots + \int_1^2 \cdots + \int_2^{+\infty} \cdots\,. \tag{2}$$
Cominciamo a studiare il terzo integrale alla destra dell'uguale, applicando il cambio di variabile $x = 1 + t$ in modo da ricondurci ad un integrale improprio in $t = 0$:
$$\int_1^2 \frac{dx}{f(x)} = \int_0^1 \frac{dt}{f(1+t)}\,; \tag{3}$$
osserviamo ora che per $t = 0$ la funzione $f(1 + t)$ vale 0 mentre la sua derivata vale $3/2$; quindi il suo sviluppo di Taylor all'ordine 1 è
$$f(1+t) = \frac{3t}{2} + O(t^2)$$
e pertanto per $t \to 0$ si ha
$$f(1+t) \sim \frac{3t}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(1+t)} \sim \frac{2}{3t}\,,$$
da cui segue per il principio del confronto asintotico che l'integrale improprio in (3), ovvero il terzo integrale alla destra dell'uguale in (2), è uguale a $+\infty$.
Con lo stesso ragionamento si dimostra che il secondo integrale alla destra dell'uguale in (2) è uguale a $-\infty$, e ciò è già sufficiente a concludere che l'integrale improprio di partenza non esiste, senza bisogno di studiare i rimanenti integrali in (2).

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è strettamente negativa e pari, tende a 0 per $x \to \pm\infty$, decresce per $x \leq 0$ e cresce per $x \geq 0$; in particolare 0 è il punto di minimo assoluto, e il quindi il valore di minimo assoluto è $f(0) = -3$. Nella figura sotto è riportato il disegno del grafico di f per $a = 1$ e $a = 1/10$.



b) La distanze cercata è
$$d = \sqrt{x^2 + 9\exp(-2ax^2)}$$
e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che i punti del grafico di f per cui la distanza d è minima sono quelli di ascissa
$$x = \begin{cases} 0 & \text{se } a \leq 1/18 \\ \pm x_a & \text{se } a > 1/18 \end{cases} \quad \text{dove} \quad x_a := \sqrt{\frac{\log(18\,a)}{2a}}\,.$$

2. Analogo al gruppo 1. a) La soluzione dell'equazione (*) per $a = 3/2$ è
$$x(t) = \big(c_1 + c_2 t + \tfrac{1}{2}t^2\big)e^{-3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
b) I valori di a cercati sono quelli per cui
$$\lambda_{1,2} = -2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a - 3} = \frac{1}{2} \quad \text{vale a dire} \quad a = -\frac{13}{24}\,.$$
c) La soluzione generale dell'equazione (*) per $a = -13/24$ è
$$x(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{5t/3} + \frac{3}{49}e^{-3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Siccome $5/3$ è maggiore di $1/2$ questa soluzione è asintoticamente equivalente a $ce^{t/2}$ se e solo se $c_2 = 0$ e $c_1 = c$, e dunque le soluzioni cercate sono

$$x(t) = ce^{t/2} + \frac{3}{49}e^{-3t} \quad \text{con } c \neq 0.$$

3. Sostanzialmente uguale al gruppo 1: questo integrale improprio non esiste.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Analogo al gruppo 2.
   b) La distanza d è uguale a quella nel gruppo 1, e quindi anche i punti di minima distanza.
2. Uguale al gruppo 1.
3. Sostanzialmente uguale al gruppo 1: questo integrale improprio non esiste.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Analogo al gruppo 1.
   b) La distanza d è uguale a quella nel gruppo 2, e quindi anche i punti di minima distanza.
2. Uguale al gruppo 2.
3. Sostanzialmente uguale al gruppo 1: questo integrale improprio non esiste.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1b). Al momento di studiare il segno della derivata di d diversi dei presenti hanno avuto difficoltà con lo studio del segno del fattore $1 - 8a\exp(-2ax^2)$, e in particolare pochi si sono accorti del fatto che questo termine è sempre positivo se $a \leq 1/8$ (qui mi riferisco al gruppo 1, ma lo stesso discorso vale per gli altri gruppi).
- Seconda parte, esercizio 2b). Come spiegato sopra, si tratta di trovare i valori di a per cui 1 risolve l'equazione caratteristica
  $$\lambda^2 + 2a\lambda + 2a + 8 = 0$$
  (mi riferisco al gruppo 1) e il modo usato per risolvere questo problema consiste nello scrivere le soluzioni $\lambda_{1,2}$ di questa equazione in funzione di a e di imporre che siano uguali a 1. Un modo alternativo e più elegante consiste nel sostituire 1 nell'equazione caratteristica, ottenendo
  $$1 + 2a + 2a + 8 = 0\,,$$
  e cercare quindi gli a per cui tale equazione è effettivamente soddisfatta, vale a dire $a = -9/4$.
- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti si sono accorti del fatto che questo integrale è improprio in 0 e $+\infty$, ma non che è improprio in 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

2. a) $\dfrac{3}{2}$; b) $+\infty$.

3. Il punto di massimo è 2.

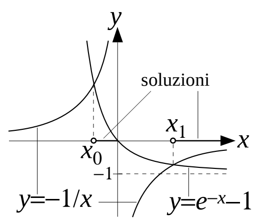
4. $N = 5 \cdot 10^3 = 5000$.

5. $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} (x+1) - (x^2-1)\, dx = \frac{9}{2}$.

6. Si ha $\sqrt[3]{1+n^{-2a}} - 1 \sim \dfrac{1}{3n^{2a}}$ per $n \to +\infty$ e quindi la serie converge per $a > \dfrac{1}{2}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
$$\frac{\dot{x}}{x^2} = e^{2t}\,, \text{ cioè } \int \frac{dx}{x^2} = \int e^{2t} dt\,, \text{ cioè } -\frac{1}{x} = \frac{e^{2t}}{2} + c\,,$$
e la condizione iniziale è soddisfatta per $c = -3/2$. Quindi
$$x(t) = \frac{2}{3 - e^{2t}}\,.$$

8. La soluzioni sono $x_0 \le x < 0$ e $x \ge x_1$ con x_0 e x_1 come in figura.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

2. a) $-\dfrac{1}{2}$; b) 2.

3. Il punto di minimo è 4.

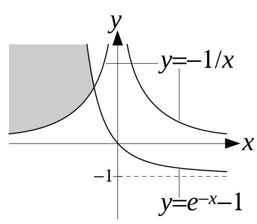
4. $N = 5 \cdot 9 \cdot 8 = 360$.

5. $A = \displaystyle\int_{-2}^{1} (1-2x^2) - (2x-3)\, dx = 9$.

6. Si ha $\sqrt[2]{1+n^{-2a}} - 1 \sim \dfrac{1}{2n^{2a}}$ per $n \to +\infty$ e quindi la serie converge per $a > \dfrac{1}{2}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
$$\frac{\dot{x}}{x^2} = e^{2t}\,, \text{ cioè } \int \frac{dx}{x^2} = \int e^{2t} dt\,, \text{ cioè } -\frac{1}{x} = \frac{e^{2t}}{2} + c\,,$$
e la condizione iniziale è soddisfatta per $c = 1/2$. Quindi
$$x(t) = -\frac{2}{1 + e^{2t}}\,.$$

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

2. a) 2; b) $\frac{2}{3}$.

3. Il punto di massimo è 1.

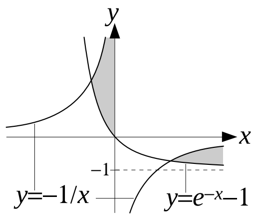
4. $N = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520$.

5. $A = \int_{-1}^{2} (x+3) - (x^2+1)\, dx = \frac{9}{2}$.

6. Si ha $\sqrt[3]{1+n^{-3a}} - 1 \sim \frac{1}{3n^{3a}}$ per $n \to +\infty$ e quindi la serie converge per $a > \frac{1}{3}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
$$\frac{\dot{x}}{x^2} = e^{-t}\,, \text{ cioè } \int \frac{dx}{x^2} = \int e^{-t} dt\,, \text{ cioè } -\frac{1}{x} = -e^{-t} + c\,,$$
e la condizione iniziale è soddisfatta per $c = 1/2$. Quindi
$$x(t) = \frac{2}{2e^{-t} - 1} = \frac{2e^t}{2 - e^t}\,.$$

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2. a) $\frac{1}{2}$; b) 0.

3. Il punto di minimo è 0.

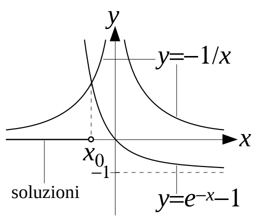
4. $N = 5 \cdot 10^2 = 500$.

5. $A = \int_{-1}^{3} (3 - 2x^2) - (2x-1)\, dx = 9$.

6. Si ha $\sqrt[2]{1+n^{-3a}} - 1 \sim \frac{1}{2n^{3a}}$ per $n \to +\infty$ e quindi la serie converge per $a > \frac{1}{3}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
$$\frac{\dot{x}}{x^2} = e^{-t}\,, \text{ cioè } \int \frac{dx}{x^2} = \int e^{-t} dt\,, \text{ cioè } -\frac{1}{x} = -e^{-t} + c\,,$$
e la condizione iniziale è soddisfatta per $c = 3/2$. Quindi
$$x(t) = \frac{2}{2e^{-t} - 3} = \frac{2e^t}{2 - 3e^t}\,.$$

8. La soluzioni sono $x \le x_0$ con x_0 come nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. La funzione $e^x - e$ è strettamente positiva per $x > 1$ e si annulla per $x = 1$. Pertanto la funzione $(e^x - e)^{1+2a}$ è ben definita e strettamente positiva per $x > 1$, mentre per $x = 1$ è ben definita solo se l'esponente $1 + 2a$ è strettamente positivo.
In generale dunque l'integrale che ci interessa è improprio sia in 1 che in $+\infty$, ed esiste sempre, in quanto integrale di una funzione positiva. Resta quindi da capire quando è finito e quando no.

Conviene a questo punto utilizzare il cambio di variabile $x = t+1$ in modo da riportarsi ad un integrale improprio in 0 e $+\infty$:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} (e^x - e)^{1+2a} dx &= \int_0^{+\infty} (e^{t+1} - e)^{1+2a} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \big(e(e^t-1)\big)^{1+2a} dt = e^{1+2a} \int_0^{+\infty} (e^t - 1)^{1+2a} dt\end{aligned}$$

Spezziamo ora l'ultimo integrale come somma dell'integrale tra 0 e 1 (improprio in 0) e dell'integrale tra 1 e $+\infty$ (improprio in $+\infty$). Osserviamo quindi che per $t \to +\infty$ si ha $e^t - 1 \sim e^t$ e quindi

$$(e^t-1)^{1+2a} \sim e^{(1+2a)t} .$$

Ricordiamo ora che

$$\int_0^{+\infty} e^{bt}\, dt < +\infty \quad \text{se e solo se } b < 0,$$

e dunque, per il principio del confronto asintotico,

$$\int_1^{+\infty} (e^t - 1)^{1+2a} dt < +\infty \quad \text{se e solo se } 1 + 2a < 0,.$$

Studiamo ora l'integrale tra 0 e 1: per $t \to 0$ si ha $e^t - 1 \sim t$ e quindi $(e^t - 1)^{1+2a} \sim t^{1+2a}$; pertanto, ricordando che

$$\int_0^1 t^b\, dt < +\infty \quad \text{se e solo se } b > -1$$

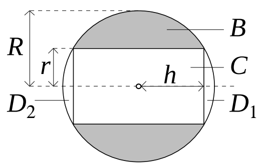
ed usando di nuovo il principio del confronto asintotico, otteniamo che

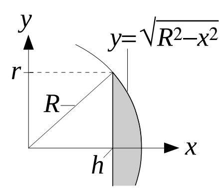
$$\int_0^1 (e^t - 1)^{1+2a} dt < +\infty \quad \text{se e solo se } 1 + 2a > -1..$$

Mettendo insieme questi risultato otteniamo che l'integrale improprio di partenza è finito se e solo se $-1 < 1 + 2a < 0$, vale a dire

$$-1 < a < -\frac{1}{2} .$$

2. Il volume dell'oggetto ottenuto B ottenuto bucando la sfera S è dato dal volume di S meno il volume del cilindro C e delle due calotte sferiche D_1 e D_2 disegnati nella figura sotto a sinistra (per la precisione la figura riporta il disegno di una sezione assiale).





Detto R il raggio della sfera, r il raggio del cilindro (vale a dire il raggio della punta del trapano), e h la semi-altezza del cilindro, per il teorema di Pitagora si ha

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = 6\,\text{mm} . \tag{1}$$

Pertanto

$$\text{volume}(S) = \frac{4\pi}{3} R^3 , \quad \text{volume}(C) = 2\pi r^2 h = 2\pi(R^2 - h^2)h . \tag{2}$$

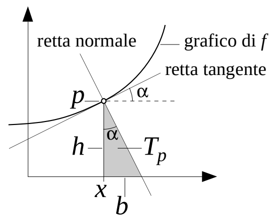
Le due calotte sferiche hanno chiaramente uguale volume, e per calcolarlo le vediamo come solidi di rotazione, come suggerito nella figura sopra a destra:

$$\text{volume}(D_1) = \int_h^R \pi(R^2 - x^2)\, dx = \pi \left| R^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_h^R = \frac{\pi}{3}(2R^3 - 3R^2 h + h^3) . \tag{3}$$

Mettendo insieme le formule (1-3) otteniamo infine

$$\begin{aligned}\text{volume}(C) &= \text{volume}(S) - \text{volume}(C) - 2\cdot\text{volume}(D_1)\\ &= \frac{\pi}{3}\big(4R^3 - 6R^2h + 6h^3 - 4R^3 + 6R^2h - 2h^3\big)\\ &= \frac{4\pi}{3}h^3 = (904{,}8 \pm 0{,}1)\,\text{mm}^3\,.\end{aligned}$$

3. a) Indichiamo con x l'ascissa del punto p. Come si vede nella figura accanto, l'angolo α corrispondente al vertice p del triangolo T_p è uguale all'angolo formato dalla retta tangente al grafico di f in p e l'asse delle x, ed in particolare la tangente di α è il coefficiente angolare della retta tangente, vale a dire $f'(x)$. Dunque l'altezza e la base del triangolo T_p sono date rispettivamente da $h = f(x)$ e $b = h\tan\alpha = f(x)\,f'(x)$, e quindi



$$\text{area}(T_p) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}f^2(x)\,f'(x)\,.$$

b) Stiamo cercando tutte le funzioni f per cui l'area di T_p assume lo stesso valore, che indichiamo con a, per tutti i punti p, ovvero

$$\frac{1}{2}f^2(x)\,f'(x) = a \quad \text{per ogni } x.$$

In altre parole f deve risolvere l'equazione differenziale a variabili separabili $\frac{1}{2}f^2f' = a$ (quindi la funzione incognita è f e la variabile indipendente è x, contrariamente al solito dove x è la funzione incognita e t la variabile indipendente). Procedendo come visto a lezione si ottiene quindi

$$\frac{1}{2}\int f^2 df = \int a\,dt\,,\ \text{cioè}\ \frac{1}{6}f^3 = ax + b\,,\ \text{cioè}\ f = \sqrt[3]{6ax + 6b}\,.$$

Essendo inoltre a e b costanti scelte arbitrariamente, possiamo eliminare il fattore 6 nell'ultimo termine, ottenendo che le funzioni cercate sono tutte e sole quelle della forma

$$f(x) = \sqrt[3]{ax + b} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Sostanzialmente uguale al gruppo 1 (cambia solo un esponente): l'integrale esiste sempre, è finito per $-\frac{2}{3} < a < -\frac{1}{3}$, ed è uguale a $+\infty$ altrimenti.

2. Sostanzialmente uguale al gruppo 1 (cambiano solo le misure del diametro della sfera e della punta del trapano: in questo caso $R = 8{,}5\,\text{mm}$, $r = 4\,\text{mm}$, quindi $h = 7{,}5\,\text{mm}$ e la formula per il volume trovata prima ci da

$$\text{volume}(B) = (1767{,}1 \pm 0{,}1)\,\text{mm}^3\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2. In tutti i gruppi uno dei due limiti era del tipo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^3)}{\log(2+x^2)}\,.$$

Per calcolarlo si noti che $\log(2+x^2) \sim \log(x^2) = 2\log x$ per $x \to +\infty$, ed analogamente $\log(1+x^3) \sim 3\log x$, per cui il limite è uguale a $3/2$. La maggior parte dei presenti ha sbagliato questo esercizio, forse pensando che siccome $2 + x^2 \ll 1 + x^3$ allora si ha anche $\log(2+x^2) \ll \log(1+x^3)$, mentre invece così non è.

- Seconda parte, esercizio 1. Una soluzione alternativa (proposta da una dei presenti) la si ottiene usando il cambio di variabile $t := e^x - e$: nel caso del gruppo 1 si ottiene infatti
$$\int_1^{+\infty} (e^x - e)^{1+2a} dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^{1+2a}}{t+e}}_{g(t)} dt\,,$$
quindi si spezza l'integrale a destra dell'uguale come somma di due integrali impropri semplici (il primo tra 0 e 1 e l'altro tra 1 e $+\infty$) e si osserva che per $t \to 0^+$ si ha $g(t) \sim t^{2a+1}$ e quindi il primo integrale improprio è finito se e solo se $2a + 1 > -1$, cioè $a > -1$, mentre per $t \to +\infty$ si ha $g(t) \sim t^{2a}$ e quindi il secondo integrale improprio è finito se e solo se $2a < -1$, cioè $a < -1/2$.

- Seconda parte, esercizio 1. La maggior parte dei presenti non si è accorta che la funzione da integrare non è definita in 1 quando l'esponente è negativo, e pertanto ha trattato questo integrale come se fosse improprio solo in $+\infty$.

- Seconda parte, esercizio 1. Nella discussione dell'integrale improprio all'infinito alcuni hanno trattato e^{bx} come se fosse x^b, e quindi hanno detto che l'integrale converge se e solo se $b < -1$ (mentre invece basta $b < 0$).

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) $(2x - 2x^2)e^{-2x} = 2x(1-x)e^{-2x}$; b) $\dfrac{2}{1+x} + \dfrac{3}{1-x} = \dfrac{5+x}{1-x^2}$.

2. b $\ll$ a $\ll$ c $\ll$ d.

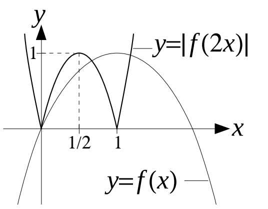
3. $-x^2/2$.

4. Con il cambio di variabile $x = t/\sqrt{2} + 1$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x-1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5. La funzione integranda non è definita per $x = -2, -1$; quindi l'integrale e' improprio e semplice solo per $a = -1$.

6. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine: la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\rm om}(t) = \alpha e^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, quella dell'equazione di partenza è $x(t) = \alpha e^t + 1$, e infine quella che soddisfa la condizione iniziale assegnata è $x(t) = -e^t + 1$.

7. Si tratta di una serie geometrica appena camuffata: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\frac{1}{1-2/3} = 6$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) $-\dfrac{2}{1-x} - \dfrac{3}{1+x} = \dfrac{x-5}{1-x^2}$; b) $(2x - 3x^2)e^{-3x} = x(2-3x)e^{-3x}$.

2. b $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ a.

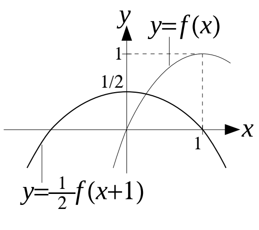
3. $-1/x^2$.

4. Con il cambio di variabile $x = t/\sqrt{3} - 1$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3(x+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

5. La funzione integranda non è definita per $x = -3, 1$; quindi l'integrale e' improprio e semplice solo per $a = 1$.

6. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine: la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\rm om}(t) = \alpha e^{-t}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, quella dell'equazione di partenza è $x(t) = \alpha e^{-t} - 1$, e infine quella che soddisfa la condizione iniziale assegnata è $x(t) = e^{-t} - 1$.

7. Si tratta di una serie geometrica appena camuffata: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 3\frac{1}{1-3/4} = 12$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $(3x^2 - 2x^3)e^{-2x} = x^2(3-2x)e^{-2x}$; b) $\dfrac{3}{1+x} + \dfrac{2}{1-x} = \dfrac{5-x}{1-x^2}$.

2. a $\ll$ d $\ll$ c $\ll$ b.

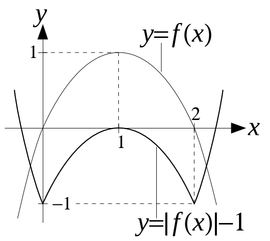
3. $-x^2/12$.

4. Con il cambio di variabile $x = t/\sqrt{3} + 1$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3(x-1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\frac{dt}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

5. La funzione integranda non è definita per $x = 1, 2$; quindi l'integrale e' improprio e semplice solo per $a = 2$.

6. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine: la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\mathrm{om}}(t) = \alpha e^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, quella dell'equazione di partenza è $x(t) = \alpha e^t - 1$, e infine quella che soddisfa la condizione iniziale assegnata è $x(t) = e^t - 1$.

7. Si tratta di una serie geometrica appena camuffata: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-3/4} = 1$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $-\dfrac{3}{1-x} - \dfrac{2}{1+x} = -\dfrac{5+x}{1-x^2}$; b) $(3x^2 - 3x^3)e^{-3x} = 3x^2(1-x)e^{-3x}$.

2. d $\ll$ c $\ll$ a $\ll$ b.

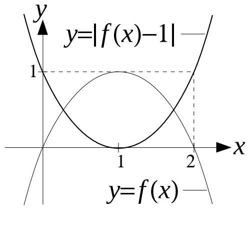
3. $-6/x^2$.

4. Con il cambio di variabile $x = t/\sqrt{2} - 1$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\frac{dt}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5. La funzione integranda non è definita per $x = -1, 3$; quindi l'integrale e' improprio e semplice solo per $a = 3$.

6. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine: la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $x_{\mathrm{om}}(t) = \alpha e^{-t}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, quella dell'equazione di partenza è $x(t) = \alpha e^{-t} + 1$, e infine quella che soddisfa la condizione iniziale assegnata è $x(t) = -e^{-t} + 1$.

7. Si tratta di una serie geometrica appena camuffata: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-2/3} = 1$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Procediamo per passi: l'equazione omogenea associata alla (*) è $\ddot{x} + x = 0$, l'equazione caratteristica corrispondente è $\lambda^2 + 1 = 0$, ed ha come soluzioni $\lambda = \pm i$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è:
$$x_{\text{om}}(t) = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Osserviamo adesso che il termine noto della (*) non appare nel ricettario dato a lezione, ma si scrive come somma di due termini, 1 e $\sin(at)$, che ci appaiono. Pertanto una soluzione particolare della (*) la otterremo come somme di due soluzioni particolari x_1 e x_2 delle seguenti equazioni
$$\ddot{x} + x = 1\,, \quad \ddot{x} + x = \sin(at)\,.$$
Il termine noto della prima di queste due equazioni è una costante (o polinomio di grado 0) e quindi una soluzione particolare la si trova tra le costanti, e per la precisione
$$x_1(t) = 1\,. \tag{2}$$
Per quanto riguarda la seconda equazione, il ricettario dice di cercare una soluzione particolare tra le funzioni della forma $x(t) = c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, e facendo i dovuti conti otteniamo
$$x_2(t) = \frac{\sin(at)}{1 - a^2}\,. \tag{3}$$
Mettendo insieme (1-3) otteniamo infine che la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + 1 + \frac{\sin(at)}{1 - a^2} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
Imponiamo ora che x soddisfi le condizioni iniziali $x(0) = \dot{x}(0) = 0$; così facendo otteniamo
$$\begin{cases} 0 = x(0) = \alpha_1 + 1 \\ 0 = \dot{x}(0) = \alpha_2 + \frac{a}{1-a^2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -\frac{a}{1-a^2} \end{cases}$$
e la soluzione cercata è quindi
$$x(t) = 1 - \cos t + \frac{\sin(at) - a\sin(t)}{1 - a^2} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}..$$
b) Rivedendo quanto fatto sopra ci si accorge che la soluzione particolare dell'equazione $\ddot{x} + x = \sin(at)$ data nella formula (3) non ha senso per $a = 1$. Infatti per $a = 1$ le funzioni della forma $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ sono soluzioni dell'equazione omogenea e pertanto non possono essere anche soluzioni della non omogenea, e di conseguenza la soluzione particolare va cercata tra le funzioni della forma $x(t) = c_1 t \cos t + c_2 t \sin t$. Facendo i dovuti conti si ottiene
$$x_2(t) = -\frac{t}{2} \cos t\,,$$
e la soluzione generale della (*) per $a = 1$ è
$$x(t) = \Big(\alpha_1 - \frac{t}{2}\Big) \cos t + \alpha_2 \sin t + 1 \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}..$$

2. Osserviamo innanzitutto che la serie in questione è a termini positivi e quindi ci sono solo due comportamenti possibili: la serie converge ad un numero finito oppure diverge a $+\infty$. Osserviamo inoltre che per $n \to +\infty$ il termine generico soddisfa
$$\frac{n + \log n}{n^2 \log^a n} \sim \frac{1}{n \log^a n}\,.$$
Pertanto, per il principio del confronto asintotico il comportamento della nostra serie coincide con quello di
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^a n}\,,$$
e per il principio del confronto integrale il comportamento di quest'ultima serie coincide con quello dell'integrale improprio
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^a x}\,.$$

Come visto a lezione, applicando il cambio di variabile $t = \log x$ questo integrale diventa

$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$$

e pertanto converge ad un numero finito se e solo se $a > 1$.
E lo stesso vale per la serie di partenza.

3. a) Osserviamo che i seguenti fatti sono equivalenti:
   (i) $f(x) = x^5 - ax^3 + 9x$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$;
   (ii) $f'(x) = 5x^4 - 3ax^2 + 9 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
   (iii) il valore minimo di f' su $\mathbb{R}$ è maggiore o uguale a 0.

   Dobbiamo dunque calcolare il valore minimo m di f' su tutto $\mathbb{R}$ e poi determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui $m \geq 0$. Per trovare il punto di minimo di f' studiamo il segno della derivata $f''(x) = 20\,x^3 - 6ax = x(20\,x^2 - 6a)$. Si presentano due casi: se $a \leq 0$ otteniamo che $x = 0$ è il punto di minimo assoluto, per cui $m = f'(0) = 9$ ed è sempre positivo; se invece $a > 0$ abbiamo che $x = \pm\sqrt{3a/10}$ sono i punti di minimo assoluto, per cui

$$m = f'\big(\pm\sqrt{3a/10}\big) = \frac{9}{20}(20 - a^2)\,,$$

   ed in particolare $m \geq 0$ per $a \leq \sqrt{20}$ (ricordo che $a > 0$ per ipotesi). In conclusione f è crescente su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a \leq \sqrt{20}$.

   b) Osserviamo che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a x^5 per $x \to +\infty$, vale a dire

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^5} = 1\,.$$

   Usando ora il cambio di variabile $y = f(x)$, e tenendo conto che $x \to +\infty$ quando $y \to +\infty$, otteniamo

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(f^{-1}(y))^5} = 1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{1/5}}{f^{-1}(y)} = 1$$
$$\Rightarrow\quad f^{-1}(y) \sim y^{1/5} \text{ per } y \to +\infty.$$

   Analogamente, usando il fatto che $f(x) \sim 9x$ per $x \to 0$, otteniamo che

$$f^{-1}(y) \sim \frac{y}{9} \quad \text{per } y \to 0.$$

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 5. Stranamente quasi nessuno dei presenti ha svolto correttamente questo esercizio.

- Prima parte, esercizio 6. È anche possibile anche riscrivere l'equazione differenziale in questione come un'equazione a variabili separabili; per esempio per il gruppo 1 si ha $\dot{x} = x - 1$.

- Seconda parte, esercizio 3a). Un modo alternativo per capire quando vale la condizione

$$f'(x) = 5x^4 - 3ax^2 + 9 \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

  è utilizzare il cambio di variabile $x^2 = t$ per riscriverla come

$$5t^2 - 3at + 9 \geq 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0. \tag{4}$$

  Qui c'è un punto delicato: detto $\Delta = 9(a^2 - 20)$ il discriminante del trinomio $5t^2 - 3at + 9$, la condizione $\Delta \leq 0$ è *sufficiente* affinché valga la (4), ma non è *necessaria*. Infatti la (4) vale anche quando $\Delta > 0$ e le radici di $5t^2 - 3at + 9$ sono entrambe negative o nulle.

- Seconda parte, esercizio 3a). Nessuno dei presenti ha risolto correttamente questo esercizio. E nello studiare il segno della derivata, alcuni dei hanno anche detto che la disequazione di secondo grado $5t^2 - 3at + 9 \geq 0$ è soddisfatta (per ogni t) quando il discriminante Δ è *positivo*, invece che negativo. . .

Prima parte, gruppo 1.

1. $a < -1$.

2. a) $1/2$; b) 0; c) $+\infty$.

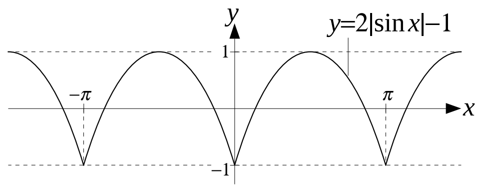
3. $N = 5^2 \cdot 9^3 \cdot 16^2 = 4.665.600$.

4. Integriamo per parti, usando il fatto che una primitiva di e^{-ax} è $-\dfrac{e^{-ax}}{a}$:
$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax}\,dx = \left| -x\frac{e^{-ax}}{a} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{a}\,dx = \left| -\frac{e^{-ax}}{a^2} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{a^2}\,.$$

5. Si ha $\dfrac{n^a - \sin(n^a)}{2^n + n^{2a}} \sim \dfrac{n^a}{2^n} \ll \dfrac{1}{n^2}$, per cui la serie converge per ogni a.

6. Partendo da $x := t^a \log t$ si ottiene $\dot{x} = t^{a-1}(a \log t + 1)$ e sostituendo l'equazione differenziale diventa $(a+2)t^a \log t + t^a = t^a$, che è soddisfatta per $a = -2$.

7. La soluzione è $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. $a > -2$.

2. a) 0; b) non esiste; c) -1.

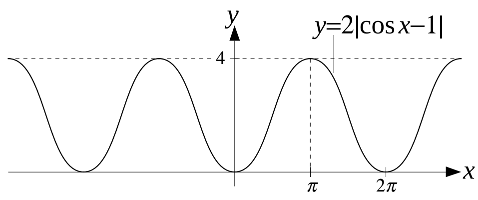
3. $N = (21 \cdot 20) \cdot 9^3 \cdot (19 \cdot 18) = 104.713.560$.

4. Integriamo per parti, usando il fatto che una primitiva di e^{-ax} è $-\dfrac{e^{-ax}}{a}$:
$$\int xe^{-ax}\,dx = -x\frac{e^{-ax}}{a} + \int \frac{e^{-ax}}{a}\,dx = -\frac{xe^{-ax}}{a} - \frac{e^{-ax}}{a^2} + c = -\frac{ax+1}{a^2}e^{-ax} + c\,.$$

5. Si ha $\dfrac{n^a - \log(n^a)}{2^{-n} + n^{2a}} \sim \dfrac{n^a}{n^{2a}} = \dfrac{1}{n^a}$, per cui la serie converge per $a > 1$.

6. Partendo da $x := t^a \log t$ si ottiene $\dot{x} = t^{a-1}(a \log t + 1)$ e sostituendo l'equazione differenziale diventa $(a+3)t^a \log t + t^a = t^a$, che è soddisfatta per $a = -3$.

7. La soluzione è $x(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^{-2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Nessun a.

2. a) 2; b) $+\infty$; c) 1.

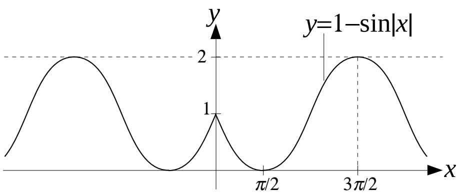
3. $N = (21 \cdot 20) \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot 21^2 = 93.350.880$.

4. Integriamo per parti, usando il fatto che una primitiva di e^{ax} è $\dfrac{e^{ax}}{a}$:
$$\int_{-\infty}^{0} x e^{ax}\, dx = \left| x \frac{e^{ax}}{a} \right|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax}}{a}\, dx = -\left| \frac{e^{ax}}{a^2} \right|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{a^2}\,.$$

5. Si ha $\dfrac{n^a - \cos(n^a)}{\log n + n^{3a}} \sim \dfrac{n^a}{n^{3a}} = \dfrac{1}{n^{2a}}$, per cui la serie converge per $a > 1/2$.

6. Partendo da $x := t^a \log t$ si ottiene $\dot{x} = t^{a-1}(a \log t + 1)$ e sostituendo l'equazione differenziale diventa $(a-1)t^a \log t + t^a = t^a$, che è soddisfatta per $a = 1$.

7. La soluzione è $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. $a \leq 1$.

2. a) $+\infty$; b) non esiste; c) -2.

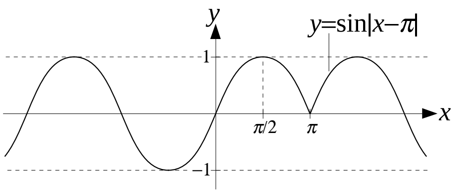
3. $N = 21^2 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7) \cdot (21 \cdot 20) = 93.350.880$.

4. Integriamo per parti, usando il fatto che una primitiva di e^{ax} è $\dfrac{e^{ax}}{a}$:
$$\int x e^{ax}\, dx = x\frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}\, dx = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + c = \frac{ax - 1}{a^2} e^{ax} + c\,.$$

5. Si ha $\dfrac{n^a + 2^n}{\log n + n^{3a}} \sim \dfrac{2^n}{n^{3a}} \to +\infty$, per cui la serie diverge a $+\infty$ per ogni a.

6. Partendo da $x := t^a \log t$ si ottiene $\dot{x} = t^{a-1}(a \log t + 1)$ e sostituendo l'equazione differenziale diventa $(a-2)t^a \log t + t^a = t^a$, che è soddisfatta per $a = 2$.

7. La soluzione è $x(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

Seconda parte.

1. a) Visto che usiamo la lettera x per indicare l'ascissa di un punto del grafico di f, per scrivere l'equazione della retta tangente al grafico in tale punto usiamo come variabile indipendente la

lettera t. Così facendo l'equazione è

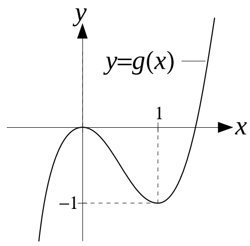
$$y = f'(x)(t-x) + f(x)\,,$$

e quindi la retta in questione passa per l'origine se per $t = 0$ otteniamo $y = 0$, vale a dire se $0 = f(x) - x\,f'(x)$. Nel caso specifico questa equazione diventa

$$\underbrace{2x^3 - 3x^2}_{g(x)} = a\,. \tag{1}$$

b) A questo punto il numero di rette tangenti al grafico di f che passano per l'origine è uguale al numero di soluzioni dell'equazione (1).

Per calcolare questo numero al variare di a studiamo il grafico della funzione $g(x)$. Tale funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, e studiando il segno della derivata $g'(x) = 6x(x-1)$ otteniamo che $g(x)$ cresce per $x \leq 0$ e per $x \geq 1$, e decresce $0 \leq x \leq 1$. In particolare 0 è un punto di massimo locale (e $g(0) = 0$) mentre 1 è un punto di minimo locale (e $g(1) = -1$).



Sulla base di quanto appena detto ricaviamo il grafico nella figura accanto, da cui risulta chiaro che

- per $a < -1$ e per $a > 0$ l'equazione (1) ha una soluzione;
- per $a = -1$ e $a = 0$ l'equazione (1) ha due soluzioni;
- per $-1 < a < 0$ l'equazione (1) ha tre soluzioni.

2. a) Per $a = 1/2$ l'insieme A è definito dalle disequazioni

$$|x| \leq y \leq \sqrt{1+x^2}\,.$$

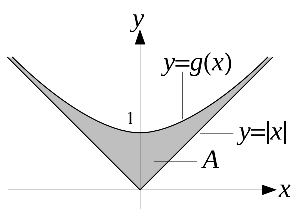
Il grafico della funzione $|x|$ è noto, mentre per quanto riguarda la funzione $g(x) := \sqrt{1+x^2}$, osserviamo che è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è pari, soddisfa $g(x) > |x|$ per ogni x, e per $x \to +\infty$ si ha

$$g(x) = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = x\left[1 + O(1/x^2)\right] = x + O(1/x)$$

(nel primo passaggio abbiamo raccolto x e nel secondo abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{1/2} = 1 + O(t)$ con $t = 1/x^2$). Analogamente si ottiene che $g(x) = -x + O(1/x)$ per $x \to -\infty$, e dunque $g(x) = |x| + O(1/x)$ per $x \to \pm\infty$, il che significa che i grafici di $g(x)$ e $|x|$ sono sempre più vicini quando x tende a $\pm\infty$. Infine, studiando il segno della derivata

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,,$$

si ottiene che la funzione cresce per $x \geq 0$ e decresce per $x \leq 0$. Sulla base di quanto appena detto tracciamo il disegno sottostante.



b) Siccome $x^2 < x^2 + 1$ per ogni x, elevando alla potenza a otteniamo che $|x|^{2a} < (1+x^2)^a$ e quindi l'intersezione di A con la retta verticale data dai punti di ascissa x è sempre un intervallo non vuoto (come nel caso $a = 1/2$). Pertanto

$$\text{area}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)^a - |x|^{2a}\,dx\,,$$

e usando il fatto che la funzione integranda è pari otteniamo

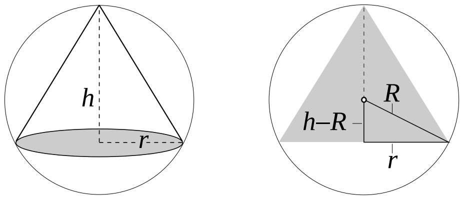
$$\text{area}(A) = 2\int_0^{+\infty} (1+x^2)^a - x^{2a}\,dx\,. \tag{2}$$

Si tratta ora di capire per quali a questo integrale improprio semplice è finito. A questo scopo calcoliamo la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$:

$$(1+x^2)^a - x^{2a} = x^{2a}\left[\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)^a - 1\right] = x^{2a}\left[1+\frac{a}{x^2}+O\Big(\frac{1}{x^4}\Big)-1\right] \sim \frac{a}{x^{2-2a}}$$

(nel primo passaggio abbiamo raccolto x^{2a} e nel secondo abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^a = 1+at+O(t^2)$ con $t = 1/x^2$). Applicando infine il principio del confronto asintotico otteniamo che l'area di A, ovvero l'integrale improprio in (2), è finita se e solo se $2-2a > 1$, vale a dire $a < 1/2$.

3. Indichiamo con h l'altezza di un cono C iscritto nella sfera.



Come risulta chiaro dal disegno sopra, il raggio di base del cono è allora dato da

$$r = \sqrt{R^2-(h-R)^2} = \sqrt{2Rh-h^2}$$

e pertanto il volume è

$$\text{volume}(C) = \frac{\pi}{3}r^2h = \frac{\pi}{3}(2Rh^2-h^3)\,.$$

Dobbiamo quindi trovare il punto di massimo della funzione $g(h) := 2Rh^2 - h^3$ tra tutti gli h compresi tra 0 e $2R$ (vale a dire i valori ammissibili per l'altezza di un cono iscritto). Studiando il segno della derivata $g'(h) = 4Rh - 3h^2 = h(4R-3h)$ otteniamo che la funzione cresce per $h \le \frac{4}{3}R$ e decresce per $h \ge \frac{4}{3}R$, e in particolare $h = \frac{4}{3}R$ è il punto di massimo.

Pertanto il cono cercato è quello di altezza $h = \frac{4}{3}R$ e raggio di base $r = \frac{\sqrt{8}}{3}R$, ed ha volume $V = \frac{31\pi}{81}R^3$.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno spezzato l'integrale improprio da calcolare per ottenere l'area come somma di due integrali impropri nel modo seguente
$$\int_0^{+\infty}(1+x^2)^{2a}-|x|^{2a}dx = \int_0^{+\infty}(1+x^2)^{2a}dx - \int_0^{+\infty}|x|^{2a}\,dx\,.$$
Succede però che i due integrali così ottenuti sono sempre uguali a $+\infty$ (ricordo che $a > 0$ per ipotesi) e quindi questa scomposizione non permette di dire alcunché sull'integrale di partenza (invece molti dei presenti ne hanno dedotto che l'area di A non è finita).

- Seconda parte, esercizio 3. È possibile impostare il problema diversamente, prendendo per esempio come variabile il raggio di base del cono (invece dell'altezza). Questa impostazione è corretta, ma sfortunatamente porta a calcoli nettamente più complicati.

Prima parte, gruppo 1.

1. a) $(3x^2 - x^3)e^{-x}$; b) $\dfrac{3x^2}{x^3-1} - \dfrac{3x^2}{x^3+1} = \dfrac{6x^2}{x^6-1}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) 0; b) $-\infty$; c) $\dfrac{3}{2}$.

3. $N = \dbinom{8}{3} = 56$.

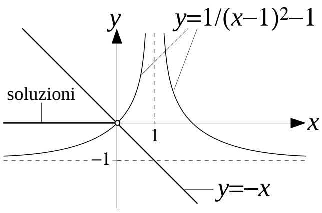
4. Il punto cercato è $x = -\dfrac{1}{2}$.

5. Usando il cambio di variabile $y = \sin x + 1$ si ottiene

$$\int (\sin x + 1)^a \cos x \, dx = \int y^a \, dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} = \frac{(\sin x + 1)^{a+1}}{a+1} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}..$$

6. Ogni $a > 0$.

7. $x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. a) $\dfrac{3x^2}{x^3+1} - \dfrac{3x^2}{x^3-1} = \dfrac{-6x^2}{x^6-1}\Big)$; b) $(1-2x)e^{-2x}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) 0; b) $-\infty$; c) 0.

3. $N = \dbinom{7}{3} = 35$.

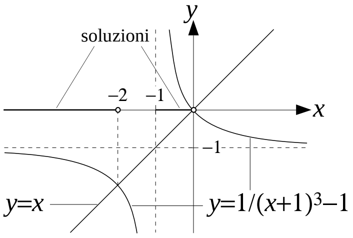
4. Il punto cercato è $x = 0$.

5. Usando il cambio di variabile $y = \log x - 1$ si ottiene

$$\int_e^{e^2} \frac{(\log x - 1)^a}{x} \, dx = \int_0^1 y^a \, dy = \left| \frac{y^{a+1}}{a+1} \right|_0^1 = \frac{1}{a+1} \, .$$

6. Deve essere $0 < a < 2/3$.

7. $x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 1$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. a) $\dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{4x}{x^4-1}$; b) $(3x^2+2x^3)e^{2x}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $-\infty$; b) $\dfrac{3}{2}$; c) $-\infty$.

3. $N = \dbinom{7}{2} = 21$.

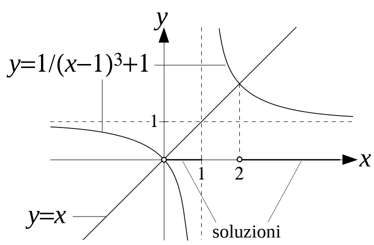
4. Il punto cercato è $x = 1$.

5. Usando il cambio di variabile $y = \sin x + 1$ si ottiene

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + 1)^a \cos x \, dx = \int_0^2 y^a \, dy = \left| \frac{y^{a+1}}{a+1} \right|_0^2 = \frac{2^{a+1}}{a+1} \, .$$

6. Deve essere $0 < a < 1/2$.

7. $x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8.


Prima parte, gruppo 4.

1. a) $(2x - x^2)e^{-x}$; b) $\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{-4x}{x^4-1}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\cos 1$; b) $+\infty$; c) 0.

3. $N = \dbinom{8}{4} = 70$.

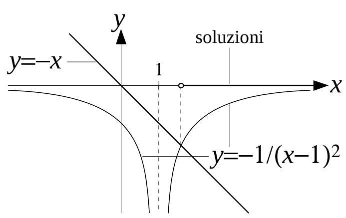
4. Il punto cercato è $x = 0$.

5. Usando il cambio di variabile $y = \log x - 1$ si ottiene

$$\int \frac{(\log x - 1)^a}{x} \, dx = \int y^a \, dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} = \frac{(\log x - 1)^{a+1}}{a+1} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \, .$$

6. Deve essere $a > 1$.

7. $x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 1$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8.


SECONDA PARTE.

1. a) Dividendo l'equazione per t otteniamo

$$\dot{x} + \frac{3}{t}x = \frac{e^{-t^3}}{t}\,,$$

che è un'equazione lineare del primo ordine (a coefficienti non costanti). Ora, una primitiva del coefficiente $3/t$ è $3\log t$; moltiplichiamo quindi tutta l'equazione per $\exp(3\log t) = t^3$ e procedendo come al solito otteniamo

$$x(t) = \frac{1}{t^3}\left[\int e^{-t^3} t^2\,dt + c\right] = \frac{3c - e^{-t^3}}{3t^3} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

(la primitiva nel secondo termine è stata calcolata usando il cambio di variabile $s = -t^3$).
b) Affinché il limite della soluzione $x(t)$ per $t \to 0^+$ sia finito è *necessario* che il numeratore nell'ultimo termine di (1) sia nullo in 0, vale a dire $3c = 1$, e dunque l'unica soluzione che *potrebbe* avere limite finito in 0 è

$$x(t) = \frac{1 - e^{-t^3}}{3t^3}\,.$$

Resta da verificare che il limite di tale funzione sia effettivamente zero (la condizione che il numeratore si annulli in zero è necessaria, ma non sufficiente). In effetti

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1 - e^{-t^3}}{t^3} = \lim_{s\to 0^-} \frac{e^s - 1}{s} = 1$$

(nel secondo passaggio abbiamo usato nuovamente il cambio di variabile $s = -t^3$).

2. Quando x tende a $+\infty$ abbiamo che

$$f_a(x) = (x^2+2)^a \sim x^{2a}$$

e dunque $g_a(x) := x^{2a}$ è la parte principale cercata.
Ricordo poi che una funzione è convessa se la derivata seconda è sempre positiva (o nulla). Ora

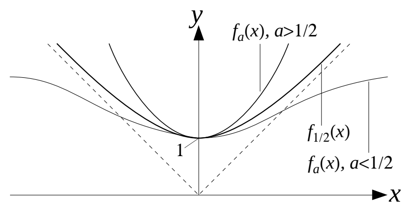
$$f'_a(x) = 2ax(x^2+2)^{a-1}\,, \quad f''_a(x) = 2a((2a-1)x^2+2)(x^2+2)^{a-2}\,, \tag{2}$$

e quindi è chiaro che f''_a è sempre positiva (ovvero f_a è convessa) se e solo se il fattore

$$(2a-1)x^2 + 2$$

è sempre positivo, ovvero se e solo se $2a - 1 \geq 0$, vale a dire $a \geq 1/2$.
b) La funzione $f_a(x)$ è ben definita e positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre dallo studio del segno della derivata prima calcolata in (2) otteniamo che $f_a(x)$ cresce per $x \geq 0$ e decresce per $x \leq 0$. Abbiamo inoltre già visto che per $a \geq 1/2$ la funzione f_a è sempre convessa, mentre per $a < 1/2$ lo studio del segno della derivata seconda calcolata in (2) ci mostra che
   - f_a è convessa nell'intervallo $-c_a \leq x \leq c_a$ dove $c_a := \sqrt{2/(1-2a)}$;
   - f_a è concava nelle semirette $x \leq -c_a$ e $x \geq c_a$.

Usando quanto detto (e il fatto che $f_a \sim x^{2a}$ per $x \to +\infty$) otteniamo i grafici nella figura sottostante.



c) Si vede subito che $f_a(x) > g_a(x)$ per ogni $x \geq 0$, ovvero il grafico di f_a giace sopra di quello di g_a. Questo ci dice che l'area dell'insieme A_a è data dall'integrale

$$\text{area}(A_a) = \int_0^{+\infty} f_a(x) - g_a(x)\,dx\,.$$

Questo integrale è improprio all'infinito, ed esiste sempre perché la funzione integranda $f_a - g_a$ è positiva; si tratta quindi di capire per quali a è finito. Cerchiamo dunque la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} f_a(x) - g_a(x) &= (x^2+2)^a - x^2 a \\ &= x^{2a}\Big[\Big(1+\frac{2}{x^2}\Big)^a - 1\Big] \\ &= x^{2a}\Big[1+\frac{2a}{x^2}+O\Big(\frac{1}{x^4}\Big) - 1\Big] \sim 2a\,x^{2a-2} \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio abbiamo raccolto x^{2a} da tutti i termini, nel terzo abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^a = 1 + at + O(t^2)$). Utilizzando infine il principio del confronto asintotico per gli integrali impropri otteniamo che l'area di A_a è finita se e solo se l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x^{2a-2}\,dx$ è finito, cioè se e solo se $a < 1/2$.

3. a) Il modo più semplice per ottenere questo sviluppo di Taylor è applicare la definizione e calcolare le derivate della funzione $\tan x$ fino a quella di ordine 3. Così facendo si ottiene

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5) \tag{3}$$

(il resto è $O(x^5)$ e non $O(x^4)$ perché la funzione $\tan x$ è dispari).

b) Osserviamo che, per $x \to 0$,

$$\tan(\log(1+x^2)) \sim \log(1+x^2) \sim x^2 \tag{4}$$

(nel primo passaggio abbiamo usato il fatto che $\tan t \sim t$ per $t \to 0$ ponendo $t = \log(1+x^2)$, nel secondo abbiamo usato che $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$ con $t = x^2$). Analogamente abbiamo che, sempre per $x \to 0$,

$$\tan(x^a) \sim x^a\,,$$

e mettendo insieme questa formula con la (4) otteniamo

$$\tan(x^a) - \tan(\log(1+x^2)) = \begin{cases} x^a + o(x^a) \sim x^a & \text{se } a < 2, \\ -x^2 + o(x^2) \sim -x^2 & \text{se } a > 2. \end{cases}$$

Resta da considerare il caso $a = 2$, per cui i calcoli fatti sopra non sono sufficienti a determinare la risposta. Osserviamo che

$$\tan(\log(1+x^2)) = \log(1+x^2) + O\big(\log(1+x^2))^3\big) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6) \tag{5}$$

(nel primo passaggio abbiamo usato lo sviluppo $\tan t = t + O(t^3)$ con $t = \log(1+x^2)$, nel secondo abbiamo usato lo sviluppo $\log(1+t) = t - t^2/2 + O(t^3)$ con $t = x^2$). Analogamente si ottiene che

$$\tan(x^2) = x^2 + O(x^6)\,,$$

e mettendo insieme questa equazione con la (5) otteniamo infine

$$\tan(x^2) - \tan(\log(1+x^2)) = \frac{x^4}{2} + O(x^6) \sim \frac{x^4}{2}\,.$$

Versione: 8 ottobre 2015

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2014-15

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 7 gennaio 2015]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria.
   - 1.2 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, immagine, funzione inversa; funzioni crescenti e decrescenti. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.3 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - 2.1 Limiti di funzioni, proprietà elementari, forme indeterminate.
   - 2.2 Funzioni continue. Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass).
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcune interpretazioni fisiche: velocità e accelerazione.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Teorema di Lagrange. Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Teoremi di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - 3.5 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero.
   - 3.6 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali. *Giustificazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ tramite gli sviluppi di Taylor.*
4. Alcuni risultati astratti
   - 4.1 *Numeri interi, razionali e reali. Completezza dei numeri reali.*
   - 4.2 Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i imiti di funzioni.
   - 4.3 Teorema di esistenza degli zeri. *Algoritmo di bisezione e algoritmo di Newton.*
5. Integrali
   - 5.1 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Un'interpretazione fisica dell'integrale.
   - 5.2 Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - 5.3 Regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
   - 5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.
   - 5.5 Integrali impropri semplici. Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
   - 5.7 Integrali impropri non semplici.

6. Serie numeriche e serie di potenze

6.1 Serie numeriche. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: dell'integrale, del confronto, e del confronto asintotico Esempi fondamentali: la serie geometrica e la serie armonica generalizzata. Criterio della convergenza assoluta per le serie a termini di segno variabile.

6.2 Criterio del rapporto e della radice per successioni e per serie a termini positivi. Serie di potenze e raggio di convergenza. *Serie di Taylor, con dimostrazione della convergenza per alcune funzioni elementari. Espressione dei numeri e e π come serie.*

7. Equazioni differenziali

7.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica. Significato delle condizioni iniziali.

7.2 Equazioni lineari del primo ordine.

7.3 Equazioni a variabili separabili.

7.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Calcolo della soluzione particolare per certe classi di termini noti. *Equazione del pendolo e dell'oscillatore armonico, oscillatore armonico smorzato e forzato, risonanza.*

T E S T I

Prima parte, gruppo 1.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{1-2x}$ nel punto di ascissa $x = 1$.
2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(1 + 2x - x^2)$ relativamente all'intervallo $[0, 2]$.
3. Trovare le soluzioni $x \in [0, 2]$ della disequazione $2\sin(x^2) \geq \sqrt{3}$.
4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^2+1}{e^x}$; b) $\arcsin(1 - x)$; c) $\log\Big(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\Big)$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x^2)}{\log(1+x^4)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\sqrt{x})}{x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{2x}{\sin x}$.
6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{2^{x^2}}_{a} \ll \underbrace{\log(xe^x)}_{b} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x+1}{3^x-1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$
7. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(1/x^2)\,\cos(e^{-x})}{2x^3+1}$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\arctan x - \pi/2 \leq y \leq e^{-x} - 1$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{2-3x}$ nel punto di ascissa $x = 2/3$.
2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(2 + 2x + x^2)$ relativamente all'intervallo $[0, 2]$.
3. Trovare le soluzioni $x \in [0, 2]$ della disequazione $2\cos(x^2) \geq \sqrt{3}$.
4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\Big(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\Big)$; b) $\dfrac{x^2-1}{e^x}$; c) $\arcsin(1 + 2x)$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\exp(\sqrt{x})}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{3x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\exp(2x^2)}{\sin(x^2)}$.
6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{e^{x}}_{a} \ll \underbrace{e^{x+\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x+1}{3^x-1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$
7. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{(3x^2+1)\,\cos(e^{-x})}{\log(1+1/x^3)}$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan(x - 1) \geq 1 - e^x$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{3-4x}$ nel punto di ascissa $x = 1$.
2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(3 + 2x - x^2)$ relativamente all'intervallo $[2, 3]$.

3. Trovare le soluzioni $x \in [0, 2]$ della disequazione $2\cos(x^2) \leq \sqrt{3}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(1-2x)$; b) $\log\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$; c) $\dfrac{x^2+2}{e^x}$.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{1-\exp(2x^2)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\sqrt[3]{x})}{x^2}$.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{e^x}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{6^x+1}{2^x-1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

7. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{\sin(1/x^4)\,\cos(e^{-x})}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\arctan x - \pi/2 \geq y \geq e^{-x} - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{1-2x}$ nel punto di ascissa $x = 1/2$.

2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(1 + 2x + x^2)$ relativamente all'intervallo $[-2, 0]$.

3. Trovare le soluzioni $x \in [0, 2]$ della disequazione $2\sin(x^2) \geq \sqrt{2}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^3+1}{e^x}$; b) $\arcsin(1-x)$; c) $\log\left(\dfrac{x^4+1}{x^4-1}\right)$.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x^3)}{\log(1+x^6)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\sqrt{x})}{x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\pi^+} \frac{2x^2}{\sin x}$.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{3^x+1}{2^x-1}}_{a} \ll \underbrace{x\log x}_{b} \ll \underbrace{2^{-x^2}}_{c} \ll \underbrace{\log(xe^x)}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

7. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(1/x^2)\,\cos(e^{-x})}{2x^3-1}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan x - \pi/2 \geq e^{-x} - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{2-3x}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(2 - 2x - x^2)$ relativamente all'intervallo $[-2, 2]$.

3. Trovare le soluzioni $x \in [0, 2]$ della disequazione $2\sin(x^2) \geq 1$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right)$; b) $\dfrac{x^3-1}{e^x}$; c) $\arcsin(1+2x)$.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\exp(\sqrt{x})}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\pi}\frac{3x^2}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\exp(3x^3)}{\sin(x^3)}$.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{e^x}_{a} \ll \underbrace{\frac{3^x-1}{4^x+1}}_{b} \ll \underbrace{e^{x-\log x}}_{c} \ll \underbrace{x\log x}_{d} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

7. Trovare la parte principale per $x\to+\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{(3x^2-1)\cos(e^{-x})}{\sin(1/x^3)}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $\arctan(x-1)\le y\le e^{-x}-1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{3-4x}$ nel punto di ascissa $x=3/4$.

2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(3-2x+x^2)$ relativamente all'intervallo $[-1,0]$.

3. Trovare le soluzioni $x\in[0,2]$ della disequazione $2\cos(x^2)\le 1$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(1-2x)$; b) $\log\left(\dfrac{x^4-1}{x^4+1}\right)$; c) $\dfrac{x^3+2}{e^x}$.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\pi^-}\frac{x^2}{\sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^3)}{1-\exp(3x^3)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(\sqrt[3]{x})}{x^2}$.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{e^x}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4^x+1}{2^x-1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{\log^2 x}{x}}_{d} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

7. Trovare la parte principale per $x\to+\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{2x^2+1}{\log(1+1/x^4)\cos(e^{-x})}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan(x-1)\ge e^{-x}-1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dato $a\ne 0$ numero reale, poniamo $f(x) := (\sin(x^4))^a$ e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x\to 0^+$.
   a) Determinare $g(x)$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)-g(x)$ per $x\to 0^+$.

2. a) Dire se è vero o meno che $16+x^6\ge\frac{1}{10}(4+x^2)^3$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.
   b) Trovare la più grande costante m tale che $16+x^6\ge m(4+x^2)^3$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.
   c) Trovare la più piccola costante M tale che $16+x^6\le M(4+x^2)^3$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

3. Una compagnia deve stendere due cavi interrati per la trasmissione dati dalla città A (rappresentata dal punto del piano cartesiano di coordinate $(1,0)$) alle località C e C' (rappresentate da $(0,c)$ e $(0,-c)$ con c è un numero positivo), e per risparmiare sul costo degli scavi si considera la possibilità di usare lo stesso tracciato per i due cavi fino ad un certo punto B di coordinate $(x,0)$, per poi farli proseguire separatamente verso le rispettive destinazioni.

Tenendo conto che il costo unitario delle opere di scavo è 5, mentre il costo unitario del cavo da stendere è 1, dire per quali c conviene separare immediatamente i due tracciati, cioè conviene prendere B uguale ad A, e per quali no.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dato $a \neq 0$ numero reale, poniamo $f(x) := (\log(1+x^5))^a$ e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.
   a) Determinare $g(x)$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0^+$.
2. a) Dire se è vero o meno che $243 + x^8 \geq \frac{1}{70}(9+x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   b) Trovare la più grande costante m tale che $243 + x^8 \geq m(9+x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   c) Trovare la più piccola costante M tale che $243 + x^8 \leq M(9+x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3. Una compagnia deve stendere due cavi interrati per la trasmissione dati dalla città A (rappresentata dal punto del piano cartesiano di coordinate $(1,0)$) alle località C e C' (rappresentate da $(0,c)$ e $(0,-c)$ con c è un numero positivo), e per risparmiare sul costo degli scavi si considera la possibilità di usare lo stesso tracciato per i due cavi fino ad un certo punto B di coordinate $(x,0)$, per poi farli proseguire separatamente verso le rispettive destinazioni.
   Tenendo conto che il costo unitario delle opere di scavo è 4, mentre il costo unitario del cavo da stendere è 1, dire per quali c conviene separare immediatamente i due tracciati, cioè conviene prendere B uguale ad A, e per quali no.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dato $a \neq 0$ numero reale, poniamo $f(x) := (\sin(x^5))^a$ e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.
   a) Determinare $g(x)$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0^+$.
2. a) Dire se è vero o meno che $32 + x^8 \geq \frac{1}{25}(4+x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   b) Trovare la più grande costante m tale che $32 + x^8 \geq m(4+x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   c) Trovare la più piccola costante M tale che $32 + x^8 \leq M(4+x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3. Una compagnia deve stendere due cavi interrati per la trasmissione dati dalla città A (rappresentata dal punto del piano cartesiano di coordinate $(1,0)$) alle località C e C' (rappresentate da $(0,c)$ e $(0,-c)$ con c è un numero positivo), e per risparmiare sul costo degli scavi si considera la possibilità di usare lo stesso tracciato per i due cavi fino ad un certo punto B di coordinate $(x,0)$, per poi farli proseguire separatamente verso le rispettive destinazioni.
   Tenendo conto che il costo unitario delle opere di scavo è 3, mentre il costo unitario del cavo da stendere è 1, dire per quali c conviene separare immediatamente i due tracciati, cioè conviene prendere B uguale ad A, e per quali no.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dato $a \neq 0$ numero reale, poniamo $f(x) := (\log(1+x^4))^a$ e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.
   a) Determinare $g(x)$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0^+$.
2. a) Dire se è vero o meno che $81 + x^6 \geq \frac{1}{15}(9+x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Trovare la più grande costante m tale che $81 + x^6 \geq m(9 + x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c) Trovare la più piccola costante M tale che $81 + x^6 \leq M(9 + x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. Una compagnia deve stendere due cavi interrati per la trasmissione dati dalla città A (rappresentata dal punto del piano cartesiano di coordinate $(1, 0)$) alle località C e C' (rappresentate da $(0, c)$ e $(0, -c)$ con c è un numero positivo), e per risparmiare sul costo degli scavi si considera la possibilità di usare lo stesso tracciato per i due cavi fino ad un certo punto B di coordinate $(x, 0)$, per poi farli proseguire separatamente verso le rispettive destinazioni.
Tenendo conto che il costo unitario delle opere di scavo è 2, mentre il costo unitario del cavo da stendere è 1, dire per quali c conviene separare immediatamente i due tracciati, cioè conviene prendere B uguale ad A, e per quali no.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $(x^3 - 1)\log(1 + x) \gg x^a$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{2 + \sin x}{\tan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{4^x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x^4)^3 - 1}{x^4}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a + x^2)e^{2x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{2^n} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 2x^2$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + x^2)\cos t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x + 1|} \leq y \leq -\sin x$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $(x^2 + 1)\log(2 + x) = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\log x+1}}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{2 - \sin x}{\tan x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{(1 + x^5)^3 - 1}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a + 2x^2)e^{3x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4 - 3x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 + 2} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = \dfrac{x^3}{2}$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + x)^2 \sin t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x + 1|} \leq -\sin x$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $(x^4 - 1)\log(1 + x) = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\log x+1}}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\tan^2 x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^9}{x^3 - \sin(x^3)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a + x^2)e^{4x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{4 - 3x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+1}{2^n} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = -\dfrac{1}{4x^3}$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x)^2 \cos t$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x-1|} \leq y \leq \sin x$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^3+1}{\log(2+x)} = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\log x + 1}}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\tan^2 x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+x^2)^5 - 1}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a + 2x^2)e^{2x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-4x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+2} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = \dfrac{3x^5}{4}$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x)^2 \cos t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x-1|} \geq \sin x$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^2-1}{\log(1+x)} \gg x^a$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x}{\tan^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{e^{x^2}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4) - x^4}{x^9}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a + x^2)e^{3x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3+2} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 3x^2$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2) \cos t$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x-2|} \geq y \geq \sin x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^4+1}{\log(2+x)} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{3+\sin x}{\tan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{e^{x^2}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^4)^3-1}{x^4}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a+2x^2)e^{4x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{5-4x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{4^n} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 2x^3$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2)\sin t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x-2|} \leq \sin x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Si consideri la funzione f definita sulla semiretta $[0, +\infty)$ da $f(x) := x^2 e^{-x}$. Determinare l'insieme dei punti P del grafico di f che sono *visibili* dal punto Q di coordinate $(-1, 0)$, cioè tali che il segmento di estremi P e Q interseca il grafico di f solo in P.

2. Dato $a > 0$ si consideri la funzione $f(x) := \sin((2x)^a) - (2\sin x)^a$.
   a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ quando $a = 2$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ per ogni $a \neq 1$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (3-a)x = e^t + 2 \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2, 3$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
   c) Dire per quali a si ha che tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

4. Consideriamo un solido V nello spazio con le seguenti proprietà: le sezioni orizzontali di V, cioè quelle ortogonali all'asse verticale y, sono tutti quadrati con lati paralleli agli assi x e z con centro nell'origine, ed il profilo di V, cioè la proiezione sul piano xy, è delimitata dall'asse delle x e dalla curva di equazione $y = 4 - x^2$. Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

5. Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}}.$$
   Dire dove è improprio questo integrale e discuterne il comportamento al variare di a.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Si consideri la funzione f definita sulla semiretta $[0, +\infty)$ da $f(x) := x^2 e^{-2x}$. Determinare l'insieme dei punti P del grafico di f che sono *visibili* dal punto Q di coordinate $(-1/2, 0)$, cioè tali che il segmento di estremi P e Q interseca il grafico di f solo in P.

2. Dato $a > 0$ si consideri la funzione $f(x) := \sin((3x)^a) - (3 \sin x)^a$.
   a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ quando $a = 2$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ per ogni $a \neq 1$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (4 - a)x = 2e^t + 1 \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 3, 4$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 3$.
   c) Dire per quali a si ha che tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

4. Consideriamo un solido V nello spazio con le seguenti proprietà: le sezioni orizzontali di V, cioè quelle ortogonali all'asse verticale y, sono tutti quadrati con lati paralleli agli assi x e z con centro nell'origine, ed il profilo di V, cioè la proiezione sul piano xy, è delimitata dall'asse delle x e dalla curva di equazione $y = 9 - x^2$. Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

5. Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale
$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^3)^{2a}} \, .$$
   Dire dove è improprio questo integrale e discuterne il comportamento al variare di a.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Si consideri la funzione f definita sulla semiretta $[0, +\infty)$ da $f(x) := x^3 e^{-x}$. Determinare l'insieme dei punti P del grafico di f che sono *visibili* dal punto Q di coordinate $(-2, 0)$, cioè tali che il segmento di estremi P e Q interseca il grafico di f solo in P.

2. Dato $a > 0$ si consideri la funzione $f(x) := \sin((2x)^a) - (2 \sin x)^a$.
   a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ quando $a = 2$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ per ogni $a \neq 1$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (3 - a)x = e^t + 2 \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2, 3$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
   c) Dire per quali a si ha che tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

4. Consideriamo un solido V nello spazio con le seguenti proprietà: le sezioni orizzontali di V, cioè quelle ortogonali all'asse verticale y, sono tutti quadrati con lati paralleli agli assi x e z con centro nell'origine, ed il profilo di V, cioè la proiezione sul piano xy, è delimitata dall'asse delle x e dalla curva di equazione $y = 4 - x^2$. Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

5. Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^2)^{2a}} .$$
Dire dove è improprio questo integrale e discuterne il comportamento al variare di a.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Si consideri la funzione f definita sulla semiretta $[0, +\infty)$ da $f(x) := x^3 e^{-2x}$. Determinare l'insieme dei punti P del grafico di f che sono *visibili* dal punto Q di coordinate $(-1, 0)$, cioè tali che il segmento di estremi P e Q interseca il grafico di f solo in P.

2. Dato $a > 0$ si consideri la funzione $f(x) := \sin((3x)^a) - (3 \sin x)^a$.
a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ quando $a = 2$.
b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ per ogni $a \neq 1$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (4 - a)x = 2e^t + 1 \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 3, 4$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 3$.
c) Dire per quali a si ha che tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

4. Consideriamo un solido V nello spazio con le seguenti proprietà: le sezioni orizzontali di V, cioè quelle ortogonali all'asse verticale y, sono tutti quadrati con lati paralleli agli assi x e z con centro nell'origine, ed il profilo di V, cioè la proiezione sul piano xy, è delimitata dall'asse delle x e dalla curva di equazione $y = 9 - x^2$. Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

5. Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale
$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^3)^{3a}} .$$
Dire dove è improprio questo integrale e discuterne il comportamento al variare di a.

Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x+1)e^{-x/2}$ relativamente alla semiretta $3 \le x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{\sin x}{x^3}}_{a} \ll \underbrace{\log x}_{b} \ll \underbrace{\frac{|\log x|}{x}}_{c} \ll \underbrace{xe^x}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{1+\exp(-x\sin x)}{\sin(x^2)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (\sin t, \cos t, 2t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 3$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^{-n}}{1+n^a}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 3t^2x = 2t\exp(t^3)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 2$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 2\cos(4x) + 2$ e determinarne periodo ed immagine.

Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x-1)e^{-x/3}$ relativamente alla semiretta $0 \le x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{\cos x}{x^3}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x}{|\log x|}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{x^2}+|\log x|}_{c} \ll \underbrace{(1+x)\sin x}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{1-\exp(-x\sin x)}{\cos(x^2)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (\cos t, -t, -\sin t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{9+x^2}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{2a}}{n^2+2^n}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 4t^3x = 2t\exp(t^4)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 2$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 3\cos(2x) - 3$ e determinarne periodo ed immagine.

Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x+2)e^{-x/2}$ relativamente alla semiretta $-1 \le x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:

$$\underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{a} \ll \underbrace{x^2 + |\log x|}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{x^2} + |\log x|}_{c} \ll \underbrace{x^3 \cos x}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{1 - \exp(-2x\cos x)}{\sin(x^2)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (2t, \sin t, \cos t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 4}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^{-n}}{1 + n^{3a}}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 4tx = 2t\exp(2t^2)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 2$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 2\cos(3x) + 2$ e determinarne periodo ed immagine.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x+1)e^{-x/2}$ relativamente alla semiretta $-2 \le x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:

$$\underbrace{|\log x|}_{a} \ll \underbrace{xe^x}_{b} \ll \underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{|\log x|}{x}}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\cos(x^2)}{1 - \exp(-x\sin x)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (\sin t, -\cos t, -t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{1 + 4x^4}\, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^a}{n^2 + 2^{-n}}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 3t^2x = 2\exp(t^3)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 3\sin(3x) - 3$ e determinarne periodo ed immagine.

Prima parte, gruppo 5.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x-1)e^{-x/3}$ relativamente alla semiretta $2 \le x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{x|\log x|}_{a} \ll \underbrace{\frac{1}{x^2} + |\log x|}_{b} \ll \underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{c} \ll \underbrace{(1+x)\sin x}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\sin(x^2)}{1 - \exp(-2x\cos x)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (t, 2\sin t, 2\cos t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{1 + n^{2a}}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 4t^3 x = 2\exp(t^4)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 2\sin(4x) + 2$ e determinarne periodo ed immagine.

Prima parte, gruppo 6.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x+2)e^{-x/2}$ relativamente alla semiretta $1 \le x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{x^2 + |\log x|}_{a} \ll \underbrace{x^3 \cos x}_{b} \ll \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{x^2} + |\log x|}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\sin(x^2)}{1 + \exp(-x\sin x)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (-2\cos t, t, 2\sin t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^{3a}}{n^3 + 2^{-n}}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 4tx = 2\exp(2t^2)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 3\sin(2x) - 3$ e determinarne periodo ed immagine.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Tra tutti i cilindri con superficie totale 1, trovare quello con volume massimo. Cosa si può dire su quello di volume minimo? [*Per "cilindro" si intende un cilindro retto a base circolare.*]

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$(x-3)^2 = ae^x \,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*), se ne esistono.
a) Determinare il numero di soluzioni di (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Usando l'algoritmo di bisezione, determinare il valore di $x(1)$ con errore inferiore a 10^{-1}.
c) Per $a \to 0^+$, determinare il limite L di $x(a)$ e la parte principale di $x(a) - L$.

3. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1+x^2}{(\log x)^{ax}} \,.$$
a) Determinare il dominio di f.
b) Studiare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Tra tutti i cilindri con volume 2, trovare quello con di superficie minima. Cosa si può dire su quello di di superficie massima? [*Per "cilindro" si intende un cilindro retto a base circolare.*]

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$(x-2)^2 = ae^x \,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*), se ne esistono.
a) Determinare il numero di soluzioni di (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Usando l'algoritmo di bisezione, determinare il valore di $x(1)$ con errore inferiore a 10^{-1}.
c) Per $a \to 0^+$, determinare il limite L di $x(a)$ e la parte principale di $x(a) - L$.

3. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1+x^2}{(\log x)^{2ax}} \,.$$
a) Determinare il dominio di f.
b) Studiare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Tra tutti i cilindri con superficie totale 2, trovare quello con volume massimo. Cosa si può dire su quello di volume minimo? [*Per "cilindro" si intende un cilindro retto a base circolare.*]

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$(x-2)^3 = ae^x \,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*), se ne esistono.
a) Determinare il numero di soluzioni di (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Usando l'algoritmo di bisezione, determinare il valore di $x(-1)$ con errore inferiore a 10^{-1}.
c) Per $a \to 0^+$, determinare il limite L di $x(a)$ e la parte principale di $x(a) - L$.

3. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1 + x^3}{(\log x)^{ax}} .$$
a) Determinare il dominio di f.
b) Studiare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Tra tutti i cilindri con volume 1, trovare quello con di superficie minima. Cosa si può dire su quello di di superficie massima? [*Per "cilindro" si intende un cilindro retto a base circolare.*]

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$(x - 3)^3 = ae^x , \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*), se ne esistono.
a) Determinare il numero di soluzioni di (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Usando l'algoritmo di bisezione, determinare il valore di $x(-1)$ con errore inferiore a 10^{-1}.
c) Per $a \to 0^+$, determinare il limite L di $x(a)$ e la parte principale di $x(a) - L$.

3. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1 + x^3}{(\log x)^{2ax}} .$$
a) Determinare il dominio di f.
b) Studiare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(2 - 2x^2)$ è concava.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\log(x^2)$; b) $\dfrac{\exp(4x-2)}{(\exp(x-1))^2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \log(2+e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 e^{1/x}$; c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sin x}{x^3 e^x}$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 10 della funzione $f(x) := x^2\cos(2x^2)$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x)^{2a}}\,dx$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x = 2t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \left|\dfrac{1}{(x-2)^3} - 1\right|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(1 - x^2/2)$ è concava.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\log(x^3)$; b) $\dfrac{\exp(2x-3)}{(\exp(x-1))^3}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\log x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\log x}{\log^2 x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\log(1+2/x)$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 9 della funzione $f(x) := \log(1-x^3)$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^{-a})}{2+x^a}\,dx$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} - 2x = -2t$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \left|\dfrac{1}{(x-2)^3} + 1\right|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(2 - x^2)$ è convessa.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\log(x^4)$; b) $\dfrac{\exp(2x+1)}{(\exp(x-2))^2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\log x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x(1+x^4)$; c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos(4x)}{x^2 e^x}$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 11 della funzione $f(x) := x\sin(-2x^2)$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{\log^a x}dx$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + 2x = -2t$ che soddisfa $x(0) = -1$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{1}{(|x|-2)^3} - 1$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(2 - x^2/2)$ è convessa.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{(\exp(x-2))^2}{\exp(2x+1)}$; b) $\log\log(x^4)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\log(1+2/x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x}{\log^2 x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x(3+x^3)$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 10 della funzione $f(x) := \dfrac{x^2}{1-2x^4}$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{(\sin x)^{a+2}}dx$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x = -2t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{1}{(|x|-2)^3} + 1$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(1 - 2x^2)$ è convessa.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{(\exp(x-1))^2}{\exp(4x-2)}$; b) $\log\log(x^2)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2\cos x}{1-\cos(2x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \log(3-e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^3 x}{\log\log x}$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $f(x) := \sqrt[4]{1-4x^3}$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3\log^a x}$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{x^n}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} - 2x = 2t$ che soddisfa $x(0) = -1$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \left|\dfrac{1}{(x+2)^2} - 1\right|$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(1 - x^2)$ è concava.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{(\exp(x-1))^3}{\exp(2x-3)}$; b) $\log\log(x^3)$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cos x}{x - \sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^3 e^{1/x}$.
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 9 della funzione $f(x) := \dfrac{x^3}{1 - 3x^3}$.
5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1 + x^{-2})}{1 + x^a} dx$ è finito.
6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + 2x = 2t$ che soddisfa $x(0) = 1$.
8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{1}{(|x| - 2)^2} + 1$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^t \,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 1; 5$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1$.
   c) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{2t}$ per $t \to +\infty$.
2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\left(x^2 - 1 + \frac{4}{x^2}\right).$$
   a) Disegnare il grafico di f.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq 2\log x$.
   c) Dire se l'area di A è finita oppure no.
3. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^6}\, dt \,.$$
   b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-4)^2 x = e^{2t} \,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2; 10$.

b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
c) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{4t}$ per $t \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\Big(x^2 - 1 + \frac{9}{x^2}\Big)\,.$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le 2\log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

3. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^8}\, dt\,.$$
b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = -e^t\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 1; 5$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1$.
c) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{3t}$ per $t \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\Big(x^2 - 1 + \frac{16}{x^2}\Big)\,.$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le 2\log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

3. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^8}\, dt\,.$$
b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-4)^2 x = -e^{2t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2; 10$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
c) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{3t}$ per $t \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\Big(x^2 - 1 + \frac{25}{x^2}\Big)\,.$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le 2\log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

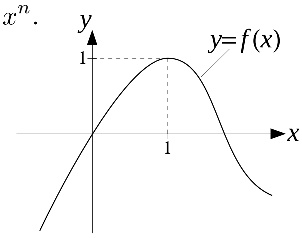
3. a) Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^6}\, dt\,.$$

b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

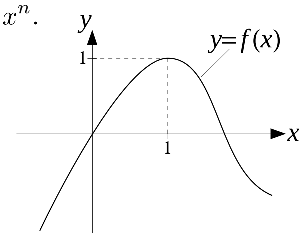
Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log(3\arcsin(2x))$.
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := e^{2x} - ax^2$ è convessa per $x \geq 0$.
3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := e^{1+x}\sin(x^2)\,(\cos(3x) - 1)$
4. Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{1-x^2}\, x\, dx$.
5. Scrivere la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{2+t^4}$.
6. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2$ che soddisfano $x(0) = 0$.
7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n^n+1} x^n$.
8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := \frac{1}{2}\big|f(x)\big|$.



Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log(\pi + 4\arcsin x)$.
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := e^{-x} - ax^2$ è convessa per $x \leq 0$.
3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{(1-e^x)\,\cos(3x)}{\sin(x^3)}$
4. Calcolare la seguente primitiva: $\displaystyle\int e^{2-x^2}\, x\, dx$.
5. Scrivere la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2+t^6}$.
6. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 2e^t$ che soddisfano $x(0) = 0$.
7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{3^n+1} x^n$.
8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x^2 \leq y \leq f(|x|)$.



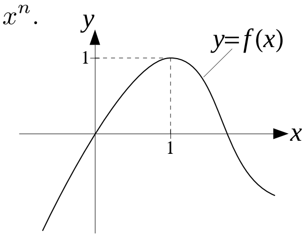
Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log(\pi - 4\arcsin x)$.
2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := e^{-x} + ax^2$ è convessa per $x \leq 0$.
3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := (1 - e^x)\,\cos(3x)\,\sin(x^3)$
4. Calcolare la seguente primitiva: $\displaystyle\int e^{1-2x}\, x\, dx$.

5. Scrivere la derivata della funzione $f(x) := \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$.

6. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 4e^t$ che soddisfano $x(0) = 0$.

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{2^n+1} x^n$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\frac{1}{2} f(x) \leq y \leq f(x)$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log(2 \arcsin(3x))$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := e^{3x} + ax^2$ è convessa per $x \geq 0$.

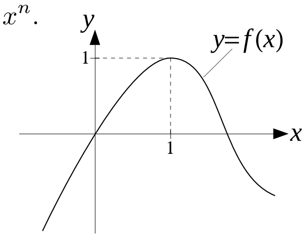
3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \frac{e^{1+x} \sin(x^3)}{(\cos(3x) - 1)}$

4. Calcolare il seguente integrale definito: $\int_0^{+\infty} e^{1-2x}\, x\, dx$.

5. Scrivere la derivata della funzione $f(x) := \int_1^x \frac{dt}{1+t^6}$.

6. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 4$ che soddisfano $x(0) = 0$.

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1} x^n$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := 1 - f(|x|)$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt[3]{\exp(8x^2) - 1}$.
   b) Detta $g(x)$ è la parte principale di $f(x)$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - g(x)$.

2. Consideriamo due circonferenze nel piano, entrambe di raggio 2 e tali che la distanza tra i centri sia 2. Indichiamo quindi con P_1 e P_2 i punti di intersezione delle due circonferenze, con A l'insieme dei punti del piano che sono interni ad entrambe, e con V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta che passa per i punti P_1 e P_2.
   a) Disegnare A e calcolarne l'area.
   b) Disegnare V e calcolarne il volume.

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$\dot{x} = 2t^3(x^2 - 1)\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = 0$ e disegnarne il grafico.
   b) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = -1$.
   c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = a$ è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt{1 - \cos(2x)}$.
   b) Detta $g(x)$ è la parte principale di $f(x)$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - g(x)$.

2. Consideriamo due circonferenze nel piano, entrambe di raggio $\sqrt{2}$ e tali che la distanza tra i centri sia 2. Indichiamo quindi con P_1 e P_2 i punti di intersezione delle due circonferenze, con A l'insieme dei punti del piano che sono interni ad entrambe, e con V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta che passa per i punti P_1 e P_2.
   a) Disegnare A e calcolarne l'area.
   b) Disegnare V e calcolarne il volume.

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$\dot{x} = 3t^5(x^2 - 4)\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = 0$ e disegnarne il grafico.
   b) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = -2$.
   c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = a$ è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt{\exp(4x^4) - 1}$.
   b) Detta $g(x)$ è la parte principale di $f(x)$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - g(x)$.

2. Consideriamo due circonferenze nel piano, entrambe di raggio $2\sqrt{2}$ e tali che la distanza tra i centri sia 4. Indichiamo quindi con P_1 e P_2 i punti di intersezione delle due circonferenze, con A l'insieme dei punti del piano che sono interni ad entrambe, e con V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta che passa per i punti P_1 e P_2.
   a) Disegnare A e calcolarne l'area.
   b) Disegnare V e calcolarne il volume.

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$\dot{x} = 2t^3(x^2 - 4)\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = 0$ e disegnarne il grafico.
   b) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = -2$.
   c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = a$ è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt[3]{1 - \cos(2x)}$.
   b) Detta $g(x)$ è la parte principale di $f(x)$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - g(x)$.

2. Consideriamo due circonferenze nel piano, entrambe di raggio 1 e tali che la distanza tra i centri sia 1. Indichiamo quindi con P_1 e P_2 i punti di intersezione delle due circonferenze, con A l'insieme dei punti del piano che sono interni ad entrambe, e con V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta che passa per i punti P_1 e P_2.
   a) Disegnare A e calcolarne l'area.
   b) Disegnare V e calcolarne il volume.

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$\dot{x} = 3t^5(x^2 - 1)\,. \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = 0$ e disegnarne il grafico.

b) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = -1$.

c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = a$ è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare l'inversa $f^{-1}(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{2}{x^3+3}$.

2. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{x^2-4}{x}$ ha pendenza 3.

3. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \le \sqrt{3}$ comprese tra 0 e $\pi/2$.

4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\sin(2x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x(x^6+1)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^5)-x^5}{x^{10}}$.

5. Dire per quali $a>0$ esiste ed è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^a}{\log x}\,dx$.

6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{3x^2}$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n}$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{per } x \le 2, \\ 1/x & \text{per } x > 2. \end{cases}$

Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare l'inversa $f^{-1}(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{1}{e^{-x}+2}$.

2. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{x^2-4}{x}$ ha pendenza 5.

3. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \ge -\sqrt{3}$ comprese tra $-\pi/2$ e 0.

4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\log x}{\sqrt{\log x}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)-x^4}{x^{12}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\sin(2x)}$.

5. Dire per quali $a>0$ esiste ed è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^{2a}}{(\log x)^a}\,dx$.

6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{\sin t}{3x^2}$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{5^n}$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{per } x \le 1, \\ 1/x & \text{per } x > 1. \end{cases}$

Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare l'inversa $f^{-1}(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{2}{e^{2x}+1}$.

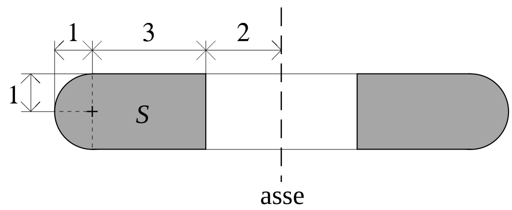
2. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{x^2+4}{x}$ ha pendenza -1.
3. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \le 1$ comprese tra 0 e $\pi/2$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log^2 x}{x\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\sin(3x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{\log(1+x^4)-x^4}$.
5. Dire per quali $a>0$ esiste ed è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^{ax}}{\sqrt{\log x}}\,dx$.
6. Uguale al gruppo 1.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-4^n}{5^n}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{per } x\le 1, \\ x^2 & \text{per } x>1. \end{cases}$

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Determinare l'inversa $f^{-1}(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{1}{2-x^3}$.
2. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{x^2+4}{x}$ ha pendenza -3.
3. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \ge -1$ comprese tra $-\pi/2$ e 0.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{15}}{\sin(x^5)-x^5}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^4\exp(1/x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\sin x}$.
5. Dire per quali $a>0$ esiste ed è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^3 \frac{a^x}{(\log x)^{2a}}\,dx$.
6. Uguale al gruppo 2.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{per } x\le 2, \\ x^2 & \text{per } x>2. \end{cases}$

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Dire se la disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \ge \frac{3}{5}(1+x)$ vale per ogni $x\ge 0$ oppure no.
   b) Trovare la più grande costante $a\in\mathbb{R}$ tale che $\sqrt[3]{1+x^3} \ge a(1+x)$ per ogni $x\ge 0$.
   c) Trovare la più piccola costante $b\in\mathbb{R}$ tale che $\sqrt[3]{1+x^3} \le b(1+x)$ per ogni $x\ge 0$.
2. Consideriamo una ruota, bucata in corrispondenza dell'asse, la cui sezione S è rappresentata in grigio nella figura sotto.



Calcolare il volume di questa ruota.

3. Consideriamo l'integrale improprio

$$m := \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$$

a) Dire se m è finito oppure no.

b) Dato $a > 0$, esprimere in funzione di m ed a il valore di $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2)\,dx$.

c) Dato $b \in \mathbb{R}$, esprimere in funzione di m e b il valore di $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x-b)^2 \exp(-x^2)\,dx$.

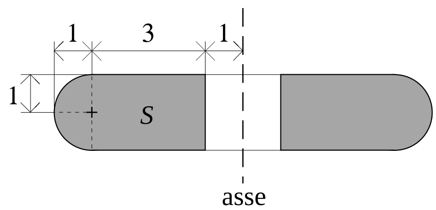
SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Dire se la disequazione $\sqrt[4]{1+x^4} \geq \frac{3}{5}(1+x)$ vale per ogni $x \geq 0$ oppure no.

   b) Trovare la più grande costante $a \in \mathbb{R}$ tale che $\sqrt[4]{1+x^4} \geq a(1+x)$ per ogni $x \geq 0$.

   c) Trovare la più piccola costante $b \in \mathbb{R}$ tale che $\sqrt[4]{1+x^4} \leq b(1+x)$ per ogni $x \geq 0$.

2. Consideriamo una ruota, bucata in corrispondenza dell'asse, la cui sezione S è rappresentata in grigio nella figura sotto.



Calcolare il volume di questa ruota.

3. Consideriamo l'integrale improprio

$$m := \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$$

a) Dire se m è finito oppure no.

b) Dato $a > 0$, esprimere in funzione di m ed a il valore di $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2)\,dx$.

c) Dato $b \in \mathbb{R}$, esprimere in funzione di m e b il valore di $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x-b)^2 \exp(-x^2)\,dx$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 & \text{per } x \leq 2 \\ a - x & \text{per } x > 2 \end{cases}$$
è continua nel punto $x = 2$.

2. Determinare l'insieme degli x in cui la funzione $f(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$ è decrescente.

3. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{2^{2x}}{5^x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^2-1}{x^4+1}}_{b} \ll \underbrace{e^{-x}}_{c} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := \dfrac{x^2}{1+2x^2}$.

5. Consideriamo un punto P in movimento le cui coordinate sono date da
$$P = \big(t, \sin(t^2), \cos(t^2)\big)$$
per ogni istante t. Calcolare la velocità di P all'istante $t = 0$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-2x}\,dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $2x - 1 \leq y \leq 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 & \text{per } x \leq 4 \\ a - x & \text{per } x > 4 \end{cases}$$
è continua nel punto $x = 4$.

2. Determinare l'insieme degli x in cui la funzione $f(x) := 2\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ è crescente.

3. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{x^4}{x^{10}+1}}_{a} \ll \underbrace{2^{-x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{7^x}{2^{3x}}}_{c} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := x^2\sqrt{1+2x^2}$.

5. Consideriamo un punto P in movimento le cui coordinate sono date da
$$P = \big(\sin(2t), t^2, \cos(2t)\big)$$
per ogni istante t. Calcolare la velocità di P all'istante $t = 0$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 \sqrt[3]{8-4x}\,dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} \le y \le 2 + 2x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} a + x & \text{per } x \le 2 \\ ax^2 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$
è continua nel punto $x = 2$.

2. Determinare l'insieme degli x in cui la funzione $f(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+3}$ è decrescente.

3. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{3^x}{x^2}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2^{3x}}{4^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{3^x}{x+1}}_{c} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := x^4\sqrt{1-2x}$.

5. Consideriamo un punto P in movimento le cui coordinate sono date da
$$P = \big(t^2, \cos(2t), \sin(2t)\big)$$
per ogni istante t. Calcolare la velocità di P all'istante $t = 0$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^3 \sqrt[3]{27 - 9x}\, dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2x - 1 \le 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} a + x & \text{per } x \le 4 \\ ax^2 & \text{per } x > 4 \end{cases}$$
è continua nel punto $x = 4$.

2. Determinare l'insieme degli x in cui la funzione $f(x) := 2\sqrt{x} - \sqrt{x-2}$ è crescente.

3. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{3^x(x^3-1)}_{a} \ll \underbrace{\frac{3^{2x}}{4^x}}_{b} \ll \underbrace{3^x(x^2+1)}_{c} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := \dfrac{x^4}{1-2x}$.

5. Consideriamo un punto P in movimento le cui coordinate sono date da
$$P = \big(\sin(t^2), \cos(t^2), t\big)$$
per ogni istante t. Calcolare la velocità di P all'istante $t = 0$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-3x}\,dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2 + 2x \leq 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Seconda parte.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + ax = e^{-t}\,. \tag{*}$$
a) Risolvere (*) per $a < 4$ e $a \neq 3$.
b) Risolvere (*) per $a = 4$ e per $a = 3$.
c) Dire per quali $a \leq 4$ tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.
d) Dire per quali $a \leq 4$ esiste una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{-t/2}$ per $t \to +\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che
$$e^y + x^2 - 2x \geq 3\,,$$
e sia A' il sottoinsieme dei punti di A tali che $-1 \leq x \leq 0$ e $y \leq 0$.
a) Disegnare A ed A'.
b) Dire se A' ha area finita oppure no, ed eventualmente calcolarla.

3. Determinare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3} - e^2\right]$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluto) della funzione $f(x) := x^3-12x+4$ relativamente all'intervallo $[-4,3]$.

2. Calcolare i seguenti limiti a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3^{-x}(x^x+1)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\log x}{\sqrt[4]{\log x}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{2x}{1+\cos x}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 8 della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(-2x^2)}{x^2}$.

4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{-2x} \exp(t^2)\,dt$.

5. Calcolare la lunghezza percorsa dal punto in movimento di coordinate $\big(e^{-t}\cos(2t),\, e^{-t}\sin(2t)\big)$ nell'intervallo di tempo $[0,+\infty)$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x}+4x=8t$ che soddisfa $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}+n^3}{1+n^{2a}(1+n)}$ converge a un numero finito.

8. Risolvere graficamente la disequazione $-\sin(|x|) \le 1-x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluto) della funzione $f(x) := x^3-12x+4$ relativamente all'intervallo $[-3,4]$.

2. Calcolare i seguenti limiti a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\log x}}{\log\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sin(2x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+1}{x^x+1}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 8 della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1-4x^3)}{2x}$.

4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_4^{x^2} \exp(-t^2)\,dt$.

5. Calcolare la lunghezza percorsa dal punto in movimento di coordinate $\big(e^{-2t}\cos t,\, e^{-2t}\sin t\big)$ nell'intervallo di tempo $[0,+\infty)$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x}+9x=27t$ che soddisfa $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

7. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1+(n^a+1)n}$ converge a un numero finito.

8. Risolvere graficamente la disequazione $-|\sin x| \ge 1-x^3$.

SECONDA PARTE.

1. a) Dire se la disequazione $\log x + \dfrac{1}{8x^3} \ge 0$ vale tutti gli $x>0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a>0$ la disequazione $\log x + \dfrac{a}{x^3} \ge 0$ vale tutti gli $x>0$.

2. a) Trovare la parte principale per $x\to 0$ della funzione $f(x) := 2-\sqrt{3+e^{-4x^2}}$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) + ax^2$.

3. a) Studiare il segno della funzione $f(x) := x^{2x} - 1$ (definita per $x > 0$).

   b) Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

SOLUZIONI

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. $y := \frac{1}{e}(3-2x)$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 0; 2$, ed il massimo in $x = 1$.

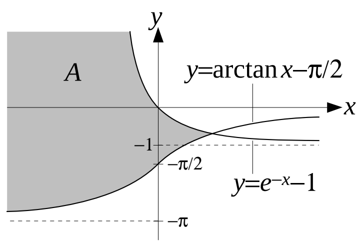
3. $\sqrt{\frac{\pi}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

4. a) $\frac{-x^2+2x-1}{e^x}$; b) $\frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$; c) $\frac{4x}{1-x^4}$.

5. a) 2; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

6. $d \ll c \ll b \ll a$.

7. $f(x) \sim \frac{1}{2x^5}$ per $x \to +\infty$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $y := 3 - 3x$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 0$, ed il massimo in $x = 2$.

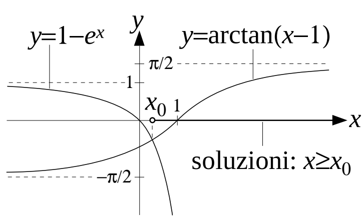
3. $0 \leq x \leq \sqrt{\pi/6}$.

4. a) $\frac{6x^2}{1-x^6}$; b) $\frac{-x^2+2x+1}{e^x}$; c) $\frac{1}{\sqrt{-x-x^2}}$.

5. a) 0; b) non esiste; c) -2.

6. $d \ll c \ll a \ll b$.

7. $f(x) \sim 3x^5$ per $x \to +\infty$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. $y := \frac{1}{e}(5-4x)$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 3$, ed il massimo in $x = 2$.

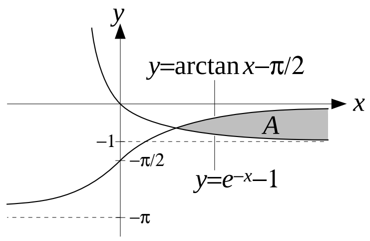
3. $\sqrt{\frac{\pi}{6}} \le x \le 2$.

4. a) $\frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$; b) $\frac{4x}{x^4-1}$; c) $\frac{-x^2+2x-2}{e^x}$.

5. a) $+\infty$; b) $-1/2$; c) $+\infty$.

6. $b \ll d \ll a \ll c$.

7. $f(x) \sim 2x^6$ per $x \to +\infty$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. $y := 2 - 2x$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = -1$, ed il massimo in $x = -2; 0$.

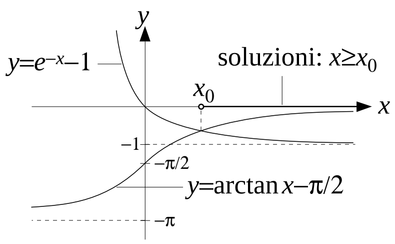
3. $\sqrt{\frac{\pi}{4}} \le x \le \sqrt{\frac{3\pi}{4}}$.

4. a) $\frac{-x^3+3x^2-1}{e^x}$; b) $\frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$; c) $\frac{8x^3}{1-x^8}$.

5. a) $9/2$; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

6. $c \ll d \ll b \ll a$.

7. $f(x) \sim \frac{1}{2x^5}$ per $x \to +\infty$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. $y := \frac{1}{e}(4 - 3x)$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 2$, ed il massimo in $x = -1$.

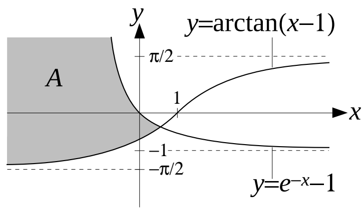
3. $\sqrt{\frac{\pi}{6}} \le x \le \sqrt{\frac{5\pi}{6}}$.

4. a) $\dfrac{6x^2}{x^6-1}$; b) $\dfrac{-x^3+3x^2+1}{e^x}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{-x-x^2}}$.

5. a) 0; b) non esiste; c) -3.

6. $b \ll d \ll c \ll a$.

7. $f(x) \sim 3x^5$ per $x \to +\infty$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. $y := 4 - 4x$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 0$, ed il massimo in $x = -1$.

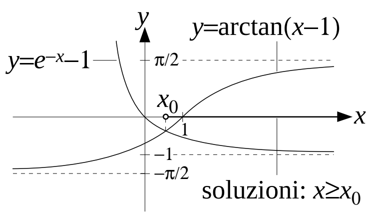
3. $\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \le x \le 2$.

4. a) $\dfrac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$; b) $\dfrac{8x^3}{x^8-1}$; c) $\dfrac{-x^3+3x^2-2}{e^x}$.

5. a) $+\infty$; b) $-1/3$; c) $+\infty$.

6. $b \ll d \ll c \ll a$.

7. $f(x) \sim 2x^6$ per $x \to +\infty$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Usando il fatto che $\sin t \sim t$ per $t \to 0$ otteniamo che $\sin(x^4) \sim x^4$ per $x \to 0$, e quindi

$$f(x) = (\sin(x^4))^a \sim x^{4a};$$

dunque $g(x) = x^{4a}$.

b) Visto che ad f sottraiamo esattamente la sua parte principale, dobbiamo ottenere un termine in più nello sviluppo di f. Usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$ con $t = x^4$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) = (\sin(x^4))^a - x^{4a} &= \left[x^4 - \frac{x^{12}}{6} + O(x^{20})\right]^a - x^{4a} \qquad (1) \\ &= x^{4a}\left[1 - \frac{x^8}{6} + O(x^{16})\right]^a - x^{4a}. \end{aligned}$$

Usiamo quindi lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at + O(t^2)$ con $t = -x^8/6 + O(x^{16})$ e il fatto che $t = O(x^8)$ e dunque $O(t^2) = O(x^{16})$:

$$\begin{aligned}\left[1 - \frac{x^8}{6} + O(x^{16})\right]^a &= 1 + at + O(t^2)\\ &= 1 + a\left(-\frac{x^8}{6} + O(x^{16})\right) + O(x^{16}) = 1 - \frac{a}{6}x^8 + O(x^{16}).\end{aligned}$$

Riprendiamo infine l'equazione (1):

$$f(x) - g(x) = x^{4a} - \frac{a}{6}x^{4a+8} + O(x^{4a+16}) - x^{4a} \sim -\frac{a}{6}x^{4a+8}.$$

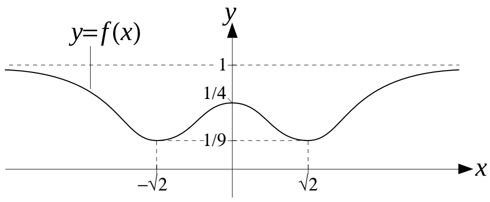
2. a) Riscrivendo la disequazione $16 + x^6 \geq \frac{1}{10}(4+x^2)^3$ nella forma

$$f(x) \geq \frac{1}{10} \quad \text{con} \quad f(x) := (16 + x^6)(4 + x^2)^{-3},$$

la domanda diventa: è vero che il valore minimo di f è maggiore o uguale a $1/10$?
Tracciamo quindi il grafico di f. Osserviamo che f è definita su tutto $\mathbb{R}$, positiva, pari, ed ha limite uguale ad 1 per $x \to +\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) := 24\,x(x^4 - 4)(4 + x^2)^{-4}$$

otteniamo che f decresce nell'intervallo $[0, \sqrt{2}]$ e cresce nella semiretta $[\sqrt{2}, +\infty)$. A partire da questi dati tracciamo il disegno approssimativo del grafico di f dato nella figura sotto.



In particolare $\pm\sqrt{2}$ sono i punti di minimo assoluto di f; dunque

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(\pm\sqrt{2}) = 1/9$$

e siccome $1/10$ è minore di $1/9$, la risposta alla domanda posta sopra è affermativa.
b) Riscrivendo la disequazione $16 + x^6 \geq m(4+x^2)^3$ come $f(x) \geq m$ si vede che la più grande costante m che soddisfa questa disequazione è il minimo di f, ovvero, per quanto visto sopra,

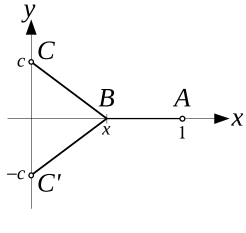
$$m = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(\pm\sqrt{2}) = 1/9.$$

c) Ragionando come per la domanda b) otteniamo che M coincide con l'estremo superiore dei valori di f, che è dato dal limite di f per $x \to +\infty$, ovvero

$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

(In effetti 0 è un punto di massimo locale, ma $f(0) = 1/4$ è più piccolo del limite all'infito, vale a dire 1.)

3. Il tracciato considerato è disegnato nella figura sotto.



Dobbiamo dunque determinare la posizione di B che rende minimo il costo totale dell'opera, e capire per quali c tale tale posizione coincide con A. Osserviamo innazitutto che deve essere

$0 \le x \le 1$ (non è mai conveniente prendere $x > 1$ oppure $x < 0$). Sotto questa ipotesi la lunghezza dello scavo è

$$\ell_s = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{BC'} = 1 - x + 2\sqrt{x^2 + c^2}\,,$$

mentre la somma delle lunghezze dei due cavi è

$$\ell_c = \big(\overline{AB} + \overline{BC}\big) + \big(\overline{AB} + \overline{BC'}\big) = 2(1-x) + 2\sqrt{x^2 + c^2}\,,$$

e pertanto il costo totale è dato dalla funzione

$$f(x) := 5\ell_s + \ell_c = 7(1-x) + 12\sqrt{x^2 + c^2}\,.$$

Per determinare la collocazione ottimale di B dobbiamo trovare il punto di minimo di $f(x)$ relativamente all'intervallo $[0,1]$. Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = -7 + \frac{12\,x}{\sqrt{x^2 + c^2}}$$

otteniamo che f decresce nell'intervallo $[0,\bar{x}]$ dove $\bar{x} := 7c/\sqrt{95}$, e cresce nella semiretta $[\bar{x}, +\infty)$. Pertanto il punto di minimo di f relativamente all'intervallo $[0,1]$ è 1 se $\bar{x} \ge 1$ (ed in tal caso B coincide con A), ed è $\bar{x}$ se $\bar{x} < 1$ (ed in tal caso B non coincide con A). In particolare B coincide con A solo nel primo caso, vale a dire per $\bar{x} \ge 1$, cioè

$$c \ge \frac{\sqrt{95}}{7} \simeq 1{,}39\,.$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Analogo al gruppo 1: $g(x) = x^{5a}$.
   b) Usando gli sviluppi di Taylor $\log(1+t) = t - t^2/2 + O(t^3)$ e $(1+t)^a = 1 = at + O(t^2)$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \left[x^5 - \frac{x^{10}}{2} + O(x^{15})\right]^a - x^{5a} \\ &= x^{5a}\left[1 - \frac{x^5}{2} + O(x^{10})\right]^a - x^{5a} \\ &= x^{5a}\left[1 - \frac{a}{2}x^5 + O(x^{10})\right] - x^{5a} = -\frac{a}{2}x^{5a+5} + O(x^{5a+10}) \sim -\frac{a}{2}x^{5a+5}\,. \end{aligned}$$

2. Analogo al gruppo 1. a) Vero. b) $m = 1/64$. c) $M = 1$.

3. Analogo al gruppo 1: B coincide con A per $c \ge 4/3 \simeq 1{,}33$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1. a) $g(x) = x^{5a}$. b) $f(x) - g(x) \sim -\dfrac{a}{6}x^{5a+10}$ per $x \to 0$.

2. Analogo al gruppo 1. a) Falso. b) $m = 1/27$. c) $M = 1$.

3. Analogo al gruppo 1: B coincide con A per $c \ge \sqrt{39}/5 \simeq 1{,}25$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Analogo al gruppo 2. a) $g(x) = x^{4a}$. b) $f(x) - g(x) \sim -\dfrac{a}{2}x^{4a+4}$ per $x \to 0$.

2. Analogo al gruppo 1. a) Falso. b) $m = 1/16$. c) $M = 1$.

3. Analogo al gruppo 1: B coincide con A per $c \ge \sqrt{5}/2 \simeq 1{,}12$.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1b). La maggior parte dei presenti, inclusi quelli che hanno dato la risposta corretta, hanno semplicemente ignorato il resto nei vari sviluppi usati. Diversi dei presenti hanno fatto errori grossolani nell'uso delle potenze (come scrivere $(z+y)^a = x^a + y^a$) oppure hanno omesso semplificazioni elementari (come $(x^4)^a = x^{4a}$).

- Seconda parte, esercizio 1b). Alcuni dei presenti hanno sviluppato la potenza $(1+t)^a$ usando la formula del binomio di Newton, che però si applica solo al caso in cui l'esponente a è intero.

- Seconda parte, esercizio 2. Per cercare i valori massimi e minimi della funzione $f(x) := (16 + x^6)(4+x^2)^{-3}$, può convenire usare il cambio di variabile $t = x^2$, e cercare quindi i valori massimi e minimi di $g(t) := (16 + t^3)(4 + t)^{-3}$ (qui mi riferisco al gruppo 1, ma lo stesso discorso vale anche per gli altri gruppi).

- Seconda parte, esercizio 2c). Nel determinare M, quasi nessuno dei presenti si è accorto che 0 è un punto di massimo locale di f e non assoluto, e che l'estremo superiore dei valori di f è dato dal limite di f per $x \to \pm\infty$ (e non da $f(0)$).

- Seconda parte, esercizio 2a). In alternativa all'approccio descritto sopra, si può riscrivere la disequazione come $g(x) \geq 0$ con $g(x) := 16 + x^6 - \frac{1}{10}(4 + x^2)^3$, far vedere il valore minimo di g è strettamente positivo (qui mi riferisco al gruppo 1, ma un discorso analogo vale anche per gli altri gruppi). Lo studio del segno della derivata di g è un po' delicato, ma alla fine si ottiene che i punti di minimo assoluto di g sono
$$x_{1,2} := \pm \frac{2}{\sqrt{\sqrt{10} - 1}} \,,$$
e si verifica quindi che $\min g(x) = g(x_1) > 0$. Questo approccio può essere adottato anche per rispondere alle domande b) e c)...

- Seconda parte, esercizio 2. Alcuni dei presenti hanno fatto errori di calcolo che hanno portato a conclusioni palesemente sbagliate, per esempio che il valore minimo di f è uguale al valore massimo (o persino maggiore). Non rendersi conto dell'assurdità di queste conclusioni è un errore grave.

- Seconda parte, esercizio 3. Qualcuno ha cercato il minimo della funzione costo su tutto $\mathbb{R}$, dimenticando che x deve essere compreso tra 0 e 1. Si noti per inciso che per $x \geq 1$ il costo è (nel caso del gruppo 1)
$$7(x-1) + 12\sqrt{x^2 + c^2} \,,$$
e quindi non coincide con la formula data sopra, vale a dire $7(1-x) + 12\sqrt{x^2 + c^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. I valori di a cercati sono $a \le 3$.

2. a) Non esiste; b) $+\infty$; c) 3.

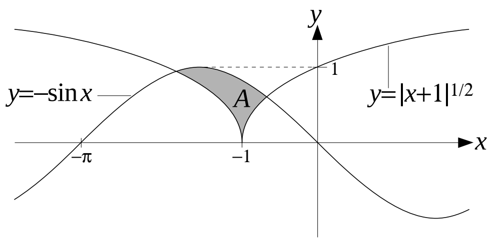
3. Imponendo che $f'(x) := 2(a + x + x^2)e^{2x} \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \ge 1/4$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 3 - 2x$ otteniamo
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = -\frac{1}{2}\int_3^1 y^{-1/2} dy = \Big| y^{1/2} \Big|_1^3 = \sqrt{3} - 1\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = 2$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = 2a^2t^{2b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = 3,\ b = -2$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \tan(\sin t)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. I valori di a cercati sono $a > 2$.

2. a) e; b) $+\infty$; c) $1/3$.

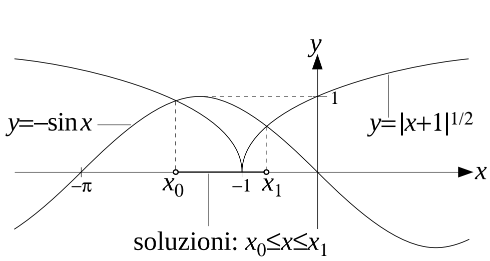
3. Imponendo che $f'(x) := (3a + 4x + 6x^2)e^{3x} \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \ge 2/9$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 3x$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}} = -\frac{1}{3}\int y^{-1/3}\, dy = -\frac{1}{2}y^{2/3} + c = -\frac{1}{2}(4-3x)^{2/3} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = \dfrac{1}{3}$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = \frac{1}{2}a^3t^{3b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = \pm 2,\ b = -1$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \dfrac{1}{\cos t} - 1 = \dfrac{1 - \cos t}{\cos t}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. I valori di a cercati sono $a > 4$.

2. a) 0; b) non esiste; c) 6.

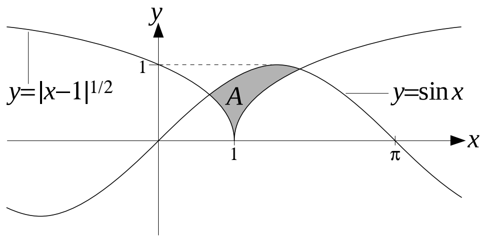
3. Imponendo che $f'(x) := 2(2a + x + 2x^2)e^{4x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 1/16$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 3x$ otteniamo
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}} = -\frac{1}{3}\int_4^1 y^{-1/3}\,dy = \frac{1}{2}\Big|y^{2/3}\Big|_1^4 = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = \dfrac{1}{2}$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = -\frac{1}{4}a^{-3}t^{-3b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = \pm 1,\ b = 1/2$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \dfrac{2}{1-2\sin t} - 1 = \dfrac{1+2\sin t t}{1-2\sin t}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. I valori di a cercati sono $a \geq 3$.

2. a) 0; b) $-\infty$; c) 1/5.

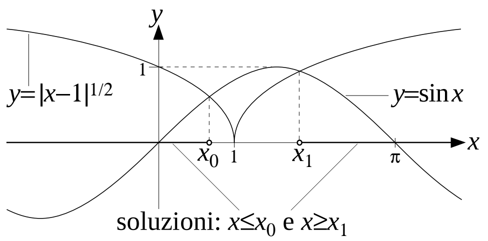
3. Imponendo che $f'(x) := 2(a + 2x + 2x^2)e^{2x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 1/2$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 5 - 4x$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-4x}} = -\frac{1}{4}\int y^{-1/4}\,dy = -\frac{1}{3}y^{3/4} + c = -\frac{1}{3}(5-4x)^{3/4} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = \dfrac{2}{3}$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = \frac{3}{4}a^5t^{5b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = \pm 1,\ b = -1/2$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \dfrac{1}{1-\sin t} - 1 = \dfrac{\sin t}{1-\sin t}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. I valori di a cercati sono $a < 2$.

2. a) $+\infty$; b) 0; c) 0.

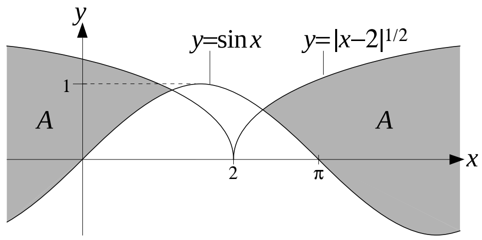
3. Imponendo che $f'(x) := (3a + 2x + 3x^2)e^{3x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 1/9$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 3 - 2x$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = -\frac{1}{2}\int y^{-1/2}\,dy = -y^{1/2} + c = -(3-2x)^{1/2} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = \dfrac{1}{2}$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = 3a^2t^{2b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = 2,\ b = -2$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \tan\left(\sin t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. I valori di a cercati sono $a \geq 4$.

2. a) $-\infty$; b) 0; c) 3.

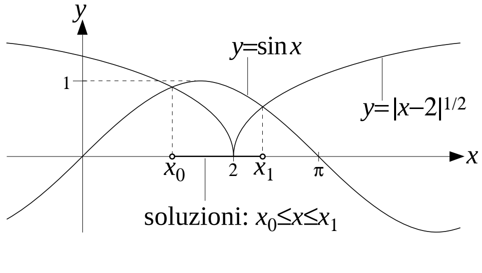
3. Imponendo che $f'(x) := 4(a + x + 2x^2)e^{4x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 1/8$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 5 - 4x$ otteniamo
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{5-4x}} = -\frac{1}{4}\int_5^1 y^{-1/4}\,dy = \frac{1}{3}\Big|y^{3/4}\Big|_1^5 = \frac{5^{3/4}-1}{3}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = 4$.

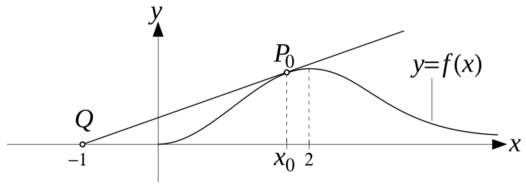
6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = 2a^3t^{3b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = \pm 1,\ b = -1$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \tan(1 - \cos t)$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Cominciamo disegnando il grafico della funzione f. Osserviamo che $f(x)$ è strettamente positiva per $x > 0$, si annulla per $x = 0$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) := x(2-x)e^{-x}$$
si vede che f cresce nell'intervallo $[0, 2]$, e decresce altrimenti, ed in particolare 2 è il punto di massimo assoluto. Inoltre studiando il segno della derivata seconda
$$f''(x) := (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$
otteniamo che f è concava nell'intervallo $\big[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\big]$ e convessa altrove. Sulla base di quanto appena detto otteniamo il tracciato approssimativo del grafico di f riportato nella figura sotto.



Dal disegno risulta chiaro che i punti visibili del grafico sono quelli di ascissa $x \in [0, x_0]$ dove x_0 corrisponde al punto P_0 per cui la retta tangente al grafico passa per Q. Poiché la retta tangente al grafico in P_0 ha equazione
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,,$$
imponendo che tale retta passi per il punto Q di coordinate $(-1, 0)$ otteniamo l'equazione
$$0 = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 + 1) = \big(x_0^2 + (x_0^2 - 2x_0)(x_0 + 1)\big)e^{-x_0} = x_0(x_0^2 - 2)e^{-x}\,,$$
da cui si ottiene $x_0 = \sqrt{2}$.

2. Ci limitiamo al punto b), che include il punto a) come caso particolare. Osserviamo innanzitutto la funzione
$$f(x) = \sin((2x)^a) - (2\sin x)^a$$
è scritta come differenza di due termini con la stessa parte principale, cioè $2^a x^a$, e quindi per ottenere la parte principale di f dobbiamo sviluppare entrambi i termini con maggior precisione. Usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$ con $t = (2x)^a$ otteniamo
$$\sin((2x)^a) = 2^a x^a - \frac{2^{3a}}{6}x^{3a} + O(x^{5a})\,, \tag{1}$$
mentre con $t = 2x$ si ha
$$(2\sin x)^a = 2^a\Big[x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\Big]^a = 2^a x^a\Big[1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\Big]^a\,,$$
e usando inoltre lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at + O(t^2)$ con $t = -\frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ otteniamo infine
$$\begin{aligned}(2\sin x)^a &= 2^a x^a\Big[1 + a\Big(-\frac{x^2}{6} + O(x^4)\Big) + O(x^4)\Big]\\ &= 2^a x^a - \frac{2^a a}{6}x^{a+2} + O(x^{a+4})\,. \end{aligned} \tag{2}$$
Distinguiamo ora due casi: per $a < 1$ si ha $3a < a + 2$, e mettendo insieme le formule (1) e (2) otteniamo
$$f(x) = -\frac{2^{3a-1}}{3}x^{3a} + o(x^{3a}) \sim -\frac{2^{3a}}{6}x^{3a}\,,$$
mentre per $a > 1$ si ha $a + 2 < 3a$, e quindi
$$f(x) = \frac{2^a a}{6}x^{a+2} + o(x^{a+2}) \sim \frac{2^a a}{6}x^{a+2}\,.$$

3. a) L'equazione caratteristica associata alla (*) è $\lambda^2 - 2\lambda + (3-a) = 0$ ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} := 1 \pm \sqrt{a-2}\,,$$

e quindi la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 2 \\ e^t\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) & \text{se } a < 2 \end{cases} \tag{3}$$

dove $\omega := \sqrt{|a-2|}$ e c_1, c_2 sono numeri reali arbitrari.
Osserviamo inoltre che una soluzione particolare dell'equazione di partenza (*) è data da $x_1 + x_2$ dove x_1 e x_2 sono rispettivamente soluzioni particolari delle equazioni non omogenee

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (3-a)x = e^t\,, \tag{4}$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (3-a)x = 2\,. \tag{5}$$

Siccome il coefficiente 1 nell'esponente del termine noto e^t in (4) non è mai soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo x_1 della forma be^t; così facendo la (4) diventa $b(2-a)e^t = e^t$, ed è verificata quando $b(2-a) = 1$, dunque

$$x_1(t) = \frac{e^t}{2-a}\,.$$

Cerchiamo invece la soluzione particolare x_2 della (5) tra le funzioni costanti, ottenendo

$$x_2(t) = \frac{2}{3-a}\,.$$

Pertanto la soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = x_{\mathrm{om}}(t) + \frac{e^t}{2-a} + \frac{2}{3-a}\,. \tag{6}$$

dove x_{om} è data in (3).
b) Per $a = 2$ l'equazione caratteristica della (*) diventa $\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0$ ed ha quindi come unica soluzione $\lambda = 1$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\mathrm{om}}(t) = e^t(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Siccome il coefficiente 1 nell'esponente del termine noto e^t della (4) coincide in questo caso con l'unica soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo x_1 della forma bt^2e^t; in questo caso la (4) si riduce a $2be^t = e^t$, che è verificata per $b = 1/2$, e quindi

$$x_1(t) = \frac{t^2 e^t}{2}\,,$$

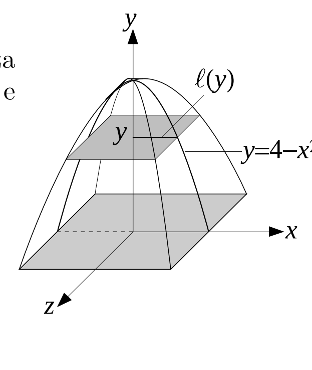
mentre una soluzione particolare della (5) è $x_2(t) = 2$ come prima. Pertanto la soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = e^t(c_1 + c_2 t) + \frac{t^2 e^t}{2} + 2 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

c) Esaminando le soluzioni date in (6) e (7) si vede subito che la condizione $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$ è sempre verificata quando $a \le 2$. Nel caso $a > 0$, invece, la condizione è verificata se e solo se $\lambda_{1,2} \le 2$, ovvero

$$1 + \sqrt{a-2} \le 2$$

ovvero $a \le 3$. Mettendo insieme di diversi casi si ottiene quindi che i valori di a cercati sono $a \le 3$.



4. Indichiamo con $\ell = \ell(y)$ la metà del lato della sezione di V ad altezza y. Dal disegno accanto risulta chiaro che ℓ soddisfa $y = 4 - \ell^2$, e dunque $\ell = \sqrt{4-y}$.
Pertanto l'area della sezione in questione è

$$a(y) = 4\ell^2 = 4(4-y)\,,$$

e quindi il volume di V è

$$\text{volume}(V) = \int_0^4 a(y)\, dy = \int_0^4 4(4-y)\, dy = 32\,.$$

5. Osserviamo che $e^x - e^2 > 0$ per $x > 2$ e quindi la funzione integranda è ben definita, continua e positiva per $x > 2$, ma non è definita in $x = 2$. Quindi l'integrale è improprio in 2 e $+\infty$, esiste sempre e vale un numero positivo oppure $+\infty$, e lo studiamo spezzandolo come somma di due integrali impropri semplici:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}} = \int_2^3 \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}}\,. \tag{8}$$

Riguardo all'ultimo degli integrali in (8), osserviamo che per ogni $a > 0$ si ha

$$(e^x - e^2)^{3a} \sim e^{3ax} \gg x^2 \quad \text{per } x \to +\infty,$$

e pertanto questo integrale è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty 1/x^2\, dx < +\infty$.

Per quanto riguarda invece il secondo integrale in (8), usando il cambio di variabile $x = y + 2$ ci riconduciamo ad un integrale improprio in 0, vale a dire

$$\int_2^3 \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}} = \int_0^1 \frac{dy}{(e^{2+y} - e^2)^{3a}}\,.$$

Osserviamo ora che

$$(e^{2+y} - e^2)^{3a} = e^{6a}(e^y - 1)^{3a} \sim e^{6a} y^{3a} \quad \text{per } y \to 0,$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, il secondo integrale in (8) si comporta come $\int_0^1 1/y^{3a}\, dy$, ed in particolare risulta essere finito se e solo se $3a < 1$, ovvero $a < 1/3$.

Riassumendo, l'integrale di partenza è finito per $a < 1/3$ e vale $+\infty$ altrimenti.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1. Come per il gruppo 1, la funzione $f(x)$ è sempre positive, si annulla solo per $x = 0$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Inoltre

$$f'(x) = 2x(1-x)e^{-2x}\,, \quad f''(x) = 2(1 - 4x + 2x^2)e^{-2x}\,,$$

da cui segue che f è crescente in $[0, 1]$ e decrescente altrove, ed è concava in $\big[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\big]$ e convessa altrove.

Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo che i punti P visibili da Q sono quelli di ascissa $x \leq x_0$ dove x_0 viene ottenuto risolvendo l'equazione

$$0 = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 + 1/2) = x_0(2x_0^2 - 1)e^{-2x_0}\,,$$

e vale $x_0 = 1/\sqrt{2}$.

2. Analogo al gruppo 1:

$$\text{parte principale di } f(x) = \begin{cases} \frac{3^{3a}}{6} x^{3a} & \text{per } a < 1, \\ \frac{3^a a}{6} x^{a+2} & \text{per } a > 1. \end{cases}$$

3. Analogo al gruppo 1. a) La soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 3 \\ e^t\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) & \text{se } a < 3 \end{cases}$$

dove $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a-3}$, $\omega := \sqrt{|a-3|}$, e c_1, c_2 sono numeri reali arbitrari. La soluzione generale della (*) è invece

$$x(t) = x_{\text{om}}(t) + \frac{2e^t}{3-a} + \frac{1}{4-a}\,.$$

b) Per $a = 3$ la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = e^t(c_1 + c_2 t) + t^2 e^t + 1 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) I valori di a cercati sono $a \leq 4$.

4. Analogo al gruppo 1. Il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = \int_0^9 a(y)\, dy = \int_0^9 4(9-y)\, dy = 162\,.$$

5. Analogo al gruppo 1. L'integrale è improprio in 3 e in $+\infty$, vale un numero positivo finito se $a < 1/2$, e vale $+\infty$ altrimenti.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1. Come per il gruppo 1, la funzione $f(x)$ è sempre positive, si annulla solo per $x = 0$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Inoltre

$$f'(x) = x^2(3-x)e^{-x}\,, \quad f''(x) = x(6 - 6x + x^2)e^{-x}\,,$$

da cui segue che f è crescente in $[0, 3]$ e decrescente altrove, ed è concava in $\big[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\big]$ e convessa altrove.

Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo che i punti P visibili da Q sono quelli di ascissa $x \leq x_0$ dove x_0 viene ottenuto risolvendo l'equazione

$$0 = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 + 2) = x_0^2(x_0^2 - 6)e^{-x_0}\,,$$

e vale $x_0 = \sqrt{6}$.

2. Uguale al gruppo 1.

3. Uguale al gruppo 1.

4. Uguale al gruppo 1.

5. Analogo al gruppo 1. L'integrale è improprio in 2 e in $+\infty$, vale un numero positivo finito se $a < 1/2$, e vale $+\infty$ altrimenti.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1. Come per il gruppo 1, la funzione $f(x)$ è sempre positive, si annulla solo per $x = 0$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Inoltre

$$f'(x) = x^2(3-2x)e^{-2x}\,, \quad f''(x) = 2x(3 - 6x + 2x^2)e^{-2x}\,,$$

da cui segue che f è crescente in $[0, 3/2]$ e decrescente altrove, ed è concava in $\big[\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\big]$ e convessa altrove.

Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo che i punti P visibili da Q sono quelli di ascissa $x \leq x_0$ dove x_0 viene ottenuto risolvendo l'equazione

$$0 = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 + 1) = x_0^2(2x_0^2 - 3)e^{-2x_0}\,,$$

e vale $x_0 = \sqrt{3/2}$.

2. Uguale al gruppo 2.

3. Uguale al gruppo 2.

4. Uguale al gruppo 2.

5. Analogo al gruppo 1. L'integrale è improprio in 3 e in $+\infty$, vale un numero positivo finito se $a < 1/3$, e vale $+\infty$ altrimenti.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno dimostrato di avere le idee confuse riguardo al significato di affermazioni come $f(x) \ll g(x)$ per $x \to +\infty$ e a come verificarle.

- Prima parte, esercizio 8. Vari dei presenti hanno disegnato il grafico di $\sqrt{|x|}$ come se fosse quello di $|x|$, mentre in realtà sono molto diversi.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno scritto che i punti P visibili da Q sono quelli di ascissa $x \leq x_0$ dove x_0 è il punto di massimo della funzione, mentre guardando bene il disegno si capisce che x_0 è sempre strettamente minore del punto di massimo. In particolare il punto di massimo non è visibile da alcun punto Q sull'asse delle x.

- Seconda parte, esercizio 3c). Diversi di quelli che hanno affrontato questo esercizio, hanno mostrato di non aver un'idea chiara di cosa significa l'espressione $f(t) = o(g(t))$ per $t \to +\infty$, arrivando per esempio a dire che vale $e^{\lambda t} = O(e^{2t})$ solo se $\lambda = 2$, mentre basta $\lambda \leq 2$ (altri hanno persino scritto che deve essere $\lambda \geq 2$).

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. La funzione cresce per $x \leq 1$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 3 è il punto di massimo assoluto e non c'è alcun punto di minimo assoluto.

2. $d \ll b \ll c \ll a$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{1 + \exp(-x \sin x)}{\sin(x^2)} \sim \dfrac{2}{\sin(x^2)} \sim \dfrac{2}{x^2}$.

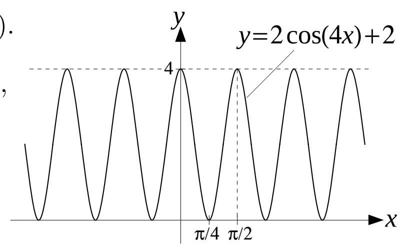
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (\cos t, -\sin t, 2)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{5}$, e quindi la distanza percorsa è $3\sqrt{5}$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 2x^2$ otteniamo
$$\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{4}\arctan y + c = \frac{1}{4}\arctan(2x^2) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{n^2 + 2^{-n}}{1+n^a} \sim \frac{1}{n^{a-2}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $a > 3$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (t^2 + 2)\exp(t^3)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è $\pi/2$ e l'immagine è l'intervallo $[0, 4]$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. La funzione cresce per $x \leq 4$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 4 è il punto di massimo assoluto, e siccome $f(0) < 0 = f(+\infty)$, 0 è il punto di minimo assoluto.

2. $b \ll d \ll c \ll a$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{1 - \exp(-x \sin x)}{\cos(x^2)} \sim \dfrac{x \sin x}{1} \sim x^2$.

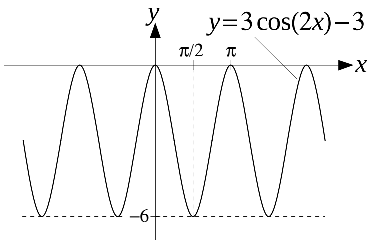
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (-\sin t, -1, -\cos t)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{2}$, e quindi la distanza percorsa è $2\sqrt{2}$.

5. Usando il cambio di variabile $x = 3y$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{3}\arctan y + c = \frac{1}{3}\arctan\Big(\frac{x}{3}\Big) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{1+n^{2a}}{n^2+2^n} \sim \frac{n^{2a}}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge per ogni $a > 0$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (t^2 + 2)\exp(t^4)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è π e l'immagine è l'intervallo $[-6, 0]$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. La funzione cresce per $x \leq 0$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 0 è il punto di massimo assoluto, e siccome $f(-1) > 0 = f(+\infty)$, non c'è alcun punto di minimo assoluto.

2. $d \ll a \ll b \ll c$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{1-\exp(-2x\cos x)}{\sin(x^2)} \sim \dfrac{2x\cos x}{\sin(x^2)} \sim \dfrac{2}{x}$.

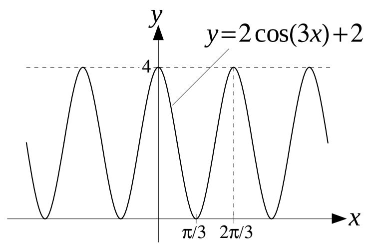
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (2, \cos t, -\sin t)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{5}$, e quindi la distanza percorsa è $\sqrt{5}$.

5. Usando la decomposizione $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\big)$ otteniamo
$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int_3^4 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\bigg|\log|x-2| - \log|x+2|\bigg|_3^4 = \frac{\log(5/3)}{4}\,.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{n+2^{-n}}{1+n^{3a}} \sim \frac{1}{n^{3a-1}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $a > 2/3$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (t^2+2)\exp(2t^2)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è $2\pi/3$ e l'immagine è l'intervallo $[0,4]$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. La funzione cresce per $x \leq 1$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 1 è il punto di massimo assoluto, e siccome $f(-2) < 0 = f(+\infty)$, -2 è il punto di minimo assoluto.

2. $b \ll a \ll c \ll d$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{1-\exp(-x\sin x)} \sim \dfrac{1}{x\sin x} \sim \dfrac{1}{x^2}$.

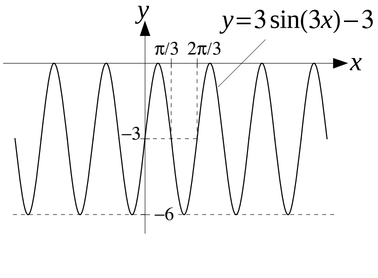
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (\cos t, \sin t, -1)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{2}$, e quindi la distanza percorsa è $\sqrt{2}$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 2x^2$ otteniamo
$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{1+4x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{4}\bigg|\arctan y\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{16}\,.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{1+n^a}{n^2+2^{-n}} \sim \frac{1}{n^{2-a}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $0 < a < 1$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (2t+1)\exp(t^3)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è $2\pi/3$ e l'immagine è l'intervallo $[-6,0]$.



Prima parte, gruppo 5.

1. La funzione cresce per $x \leq 4$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 4 è il punto di massimo assoluto, e siccome $f(2) > 0 = f(+\infty)$, non c'è alcun punto di minimo assoluto.

2. $d \ll a \ll c \ll b$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{1 - \exp(-2x\cos x)} \sim \dfrac{\sin(x^2)}{2x\cos x} \sim \dfrac{x}{2}$.

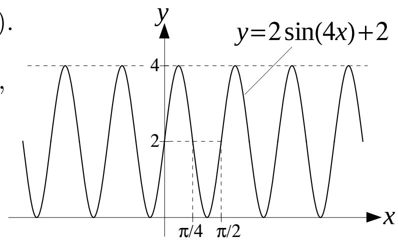
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (1, 2\cos t, -2\sin t)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{5}$, e quindi la distanza percorsa è $2\sqrt{5}$.

5. Usando la decomposizione $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\big)$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\big(\log|x-2| - \log|x+2|\big) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{n^2+2^n}{1+n^{2a}} \sim \frac{2^n}{n^{2a}} \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie non converge per alcun $a > 0$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (2t+1)\exp(t^4)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è $\pi/2$ e l'immagine è l'intervallo $[0, 4]$.



Prima parte, gruppo 6.

1. La funzione cresce per $x \leq 0$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 1 è il punto di massimo assoluto e non c'è alcun punto di minimo assoluto.

2. $b \ll c \ll a \ll d$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{1 + \exp(-x\sin x)} \sim \dfrac{\sin(x^2)}{2} \sim \dfrac{x^2}{2}$.

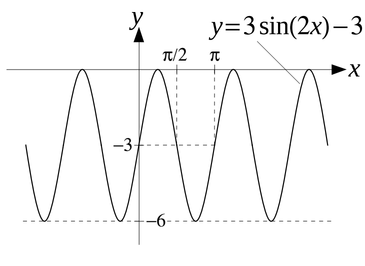
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (2\sin t, 1, 2\cos t)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{5}$, e quindi la distanza percorsa è $\sqrt{5}$.

5. Usando il cambio di variabile $x = 3y$ otteniamo
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{3}\Big|\arctan y\Big|_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{9}\,.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{1+n^{3a}}{n^3+2^{-n}} \sim \frac{1}{n^{3-3a}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $0 < a < 2/3$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (2t+1)\exp(2t^2)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è π e l'immagine è l'intervallo $[-6, 0]$.

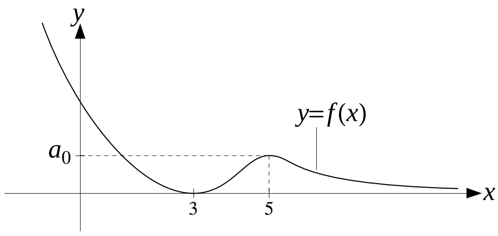


SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Indichiamo con r il raggio di base del cilindro e con h l'altezza. La superficie totale ed il volume del cilindro sono dati rispettivamente da
$$\text{area} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)\,, \quad \text{volume} = \pi r^2 h\,.$$
Pertanto, imponendo che la superficie totale sia uguale ad 1 otteniamo $1 = 2\pi r(r+h)$ da cui si ricava
$$h = \frac{1}{2\pi r} - r\,, \quad \text{volume} = \pi r^2 h = \frac{r}{2} - \pi r^3\,.$$
Osserviamo ora che i valori di r che corrispondono effettivamente ad un cilindro sono quelli per cui sia r che h sono numeri positivi, vale a dire
$$0 < r < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$
e che tra tutti questi vogliamo trovare quello che rende massimo il volume. Si tratta dunque di trovare il punto di massimo della funzione $f(r) := r/2 - \pi r^3$ relativamente all'intervallo $0 < r < 1/\sqrt{2\pi}$. Studiando il segno della derivata $f'(r) = 1/2 - 3\pi r^2$ otteniamo che $f(r)$ cresce per $r \le 1/\sqrt{6\pi}$ e decresce per $r \ge 1/\sqrt{6\pi}$, e quindi
   - $r = 1/\sqrt{6\pi}$ è il punto di massimo di f e $1/\sqrt{54\pi}$ è il valore massimo;
   - $r = 0$ e $r = 1/\sqrt{2\pi}$ sono i punti di minimo e 0 è il valore minimo.

   (Per la precisione dovremmo dire che f non ha punti di minimo nell'intervallo $0 < r < 1/\sqrt{2\pi}$, e che l'estremo inferiore dei valori di f è 0 e viene raggiunto quando $r \to 0$ oppure $r \to 1/\sqrt{2\pi}$.)
   Dunque il cilindro di volume massimo è quello con
$$r = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\,, \quad h = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,,$$
mentre non esiste alcun cilindro di volume minimo.

2. a) Riscriviamo l'equazione (*) come
$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := (x-3)^2 e^{-x}\,, \tag{1}$$
e tracciamo il grafico di f. Chiaramente $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è sempre positiva e si annulla solo per $x = 3$, tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$ e tende a 0 per $x \to +\infty$.
Studiando inoltre il segno della derivata $f'(x) = (5-x)(x-3)e^{-x}$ otteniamo che f cresce nell'intervallo $[3,5]$ e decresce altrimenti; in particolare $x = 5$ è un punto di massimo relativo.
Usando queste informazioni otteniamo il disegno nella figura sotto (la scala non è rispettata).



   Da questo disegno si vede che l'equazione (1), e quindi anche l'equazione (*), ha una soluzione per $a > a_0$, dove $a_0 := f(5) = 4e^{-5}$; due per $a = a_0$; tre per $0 < a < a_0$; una per $a = 0$; nessuna per $a < 0$.
   b) Siccome $1 > a_0$, per quanto visto sopra $x(1)$ è l'unica soluzione l'equazione $f(x) = 1$ e deve essere minore di 3. Poiché inoltre $f(0) = 9$ è maggiore di 1 e $f(3) = 0$ è minore di 1, abbiamo che $x(1)$ è compreso tra 0 e 3. Procediamo ora con il metodo di bisezione:
   - $f(1{,}5) \simeq 0{,}5 \;\Rightarrow\; f(0) > 1 > f(1{,}5) \;\Rightarrow\; 0 < x(1) < 1{,}5$;
   - $f(1) \simeq 1{,}5 \;\Rightarrow\; f(1) > 1 > f(1{,}5) \;\Rightarrow\; 1 < x(1) < 1{,}5$;
   - $f(1{,}25) \simeq 0{,}9 \;\Rightarrow\; f(1) > 1 > f(1{,}25) \;\Rightarrow\; 1 < x(1) < 1{,}25$;
   - $f(1{,}15) \simeq 1{,}1 \;\Rightarrow\; f(1{,}15) > 1 > f(1{,}25) \;\Rightarrow\; 1{,}15 < x(1) < 1{,}25$.

In particolare abbiamo che $x(1) = 1{,}2 \pm 0{,}1$ (anzi $x(1) = 1{,}2 \pm 0{,}05$).

c) Dalla figura sopra risulta chiaro che $x(a) \to 3^-$ per $a \to 0^+$.
Pertanto $e^{x(a)}$ tende a e^3 e l'equazione (*) diventa $(x(a)-3)^2 \sim e^3 a$, da cui segue che

$$x(a) - 3 \sim -\sqrt{e^3 a} \quad \text{per } a \to 0^+$$

(siccome $x(a) \to 3^-$, si ha che $x(a) - 3 < 0$).

3. a) Affinché $\log x$ esista, deve essere $x > 0$. Visto che l'esponente non è intero, affinché la potenza $(\log x)^{ax}$ sia ben definita la base $\log x$ deve essere positiva o nulla, inoltre la potenza deve essere diversa da 0 (altrimenti non è possibile fare la divisione) e quindi la base $\log x$ deve essere strettamente positiva, cioè $x > 1$.
Pertanto il dominio della funzione f è la semiretta $(1, +\infty)$.

b) Visto che la funzione $f(x)$ è continua e positiva sul dominio, l'integrale che ci interessa è improprio in 1 e $+\infty$, esiste sempre, e per studiarne il comportamento lo spezziamo come

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Studiamo ora il comportamento del primo integrale a destra dell'uguale. Usando il cambio di variabile $x = t+1$ otteniamo

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1+t)\,dt = \int_0^1 \frac{2+2t+t^2}{(\log(1+t))^{a(1+t)}}dt\,;$$

siccome per $t \to 0$ si ha

$$\frac{2+2t+t^2}{(\log(1+t))^{a(1+t)}} \sim \frac{2}{(\log(1+t))^a} \sim \frac{2}{t^a}\,,$$

$\int_1^2 f(x)\,dx$ è finito se e solo se $a < 1$ (per confronto asintotico con $\int_0^1 t^{-a}dt$).
Passiamo ora al secondo integrale a destra dell'uguale in (2). Osserviamo che per $x \to +\infty$ si ha $\log x \gg 2$ e quindi

$$f(x) = \frac{1+x^2}{(\log x)^{ax}} \ll \frac{x^2}{2^{ax}} \ll \frac{1}{x^2}$$

(l'ultimo passaggio segue dal fatto che $x^4 \ll 2^{ax} = (2^a)^x$ per ogni $a > 0$).
Pertanto $\int_2^\infty f(x)\,dx$ è finito per ogni a, per confronto asintotico con $\int_1^\infty x^{-2}dx$.
In conclusione l'integrale improprio di partenza è finito se e solo se $a < 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Impostiamo il problema prendendo h e r come per il gruppo 1. In questo caso, partendo dal fatto che il volume del cilindro è 2 otteniamo

$$h = \frac{2}{\pi r^2}\,, \quad \text{area} = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}\,,$$

e dunque si tratta di trovare il massimo ed il minimo della funzione $f(r) := 2\pi r^2 + 4/r$ sull'intervallo degli r ammissibili, vale a dire $0 < r < +\infty$.
Studiando il segno della derivata $f'(r) = 4\pi r - 4/r^2$ si vede che il punto di minimo di f è $r = 1/\sqrt[3]{\pi}$, e che l'estremo superiore dei valori di f è $+\infty$ e viene raggiunto per $r \to 0^+$ e $r \to +\infty$.
Pertanto il cilindro superfice minima è quello con $r = 1/\sqrt[3]{\pi}$ e $h = 2/\sqrt[3]{\pi}$, e non ci sono cilindri di superfice massima.

2. a) Analogo al gruppo 1. L'equazione (*) si riscrive come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-2)^2 e^{-x}$, ed il grafico di f assomiglia a quello del gruppo 1, con la differenza che f si annulla per $x = 2$ ed ha un punto di massimo locale per $x = 4$.
Pertanto l'equazione (*) ha una soluzione per $a > a_0$, dove $a_0 := f(4) = 4e^{-4}$; due per $a = a_0$; tre per $0 < a < a_0$; una per $a = 0$; nessuna per $a < 0$.

b) Analogo al gruppo 1: $x(1) = 0{,}6 \pm 0{,}1$.

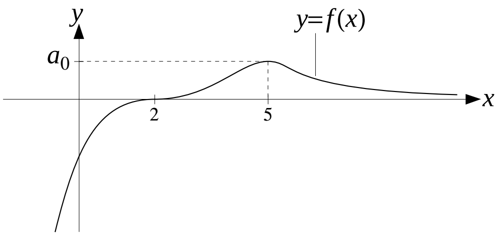
b) Analogo al gruppo 1: $x(a) \to 2^-$ per $a \to 0^+$, e $x(a) - 2 \sim -e\sqrt{a}$.

3. Analogo al gruppo 1. a) Il dominio di f è la semiretta $(1, +\infty)$.
   b) L'integrale improprio esiste per ogni a, ed è finito se e solo se $a < 1/2$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1. Il cilindro di volume massimo è quello con $r = 1/\sqrt{3\pi}$ e $h = 2/\sqrt{3\pi}$, e non ci sono cilindri di volume minimo.

2. a) L'equazione (*) si riscrive come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-2)^3 e^{-x}$, e il grafico della funzione f è dato nella figura sotto



   In particolare l'equazione (*) non ha alcuna soluzione per $a > a_0$, dove $a_0 := f(5) = 8e^{-5}$; ha una soluzione per $a = a_0$; due per $0 < a < a_0$; una per $a \le 0$.

   b) Analogo al gruppo 1: $x(-1) = 0{,}7 \pm 0{,}1$.

   b) Analogo al gruppo 1: $x(a) \to 2^+$ per $a \to 0^+$, e $x(a) - 2 \sim \sqrt[3]{e^2 a}$.

3. Analogo al gruppo 1. a) Il dominio di f è la semiretta $(1, +\infty)$.
   b) L'integrale improprio esiste per ogni a, ed è finito se e solo se $a < 1$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Analogo al gruppo 2. Il cilindro di superfice minima è quello con $r = 1/\sqrt[3]{2\pi}$ e $h = \sqrt[3]{4/\pi}$, e non ci sono cilindri di superfice massima.

2. a) Analogo al gruppo 3. L'equazione (*) si riscrive come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-3)^3 e^{-x}$, ed il grafico di f assomiglia a quello del gruppo 2, con la differenza che f si annulla per $x = 3$ ed ha un punto di massimo locale per $x = 6$.
   Pertanto l'equazione (*) non ha alcuna soluzione per $a > a_0$, dove $a_0 := f(6) = 27e^{-6}$; ha una soluzione per $a = a_0$; due per $0 < a < a_0$; una per $a \le 0$.

   b) Analogo al gruppo 1: $x(-1) = 1{,}4 \pm 0{,}1$.

   b) Analogo al gruppo 1: $x(a) \to 3^+$ per $a \to 0^+$, e $x(a) - 3 \sim e\sqrt[3]{a}$.

3. Analogo al gruppo 1. a) Il dominio di f è la semiretta $(1, +\infty)$.
   b) L'integrale improprio esiste per ogni a, ed è finito se e solo se $a < 1/2$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno sostanzialmente scritto che se $f(x)$ tende a $-\infty$ e $g(x)$ tende a 0, allora $f(x) \ll g(x)$, mentre in realtà vale $g(x) \ll f(x)$ perché $f(x)/g(x)$ tende a 0. Il punto che non sembra essere chiaro è che l'affermazione $g(x) \ll f(x)$ corrisponde ad un confronto dell'ordine di grandezza *dei valori assoluti* delle funzioni, ed in particolare è verificata quando g tende a 0 ed f tende ad un limite diverso da zero, non importa se positivo o negativo.

- Prima parte, esercizio 3. Diversi dei presenti hanno proposto come parte principale una funzione che non è una potenza di x, e questo è un errore grave.

- Prima parte, esercizio 4. Nessuno (o quasi) dei presenti ricordava che lo spazio percorso è uguale all'integrale del modulo della velocità.

- Prima parte, esercizio 7. Diversi dei presenti hanno preso come soluzione generale dell'equazione differenziale $x(t) = t^2 \exp(t^3)+c$ invece di $x(t) = (t^2+c)\exp(t^3)$, arrivando quindi a una risposta sbagliata (qui mi riferisco al gruppo 1, ma un analogo errore è stato frequente anche per gli altri gruppi).

- Prima parte, esercizio 8. Alcuni dei presenti invece di dire che il periodo della funzione proposta è, poniamo, π, hanno scritto che è $k\pi$. La risposta è stata presa per buona, ma l'impressione è che ci sia un po' di confusione su cosa si intenda per "periodo" di una funzione.

- Seconda parte, esercizio 1. La maggior parte dei presenti ha impostato il problema correttamente tranne che per un punto essenziale, vale a dire determinare l'insieme dei valori di r ammissibili, cioè quelli che corrispondono effettivamente a dei cilindri "reale", ed hanno quindi cercato il massimo del volume (gruppi 1 e 3) o il minimo della superfice (gruppi 2 e 4) al variare di r in $\mathbb{R}$. Inoltre, nel caso dei gruppi 2 e 4, il procedimento per la determinazione del minimo non teneva conto del fatto che la funzione non è definita per $r = 0$.

- Seconda parte, esercizio 2a). Alcuni dei presenti hanno affrontato la domanda confrontando i grafici di $(x-3)^2$ e ae^x (mi riferisco al gruppo 1 per semplicità), ma come visto a lezione questo approccio non sempre funziona, ed infatti in questo caso ha portato a soluzioni errate.

- Seconda parte, esercizio 3a). Per determinare il dominio della funzione f si può in alternativa scriverla come
$$f(x) = \frac{1+x^2}{\exp(ax\,\log(\log x))}$$
(mi riferisco per semplicità al gruppo 1), da cui segue che $f(x)$ è definita quando $\log(\log x)$ è definito, vale a dire per $x > 1$.

- Seconda parte, esercizio 3a). La maggior parte dei presenti ha scritto (erroneamente) che il dominio di f è dato dagli $x > 0$ con $x \neq 1$ (invece che $x > 1$).

Prima parte, gruppo 1.

1. Poiché $f''(x) = (16x^2 - 4)\exp(2 - 2x^2)$, la funzione è concava in $\big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]$.

2. a) $\big(\log\log(x^2)\big)' = \big(\log 2 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$; b) $\left[\dfrac{\exp(4x-2)}{(\exp(x-1))^2}\right]' = \big(e^{2x}\big)' = 2e^{2x}$.

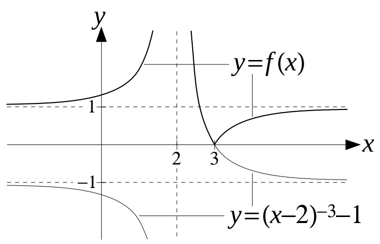
3. a) $\log 2$; b) $+\infty$; c) $1/6$.

4. $f(x) = x^2 - 2x^6 + \frac{2}{3}x^{10} + O(x^{14})$.

5. Integrale improprio in $\pi/2$: ci si riconduce (per cambio di variabile) a $\displaystyle\int_0^* \frac{dt}{t^{2a}}$, quindi $a < 1/2$.

6. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = 2e^{-t} + 2t - 2$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. Poiché $f''(x) = (x^2 - 1)\exp(1 - x^2/2)$, la funzione è concava in $[-1, 1]$.

2. a) $\big(\log\log(x^3)\big)' = \big(\log 3 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$; b) $\left[\dfrac{\exp(2x-3)}{(\exp(x-1))^3}\right]' = \big(e^{-x}\big)' = -e^{-x}$.

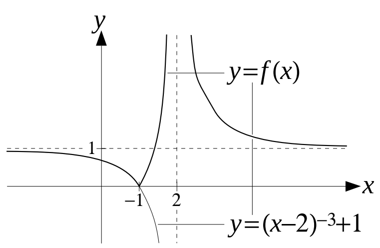
3. a) $+\infty$; b) 0; c) 2.

4. $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3}x^9 + O(x^{12})$.

5. Integrale improprio in $+\infty$: ci si riconduce a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2a}}$, quindi $a > 1/2$.

6. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(x/3)^n = \frac{1}{1-x/3} = \frac{3}{3-x}$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + t + \frac{1}{2}$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Poiché $f''(x) = (4x^2 - 2)\exp(2 - x^2)$, la funzione è convessa in $\big(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big]$ e $\big[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\big)$.

2. a) $\big(\log\log(x^4)\big)' = \big(\log 4 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$; b) $\left[\dfrac{\exp(2x+1)}{(\exp(x-2))^2}\right]' = \big(e^5\big)' = 0$.

3. a) $-\infty$; b) 0; c) 8.

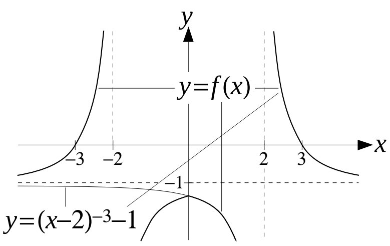
4. $f(x) = -2x^3 + \frac{4}{3}x^7 - \frac{4}{15}x^{11} + O(x^{14})$.

5. Integrale improprio in 1: ci si riconduce (per cambio di variabile) a $\displaystyle\int_0^* \frac{dt}{t^a}$, quindi $a < 1$.

6. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x^3)^n}{n!} = \exp(x^3)$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = -\frac{3}{2}e^{-2t} - t + \frac{1}{2}$.

8.



Prima parte, gruppo 4.

1. Poiché $f''(x) = (x^2 - 1)\exp(2 - x^2/2)$, la funzione è convessa in $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$.

2. a) $\left[\dfrac{(\exp(x-2))^2}{\exp(2x+1)}\right]' = \big(e^{-5}\big)' = 0$; b) $\big(\log\log(x^4)\big)' = \big(\log 4 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$.

3. a) 2; b) 0; c) 0.

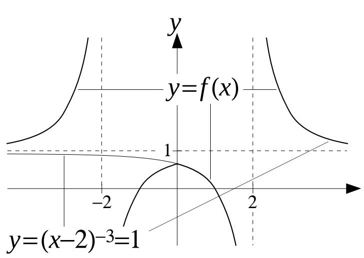
4. $f(x) = x^2 + 2x^6 + 4x^{10} + O(x^{14})$.

5. Integrale improprio in π: ci si riconduce (per cambio di variabile) a $\displaystyle\int_0^* \frac{dt}{t^{a+2}}$, quindi $a < -1$.

6. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty 3^n x^n = \sum_{n=0}^\infty (3x)^n = \frac{1}{1-3x}$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = -2e^{-t} - 2t + 2$.

8.



Prima parte, gruppo 5.

1. Poiché $f''(x) = (16x^2 - 4)\exp(1 - 2x^2)$, la funzione è convessa in $\big(-\infty, -\frac{1}{2}\big]$ e $\big[\frac{1}{2}, +\infty\big)$.

2. a) $\left[\dfrac{(\exp(x-1))^2}{\exp(4x-2)}\right]' = \big(e^{-2x}\big)' = -2e^{-2x}$; b) $\big(\log\log(x^2)\big)' = \big(\log 2 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$.

3. a) $1/2$; b) $\log 3$; c) $+\infty$.

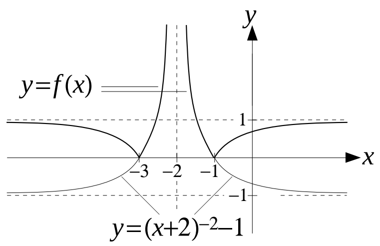
4. $f(x) = 1 - x^3 - \frac{3}{2}x^6 + O(x^9)$.

5. Integrale improprio in 1: ci si riconduce (per cambio di variabile) a $\displaystyle\int_0^* \frac{dt}{t^a}$, quindi $a < 1$.

6. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (4/x)^n = \frac{1}{1-4/x} = \frac{x}{x-4}$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} - t - \frac{1}{2}$.

8.



Prima parte, gruppo 6.

1. Poiché $f''(x) = (4x^2 - 2)\exp(1 - x^2)$, la funzione è concava in $\big[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big]$.

2. a) $\left[\dfrac{(\exp(x-1))^3}{\exp(2x-3)}\right]' = \big(e^{x}\big)' = e^{x}$; b) $\big(\log\log(x^3)\big)' = \big(\log 3 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$.

3. a) 6; b) $+\infty$; c) $+\infty$.

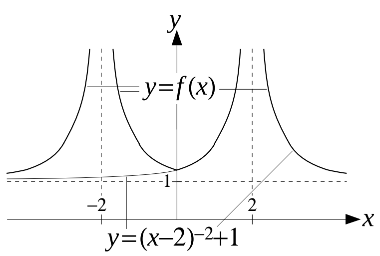
4. $f(x) = x^3 + 3x^6 + 9x^9 + O(x^{12})$.

5. Integrale improprio in $+\infty$: ci si riconduce a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{a+2}}$, quindi $a > -1$.

6. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \exp(x^2)$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} + t - \frac{1}{2}$.

8.



Seconda parte, gruppo 1.

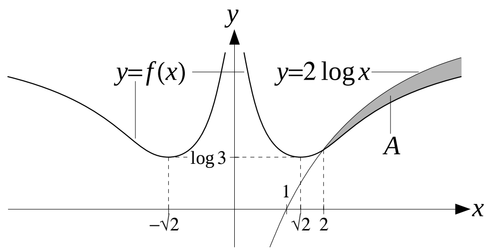
1. a) L'equazione caratteristica associata alla (*) è $\lambda^2 - 2a\lambda + (a-2)^2 = 0$ ed ha come soluzioni
$$\lambda_{1,2} := a \pm 2\sqrt{a-1}\,,$$
e quindi per $a > 1$ (cioè $\Delta > 0$) la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è
$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
mentre per $a < 1$ (cioè $\Delta < 0$) è
$$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$
dove $\omega := 2\sqrt{|a-1|}$.
Cerchiamo ora una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = \alpha e^t$; in questo caso l'equazione (*) si riduce all'identità $\alpha(a^2 - 6a + 5)e^t = e^t$, che è verificata per $\alpha = (a^2 - 6a + 5)^{-1}$, ovvero
$$\tilde{x}(t) = \frac{e^t}{a^2 - 6a + 5} \tag{3}$$
(si osservi che il trinomio $a^2 - 6a + 5$ si annulla solo per $a = 1$ e $a = 5$, che sono proprio i casi esclusi dalla discussione).
Per concludere, la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t)\,.$$
dove $x_{\rm om}$ è data in (1) e (2), mentre $\tilde{x}$ è data in (3).
b) Per $a = 1$ l'equazione caratteristica della (*) diventa $\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0$ ed ha quindi come unica soluzione $\lambda = 1$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è
$$x_{\rm om}(t) = e^t(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$
Siccome il coefficiente 1 nell'esponente del termine noto e^t della (*) coincide con l'unica soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = \alpha t^2 e^t$; in questo caso la (*) si riduce all'identità $2\alpha e^t = e^t$, che è verificata per $\alpha = 1/2$, e dunque
$$\tilde{x}(t) = \frac{t^2 e^t}{2}\,. \tag{5}$$
In conclusione la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t) = e^t\Big(c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2}\Big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
c) Siccome la soluzione particolare $\tilde{x}$ data sopra soddisfa $\tilde{x}(t) \ll e^{2t}$ per $t \to +\infty$ qualunque sia a (vedere (3) e (5)), possiamo riformulare la domanda chiedendo per quali a esiste una soluzione x dell'equazione *omogenea* associata alla (*) che soddisfa $x(t) \sim e^{2t}$ per $t \to +\infty$.
Le formule (2) e (4) mostrano chiaramente che per $a \le 1$ non esiste alcuna soluzione dell'equazione omogenea che soddisfa quanto richiesto. Invece per $a > 1$ la formula (1) mostra che tale soluzione esiste se $\lambda_1 = 2$ (basta prendere $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$) oppure se $\lambda_2 = 2$ (basta prendere $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$).
Si tratta dunque di trovare gli a per cui 2 risolve l'equazione caratteristica: sostituendo 2 al posto di λ nell'equazione caratteristica otteniamo $4 - 4a + (a-2)^2 = 0$, da cui si ricava infine
$$a = 4 \pm \sqrt{8} = 2(2 \pm \sqrt{2})\,.$$

2. a) Osserviamo innanzitutto che f è una funzione pari, e cerchiamo quindi di determinarne l'insieme di definizione. Scrivendo l'argomento del logaritmo nella definizione di f come
$$x^2 - 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^4 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{t^2 - t + 4}{t} \quad \text{con } t = x^2,$$
ed osservando che il discriminante del trinomio $t^2 - t + 4$ è negativo, otteniamo che l'argomento del logaritmo è sempre positivo quando è definito, cioè per ogni $x \neq 0$. Pertanto l'insieme di definizione di f è l'insieme degli $x \neq 0$.
Si vede inoltre facilmente che $f(x)$ tende a $+\infty$ sia quando $x \to 0$ che quando $x \to \pm\infty$, e per

la precisione $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $\log(x^2) = 2\log|x|$ per $x \to +\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2x - 8/x^3}{x^2 - 1 + 4/x^2} = \frac{2(x^4 - 4)}{x(x^4 - x^2 + 4)}$$

otteniamo che f cresce negli intervalli $[-\sqrt{2}, 0]$ e $[\sqrt{2}, +\infty)$ e decresce altrimenti, e in particolare $\pm\sqrt{2}$ sono i punti di minimo assoluto di f, ed il valore minimo è $f(\pm\sqrt{2}) = \log 3$. Sulla base di quanto detto tracciamo il grafico di f come riportato nella figura sotto.



b) Per disegnare l'insieme A dobbiamo capire per quali x si ha che $2\log x \geq f(x)$. Siccome $2\log x = \log(x^2)$, questa disequazione equivale a $x^2 \geq x^2 - 1 + 4/x^2$, e vale quindi per $x \geq 2$ (ci limitiamo a considerare le soluzioni x positive perché $\log x$ è definito solo per x positivo). A partire da questo otteniamo il disegno di A nella figura sopra.

c) Per quanto detto al punto precedente

$$\begin{aligned}\text{area}(A) &= \int_2^{+\infty} 2\log x - f(x)\,dx \\ &= \int_2^{+\infty} \log(x^2) - \log\Big(x^2 - 1 + \frac{4}{x^2}\Big)\,dx \\ &= \int_2^{+\infty} -\log\Big(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4}\Big)\,dx \qquad (5)\end{aligned}$$

e siccome

$$\log\Big(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4}\Big) \sim -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4} \sim -\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

l'integrale improprio in (5) è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty x^{-2}dx$, e di conseguenza pure l'area di A è finita.

3. L'integrale che appare nella definizione di $f(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione integranda è positiva (nell'intervallo di integrazione) e l'estremo di integrazione inferiore 0 è sempre minore o uguale all'estremo di integrazione superiore x^2, e quindi la funzione $f(x)$ è positiva per ogni x (e per la precisione si annulla solo per $x = 0$).
La funzione f è chiaramente pari, ed il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è dato dall'integrale improprio

$$L := \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^6}\,dt\,.$$

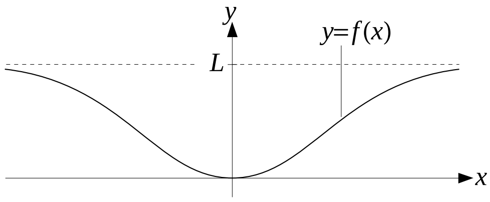
Siccome

$$\frac{\log(1+t^2)}{1+t^6} \sim \frac{2\log t}{t^6} \ll \frac{1}{t^5} \quad \text{per } t \to +\infty,$$

il valore di questo integrale improprio è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty t^{-5}\,dt$.
Infine la derivata di f è data dalla formula

$$f'(x) = \frac{\log(1+(x^2)^2)}{1+(x^2)^6} 2x = \frac{\log(1+x^4)}{1+x^{12}} 2x\,,$$

da cui segue che f cresce per $x \geq 0$ e decresce altrimenti.
Sulla base di quanto detto tracciamo il grafico di f come riportato nella figura sotto.



b) Usando il fatto che

$$\frac{\log(1+t^2)}{1+t^6} \sim t^2 \quad \text{per } t \to 0,$$

otteniamo che

$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^6}\, dt \sim \int_0^{x^2} t^2\, dt = \frac{x^6}{3} \quad \text{per } x \to 0.$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.

a) La soluzione generale dell'equazione si scrive come

$$x(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare. Per $a > 2$ la soluzione dell'equazione omogenea è

$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

con $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{8(a-2)}$, mentre per $a < 2$ è

$$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove $\omega := \sqrt{8|a-2|}$. Una soluzione particolare della (*) è invece

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{2t}}{a^2 - 12a + 20}\,.$$

b) La soluzione generale è

$$z(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t) = e^{2t}\Big(c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2}\Big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

c) $a = 8 \pm \sqrt{32} = 4(2 \pm \sqrt{2})$.

2. Molto simile al gruppo 1, per cui riporto solo le principali differenze.

a) I punti di minimo (assoluto) di f sono $x = \pm\sqrt{3}$ e il valore minimo è $\log 5$.

b) La soluzione della disequazione $2\log x \geq f(x)$ è $x \geq 3$.

c) L'area di A è data dall'integrale improprio

$$\int_3^{+\infty} 2\log x - f(x)\, dx$$

ed è finita.

3. Molto simile al gruppo 1, e in particolare non ci sono differenze per quanto riguarda il comportamento qualitativo del grafico di f. Riporto sotto le principali differenze.

a) Il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è dato dall'integrale improprio

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^8}\, dt$$

ed è finito; la derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{\log(1+x^4}{1+x^{16}}\, 2x\,.$$

b) Per $x \to 0$ si ha che

$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^8}\, dt \sim \int_0^{x^2} t^2\, dt \sim \frac{x^6}{3}\,.$$

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1.

a) La soluzione generale dell'equazione si scrive come

$$x(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare. Per $a > 1$ la soluzione dell'equazione omogenea è

$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

con $\lambda_{1,2} = a \pm 2\sqrt{a-1}$, mentre per $a < 1$ è

$$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

dove $\omega := 2\sqrt{|a-1|}$. Una soluzione particolare della (*) è invece

$$\tilde{x}(t) = -\frac{e^t}{a^2 - 6a + 5}\,.$$

b) La soluzione generale è

$$z(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t) = e^t\Big(c_1 + c_2 t - \frac{t^2}{2}\Big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

c) $a = 5 \pm \sqrt{12} = 5 \pm 2\sqrt{3}$.

2. Molto simile al gruppo 1, per cui riporto solo le principali differenze.

a) I punti di minimo (assoluto) di f sono $x = \pm 2$ e il valore minimo è $\log 7$.

b) La soluzione della disequazione $2\log x \geq f(x)$ è $x \geq 4$.

c) L'area di A è data dall'integrale improprio

$$\int_4^{+\infty} 2\log x - f(x)\, dx$$

ed è finita.

3. Molto simile al gruppo 1, e in particolare non ci sono differenze per quanto riguarda il comportamento qualitativo del grafico di f. Riporto sotto le principali differenze.

a) Il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è dato dall'integrale improprio

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^8}\, dt$$

ed è finito; la derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{\log(1+x^6)}{1+x^{16}}\, 2x\,.$$

b) Per $x \to 0$ si ha che

$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^8}\, dt \sim \int_0^{x^2} t^3\, dt \sim \frac{x^8}{4}\,.$$

Seconda parte, gruppo 4.

1. Analogo al gruppo 1.

   a) La soluzione generale dell'equazione si scrive come

$$x(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t)$$

   dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare. Per $a > 2$ la soluzione dell'equazione omogenea è

$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   con $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{8(a-2)}$, mentre per $a < 2$ è

$$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   dove $\omega := \sqrt{8|a-2|}$. Una soluzione particolare della (*) è invece

$$\tilde{x}(t) = -\frac{e^{2t}}{a^2 - 12a + 20}\,.$$

   b) La soluzione generale è

$$z(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t) = e^{2t}\Big(c_1 + c_2 t - \frac{t^2}{2}\Big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   c) $a = 7 \pm \sqrt{6} = 7 \pm 2\sqrt{6}$.

2. Molto simile al gruppo 1, per cui riporto solo le principali differenze.

   a) I punti di minimo (assoluto) di f sono $x = \pm\sqrt{5}$ e il valore minimo è $\log 9$.

   b) La soluzione della disequazione $2\log x \geq f(x)$ è $x \geq 5$.

   c) L'area di A è data dall'integrale improprio

$$\int_5^{+\infty} 2\log x - f(x)\, dx$$

   ed è finita.

3. Molto simile al gruppo 1, e in particolare non ci sono differenze per quanto riguarda il comportamento qualitativo del grafico di f. Riporto sotto le principali differenze.

   a) Il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è dato dall'integrale improprio

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^6}\, dt$$

   ed è finito; la derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{\log(1+x^6)}{1+x^{12}}\, 2x\,.$$

   b) Per $x \to 0$ si ha che

$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^6}\, dt \sim \int_0^{x^2} t^3\, dt \sim \frac{x^8}{4}\,.$$

Commenti

- Prima parte, esercizio 6. Molti dei presenti hanno discusso la convergenza della serie, mentre l'esercizio chiedeva di trovarne il valore.

- Seconda parte, esercizio 1. Al momento di dare la soluzione dell'equazione omogenea nel caso in cui l'equazione caratteristica ha soluzioni complesse, molti dei presenti hanno scritto

$$x_{\rm om}(t) = e^{\rho t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$$

  senza però specificare i valori di ρ e ω.

- Seconda parte, esercizio 1. Nel rispondere alla domanda c) molti dei presenti hanno sostanzialmente detto che quando λ_1 o λ_2 sono uguali a 2 (mi riferisco al gruppo 1) allora *tutte* le soluzioni x dell'equazione soddisfano $x(t) \sim e^{2t}$, ma in realtà solo alcune soluzioni hanno questa proprietà (e si sarebbe dovuto dire quali). In effetti nessuno dei presenti ha spiegato questo punto con la necessaria chiarezza.

- Seconda parte, esercizio 2a). Molti dei presenti hanno scritto che la funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$ senza spiegare perché; in diversi hanno invece scritto che $f(x)$ è definita solo per $x > 0$, sempre senza dare alcuna spiegazione.

- Seconda parte, esercizio 2b). Molti dei presenti hanno disegnato il grafico di $f(x)$ che interseca quello di $2\log x$ due volte, ottenendo che l'insieme A è limitato, ma senza fare alcun calcolo per trovare queste intersezioni. Alcuni hanno riportato questo disegno sbagliato pur avendo fatto i calcoli ed avendo trovato una sola intersezione!

- Seconda parte, esercizio 2c). Pochi dei presenti hanno impostato correttamente l'integrale improprio che dà l'area di A, e nessuno (!) ha dimostrato che è finito.

- Seconda parte, esercizio 3a). Nella soluzione data sopra abbiamo usato il seguente enunciato, visto rapidamente a lezione: data una funzione f della forma
$$f(x) := \int_a^{h(x)} g(t)\, dt$$
allora la derivata di f è data dalla formula
$$f'(x) = g(h(x))\, h'(x)\,.$$
Per dimostrarla basta scrivere f come $f(x) = G(h(x))$ dove
$$G(y) := \int_a^y g(t)\, dt$$
ed usare la formula per la derivata della funzione composta e il fatto che G è una primitiva di g, e quindi $G' = g$.

- Seconda parte, esercizio 3b). Nella soluzione data sopra abbiamo usato (senza dichiararlo esplicitamente) il seguente enunciato: date due funzioni f e $\tilde{f}$ della forma
$$f(t) := \int_0^{h(x)} g(t)\, dt \quad \text{e} \quad \tilde{f}(x) := \int_0^{h(x)} \tilde{g}(t)\, dt\,,$$
se abbiamo che $g(t) \sim \tilde{g}(t)$ per $t \to 0$ e che $h(x) \to 0$ per $x \to 0$, allora
$$f(t) \sim \tilde{f}(x) \quad \text{per } x \to 0.$$
Per dimostrarlo possiamo usare il teorema di de L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\tilde{f}'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g(h(x))\, h'(x)}{\tilde{g}(h(x))\, h'(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{\tilde{g}(t)} = 1\,.$$

Prima parte, gruppo 1.

1. Deve essere $-1 \leq 2x \leq 1$ affinché si definito l'arcoseno, e $\arcsin(2x) > 0$ affinché sia definito il logaritmo. L'insieme di definizione di f è quindi dato dagli x tali che $0 < x \leq 1/2$.

2. Deve essere $f''(x) = 4e^{2x} - 2a \geq 0$ per ogni $x \geq 0$, vale a dire $a \leq 2$.

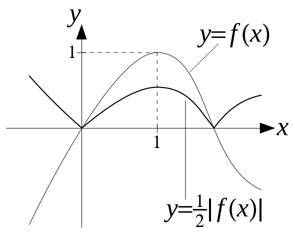
3. $f(x) \sim -\dfrac{9e}{2}x^4$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 1 - x^2$ si ottiene
$$\int_0^{+\infty} e^{1-x^2}\, x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} e^y dy = \frac{e}{2}\,.$$

5. $f'(x) := \dfrac{1}{2+x^4}$.

6. Equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. La soluzione generale è
$$x(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t) + 2 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
La condizione $x(0) = 0$ si traduce quindi nell'equazione $c_1 + 2 = 0$, e le soluzioni cercate sono
$$x(t) = e^{-t}(c_2 t - 2) + 2 \quad \text{con } c_2 \in \mathbb{R},$$

7. Calcoliamo il raggio di convergenza R usando la formula della radice:
$$R = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^n+1}{3^n+1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^n}{3^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3} = +\infty\,.$$

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. Deve essere $-1 \leq x \leq 1$ affinché si definito l'arcoseno, e $\pi + 4\arcsin x > 0$ affinché sia definito il logaritmo. L'insieme di definizione di f è quindi dato dagli x tali che $-1/\sqrt{2} < x \leq 1$.

2. Deve essere $f''(x) = e^{-x} - 2a \geq 0$ per ogni $x \leq 0$, vale a dire $a \leq 1/2$.

3. $f(x) \sim -\dfrac{1}{x^2}$.

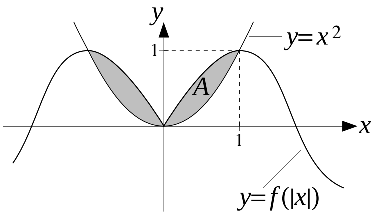
4. Usando il cambio di variabile $y = 2 - x^2$ si ottiene
$$\int e^{2-x^2}\, x\, dx = -\frac{1}{2}\int e^y dy = -\frac{e^y}{2} + c = -\frac{e^{2-x^2}}{2} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

5. $f'(x) := \dfrac{1}{2+x^6}$.

6. Equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. La soluzione generale è
$$x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + 2e^t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
La condizione $x(0) = 0$ si traduce quindi nell'equazione $c_1 + 2 = 0$, e le soluzioni cercate sono
$$x(t) = e^{2t}(c_2 t - 2) + 2e^t \quad \text{con } c_2 \in \mathbb{R},$$

7. Calcoliamo il raggio di convergenza R usando la formula della radice:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^n+1}{n^n+1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^n}{n^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0\,.$$

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Deve essere $-1 \leq x \leq 1$ affinché si definito l'arcoseno, e $\pi - 4\arcsin x > 0$ affinché sia definito il logaritmo. L'insieme di definizione di f è quindi dato dagli x tali che $-1 \leq x < 1/\sqrt{2}$.

2. Deve essere $f''(x) = e^{-x} + 2a \geq 0$ per ogni $x \leq 0$, vale a dire $a \geq -1/2$.

3. $f(x) \sim -x^4$.

4. Integrando per parti si ottiene

$$\int e^{1-2x}\, x\, dx = -\frac{e^{1-2x}}{2}x + \int \frac{e^{1-2x}}{2} dx = -\frac{e^{1-2x}}{2}x - \frac{e^{1-2x}}{4} = -\frac{e^{1-2x}}{4}(2x+1)\,.$$

5. $f'(x) := \dfrac{1}{1+x^4}$.

6. Equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. La soluzione generale è

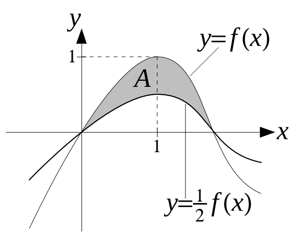
$$x(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t) + e^t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La condizione $x(0) = 0$ si traduce quindi nell'equazione $c_1 + 1 = 0$, e le soluzioni cercate sono

$$x(t) = e^{-t}(c_2 t - 1) + e^t \quad \text{con } c_2 \in \mathbb{R},$$

7. Calcoliamo il raggio di convergenza R usando la formula della radice:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n+1}{3^n+1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n}{3^n}\right)^{1/n} = \frac{2}{3}\,.$$

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Deve essere $-1 \leq 3x \leq 1$ affinché si definito l'arcoseno, e $\arcsin(3x) > 0$ affinché sia definito il logaritmo. L'insieme di definizione di f è quindi dato dagli x tali che $0 < x \leq 1/3$.

2. Deve essere $f''(x) = 9e^{3x} + 2a \geq 0$ per ogni $x \geq 0$, vale a dire $a \geq -9/2$.

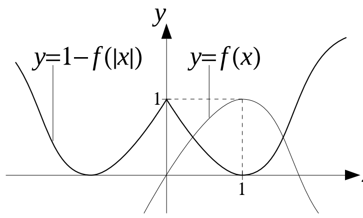
3. $f(x) \sim -\dfrac{2e}{9}x$.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int_0^{+\infty} e^{1-2x}\,x\,dx = -\left|\frac{e^{1-2x}}{2}x\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{e^{1-2x}}{2}dx = -\left|\frac{e^{1-2x}}{4}\right|_0^{+\infty} = \frac{e}{4}\,.$$

5. $f'(x) := \dfrac{1}{1+x^6}$.

6. Equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. La soluzione generale è
$$x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + 1 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
La condizione $x(0) = 0$ si traduce quindi nell'equazione $c_1 + 1 = 0$, e le soluzioni cercate sono
$$x(t) = e^{2t}(c_2 t - 1) + 1 \quad \text{con } c_2 \in \mathbb{R},$$

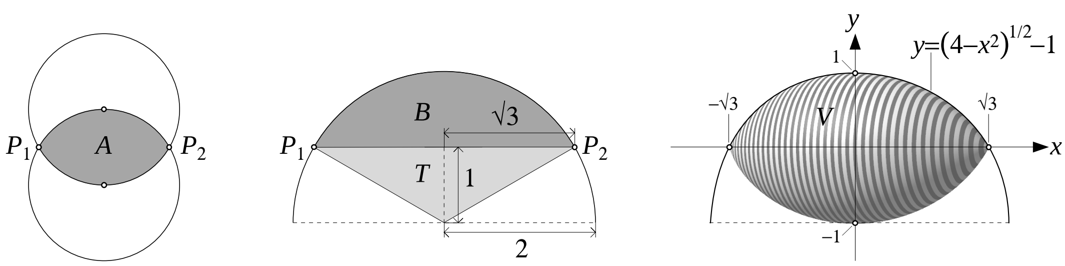
7. Calcoliamo il raggio di convergenza R usando la formula della radice:
$$R = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+1}{2^n+1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n}{2^n}\right)^{1/n} = \frac{3}{2}\,.$$

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Usando lo sviluppo di Taylor $e^t = 1+ \sim t + O(t)$ con $t := 8x^2$ otteniamo
$$f(x) := \sqrt[3]{\exp(8x^2) - 1} = \sqrt[3]{8x^2 + O(x^4)} \sim \sqrt[3]{8x^2} = 2x^{2/3}\,.$$
b) Utilizzando quanto fatto al punto a) e lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$ con $t := 8x^2$ otteniamo
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \sqrt[3]{\exp(8x^2) - 1} - 2x^{2/3} \\ &= \sqrt[3]{8x^2 + 32x^4 + O(x^6)} - 2x^{2/3} \\ &= 2x^{2/3}\left[\sqrt[3]{1 + 4x^2 + O(x^4)} - 1\right] \\ &= 2x^{2/3}\left[1 + \frac{4}{3}x^2 + O(x^4) - 1\right] \sim \frac{8}{3}x^{8/3} \end{aligned}$$
(nel penultimo passaggio abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $\sqrt[3]{1+t} = 1 + t/3 + O(t^2)$ con $t := 4x^2 + O(x^4)$).

2. a) L'area di A è pari a due volte l'area del segmento circolare B nel disegno sotto, al centro, che è data dall'area del settore circolare $S := B \cup T$ meno l'area del triangolo T, e siccome questo settore circolare è un terzo della circonferenza, abbiamo che
$$\text{area}(A) = 2\,\text{area}(B) = 2\big[\text{area}(S) - \text{area}(T)\big] = 2\left[\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right] = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\,.$$



b) Possiamo supporre (come nel disegno sopra, a destra) che la retta passante per i punti P_1 e P_2 sia l'asse delle x, e che questi punti siano quelli di coordinate $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Osserviamo che l'arco che si trova sopra l'asse delle x corrisponde al grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{4 - x^2} - 1$$

(questa formula la si ottiene a partire dall'equazione della circonferenza corrispondente, vale a dire $x^2 + (y-1)^2 = 4$), e quindi il volume del solido di rotazione V è dato da

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V) &= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \big(\sqrt{4-x^2} - 1\big)^2 dx \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} 5 - x^2 - 2\sqrt{4-x^2}\, dx \\
&= 2\pi \bigg| 5x - \frac{x^3}{3} \bigg|_0^{\sqrt{3}} - 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\, dx \\
&= 8\pi\sqrt{3} - 8\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1-(x/2)^2}\, dx\,,
\end{aligned}$$

e per calcolare l'integrale che rimane si può usare il cambio di variabile $x/2 = \sin t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1-(x/2)^2}\, dx &= \int_0^{\pi/3} 2\cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^{\pi/3} 1 + \cos(2t)\, dt \\
&= \bigg| t + \frac{\sin(2t)}{2} \bigg|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\,.
\end{aligned}$$

Mettendo insieme i calcoli fatti otteniamo infine

$$\text{volume}(V) = 8\pi\sqrt{3} - 8\pi\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = 8\pi\sqrt{3} - \frac{8\pi^2}{3}\,.$$

3. Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Seguendo la solita procedura, riscriviamo l'equazione come

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int 2t^3\, dt\,,$$

ed utilizzando il fatto che

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\, dx = \frac{1}{2}\big(\log|x-1| - \log|x+1|\big) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{t^4}{2} + c\,; \qquad \frac{x-1}{x+1} = \pm\exp(t^4 + 2c)\,; \qquad \frac{x-1}{x+1} = c\,\exp(t^4)$$

con c numero reale arbitrario (nell'ultimo passaggio abbiamo scritto c al posto di $\pm e^{2c}$), e infine

$$x(t) = \frac{2}{1 - c\,\exp(t^4)} - 1 = \frac{1 + c\,\exp(t^4)}{1 - c\,\exp(t^4)}\,. \tag{1}$$

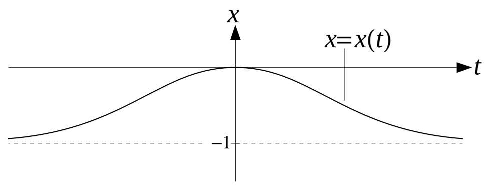
a) Imponendo la condizione $x(0) = 0$ nella (1) otteniamo

$$x(t) = \frac{2}{1 + \exp(t^4)} - 1\,.$$

Si verifica facilmente che questa funzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, si annulla per $t = 0$ (come richiesto) ed altrimenti è sempre negativa, e tende a -1 quando $t \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata prima

$$\dot{x}(t) = -\frac{8t^3\,\exp(t^4)}{(1 + \exp(t^4))^2}$$

si ottiene che x cresce per $t \le 0$ e decresce per $t \ge 0$. Mettendo insieme queste informazioni otteniamo il disegno riportato nella figura sotto.



b) La soluzione cercata non rientra tra quelle date dalla formula (1); è infatti chiaro che la funzione a destra dell'uguale non assume mai il valore -1. In effetti il fattore $x^2 - 1$ nell'equazione di partenza (*) si annulla per $x = -1$, e pertanto la soluzione cercata è la funzione costante $x(t) = -1$.

c) Per $a = -1$ la soluzione è stata trovata al punto b) ed è effettivamente definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per $a \neq -1$ la soluzione si trova a partire dalla formula (1): imponendo $x(0) = a$ si ottiene infatti un'equazione che permette di trovare la costante c in funzione del parametro a, e per la precisione si ottiene

$$c = \frac{a-1}{a+1} \,. \tag{2}$$

Osserviamo ora che la funzione in (1) è ben definita per ogni t se il denominatore $1 - c\,\exp(t^4)$ non si annulla per alcun t; ma la soluzione dell'equazione $1 - c\,\exp(t^4) = 0$ è

$$t = \pm\sqrt[4]{-\log c}\,,$$

ed in particolare esiste solo per $0 < c \leq 1$. Dunque la soluzione in (1) è definita per ogni t se $c \leq 0$ oppure se $c > 1$. Traducendo queste condizioni in termini di a tramite la (2) otteniamo infine (fatti i dovuti calcoli) che la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = a$ è definita per ogni t se (e solo se) $a \leq 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Si procede come per il gruppo 1. a) $f(x) \sim \sqrt{2}\,x$. b) $f(x) - g(x) \sim -\dfrac{\sqrt{2}}{6}x^3$.

2. Analogo al gruppo 1: $\text{area}(A) = \pi - 2$, $\text{volume}(V) = \dfrac{10\pi}{3} - \pi^2$.

3. Analogo al gruppo 1. La soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = \frac{4}{1 - c\,\exp(2t^6)} - 2 = 2\frac{1 + c\,\exp(2t^6)}{1 - c\,\exp(2t^6)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

a) Le soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{4}{1 + \exp(2t^6)} - 2$$

ed il grafico è molto simile a quello del gruppo 1 (la differenza principale è che il limite per $t \to \pm\infty$ è -2 invece di -1).

b) La soluzione cercata è la funzione costante $x(t) = -2$.

c) I valori di a cercati sono $a \leq 2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Si procede come per il gruppo 1. a) $f(x) \sim 2x^2$. b) $f(x) - g(x) \sim 2x^6$.

2. Analogo al gruppo 1: $\text{area}(A) = 4\pi - 8$, $\text{volume}(V) = \dfrac{80\pi}{3} - 8\pi^2$.

3. Analogo al gruppo 1. La soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = \frac{4}{1 - c\,\exp(2t^4)} - 2 = 2\frac{1 + c\,\exp(2t^4)}{1 - c\,\exp(2t^4)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

a) Le soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{4}{1+\exp(2t^4)} - 2$$

ed il grafico è molto simile a quello del gruppo 1 (la differenza principale è che il limite per $t \to \pm\infty$ è -2 invece di -1).

b) La soluzione cercata è la funzione costante $x(t) = -2$.

c) I valori di a cercati sono $a \leq 2$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Si procede come per il gruppo 1. a) $f(x) \sim \sqrt[3]{2}\, x^{2/3}$. b) $f(x) - g(x) \sim -\frac{\sqrt[3]{2}}{9} x^{8/3}$.

2. Analogo al gruppo 1: $\text{area}(A) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{volume}(V) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi^2}{3}$.

3. Analogo al gruppo 1. La soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = \frac{2}{1-c\,\exp(t^6)} - 1 = \frac{1+c\,\exp(t^6)}{1-c\,\exp(t^6)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

a) Le soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{2}{1+\exp(t^6)} - 1$$

ed il grafico è molto simile a quello del gruppo 1.

b) La soluzione cercata è la funzione costante $x(t) = -1$.

c) I valori di a cercati sono $a \leq 1$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno risposto $a \leq 2e^{2x}$ che corrisponde alla disequazione $f''(x) \geq 0$ (mi riferisco al gruppo 1, ma un discorso analogo vale per gli altri gruppi), mentre bisogna trovare gli a per cui questa disequazione è soddisfatta per qualunque $x \geq 0$, ed in particolare la riposta non può dipendere da x.

- Prima parte, esercizio 6. Nel trattare la condizione $x(0) = 0$ diversi dei presenti hanno ricavato l'equazione su c_1 data sopra, e a questa hanno aggiunto la condizione $c_2 = 0$ (non è chiaro con quale logica).

- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno trovato come parte principale di f funzioni del tipo $g(x) = 1 + x^2/2$. A prescindere dall'errore che ci sta dietro, una risposta del genere avrebbe dovuto essere rigettata in quanto *evidentemente* inaccettabile: la ragione principale è che $f(x)$ tende a 0 per $x \to 0$, mentre questa $g(x)$ no (e quindi non può essere asintoticamente equivalente a $f(x)$); una seconda ragione è che questa g non è un monomio, mentre le parti principali devono essere dei monomi.

- Seconda parte, esercizio 1. Un errore abbastanza frequente, e piuttosto grave, è stato usare lo sviluppo con $(1+t)^a = 1 + at + \cdots$ sostituendo al posto di t una funzione che non tende a 0 per $x \to 0$. Per esempio, nel gruppo 2,

$$\sqrt{1-\cos(2x)} = 1 - \frac{\cos(2x)}{2} + \cdots$$

Un altro errore abbastanza frequente, e ancora più grave, è stato usare semplificazioni del tipo $(a+b)^c = a^c + b^c$.

- Seconda parte, esercizio 2. Quasi nessuno dei presenti ha calcolato correttamente l'area di A, e nessuno ha calcolato correttamente il volume di V. Uno degli errori più frequenti nell'impostazione di entrambi i calcoli è stato fatto al momento di scrivere le circonferenze in oggetto come grafici di funzioni.

- Seconda parte, esercizio 3. La maggior parte dei presenti che ha affrontato il punto b) ha scritto che la soluzione non esiste, dimenticando che non tutte le soluzioni si trovano utilizzando la solita procedura.

- Seconda parte, esercizio 3. Nel cercare la soluzione generale dell'equazione, diversi dei presenti hanno utilizzato semplificazioni errate, che si possono ricondurre alla forma $e^{a+b} = e^a + e^b$; si tratta di errori gravi.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Esplicitando y in funzione di x nell'equazione $y = f(x)$ si ottiene
$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{2}{y} - 3} = \sqrt[3]{\frac{2-3y}{y}}\,.$$

2. Risolvendo l'equazione $f'(x) = 3$ si ottiene $x = \pm\sqrt{2}$.

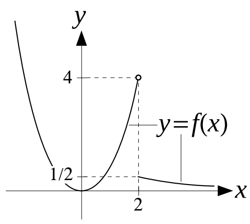
3. Le soluzioni sono $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2}$.

4. a) $-\infty$; b) 0; c) $-\frac{1}{2}$.

5. Usando il cambio di variabile $t = x - 1$ l'integrale diventa improprio in 0 invece che in 1 e la funzione integranda soddisfa
$$\frac{x^a}{\log x} = \frac{(1+t)^a}{\log(1+t)} \sim \frac{1}{t} \quad \text{per } t \to 0.$$
Pertanto l'integrale improprio è finito per nessun a.

6. Equazione a variabili separabili:
$$3x^2\,\dot{x} = e^t\ , \quad \int 3x^2\,dx = \int e^t\,dt\ , \quad x^3 = e^t + c\ , \quad x = \sqrt[3]{e^t + c}\,.$$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3/5)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2/5)^n = \frac{1}{1-3/5} - \frac{1}{1-2/5} = \frac{5}{6}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Esplicitando y in funzione di x nell'equazione $y = f(x)$ si ottiene
$$f^{-1}(y) = -\log\left(\frac{1}{y} - 2\right) = \log y - \log(1-2y)\,.$$

2. Risolvendo l'equazione $f'(x) = 5$ si ottiene $x = \pm 1$.

3. Le soluzioni sono $-\frac{\pi}{6} \le x \le 0$ e $-\frac{\pi}{2} \le x < -\frac{\pi}{4}$.

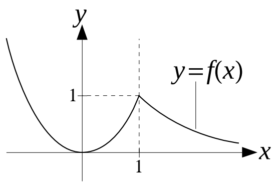
4. a) 0; b) $-\frac{1}{6}$; c) $+\infty$.

5. Usando il cambio di variabile $t = x - 1$ l'integrale diventa improprio in 0 invece che in 1 e la funzione integranda soddisfa
$$\frac{x^{2a}}{(\log x)^a} = \frac{(1+t)^{2a}}{(\log(1+t))^a} \sim \frac{1}{t^a} \quad \text{per } t \to 0.$$
Pertanto l'integrale improprio è finito per $a < 1$.

6. Equazione a variabili separabili:

$$3x^2\,\dot{x} = \sin t\,, \qquad \int 3x^2\,dx = \int \sin t\,dt\,, \qquad x^3 = -\cos t + c\,, \qquad x = \sqrt[3]{c - \cos t}\,.$$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2/5)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (4/5)^n = \frac{1}{1-2/5} + \frac{1}{1-4/5} = \frac{20}{3}.$

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Esplicitando y in funzione di x nell'equazione $y = f(x)$ si ottiene

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{y} - 1\right) = \frac{\log(2-y) - \log y}{2}\,.$$

2. Risolvendo l'equazione $f'(x) = -1$ si ottiene $x = \pm\sqrt{2}$.

3. Le soluzioni sono $0 \le x \le \dfrac{\pi}{8}$ e $\dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}$.

4. a) 0; b) $+\infty$; c) -2.

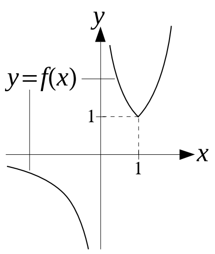
5. Usando il cambio di variabile $t = x - 1$ l'integrale diventa improprio in 0 invece che in 1 e la funzione integranda soddisfa

$$\frac{e^{ax}}{\sqrt{\log x}} = \frac{e^{a(1+t)}}{\sqrt{\log(1+t)}} \sim \frac{e^a}{t^{1/2}} \quad \text{per } t \to 0.$$

Pertanto l'integrale improprio è finito per ogni a.

6. Uguale al gruppo 1.

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2/5)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (4/5)^n = \frac{1}{1-2/5} - \frac{1}{1-4/5} = -\frac{10}{3}.$

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Esplicitando y in funzione di x nell'equazione $y = f(x)$ si ottiene

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{2 - \frac{1}{y}} = \sqrt[3]{\frac{2y-1}{y}}\,.$$

2. Risolvendo l'equazione $f'(x) = -3$ si ottiene $x = \pm 1$.

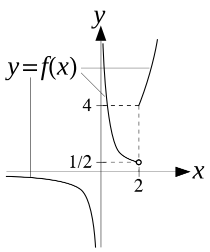
3. Le soluzioni sono $-\frac{\pi}{8} \leq x \leq 0$ e $-\frac{\pi}{2} \leq x < -\frac{\pi}{4}$.

4. a) -6; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

5. Usando il cambio di variabile $t = x - 1$ l'integrale diventa improprio in 0 invece che in 1 e la funzione integranda soddisfa
$$\frac{a^x}{(\log x)^{2a}} = \frac{a^{1+t}}{(\log(1+t))^{2a}} \sim \frac{a}{t^{2a}} \quad \text{per } t \to 0.$$
Pertanto l'integrale improprio è finito per $a < 1/2$.

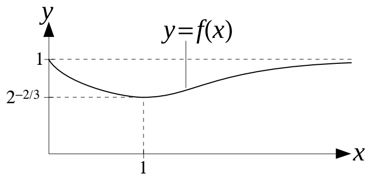
6. Uguale al gruppo 2.

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3/5)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2/5)^n = \frac{1}{1-3/5} + \frac{1}{1-2/5} = \frac{25}{6}.$

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Cominciamo dal punto b), rispondendo al quale otteniamo anche la risposta ad a).
b) Partiamo dalla solita osservazione: dire che la disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \geq a(1+x)$ vale per ogni $x \geq 0$ equivale a dire che
$$\min_{x \geq 0} f(x) \geq a \quad \text{dove} \quad f(x) := \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{1+x}. \tag{1}$$
(Ad essere precisi al posto del minimo di f dovremmo mettere l'estremo inferiore, visto che non sappiamo ancora se tale minimo esiste.)
La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \geq 0$ (gli altri valori di x non ci interessano) e studiandone il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(1+x)^2(1+x^3)^{2/3}}$$
si ottiene che f decresce per $x \leq 1$ e cresce per $x \geq 1$. Pertanto 1 è il punto di minimo *assoluto* di f, e quindi
$$\min_{x \geq 0} f(x) = f(1) = 2^{-2/3}$$
e quindi l'affermazione (1) è verificata se e solo se
$$a \leq 2^{-2/3}$$
In particolare il più grande numero a per cui vale la (1) è $a_{\max} = 2^{-2/3} \simeq 0{,}630$.
a) Siccome $5/3 = 0{,}6$ è minore o uguale a $a_{\max} \simeq 0{,}630$, la disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \geq \frac{3}{5}(1+x)$ risulta essere vera per ogni $x \geq 0$.
c) La disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \leq b(1+x)$ vale per ogni $x \geq 0$ se e solo se
$$\max_{x \geq 0} f(x) \leq b \tag{2}$$
(anche qui dovremmo mettere al posto del massimo l'estremo superiore).
Osserviamo ora che $f(x)$ tende a 1 per $x \to +\infty$ e vale 1 in 0, e questi dati ci permettono di completare lo studio del grafico di f iniziato al punto precedente, ottenendo la figura riportata sotto.

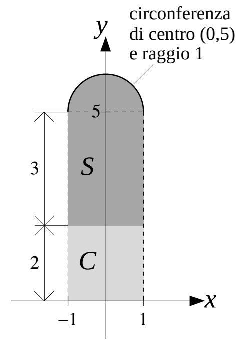


Si vede dunque che il valore massimo di f viene raggiunto per $x = 0$ (punto di massimo *assolut*) e vale 1. Pertanto l'affermazione (2) è verificata se e solo se

$$1 \leq b$$

In particolare il più piccolo numero b per cui vale la (2) è $b_{\min} = 1$.

2. Facciamo coincidere l'asse della ruota con l'asse delle x come nella figura accanto. Il volume v della ruota è dunque dato da



$$v = v_p - c_c$$

dove v_p è il volume della ruota piena (cioè non bucata) ottenuta facendo ruotare la figura piana $S \cup C$ attorno all'asse delle x, mentre v_c è il volume del cilindro ottenuto facendo ruotare il rettangolo C. Questo cilindro ha raggio di base 2 ed altezza 2, e quindi

$$v_c = 8\pi\,.$$

Il volume v_p lo possiamo invece calcolare usando la solita formula per il volume dei solidi ottenuti dalla rotazione del grafico di una funzione: in questo caso il grafico è la metà superiore della circonferenza di centro $(0, 5)$ e raggio 1, e corrisponde alla funzione

$$y = 5 + \sqrt{1-x^2}\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} v_p &= \pi \int_{-1}^{1} \Big(5 + \sqrt{1-x^2}\Big)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} 26 - x^2 + 10\sqrt{1-x^2}\, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} 26 - x^2\, dx + 10\,\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{154\,\pi}{3} + 5\pi^2\,. \end{aligned}$$

(L'ultimo integrale può essere calcolato utilizzando il cambio di variabile $x = \sin t$ oppure si osserva che rappresenta l'area di un semicerchio di raggio 1, e quindi vale $\pi/2$.)
Concludendo

$$v = v_p - v_c = \frac{130\,\pi}{3} + 5\pi^2\,.$$

3. a) L'integrale è improprio solo a $+\infty$, esiste perché la funzione integranda è positiva, e si dimostra che è finito applicando il principio del confronto asintotico con l'integrale $\int_1^{+\infty} 1/x^2\, dx$; si noti infatti che

$$\exp(-x^2) \ll \exp(-x) \ll 1/x^2 \quad \text{per } x \to +\infty.$$

b) Utilizziamo prima il cambio di variabile $t = \sqrt{a}\, x$ in modo da ricondurci ad un integrale in cui appare $\exp(-t^2)$, e poi integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2)\, dx &= \frac{1}{a^{3/2}} \int_0^{+\infty} t^2 \exp(-t^2)\, dt \\ &= \frac{1}{a^{3/2}} \int_0^{+\infty} t\,\big(t\exp(-t^2)\big)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a^{3/2}}\left[\left| t\left(-\frac{1}{2}\exp(-t^2)\right)\right|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1\left(-\frac{1}{2}\exp(-t^2)\right) dt\right] \\
&= \frac{1}{2a^{3/2}}\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\, dt = \frac{m}{2a^{3/2}}
\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio, al momento di integrare per parti, abbiamo usato il fatto che la primitiva di $t\exp(-t^2)$ è $-\frac{1}{2}\exp(-t^2)$; nel quarto passaggio abbiamo usato che $t\exp(-t^2)$ tende a 0 per $t \to +\infty$).

c) Usando lo sviluppo $(x-b)^2 = b^2 + x^2 - 2bx$ spezziamo l'integrale di partenza in tre integrali, di cui il primo si riconduce direttamente ad m, il secondo si calcola usando la formula ottenuta al punto b) nel caso $a = 1$, e l'ultimo si calcola usando cambio di variabile $-x^2 = t$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} (x-b)^2 \exp(-x^2)\, dx \\
&\qquad = b^2 \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\, dx + \int_0^{+\infty} x^2 \exp(-x^2)\, dx - 2b\int_0^{+\infty} x\exp(-x^2)\, dx \\
&\qquad = b^2 m + \frac{m}{2} + b\int_0^{-\infty} e^t\, dt = b^2 m + \frac{m}{2} - b\,.
\end{aligned}$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1. Poniamo

$$f(x) := \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{1+x}\,.$$

b) La disequazione $\sqrt[4]{1+x^4} \geq a(1+x)$ vale per ogni $x \geq 0$ se e solo se $a \leq a_{\max}$ dove

$$a_{\max} = \min_{x\geq 0} f(x) = f(1) = 2^{-3/4} \simeq 0{,}595\,.$$

a) Siccome $5/3 = 0{,}6$ è maggiore di $a_{\max}$, la disequazione $\sqrt[4]{1+x^4} \geq \frac{3}{5}(1+x)$ non vale per tutti gli $x \geq 0$.

c) La disequazione $\sqrt[4]{1+x^4} \leq b(1+x)$ vale per ogni $x \geq 0$ se e solo se $b \geq b_{\min}$ dove

$$b_{\min} = \max_{x\geq 0} f(x) = f(1) = 1\,.$$

2. Si procede come per il gruppo 1. In questo caso

$$\begin{aligned}
v_c &= 2\pi \\
v_p &= \pi\int_{-1}^{1} \left(4 + \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \\
&= \pi\int_{-1}^{1} 17 - x^2 + 8\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{100\,\pi}{3} + 4\pi^2
\end{aligned}$$

ed infine

$$v = v_p - v_c = \frac{94\,\pi}{3} + 4\pi^2\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 7. Pare che molti dei presenti abbiano fatto il seguente ragionamento (mi riferisco al gruppo 1, ma lo stesso discorso vale anche per gli altri gruppi): siccome $2^n \ll 3^n$, la serie di partenza

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n}$$

si comporta come la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3/5)^n ,$$
e pertanto il valore della prima serie coincide con quello della seconda, che è $5/2$. La prima parte del ragionamento è corretta, le due serie si comportano nello stesso modo (ed in particolare convergono entrambe ad un numero finito), ma da questo non segue che abbiano lo stesso valore.

- Seconda parte, esercizio 1c). Diversi dei presenti hanno seguito la strategia suggerita sopra, ma non si sono accorti che per trovare il valore massimo di f bisogna confrontare il valore in 0 con il limite a $+\infty$ che in questo caso coincidono. Anche se il risultato finale è corretto, il ragionamento è sbagliato (o perlomeno incompleto).

- Seconda parte, esercizio 1. Una soluzione alternativa consiste nel cercare i valori di massimo e di minimo della funzione
$$g(x) := \sqrt[3]{1+x^3} - a(1+x)$$
(mi riferisco al gruppo 1, ma lo stesso vale per il gruppo 2). I calcoli sono un po' più complicati di quelli presentati sopra, ma comunque fattibili.

- Seconda parte, esercizio 1. Un'altra soluzione alternativa per il punto b), proposta da uno dei presenti, consiste nel riscrivere la disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \geq a(1+x)$ (di nuovo, mi riferisco al gruppo 1) come $1+x^3 \geq a^3(1+x)^3$; dividendo per il fattore positivo $x+1$ (ricordo che $x \geq 0$), si ottiene $x^2 - x + 1 \geq a^3(1+x)^2$, e ci si riduce quindi a discutere la disequazione di secondo grado
$$(1-a^3)x^2 - (1+2a^3)x + (1-a^2) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$
Ovviamente la stessa idea può essere usata per risolvere anche il punto c).

- Seconda parte, esercizio 3a). Nel discutere l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$ la maggior parte dei presenti ha fatto una gran varietà di errori gravi, come dire che l'integrale è improprio in 0 (oltre che in $+\infty$), che converge quando l'esponente $-x^2$ è minore di -1 (confondendosi con l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x^a\,dx$, immagino), che $\exp(-x^2)$ è asintoticamente equivalente a una qualche potenza di x per $x \to +\infty$, ecc.

Prima parte, gruppo 1.

1. La funzione f è continua nel punto $x = 2$ se e solo se $a\,2^2 = a - 2$, ovvero $a = -2/3$.

2. Deve essere $f'(x) := \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} \le 0$ vale a dire $x \ge 2/3$.

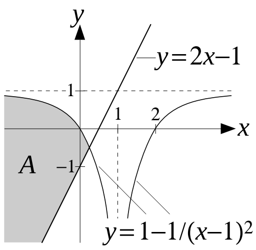
3. $c \ll a \ll b$.

4. $f(x) := x^2 - 2x^4 + 4x^6 + O(x^8)$.

5. La velocità di P per $t = 0$ è data dal vettore $v = (1, 0, 0)$.

6. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 2x$ si ottiene
$$\int_0^2 \sqrt{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 y^{1/2}\,dy = \frac{1}{3}\Big|y^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{3}\,.$$

7. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine omogenea con soluzione generale $x(t) = ce^{-t^3}$ con $c \in \mathbb{R}$. La soluzione cercata è $x(t) = e^{-t^3}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. La funzione f è continua nel punto $x = 4$ se e solo se $a\,4^2 = a - 4$, ovvero $a = -4/15$.

2. Deve essere $f'(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \ge 0$ vale a dire $x \ge 4/3$.

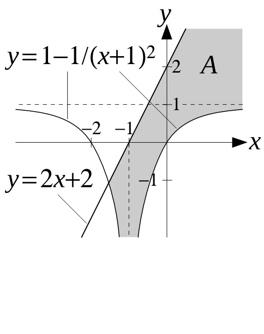
3. $b \ll c \ll a$.

4. $f(x) := x^2 + x^4 - \dfrac{x^6}{2} + O(x^8)$.

5. La velocità di P per $t = 0$ è data dal vettore $v = (2, 0, 0)$.

6. Usando il cambio di variabile $y = 8 - 4x$ si ottiene
$$\int_0^2 \sqrt[3]{8-4x}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^8 y^{1/3}\,dy = \frac{3}{16}\Big|y^{4/3}\Big|_0^8 = 3\,.$$

7. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine omogenea con soluzione generale $x(t) = ce^{t^3}$ con $c \in \mathbb{R}$. La soluzione cercata è $x(t) = e^{t^3}$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. La funzione f è continua nel punto $x = 2$ se e solo se $a + 2 = a\, 2^2$, ovvero $a = 2/3$.

2. Deve essere $f'(x) := \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+3}} \le 0$ vale a dire $x \ge 1$.

3. $b \ll a \ll c$.

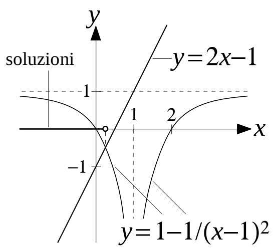
4. $f(x) := x^4 - x^5 - \dfrac{x^6}{2} + O(x^7)$.

5. La velocità di P per $t = 0$ è data dal vettore $v = (0, 0, 2)$.

6. Usando il cambio di variabile $y = 27 - 9x$ si ottiene
$$\int_0^3 \sqrt[3]{27-9x}\, dx = \frac{1}{9}\int_0^{27} y^{1/3}\, dy = \frac{1}{12}\Big| y^{4/3} \Big|_0^{27} = \frac{27}{4}\,.$$

7. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine omogenea con soluzione generale $x(t) = ce^{t^3}$ con $c \in \mathbb{R}$. La soluzione cercata è $x(t) = -e^{t^3}$.

8.



Prima parte, gruppo 4.

1. La funzione f è continua nel punto $x = 4$ se e solo se $a + 4 = a\, 4^2$, ovvero $a = 4/15$.

2. Deve essere $f'(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} \ge 0$ vale a dire $x \ge 8/3$.

3. $b \ll c \ll a$.

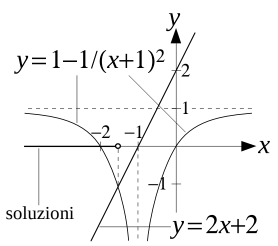
4. $f(x) := x^4 + 2x^5 + 4x^6 + O(x^7)$.

5. La velocità di P per $t = 0$ è data dal vettore $v = (0, 0, 1)$.

6. Usando il cambio di variabile $y = 9 - 3x$ si ottiene
$$\int_0^3 \sqrt{9-3x}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^{9} y^{1/2}\, dy = \frac{2}{9}\Big| y^{3/2} \Big|_0^{9} = 6\,.$$

7. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine omogenea con soluzione generale $x(t) = ce^{-t^3}$ con $c \in \mathbb{R}$. La soluzione cercata è $x(t) = -e^{-t^3}$.

8.



SECONDA PARTE.

1. a) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (*) è
$$\lambda^2 + 4\lambda + a = 0 \tag{1}$$
e per $a < 4$ ha due soluzioni reali e distinte
$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-a}\,. \tag{2}$$
Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) è
$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$
Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione (*) della forma $\tilde{x}(t) = ce^{-t}$, e facendo le dovute sostituzioni si ottiene la seguente soluzione
$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{-t}}{a-3}\,, \tag{4}$$
da cui segue che la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{e^{-t}}{a-3} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{5}$$
b) Quando $a = 3$ la formula (3) per la soluzione dell'equazione omogenea resta valida, mentre la formula (4) per la soluzione particolare non ha senso (si noti che il denominatore $a - 3$ vale zero). Infatti in questo caso e^{-t} risolve l'equazione omogenea e quindi si deve cercare una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = cte^{-t}$; facendo le dovute sostituzioni si ottiene in effetti la soluzione
$$\tilde{x}(t) = \frac{te^{-t}}{2}$$
da cui segue che la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + \frac{te^{-t}}{2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$
Invece per $a = 4$ resta valida la formula (4) per la soluzione particolare, ma non la formula (3) per la soluzione dell'equazione omogenea. In questo caso si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
da cui segue che la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} + e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$
c) Supponiamo per cominciare che $a < 4$ e $a \neq 3$. Usando la formula risolutiva (5) si vede subito che la condizione $x(t) = O(e^{-t})$ per $t \to +\infty$ è soddisfatta da *ogni* soluzione x se e solo se le soluzioni dell'equazione caratteristica soddisfano $\lambda_1, \lambda_2 \leq -1$, vale a dire
$$-2 + \sqrt{4-a} \leq -1 \quad \text{ovvero} \quad a \geq 3\,.$$
Consideriamo ora i casi $a = 3$ ed $a = 4$. Utilizzando le formule risolutive (7) e (6) otteniamo subito che la condizione $x(t) = O(e^{-t})$ è verificata da ogni soluzione x di (*) quando $a = 4$ mentre non è verificata da alcuna soluzione quando $a = 3$ (si osservi infatti che il termine $te^{-t}/2$ in (6) non è "o grande" di e^{-t}).
Riassumendo, i valori di a cercati sono
$$a > 3\,.$$
d) Utilizzando le formule risolutive (5), (6) e (7) si vede subito che non esistono soluzioni del tipo richiesto quando $a = 3$ o $a = 4$, mentre nei rimanenti casi ne esistono se $\lambda_1 = -1/2$ (basta prendere $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$) oppure $\lambda_2 = -1/2$ (basta prendere $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$). Dobbiamo dunque cerca i valori di a per cui $-1/2$ risolve l'equazione caratteristica (1), ovvero
$$(-1/2)^2 + 4(-1/2) + a = 0 \quad \text{ovvero} \quad a = 7/4\,.$$

2. a) Riscriviamo la disequazione che definisce A come

$$e^y \geq 3 + 2x - x^3 ,$$

ed osserviamo che tale disequazione si riscrive come

$$y \geq \log(3 + 2x - x^3)$$

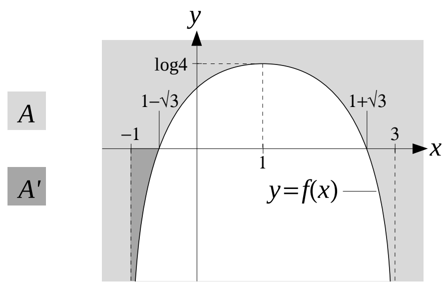
quando il logaritmo a destra dell'uguale è ben definito, cioè quando $3 + 2x - x^3 > 0$, mentre è automaticamente soddisfatta da ogni y quando $3 + 2x - x^3 \leq 0$ (perché e^y è sempre positivo). Non ci resta quindi che disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \log(3 + 2x - x^3) .$$

Si verifica facilmente che questa funzione è definita e continua per $-1 < x < 3$, tende a $-\infty$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 3^-$, ed è positiva per $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$ e negativa altrimenti. Inoltre, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2(1 - x)}{3 + 2x - x^3} ,$$

si vede che la funzione è crescente per $x \leq 1$ e decrescente per $x \geq 1$, ed in particolare 1 è il punto di massimo assoluto. Grazie a quanto appena detto possiamo tracciare il grafico di f e disegnare gli insiemi A ed A'.



b) Come si vede dalla figura sopra, l'area di A' è data da

$$\text{area}(A) = -\int_{-1}^{1-\sqrt{3}} f(x)\, dx .$$

(Attenzione al segno davanti all'integrale!) Scrivendo quindi

$$f(x) = \log(3 + 2x - x^3) = \log\big((x + 1)(3 - x)\big) = \log(x + 1) + \log(3 - x)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{area}(A) &= -\int_{-1}^{1-\sqrt{3}} \log(x + 1)\, dx - \int_{-1}^{1-\sqrt{3}} \log(3 - x)\, dx \\
&= -\int_{0}^{2-\sqrt{3}} \log y\, dy - \int_{2+\sqrt{3}}^{4} \log y\, dy \\
&= -\Big| y(\log y - 1) \Big|_{0}^{2-\sqrt{3}} - \Big| y(\log y - 1) \Big|_{2+\sqrt{3}}^{4} \\
&= 4 - 2\sqrt{3} - 8\log 2 + 4\log(2 + \sqrt{3}) \simeq 0{,}258
\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio abbiamo applicato ai due integrali i cambi di variabile $y = x + 1$ e $y = 3 - x$ nell'ordine; nel terzo passaggio abbiamo usato come fatto noto che la primitiva di $\log y$ è $y(\log y - 1)$).

3. Riscriviamo la serie come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ dove

$$f(x) := e^{g(x)} - e^2 \quad \text{e} \quad g(x) := (2x + 3)\log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) .$$

Usando lo sviluppo

$$\log(1 + t) \sim t \quad \text{per } t \to 0$$

otteniamo che, per $x \to +\infty$,

$$g(x) \sim 2x\frac{1}{x} = 2\,,$$

da cui segue che $g(x)$ tende a 2, e quindi $f(x)$ tende a 0, ma questo non basta a determinare il comportamento della serie. Usando invece lo sviluppo

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

otteniamo che, sempre per $x \to +\infty$,

$$g(x) = (2x+3)\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\right] = 2 + \frac{2}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\,,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} f(x) = \exp(g(x)) - \exp(2) &= \exp\left(2 + \frac{2}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right) - \exp(2) \\ &= e^2\left[\exp\left(\frac{2}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right) - 1\right] \sim e^2\left[\frac{2}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right] \sim \frac{2e^2}{x} \end{aligned}$$

(nel penultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$).
Pertanto la serie di partenza si comporta come la serie armonica $\sum 1/n$, ed in particolare diverge a $+\infty$.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Nel risolvere il punto c) nessuno dei presenti si è accorto che per $a = 3$ nessuna soluzione x soddisfa la condizione $x(t) = O(e^{-t})$ per $t \to +\infty$, e quindi $a = 3$ non rientra tra i valori di a cercati.

- Seconda parte, esercizio 1. Nel risolvere i punti c) e d) molti dei presenti hanno svolto i calcoli giusti, senza però spiegare cosa stavano facendo.

- Seconda parte, esercizio 2a). Molti dei presenti hanno disegnato correttamente il grafico della funzione $f(x) := \log(3 + 2x - x^2)$, ma hanno poi sbagliato a disegnare gli insiemi A e A'.

- Seconda parte, esercizio 2b). Diversi dei presenti hanno scritto che

$$\operatorname{area}(A') = \int_{-1}^{1-\sqrt{3}} \log(3 + 2x - x^2)\,dx\,,$$

  mentre invece l'area cercata è uguale all'opposto di questo integrale.

- Seconda parte, esercizio 2b). Alcuni dei presenti, pur disegnando correttamente l'insieme A', hanno scritto che è evidente "dal disegno" che A' ha area finita (è vero, ma non capisco perché dovrebbe essere evidente).

- Seconda parte, esercizio 3. Dei pochi presenti che hanno provato a risolvere questo esercizio, molti hanno usato il fatto noto

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e$$

  per scrivere che, per $n \to +\infty$,

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{2n+3} = \left[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\right]^2\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^3 \sim e^2\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^3\,,$$

  e ne hanno quindi dedotto che

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{2n+3} - e^2 \sim e^2\left[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^3 - 1\right].$$

Mentre il primo passaggio è corretto, il secondo non lo è, perché si basa su questo principio generale: date tre funzioni $f, g, \tilde{g}$ con $g \sim \tilde{g}$ allora $g + f \sim \tilde{g} + f$; ma questo principio è *falso* (e in particolare è falso nel caso specifico che stiamo considerando qui).

Prima parte, gruppo 1.

1. La derivata $f'(x) := 3(x^2 - 4)$ si annulla in ± 2. Confrontando i valori della funzione nei punti $-4, -2, 2, 3$ otteniamo che -4 e 2 sono i punti di minimo, 2 è il punto di massimo.

2. a) $+\infty$; b) 0; c) $+\infty$.

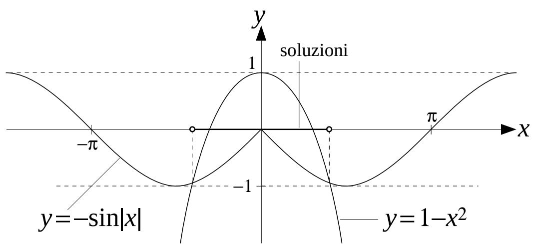
3. $f(x) := \dfrac{\sin(-2x^2)}{x^2} = \dfrac{-2x^2 + \frac{4}{3}x^6 - \frac{4}{15}x^{10} + O(x^{14})}{x^2} = -2 + \dfrac{4}{3}x^4 - \dfrac{4}{15}x^8 + O(x^{12})$.

4. $f'(x) = \exp\big((-2x)^2\big)\,(-2x)' = -2\,\exp(4x^2)$.

5. La lunghezza L percorsa è data dall'integrale del modulo) della velocità:
$$\begin{aligned} L = \int_0^{+\infty} \big|v(t)\big|\,dt &= \int_0^{+\infty} \Big|\big(e^{-t}(-\cos(2t) - 2\sin(2t)),\ e^{-t}(-\sin(2t) + 2\cos(2t))\big)\Big|\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sqrt{5}\,e^{-t}\,dt = \sqrt{5}\,. \end{aligned}$$

6. La soluzione generale dell'equazione è $x(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + 2t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ è quindi $x(t) = -\sin(2t) + 2t$.

7. Poiché il termine generico della serie di partenza soddisfa
$$\frac{2^{-n} + n^3}{1 + n^{2a}(1+n)} \sim \frac{1}{n^{2a-2}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
la serie converge per $a > 3/2$, per confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2a-2}}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. La derivata $f'(x) := 3(x^2 - 4)$ si annulla in ± 2. Confrontando i valori della funzione nei punti $-3, -2, 2, 4$ otteniamo che 2 è il punto di minimo, mentre -2 e 4 sono i punti di massimo.

2. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 0.

3. $f(x) := \dfrac{\log(1 - 4x^3)}{2x} = \dfrac{-4x^3 - 8x^6 - \frac{64}{3}x^9 + O(x^{12})}{2x} = -2x^2 - 4x^5 - \dfrac{32}{3}x^8 + O(x^{11})$.

4. $f'(x) = \exp\big(-(x^2)^2\big)\,(x^2)' = 2x\,\exp(-x^4)$.

5. La lunghezza L percorsa è data dall'integrale del modulo) della velocità:
$$\begin{aligned} L = \int_0^{+\infty} \big|v(t)\big|\,dt &= \int_0^{+\infty} \Big|\big(e^{-2t}(-2\cos t - \sin t),\ e^{-t}(-2\sin t + \cos t)\big)\Big|\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sqrt{5}\,e^{-2t}\,dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\,. \end{aligned}$$

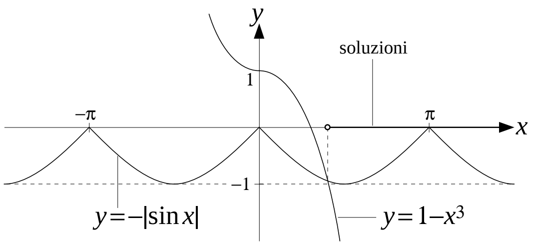
6. La soluzione generale dell'equazione è $x(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + 3t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ è quindi $x(t) = -\sin(3t) + 3t$.

7. Poiché il termine generico della serie di partenza soddisfa

$$\frac{2^{-n}}{1+(n^a+1)n} \sim \frac{1}{n^{a+1}2^n} \ll \frac{1}{2^n} \quad \text{per } n \to +\infty,$$

la serie converge per ogni $a > 0$, per confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

8.



SECONDA PARTE.

1. Partiamo dal punto b).

b) Riscriviamo la disequazione di partenza come

$$x^3 \log x \geq -a \quad \text{per ogni } x > 0,$$

vale a dire

$$\min_{x>0} f(x) \geq -a \quad \text{dove} \quad f(x) := x^3 \log x\,. \tag{1}$$

Studiando il segno della derivata $f'(x) = x^2(3\log x + 1)$ si vede subito che il punto di minimo assoluto di f è $x_0 := \exp(-1/3)$, quindi il valore minimo di f è $f(x_0) = -1/(3e)$, e pertanto la (1) diventa $-1/(3e) \geq -a$, vale a dire

$$a \geq \frac{1}{3e}\,.$$

a) La disequazione considerata si ottiene da quella al punto b) ponendo $a = 1/8$; siccome $1/8 > 1/(3e)$, per quanto visto sopra tale disequazione è verificata per ogni $x > 0$.

2. a) Si vede subito che $f(x)$ tende a 0 per $x \to 0$, e per la precisione

$$\begin{aligned} f(x) &:= 2 - \sqrt{3 + e^{-4x^2}} \\ &= 2 - \sqrt{4 - 4x^2 + O(x^4)} \\ &= 2 - 2\sqrt{1 - x^2 + O(x^4)} \\ &= 2 - 2\left[1 + \frac{-x^2 + O(x^4)}{2} + O\big((-x^2)^2\big)\right] = x^2 + O(x^4) \sim x^2\,, \end{aligned}$$

dove per il primo passaggio abbiamo usato lo sviluppo

$$e^t = 1 + t + O(t^2) \quad \text{con} \quad t := -4x^2\,,$$

mentre per il terzo abbiamo usato lo sviluppo

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + O(u^2) \quad \text{con} \quad u := -x^2 + O(x^4) \sim -x^2\,.$$

b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \neq -1$ abbiamo che

$$f(x) + ax^2 \sim (1+a)x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

Per $a = -1$ la parte principale di $f(x)$ si cancella con $-x^2$ e quindi abbiamo bisogno di uno sviluppo più accurato di $f(x)$. Procediamo dunque come per il punto a) prendendo però sviluppi

di ordine superiore:

$$\begin{aligned}
f(x) &:= 2 - \sqrt{3 + e^{-4x^2}} \\
&= 2 - \sqrt{4 - 4x^2 + 8x^4 + O(x^6)} \\
&= 2 - 2\sqrt{1 - x^2 + 2x^4 + O(x^6)} \\
&= 2 - 2\bigg[1 + \frac{-x^2 + 2x^4 + O(x^6)}{2} - \frac{\big(-x^2 + O(x^4)\big)^2}{8} + O\big((-x^2)^3\big)\bigg] \\
&= -\big(-x^2 + 2x^4 + O(x^6)\big) + \frac{x^4 + O(x^6)}{4} + O(x^6) = x^2 - \frac{7}{4}x^4 + O(x^6)\,, \qquad (2)
\end{aligned}$$

dove per il primo passaggio abbiamo usato lo sviluppo

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^2) \quad \text{con} \quad t := -4x^2\,,$$

mentre per il terzo abbiamo usato lo sviluppo

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + O(u^2) \quad \text{con} \quad u := -x^2 + 2x^4 + O(x^6) = -x^2 + O(x^4) \sim -x^2\,.$$

Utilizzando la formula (2) otteniamo infine

$$f(x) - x^2 = -\frac{7}{4}x^4 + O(x^6) \sim -\frac{7}{4}x^4\,.$$

3. a) Osserviamo che per $x > 1$ si ha che $x^a > 1$ per ogni esponente $a > 0$ ed in particolare per $a = 2x$; quindi $f(x) > 0$. Viceversa per $x < 1$ si ha che $x^a < 1$ per ogni esponente $a > 0$ ed in particolare per $a = 2x$; quindi $f(x) < 0$.

   b) Per quanto visto al punto a) l'integrale è improprio in 1 e a $+\infty$ e la funzione integranda è sempre positiva; pertanto l'integrale improprio esiste, e per capire se è finito o meno lo spezziamo come somma di due integrali impropri semplici:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = \int_1^2 \frac{dx}{f(x)} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}\,.$$

   Per studiare il comportamento del primo integrale improprio a destra dell'uguale lo riscriviamo come integrale improprio in 0 tramite il cambio di variabile $x = 1 + t$,

$$\int_1^2 \frac{dx}{f(x)} = \int_0^1 \frac{dt}{f(1+t)}\,, \qquad (3)$$

   e cerchiamo la parte principale di $f(1+t)$ per $t \to 0$:

$$\begin{aligned}
f(1+t) &= (1+t)^{2+2t} - 1 \\
&= \exp\big((2+2t)\log(1+t)\big) - 1 \sim (2+2t)\log(1+t) \sim 2t\,, \qquad (4)
\end{aligned}$$

   (nel terzo passaggio abbiamo usato che $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$, e nel quarto che $\log(1+t) \sim t$, sempre per $t \to 0$). Usando la (4) otteniamo infine che l'integrale improprio in (3) è infinito per confronto asintotico con $\int_0^1 dt/t$, e quindi anche l'integrale improprio di partenza è infinito.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Nell'affrontare il punto b) quasi tutti i presenti si sono ricondotti a studiare il minimo della funzione f come spiegato sopra, ma alla fine alcuni hanno confrontato il parametro a con il *punto di minimo* di f invece che con il *valore minimo* di f. Questo è un errore concettuale grave.

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno trovato lo sviluppo di f necessario per rispondere al punto a) come spiegato sopra, vale a dire utilizzando gli sviluppi di Taylor al primo ordine di e^x e $\sqrt{1+x}$, ed hanno capito chiaramente che per il punto b) nel caso $a = -1$ occorre migliorare tale sviluppo. Ma per far questo hanno sviluppato all'ordine due solo la funzione $\sqrt{1+x}$ e non anche e^x; se si svolgono i calcoli tenendo il resto si vede subito che così facendo c'è un problema...

Versione: 23 settembre 2016

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2015-16

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
`www.dm.unipi.it/~alberti`

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 19 dicembre 2015]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   - 1.2 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, immagine, funzione inversa; funzioni crescenti e decrescenti.
   - 1.3 Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.4 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - 2.1 Limiti di funzioni, proprietà elementari, forme indeterminate.
   - 2.2 Funzioni continue. Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass).
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo (locali) di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Teoremi di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - 3.5 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero.
   - 3.6 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione, espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
4. Alcuni risultati astratti
   - 4.1 *Numeri interi, razionali e reali. Estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Completezza dei numeri reali.*
   - 4.2 Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.
   - 4.3 Teorema di esistenza degli zeri. Algoritmo di bisezione e algoritmo di Newton.
   - 4.4 *Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione parziale del teorema di de l'Hôpital. Dimostrazione rigorosa (non grafica) della relazione tra monotonia e segno della derivata. Dimostrazione del teorema dello sviluppo di Taylor con resto di Lagrange.*
5. Integrali
   - 5.1 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Un'interpretazione fisica dell'integrale.
   - 5.2 Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - 5.3 Regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
   - 5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

5.5 Legge oraria di un punto in movimento nel piano o nello spazio, velocità ed accelerazione come derivate, distanza percorsa come integrale del modulo della velocità.

6. Integrali impropri

6.1 Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
6.2 Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
6.3 Integrali impropri non semplici.

7. Serie numeriche e serie di potenze

7.1 Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio fondamentale: la serie geometrica.
7.2 Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: dell'integrale, del confronto e del confronto asintotico, Esempio fondamentale: la serie armonica generalizzata.
7.3 Criteri di convergenza per le serie a termini di segno variabile: della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
7.4 Serie di potenze e raggio di convergenza.
7.5 Serie di Taylor. Calcolo del raggio di convergenza per le serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. *Espressione dei numeri e e π come serie. Giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

8. Equazioni differenziali

8.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica. Significato delle condizioni iniziali.
8.2 Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
8.3 Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee (per certe classi di termini noti).

T E S T I

Prima parte, gruppo 1.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \geq 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 1]$ della funzione $f(x) := \arctan(x^3 - x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} a(x^2+1) & \text{per } x \geq 2, \\ (x/2)^b - a & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (2x + a)\exp(x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{e^x - 1}{(\sin(\pi x))^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2x^3)}{x^3 e^x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2} + x^2}{e^{3x}}$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 7 della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1 - x^3)}{x^2}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{e^x(1 - \log x)}{x^3 - x^2} = o(x^a)$ per $x \to 0^+$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $(|x| - 1)^3 \leq y \leq \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \leq -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 0]$ della funzione $f(x) := \arctan(x^3 - 6x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^3 - a & \text{per } x \geq 1, \\ a(x^b + 1) & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (-x + a)\exp(2x^2)$ è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to -1/2} \frac{e^x - 1}{(\cos(\pi x))^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3^x - 1}{\log x - 2x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sin x)}{x^2}$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 8 della funzione $f(x) := \dfrac{4x^2}{1 - 2x^3}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{\sin x + \log^2 x}{x \log x} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $|x^3 + 1| \geq \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \leq 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 1]$ della funzione $f(x) := \arctan(-x^3 + x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 - b & \text{per } x \geq 2, \\ be^{a(x-2)} & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (3x + a)\exp(x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+x)}{\sin(\pi x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2 + \log(1-x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^{3x}(e^{x^2} - x^2)$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 4 della funzione $f(x) := \dfrac{(1-x^2)^8 - 1}{x^2}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{\log(1+x^2)}{\log x} = o(x^a)$ per $x \to 0^+$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x| - 1)^3 \leq \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos(\pi x) \geq 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $[0, +\infty)$ della funzione $f(x) := \arctan(-x^3 + 6x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^3 - b & \text{per } x \geq 1, \\ be^{a(x-1)} & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (-2x + a)\exp(2x^2)$ è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to (1/2)^+} \frac{\log x}{\cos(\pi x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2} + 1}{e^{2x} + 1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sin(1/x)\,\log(x+1)$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 8 della funzione $f(x) := (1 + x^4)\cos(x^2)$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x2^x = O(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x^3 - 1| \leq y \leq \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \leq -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 1]$ della funzione $f(x) := \arctan(x^3 - x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 + a & \text{per } x \geq 1, \\ a(x^b - 2) & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (2x + a)\exp(2x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\log(1+x)}{(\sin(\pi x))^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^2(1+\log x)^6$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{-4x^4}-1}{\sin(x^4)}$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 4 della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1-2x^2)}{x^2}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{\sin x + \log^2 x}{x \log x} = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|-1)^3 \geq \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin(\pi x) \leq 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 0]$ della funzione $f(x) := \arctan(x^3 - 6x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} a(x^3-1) & \text{per } x \geq 2, \\ (x/2)^b + a & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (-x + a)\exp(x^2)$ è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to1/2} \frac{e^x-1}{(\cos(\pi x))^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{x^2}-1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(1+2\sin x)}{x}$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 7 della funzione $f(x) := \dfrac{(1-x^3)^6-1}{x^2}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\log(1+x^2)\log x = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x^3+1| \leq y \leq \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Prima parte, gruppo 7.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos(\pi x) \leq -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1, 2]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $(-\infty, 0]$ della funzione $f(x) := \arctan(-x^3 + x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 2b & \text{per } x \geq 1, \\ be^{a(x-1)} & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (3x + a)\exp(2x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{e^x-1}{\sin(\pi x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+1}{\log x - x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^3+1)\sin(2/x^3)$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 10 della funzione $f(x) := (1+x^4)\sin(x^2)$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{e^x(1-\log x)}{x^3-x^2} = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $(|x|-1)^3 \le y \le \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 8.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos(\pi x) \le -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[1/2, 1]$.

2. Trovare (se esistono) i punti di massimo e minimo assoluti relativi all'intervallo $[0,+\infty)$ della funzione $f(x) := \arctan(-x^3+6x)$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita sotto risulta essere continua e derivabile:
$$f(x) := \begin{cases} x^3+2b & \text{per } x \ge 2, \\ be^{a(x-2)} & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (-2x+a)\exp(x^2)$ è decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

5. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to-(1/2)^+} \frac{\log(1+x)}{\cos(\pi x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sqrt[3]{1+x^4}-1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{4x}(e^{x^2}+x^2)$.

6. Scrivere il polinomio di Taylor (in zero) all'ordine 7 della funzione $f(x) := \dfrac{4x}{1-4x^3}$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x2^x = o(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $|x^3-1| \ge \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{\log(1+4x^4)}$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^2}$ per ogni $a \ne 1/2$.

   c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{2x^2}$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione
$$\exp(x^2) = a(3-x^2)\,. \tag{*}$$
   a) Dire quante sono le soluzioni $x \ge 0$ dell'equazione (*) per $a = 1/3$.

   b) Dire quante sono le soluzioni $x \ge 0$ dell'equazione (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.

   c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di (*) (quando ne esiste almeno una); determinare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$; trovare quindi $p, q \in \mathbb{R}$ per cui vale il seguente "sviluppo" di $x(a)$:
$$x(a) = p + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0,0)$, $(a,0)$ e $(0,1/a^2)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \ge 0$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.

   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{\log(1 + 16x^8)}$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^4}$ per ogni $a \neq 1/4$.

   c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{4x^4}$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione
$$\exp(x^2/2) = a(2 - x^2)\,. \tag{*}$$
   a) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per $a = 1/3$.

   b) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.

   c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di (*) (quando ne esiste almeno una); determinare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$; trovare quindi $p, q \in \mathbb{R}$ per cui vale il seguente "sviluppo" di $x(a)$:
$$x(a) = p + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$ e $(0, 1/a^3)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.

   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{\log(1 + 16x^4)}$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^2}$ per ogni $a \neq 1/4$.

   c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{4x^2}$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione
$$\exp(x^2/2) = a(4 - x^2)\,. \tag{*}$$
   a) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per $a = 1/3$.

   b) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.

   c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di (*) (quando ne esiste almeno una); determinare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$; trovare quindi $p, q \in \mathbb{R}$ per cui vale il seguente "sviluppo" di $x(a)$:
$$x(a) = p + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$ e $(0, 1/a^2)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.

   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{\log(1 + 4x^8)}$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^4}$ per ogni $a \neq 1/2$.

c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{2x^4}$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione
$$\exp(x^2) = a(2 - x^2)\,. \tag{*}$$
a) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per $a = 1/3$.

b) Dire quante sono le soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più piccola soluzione di (*) (quando ne esiste almeno una); determinare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$; trovare quindi $p, q \in \mathbb{R}$ per cui vale il seguente "sviluppo" di $x(a)$:
$$x(a) = p + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0,0)$, $(a,0)$ e $(0,1/a^3)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.

a) Tracciare un disegno approssimativo di A.

b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{x}{1+x^2}$$
relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 3$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - x^4)}{1-\cos(2x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{x+2}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(e^x)}{1+x}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\arctan(t^2),\, \exp(-t^3)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\, dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2n}{4^{2n}+1} x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^{ax}}{\sin(x^{2a}+x^a)} dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{2x}\sin(2t)$ che soddisfa $x(\pi/2) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $(|x|-1)^2 \leq y \leq -\arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{x}{2+x^2}$$
relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 3$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(2+e^x)}{2x+1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} 2^x\sqrt{x^4+2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x^3)}{1-\cos(2x^2)}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\arctan(t^3),\, \exp(-t^2)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{8x}{\sqrt[3]{8-2x^2}}\, dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n} - 2}{5^n+n^2} x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(a/x^2)}{x^{2a}+x^a} dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{4x}\sin(2t)$ che soddisfa $x(\pi) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|-1)^2 \geq -\arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{-x}{1+4x^2}$$
relativamente all'intervallo $1 \leq x < +\infty$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log x}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+4x^2)}{\sin(2x^2-4x^4)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2+e^x)}{1-2\sqrt{x}}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\arctan(t^2),\, \exp(-t^2)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{8x}{\sqrt[3]{8-2x^2}}\,dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - n^2}{4^{2n}+3}x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log(1+ax^2)}{x^{2a}+x^a}dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{4x}\sin(4t)$ che soddisfa $x(\pi/2) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $(|x|+1)^2 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{x}{1+x^2}$$
relativamente all'intervallo $1/2 \leq x < +\infty$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{\sin(x^2+x^4)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\log(2+e^x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(e^x)}{1+x}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\exp(-t^3),\, \arctan(t^2)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\,dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}+1}{3^n+n}x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{2a}+x^a}{2^x+x^a}dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{2x}\sin(2t)$ che soddisfa $x(-\pi) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|-1)^2 \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{x}{2+x^2}$$
relativamente all'intervallo $-3 \leq x < +\infty$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{\log(3+e^x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3^x\sqrt{x^6-2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x^2)}{\log(1+x^3)}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\exp(-t^2),\, \arctan(t^3)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n-n}{3^{2n}-2}x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^{2a}+x^a}{xe^{ax}}dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{4x}\sin(2t)$ che soddisfa $x(-\pi) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $(|x|-1)^2 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione
$$f(x) := \frac{-x}{1+4x^2}$$
relativamente all'intervallo $-3 \leq x < +\infty$, ed in caso affermativo calcolarli.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{\log(\log(x))}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2+x^4)}{\log(1-4x^2)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{x}}{\log(3+e^x)}$.

3. Determinare la velocità e l'accelerazione ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ del punto che si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\exp(-t^2),\, \arctan(t^2)\big)\,.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}-2}{4^n+n^2}x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{2a}+x^a}{\log(1+a/x^2)}dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^{4x}\sin(4t)$ che soddisfa $x(\pi/4) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|+1)^2 \geq \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(3 + \cos x) - \log 4$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare il più grande numero m tale che $e^{8x} + 8 \geq m\big(e^{2x} + 1\big)^4$ per ogni $x \geq 0$.
   b) Trovare il più piccolo numero M tale che $e^{8x} + 8 \leq M\big(e^{2x} + 1\big)^4$ per ogni $x \geq 0$.

3. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $0 \leq y \leq f(x)$, dove
   $$f(x) := (1 + x)\exp(-x/2)\,.$$
   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.
   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.
   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

4. Dato a numero reale consideriamo l'equazione differenziale
   $$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2 - a)x = 4e^{-t}\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 1$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1$.
   c) Dimostrare che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.
   d) Trovare il più piccolo numero c tale che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha $x(t) = o(e^{ct})$ per $t \to +\infty$.

5. a) Indichiamo con C la curva costituita dai punti del piano le cui coordinate polari α, r soddisfano $\alpha \in [0, \infty)$ e $r = e^{-\alpha}$. Tracciare un disegno approssimativo di C.
   b) Trovare la legge oraria di un punto P che percorre tutta la curva C, ed usarla per calcolare la lunghezza di C.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(4 + \cos x) - \log 5$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare il più grande numero m tale che $e^{12x} + 9 \geq m\big(e^{4x} + 1\big)^3$ per ogni $x \geq 0$.
   b) Trovare il più piccolo numero M tale che $e^{12x} + 9 \leq M\big(e^{4x} + 1\big)^3$ per ogni $x \geq 0$.

3. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $0 \leq y \leq f(x)$, dove
   $$f(x) := (1 - x)\exp(x/2)\,.$$
   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.
   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.
   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

4. Dato a numero reale consideriamo l'equazione differenziale
   $$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (2 - 2a)x = 6e^{-t}\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 1/2$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1/2$.

c) Dimostrare che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.

d) Trovare il più piccolo numero c tale che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha $x(t) = o(e^{ct})$ per $t \to +\infty$.

5. a) Indichiamo con C la curva costituita dai punti del piano le cui coordinate polari α, r soddisfano $\alpha \in [0, \infty)$ e $r = e^{-\alpha}$. Tracciare un disegno approssimativo di C.

   b) Trovare la legge oraria di un punto P che percorre tutta la curva C, ed usarla per calcolare la lunghezza di C.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(5 + \cos x) - \log 6$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare il più grande numero m tale che $e^{12x} + 8 \geq m\big(e^{3x} + 1\big)^4$ per ogni $x \geq 0$.

   b) Trovare il più piccolo numero M tale che $e^{12x} + 8 \leq M\big(e^{3x} + 1\big)^4$ per ogni $x \geq 0$.

3. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $0 \leq y \leq f(x)$, dove
$$f(x) := (2 + x)\exp(-x/4)\,.$$
   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.

   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.

   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

4. Dato a numero reale consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2 - a)x = 4e^{-t}\,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 1$.

   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1$.

   c) Dimostrare che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.

   d) Trovare il più piccolo numero c tale che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha $x(t) = o(e^{ct})$ per $t \to +\infty$.

5. a) Indichiamo con C la curva costituita dai punti del piano le cui coordinate polari α, r soddisfano $\alpha \in [0, \infty)$ e $r = e^{-\alpha}$. Tracciare un disegno approssimativo di C.

   b) Trovare la legge oraria di un punto P che percorre tutta la curva C, ed usarla per calcolare la lunghezza di C.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(1 + \cos x) - \log 2$.

   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare il più grande numero m tale che $e^{6x} + 9 \geq m\big(e^{2x} + 1\big)^3$ per ogni $x \geq 0$.

   b) Trovare il più piccolo numero M tale che $e^{6x} + 9 \leq M\big(e^{2x} + 1\big)^3$ per ogni $x \geq 0$.

3. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $0 \leq y \leq f(x)$, dove
$$f(x) := (2 - x)\exp(x/4)\,.$$
   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.

   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.

   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

4. Dato a numero reale consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (2 - 2a)x = 6e^{-t}\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 1/2$.

   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1/2$.

   c) Dimostrare che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.

   d) Trovare il più piccolo numero c tale che per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione x di (*) si ha $x(t) = o(e^{ct})$ per $t \to +\infty$.

5. a) Indichiamo con C la curva costituita dai punti del piano le cui coordinate polari α, r soddisfano $\alpha \in [0, \infty)$ e $r = e^{-\alpha}$. Tracciare un disegno approssimativo di C.

   b) Trovare la legge oraria di un punto P che percorre tutta la curva C, ed usarla per calcolare la lunghezza di C.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{2+3x}{2-3x}$; b) x^{-2x}; c) $\log\left(\dfrac{5x^4}{2^x}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{2+8x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{1+2^{x^2}}_{a} \ll \underbrace{x^3+4^{x+2}}_{b} \ll \underbrace{x^2 4^x}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x+1}{4^x-1}}_{d} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := (1+x^3)\sqrt[4]{1-4x^3}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n}}$.

6. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^a}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $0\le x\le 2$, $e^{-x}\le y\le 1-\cos(\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{3-4x}{3+4x}$; b) x^{3x}; c) $\log\left(\dfrac{3^x}{5x^6}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{3+12\,x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{\frac{x^3+1}{x-1}}_{a} \ll \underbrace{\log^2 x}_{b} \ll \underbrace{\sin(e^x)}_{c} \ll \underbrace{x^2\log x+1}_{d} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 della funzione $f(x) := (1+x^2)\sqrt[3]{1-3x^2}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{4n}}$.

6. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{3a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Trovare graficamente le $x\in[0,2]$ che risolvono la disequazione $1-\cos(\pi x)\le e^{-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{3+2x}{3-2x}$; b) x^{-4x}; c) $\log\left(\dfrac{4x^5}{3^x}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{2+18\,x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{3^{2x-1}}_{a} \ll \underbrace{x^3 2^x}_{b} \ll \underbrace{\sin(4^x)}_{c} \ll \underbrace{\frac{4^x-1}{2^x+1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 della funzione $f(x) := (1+x^2)\sqrt[4]{1-4x^2}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{4^{2n}}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{2a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $-1 < x \le 1$, $1 - \sin(\pi x) \le y \le \log(x+1)$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{2-3x}{2+3x}$; b) x^{2x}; c) $\log\left(\dfrac{2^x}{5x^4}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{2+8x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{\frac{\log x}{x^2}}_{a} \ll \underbrace{\log\log x}_{b} \ll \underbrace{\frac{x+1}{x^3-1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x-1}{x^4+1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := (1+x^3)\sqrt[3]{1-3x^3}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Trovare graficamente le $x \in (-1, 1]$ che risolvono la disequazione $\log(x+1) \le 1 - \sin(\pi x)$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{3+4x}{3-4x}$; b) x^{-3x}; c) $\log\left(\dfrac{5x^6}{3^x}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{3+12\,x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{1+x2^x}_{a} \ll \underbrace{\frac{4^x-1}{2^x+1}}_{b} \ll \underbrace{\sin(4^x)}_{c} \ll \underbrace{\frac{x^4+1}{x-1}}_{d} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 8 della funzione $f(x) := (1+x^4)\sqrt[4]{1-4x^4}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{2^{4n}}$.

6. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{3a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $-2\le x\le 0$, $(x+1)^3\le y\le 1-\cos(\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Calcolare le derivate delle seguente funzioni: a) $\dfrac{3-2x}{3+2x}$; b) x^{4x}; c) $\log\left(\dfrac{3^x}{4x^5}\right)$.

2. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dx}{2+18\,x^2}$.

3. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$:
$$\underbrace{x^2\log x+1}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^3+1}{x-1}}_{b} \ll \underbrace{\sin(2^x)}_{c} \ll \underbrace{\frac{4^x-1}{2^x+1}}_{d} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 8 della funzione $f(x) := (1+x^4)\sqrt[3]{1-3x^4}$.

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{4^{2n}}$.

6. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ risulta finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{2a}}$.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}+2\dot{x}+x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Trovare graficamente le $x\in[-2,0]$ che risolvono la disequazione $1-\cos(\pi x)\le (x+1)^3$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che
$$7\le y\le \frac{16}{1+x^4}\,.$$
b) Tra tutti i rettangoli inscritti in A e con base sulla retta di equazione $y=7$, trovare quelli di area massima e di area minima (ammesso che esistano).

2. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_4^{x^2} \frac{dt}{(1+t^4)^a} .$$
a) Dire per quali $a > 0$ la funzione f ha limite finito a $+\infty$.
b) Determinare il dominio di definizione, la derivata, e i punti di massimo e minimo di f.
c) Scrivere la derivata seconda di f e dire per quali $a > 0$ questa funzione è convessa.
d) Determinare i punti in cui f vale zero e studiare il segno di f.
e) Disegnare il grafico di f per $a = 1/7$.

3. a) Per ogni numero intero k indichiamo con $f_k(x)$ la restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $\pi\bigl(k - \frac{1}{2}\bigr) \le x \le \pi\bigl(k + \frac{1}{2}\bigr)$. Mostrare che la funzione f_k è invertibile e calcolarne l'inversa.
b) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t / \cos x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = \pi$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
$$11 \le y \le \frac{24}{1+x^6} .$$
b) Tra tutti i rettangoli inscritti in A e con base sulla retta di equazione $y = 11$, trovare quelli di area massima e di area minima (ammesso che esistano).

2. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_9^{x^2} \frac{dt}{(1+t^4)^a} .$$
a) Dire per quali $a > 0$ la funzione f ha limite finito a $+\infty$.
b) Determinare il dominio di definizione, la derivata, e i punti di massimo e minimo di f.
c) Scrivere la derivata seconda di f e dire per quali $a > 0$ questa funzione è convessa.
d) Determinare i punti in cui f vale zero e studiare il segno di f.
e) Disegnare il grafico di f per $a = 1/3$.

3. a) Per ogni numero intero k indichiamo con $f_k(x)$ la restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $\pi\bigl(k - \frac{1}{2}\bigr) \le x \le \pi\bigl(k + \frac{1}{2}\bigr)$. Mostrare che la funzione f_k è invertibile e calcolarne l'inversa.
b) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t / \cos x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -\pi$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
$$7 \le y \le \frac{16}{1+2x^4} .$$
b) Tra tutti i rettangoli inscritti in A e con base sulla retta di equazione $y = 7$, trovare quelli di area massima e di area minima (ammesso che esistano).

2. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_4^{x^2} \frac{dt}{(1+t^6)^a} .$$
a) Dire per quali $a > 0$ la funzione f ha limite finito a $+\infty$.
b) Determinare il dominio di definizione, la derivata, e i punti di massimo e minimo di f.

c) Scrivere la derivata seconda di f e dire per quali $a > 0$ questa funzione è convessa.

d) Determinare i punti in cui f vale zero e studiare il segno di f.

e) Disegnare il grafico di f per $a = 1/3$.

3. a) Per ogni numero intero k indichiamo con $f_k(x)$ la restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $\pi\big(k - \frac{1}{2}\big) \leq x \leq \pi\big(k + \frac{1}{2}\big)$. Mostrare che la funzione f_k è invertibile e calcolarne l'inversa.

   b) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t / \cos x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = \pi$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
$$11 \leq y \leq \frac{24}{1 + 2x^6} \,.$$
   b) Tra tutti i rettangoli inscritti in A e con base sulla retta di equazione $y = 11$, trovare quelli di area massima e di area minima (ammesso che esistano).

2. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_9^{x^2} \frac{dt}{(1 + t^6)^a} \,.$$
   a) Dire per quali $a > 0$ la funzione f ha limite finito a $+\infty$.

   b) Determinare il dominio di definizione, la derivata, e i punti di massimo e minimo di f.

   c) Scrivere la derivata seconda di f e dire per quali $a > 0$ questa funzione è convessa.

   d) Determinare i punti in cui f vale zero e studiare il segno di f.

   e) Disegnare il grafico di f per $a = 1/7$.

3. a) Per ogni numero intero k indichiamo con $f_k(x)$ la restrizione della funzione $\sin x$ all'intervallo $\pi\big(k - \frac{1}{2}\big) \leq x \leq \pi\big(k + \frac{1}{2}\big)$. Mostrare che la funzione f_k è invertibile e calcolarne l'inversa.

   b) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t / \cos x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -\pi$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 1 - x^2 \log x$ relativamente all'intervallo $1/2 \leq x < +\infty$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1+2x^3) - 2x^3}{(1+x^8)^4 - 1}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_1^{x^3} \sin\left(\sqrt[3]{t}\right) dt$.

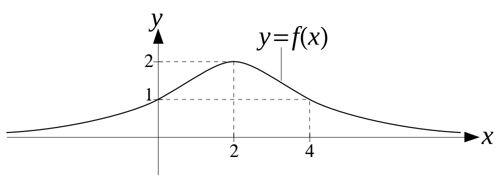
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(t^3/3 - t,\, t^2 + 1\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3 + t^{3a+3}}{(2+t^a)^a} dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n^3+3} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(1 + 4x^2)$ che soddisfa $x(1) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(-x) \leq y \leq 2f(x) - 1$.



Prima parte, gruppo 2.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 2 + x^3 \log x$ relativamente all'intervallo $1/2 \leq x < +\infty$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(x^4) - x^4}{\sqrt[3]{1+x^4} - 1}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_2^{x^4} \exp\left(\sqrt[4]{t}\right) dt$.

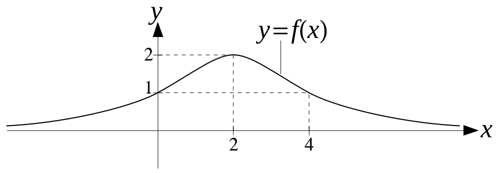
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(t - t^5/5,\, 2 - 2t^3/3\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2t^{a+1} + t^{a+2}}{(\sin(t^a))^a} dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4+2}{(-3)^n} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(1 + 9x^2)$ che soddisfa $x(1) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, risolvere graficamente la disequazione $f(-x) \leq 2f(x) - 1$.



Prima parte, gruppo 3.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 3 - x^2 \log x$ relativamente all'intervallo $0 < x \leq 1/2$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1+2x^5) - 2x^5}{(1+x^4)^4 - 1}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_3^{x^5} \sin\left(\sqrt[5]{t}\right) dt$.

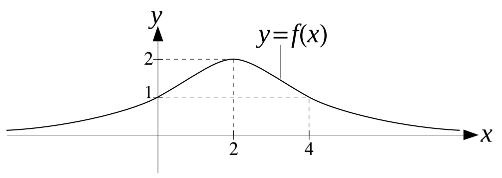
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(2 - t^2,\, t - t^3/3\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1+t^a)^a}{3t^a + t^{4a+6}} dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{n^5+1} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4t^3(1+4x^2)$ che soddisfa $x(1) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $2 - f(x) \leq y \leq f(2x)$.



Prima parte, gruppo 4.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 4 + x^2 \log x$ relativamente all'intervallo $0 < x \leq 2$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{(1-x^4)^8 - 1}{\log(1+x^3) - x^3}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_4^{x^3} \exp\left(\sqrt[3]{t}\right) dt$.

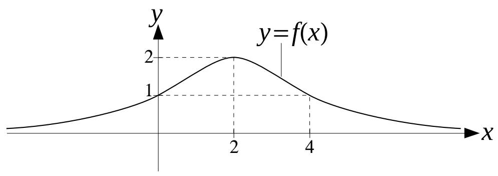
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(1 + 2t^3/3,\, t - t^5/5\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t^{a+1}}{(t^{2a}+t^a)^a}\,dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+3}{(-2)^n} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4t^3(1+9x^2)$ che soddisfa $x(2) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, risolvere graficamente la disequazione $2 - f(x) \leq f(2x)$.



Prima parte, gruppo 5.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 5 - x^3 \log x$ relativamente all'intervallo $0 < x \leq 2$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sin(3x^4)-3x^4}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_5^{x^4} \sin\left(\sqrt[4]{t}\right) dt$.

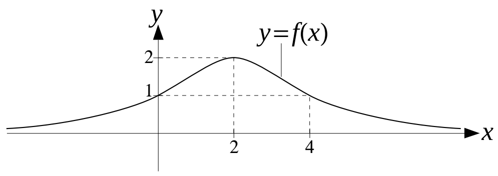
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(2 - 2t^3/3,\ t^5/5 - t\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{a+1}+t^{4a+4}}{(1+t^a)^a}\,dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{n^4+2} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2t(1+4x^2)$ che soddisfa $x(2) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(x) \leq y \leq f(2x)$.



Prima parte, gruppo 6.

1. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := 6 + x^3 \log x$ relativamente all'intervallo $0 < x \leq 1/2$, ed in caso affermativo determinarli.

2. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{(1-x^8)^8 - 1}{\log(1+x^5) - x^5}$.

3. Calcolare la derivata della funzione $F(x) := \displaystyle\int_6^{x^5} \exp\left(\sqrt[5]{t}\right) dt$.

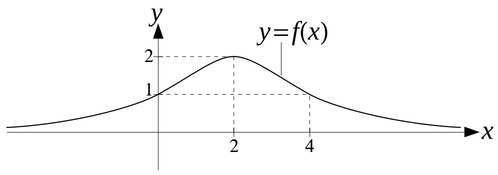
4. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) := \left(t - t^3/3,\, t^2 - 2\right) .$$

5. Dire per quali $a > 0$ risulta essere finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{(t^{3a} + t^a)^a}{2t^{2a+4}} dt$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5 + 1}{(-4)^n} x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2t(1 + 9x^2)$ che soddisfa $x(2) = 0$.

8. Detta f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura sottostante, risolvere graficamente la disequazione $f(2x) \le 1 - f(x)$.



Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 4a\dot{x} + (3a^2 - 2a - 1)x = 6e^{-2t} \qquad (*)$$
   a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a \neq -1$.
   b) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a = -1$.
   c) Determinare per ogni $a \neq -1$ il numero delle soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni
$$x(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\,. \qquad (**)$$
   (Cominciare eventualmente dal caso $a = 0$.)

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_-(x) \le y \le f_+(x)$ con
$$f_-(x) := -x^4\,, \quad f_+(x) := 2 + x^2 - 2x^4\,.$$
   a) Disegnare i grafici di f_-, f_+, l'insieme A e la retta di equazione $y = -4$.
   b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta $y = -4$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \big(\cos(2x)\big)^{-1/x} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 6a\dot{x} + (5a^2 - 8a - 4)x = 10\, e^{-3t} \qquad (*)$$
   a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a \neq -1$.

b) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a = -1$.

c) Determinare per ogni $a \neq -1$ il numero delle soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni

$$x(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\,. \tag{**}$$

(Cominciare eventualmente dal caso $a = 0$.)

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_-(x) \leq y \leq f_+(x)$ con

$$f_-(x) := -x^4\,, \quad f_+(x) := 3 + 2x^2 - 2x^4\,.$$

a) Disegnare i grafici di f_-, f_+, l'insieme A e la retta di equazione $y = -9$.

b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta $y = -9$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \big(\cos(2x)\big)^{-1/x} - 1$.

b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (3a^2 + 2a - 1)x = 6e^{-2t} \tag{*}$$

a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a \neq 1$.

b) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a = 1$.

c) Determinare per ogni $a \neq -1$ il numero delle soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni

$$x(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\,. \tag{**}$$

(Cominciare eventualmente dal caso $a = 0$.)

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_-(x) \leq y \leq f_+(x)$ con

$$f_-(x) := 2x^4 - x^2 - 2\,, \quad f_+(x) := x^4\,.$$

a) Disegnare i grafici di f_-, f_+, l'insieme A e la retta di equazione $y = 4$.

b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta $y = 4$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \big(\cos(2x)\big)^{-1/x} - 1$.

b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 6a\dot{x} + (5a^2 + 8a - 4)x = 10\,e^{-3t} \tag{*}$$

a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a \neq 1$.

b) Scrivere la soluzione generale dell'equazione (*) per $a = 1$.

c) Determinare per ogni $a \neq -1$ il numero delle soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni

$$x(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\,. \tag{**}$$

(Cominciare eventualmente dal caso $a = 0$.)

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_-(x) \leq y \leq f_+(x)$ con

$$f_-(x) := 2x^4 - 2x^2 - 3\,, \quad f_+(x) := x^4\,.$$

a) Disegnare i grafici di f_-, f_+, l'insieme A e la retta di equazione $y = 9$.

b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta $y = 9$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \big(\cos(2x)\big)^{-1/x} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire per quali $\alpha \in [-\pi, \pi]$ l'identità $\sin(x + \alpha) = \cos(\pi/3 - x)$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$; b) $\arctan(x^2)$; c) $\log\left(\dfrac{x^{2x}}{(2x)^x}\right)$.
3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{x^2 \log x}_{a} \ll \underbrace{2x^2 \log\log x}_{b} \ll \underbrace{x^{-1/2} \log^4 x}_{c} \ll \underbrace{\log(e^x + 1)}_{d} .$$
4. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 9 della funzione $f(x) := \sin(6x^3 + x^9)$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 + x}{\sqrt[a]{1 + 2x^4}}\, dx$ converge a un numero finito.
6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{1 + 3^n}\, x^n$ converge ad un numero finito.
7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 10$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{4 - x} \le y \le 4 - x^4$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire per quali $\alpha \in [-\pi, \pi]$ l'identità $\sin(x + \alpha) = \cos(2\pi/3 - x)$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(x^3)$; b) $\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$; c) $\log\left(\dfrac{(4x)^x}{x^{4x}}\right)$.
3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{2x^{1/2} \log\log x}_{a} \ll \underbrace{x^{-1/3} \log^5 x}_{b} \ll \underbrace{\log(e^x + 1)}_{c} \ll \underbrace{x^{1/2} \log x}_{d} .$$
4. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := \sin(6x^2 - x^6)$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1 + x}{\sqrt[a]{x^3 + 2x^4}}\, dx$ converge a un numero finito.
6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2 - 4^n}\, x^n$ converge ad un numero finito.
7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 5$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $4 - x^2 \le y \le \sqrt{1 - x}$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Dire per quali $\alpha \in [-\pi, \pi]$ l'identità $\sin(x + \pi/6) = \cos(\alpha - x)$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$; b) $\arcsin(x^2)$; c) $\log\left(\dfrac{(2x)^x}{x^{2x}}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{x^3 \log x}_{a} \ll \underbrace{\log(e^x+2)}_{b} \ll \underbrace{3x^3 \log\log x}_{c} \ll \underbrace{x^{-1/3}\log^5 x}_{d} .$$

4. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := \log(1+2x^3-x^6)$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt[a]{x^2+2x^3}}\,dx$ converge a un numero finito.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^{3n}}{1+4^n}\,x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 10$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $4 - x^2 \leq \sqrt{1-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire per quali $\alpha \in [-\pi, \pi]$ l'identità $\sin(x + 3\pi/4) = \cos(\alpha - x)$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^3)$; b) $\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$; c) $\log\left(\dfrac{x^{4x}}{(4x)^x}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{3x^{1/3} \log\log x}_{a} \ll \underbrace{x^{1/3}\log x}_{b} \ll \underbrace{x^{-1/2}\log^4 x}_{c} \ll \underbrace{\log(e^x+2)}_{d} .$$

4. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 della funzione $f(x) := \log(1+2x^2+x^4)$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{\sqrt[a]{1+2x^3}}\,dx$ converge a un numero finito.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{2-3^n}\,x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 5$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{4-x} \leq 4 - x^4$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := 2\log x - \log\log x$.

   a) Disegnare il grafico di f.

   b) Tra tutte le rette tangenti al grafico di f trovare quella per cui il punto di intersezione con l'asse delle y è più basso possibile.

   c) Disegnare l'insieme A dei punti del piano compresi tra il grafico di f, la retta tangente descritta al punto b), e la retta di equazione $x = 1$. Dire se A ha area finita o meno.

2. Sia V il solido dato dall'unione di due sfere di raggi r_1, r_2 i cui centri distano d. Disegnare il solido V e calcolarne il volume nei seguenti casi:

   a) $d = 6$, $r_1 = r_2 = 4$;

   b) $d = 6$, $r_1 = 4 + a$, $r_2 = 4 - a$ con $0 \leq a < 4$.

3. Consideriamo la serie di potenze
$$f(x) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n(n^2 - n)} .$$

   a) Calcolarne il raggio di convergenza e discuterne il comportamento al variare di $x \in \mathbb{R}$.

   b) Trovare il valore di $f(x)$ per gli x per cui è finito. [*Suggerimento: scrivere la serie di* f''.]

Seconda parte, gruppo 2.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := 6 \log x - \log\log x$.

   a) Disegnare il grafico di f.

   b) Tra tutte le rette tangenti al grafico di f trovare quella per cui il punto di intersezione con l'asse delle y è più basso possibile.

   c) Disegnare l'insieme A dei punti del piano compresi tra il grafico di f, la retta tangente descritta al punto b), e la retta di equazione $x = 1$. Dire se A ha area finita o meno.

2. Sia V il solido dato dall'unione di due sfere di raggi r_1, r_2 i cui centri distano d. Disegnare il solido V e calcolarne il volume nei seguenti casi:

   a) $d = 3$, $r_1 = r_2 = 2$;

   b) $d = 3$, $r_1 = 2 + a$, $r_2 = 2 - a$ con $0 \leq a < 2$.

3. Consideriamo la serie di potenze
$$f(x) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n(n^2 - n)} .$$

   a) Calcolarne il raggio di convergenza e discuterne il comportamento al variare di $x \in \mathbb{R}$.

   b) Trovare il valore di $f(x)$ per gli x per cui è finito. [*Suggerimento: scrivere la serie di* f''.]

Prima parte, gruppo 1.

1. Calcolare le coordinate polari ρ e α dei seguenti punti, scegliendo se possibile l'angolo α nell'intervallo $(-\pi, \pi]$: a) $(-2, -2)$, b) $(0, -3)$, c) $(-1, \sqrt{3})$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^4 + ax^3 + 6x^2 + ax + 1$ risulta essere convessa.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{\sin(x^6 + x^8)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\log\log x}$.

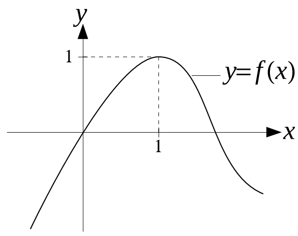
4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2} dx$.

5. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4\sqrt{x}\cos(2t)$ che soddisfa $x(0) = 4$.

7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\sin x} \frac{dt}{(1 - t^2)^8}$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := -f(|x|)$.



Prima parte, gruppo 2.

1. Calcolare le coordinate polari ρ e α dei seguenti punti, scegliendo se possibile l'angolo α nell'intervallo $(-\pi, \pi]$: a) $(-\sqrt{3}, 3)$, b) $(-3, -3)$, c) $(0, -2)$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^4 + 4x^3 + ax^2 + 4x + a$ risulta essere convessa.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^4 + 2)2^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^6 e^x}{x^3 + \log(1 - x^3)}$.

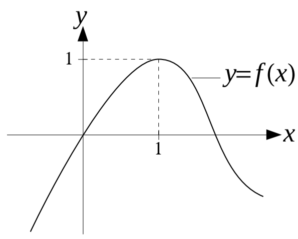
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int xe^{-x} dx$.

5. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4\sqrt{x}\cos(2t)$ che soddisfa $x(0) = 1$.

7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\cos x} \frac{dt}{(1 - t^2)^6}$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(x) \le y \le f(x)$.



Prima parte, gruppo 3.

1. Calcolare le coordinate polari ρ e α dei seguenti punti, scegliendo se possibile l'angolo α nell'intervallo $(-\pi, \pi]$: a) $(-2, -2)$, b) $(-3, 0)$, c) $(\sqrt{3}, -1)$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^4 + ax^3 - 6x^2 + ax + 1$ risulta essere convessa.

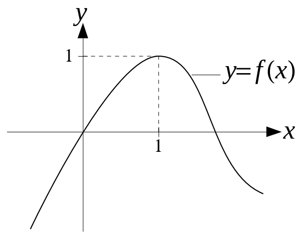
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\log x}{\log^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^6+x^8)}{\sin(x^2)-x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$.

5. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n!}$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = 6\sqrt{x}\sin(3t)$ che soddisfa $x(0)=4$.

7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\sin x}\frac{dt}{(1-t^2)^6}$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $|y|\le f(x)$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Calcolare le coordinate polari ρ e α dei seguenti punti, scegliendo se possibile l'angolo α nell'intervallo $(-\pi,\pi]$: a) $(3,-\sqrt{3})$, b) $(-3,-3)$, c) $(-2,0)$.

2. Dire per quali $a\in\mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^4-4x^3+ax^2-4x+a$ risulta essere convessa.

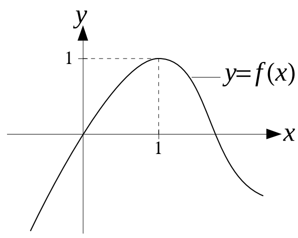
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\log(1-x^2)}{x^4e^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x}{2^{x^2}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(3x)}{\cos x}$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$.

5. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+1}}$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = 6\sqrt{x}\sin(3t)$ che soddisfa $x(0)=1$.

7. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\cos x}\frac{dt}{(1-t^2)^8}$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := |f(x)|-1$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a\in\mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot x + 4x = 8t^2 + \sin(at)\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a>0$ e $a\ne 2$.
b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a=2$.

2. Discutere al variare di $a\in\mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty}(e^x-e^2)^{2-a}dx$.

3. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) nel piano che sono compresi tra l'asse delle x e il grafico della funzione $f(x) := 8+2x^2-x^4$.
b) Disegnare il solido V ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse $x=-3$ e calcolarne il volume.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4x = -8t^2 + \cos(at)\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 2$.
b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 2$.

2. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} (e^x - e^2)^{2+a}\, dx$.

3. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano che sono compresi tra l'asse delle x e il grafico della funzione $f(x) := 8 + 2x^2 - x^4$.
b) Disegnare il solido V ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse $x = -4$ e calcolarne il volume.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f data sotto risulta essere continua:
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{if } x \leq 3 \\ ax - b & \text{if } x > 3 \end{cases}$$

2. Dire se esistono punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 - 3x + 1$ relativamente all'intervallo $[-2, +\infty)$, ed in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[6]{x}}{\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2e^x}{1-x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x^2)}{2x^2}$.

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := (x^4 - 6)\sin(x^2)$.

5. Calcolare la distanza percorsa dal punto P di coordinate $x(t) := t^3 - 3t + 1$ e $y(t) := 3t^2 - 1$ nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^6 \log(1 + 1/n^3)}{n^{2a} + n^a + 1}$ converge.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := at^2 + b$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} - x = 3t^2 + 2$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq 1 - e^{-x}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f data sotto risulta essere continua:
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{if } x \leq 2 \\ ax - b & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

2. Dire se esistono punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 - 3x - 2$ relativamente all'intervallo $(-\infty, 2]$, ed in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{\sin(4x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi^+} \frac{1}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^5 2^x$.

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := (x^3 - 2)\log(1 + x^3)$.

5. Calcolare la distanza percorsa dal punto P di coordinate $x(t) := 3t^2 - 1$ e $y(t) := t^3 - 3t + 1$ nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 \log(1 + 1/n^2)}{n^{2a} + n^a + 1}$ converge.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := at^2 + b$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} - x = 3t^2 - 2$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \leq y \leq 0$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f data sotto risulta essere continua:
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{if } x \leq -1 \\ ax - b & \text{if } x > -1 \end{cases}$$

2. Dire se esistono punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 - 12\,x + 1$ relativamente all'intervallo $[-3, 1]$, ed in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to1^+} \log\log x$; b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{4x^3}{\sin(2x^3)}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{xe^x}$.

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 della funzione $f(x) := (x^2 - 3)\sin(2x)$.

5. Calcolare la distanza percorsa dal punto P di coordinate $x(t) := t^3 - 3t + 2$ e $y(t) := 3t^2 + 1$ nell'intervallo di tempo $-1 \le t \le 0$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{3a} + n^a + 1}{n^6 \log(1 + 1/n^3)}$ converge.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := at^2 + b$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} + 2x = 8t^2 + 4$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \le y \le e^x - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f data sotto risulta essere continua:
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{if } x \le -2 \\ ax - b & \text{if } x > -2 \end{cases}$$

2. Dire se esistono punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 - 12\,x - 2$ relativamente all'intervallo $[-1, 3]$, ed in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(2 + e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\log\log x}$; c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(4x^3)}{2x^2}$.

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 della funzione $f(x) := (x^2 - 4)\log(1 + x^2)$.

5. Calcolare la distanza percorsa dal punto P di coordinate $x(t) := 3t^2 + 1$ e $y(t) := t^3 - 3t + 2$ nell'intervallo di tempo $-1 \le t \le 0$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{3a} + n^a + 1}{n^4 \log(1 + 1/n^2)}$ converge.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := at^2 + b$ risolve l'equazione $t^2\ddot{x} + 2x = 8t^2 - 4$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} - 1 \ge y \ge e^x - 1$.

SECONDA PARTE.

1. a) Dire se la disuguaglianza $x^2 + \frac{1}{2} \le \frac{3}{5}e^{x^2}$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$ oppure no.

   b) Trovare tutti i valori del parametro reale a per cui la disuguaglianza $x^2 + \frac{1}{2} \le ae^{x^2}$ vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) := \log\left(\dfrac{x^4 + 4}{x^4 + 1}\right)$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) + \dfrac{a}{x^4}$.

3. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 - 4x + 2 \le y \le 18 - x^2$, e sia V il solido ottenuto facendo ruotare l'insieme A attorno alla retta di equazione $y = -1$.

a) Disegnare A e calcolarne l'area.

b) Disegnare V e calcolarne il volume.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \exp(x^2 - 2x)$ nel punto di ascissa $x = 2$.
2. Dire se esistono i punti di massimo e minimo (assoluti) della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $x \le 0$ ed in caso affermativo calcolarli.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{1 - \sqrt[3]{1 + x^4}}{x^3 - \log(1 + x^3)}$.
4. Per ogni $a > 0$ calcolare la primitiva $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2 + x^2}{1 + x^a + x^{2a}} dx$ converge ad un numero finito.
6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 10 + 10\,e^t$.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{(x-1)^2} - 1$ e risolvere *graficamente* $f(x) \le 1 - x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \exp(x^2 + 3x)$ nel punto di ascissa $x = -3$.
2. Dire se esistono i punti di massimo e minimo (assoluti) della funzione xe^{2x} relativamente all'intervallo $-2 \le x \le 0$ ed in caso affermativo calcolarli.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{x^2 - \log(1 + x^2)}{1 - \sqrt[4]{1 + x^6}}$.
4. Per ogni $a > 0$ calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^a \log x\,dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2 + \sin x}{1 + x^a + x^{3a}} dx$ converge ad un numero finito.
6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = -5 + 4\,e^t$.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{(x+1)^3} - 1$ e risolvere *graficamente* $f(x) \ge 1 + x$.

SECONDA PARTE.

1. Si consideri la funzione $f(x) := \sqrt[6]{1 + x^6}$.
   a) Trovare la più grande costante $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \ge a(1 + x)$ per ogni $x \ge 0$.
   b) Trovare la più piccola costante $b \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \le b(1 + x)$ per ogni $x \ge 0$.
2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \le y \le e^{-x}$ e $x \ge 0$, e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 1$. Tracciare un disegno approssimativo di A e di

V e calcolare il volume di V.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{3 + \cos(2x^2)} - 2$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) + ax^4$.

S O L U Z I O N I

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. $1/2 \leq x \leq 3/4$.

2. Il punto di massimo è $x = -1/\sqrt{3}$, il punto di minimo non esiste.

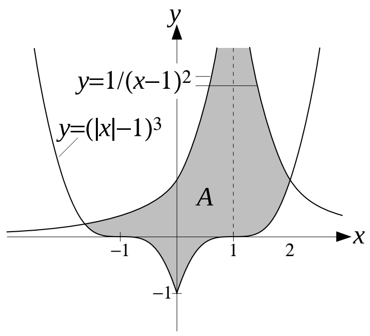
3. La continuità di f si traduce nella condizione $5a = 1 - a$, mentre per la derivabilità si traduce in $4a = b/2$, e alla fine si ottiene $a = 1/6$, $b = 4/3$.

4. $-\sqrt{8} \leq a \leq \sqrt{8}$.

5. a) $-\infty$; b) 2; c) $+\infty$.

6. Il polinomio cercato è $P_7(x) = -x - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^7}{3}$.

7. $a < -2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $5/4 \leq x \leq 7/4$.

2. Il punto di massimo è $x = -\sqrt{2}$, il punto di minimo non esiste.

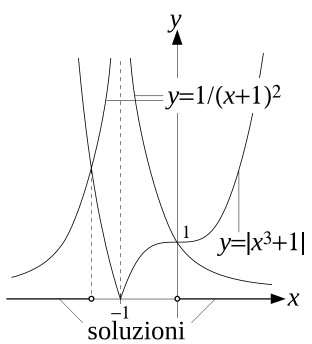
3. La continuità di f si traduce nella condizione $1 - a = 2a$, mentre per la derivabilità si traduce in $3 = ab$, e alla fine si ottiene $a = 1/3$, $b = 9$.

4. $-1 \leq a \leq 1$.

5. a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$.

6. Il polinomio cercato è $P_8(x) = 4x^2 + 8x^5 + 16x^8$.

7. $a > -1$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. $3/4 \leq x \leq 2$.

2. Il punto di massimo non esiste, il punto di minimo è $x = -1/\sqrt{3}$.

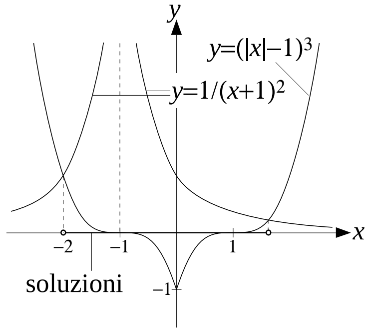
3. La continuità di f si traduce nella condizione $4 - b = b$, mentre per la derivabilità si traduce in $4 = ab$, e alla fine si ottiene $a = 2$, $b = 2$.

4. $-\sqrt{18} \leq a \leq \sqrt{18}$.

5. a) Non esiste; b) $-\infty$; c) $+\infty$.

6. Il polinomio cercato è $P_4(x) = -8 + 28x^2 - 56x^4$.

7. $a \leq 2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. $7/4 \leq x \leq 2$.

2. Il punto di massimo è $x = \sqrt{2}$, il punto di minimo non esiste.

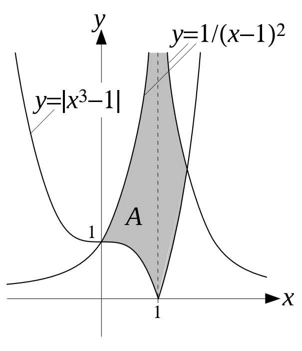
3. La continuità di f si traduce nella condizione $1 - b = b$, mentre per la derivabilità si traduce in $3 = ab$, e alla fine si ottiene $a = 6$, $b = 1/2$.

4. $-2 \leq a \leq 2$.

5. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) 0.

6. Il polinomio cercato è $P_8(x) = 1 + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{11x^8}{24}$.

7. $a > \log 2$.

8. 

Prima parte, gruppo 5.

1. $5/4 \le x \le 7/4$.

2. Il punto di massimo è $x = -1/\sqrt{3}$, il punto di minimo non esiste.

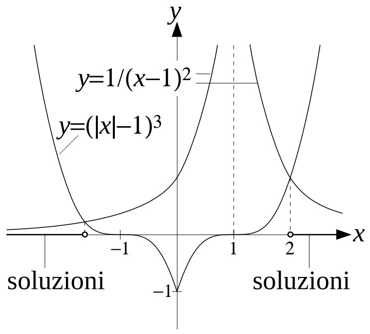
3. La continuità di f si traduce nella condizione $1 + a = -a$, mentre per la derivabilità si traduce in $2 = ab$, e alla fine si ottiene $a = -1/2$, $b = -4$.

4. $-2 \le a \le 2$.

5. a) $+\infty$; b) 0; c) -4.

6. Il polinomio cercato è $P_4(x) = -2 - 2x^2 - \dfrac{8x^4}{3}$.

7. $a > -1$.

8. 

Prima parte, gruppo 6.

1. $3/4 \le x \le 2$.

2. Il punto di massimo è $x = -\sqrt{2}$, il punto di minimo non esiste.

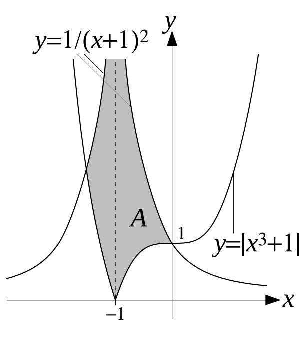
3. La continuità di f si traduce nella condizione $7a = 1 + a$, mentre per la derivabilità si traduce in $12a = b/2$, e alla fine si ottiene $a = 1/6$, $b = 4$.

4. $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$.

5. a) $+\infty$; b) 0; c) 2.

6. Il polinomio cercato è $P_7(x) = -6x + 15x^4 - 20x^7$.

7. $a < 2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 7.

1. $1 \leq x \leq 5/4$.

2. Il punto di massimo non esiste, il punto di minimo è $x = -1/\sqrt{3}$.

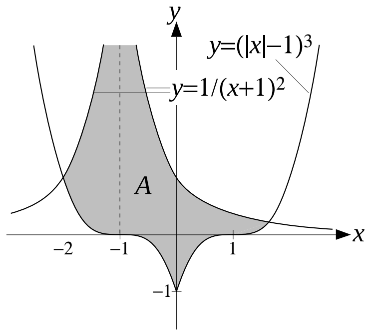
3. La continuità di f si traduce nella condizione $1 - 2b = b$, mentre per la derivabilità si traduce in $2 = ab$, e alla fine si ottiene $a = 6$, $b = 1/3$.

4. $-3 \leq a \leq 3$.

5. a) Non esiste; b) $-\infty$; c) 2.

6. Il polinomio cercato è $P_{10}(x) = x^2 + \dfrac{5x^6}{6} - \dfrac{19x^{10}}{120}$.

7. $a < -2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 8.

1. $3/4 \leq x \leq 1$.

2. Il punto di massimo è $x = \sqrt{2}$, il punto di minimo non esiste.

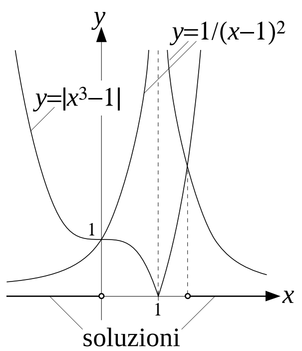
3. La continuità di f si traduce nella condizione $8 + 2b = b$, mentre per la derivabilità si traduce in $12 = ab$, e alla fine si ottiene $a = -3/2$, $b = -8$.

4. $-\sqrt{8} \leq a \leq \sqrt{8}$.

5. a) $-\infty$; b) 3; c) $+\infty$.

6. Il polinomio cercato è $P_7(x) = 4x + 16x^4 + 64x^7$.

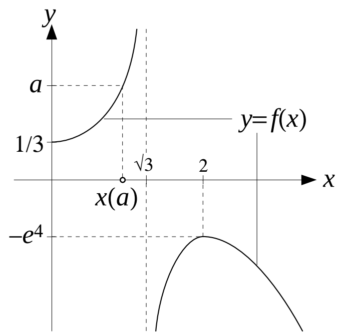
7. $a > \log 2$.

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Usando il fatto che $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0$ con il cambio di variabile $y = 4x^4$ otteniamo
$$f(x) := \sqrt{\log(1+4x^4)} \sim \sqrt{4x^4} = 2x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$
b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \neq 1/2$ si ha
$$\frac{1}{f(x)} - \frac{a}{x^2} \sim \Big(\frac{1}{2} - a\Big)\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to 0.$$
c) Siccome la parte principale di $1/f(x)$ è proprio $1/(2x^2)$, non possiamo procedere come al punto precedente, ma dobbiamo invece utilizzare uno sviluppo più preciso della funzione $f(x)$. In effetti, usando lo sviluppo $\log(1+y) = y - y^2/2 + O(y^3)$ con $y = 4x^4$ otteniamo che, per $x \to 0$,
$$f(x) := \sqrt{\log(1+4x^4)} = \sqrt{4x^4 - 8x^8 + O(x^{12})} = 2x^2\sqrt{1 - 2x^4 + O(x^8)}\,,$$
e usando lo sviluppo $\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2} = 1 + y/2 + O(y^2)$ con $y = -2x^4 + O(x^8)$ otteniamo inoltre
$$f(x) = 2x^2\sqrt{1 - 2x^4 + O(x^8)} = 2x^2\big(1 - x^4 + O(x^8)\big) = 2x^2 - 2x^6 + O(x^{10})\,.$$
Pertanto
$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x^2 - f(x)}{2x^2\,f(x)} = \frac{2x^6 + O(x^{10})}{2x^2\,f(x)} \sim \frac{2x^6}{2x^2\,2x^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

2. Osserviamo che la domanda a) corrisponde al caso particolare $a = 1/3$ della domanda b); partiamo pertanto da quest'ultima.
b) Riscriviamo l'equazione (*) come
$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{\exp(x^2)}{3 - x^2}\,, \quad x \geq 0\,. \tag{1}$$
Studiamo dunque la funzione $f(x)$ ristretta alla semiretta degli $x \geq 0$ per poi disegnarne sommariamente il grafico.
Osserviamo che la funzione è ben definita per $x \neq \sqrt{3}$, positiva per $x < \sqrt{3}$, negativa per $x > \sqrt{3}$, e
$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^{\pm}} f(x) = \frac{e^3}{0^{\mp}} = \mp\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{3-y} = -\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y} = -\infty\,.$$
Inoltre, studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{2x(4-x^2)\exp(x^2)}{(3-x^2)^2}$$
otteniamo che f è crescente nell'intervallo $[0,\sqrt{3})$ e nell'intervallo $(\sqrt{3},2]$, ed è decrescente nella semiretta $[2,+\infty)$. In particolare $x = 2$ è un punto di massimo relativo.
Usando queste informazioni tracciamo il grafico di f (in modo puramente qualitativo: la figura sotto non riporta infatti il grafico con le proporzioni corrette).



Sulla base di questo disegno si vede chiaramente che il numero di soluzioni $x \geq 0$ dell'equazione (1), o equivalentemente l'equazione (*), è

- una per $a \geq 1/3$;

- nessuna per $-e^4 < a < 1/3$;
- una per $a = -e^4$;
- due per $a < -e^4$.

a) Per quanto detto al punto precedente, la risposta è "una soluzione".

c) Dal disegno sopra si vede subito che $x(a)$ tende a $\sqrt{3}$ (da sinistra) quando $a \to +\infty$. In particolare, se è possibile scrivere $x = x(a)$ nella forma $x = p + q/a + o(1/a)$, deve necessariamente essere $p = \sqrt{3}$, vale a dire

$$x = \sqrt{3} + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) . \tag{2}$$

Per calcolare q sostituiamo la x nell'equazione (*) con l'espressione (2): usando il fatto che

$$x^2 = \Big[\sqrt{3} + \frac{q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big)\Big]^2 = 3 + \frac{\sqrt{12}\,q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) = 3 + o(1)$$

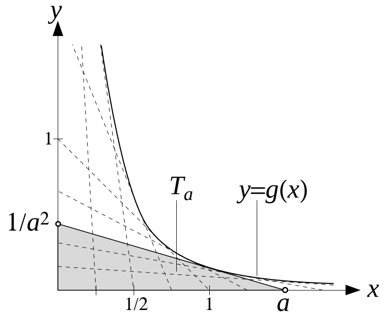
otteniamo infatti

$$e^{3+o(1)} = a\Big[-\frac{\sqrt{12}\,q}{a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big)\Big] \quad \text{cioè} \quad e^3 + o(1) = -\sqrt{12}\,q + o(1) ,$$

da cui segue che $q = -e^3/\sqrt{12}$, e quindi

$$x(a) = \sqrt{3} - \frac{e^3}{\sqrt{12}\,a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. a) Tracciano i triangoli T_a per alcuni valori di a si ottiene la figura riportata sotto.



b) Per ogni $a > 0$ la retta $R_a$che contiene che contiene l'ipotenusa del triangolo T_a ha equazione $y = 1/a^2 - x/a^3$. Questo significa che, fissato $x > 0$, la retta R_a interseca la retta verticale di ascissa x all'altezza

$$h_x(a) := \frac{1}{a^2} - \frac{x}{a^3} = \frac{a - x}{a^3} .$$

Ora, $g(x)$ corrisponde chiaramente all'altezza massima di tale intersezione, vale a dire

$$g(x) = \max_{a>0} h_x(a) .$$

Dobbiamo dunque trovare il massimo della funzione $h_x(a)$ relativamente alla semiretta $a > 0$. Studiando il segno della derivata della funzione $h_x(a)$ *rispetto alla variabile* a, vale a dire

$$h'_x(a) = \frac{-2}{a^3} + \frac{3x}{a^4} = \frac{3x - 2a}{a^4} ,$$

otteniamo che $a = 3x/2$ è il punto di massimo assoluto di h_x, e quindi

$$g(x) = h_a\Big(\frac{3x}{2}\Big) = \frac{4}{27\,x^2} \quad \text{per ogni } x > 0.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1.

a) $f(x) = \sqrt{\log(1 + 16x^8)} \sim 4x^4$ per $x \to 0$.

b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \neq 1/4$ vale che $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^4} \sim \Big(\dfrac{1}{4} - a\Big)\dfrac{1}{x^4}$ per $x \to 0$.

c) Usando il fatto che $f(x) = 4x^4 - 16x^{12} + O(x^{20})$, e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{4x^4} \sim x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

2. Analogo al gruppo 1.

b) Riscriviamo l'equazione (*) nella forma

$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{\exp(x^2/2)}{2 - x^2}\,, \quad x \geq 0\,.$$

Tracciando il grafico di f si vede subito che il numero di soluzioni dell'equazione (*) è

- una per $a \geq 1/2$;
- nessuna per $-e^2/2 < a < 1/2$;
- una per $a = -e^2/2$;
- due per $a < -e^2/2$.

a) Per quanto detto al punto precedente, la risposta è "nessuna soluzione".

c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene

$$x(a) = \sqrt{2} - \frac{e}{\sqrt{8}\,a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso

$$g(x) = \max_{a>0} \frac{a - x}{a^4} = \frac{27}{256\,x^3} \quad \text{per ogni } x > 0.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1.

a) $f(x) = \sqrt{\log(1 + 16x^4)} \sim 4x^2$ per $x \to 0$.

b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \neq 1/4$ vale che $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^2} \sim \Big(\dfrac{1}{4} - a\Big)\dfrac{1}{x^2}$ per $x \to 0$.

c) Usando il fatto che $f(x) = 4x^2 - 16x^6 + O(x^{10})$, e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{4x^2} \sim x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

2. Analogo al gruppo 1.

b) Riscriviamo l'equazione (*) nella forma

$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{\exp(x^2/2)}{4 - x^2}\,, \quad x \geq 0\,.$$

Tracciando il grafico di f si vede subito che il numero di soluzioni dell'equazione (*) è

- una per $a \geq 1/4$;
- nessuna per $-e^3/2 < a < 1/4$;
- una per $a = -e^3/2$;
- due per $a < -e^3/2$.

a) Per quanto detto al punto precedente, la risposta è "una soluzione".

c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene

$$x(a) = 2 - \frac{e^2}{4a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1.
   a) $f(x) = \sqrt{\log(1 + 4x^8)} \sim 2x^4$ per $x \to 0$.
   b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \neq 1/2$ vale che $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{a}{x^4} \sim \Big(\dfrac{1}{2} - a\Big)\dfrac{1}{x^4}$ per $x \to 0$.
   c) Usando il fatto che $f(x) = 2x^4 - 2x^{12} + O(x^{20})$, e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{2x^4} \sim \frac{x^4}{2} \quad \text{per } x \to 0.$$

2. Analogo al gruppo 1.
   b) Riscriviamo l'equazione (*) nella forma
$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{\exp(x^2)}{2 - x^2}\,, \qquad x \geq 0\,.$$
   Tracciando il grafico di f si vede subito che il numero di soluzioni dell'equazione (*) è
   - una per $a \geq 1/2$;
   - nessuna per $-e^3 < a < 1/2$;
   - una per $a = -e^3$;
   - due per $a < -e^3$.

   a) Per quanto detto al punto precedente, la risposta è "nessuna soluzione".
   c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$x(a) = \sqrt{2} - \frac{e^2}{\sqrt{8}\,a} + o\Big(\frac{1}{a}\Big) \quad \text{per } a \to +\infty.$$

3. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 3. Questo esercizio ha presentato difficoltà di impostazione per molti dei presenti: il punto è che la funzione $f(x)$ è da una formula per ogni $x \geq 2$, e da un'altra formula per $x < 2$ (mi riferisco qui al gruppo 1), e per far sì che f sia continua (in $x = 2$) si deve imporre che valori delle due formule in 2 coincidano, vale a dire $5a = 1 - a$, mentre per averla derivabile si deve imporre che i valori delle derivate delle due formule in 2 coincidano, vale a dire $4a = b/2$; alla fine si ottiene quindi $a = 1/6$, $b = 4/3$.

- Prima parte, esercizio 8. Molti dei presenti hanno confuso la domanda del tipo "risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq g(x)$" con la domanda "disegnare l'insieme del punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq g(x)$".

- Seconda parte, esercizio 1. Nelle soluzioni date sopra i resti degli sviluppi sono espressi come "o grandi", ma in questo caso esprimerli come "o piccoli" non avrebbe fatto alcuna differenza.

- Seconda parte, esercizio 1. Per rispondere al punto c) si può anche procedere sviluppando $1/f(x)$ come segue (mi riferisco qui al gruppo 1):
$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} &= \big(\log(1 + 4x^4)\big)^{-1/2} \\
&= \big(4x^4 - 8x^8 + O(x^{12})\big)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{2x^2}\big(1 - 2x^4 + O(x^8)\big)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{2x^2}\big(1 + x^4 + O(x^8)\big) = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^2}{2} + O(x^6)
\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio si usa lo sviluppo $\log(1+y) = y - y^2/2 + O(y^3)$ e nel quarto lo sviluppo $(1+y)^{-1/2} = 1 - y/2 + O(y^2)$). Quindi

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2}{2} + O(x^6) \sim \frac{x^2}{2}\,.$$

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Il punto di minimo assoluto è 0, il punto di massimo assoluto è 1.

2. a) 1/2; b) $+\infty$; c) 0.

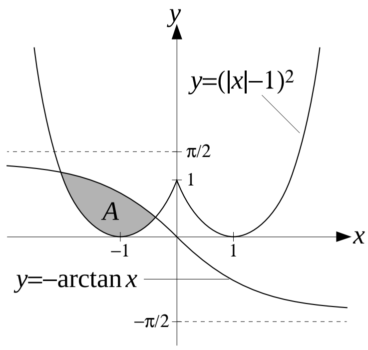
3. $\vec{v} = \left(\dfrac{2t}{1+t^4},\, -3t^2 \exp(-t^3)\right)$; $\vec{a} = \left(\dfrac{2-6t^4}{(1+t^4)^2},\, (9t^4 - 6t)\exp(-t^3)\right)$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 4 - 2x^2$ si ottiene
$$\int \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\,dx = -\int y^{-1/2}dy = -2y^{1/2} + c = -2\sqrt{4-2x^2} + c\,.$$

5. $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^{2n}+1}{3^n - 2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(4^2)^n}{3^n}} = \dfrac{16}{3}$.

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^{ax}}{\sin(x^{2a}+x^a)}dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{a-1}}$, e quindi l'integrale è finito per $a < 2$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{2}\log\big(2+\cos(2t)\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Il punto di minimo assoluto è 0, il punto di massimo assoluto è $\sqrt{2}$.

2. a) 1/2; b) 0; c) non esiste.

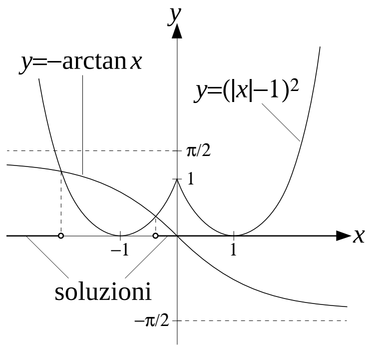
3. $\vec{v} = \left(\dfrac{3t^2}{1+t^6},\, -2t \exp(-t^2)\right)$; $\vec{a} = \left(\dfrac{6t-12t^7}{(1+t^6)^2},\, (4t^2 - 2)\exp(-t^2)\right)$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 8 - 2x^2$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{8x}{\sqrt[3]{8-2x^2}}\,dx = -2\int_8^0 y^{-1/3}dy = -3\Big|\,y^{2/3}\,\Big|_8^0 = 12\,.$$

5. $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5^n+n^2}{3^{2n} - 2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5^n}{(3^2)^n}} = \dfrac{5}{9}$.

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(a/x^2)}{x^{2a}+x^a}dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a+2}}$, e quindi l'integrale è finito per ogni $a > 0$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{4}\log\big(2\cos(2t) - 1\big)$.

8.


PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Il punto di minimo assoluto è 1, il punto di massimo assoluto non esiste.

2. a) 0; b) 2; c) $-\infty$.

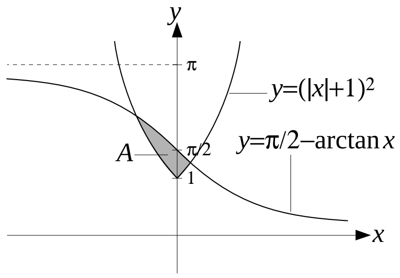
3. $\vec{v} = \left(\dfrac{2t}{1+t^4},\, -2t\,\exp(-t^2)\right)$; $\vec{a} = \left(\dfrac{2-6t^4}{(1+t^4)^2},\, (4t^2-2)\,\exp(-t^2)\right)$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 8 - 2x^2$ si ottiene
$$\int \frac{8x}{\sqrt[3]{8-2x^2}}\,dx = -2\int y^{-1/3}dy = -3y^{2/3} + c = -3(8-2x^2)^{2/3} + c\,.$$

5. $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^{2n}+3}{2^n - n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(4^2)^n}{2^n}} = 8.$

6. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\log(1+ax^2)}{x^{2a}+x^a}dx \approx \int_0^2 \frac{dx}{x^{a-2}}dx$, e quindi l'integrale è finito per $a < 3$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{4}\log\big(\cos(4t)\big)$.

8.


PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Il punto di minimo assoluto non esiste, il punto di massimo assoluto è 1.

2. a) 2; b) 0; c) 0.

3. $\vec{v} = \left(-3t^2\,\exp(-t^3),\, \dfrac{2t}{1+t^4}\right)$; $\vec{a} = \left((9t^4-6t)\,\exp(-t^3),\, \dfrac{2-6t^4}{(1+t^4)^2}\right)$.

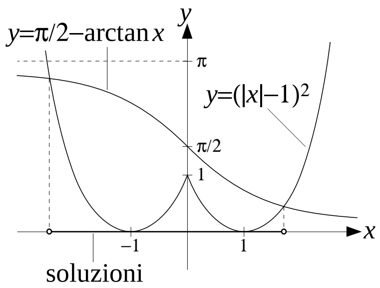
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 4 - 2x^2$ si ottiene
$$\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{4-2x^2}}\,dx = -\int_4^2 y^{-1/2}dy = -2\Big|\, y^{1/2}\,\Big|_4^2 = 2(2-\sqrt{2})\,.$$

5. $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n+n}{2^{2n}+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{(2^2)^n}} = \dfrac{3}{4}.$

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{2a}+x^a}{2^x+x^a}dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{x^{2a}}{2^x}dx$, e quindi l'integrale è finito per ogni $a>0$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{2}\log\big(\cos(2t)\big)$.

8.



Prima parte, gruppo 5.

1. Il punto di minimo assoluto è $-\sqrt{2}$, il punto di massimo assoluto è $\sqrt{2}$.

2. a) 2; b) 0; c) 0.

3. $\vec{v} = \left(-2t\,\exp(-t^2),\ \dfrac{3t^2}{1+t^6}\right)$; $\vec{a} = \left((4t^2-2)\,\exp(-t^2),\ \dfrac{6t-12t^7}{(1+t^6)^2}\right).$

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 4-x^2$ si ottiene

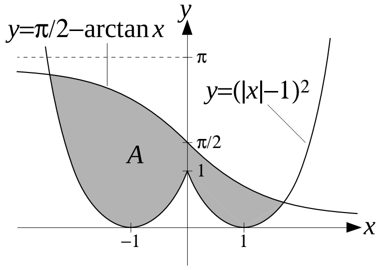
$$\int \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -2\int y^{-1/2}dy = -4y^{1/2}+c = -4\sqrt{4-x^2}+c\,.$$

5. $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^{2n}-2}{5^n-n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(3^2)^n}{5^n}} = \dfrac{9}{5}.$

6. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^{2a}+x^a}{xe^{ax}}dx \approx \int_0^{2} \frac{dx}{x^{1-a}}dx$, e quindi l'integrale è finito per ogni $a>0$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{4}\log\big(2\cos(2t)-1\big)$.

8.



Prima parte, gruppo 6.

1. Il punto di minimo assoluto è $1/2$, il punto di massimo assoluto è $-1/2$.

2. a) $+\infty$; b) $-1/2$; c) 0.

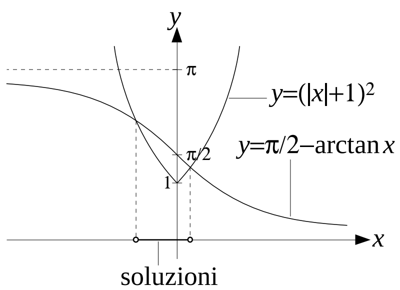
3. $\vec{v} = \left(-2t\,\exp(-t^2),\ \dfrac{2t}{1+t^4}\right)$; $\vec{a} = \left((4t^2-2)\,\exp(-t^2),\ \dfrac{2-6t^4}{(1+t^4)^2}\right)$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 4 - x^2$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -2\int_4^0 y^{-1/2}dy = -4\Big|\,y^{1/2}\,\Big|_4^0 = 8\,.$$

5. $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1/|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n+n^2}{3^{2n}-2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n}{(3^2)^n}} = \dfrac{4}{9}$.

6. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{2a}+x^a}{\log(1+a/x^2)}dx \approx \int_2^{+\infty} x^{2a+2}dx$, e quindi l'integrale non è finito per alcun $a>0$.

7. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\dfrac{1}{4}\log\big(2+\cos(4t)\big)$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Usando le proprietà del logaritmo si ottiene che, per $x \to 0$,
$$\begin{aligned} f(x) &= \log(3+\cos x) - \log 4 \\ &= \log\Big(1 + \frac{\cos x - 1}{4}\Big) \sim \frac{\cos x - 1}{4} \sim -\frac{x^2}{8}\,, \end{aligned}$$
dove nel secondo passaggio abbiamo usato lo sviluppo $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0$ con $y = \cos x - 1$, e nel terzo lo sviluppo $1 - \cos x \sim x^2/2$ per $x \to 0$.
b) Per quanto fatto al punto precedente abbiamo che, per $x \to 0$,
$$f(x) + ax^2 \sim \Big(a - \frac{1}{8}\Big)x^2 \quad \text{se } a \neq 1/8.$$
Il caso $a = 1/8$ va trattato a parte. Per farlo, ripercorriamo quando fatto nel punto precedente utilizzando degli sviluppi più precisi:
$$\begin{aligned} f(x) &= \log\Big(1 + \frac{\cos x - 1}{4}\Big) \\ &= \frac{\cos x - 1}{4} - \frac{(\cos x-1)^2}{32} + O\big((\cos x - 1)^3\big) \\ &= \frac{1}{4}\Big[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\Big] - \frac{1}{32}\Big[-\frac{x^2}{2} + O(x^4)\Big]^2 + O\big((O(x^2))^3\big) \\ &= \Big[-\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{96} + O(x^6)\Big] - \frac{1}{32}\Big[\frac{x^4}{4} + O(x^6)\Big] + O(x^6) \\ &= -\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{96} - \frac{x^4}{128} + O(x^6) = -\frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384} + O(x^6)\,, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato lo sviluppo $\log(1+y) = y - y^2/2 + O(y^3)$ per $y \to 0$ con $y = \cos x - 1$, e nel terzo gli sviluppi

$$\cos x - 1 = -x^2/2 + x^4/24 + O(x^6) = -x^2/2 + O(x^4) = O(x^2)\,.$$

Possiamo ora concludere, dando la parte principale di $f(x) + ax^2$ per $a = 1/8$:

$$f(x) + \frac{x^2}{8} = \frac{x^4}{384} + O(x^6) \sim \frac{x^4}{384}\,.$$

2. Affrontiamo insieme i punti a) e b). Dividendo entrambe le disequazioni per $(e^{2x}+1)^4$ il problema diventa trovare il più grande numero m ed il più piccolo numero M per cui vale

$$m \leq \frac{e^{8x}+8}{(e^{2x}+1)^4} \leq M \quad \text{per ogni } x \geq 0;$$

questo significa che m è il valore minimo della funzione

$$f(x) := \frac{e^{8x}+8}{(e^{2x}+1)^4}$$

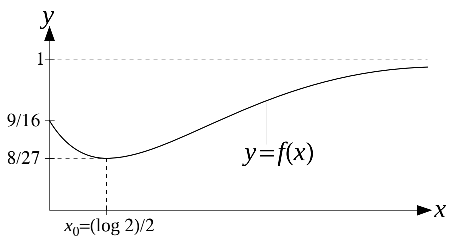
tra tutti gli $x \geq 0$, oppure, se tale minimo non esiste, l'estremo inferiore. Analogamente M è il valore massimo di f tra tutti gli $x \geq 0$, oppure l'estremo superiore se il massimo non esiste.
Per determinare m e M studiamo il grafico di f limitatamente alla semiretta $[0, +\infty)$. Osserviamo innanzitutto che $f(x)$ è ben definita e positiva per ogni $x \geq 0$, vale $9/16$ in 0, e tende a 1 per $x \to +\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{8e^{8x}\,(e^{2x}+1)^4 - (e^{8x}+8)\,4(e^{2x}+1)^3\,2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^8} = \frac{8e^{2x}\left(e^{6x}-8\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^5}$$

otteniamo che f è decrescente nell'intervallo $[0, x_0]$ e crescente nella semiretta $[x_0, +\infty)$, dove

$$x_0 := \frac{\log 2}{2}\,.$$

Usando queste informazioni tracciamo il grafico di f relativamente alla semiretta $[0, +\infty)$.



In particolare x_0 è il punto di minimo assoluto di f e quindi

$$m = f(x_0) = \frac{e^{4\log 2}+8}{(e^{\log 2}+1)^4} = \frac{16+8}{(2+1)^4} = \frac{8}{27}\,.$$

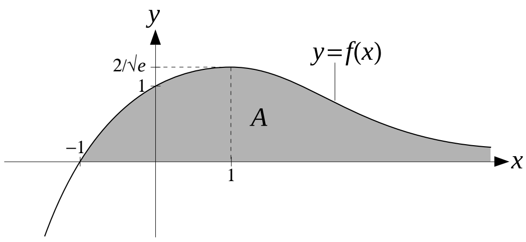
D'altra parte f non ha punti di massimo assoluto, e l'estremo superiore dei valori $f(x)$ viene raggiunto per $x \to +\infty$; quindi

$$M = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,.$$

3. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, positiva per $x \geq -1$ e negativa altrimenti, tende a 0 per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to -\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{1-x}{2}\exp(-x/2)$$

si ottiene che f è crescente nella semiretta $(-\infty, 1]$ e decrescente nella semiretta $[1, +\infty)$ (ed in particolare 1 è il punto di massimo assoluto). Sulla base di queste informazioni otteniamo il grafico di f e l'insieme A riportato nella figura sotto.



b) Il volume del solido di rotazione V_x è dato dalla formula

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_{-1}^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_{-1}^{+\infty} (1+x)^2 e^{-x}\, dx\,;$$

integrando per parti due volte, e usando il fatto che la primitiva di e^{-x} è $-e^{-x}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V_x) &= \pi\Big|(1+x)^2(-e^{-x})\Big|_{-1}^{+\infty} - \pi \int_{-1}^{+\infty} 2(1+x)\,(-e^{-x})\, dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^{+\infty} (1+x)\, e^{-x}\, dx \\
&= 2\pi\Big|(1+x)\,(-e^{-x})\Big|_{-1}^{+\infty} - 2\pi \int_{-1}^{+\infty} (-e^{-x})\, dx \\
&= 2\pi \int_{-1}^{+\infty} e^{-x}\, dx = 2\pi\Big|(-e^{-x})\Big|_{-1}^{+\infty} = 2\pi e
\end{aligned}$$

c) Osserviamo che V_y può essere ottenuto facendo ruotare attorno all'asse delle y solamente la parte di A che si trova a destra dell'asse delle y (nel senso che la rotazione della parte sinistra di A è contenuta nella rotazione della parte destra). Pertanto il volume di V_y è dato dalla formula

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx = 2\pi \int_0^{+\infty} (x+x^2)\, e^{-x/2}\, dx\,,$$

e integrando per parti due volte otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V_y) &= 2\pi\Big|(x+x^2)\,(-2e^{-x/2})\Big|_0^{+\infty} - 2\pi \int_0^{+\infty} (1+2x)\,(-2e^{-x/2})\, dx \\
&= 4\pi \int_0^{+\infty} (1+2x)\, e^{-x/2}\, dx \\
&= 4\pi\Big|(1+2x)\,(-2e^{-x/2})\Big|_0^{+\infty} - 4\pi \int_0^{+\infty} 2\,(-2e^{-x/2})\, dx \\
&= 8\pi + 16\,\pi \int_0^{+\infty} e^{-x/2}\, dx = 8\pi + 16\,\pi\Big|(-2e^{-x/2})\Big|_0^{+\infty} = 40\,\pi
\end{aligned}$$

4. a), b) L'equazione differenziale (*) è lineare e a coefficienti costanti. Pertanto la soluzione generale è data da

$$x = x_{\text{om}} + \tilde{x} \tag{1}$$

dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione *omogenea* associata alla (*), mentre $\tilde{x}$ è una soluzione *particolare* della (*).
Cominciamo con il calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è

$$\lambda^2 + 2a\lambda + (2-a) = 0\,.$$

Distinguiamo quindi tre casi a seconda del segno del discriminante di questa equazione.
Caso $a > 1$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali e distinte,

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+a-2}\,, \tag{2}$$

e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Caso $a = 1$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica coincidono con -1 e quindi

$$x_{\rm om}(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso $1 > a \geq 0$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono complesse,

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \omega i \quad \text{con } \omega := \sqrt{2 - a - a^2}\,,$$

e quindi

$$x_{\rm om}(t) = e^{-t}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Passiamo alla ricerca della soluzione particolare $\tilde{x}$. Anche qui si presentano due casi distinti.
Caso $a \neq 1$. Cerchiamo $\tilde{x}$ della forma $\tilde{x}(t) = ce^{-t}$; sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo $c = 4/(3 - 3a)$, ovvero

$$\tilde{x}(t) = \frac{4e^{-t}}{3 - 3a}\,. \tag{4}$$

Caso $a = 2$. Cerchiamo $\tilde{x}$ della forma $\tilde{x}(t) = ct^2 e^{-t}$; sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo $c = 2$, ovvero

$$\tilde{x}(t) = 2t^2 e^{-t}\,.$$

c) Per via della formula (1) ci basta far vedere che $\tilde{x}(t) = o(e^t)$ e $x_{\rm om}(t) = o(e^t)$ per ogni $a \geq 2$. La prima affermazione è un'immediata conseguenza della formula (4), mentre usando le formule (2) e (3) riduciamo la seconda affermazione alla disuguaglianza

$$-a + \sqrt{a^2 + a - 2} < 1\,;$$

sommando a ad entrambi e termini ed elevandoli al quadrato, questa disequazione diventa $a^2 + a - 2 < (1 + a)^2$, vale a dire $-3 \leq a$, ed in particolare è verificata per ogni $a \geq 2$.

d) Procedendo come al punto c) si vede che l'affermazione $x(t) = o(e^{ct})$ per ogni soluzione della (*) equivale alla disequazione

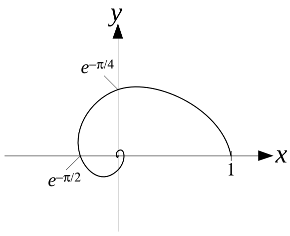
$$-a + \sqrt{a^2 + a - 2} < c\,,$$

che a sua volta si riscrive come

$$-(2 + c^2) \leq (2c - 1)a\,. \tag{5}$$

Distinguiamo tre casi: se $2c - 1 > 0$ la disequazione (5) è verificata per $a \geq -(2 + c^2)/(2c - 1)$, ed in particolare è verificata per ogni $a \geq 2$; Se $2c - 1 = 0$ la (5) è verificata per ogni a; se infine $2c - 1 < 0$ la (5) è verificata per $a \leq -(2 + c^2)/(2c - 1)$, ed in particolare ci sono dei valori $a \geq 2$ per cui non è verificata.
Riassumendo, i valori di c tali che $x(t) = o(e^{ct})$ per ogni $a \geq 2$ ed ogni soluzione della (*) sono quelli che soddisfano $2c - 1 \geq 0$, ovvero $c \geq 1/2$. In particolare il più piccolo di questi valori è $c = 1/2$.

5. a) Siccome la funzione $e^{-\alpha}$ è decrescente in α, e tende a 0 per $\alpha \to +\infty$, la curva C è una spirale che parte dal punto $(1, 0)$ e si avvicina rapidamente all'origine girandoci intorno infinite volte in senso antiorario, come mostrato nel disegno sotto (eseguito senza rispettare la distanze, in modo da rendere meglio l'idea).



b) Scegliamo come legge oraria di P quella per cui ad ogni istante t l'angolo α è uguale a t. In tal caso la posizione di P all'istante t, espressa in coordinate cartesiane, è

$$P(t) = \big(e^{-t}\cos t,\, e^{-t}\sin t\big)\,.$$

Quindi la velocità di P è

$$\vec{v}(t) = \big(e^{-t}(-\cos t - \sin t),\, e^{-t}(-\sin t + \cos t)\big)\,,$$

e un semplice calcolo mostra che $|\vec{v}(t)| = \sqrt{2}\, e^{-t}$. Pertanto la lunghezza della curva è

$$L = \int_0^{+\infty} |\vec{v}(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} \sqrt{2}\, e^{-t}\, dt = \sqrt{2}\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1: per $x \to 0$ si ha

$$f(x) \sim -\frac{x^2}{10}\,; \quad f(x) + ax^2 \sim \begin{cases} \Big(a - \dfrac{1}{10}\Big)x^2 & \text{per } a \neq 1/10, \\ \dfrac{x^4}{300} & \text{per } a = 1/10. \end{cases}$$

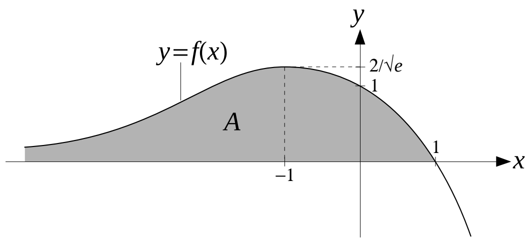
2. Analogo al gruppo 1: m ed M sono rispettivamente il valore minimo e massimo della funzione

$$f(x) := \frac{e^{12x} + 9}{(e^{4x} + 1)^3}$$

relativamente alla semiretta $[0, +\infty)$, oppure estremo inferiore e superiore se massimo e minimo non esistono. Facendo i conti si ottiene che il punto di minimo assoluto di f è $x_0 := (\log 3)/4$, mentre il punto di massimo assoluto è 0. Pertanto

$$m = f(x_0) = \frac{e^{3\log 3} + 9}{(e^{\log 3} + 1)^3} = \frac{9}{16}\,; \quad M = f(0) = \frac{5}{4}\,.$$

3. Analogo al gruppo 1. a) Il grafico della funzione f e l'insieme A sono come in figura:



b) Il volume di V_x è dato da

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_{-\infty}^{1} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_{-\infty}^{1} (x-1)^2\, e^x\, dx = 2\pi e\,.$$

c) Il solido V_y è ottenuto ruotando attorno all'asse delle y la parte di A che si trova a *sinistra* dell'asse delle y, e quindi il volume di V_y è dato da

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_{-\infty}^{0} (-x)\, f(x)\, dx = \pi \int_{-\infty}^{0} (x^2 - x)\, e^{x/2}\, dx = 40\,\pi\,.$$

4. Analogo al gruppo 1.
a), b) La soluzione generale della (*) è $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}$ dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) mentre $\tilde{x}$ è una soluzione particolare dell'equazione. La soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ con } \lambda_{1,2} := -2a \pm \sqrt{4a^2 + 2a - 2} & \text{per } a > 1/2, \\ e^{-t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 1/2, \\ e^{-2at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \text{ con } \omega := \sqrt{2 - 2a - 4a^2} & \text{per } 1/2 > a \geq 0 \end{cases}$$

(in questa formula c_1, c_2 sono numeri reali arbitrari), mentre la soluzione particolare è data da

$$\tilde{x}_(t) = \begin{cases} \dfrac{2e^{-t}}{1 - 2a} & \text{per } a \neq 1/2; \\ 3t^2 e^{-t} & \text{per } a = 1/2. \end{cases}$$

c) Analogo al gruppo 1.

d) Analogo al gruppo 1, il valore cercato è $c = 1/2$.

5. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1: per $x \to 0$ si ha

$$f(x) \sim -\frac{x^2}{12}\,; \quad f(x) + ax^2 \sim \begin{cases} \Big(a - \dfrac{1}{12}\Big)x^2 & \text{per } a \neq 1/12, \\ \dfrac{x^4}{288} & \text{per } a = 1/12. \end{cases}$$

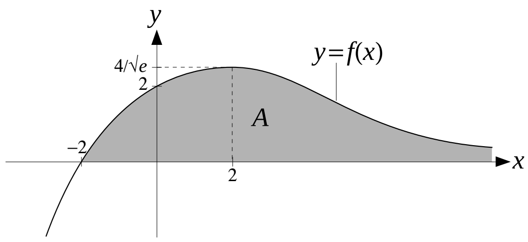
2. Analogo al gruppo 1: m ed M sono rispettivamente il valore minimo e massimo della funzione

$$f(x) := \frac{e^{12x} + 8}{(e^{3x} + 1)^4}$$

relativamente alla semiretta $[0, +\infty)$, oppure estremo inferiore e superiore se massimo e minimo non esistono. Facendo i conti si ottiene che il punto di minimo assoluto di f è $x_0 := (\log 2)/3$, mentre il punto di massimo assoluto non esiste, e l'estremo superiore dei valori $f(x)$ viene raggiunto per $x \to +\infty$. Pertanto

$$m = f(x_0) = \frac{e^{4\log 2} + 8}{(e^{\log 2} + 1)^4} = \frac{8}{27}\,; \quad M = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1\,.$$

3. Analogo al gruppo 1. a) Il grafico della funzione f e l'insieme A sono come in figura:



b) Il volume di V_x è dato da

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_{-2}^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_{-2}^{+\infty} (x+2)^2\, e^{-x/2}\, dx = 16\,\pi e\,.$$

c) Il solido V_y è ottenuto ruotando attorno all'asse delle y la parte di A che si trova a *destra* dell'asse delle y, e quindi il volume di V_y è dato da

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_0^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \pi \int_{-2}^{+\infty} (2x + x^2)\, e^{-x/4}\, dx = 320\,\pi\,.$$

4. Uguale al gruppo 1.

5. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Analogo al gruppo 1: per $x \to 0$ si ha

$$f(x) \sim -\frac{x^2}{4}\,; \quad f(x) + ax^2 \sim \begin{cases} \Big(a - \dfrac{1}{4}\Big)x^2 & \text{per } a \neq 1/4, \\ -\dfrac{x^4}{96} & \text{per } a = 1/4. \end{cases}$$

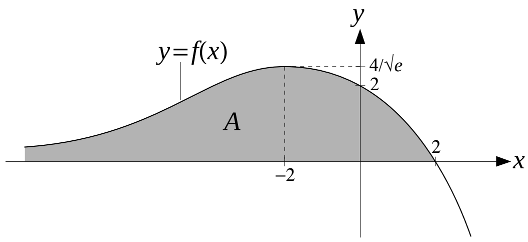
2. Analogo al gruppo 1: m ed M sono rispettivamente il valore minimo e massimo della funzione

$$f(x) := \frac{e^{6x} + 9}{(e^{2x} + 1)^3}$$

relativamente alla semiretta $[0, +\infty)$, oppure estremo inferiore e superiore se massimo e minimo non esistono. Facendo i conti si ottiene che il punto di minimo assoluto di f è $x_0 := (\log 3)/2$, mentre il punto di massimo assoluto è 0. Pertanto

$$m = f(x_0) = \frac{e^{3\log 3} + 9}{(e^{\log 3} + 1)^3} = \frac{9}{16}\,; \quad M = f(0) = \frac{5}{4}\,.$$

3. Analogo al gruppo 1. a) Il grafico della funzione f e l'insieme A sono come in figura:



b) Il volume di V_x è dato da

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_{-\infty}^{2} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_{-\infty}^{2} (x-2)^2\, e^{x/2}\, dx = 16\,\pi e\,.$$

c) Il solido V_y è ottenuto ruotando attorno all'asse delle y la parte di A che si trova a *sinistra* dell'asse delle y, e quindi il volume di V_y è dato da

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_{-\infty}^{0} (-x)\, f(x)\, dx = \pi \int_{-\infty}^{2} (x^2 - 2x)\, e^{x/4}\, dx = 320\,\pi\,.$$

4. Uguale al gruppo 2.

5. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 3c). Consideriamo in generale il solido V_y ottenuto ruotando attorno all'asse delle y il sottografico A di una funzione f *positiva* definita in un intervallo $[a, b]$. Nel caso in cui l'intervallo $[a, b]$ si trova *a destra* dell'origine, vale a dire $0 \le a \le b$, la formula per il volume di V_y è stata data a lezione:

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_{a}^{b} x\, f(x)\, dx\,. \tag{6}$$

Nel caso in cui $[a, b]$ si trovi a sinistra dell'origine, vale a dire $a \le b \le 0$, la formula per il volume è

$$\text{volume}(V_y) = -2\pi \int_{a}^{b} x\, f(x)\, dx\,,$$

e la si ottiene facilmente riflettendo A rispetto all'asse delle y e usando la formula precedente. Per un intervallo $[a, b]$ qualunque, indichiamo con A_d la parte di A a destra dell'asse delle y, e con A_s la parte a sinistra: allora l'integrale in (6) è uguale al volume del solido dato dalla rotazione di A_d attorno all'asse y meno il volume di quello dato dalla rotazione di A_s. In particolare, nel caso del gruppo 1, l'integrale

$$2\pi \int_{-1}^{+\infty} (x + x^2)\, e^{-x/2}\, dx$$

è strettamente inferiore al volume di V_y. (Un discorso simile vale per gli altri gruppi.)

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) $\dfrac{12}{(2-3x)^2}$; b) $-2(\log x+1)x^{-2x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{5x^4}{2^x}\right)\right]' = [\log 5 + 4\log x - x\log 2]' = \dfrac{4}{x} - \log 2.$

2. Usando il cambio di variabile $2x = t$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{2+8x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\arctan t + c = \frac{1}{4}\arctan(2x) + c\,.$$

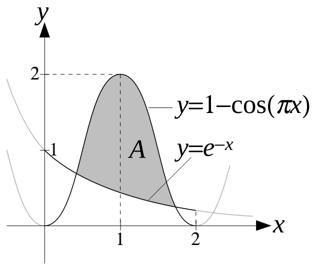
3. L'ordine corretto è $d \ll b \ll c \ll a$.

4. $f(x) = (1+x^3)\left[1 + \frac{1}{4}(-4x^3) - \frac{3}{32}(-4x^3)^2 + o(x^6)\right] = 1 - \frac{5}{2}x^6 + o(x^6).$

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n = 2\frac{1}{1-8/9} = 18.$

6. L'integrale è improprio in $x = 2$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 2-t$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^a} = \int_0^2 \frac{dt}{(4t-t^2)^a} \approx \int_0^2 \frac{dt}{(4t)^a} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^a}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = cte^{-2t}$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) $\dfrac{-24}{(3+4x)^2}$; b) $3(\log x+1)x^{3x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{3^x}{5x^6}\right)\right]' = [x\log 3 - \log 5 - 6\log x]' = -\dfrac{6}{x} + \log 3.$

2. Usando il cambio di variabile $2x = t$ si ottiene
$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{3+12\,x^2} = \frac{1}{3}\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\Big|\arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{24}\,.$$

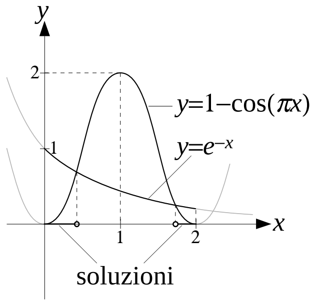
3. L'ordine corretto è $c \ll b \ll a \ll d$.

4. $f(x) = (1+x^2)\left[1 + \frac{1}{3}(-3x^2) - \frac{1}{9}(-3x^2)^2 + o(x^4)\right] = 1 - 2x^4 + o(x^4).$

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{4n}} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^2}{2^4}\right)^n = 3\frac{1}{1-9/16} = \frac{48}{7}.$

6. L'integrale è improprio in $x = 3$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 3-t$ si ottiene
$$\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{3a}} = \int_0^3 \frac{dt}{(6t-t^2)^{3a}} \approx \int_0^3 \frac{dt}{(6t)^{3a}} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{3a}}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1/3$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-t}\sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $\dfrac{12}{(3-2x)^2}$; b) $-4(\log x+1)x^{-4x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{4x^5}{3^x}\right)\right]' = [\log 4 + 5\log x - x\log 3]' = \dfrac{5}{x} - \log 3$.

2. Usando il cambio di variabile $3x = t$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{2+18\,x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\arctan t + c = \frac{1}{6}\arctan(3x) + c\,.$$

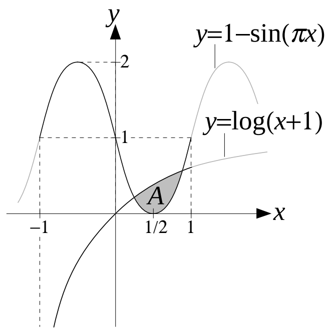
3. L'ordine corretto è $c \ll d \ll b \ll a$.

4. $f(x) = (1+x^2)\left[1 + \frac{1}{4}(-4x^2) - \frac{3}{32}(-4x^2)^2 + o(x^4)\right] = 1 - \frac{5}{2}x^4 + o(x^4)$.

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{4^{2n}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^3}{4^2}\right)^n = 2\frac{1}{1-1/2} = 4$.

6. L'integrale è improprio in $x = 2$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 2 - t$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{2a}} = \int_0^2 \frac{dt}{(4t-t^2)^{2a}} \approx \int_0^2 \frac{dt}{(4t)^{2a}} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{2a}}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1/2$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = cte^{2t}$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $\dfrac{-12}{(2+3x)^2}$; b) $2(\log x+1)x^{2x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{2^x}{5x^4}\right)\right]' = [x\log 2 - \log 5 - 4\log x]' = -\dfrac{4}{x} + \log 2$.

2. Usando il cambio di variabile $2x = t$ si ottiene
$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{2+8x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\Big|\arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}\,.$$

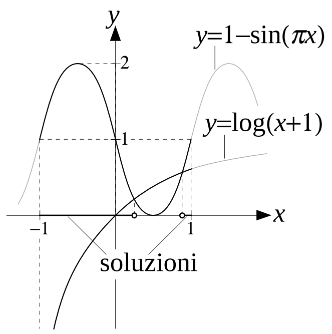
3. L'ordine corretto è $d \ll c \ll a \ll b$.

4. $f(x) = (1+x^3)\left[1+\frac{1}{3}(-3x^3) - \frac{1}{9}(-3x^3)^2 + o(x^6)\right] = 1 - 2x^6 + o(x^6)$.

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-8/9} = \frac{9}{2}$.

6. L'integrale è improprio in $x = 3$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 3 - t$ si ottiene
$$\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^a} = \int_0^3 \frac{dt}{(6t-t^2)^a} \approx \int_0^3 \frac{dt}{(6t)^a} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^a}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^t \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.

8.


PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. a) $\dfrac{24}{(3-4x)^2}$; b) $-3(\log x + 1)x^{-3x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{5x^6}{3^x}\right)\right]' = [\log 5 + 6\log x - x\log 3]' = \dfrac{6}{x} - \log 3$.

2. Usando il cambio di variabile $2x = t$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{3+12\,x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\arctan t + c = \frac{1}{6}\arctan(2x) + c\,.$$

3. L'ordine corretto è $c \ll d \ll b \ll a$.

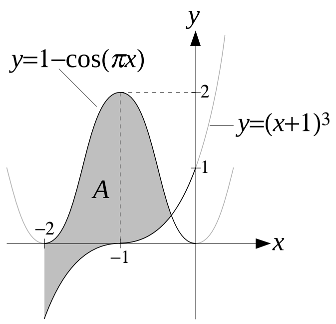
4. $f(x) = (1+x^4)\left[1+\frac{1}{4}(-4x^4) - \frac{3}{32}(-4x^4)^2 + o(x^8)\right] = 1 - \frac{5}{2}x^8 + o(x^8)$.

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{2^{4n}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^2}{2^4}\right)^n = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-9/16} = \frac{16}{21}$.

6. L'integrale è improprio in $x = 2$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 2 - t$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{3a}} = \int_0^2 \frac{dt}{(4t-t^2)^{3a}} \approx \int_0^2 \frac{dt}{(4t)^{3a}} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{3a}}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1/3$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-2t} \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.

8.



Prima parte, gruppo 6.

1. a) $\dfrac{-12}{(3+2x)^2}$; b) $4(\log x+1)x^{4x}$; c) $\left[\log\left(\dfrac{3^x}{4x^5}\right)\right]' = [x\log 3 - \log 4 - 5\log x]' = -\dfrac{5}{x} + \log 3.$

2. Usando il cambio di variabile $3x = t$ si ottiene
$$\int_0^{1/3} \frac{dx}{2+18\,x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/3} \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\Big|\arctan t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{24}\,.$$

3. L'ordine corretto è $c \ll b \ll a \ll d$.

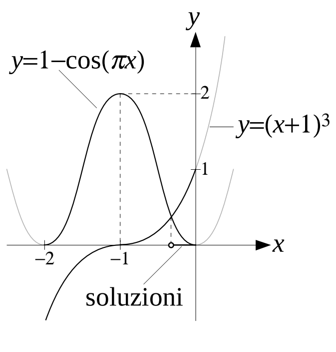
4. $f(x) = (1+x^4)\left[1+\dfrac{1}{3}(-3x^4) - \dfrac{1}{9}(-3x^4)^2 + o(x^8)\right] = 1 - 2x^8 + o(x^8).$

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{4^{2n}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^3}{4^2}\right)^n = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/2} = 1.$

6. L'integrale è improprio in $x = 3$, e utilizzando il cambio di variabile $x = 3 - t$ si ottiene
$$\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{2a}} = \int_0^3 \frac{dt}{(6t-t^2)^{2a}} \approx \int_0^3 \frac{dt}{(6t)^{2a}} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{2a}}$$
e quindi l'integrale è finito per $a < 1/2$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = cte^{-t}$ con $c \in \mathbb{R}$.

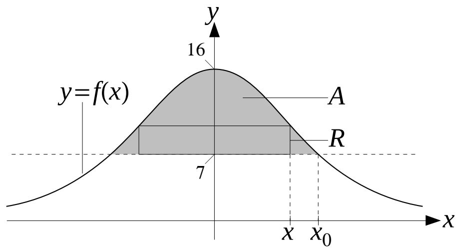
8.



Seconda parte, gruppo 1.

1. a) la funzione
$$f(x) := \frac{16}{1+x^4}$$
è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è pari e strettamente positiva, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando il segno della derivata prima
$$f'(x) := \frac{-64\,x^3}{(1+x^4)^2}$$

si vede che la f è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0]$ e decrescente sulla semiretta $[0, +\infty)$. Utilizzando questi dati possiamo tracciare il grafico di f e l'insieme A (per renderlo più comprensibile, il disegno sotto è stato tracciato senza rispettare le corrette proporzioni).



b) Ci interessando i rettangoli R rappresentati nella figura sopra; se indichiamo con x l'ascissa dei due vertici di destra di R, abbiamo che R stesso è univocamente determinato da x, e che x varia nell'intervallo $[0, x_0]$, dove x_0 è la soluzione positiva l'equazione $f(x) = 7$ e vale quindi

$$x_0 = \sqrt[4]{9/7}\,.$$

Osserviamo ora che la base di R è $2x$ mentre l'altezza è $f(x) - 7$, e quindi l'area, espressa in funzione di x, è

$$a(x) := 2x\big(f(x) - 7\big) = \frac{18\,x - 14\,x^5}{1 + x^4}\,.$$

Dobbiamo quindi determinare i punti di massimo e minimo della funzione a relativamente all'intervallo $[0, x_0]$. La derivata di a è data da

$$a'(x) = \frac{18 - 124\,x^4 - 14\,x^8}{(1 + x^4)^2}\,;$$

per studiarne il segno usiamo il cambio di variabile $t = x^4$, che permette di ricondursi allo studio del segno di un polinomio di secondo grado, ed otteniamo che a è crescente nell'intervallo $[0, x_m]$ con $x_m := 1/\sqrt[4]{7}$, e decrescente nell'intervallo $[x_m, x_0]$.
In particolare x_m è il punto di massimo assoluto di a, ed il corrispondente valore massimo è $a(x_m) = 2 \cdot 7^{3/4}$, mentre 0 e x_0 sono i punti di minimo assoluto, ed il valore minimo è 0; in effetti a questi due punti corrispondono rettangoli degeneri, con base o altezza uguale a zero (quindi il valore minimo dell'area non viene raggiunto tra i rettangoli "veri").

2. a) Per definizione di integrale improprio

$$L := \lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_4^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^4)^a} \approx \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{4a}}$$

ed in particolare L è finito per $a > 1/4$.
b) Si vede subito che la funzione $f(x)$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è pari. Studiando il segno della derivata prima

$$f'(x) = \frac{2x}{(1 + x^8)^a}$$

si ottiene che f cresce nella semiretta $[0, +\infty)$ e decresce nella semiretta $(-\infty, 0]$. In particolare 0 è il punto di minimo assoluto, mentre non esistono punti di massimo, e l'estremo superiore dei valori viene raggiunto per $x \to \pm\infty$ ed è uguale al limite L studiato al punto a).
c) La derivata seconda di f è data da

$$f''(x) = 2\frac{1 + (1 - 8a)\,x^8}{(1 + x^8)^{a+1}}\,.$$

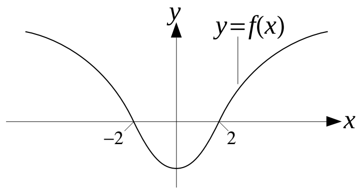
Distinguiamo ora due casi:

- se il coefficiente $1 - 8a$ che appare al numeratore è positivo, vale a dire se $a \leq 1/8$, allora la derivata seconda di f è chiaramente sempre positiva, ed f è convessa su tutto $\mathbb{R}$;
- se $a > 1/8$, studiando il segno del numeratore della derivata seconda otteniamo che f è convessa nell'intervallo $[-x_c, x_c]$ con $x_c := (8a - 1)^{-1/8}$ e concava nelle semirette $(-\infty, -x_c]$ e $[x_c, +\infty)$, in particolare la funzione non è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

d) Poiché la funzione integranda $(1+t^4)^{-a}$ che appare nella definizione di f è sempre strettamente positiva, abbiamo che l'integrale che definisce è nullo, positivo o negativo a seconda che l'estremo di integrazione x^2 sia uguale, maggiore o minore di 4. Per la precisione

- $f(x) = 0$ quando $x^2 = 4$, cioè per $x = \pm 2$;
- $f(x) > 0$ quando $x^2 > 4$, cioè per $x < -2$ oppure $x > 2$,
- $f(x) < 0$ quando $x^2 < 4$, cioè per $-2 < x < 2$.

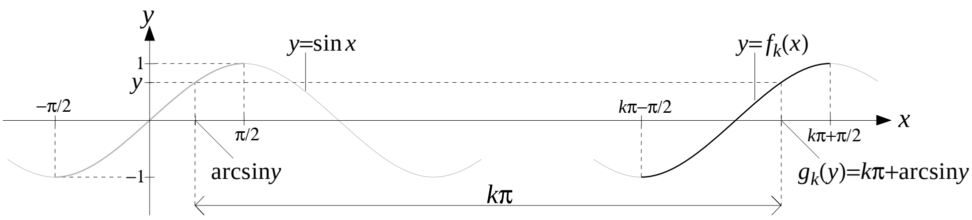
e) Utilizzando quanto detto ai punti precedenti otteniamo il grafico riportato sotto.



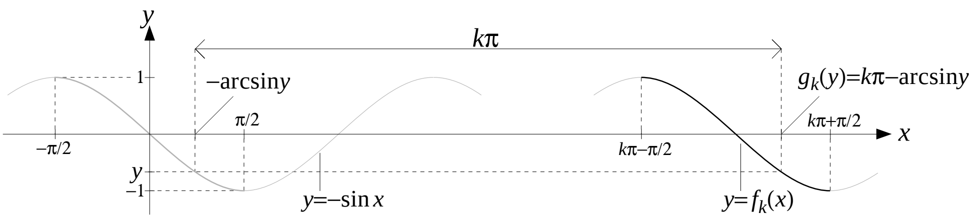
3. a) Osservando il grafico di $\sin x$ si vede subito che l'immagine di f_k è l'intervallo $[-1, 1]$, ed f_k è strettamente crescente per k pari e strettamente decrescente per k dispari. Quindi f_k ammette una funzione inversa

$$g_k : [-1,1] \to \left[\Big(k - \frac{1}{2}\Big)\pi,\ \Big(k + \frac{1}{2}\Big)\pi\right] .$$

Caso k pari:



Caso k dispari:



Dal disegno si vede chiaramente che quando k è pari il grafico di f_k è la traslazione orizzontale di $k\pi$ (verso destra se k è positivo) del grafico della restrizione di $y = \sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, e siccome l'inversa di quest'ultima funzione è (per definizione) $x = \arcsin y$, abbiamo che

$$g_k(y) = k\pi + \arcsin y \quad \text{per } k \text{ pari.}$$

Viceversa, per k dispari il grafico di f_k è la traslazione orizzontale di $k\pi$ del grafico della restrizione di $y = -\sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, e siccome l'inversa di quest'ultima funzione è $x = -\arcsin y$, abbiamo che

$$g_k(y) = k\pi - \arcsin y \quad \text{per } k \text{ dispari.}$$

b) Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Procedendo al solito modo si arriva all'equazione $\sin x = e^t + c$, ed imponendo la condizione iniziale $x(0) = \pi$ si ottiene $c = -1$, ovvero

$$\sin x = e^t - 1 .$$

Resta dunque da esplicitare la x, tuttavia $x(t) = \arcsin(e^t - 1)$ non è la soluzione cercata, perché per $t = 0$ vale 0 invece di π. Il punto è che $\arcsin y$ è l'inversa "sbagliata" di $\sin x$ perché porta 0 in 0, mentre quella giusta è quella che porta 0 in π, vale a dire, per quanto visto al punto precedente, $g_1(y) = \pi - \arcsin y$. Pertanto la soluzione cercata è

$$x(t) = \pi - \arcsin(e^t - 1) .$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1. In questo caso x varia tra 0 e $x_0 := \sqrt[6]{13/11}$ e l'area del rettangolo R, espressa in funzione di x, è pari a
$$a(x) = \frac{26\,x - 22\,x^7}{1 + x^6}\,,$$
il valore massimo dell'area è $2 \cdot 11^{5/6}$ e viene assunto per $x = 1/\sqrt[6]{11}$, mentre il valore minimo è 0 e viene assunto per $x = 0$ e $x = x_0$ (valori che corrispondono a rettangoli degeneri).

2. a) Uguale al gruppo 1.
   b) Uguale al gruppo 1.
   c) Uguale al gruppo 1.
   d) Analogo al gruppo 1. La funzione f è nulla per $x = \pm 3$, strettamente positiva per $x < -3$ e $x > 3$, strettamente negativa per $-3 < x < 3$.

3. a) Uguale al gruppo 1.
   b) Analogo al gruppo 1. La soluzione è $x(t) = g_{-1}(e^t - 1) = -\pi - \arcsin(e^t - 1)$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1. In questo caso x varia tra 0 e $x_0 := \sqrt[4]{9/14}$ e l'area del rettangolo R, espressa in funzione di x, è pari a
$$a(x) = \frac{18\,x - 28\,x^5}{1 + 2x^4}\,,$$
il valore massimo dell'area è $14^{3/4}$ e viene assunto per $x = 1/\sqrt[4]{14}$, mentre il valore minimo è 0 e viene assunto per $x = 0$ e $x = x_0$ (valori che corrispondono a rettangoli degeneri).

2. a) Analogo al gruppo 1. Il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ è finito per $a > 1/4$.
   b) Analogo al gruppo 1. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e pari, e studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{2x}{(1 + x^{12})^a}$$
   si ottiene che 0 è il punto di minimo assoluto, che non ci sono punti di massimo, e che l'estremo superiore dei valori è raggiunto per $x \to \pm\infty$.
   c) La derivata seconda di f è data da
$$f''(x) = 2\frac{1 + (1 - 12\,a)\,x^{12}}{(1 + x^{12})^{a+1}}\,,$$
   in particolare la funzione f è convessa se e solo se $a \le 1/12$.
   d) Uguale al gruppo 1.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Analogo al gruppo 1. In questo caso x varia tra 0 e $x_0 := \sqrt[6]{13/22}$ e l'area del rettangolo R, espressa in funzione di x, è pari a
$$a(x) = \frac{26\,x - 44\,x^7}{1 + 2x^6}\,,$$
il valore massimo dell'area è $22^{5/6}$ e viene assunto per $x = 1/\sqrt[6]{22}$, mentre il valore minimo è 0 e viene assunto per $x = 0$ e $x = x_0$ (valori che corrispondono a rettangoli degeneri).

2. a) Uguale al gruppo 3.
   b) Uguale al gruppo 3.
   c) Uguale al gruppo 3.
   d) Uguale al gruppo 2.

3. Uguale al gruppo 2.

Commenti

- Prima parte, esercizio 4. Quasi tutti i presenti hanno dato una risposta sbagliata, perché hanno usato uno sviluppo insufficiente dell'espressione sotto radice. Per esempio, nel caso del gruppo 1 lo svolgimento sembra essere stato il seguente:
$$(1+x^3)\sqrt[4]{1-4x^3} = (1+x^3)\left[1-x^3+o(x^3)\right] = 1-x^6+o(x^3)\,,$$
ma il resto $o(x^3)$ non autorizza a dire che il polinomio ottenuto è lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione (e infatti non lo è). Tuttavia questo errore risulta evidente solo scrivendo il resto...

- Prima parte, esercizio 6. Molti dei presenti hanno dato una risposta sbagliata. Nel caso del gruppo 1 (e un analogo discorso vale per gli altri gruppi) molti non si siano accorti che l'integrale è improprio in 2 e non in 0, mentre altri lo hanno erroneamente ricondotto all'integrale improprio $\int_0^1 dt/t^{2a}$ invece che $\int_0^1 dt/t^a$.

- Seconda parte, esercizio 1. Quasi tutti i presenti hanno disegnato correttamente l'insieme A, ma non i rettangoli di cui si deve studiare l'area, e di conseguenza, anche quando il problema è stato impostato correttamente, non hanno spiegato a cosa si riferisce la variabile x. In particolare alcuni hanno indicato con x la base del rettangolo (invece che l'ascissa dei vertici di destra), ma poi, nel calcolare l'altezza del rettangolo, hanno implicitamente indicato con x l'ascissa dei vertici.
Inoltre quasi nessuno ha spiegato chiaramente dove varia la x, e molti hanno esplicitamente considerato valori di x negativi, per i quali, sulla base della formula data, l'area del rettangolo è negativa...

- Seconda parte, esercizio 2. Diversi dei presenti invece della funzione $f(x)$ hanno studiato $1/(1+x^4)^a$ (qui mi riferisco al gruppo 1). Quasi nessuno dei presenti ha studiato il segno di f, e quasi nessuno ha tracciato il grafico di f, anche se diversi avevano tutti gli elementi necessari per farlo.

- Seconda parte, esercizio 3. Diversi dei presenti che hanno svolto l'esercizio hanno spiegato perché la funzione f_k è invertibile, e in alcuni (pochi) casi hanno anche disegnato correttamente il grafico della funzione inversa, ma *nessuno* ne ha scritto la formula giusta.
Inoltre quasi nessuno dei presenti sembra aver fatto il collegamento tra il punto a) ed il punto b), e tutti quelli che hanno affrontato questo punto hanno dato come soluzione $x(t) = \arcsin(e^t - 1)$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Il punto di minimo non esiste; il punto di massimo è $x = \exp(-1/2) = 1/\sqrt{e} \simeq 0{,}61$.

2. $f(x) := \dfrac{\log(1+2x^3) - 2x^3}{(1+x^8)^4 - 1} \sim \dfrac{-2x^6}{4x^8} = -\dfrac{1}{2x^2}$.

3. $F'(x) := 3x^2 \sin x$.

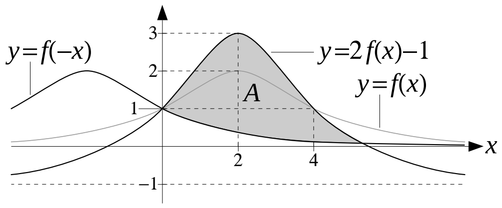
4. $d = \displaystyle\int_0^2 \left|\vec{v}(t)\right| dt = \int_0^2 \sqrt{(t^2-1)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^2 t^2 + 1\, dt = \left|\frac{t^3}{3} + t\right|_0^2 = \frac{14}{3}$.

5. Poiché $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3 + t^{3a+3}}{(2+t^a)^a} dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{t^{3a+3}}{t^{a^2}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a^2-3a-3}}$, l'integrale è finito per $a > 4$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 1/2$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{2}\tan(2t^3 - 2)$.

8.



Prima parte, gruppo 2.

1. Il punto di minimo è $x = \exp(-1/3) = 1/\sqrt[3]{e} \simeq 0{,}72$; il punto di massimo non esiste.

2. $f(x) := \dfrac{\sin(x^4) - x^4}{\sqrt[3]{1+x^4} - 1} \sim \dfrac{-x^{12}/6}{x^4/3} = -\dfrac{x^8}{2}$.

3. $F'(x) := 4x^3 e^x$.

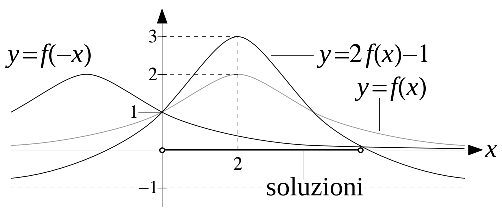
4. $d = \displaystyle\int_0^2 \left|\vec{v}(t)\right| dt = \int_0^2 \sqrt{(1-t^4)^2 + (-2t^2)^2}\, dt = \int_0^2 t^4 + 1\, dt = \left|\frac{t^5}{5} + t\right|_0^2 = \frac{42}{5}$.

5. Poiché $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t^{a+1} + t^{a+2}}{(\sin(t^a))^a} dt \approx \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{t^{a^2}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{a^2-a-1}}$, l'integrale è finito per $a < 2$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 3$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{3}\tan(3t^3 - 3)$.

8.



Prima parte, gruppo 3.

1. Il punto di minimo non esiste; il punto di massimo è $x = 1/2$.

2. $f(x) := \dfrac{\log(1+2x^5) - 2x^5}{(1+x^4)^4 - 1} \sim \dfrac{-2x^{10}}{4x^4} = -\dfrac{x^6}{2}$.

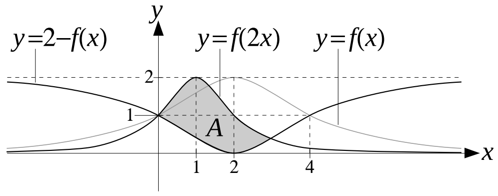
3. $F'(x) := 5x^4 \sin x$.

4. $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = \int_0^1 \sqrt{(-2t)^2 + (1-t^2)^2}\, dt = \int_0^1 t^2 + 1\, dt = \left|\frac{t^3}{3} + t\right|_0^1 = \frac{4}{3}$.

5. Poiché $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(1+t^a)^a}{3t^a + t^{4a+6}} dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{t^{a^2}}{t^{4a+6}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{-a^2+4a-6}}$, l'integrale è finito per $a < 5$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 1/4$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{2}\tan(2t^4 - 2)$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Il punto di minimo è $x = \exp(-1/2) = 1/\sqrt{e} \simeq 0{,}61$; il punto di massimo è $x = 2$.

2. $f(x) := \dfrac{(1-x^4)^8 - 1}{\log(1+x^3) - x^3} \sim \dfrac{-8x^4}{-x^6/2} = \dfrac{16}{x^2}$.

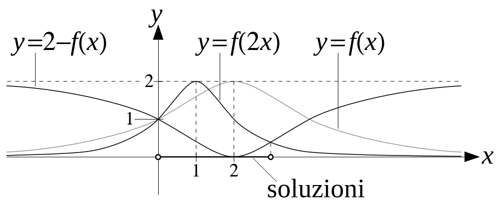
3. $F'(x) := 3x^2 e^x$.

4. $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = \int_0^1 \sqrt{(2t^2)^2 + (1-t^4)^2}\, dt = \int_0^1 t^4 + 1\, dt = \left|\frac{t^5}{5} + t\right|_0^1 = \frac{6}{5}$.

5. Poiché $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t^{a+1}}{(t^{2a} + t^a)^a} dt \approx \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{t^{a^2}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{a^2-a-1}}$, l'integrale è finito per $a < 2$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 2$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{3}\tan(3t^4 - 48)$.

8. 

Prima parte, gruppo 5.

1. Il punto di minimo è $x = 2$; il punto di massimo è $x = \exp(-1/3) = 1/\sqrt[3]{e} \simeq 0{,}72$.

2. $f(x) := \dfrac{\sqrt{1+x^3} - 1}{\sin(3x^4) - 3x^4} \sim \dfrac{x^3/2}{-\frac{9}{2}x^{12}} = -\dfrac{1}{9x^9}$.

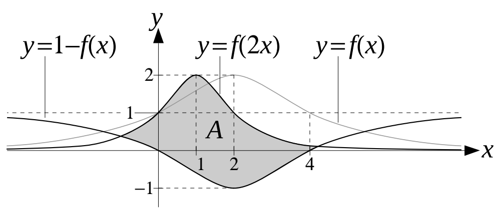
3. $F'(x) := 4x^3 \sin x$.

4. $d = \displaystyle\int_0^2 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = \int_0^2 \sqrt{(-2t^2)^2 + (t^4-1)^2}\, dt = \int_0^2 t^4 + 1\, dt = \left|\frac{t^5}{5} + t\right|_0^2 = \frac{42}{5}.$

5. Poiché $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{a+1} + t^{4a+4}}{(1+t^a)^a} dt \approx \int_1^{+\infty} \frac{t^{4a+4}}{t^{a^2}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a^2-4a-4}} dt,$ l'integrale è finito per $a > 5$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 1/3$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{2}\tan(2t^2 - 8)$.

8. 

Prima parte, gruppo 6.

1. Il punto di minimo è $x = 1/2$; il punto di massimo non esiste.

2. $f(x) := \dfrac{(1-x^8)^8 - 1}{\log(1+x^5) - x^5} \sim \dfrac{-8x^8}{-x^{10}/2} = \dfrac{16}{x^2}.$

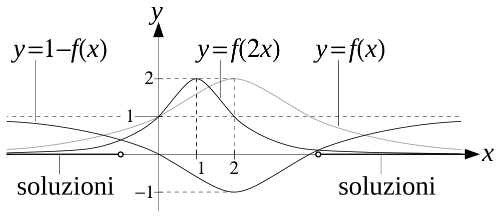
3. $F'(x) := 5x^4 e^x$.

4. $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = \int_0^1 \sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^1 t^2 + 1\, dt = \left|\frac{t^3}{3} + t\right|_0^1 = \frac{4}{3}.$

5. Poiché $\displaystyle\int_0^2 \frac{(t^{3a} + t^a)^a}{2t^{2a+4}} dt \approx \int_0^1 \frac{t^{a^2}}{t^{2a+4}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{-a^2+2a+4}},$ l'integrale è finito per $a > 3$.

6. Usando il criterio del rapporto (o della radice) si ottiene $R = 4$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{3}\tan(3t^2 - 12)$.

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 4a\lambda + 3a^2 - 2a - 1 = 0$, e per $a \neq -1$ ha due soluzioni reali e distinte $3a+1$ e $a-1$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
$$x_{\mathrm{om}}(t) = c_1 e^{(3a+1)t} + c_2 e^{(a-1)t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Poiché il coefficiente -2 nel termine noto non coincide con le soluzioni dell'equazione caratteristica per $a \neq -1$, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione (*) della forma $\tilde{x}(t) = be^{-2t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione otteniamo $b = 2/(a+1)^2$, e quindi

la soluzione dell'equazione (*) è

$$x(t) = c_1 e^{(3a+1)t} + c_2 e^{(a-1)t} + \frac{2e^{-2t}}{(a+1)^2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

b) Per $a = -1$ le soluzioni dell'equazione caratteristica sono entrambe uguali a -2, pertanto

$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

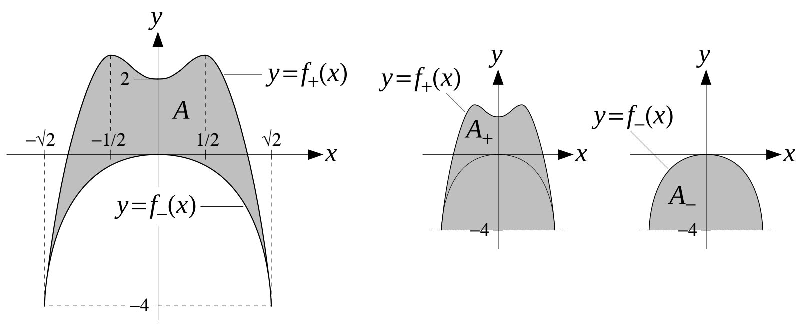
Inoltre il coefficiente -2 nel termine noto coincide con le soluzioni dell'equazione caratteristica, cerchiamo quindi una soluzione particolare dell'equazione (*) della forma $\tilde{x}(t) = bt^2 e^{-2t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione otteniamo $b = 3$, e quindi la soluzione dell'equazione (*) è

$$x(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t + 3t^2) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Concentriamoci prima sulla seconda condizione in (**), vale a dire che il limite della soluzione $x(t)$ per $t \to +\infty$ deve essere zero.
Il limite della soluzione particolare per $t \to +\infty$ è sempre zero. Il limite di $e^{(3a+1)t}$ è zero solo quando il coefficiente $3a+1$ è strettamente negativo, ed in tal caso il limite di $c_1 e^{(3a+1)t}$ è zero per ogni c_1, mentre in caso contrario il limite è zero solo quando $c_1 = 0$ (e un discorso analogo vale per il limite di $c_2 e^{(a-1)t}$).
Dobbiamo quindi distinguere diversi casi a seconda del segno dei coefficienti $3a+1$ e $a-1$.

- Se $a \geq 1$ allora $3a+1$ e $a-1$ sono entrambi positivi o nulli, e quindi la soluzione $x(t)$ data in (1) converge a 0 per $t \to +\infty$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$, ma per tali c_1, c_2 la condizione $x(0) = 0$ non è soddisfatta; pertanto non c'è alcuna soluzione di (*) che soddisfa le condizioni in (**).
- Se $-1/3 \leq a < 1$ allora il coefficiente $3a+1$ è positivo o nullo, mentre $a-1$ è negativo, e quindi $x(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$ se e solo se $c_1 = 0$, e in tal caso la condizione $x(0) = 0$ è soddisfatta per $c_2 = -2(a+1)^{-2}$; pertanto c' una ed una sola soluzione di (*) che soddisfa (**).
- Se $a < -1/3$ allora le soluzioni $3a+1$ e $a-1$ sono entrambe negative, e quindi $x(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$ per tutte le scelte di c_1, c_2; d'altra parte la condizione $x(0) = 0$ è soddisfatta per $c_2 = -c_1 - 2(a+1)^{-2}$; pertanto ci sono infinite soluzioni di (*) che soddisfano (**).

2. a) Il grafico di $f_-(x) := -x^4$ è noto. Per disegnare il grafico di $f_+(x) := 2 + x^2 - 2x^4$ osserviamo che si tratta di una funzione pari che tende a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre, studiando il segno della derivata $f'_+(x) = 2x(1 - 4x^2)$, otteniamo che $f_+(x)$ cresce per $x \leq -1/2$ e $0 \leq x \leq 1/2$, e decresce altrimenti.
Osserviamo infine che $f_-(x) \leq f_+(x)$ per $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.
Utilizzando quanto appena detto possiamo tracciare i grafici di f_- e f_+, e l'insieme A (nel disegno sotto le proporzioni non sono state rispettate).



b) Indico con A_- ed A_+ gli insieme dei punti (x, y) tali che $-4 \leq y \leq f_-(x)$ e $-4 \leq y \leq f_+(x)$, rispettivamente (vedere nella figura sopra), e con V_- e V_+ i solidi ottenuti ruotando tali insiemi attorno alla retta $y = -4$. Dunque A_+ è uguale all'unione di A_- e A, V_+ è uguale all'unione di V_- e V, e infine

$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_+) - \text{volume}(V_-)\,.$$

Per calcolare i volumi di V_+ e V_- li trasliamo verso l'alto di 4 lungo l'asse delle y, in modo da far coincidere l'asse di rotazione con l'asse delle x e poter utilizzare la solita formula per il

volume dei solidi di rotazione attorno all'asse x:

$$\begin{aligned}\text{volume}(V_+) &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (f_+(x)+4)^2\,dx \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 36 + 12\,x^2 - 23\,x^4 - 4x^6 + 4x^8\,dx \\ &= 2\pi \left| 36\,x + 4x^3 - \frac{23}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{4}{9}x^9 \right|_0^{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}\,\frac{17.728}{315} \simeq 250{,}04\,,\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\text{volume}(V_-) &= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (f_-(x)+4)^2\,dx \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 16 - 8x^4 + x^8\,dx \\ &= 2\pi \left| 16\,x - \frac{8}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9 \right|_0^{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}\,\frac{1.024}{45} \simeq 101{,}10\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_+) - \text{volume}(V_-) = \pi\sqrt{2}\,\frac{704}{21} \simeq 148{,}94\,.$$

3. a) Scriviamo $f(x)$ nella forma

$$f(x) := \exp(g(x)) - 1 \quad \text{con} \quad g(x) := -\frac{\log\big(\cos(2x)\big)}{x}\,.$$

Usando prima lo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ con $t = 2x$ e poi $\log(1+y) = y + O(y^2)$ con $y = -2x^2 + O(x^4)$ otteniamo

$$g(x) = -\frac{\log(1 - 2x^2 + O(x^4))}{x} = -\frac{(-2x^2 + O(x^4)) + O(x^4)}{x} = 2x + O(x^3)\,. \tag{2}$$

Infine, usando lo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t = 2x + O(x^3)$ otteniamo

$$\begin{aligned}f(x) &= \exp(2x + O(x^3)) - 1 \\ &= 1 + (2x + O(x^3)) + O(x^2) - 1 = 2x + O(x^2) \sim 2x\,.\end{aligned}$$

b) Per quanto visto al punto precedente,

$$f(x) + ax \sim (2+a)x \quad \text{per } a \neq -2.$$

Il caso $a = -2$ va trattato a parte. Ripartiamo dalla formula (2), usando stavolta lo sviluppo $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$ (sempre con $t = 2x + O(x^3)$):

$$\begin{aligned}f(x) &= \exp\big(2x + O(x^3)\big) - 1 \\ &= 1 + \big(2x + O(x^3)\big) + \frac{1}{2}\big(2x + O(x^3)\big)^2 + O(x^3) - 1 = 2x + 2x^2 + O(x^3)\,,\end{aligned}$$

e quindi

$$f(x) - 2x = 2x^2 + O(x^3) \sim 2x^2\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Analogo al gruppo 1: $x(t) = c_1 e^{(5a+2)t} + c_2 e^{(a-2)t} + \dfrac{2e^{-3t}}{(a+1)^2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Analogo al gruppo 1: $x(t) = e^{-3t}(c_1 + c_2 t + 5t^2)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c) Analogo al gruppo 1. Il numero di soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni in (**) è
- nessuna se $a \geq 2$;
- una se $-2/5 \leq a < 2$;
- infinite se $a < -2/5$.

2. a) Analogo al gruppo 1.
   b) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\text{volume}(V_+) = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (f_+(x)+9)^2\,dx = \pi\sqrt{3}\,\frac{8.256}{35} \simeq 1383{,}55\,,$$
$$\text{volume}(V_-) = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (f_-(x)+9)^2\,dx = \pi\sqrt{3}\,\frac{576}{5} \simeq 626{,}85\,,$$
   e pertanto
$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_+) - \text{volume}(V_-) = \pi\sqrt{2}\,\frac{4224}{35} \simeq 656{,}70\,.$$
3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Analogo al gruppo 1: $x(t) = c_1 e^{-(a+1)t} + c_2 e^{-(3a-1)t} + \dfrac{2e^{-2t}}{(a-1)^2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
   b) Uguale al gruppo 1.
   c) Analogo al gruppo 1. Il numero di soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni in (**) è
   - nessuna se $a \le -1$;
   - una se $-1 \le a \le 1/3$;
   - infinite se $a > 1/3$.
2. a) Analogo al gruppo 1.
   b) Uguale al gruppo 1.
3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Analogo al gruppo 1: $x(t) = c_1 e^{-(5a-2)t} + c_2 e^{-(a+2)t} + \dfrac{2e^{-3t}}{(a-1)^2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
   b) Uguale al gruppo 2.
   c) Analogo al gruppo 1. Il numero di soluzioni di (*) che soddisfano le condizioni in (**) è
   - nessuna se $a \le -2$;
   - una se $-2 \le a \le 2/5$;
   - infinite se $a > 2/5$.
2. a) Analogo al gruppo 1.
   b) Uguale al gruppo 2.
3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Prima parte, esercizio 6. molti dei presenti hanno applicato le formule per il calcolo del raggio di convergenza dimenticando inserendo i coefficienti invece dei valori assoluti dei coefficienti, ed hanno quindi ottenuto un risultato negativo. Questo è un errore grave, perché il raggio di convergenza non può essere negativo.

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti non si sono accorti che il discriminante dell'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è un quadrato perfetto, per cui non

può mai succedere che il discriminante sia negativo. In particolare diversi dei presenti hanno discusso il segno del discriminante ottenendo che è negativo per certi valori del parametro a.
Il fatto che il discriminante sia un quadrato perfetto implica inoltre che è possibile semplificare l'espressione delle radici dell'equazione caratteristica eliminando la radice quadrata, cosa che semplifica la discussione del punto c).

- Seconda parte, esercizio 1. Nessuno dei presenti ha risolto in modo chiaro il punto c).

- Seconda parte, esercizio 2. Un modo alternativo, e forse più chiaro, per impostare il calcolo del volume di V è utilizzare la formula per il calcolo del volume di un solido qualunque. Fissato un punto x sull'asse delle x, osserviamo che l'intersezione di V con il piano ortogonale all'asse delle x che passa per il punto x è una corona circolare con centro nel punto di coordinate $y = -4$ e $z = 0$ (sto facendo riferimento al gruppo 1), raggio esterno $R = R(x) = f_+(x) + 4$ e raggio interno $r = r(x) = f_-(x) + 4$. Pertanto l'area di questa corona circolare è
$$\begin{aligned} a(x) = \pi(R^2 - r^2) &= \pi\big((f_+(x)+4)^2 - (f_-(x)+4)^2\big) \\ &= \pi(20 + 12\,x^2 - 15\,x^4 - 4x^6 + 3x^8) \end{aligned}$$
e quindi il volume di V è
$$\text{volume}(V) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} a(x)\,dx = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 20 + 12\,x^2 - 15\,x^4 - 4x^6 + 3x^8\,dx = \dots$$

- Seconda parte, esercizio 2. Sorprendentemente pochi dei presenti hanno disegnato correttamente l'insieme A (in particolare la posizione di A rispetto all'asse di rotazione), e solo un paio hanno impostato correttamente il calcolo del volume di V.

- Seconda parte, esercizio 3. Nella soluzione data sopra, nel passare dallo sviluppo di f di grado 1 a quello di grado 2 viene aumentata la precisione dello sviluppo della funzione esponenziale, ma non dello sviluppo di g. Che questa procedura sia corretta può sembrare strano (ma i resti mostrano chiaramente che è corretta); in effetti tutto funziona perché $g(x)$ è una funzione pari e quindi il suo polinomio di Taylor grado due coincide con quello di grado uno...

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno risolto il punto a) come segue:
$$\big(\cos(2x)\big)^{-1/x} = (1 - 2x^2 + \cdots)^{-1/x} = 1 + (-1/x)(-2x^2) + \cdots = 1 + 2x + \cdots$$
In particolare nel secondo passaggio hanno utilizzato lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at + o(t)$ con $t = 2x^2$ e $a = -1/x$. Questo passaggio non è corretto perché in questo sviluppo a deve essere una costante, ed il fatto che il risultato sia giusto è un puro caso dovuto al fatto che nello sviluppo del coseno non appare il monomio di grado 1. Infatti utilizzando questo approccio per risolvere il punto b) (nel caso $a = -2$) si ottiene il risultato sbagliato.
Per chiarire ulteriormente il problema, osserviamo che utilizzando questo approccio per calcolare limite per $x \to 0$ di $(1+x)^{1/x}$ si ottiene
$$(1+x)^{1/x} = 1 + (1/x)x + o(x) = 2 + o(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2\,,$$
mentre com'è noto tale limite è e.

Prima parte, gruppo 1.

1. $\alpha = \pi/6$.

2. a) $\dfrac{8x^3}{(x^4+1)^2}$; b) $\dfrac{2x}{1+x^4}$; c) $[x(\log x - \log 2)]' = \log x + 1 - \log 2 = \log\left(\dfrac{ex}{2}\right)$.

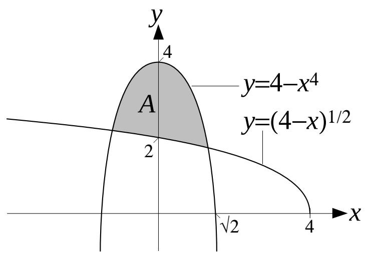
3. $c \ll d \ll b \ll a$.

4. $f(x) = 6x^3 - 35\,x^9 + O(x^{15})$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{\sqrt[a]{1+2x^4}}\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/a-1}}\,dx$, ed è quindi finito per $0 < a < 2$.

6. Il raggio di convergenza è 3 e la serie converge per $-3 < x < 3$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-2t}\sin t - 2e^{-2t}\cos t + 2$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. $\alpha = -\pi/6$.

2. a) $\dfrac{3x^2}{1+x^6}$; b) $\dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}$; c) $[x(\log 4 - 3\log x)]' = \log 4 - 3 - 3\log x = \log\left(\dfrac{4}{(ex)^3}\right)$.

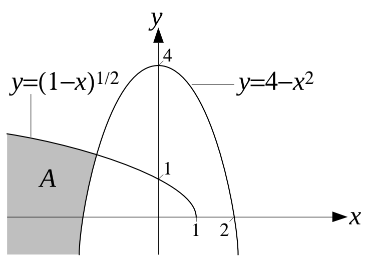
3. $b \ll a \ll d \ll c$.

4. $f(x) = 6x^2 - 37\,x^6 + O(x^{10})$.

5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+x}{\sqrt[a]{x^3+2x^4}}\,dx \approx \int_0^{1} \frac{dx}{x^{3/a}}$, ed è quindi finito per $a > 3$.

6. Il raggio di convergenza è 4 e la serie converge per $-4 < x < 4$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{2t}\sin t - e^{2t}\cos t + 1$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. $\alpha = \pi/3$.

2. a) $\dfrac{-8x^3}{(x^4-1)^2}$; b) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; c) $[x(\log 2 - \log x)]' = \log 2 - 1 - \log x = \log\left(\dfrac{2}{ex}\right)$.

3. $d \ll b \ll c \ll a$.

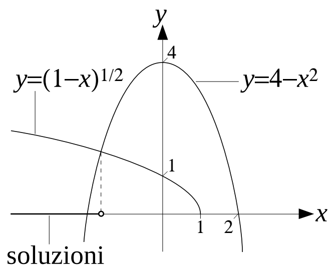
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^6 + O(x^9)$.

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt[a]{x^2+2x^3}}\,dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{2/a}}$, ed è quindi finito per $a > 2$.

6. Il raggio di convergenza è $1/2$ e la serie converge per $-1/2 < x < 1/2$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-t}\sin(2t) - 2e^{-t}\cos(2t) + 2$ con $c \in \mathbb{R}$.

8.



Prima parte, gruppo 4.

1. $\alpha = -\pi/4$.

2. a) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$; b) $\dfrac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$; c) $[x(3\log x - \log 4)]' = 3\log x + 3 - \log 4 = \log\left(\dfrac{(ex)^3}{4}\right)$.

3. $c \ll a \ll b \ll d$.

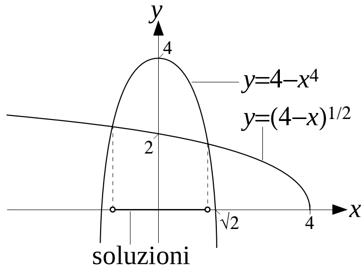
4. $f(x) = 2x^2 - x^4 + O(x^6)$.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{\sqrt[a]{1+2x^3}}\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/a-2}}\,dx$, ed è quindi finito per $0 < a < 1$.

6. Il raggio di convergenza è $1/3$ e la serie converge per $-1/3 < x < 1/3$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{t}\sin(2t) - e^{t}\cos(2t) + 1$ con $c \in \mathbb{R}$.

8.

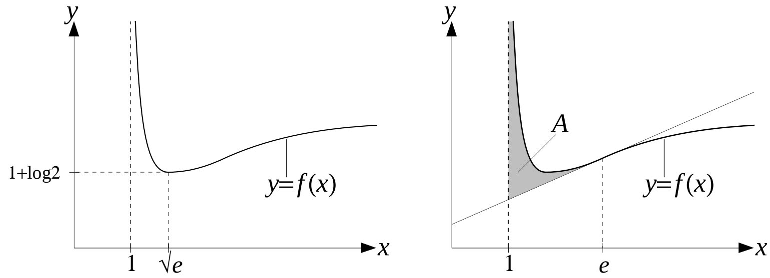


Seconda parte, gruppo 1.

1. a) La funzione $f(x)$ è ben definita e continua per ogni $x > 1$, e tende a $+\infty$ per $x \to 1^+$ e per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata prima

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x\log x} = \frac{2\log x - 1}{x\log x}$$

si ottiene che f è decrescente nell'intervallo $(1, \sqrt{e}]$ e crescente nell'intervallo $[\sqrt{e}, +\infty)$. In particolare $\sqrt{e}$ è il punto di minimo (assoluto) di f, mentre il valore minimo è $f(\sqrt{e}) = 1 + \log 2$ (da cui segue che f è sempre positiva).
Sulla base di questi dati e del fatto che f è asintoticamente equivalente a $2 \log x$ per $x \to +\infty$ si ricava il disegno del grafico di f riportato nella figura sotto, a sinistra.



b) La retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa t ha equazione

$$y = f'(t)(x - t) + f(t) ,$$

in particolare l'altezza h dell'intersezione con l'asse delle y si ottiene ponendo $x = 0$ e vale quindi

$$h := -f'(t)t + f(t) = -2 + \frac{1}{\log t} + 2 \log t - \log\log t .$$

Studiando il segno della derivata

$$h'(t) = -\frac{1}{t \log^2 t} + \frac{2}{t} - \frac{1}{t \log t} = \frac{2 \log^2 t - \log t - 1}{t \log^2 t}$$

si ottiene che il punto di minimo assoluto di h è $t = e$, e la retta cercata è quindi quella di equazione

$$y = \frac{x}{e} + 1 .$$

c) L'insieme A è quello disegnato nella figura sopra, a destra, e l'area è data da

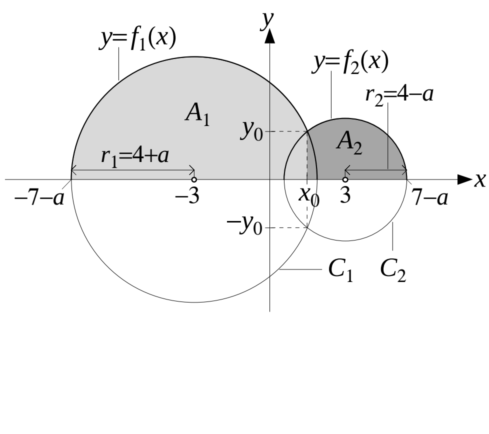
$$\text{area}(A) = \int_1^e f(x) - \frac{x}{e} - 1 \, dx = \int_1^e 2 \log x - \log\log x - \frac{x}{e} - 1 \, dx .$$

Questo integrale è improprio in 1, e siccome la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $\log\log x$ per $x \to 1^+$ (le altre funzioni sono definite e continue in 1), basta determinare il comportamento del seguente integrale improprio, che studiamo utilizzando il cambio di variabile $y = \log x$:

$$\int_1^e -\log\log x \, dx = \int_0^1 -\frac{\log y}{e^y} \, dy \approx \int_0^1 -\log y \, dy = \Big| y(1 - \log y) \Big|_0^1 = 1 .$$

Dunque l'area di A è finita.

2. Ponendo $a = 0$ nel punto b) si ottiene il punto a) come caso particolare. Ci limitiamo dunque a risolvere il punto b).
Il solido V è dato dall'unione dei due pezzi di sfera V_1 e V_2 ottenuti facendo ruotare attorno all'asse x gli insiemi A_1 e A_2 nella figura sottostante.



Tenuto conto che le equazioni delle circonferenze C_1 e C_2 sono rispettivamente

$$(x+3)^2 + y^2 = r_1^2 = (4+a)^2\,, \quad (x-3)^2 + y^2 = r_2^2 = (4-a)^2\,, \tag{1}$$

le corrispondenti semicirconferenze superiori corrispondono ai grafici delle funzioni

$$f_1(x) := \sqrt{(4+a)^2 - (x+3)^2}\,, \quad f_2(x) := \sqrt{(4-a)^2 - (x-3)^2}\,,$$

mentre i punti di intersezione delle due circonferenze $(x_0, \pm y_0)$ sono ottenuti risolvendo il sistema di equazioni (1):

$$x_0 = \frac{4a}{3}\,, \quad y_0 = \sqrt{\frac{7}{9}(9-a^2)}\,. \tag{2}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V) &= \text{volume}(V_1) + \text{volume}(V_2)\\
&= \pi \int_{-3-r_1}^{x_0} f_1^2(x)\,dx + \pi \int_{x_0}^{3+r_2} f_2^2(x)\,dx\\
&= \pi \int_{-7-a}^{4a/3} (4+a)^2 - (x+3)^2\,dx + \pi \int_{4a/3}^{7-a} (4-a)^2 - (x-3)^2\,dx\\
&= \frac{98\,\pi}{3}(5+a^2)
\end{aligned}$$

Osserviamo infine che per $a > 3$ le due circonferenze non si intersecano (l'argomento della radice nella formula (2) è negativo e quindi y_0 non è un numero reale) mentre per $a = 3$ si intersecano in un solo punto (perché $y_0 = 0$): il fatto è che in questi casi la circonferenza C_1 contiene C_2 e quindi, contrariamente a quando mostrato nella figura sopra, V coincide con la sfera più grande, vale a dire quella di raggio $r_1 = 4 + a$, e di conseguenza volume$(V) = \frac{4\pi}{3}(4+a)^3$.

Riassumendo, le risposte sono:

a) volume$(V) = \dfrac{490\,\pi}{3}$.

b) volume$(V) = \dfrac{98\,\pi}{3}(5+a^2)$ se $0 \le a < 3$ e volume$(V) = \dfrac{4\pi}{3}(4+a)^3$ se $3 \le a \le 4$.

3. a) Il raggio di convergenza lo calcoliamo usando il criterio del rapporto:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}((n+1)^2 - (n+1))}{2^n(n^2-n)} = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{n^2+n}{n^2-n} = 2\,.$$

Pertanto il teorema sulle serie di potenze ci dice che la serie converge ad un numero finito per ogni x tale che $|x| < 2$, e non converge ad un numero finito quando $|x| > 2$.

Entrando più in dettaglio si vede che per $x > 2$ l'addendo generico della serie tende a $+\infty$ e quindi la serie diverge a $+\infty$, mentre per $x < -2$ l'addendo generico della serie tende a $+\infty$ in valore assoluto, alternando segno positivo e negativo; questo suggerisce (ma non dimostra) che in questo caso la serie non converge e non diverge.

Restano da considerare i casi esclusi dal teorema sulle serie di potenze, vale a dire $x = \pm 2$. Per $x = 2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n} \tag{3}$$

che ha termini positivi e converge ad un numero finito per confronto asintotico con la serie $\sum 1/n^2$. Invece per $x = -2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^2}{n^2 - n}$$

che ha termini a segno variabile e converge ad un numero finito per il criterio della convergenza assoluta (infatti la serie dei valori assoluti, che è quella in (3), converge).

b) Nell'intervallo $(-2,2)$ la funzione f è derivabile infinite volte, e le derivate di qualunque ordine possono essere ottenute derivando la serie termine a termine. In particolare

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{x^n}{2^n(n^2-n)}\right]'' \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{n-2} = \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{+\infty} \Big(\frac{x}{2}\Big)^{m} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x/2} \end{aligned}$$

(nel quarto passaggio abbiamo utilizzato il cambio di indice $m = n-2$). Pertanto

$$f'(x) = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1-x/2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\log y + c = -\frac{1}{2}\log(1-x/2) + c$$

(nel secondo e quarto passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $y = 1 - x/2$). Per determinare il valore della costante c ci basta trovare il valore di f' in un punto; in effetti partendo dall'identità

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{x^n}{2^n(n^2-n)}\right]' = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n(n-1)}$$

si ottiene che $f'(0) = 0$, da cui segue che $c = 0$ e

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\log(1-x/2)\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f(x) = -\frac{1}{2}\int \log(1-x/2)\,dx = \int \log y\,dy &= y\log y - y + c \\ &= (1-x/2)\log(1-x/2) + x/2 - 1 + c \end{aligned}$$

(nel secondo e quarto passaggio abbiamo nuovamente usato il cambio di variabile $y = 1 - x/2$). Utilizzando il fatto che $f(0) = 0$ otteniamo $c = 1$ e infine

$$f(x) = (1-x/2)\log(1-x/2) + x/2\,.$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.

   a) A differenza del gruppo 1 il punto di minimo è $\sqrt[6]{e}$, ed il valore minimo è $f(\sqrt[6]{e}) = 1 + \log 6$.

   b) La retta cercata è quella tangente al grafico di f nel punto di ascissa $\sqrt{e}$, ed ha equazione $y = 4x/\sqrt{e} + \log 2 - 1$.

   c) Come per il gruppo 1, l'area di A è finita.

2. Analogo al gruppo 1.

   a) $\text{volume}(V) = \dfrac{245\,\pi}{12}$.

   b) $\text{volume}(V) = \dfrac{49\pi}{12}(5+4a^2)$ se $0 \le a < 3/2$ e $\text{volume}(V) = \dfrac{4\pi}{3}(2+a)^3$ se $3/2 \le a \le 2$.

3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Prima parte, esercizio 6. Per rispondere a questa domanda basta calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze in questione e applicare il teorema visto a lezione. Solo pochissimi dei presenti lo hanno fatto.

- Seconda parte, esercizio 1a). Tutti i presenti hanno disegnato il grafico della funzione f come se fosse sempre convessa, cosa che invece non è. Per accorgersene non era necessario studiare

la concavità della funzione, ma bastava osservare che f è asintoticamente equivalente a $2\log x$ per $x \to +\infty$ (mi riferisco al gruppo 1).

- Seconda parte, esercizio 1b). Se si disegna il grafico di f tenendo conto anche della concavità e convessità, di vede che la funzione è convessa per $x \leq e$ e concava per $x \geq e$ (mi riferisco al gruppo 1), e ci si rende conto che la retta cercata è quella tangente al grafico nell'unico punto di flesso di f, vale a dire $x = e$.

- Seconda parte, esercizio 2. Il punto a) è decisamente più semplice del punto b). Infatti le due sfere hanno lo stesso raggio, e quindi, impostando la risoluzione come sopra (mi riferisco al gruppo 1), si vede subito che $x_0 = 0$ e che il volume di V è pari al doppio di quello del pezzo di sfera ottenuto ruotando attorno all'asse delle x l'insieme A delimitato dagli assi e dal grafico della funzione $f_2(x) = \sqrt{4^2 - (3-x)^2}$. Dunque
$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^7 4^2 - (3-x)^2 \, dx = \frac{490\,\pi}{3} \,.$$

- Seconda parte, esercizio 2. Nessuno dei presenti ha impostato correttamente il punto a) di questo esercizio, e tanto meno il punto b).

Prima parte, gruppo 1.

1. a) $\rho = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -3\pi/4$, b) $\rho = 3$, $\alpha = -\pi/2$, c) $\rho = 2$, $\alpha = -\pi/3$.

2. Affinché f sia convessa la derivata seconda $f''(x) := 12\,x^2 + 6ax + 12$ deve essere positiva, cosa che si verifica quando il discriminante di questo polinomio di secondo grado è negativo o nullo. Pertanto $-4 \le a \le 4$.

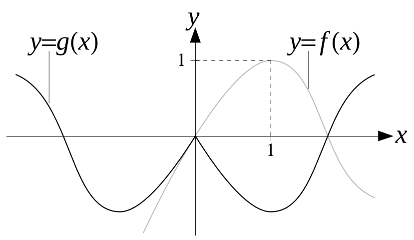
3. a) $-1/6$; b) $-\infty$; c) $+\infty$.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = -x^2$ si ottiene
$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^y\,dy = \frac{1}{2}\Big|e^y\Big|_{-1}^{0} = \frac{e-1}{2e}\,.$$

5. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = 2e^2$.

6. Equazione a variabili separabili. Si arriva a $\sqrt{x} = \sin(2t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$; calcolando la costante c per cui è verificata la condizione iniziale si ottiene $x(t) = (\sin(2t) + 2)^2$.

7. $f'(x) := \dfrac{1}{(\cos x)^{15}}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. a) $\rho = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 2\pi/3$, b) $\rho = 3\sqrt{2}$, $\alpha = -3\pi/4$, c) $\rho = 2$, $\alpha = -\pi/2$.

2. Affinché f sia convessa la derivata seconda $f''(x) := 12\,x^2 + 24\,x + 2a$ deve essere positiva, cosa che si verifica quando il discriminante di questo polinomio di secondo grado è negativo o nullo. Pertanto $a \ge 6$.

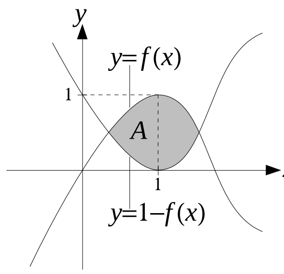
3. a) $-\infty$; b) 0; c) -2.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + c\,.$$

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2/3)^n = \frac{2}{1-2/3} = 6$.

6. Equazione a variabili separabili. Si arriva a $\sqrt{x} = \sin(2t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$; calcolando la costante c per cui è verificata la condizione iniziale si ottiene $x(t) = (\sin(2t) + 1)^2$.

7. $f'(x) := -\dfrac{1}{(\sin x)^{11}}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $\rho = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -3\pi/4$, b) $\rho = 3$, $\alpha = \pi$, c) $\rho = 2$, $\alpha = -\pi/6$.

2. Affinché f sia convessa la derivata seconda $f''(x) := 12\,x^2 + 6ax - 12$ deve essere positiva, cosa che si verifica quando il discriminante di questo polinomio di secondo grado è negativo o nullo. Pertanto nessun a va bene.

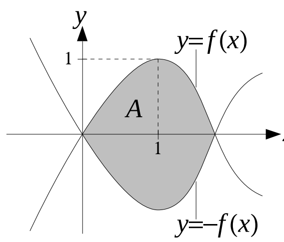
3. a) 0; b) -6; c) non esiste.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -\Big|xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{1}{e} - \Big|e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}\,.$$

5. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = 3e^3$.

6. Equazione a variabili separabili. Si arriva a $\sqrt{x} = -\cos(3t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$; calcolando la costante c per cui è verificata la condizione iniziale si ottiene $x(t) = (-\cos(3t) + 3)^2$.

7. $f'(x) := \dfrac{1}{(\cos x)^{11}}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $\rho = 2\sqrt{3}$, $\alpha = -\pi/6$, b) $\rho = 3\sqrt{2}$, $\alpha = -3\pi/4$, c) $\rho = 2$, $\alpha = \pi$.

2. Affinché f sia convessa la derivata seconda $f''(x) := 12\,x^2 - 24\,x + 2a$ deve essere positiva, cosa che si verifica quando il discriminante di questo polinomio di secondo grado è negativo o nullo. Pertanto $a \geq 6$.

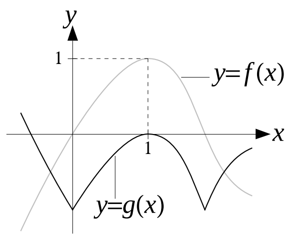
3. a) $-1/2$; b) 0; c) non esiste.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = -x^2$ si ottiene
$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^y\,dy = -\frac{e^y}{2} + c = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c\,.$$

5. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1/2^3)^n = \frac{1}{2(1-1/8)} = \frac{4}{7}$.

6. Equazione a variabili separabili. Si arriva a $\sqrt{x} = -\cos(3t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$; calcolando la costante c per cui è verificata la condizione iniziale si ottiene $x(t) = (-\cos(3t) + 2)^2$.

7. $f'(x) := -\dfrac{1}{(\sin x)^{15}}$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Ricordo che la soluzione generale dell'equazione (*) si ottiene sommando la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + 4x = 0$ a una soluzione particolare dell'equazione non omogenea
$$\ddot{x} + 4x = 8t^2\,, \tag{1}$$
e a una soluzione particolare x_2 dell'equazione non omogenea
$$\ddot{x} + 4x = \sin(at)\,. \tag{2}$$
L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 + 4 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
$$x_{\mathrm{om}}(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.\,. \tag{3}$$
Cerchiamo ora una soluzione particolare x_1 della (1). Siccome il termine noto è un polinomio di secondo grado, cerchiamo x_1 tra i polinomi di secondi grado, vale a dire $x_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Sostituendo questa espressione nell'equazione di partenza arriviamo all'identità
$$4a_2t^2 + 4a_1t + 4a_0 + 2a_2 = 8t^2\,,$$
che è verificata (per ogni t) se $a_2 = 2$, $a_1 = 0$ e $a_0 = -1$. La soluzione particolare cercata è dunque
$$x_1(t) = 2t^2 - 1\,. \tag{4}$$
Cerchiamo infine una soluzione particolare x_2 della (2), trattando separatamente i casi a) $a \neq 2$ con $a > 0$, e b) $a = 2$ (come suggerito nel testo).

a) Se $a \neq 2$ e $a > 0$ cerchiamo x_2 della forma $x_2(t) = b_1\cos(at) + b_2\sin(at)$. Sostituendo questa espressione nell'equazione di partenza otteniamo l'identità
$$b_1(4-a^2)\cos(at) + b_2(4-a^2)\sin(at) = \sin(at)$$
che è verificata (per ogni t) se $b_1 = 0$ e $b_2 = 1/(4-a^2)$. La soluzione cercata è dunque
$$x_2(t) = \frac{\sin(at)}{4-a^2}\,. \tag{5}$$
Pertanto la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + 2t^2 - 1 + \frac{\sin(at)}{4-a^2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
b) Per $a = 2$ non esistono soluzioni della (2) della forma considerata al punto a), perché tutte le funzioni di questa forma sono soluzioni dell'equazione omogenea (e infatti la formula (5) non ha senso per $a = 2$). Dobbiamo invece cercare x_2 della forma $x_2(t) = b_1 t\cos(at) + b_2 t\sin(at)$, e sostituendo questa espressione nell'equazione di partenza otteniamo l'identità
$$-4b_1\sin(2t) + 4b_2\cos(2t) = \sin(2t)$$

che è verificata (per ogni t) se $b_1 = -1/4$ e $b_2 = 0$. La soluzione cercata è dunque

$$x_2(t) = -\frac{t\cos(2t)}{4}\,. \tag{6}$$

Pertanto la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + 2t^2 - 1 - \frac{t\cos(2t)}{4} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Osserviamo per cominciare che la base della funzione integranda $(e^x - e^2)^{2-a}$ è strettamente positiva per $x > 2$, ma si annulla per $x = 2$. Pertanto tale integranda è una funzione ben definita e continua per $x > 2$, ma se l'esponente $2 - a$ è negativo non è definita per $x = 2$. Questo significa che l'integrale in questione è improprio (semplice) in $+\infty$ se $a < 2$ (caso I), mentre è improprio sia in 2 che in $+\infty$ quando $a \geq 2$ (caso II). Inoltre, essendo l'integranda positiva, l'integrale improprio esiste sempre, e si tratta solo di vedere quando è finito e quando no.

   Caso I: $a < 2$. Poiché $(e^x - e^2)^{2-a} \sim e^{(2-a)x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, abbiamo che l'integrale improprio vale $+\infty$.

   Caso II: $a \geq 2$. Spezziamo l'integrale come somma di due integrali impropri semplici:

$$\int_2^{+\infty} (e^x - e^2)^{2-a} dx = \int_2^3 (e^x - e^2)^{2-a} dx + \int_3^{+\infty} (e^x - e^2)^{2-a} dx\,.$$

   Riguardo al secondo dei due integrali a destra dell'uguale, osserviamo che $(e^x - e^2)^{2-a} \sim e^{(2-a)x}$ per $x \to +\infty$, e dunque tale integrale è finito se e solo se $2 - a < 0$, ovvero $a > 2$.

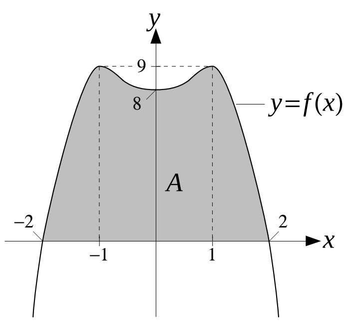
   Esaminiamo ora il primo integrale a destra dell'uguale: usando il cambio di variabile $x = 2+y$ otteniamo

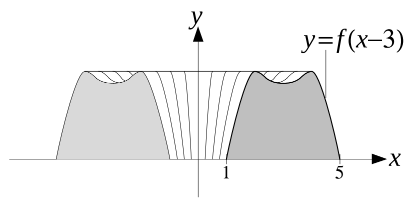
$$\begin{aligned}\int_2^3 (e^x - e^2)^{2-a} dx &= \int_0^1 (e^{2+y} - e^2)^{2-a} dy \\ &= e^{2(2-a)} \int_0^1 (e^y - 1)^{2-a} dy \approx \int_0^1 y^{2-a} dy\end{aligned}$$

   e quest'ultimo integrale è finito se e solo se $2 - a > -1$, vale a dire $a < 3$ (nel secondo passaggio abbiamo raccolto e^2 nella base, nel terzo abbiamo usato che $e^y - 1 \sim y$ per $y \to 0$).

   Concludendo, l'integrale di partenza è finito se e solo se $2 < a < 3$, altrimenti vale $+\infty$.

3. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, pari, positiva per $-2 \leq x \leq 2$ e negativa altrimenti, e tende a ∞ per $x \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata prima $f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2)$ si ottiene che la funzione cresce negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $[0, 1]$ e decresce in $[-1, 0]$ e $[1, +\infty)$. In particulare ± 1 sono i punti di massimo assoluto, mentre 0 è un punto di minimo relativo. Utilizzando queste informazioni otteniamo il disegno di A riportato qui sotto a sinistra.





   b) Per calcolare il volume di V, trasliamo questo solido verso destra di 3, in modo da far coincidere l'asse di rotazione con l'asse delle y ed applicare la formula vista a lezione. Così facendo V diventa il solido ottenuto facendo ruotare attorno all'asse delle y la figura piana delimitata dall'asse delle x e il grafico della funzione $f(x - 3)$ (vedere la figura sopra, a destra),

ed il volume è dato da

$$\begin{aligned}\text{volume}(V) &= \int_1^5 2\pi y\, f(x-3)\, dx \\ &= \int_{-2}^2 2\pi(t+3)\, f(t)\, dt \\ &= 2\pi \int_{-2}^2 24 + 8t + 6t^2 + 2t^3 - 3t^4 - t^5\, dt \\ &= 2\pi \left| 24t + 4t^2 + 2t^3 + \frac{t^4}{2} - \frac{3t^5}{5} - \frac{t^6}{6} \right|_{-2}^{2} = \frac{896\,\pi}{5} \simeq 562{,}97\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $t = x - 3$).

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.

   a) $x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - 2t^2 + 1 + \dfrac{\cos(at)}{4 - a^2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   b) $x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - 2t^2 + 1 + \dfrac{t \sin(2t)}{4}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Analogo al gruppo 1. L'integrale esiste sempre, ed è improprio (semplice) in $+\infty$ se $a > -2$, mentre è improprio (non semplice) in 2 e $+\infty$ se $a \le -2$. Infine l'integrale è finito se e solo se $-3 < a < -2$.

3. a) Uguale al gruppo 1.

   b) Analogo al gruppo 1:

$$\text{volume}(V) = \int_2^6 2\pi x\, f(x-4)\, dx = 2\pi \int_{-2}^2 (t+4)\, f(t)\, dt = \frac{3584\,\pi}{15} \simeq 750{,}63\,.$$

Commenti

- Prima parte, esercizio 1. La quasi totalità dei presenti ha sbagliato questo esercizio perché ha utilizzato sistematicamente la formula $\alpha = \arctan(y/x)$ per calcolare la coordinata angolare del punto di coordinate cartesiane (x, y). In realtà tale formula vale solo se il punto (x, y) appartiene al primo e quarto quadrante e va opportunamente modificata negli altri casi.

- Prima parte, esercizio 6. Diversi dei presenti hanno fatto il seguente errore (mi riferisco qui al gruppo 1, ma un discorso analogo vale per il gruppo 2): arrivati all'equazione

$$\sqrt{x} = \sin(2t) + c\,, \tag{7}$$

  sono andati avanti elevandola al quadrato e ottenendo $x = (\sin(2t)+c)^2$, e poi hanno imposto la condizione iniziale $x(0) = 4$ ottenendo $c^2 = 4$, ovvero $c = \pm 2$. Il problema è che solo per $c = 2$ si ottiene una soluzione del problema di partenza, non per $c = -2$ come si vede chiaramente dalla (7). Il punto è che elevando al quadrato una qualunque equazione si ottiene una nuova equazione che ha piú soluzioni di quella di partenza.

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno cercato la soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} + 4x = 8t^2$ (mi riferisco al gruppo 1) tra le funzioni del tipo $x = at^2$, dove è una *costante*, invece che tra tutti i polinomi di grado 2. Sostituendo questa espressione nell'equazione si ottiene

$$2a + 4at^2 = 8t^2$$

  e a questo punto l'unica conclusione corretta è che non esiste alcuna costante a per cui questa identità è valida per ogni t. Invece molti sono arrivati alla conclusione che $a = 8t^2/(2 + 4t^2)$. Questo è un errore grave, perché nell'impostare la risoluzione si parte dall'ipotesi che a sia una

costante e non una funzione (altrimenti si avrebbe $\ddot{x} = \ddot{a}t^2 + 4\dot{a}t + 2a$ e non semplicemente $\ddot{x} = 2a$).

- Seconda parte esercizio 3. Sorprendentemente, quasi nessuno dei presenti ha impostato correttamente l'integrale per il calcolo del volume di V

Prima parte, gruppo 1.

1. La funzione f è sempre continua per $x \neq 3$, e affinché sia continua in $x = 3$ i valori delle due funzioni che definiscono f devono coincidere. Questo porta all'equazione $9a + b = 3a - b$ che è risolta per $b = -3a$ (o equivalentemente per $a = -b/3$).

2. All'interno dell'intervallo considerato la derivata di f si annulla in $x = \pm 1$ e confrontando il valore di f in questi punti con quelli agli estremi dell'intervallo si ottiene che i punti di minimo sono $-2, 1$ e non esistono punti di massimo.

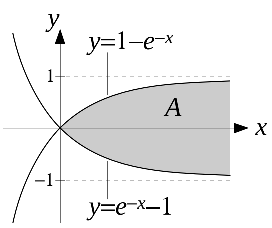
3. a) 0; b) $-\infty$; c) 2.

4. $f(x) := -6x^2 + 2x^6 + O(x^{10})$.

5. Il modulo della velocità è $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3t^2 + 3$ e la distanza è $L = 14$.

6. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a-3}}$ e quindi converge per $a > 2$.

7. La funzione data risolve l'equazione per $a = 3, b = -2$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. La funzione f è sempre continua per $x \neq 2$, e affinché sia continua in $x = 2$ i valori delle due funzioni che definiscono f devono coincidere. Questo porta all'equazione $4a + b = 2a - b$ che è risolta per $b = -a$ (o equivalentemente per $a = -b$).

2. All'interno dell'intervallo considerato la derivata di f si annulla in $x = \pm 1$ e confrontando il valore di f in questi punti con quelli agli estremi dell'intervallo si ottiene che non esistono punti di minimo e i punti di massimo sono $-1, 2$.

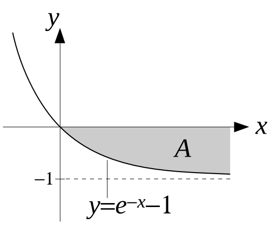
3. a) 0; b) $-\infty$; c) 0.

4. $f(x) := -2x^3 + 2x^6 + O(x^9)$.

5. Il modulo della velocità è $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3t^2 + 3$ e la distanza è $L = 14$.

6. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a-2}}$ e quindi converge per $a > 3/2$.

7. La funzione data risolve l'equazione per $a = 3, b = 2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. La funzione f è sempre continua per $x \neq -1$, e affinché sia continua in $x = -1$ i valori delle due funzioni che definiscono f devono coincidere. Questo porta all'equazione $a + b = -a - b$ che è risolta per $b = -a$ (o equivalentemente per $a = -b$).

2. All'interno dell'intervallo considerato la derivata di f si annulla in $x = -2$ e confrontando il valore di f in questo punto con quelli agli estremi dell'intervallo si ottiene che il punto di minimo è 1 e il punto di massimo è -2.

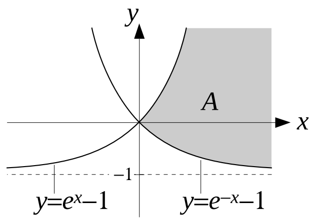
3. a) $-\infty$; b) 2; c) $-\infty$.

4. $f(x) := -6x + 6x^3 + O(x^5)$.

5. Il modulo della velocità è $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3t^2 + 3$ e la distanza è $L = 4$.

6. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3-3a}}$ e quindi converge per $a < 2/3$.

7. La funzione data risolve l'equazione per $a = 2, b = 2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. La funzione f è sempre continua per $x \neq -2$, e affinché sia continua in $x = -2$ i valori delle due funzioni che definiscono f devono coincidere. Questo porta all'equazione $4a + b = -2a - b$ che è risolta per $b = -3a$ (o equivalentemente per $a = -b/3$).

2. All'interno dell'intervallo considerato la derivata di f si annulla in $x = 2$ e confrontando il valore di f in questo punto con quelli agli estremi dell'intervallo si ottiene che il punto di minimo è 2 e il punto di massimo è -1.

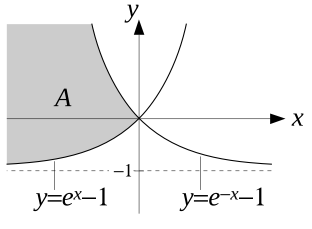
3. a) $\cos 2$; b) $+\infty$; c) 0.

4. $f(x) := -4x^2 + 3x^4 + O(x^6)$.

5. Il modulo della velocità è $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 3t^2 + 3$ e la distanza è $L = 4$.

6. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-3a}}$ e quindi converge per $a < 1/3$.

7. La funzione data risolve l'equazione per $a = 2, b = -2$.

8. 

Seconda parte.

1. Comincio dal punto b), la cui soluzione dà anche la soluzione del punto a).

   b) Riscrivo la disuguaglianza di partenza $x^2 + \frac{1}{2} \le ae^{x^2}$ come
$$f(x) := e^{-x^2}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \le a\,.$$
   È quindi evidente che i valori di a per cui questa disuguaglianza è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$ sono tutti e soli quelli per cui
$$a \ge m \quad \text{dove} \quad m := \max_{x\in\mathbb{R}} f(x)\,.$$
   (Se il massimo di f non esiste va sostituito con l'estremo superiore dei valori di f).

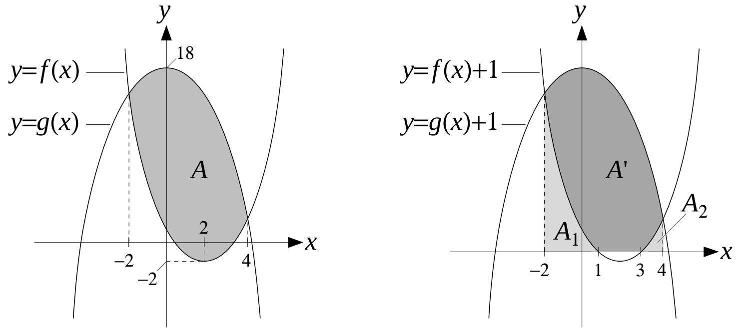
   Si tratta dunque di calcolare m. Per farlo osserviamo che la funzione f è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, sempre positiva, *pari*, e converge a 0 per $x \to \pm\infty$. Inoltre, studiando il segno della derivata
$$f'(x) := e^{-x^2}x(1 - 2x^2)$$
   otteniamo che i punti di massimo *assoluti* di f sono $x = \pm 1/\sqrt{2}$, e quindi
$$m = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0{,}6065\ldots$$
   a) Siccome $3/5 = 0{,}6 < m$, la disequazione considerata non è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Raccogliendo x^4 sia al numeratore che al denominatore del rapporto che appare nella definizione di $f(x)$, e usando quindi le proprietà del logaritmo, otteniamo che
$$f(x) := \log\left(\frac{x^4+4}{x^4+1}\right) = \log\left(\frac{1+4/x^4}{1+1/x^4}\right) = \log\left(1+\frac{4}{x^4}\right) - \log\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\,. \tag{1}$$
   Osserviamo che questo modo di scrivere f risulta essere particolarmente conveniente nel momento in cui cerchiamo la parte principale per $x \to +\infty$.

   a) Usando la (1) e lo sviluppo $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, otteniamo che, per $x \to +\infty$,
$$f(x) = \left[\frac{4}{x^4} + o\left(\frac{4}{x^4}\right)\right] - \left[\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right] = \frac{3}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim \frac{3}{x^4}\,.$$
   b) Partendo dal punto a), otteniamo che per $a \ne -3$ e per $x \to +\infty$,
$$f(x) + \frac{a}{x^4} \sim \frac{3+a}{x^4}\,.$$
   Per $a = -3$ dobbiamo utilizzare invece uno sviluppo più preciso di f. Procediamo come al punto a), utilizzando tuttavia lo sviluppo $\log(1+t) = t - t^2/2 + o(t^2)$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{4}{x^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x^4}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^8}\right)\right] - \left[\frac{1}{x^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^4}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^8}\right)\right] \\ &= \frac{3}{x^4} - \frac{15}{2x^8} + o\left(\frac{1}{x^8}\right)\,, \end{aligned}$$
   da cui segue che
$$f(x) - \frac{3}{x^4} \sim -\frac{15}{2x^8}\,.$$

3. a) I grafici delle funzioni $f(x) := x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$ e $g(x) := 18 - x^2$ sono due parabole; possiamo quindi disegnarne i grafici senza bisogno di studiarle, e cos facendo otteniamo il disegno dell'insieme A riportato nella figura sotto a sinistra (al fine di ottenere una rappresentazione più chiara, la figura è stata disegnata senza rispettare i rapporti tra le distanze). I punti di intersezione dei due grafici quelli le cui ascisse soddisfano l'equazione $f(x) = g(x)$, vale a dire $x = -2, 4$, e quindi
$$\text{area}(A) = \int_{-2}^{4} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-2}^{4} 16 - 4x - 2x^2\,dx = 72\,.$$

b) Per portare l'asse di rotazione a coincidere con l'asse delle x sposto verso l'alto di 1 entrambi i grafici, vale a dire che considero le funzioni $f+1$ e $g+1$ invece di f e g. Osservo quindi che la funzione $f+1$ interseca l'asse delle x per $x = 1, 3$.



Considero quindi gli insiemi A', A_1 ed A_2 dati nella figura sopra a destra, e indico con A_0 l'unione di questo tre insiemi, e con con V', V_0, V_1 e V_2 i solidi ottenuti per rotazione attorno all'asse delle x. Osservo ora che V ha lo stesso volume di V', che quest'ultimo insieme lo si ottiene sottraendo V_1 e V_2 da V_0, e che ciascuno di questi tre solidi è dato dalla rotazione del sottografico di una funzione positiva attorno all'asse delle x e quindi il suo volume può essere calcolato direttamente con la formula vista a lezione. Pertanto

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V) &= \text{volume}(V') \\
&= \text{volume}(V_0) - \text{volume}(V_1) - \text{volume}(V_2) \\
&= \pi \int_{-2}^{4} (g(x)+1)^2\, dx - \pi \int_{-2}^{1} (f(x)+1)^2\, dx - \pi \int_{3}^{4} (f(x)+1)^2\, dx \\
&= \frac{\pi \cdot 19 \cdot 2^{10}}{15} = \frac{\pi \cdot 19.456}{15} = 4074{,}85\ldots
\end{aligned}$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2. Una via alternativa consiste nello scrivere f nella forma
$$f(x) := \log\left(\frac{x^4+4}{x^4+1}\right) = \log\left(1 + \frac{3}{1+x^4}\right)$$
e poi utilizzare lo sviluppo di $\log(1+t)$ per $t \to 0$ con $t := 3/(1+x^4)$. Diversi dei presenti hanno adottato questo approccio, ma tra questi molti hanno fatto un errore che può essere schematizzato come segue: al momento di ritornare alla variabile x, hanno sostituito t con $3/x^4$ invece che $3/(1+x^4)$: questo va bene per trovare la parte principale di f, ma non per trovare lo sviluppo più preciso che serve a risolvere il punto b) dell'esercizio.

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno impostato correttamente il calcolo dell'area di A, ma quasi nessuno ha impostato correttamente il calcolo del volume di V.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. $y = 2x - 3$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -1/2$, il punto di massimo assoluto è $x = 0$.

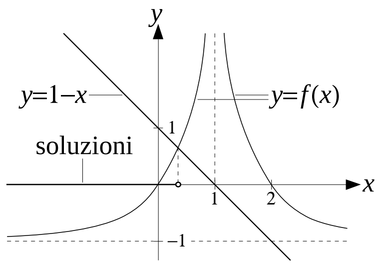
3. $f(x) \sim -\dfrac{2}{3x^2}$.

4. Integriamo per parti: $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx = x \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int 1 \cdot \frac{e^{ax}}{a}\,dx = e^{ax}\left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right] + c$.

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2+x^2}{1+x^a+x^{2a}}dx \approx \int_1^\infty \frac{x^2}{x^{2a}}dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2a-2}}$ converge per $2a - 2 > 1$, ovvero $a > 3/2$.

6. La soluzione è $x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 2 + e^t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

7. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \exp(x^2)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $y = -3x - 8$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -1/2$, il punto di massimo assoluto è $x = 0$.

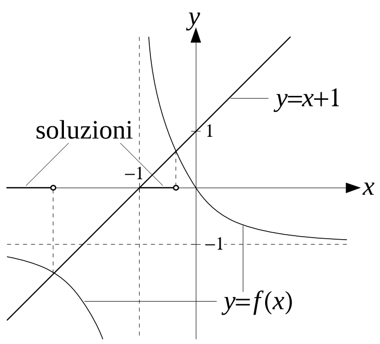
3. $f(x) \sim -\dfrac{2}{x^2}$.

4. Per parti: $\displaystyle\int x^a \log x\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \log x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \frac{1}{x}\,dx = x^{a+1}\left[\frac{\log x}{a+1} - \frac{1}{(a+1)^2}\right] + c$.

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2+\sin x}{1+x^a+x^{3a}}dx \approx \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3a}}dx$ converge per $3a > 1$, ovvero $a > 1/3$.

6. La soluzione è $x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 1 + 2e^t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

7. Ci si riconduce alla serie armonica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - x^2/2} = \frac{2}{2 - x^2}$.

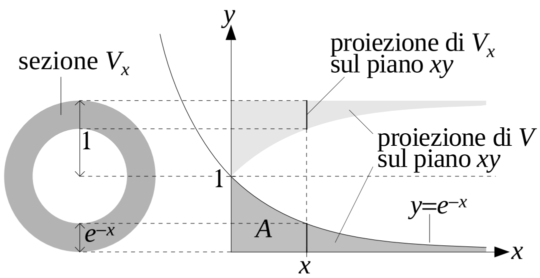
8. 

Seconda parte.

1. Riscriviamo le disequazioni $a(1+x) \le f(x) \le b(1+x)$ come
$$a \le g(x) \le b \quad \text{dove} \quad g(x) := \frac{\sqrt[6]{1+x^6}}{1+x}\,m,$$
e quindi i valori di a e b cercati corrispondono rispettivamente al valore minimo e al valore massimo di g relativamente alla semiretta $x \ge 0$, o più precisamente all'estremo superiore e all'estremo inferiore dei valori di g su questa semiretta.

   Per trovare tali valori, studiamo il grafico di g relativamente alla semiretta $x \ge 0$. La funzione g è ben definita e positiva su tutta la semiretta, e studiando il segno della derivata
$$g'(x) = \frac{x^5 - 1}{(1+x)^2(1+x^6)^{5/6}}$$
si ottiene che g decresce nell'intervallo $0 \le x \le 1$, e cresce nella semiretta $x \ge 1$. In particolare $x = 1$ è il punto di minimo assoluto, e il valore minimo di g è $g(1) = 2^{-5/6}$. Inoltre, tenuto conto che $g(0) = 1$ e che $g(x)$ tende a 1 per $x \to +\infty$, otteniamo che $x = 0$ è il punto di massimo di g, e il valore massimo è $g(0) = 1$.
In conclusione, i valori cercati di a e di b sono $a = 2^{-5/6} \simeq 0{,}56$ e $b = 1$.

2. Per ogni $x \ge 0$ indichiamo con V_x la sezione piana del solido V data dall'intersezione di V con il piano ortogonale all'asse delle x che passa per il punto di ascissa x.



   Come si vede dal disegno, V_x è una corona circolare di raggio esterno $r_e = 1$ e raggio interno $r_i = 1 - e^{-x}$, e quindi
$$\text{area}(V_x) := \pi(r_e^2 - r_i^2) = \pi\big(2e^{-x} - e^{-2x}\big)\,.$$
Ricordiamo ora che il volume di V può essere calcolato a partire dall'area delle sezioni V_x, e per la precisione si ha che
$$\begin{aligned}\text{volume}(V) &= \int_0^{+\infty} \text{area}(V_x)\,dx \\ &= \pi\int_0^{+\infty} 2e^{-x} - e^{-2x}\,dx = \pi\bigg| -2e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{3\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

3. a) Utilizzando lo sviluppo di Taylor $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ con $t := 2x^2$ otteniamo
$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{3 + \cos(2x^2)} - 2 \\ &= \sqrt{4 - 2x^4 + O(x^8)} - 2 = 2\sqrt{1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)} - 2\,.\end{aligned}$$
Utilizzando ora lo sviluppo $\sqrt{1+y} = 1 + y/2 + O(y^2)$ con $y := -x^4/2 + O(x^8)$ otteniamo
$$\begin{aligned}f(x) &= 2\sqrt{1+y} - 2 = 2\Big(1 + \frac{y}{2} + O(y^2)\Big) - 2 \\ &= y + O(y^2) \sim y = -\frac{x^4}{2} + O(x^8) \sim -\frac{x^4}{2}\,.\end{aligned}$$
b) Usando la parte principale di $f(x)$ ricavata sopra otteniamo che per $a \ne 1/2$ si ha
$$f(x) \sim \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)x^4\,.$$

Per $a = 1/2$ dobbiamo sviluppare $f(x)$ con maggior precisione. Procediamo quindi come sopra, utilizzando al primo passo lo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/24 + O(t^6)$ con $t := 2x^2$:

$$f(x) = \sqrt{3 + \cos(2x^2)} - 2 = 2\sqrt{1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{6} + O(x^{12})} - 2\,.$$

Utilizzando ora lo sviluppo $\sqrt{1+y} = 1 + y/2 - y^2/8 + O(y^3)$ con $y := -x^4/2 + x^8/6 + O(x^{12})$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{1+y} - 2 \\ &= y - \frac{y^2}{4} + O(y^3) \\ &= \Big[-\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{6} + O(x^{12}) \Big] - \frac{1}{4}\Big[-\frac{x^4}{2} + O(x^8) \Big]^2 + O\bigg(\Big[-\frac{x^4}{2} \Big]^3 \bigg) \\ &= -\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{6} + O(x^{12}) - \frac{x^8}{16} = -\frac{x^4}{2} + \frac{5x^8}{48} + O(x^{12})\,. \end{aligned}$$

Tramite quest'ultimo sviluppo otteniamo finalmente la parte principale di $f(x) = ax^4$ per $a = 1/2$:

$$f(x) + \frac{x^4}{2} = \frac{5x^8}{48} + O(x^{12}) \sim \frac{5x^8}{48}\,.$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2. Alternativamente si può calcolare il volume di V utilizzando una delle formule per il volume dei solidi di rotazione. Questo approccio richiede tuttavia diversi passaggi, visto in particolare che V è ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse $y = 1$ e non attorno all'asse delle x. E in effetti uno solo dei presenti ha impostato correttamente questo calcolo.

- Seconda parte, esercizio 3. La maggior parte dei presenti non ha risolto correttamente il punto b) perché ha utilizzato sviluppi insufficienti per $\cos t$ oppure per $\sqrt{1+y}$.

Versione: 14 novembre 2017

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2016-17

Giovanni Alberti

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 18 dicembre 2016]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari, crescenti e decrescenti.
   - 1.2 Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.3 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
   - 1.4 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - 2.1 Limiti di funzioni, proprietà elementari, forme indeterminate.
   - 2.2 Funzioni continue. Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass), senza dimostrazione.
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Altre interpretazioni della derivata.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo (locali) di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione rigorosa (non grafica) della relazione tra monotonia e segno della derivata.
   - 3.5 Teorema di de l'Hôpital (dimostrazione parziale). Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - 3.6 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero.
   - 3.7 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione, espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange (con dimostrazione). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
4. Elementi di analisi astratta
   - 4.1 *Numeri interi, razionali e reali (definiti come i numeri con espansioni decimali finite o infinite). Definizione di estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Completezza dei numeri reali.*
   - 4.2 Teorema di esistenza degli zeri (dimostrazione solo accennata). Algoritmo di bisezione per la determinazione dello zero di una funzione.
5. Integrali
   - 5.1 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Interpretazioni fisica dell'integrale: distanza percorsa da un punto in movimento (a velocità non costante) e lavoro di una forza (non costante) su un punto in movimento.
   - 5.2 Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione).

5.3 Regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.
5.5 Legge oraria di un punto in movimento nel piano o nello spazio, velocità ed accelerazione come derivate, distanza percorsa come integrale del modulo della velocità.

6. Integrali impropri

6.1 Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
6.2 Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
6.3 Integrali impropri non semplici.

7. Serie numeriche e serie di potenze

7.1 Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.
7.2 Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio fondamentale: la serie geometrica.
7.3 Criteri del confronto con l'integrale; serie armonica generalizzata. Criteri di convergenza per le serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
7.4 Serie di potenze, e raggio di convergenza. Serie di Taylor. Calcolo del raggio di convergenza per le serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. *Espressione dei numeri e e π come serie. Giustificazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.*

8. Equazioni differenziali

8.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica; significato delle condizioni iniziali.
8.2 Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
8.3 Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee (per certe classi di termini noti). *Equazione del pendolo e dell'oscillatore armonico.*

T E S T I

Prima parte, gruppo 1.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\sin(x+\pi) \leq -1/2$ comprese nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(0, -2)$; b) $(-1, 1)$; c) $(-1, -\sqrt{3})$.

3. Calcolare le derivate di: a) $\arctan(e^x)$; b) $x^3(2 + \log x)$; c) $\log\big(x^4/2^{x^2}\big)$.

4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\big(x^3 - 12x + 1\big)$ relativamente alla semiretta $x \leq 1$, e in caso affermativo calcolarli.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{e^x}{\tan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x(1-x)^2$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x+x^2)}{x+x^3}$.

6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(1-x^3)\log(1+4x^3)$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\displaystyle\frac{x^2+1}{(\log x + 1)^3} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $|x^2 - 4| \leq y \leq \log(1+x)$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\sin(x+\pi) \leq -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(0, -3)$; b) $(-2, 2)$; c) $(-3, -\sqrt{3})$.

3. Calcolare le derivate di: a) $\arcsin(x^2)$; b) $x^2(3 + \log x)$; c) $\log\big(2^{x^2}/x^6\big)$.

4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\big(x^3 - 12x + 1\big)$ relativamente alla semiretta $x \geq -1$, e in caso affermativo calcolarli.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1+x^2}{x^2-4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x(\log x + e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x^2}{x - \log(1+x)}$.

6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(3+x^2)\sin(2x^2)$.

7. Dire per quali $a > 0$ si ha che $\displaystyle\frac{3^x}{x^2+1} = o(a^x)$ per $x \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \leq |x^2 - 4|$ e $y \leq \log(1+x)$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\cos(x+\pi) \leq -1/2$ comprese nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-1, -1)$; b) $(0, -4)$; c) $(-\sqrt{3}, 3)$.

3. Calcolare le derivate di: a) $\sqrt{1+x^2}$; b) $x \log(\log x)$; c) $\log\big(3^{x^2}/x^4\big)$.

4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\big(1 + 3x - x^3\big)$ relativamente alla semiretta $x \leq 1$, e in caso affermativo calcolarli.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$; b) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}(\log x + 1)$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x^2+x}$.

6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(3-x^4)\sin(2x^2)$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{2}{1+\log x} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $|x^2-4| \leq \log(1+x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\sin(x+\pi) \geq 1/2$ comprese nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-2, -2)$; b) $(0, -3)$; c) $(-\sqrt{3}, 1)$.

3. Calcolare le derivate di: a) $\arctan(x^2)$; b) $x^3(3+\log x)$; c) $\log\left(x^4/3^{x^2}\right)$.

4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\left(1+3x-x^3\right)$ relativamente alla semiretta $x \geq -1$, e in caso affermativo calcolarli.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{1+x^2}{x^2-4}$; b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log(\log x)}{\log x}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x^3+x^2}$.

6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(1+x^3)(\exp(2x^3)-1)$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $x \sin\left(\dfrac{1}{x^2+x^3}\right) = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $(|x|-1)^2 \leq y \leq \arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\sin(x+\pi) \geq 1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

2. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-\sqrt{3}, -1)$; b) $(-3, 3)$; c) $(0, -4)$.

3. Calcolare le derivate di: a) $\arcsin(e^x)$; b) $x \log(\log x)$; c) $\log\left(x^3/4^{x^2}\right)$.

4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\left(2-2x-x^3\right)$ relativamente alla semiretta $x \leq 2$, e in caso affermativo calcolarli.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{1+x^2}{x^2-4}$; b) $\lim_{x\to +\infty} 2^x(x-1)^{-2}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3-x^2}{e^{x^2}-1}$.

6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(2x^2+x^4)\exp(x^2)$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{2^x}{x^4 \log x} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \geq (|x|-1)^2$ e $y \geq \arctan x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Trovare le soluzioni della disuguaglianza $\cos(x+\pi) \le -1/\sqrt{2}$ comprese nell'intervallo $[-\pi,\pi]$.
2. Trovare le coordinate polari (r,α) con $\alpha \in (-\pi,\pi]$ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate cartesiane: a) $(-\sqrt{3},-3)$; b) $(-1,1)$; c) $(0,-2)$.
3. Calcolare le derivate di: a) $\sqrt{1+x^4}$; b) $x^2(2+\log x)$; c) $\log\big(x^2/3^{x^2}\big)$.
4. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \exp\big(2-2x-x^3\big)$ relativamente alla semiretta $x \ge -2$, e in caso affermativo calcolarli.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-}\frac{e^x}{\tan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^4}{\sin x - x}$.
6. Trovare il polinomio di Taylor all'ordine 6 (in 0) della funzione $(2x^2+x^4)\log(1+x^2)$.
7. Dire per quali $a > 0$ si ha che $4^x\sin(e^{-x}) = o(a^x)$ per $x\to+\infty$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $(|x|-1)^2 \le \arctan x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Trovare la parte principale per $x\to 0$ della funzione
$$f(x) := 1 - \sqrt[4]{\cos(4x^2)}\,.$$
b) Per ogni $a\in\mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x\to 0$ di $f(x)+ax^4$.
2. a) Dire se la disequazione $(x^3+4)^4 \le 32\,(x^4+2)^3$ vale per ogni $x\ge 0$ oppure no.
b) Trovare la più piccola costante M tale che $(x^3+4)^4 \le M\,(x^4+2)^3$ per ogni $x\ge 0$.
c) Trovare la più grande costante m tale che $(x^3+4)^4 \ge m(x^4+2)^3$ per ogni $x\ge 0$.
3. Una ditta deve pianificare l'acquisto di una certa quantità di un materiale liquido necessario per una certa produzione; il totale del materiale da acquistare è di 100 unità, e si tratta di capire in quante tranche conviene suddividere l'acquisto, tenendo conto dei seguenti fatti:
   - al costo unitario del materiale 3 va aggiunto un costo fisso per ogni ordine, pari a 20;
   - in attesa di essere lavorato, il materiale acquistato viene conservato in un unico serbatoio che deve essere costruito per l'occasione, e il costo del contenitore dipende essenzialmente dalla sua capacità c (misurata in unità), e per la precisione è pari a $\frac{1}{2}c^2$.

   Determinare il numero ottimale N di tranche in cui suddividere l'acquisto.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Trovare la parte principale per $x\to 0$ della funzione
$$f(x) := 1 - \sqrt{2-\exp(x^4)}\,.$$
b) Per ogni $a\in\mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x\to 0$ di $f(x)+ax^4$.
2. a) Dire se la disequazione $(x^4+4)^5 \le 66\,(x^5+2)^4$ vale per ogni $x\ge 0$ oppure no.
b) Trovare la più piccola costante M tale che $(x^4+4)^5 \le M\,(x^5+2)^4$ per ogni $x\ge 0$.
c) Trovare la più grande costante m tale che $(x^4+4)^5 \ge m(x^5+2)^4$ per ogni $x\ge 0$.
3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) := 1 - \sqrt{\cos(2x^2)}\,.$$
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^4$.

2. a) Dire se la disequazione $(x^3+2)^4 \le \frac{9}{8}(x^4+4)^3$ vale per ogni $x \ge 0$ oppure no.
b) Trovare la più piccola costante M tale che $(x^3+2)^4 \le M\,(x^4+4)^3$ per ogni $x \ge 0$.
c) Trovare la più grande costante m tale che $(x^3+2)^4 \ge m(x^4+4)^3$ per ogni $x \ge 0$.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione
$$f(x) := 1 - \sqrt[4]{2 - \exp(2x^4)}\,.$$
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^4$.

2. a) Dire se la disequazione $(x^4+2)^5 \le \frac{5}{4}(x^5+4)^4$ vale per ogni $x \ge 0$ oppure no.
b) Trovare la più piccola costante M tale che $(x^4+2)^5 \le M\,(x^5+4)^4$ per ogni $x \ge 0$.
c) Trovare la più grande costante m tale che $(x^4+2)^5 \ge m(x^5+4)^4$ per ogni $x \ge 0$.

3. Uguale al gruppo 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arcsin(e^{2x} - 2)$.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (x - x^3)\sin(6x)$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^3$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 24\, x^{1/3}$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(2\cos(e^{2t});\, 2\sin(e^{2t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{1 + 4^n}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^a + x^3}\, dx$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4te^{2t}(1 + x^2)$ che soddisfa $x(1) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $2x^4 - 1 \le y \le -\arctan(x - 2)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arctan\left(\dfrac{1}{e^{2x} - 2}\right)$.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (1 - x^2)\log(1 + 4x^2)$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^4$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 24\, x^{1/2}$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\cos(e^{-t});\, -\sin(e^{-t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a + 1}{2^x + 1}\, dx$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 4te^{t^2}(1 + x^2)$ che soddisfa $x(2) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2x^4 - 1 \le \big|\arctan(x - 2)\big|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arccos(e^{4x} - 2)$.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (1 - x^4)\cos(2x^2)$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^{-2}$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 6x^2$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(2\sin(e^{3t});\, 2\cos(e^{3t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n + 4^n}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a^x + 1}{2^x + x}\,dx$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = 4te^{2t}(2 + x)$ che soddisfa $x(1) = -1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2} \le y \le \arctan\big(|x| - 1\big)$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arcsin(2 - e^{4x})$.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (x + x^3)\,\sin(6x)$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^3$ risolve l'equazione differenziale $\ddot x = 3x^{1/3}$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\cos(e^{2t});\, -\sin(e^{2t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n x^n}{1 + 2^n}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3 + \sin x}{x^a + x^4}\,dx$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot x = 4te^{t^2}(2 + x)$ che soddisfa $x(2) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2x^4 - 1 \ge -\arctan(x - 2)$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arctan\Big(\dfrac{1}{e^{2x} - 3}\Big)$.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (1 + x^2)\,\log(1 + 4x^2)$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^4$ risolve l'equazione differenziale $\ddot x = 3x^{1/2}$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(2\cos(e^{-t});\, 2\sin(e^{-t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,x^n}{2^n}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4 + x^3}{x^a + x^{2a}}\, dx$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = -4te^{2t}(1 + x)^2$ che soddisfa $x(0) = -2$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \leq 2x^4 - 1$ e $y \leq \big|\arctan(x - 2)\big|$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\arccos(2 - e^{2x})$.

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := (1 + x^4)\cos(2x^2)$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := (1 + at)^{-2}$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 12\, x^2$.

4. Un punto P si muove nel piano con legge oraria
$$P(t) := \big(\sin(e^{3t});\, -\cos(e^{3t})\big)\,.$$
Calcolare la velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3^n + n^3)x^n$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x - \sin x)^a}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = -4te^{t^2}(1 + x)^2$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\displaystyle\frac{1}{(x - 1)^2} \leq \arctan\big(|x| - 1\big)$.

Seconda parte, gruppo 1.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^{1/x^2} - 1\,.$$
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale di $f(x) - ax^2$ per $x \to 0$.

2. a) Dire se la disequazione $\exp(x^2) \geq x^{16/3}$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.
b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $\exp(x^2) \geq x^a$ per ogni $x > 0$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t + 4e^{2t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 2$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
c) Per ogni $a > 2$, trovare *una* soluzione di (*) che tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

4. Dato $a > 0$, poniamo
$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}}\,.$$
a) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\, dx$.

b) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

5. Sia A l'insieme dei punti (x,y) tali che $0 \le y \le e^{-|x|}$. e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 2$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A, di V, e di una generica sezione di V ortogonale all'asse di rotazione, e calcolare l'area di quest'ultima.

   b) Calcolare il volume di V.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \big(\cos(2x^3)\big)^{1/x^2} - 1\,.$$
   a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale di $f(x) - ax^4$ per $x \to 0$.

2. a) Dire se la disequazione $\exp(x^4) \ge x^{21/2}$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $\exp(x^4) \ge x^a$ per ogni $x > 0$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 9x = 9t + 6e^{3t}\,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 3$.

   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 3$.

   c) Per ogni $a > 3$, trovare *una* soluzione di (*) che tende a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

4. Dato $a > 0$, poniamo
$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}}\,.$$
   a) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$.

   b) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

5. Sia A l'insieme dei punti (x,y) tali che $0 \le y \le e^{-|x|}$. e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 3$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A, di V, e di una generica sezione di V ortogonale all'asse di rotazione, e calcolare l'area di quest'ultima.

   b) Calcolare il volume di V.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^{1/x^2} - 1\,.$$
   a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale di $f(x) - ax^2$ per $x \to 0$.

2. a) Dire se la disequazione $\exp(x^2) \ge x^{11/2}$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $\exp(x^2) \ge x^a$ per ogni $x > 0$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 4t - 4e^{2t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 2$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
c) Per ogni $a > 2$, trovare *una* soluzione di (*) che tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

4. Dato $a > 0$, poniamo
$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+2}}\,.$$
a) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$.
b) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

5. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq e^{-|x|}$. e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 2$.
a) Tracciare un disegno approssimativo di A, di V, e di una generica sezione di V ortogonale all'asse di rotazione, e calcolare l'area di quest'ultima.
b) Calcolare il volume di V.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \big(\cos(2x^3)\big)^{1/x^2} - 1\,.$$
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale di $f(x) - ax^4$ per $x \to 0$.

2. a) Dire se la disequazione $\exp(x^4) \geq x^{11}$ vale per ogni $x > 0$ oppure no.
b) Dire per quali $a > 0$ si ha che $\exp(x^4) \geq x^a$ per ogni $x > 0$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 9x = 27\,t - 6e^{3t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a > 0$ e $a \neq 3$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 3$.
c) Per ogni $a > 3$, trovare *una* soluzione di (*) che tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$.

4. Dato $a > 0$, poniamo
$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+2}}\,.$$
a) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$.
b) Discutere il comportamento dell'integrale improprio $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

5. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \leq y \leq e^{-|x|}$. e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta di equazione $y = 3$.
a) Tracciare un disegno approssimativo di A, di V, e di una generica sezione di V ortogonale all'asse di rotazione, e calcolare l'area di quest'ultima.
b) Calcolare il volume di V.

Prima parte, gruppo 1.

1. Trovare le $x \in [0, \pi]$ che risolvono la disequazione $\sin(2x) \le -\dfrac{1}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{2x}$ relativamente alla semiretta $x \le -1$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4+x^3}-1}{x^4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\big(2^{x^2-x^3}\big)$.

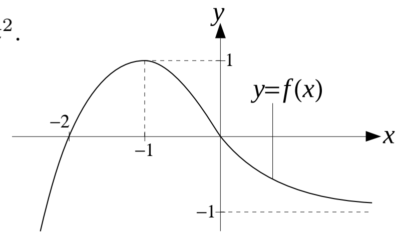
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^7}{(1+4x^8)^4}\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^2 \log x = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+1}{n!} x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} + x = 2t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2}$ e risolvere graficamente la disequazione $x^2 - 1 \le g(x)$.



Prima parte, gruppo 2.

1. Trovare le $x \in [0, \pi]$ che risolvono la disequazione $\cos(2x) \le -\dfrac{1}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \ge 4$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4+x^3}-1}{x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{x+\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\big(2^{x^3-x^2}\big)$.

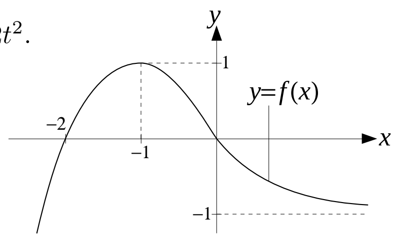
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+4x^4)^3}\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^2 \log x = o(x^a)$ per $x \to 0$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n+1} x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} + 2x = 2t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := 1 - f(x)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $g(x) \le y \le f(x)$.



Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare le $x \in [0, \pi]$ che risolvono la disequazione $\cos(2x) \le \dfrac{1}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{2x}$ relativamente alla semiretta $x \le 0$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x^2)-1}{x^3+x^4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\log x}{\sqrt{x}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\Big(\frac{x}{\log x}\Big)$.

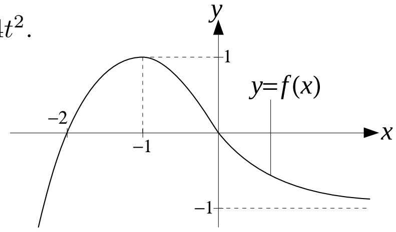
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x^5}{(1+4x^6)^2}\,dx$.

5. Dire per quali $a>0$ vale che $x\,3^x = O(a^x)$ per $x\to+\infty$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} - 2x = 4t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := f(2x)$ e l'insieme A dei punti (x,y) tali che $f(x) \le y \le g(x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le $x\in[0,\pi]$ che risolvono la disequazione $\sin(2x) \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \ge 2$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x^2)-1}{x^5+x^4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\log x}{x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\Big(\frac{\log x}{2^x}\Big)$.

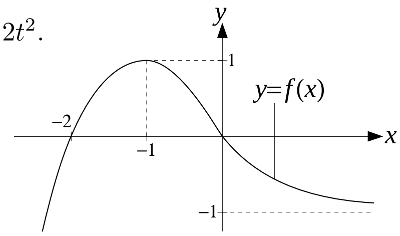
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x^7}{(1+4x^8)^5}\,dx$.

5. Dire per quali $a>0$ vale che $x^3\log x = O(x^a)$ per $x\to+\infty$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+n^4}{4^n+n^2}x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} + x = -2t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}$ e l'insieme A dei punti (x,y) tali che $f(x) \le y \le g(x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Trovare le $x\in[0,\pi]$ che risolvono la disequazione $\cos(2x) \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{2x}$ relativamente alla semiretta $x \le -2$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{e^{x^4+x^3}-1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^2+x^3)\,4^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos\big(2^{x^2+x^3}\big)$.

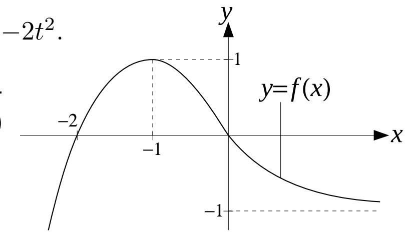
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+4x^4)^4}\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^3 \log x = o(x^a)$ per $x \to 0$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+n}{4^n+5^n} x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} + 2x = -2t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := 1 - f(x)$ e risolvere graficamente la disequazione $g(x) \le f(x)$.



Prima parte, gruppo 6.

1. Trovare le $x \in [0,\pi]$ che risolvono la disequazione $\cos(2x) \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Dire se esistono i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \ge 0$, e in caso affermativo calcolarli.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^4}{\cos(2x^2)-1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^4+x^3)\,4^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos\big(2^{x^4+x^3}\big)$.

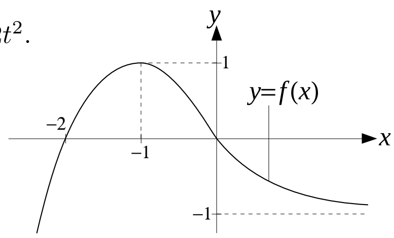
4. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^5}{(1+4x^6)^3}\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ vale che $x\,2^x = O(a^x)$ per $x \to +\infty$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n+5^n}{2^n+n} x^n$.

7. Trovare una soluzione *particolare* dell'equazione $\ddot{x} - 2x = 2t^2$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := f(2x)$ e risolvere graficamente la disequazione $f(x) \le g(x)$.



Seconda parte, gruppo 1.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$e^x = a(x^2-3)\,, \qquad (*)$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di questa equazione (se ne esistono).
a) Per ogni $a > 0$, determinare il numero di soluzioni di (*).
b) Determinare il limite L di $x(a)$ per $a \to +\infty$.
c) Determinare la parte principale di $x(a) - L$ per $a \to +\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x,y) del piano cartesiano per cui vale
$$|y+1| \le \frac{1}{(|x|+2)^4}\,.$$
a) Disegnare A e calcolarne l'area.
b) Trovare una retta *verticale* che divide A in due parti, una con area doppia dell'altra.

3. a) Per ogni $a > 0$ discutere il comportamento della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{(n^2)}}{n^2+1} \,.$$
b) Calcolare il valore di S per $a = 1/2$ con errore inferiore a 10^{-3}.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$e^x = a(x^2-8)\,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di questa equazione (se ne esistono).
a) Per ogni $a > 0$, determinare il numero di soluzioni di (*).
b) Determinare il limite L di $x(a)$ per $a \to +\infty$.
c) Determinare la parte principale di $x(a) - L$ per $a \to +\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano per cui vale
$$|y+1| \le \frac{1}{(|x|+4)^3} \,.$$
a) Disegnare A e calcolarne l'area.
b) Trovare una retta *verticale* che divide A in due parti, una con area doppia dell'altra.

3. a) Per ogni $a > 0$ discutere il comportamento della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{(n^2)}}{n+2} \,.$$
b) Calcolare il valore di S per $a = 1/2$ con errore inferiore a 10^{-3}.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$e^x = a(x^2-3)\,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni di questa equazione (se ne esistono).
a) Per ogni $a < 0$, determinare il numero di soluzioni di (*).
b) Determinare il limite L di $x(a)$ per $a \to -\infty$.
c) Determinare la parte principale di $x(a) - L$ per $a \to -\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano per cui vale
$$|y-1| \le \frac{1}{(|x|+2)^4} \,.$$
a) Disegnare A e calcolarne l'area.
b) Trovare una retta *verticale* che divide A in due parti, una con area doppia dell'altra.

3. a) Per ogni $a > 0$ discutere il comportamento della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{(n^2)}}{n^2+1} \,.$$
b) Calcolare il valore di S per $a = 1/2$ con errore inferiore a 10^{-3}.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$e^x = a(x^2 - 8)\,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni di questa equazione (se ne esistono).
a) Per ogni $a < 0$, determinare il numero di soluzioni di (*).
b) Determinare il limite L di $x(a)$ per $a \to -\infty$.
c) Determinare la parte principale di $x(a) - L$ per $a \to -\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) del piano cartesiano per cui vale
$$|y - 1| \le \frac{1}{(|x| + 4)^3}\,.$$
a) Disegnare A e calcolarne l'area.
b) Trovare una retta *verticale* che divide A in due parti, una con area doppia dell'altra.

3. a) Per ogni $a > 0$ discutere il comportamento della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{(n^2)}}{n+2}\,.$$
b) Calcolare il valore di S per $a = 1/2$ con errore inferiore a 10^{-3}.

Prima parte, gruppo 1.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arctan(x^2-1)$; b) $\log\big(x^4/e^x\big)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x\to+\infty$:
$$\underbrace{1+\log x}_{a} \ll \underbrace{\frac{x+1}{e^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x^2+1}{2e^x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{d}\,.$$

3. Trovare un numero α con $-\pi\le\alpha\le\pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\,\sin(x+\alpha)\quad\text{per ogni } x\in\mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}}\,dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 8 della funzione $f(x):=(1+2x^4)\log(1+2x^4)$.

6. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4\sin(1/n^a)}{n^{2a}+n^a}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x}+4x=8$ che soddisfa $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x):=2+2\sin(2\pi x-\pi)$ e disegnarne il grafico.

Prima parte, gruppo 2.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^6-1)$; b) $\log\big(x^3/2^x\big)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x\to+\infty$:
$$\underbrace{e^x+x}_{a} \ll \underbrace{\frac{2}{x\log x}}_{b} \ll \underbrace{(2^x-1)^2}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{\log x}+\frac{1}{x^2}}_{d}\,.$$

3. Trovare un numero α con $-\pi\le\alpha\le\pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\,\sin(x+\alpha)\quad\text{per ogni } x\in\mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{2x^5}{\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione $f(x):=(3+x^4)\sin(2x^2)$.

6. Dire per quali $a>1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\log(1+1/a^n)}{a^n+n^2}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x}+4x=4$ che soddisfa $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x):=-1+2\sin(\pi x+\pi)$ e disegnarne il grafico.

Prima parte, gruppo 3.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arctan(x^4+1)$; b) $\log\big(x^2/3^x\big)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{e^x + x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2x^2}{\log x}}_{b} \ll \underbrace{x^2 \log x}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{(2^x - x)^2}}_{d} \,.$$

3. Trovare un numero α con $-\pi \le \alpha \le \pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\,\sin(x + \alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^5}{x^6 + 1}\,dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 8 della funzione $f(x) := (1 - x^4)\log(1 + 2x^4)$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 \sin(1/n^a)}{2^n + 1}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 9x = 9$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := -2 + 2\sin(2x + \pi)$ e disegnarne il grafico.

Prima parte, gruppo 4.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^4 - 1)$; b) $\log\left(e^x/x^4\right)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2e^x}{x^2 + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{1 + x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{\log^2 x} + \frac{1}{x^2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{e^x}{x + 1}}_{d} \,.$$

3. Trovare un numero α con $-\pi \le \alpha \le \pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\cos(x + \alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{2x^3}{\sqrt[4]{x^4 + 1}}\,dx$.

5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione $f(x) := (3 - x^4)\sin(2x^2)$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 \sin(1/n^a)}{n^{3a} + n^a}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 8t$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := 2 + 2\cos(2\pi x - \pi)$ e disegnarne il grafico.

Prima parte, gruppo 5.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arctan(x^2 + 1)$; b) $\log\left(2^x/x^3\right)$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{3^x + 1}_{a} \ll \underbrace{\frac{x}{3^x + 1}}_{b} \ll \underbrace{\frac{\log x}{3^x + 1}}_{c} \ll \underbrace{2^{2x} + 1}_{d} \,.$$

3. Trovare un numero α con $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos(x+\alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^5}{\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx$.
5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x) := (1-x^2)\log(1+2x^2)$.
6. Dire per quali $a > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \log(1+1/a^n)}{a^{3n}+n^2}$ converge ad un numero finito.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 4t$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.
8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := -1 + 2\cos(\pi x + \pi)$ e disegnarne il grafico.

Prima parte, gruppo 6.

1. Derivare le seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^2-1)$; b) $\log\left(3^x/x^2\right)$.
2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2}{3^x+1}}_{a} \ll \underbrace{x\,3^x}_{b} \ll \underbrace{\frac{4}{2^{2x}+1}}_{c} \ll \underbrace{3^x \log x}_{d}\,.$$
3. Trovare un numero α con $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ per cui vale la seguente identità:
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x+\alpha) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{2x^5}{x^6+1}\,dx$.
5. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 della funzione $f(x) := (3-x^2)\sin(2x)$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \sin(1/n^a)}{n^{2a}+n^a}$ converge ad un numero finito.
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 9x = 9t$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.
8. Calcolare il periodo della funzione $f(x) := -2 + 2\cos(2x + \pi)$ e disegnarne il grafico.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^6 - 1$.
   a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + ax^4$ per $x \to 0$.
2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$
   e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq f(x-1)$.
   b) Scrivere l'area di A come integrale e dire se è finita o meno.

3. Consideriamo un punto P che si muove nel piano con la seguente legge oraria:
$$P(t) := \left(2t^2 - \tfrac{2}{3};\, t^3 - t\right).$$
a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.
b) Disegnare la traiettoria di P. (Suggerimento: esprimere t, e poi anche y, in funzione di x.)

Seconda parte, gruppo 2.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^9 - 1$.
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + ax^4$ per $x \to 0$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$$
e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le f(x-1)$.
b) Scrivere l'area di A come integrale e dire se è finita o meno.

3. Consideriamo un punto P che si muove nel piano con la seguente legge oraria:
$$P(t) := \left(3t^2 - 1;\, t^3 - t\right).$$
a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.
b) Disegnare la traiettoria di P. (Suggerimento: esprimere t, e poi anche y, in funzione di x.)

Seconda parte, gruppo 3.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \big(\cos(2x^3)\big)^6 - 1$.
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + ax^6$ per $x \to 0$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$
e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x+1) \le y \le f(x)$.
b) Scrivere l'area di A come integrale e dire se è finita o meno.

3. Consideriamo un punto P che si muove nel piano con la seguente legge oraria:
$$P(t) := \left(2t^2 - \tfrac{2}{3};\, t^3 - t\right).$$
a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.
b) Disegnare la traiettoria di P. (Suggerimento: esprimere t, e poi anche y, in funzione di x.)

Seconda parte, gruppo 4.

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \big(\cos(2x^3)\big)^9 - 1$.
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + ax^6$ per $x \to 0$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$$

e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x+1) \leq y \leq f(x)$.

b) Scrivere l'area di A come integrale e dire se è finita o meno.

3. Consideriamo un punto P che si muove nel piano con la seguente legge oraria:

$$P(t) := \big(3t^2 - 1;\, t^3 - t\big)\,.$$

a) Calcolare la minima distanza di P dall'origine.

b) Disegnare la traiettoria di P. (Suggerimento: esprimere t, e poi anche y, in funzione di x.)

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti, espressi in coordinate cartesiane: a) $(-2, -2)$; b) $(0, -2)$; c) $(-1, -\sqrt{3})$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to +\infty} \sin(e^x)$; b) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \log(2x)$; c) $\lim_{x \to +\infty} x \sin(1/x^2)$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 (in 0) di $f(x) := (2 - 3x^3) \log(1 - x^3)$.

4. Calcolare la velocità $\vec{v}(t)$ e la distanza d percorsa tra l'istante $t = -\infty$ e $t = 0$ da un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := e^t \big(\sin(2t), \cos(2t)\big)$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a + n^{2a}}{n^4 \log(1 + 1/n^2)}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} + n^2}{3^n + n} x^n$

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) che soddisfano le condizioni $1 \leq y \leq 2$ e $y \leq \dfrac{1}{(x-1)^4}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti, espressi in coordinate cartesiane: a) $(-1, 1)$; b) $(0, -3)$; c) $(-\sqrt{3}, 3)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to -\infty} \cos(e^x)$; b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + x^2}{\log(1 + 2x^2)}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 (in 0) di $f(x) := (1 + x^3) \log(1 - 2x^3)$.

4. Calcolare la velocità $\vec{v}(t)$ e la distanza d percorsa tra l'istante $t = -\infty$ e $t = 0$ da un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := e^t \big(\sin(3t), \cos(3t)\big)$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(1/n^{2a})}{n - \sqrt{n}}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{-2n} + n^2}{3^n + n} x^n$

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) che soddisfano le condizioni $-2 \leq x \leq -1$ e $y \leq \dfrac{1}{(x+1)^4}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare le coordinate polari (r, α) con $\alpha \in (-\pi, \pi]$ dei seguenti punti, espressi in coordinate cartesiane: a) $(0, -4)$; b) $(-1, -1)$; c) $(-3, -\sqrt{3})$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{2^x+4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\Big(\frac{1}{x}+\log x\Big)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^2\sin(1/x)$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 (in 0) di $f(x):=(8-2x^3)\sqrt{1+x^3}$.

4. Calcolare la velocità $\vec{v}(t)$ e la distanza d percorsa tra l'istante $t=-\infty$ e $t=0$ da un punto P si muove con la legge oraria $P(t):=e^t\big(\cos(2t),\,\sin(2t)\big)$.

5. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^a+n^{2a}}{n^4(e^{1/n}-1)}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}+n^2}{3^{-n}+n}x^n$

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) che soddisfano le condizioni $-1\le x\le 1$ e $y\le e^{-|x|}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le coordinate polari (r,α) con $\alpha\in(-\pi,\pi]$ dei seguenti punti, espressi in coordinate cartesiane: a) $(0,-3)$; b) $(-2,2)$; c) $(-\sqrt{3},1)$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{2^x-4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-\log^{10}x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^4-2x^2}{\log(1+x^2)}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 (in 0) di $f(x):=(2-x^3)\sqrt{1+2x^3}$.

4. Calcolare la velocità $\vec{v}(t)$ e la distanza d percorsa tra l'istante $t=-\infty$ e $t=0$ da un punto P si muove con la legge oraria $P(t):=e^t\big(\cos(3t),\,\sin(3t)\big)$.

5. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^4(e^{1/n^2}-1)}{n^a-1}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{-2n}+n^2}{3^{-n}+n}x^n$

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x}-2\dot{x}+5x=0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0)=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) che soddisfano le condizioni $e^x\le y\le 1$ e $y\le 2-x^2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Trovare la parte principale per $x\to0$ di $f(x):=\sqrt[3]{\exp(2x^6)-1}$.
   b) Per ogni $a\in\mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x\to0$ di $f(x)-ax^2$.

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x,y) tali che $0\le y\le f(x)$, dove
$$f(x):=(x-1)\exp(-x)\,.$$
   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.
   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.
   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

3. Si consideri la funzione f data da

$$f(x) := \int_1^{(x+1)^2} \frac{dt}{1+t^5} \,. \tag{*}$$

   a) Discutere i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ (esistenza ed eventuale finitezza).

   b) Disegnare il grafico di $f(x)$.

   c) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt{\exp(2x^4) - 1}$.

   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - ax^2$.

2. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $0 \le y \le f(x)$, dove

$$f(x) := (x-2)\exp(-x) \,.$$

   a) Disegnare il grafico della funzione f e l'insieme A.

   b) Disegnare il solido V_x ottenuto ruotando A attorno all'asse x e calcolarne il volume.

   c) Disegnare il solido V_y ottenuto ruotando A attorno all'asse y e calcolarne il volume.

3. Si consideri la funzione f data da

$$f(x) := \int_1^{(x+1)^2} \frac{dt}{1+t^5} \,. \tag{*}$$

   a) Discutere i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ (esistenza ed eventuale finitezza).

   b) Disegnare il grafico di $f(x)$.

   c) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x^3) + ax^3$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{4^x}{x}}_{a} \ll \underbrace{\sin\left(e^{x^2}\right)}_{b} \ll \underbrace{e^{x\,\log x}}_{c} \ll \underbrace{x^2 + 4^x}_{d}\,.$$

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt{1+2x^2} - 1 - x^2$.

4. Un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := (\cos t,\, 2t^3 - 3\pi t^2)$. Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla (e se non ne esiste nessuno, specificarlo).

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{1+t^4}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a + x^{2a}}{x^4 \log(1+1/x^2)}\, dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2)\, t\, e^t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano cartesiano le cui coordinate polari α, r soddisfano
$$-\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}\ ; \quad 1 \le r \le 2\,.$$

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x^3) + ax^3$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2x^3}{\log x}}_{a} \ll \underbrace{x\,2^{-x}}_{b} \ll \underbrace{x^3 + 1}_{c} \ll \underbrace{e^{2\log x}}_{d}\,.$$

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(1-x^2) + x^2$.

4. Un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := (t^3 - 3t^2,\, \cos(\pi t))$. Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla (e se non ne esiste nessuno, specificarlo).

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{3x}^{x^3} \frac{dt}{1+t^4}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x^{2a})}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\, dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2)\, 4t\, e^{t^2}$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano cartesiano le cui coordinate polari α, r soddisfano
$$\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{3\pi}{4}\ ; \quad r \ge 2\,.$$

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x^5) + ax^5$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{\log x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{x\log x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{x+\log x}}_{d}\,.$$

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \sqrt[3]{1+3x^2} - 1 - x^2$.

4. Un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := (\cos(2t),\, 4t^3 - 3\pi t^2)$. Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla (e se non ne esiste nessuno, specificarlo).

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{1+t^6}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a + x^{2a}}{x^4(e^{1/x}-1)}\,dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2)\,t\,e^t$ che soddisfa $x(1) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) nel piano cartesiano le cui coordinate polari α, r soddisfano
$$-\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}\ ; \quad r \ge 2\,.$$

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(4x^5) + ax^5$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

2. Disporre le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\log(x\log x)}_{a} \ll \underbrace{\log(\log(x^2))}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{\log(\log x)}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{\log x}}_{d}\,.$$

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log(1-x^4) + x^4$.

4. Un punto P si muove con la legge oraria $P(t) := (t^3 - t^2,\, \sin(\pi t))$. Trovare tutti i tempi t in cui l'accelerazione di P è nulla (e se non ne esiste nessuno, specificarlo).

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{3x}^{x^3} \frac{dt}{1+t^6}$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4(e^{1/x^2}-1)}{x^a+1}\,dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2)\,4t\,e^{t^2}$ che soddisfa $x(1) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) nel piano cartesiano le cui coordinate polari α, r soddisfano
$$\frac{\pi}{4} \le \alpha \le \frac{3\pi}{4}\ ; \quad 1 \le r \le 2\,.$$

Seconda parte.

1. a) Dire se la disequazione $x^2 + 4x - 4 \geq 6 \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$ oppure no.
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^2 + 4x - a \geq 6 \log x$ è soddisfatta per ogni $x > 0$.

2. Determinare al variare di $a > 0$ il comportamento dell'integrale improprio
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(1+\cos x)^a} \,.$$

3. Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare una circonferenza di raggio r attorno ad una retta T tangente alla circonferenza stessa.

Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $1 \leq x$, specificando se non ne esistano.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $\dfrac{x^4 + x^3}{\log x} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

3. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^{\exp(2x)} \sin(1 + \log t)\, dt$.

4. Calcolare $\displaystyle\int 4x \cos(1 + x^2)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1 + \log x)^a}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n\, n!}$ (per gli x per cui è finita).

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} - 4x = 3e^{-t} + 5e^{-3t}$ che tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\dfrac{1}{(1 - x)^3} \geq e^{-x}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^3 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $-1 \leq x$, specificando se non ne esistano.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^2 e^x + x^3 = o(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

3. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_{\exp(-x)}^{1} \sin(1 + \log t)\, dt$.

4. Calcolare $\displaystyle\int x \cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x^{2a}}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ (per gli x per cui è finita).

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} - 4x = 3e^{-t} + 5e^{-3t}$ che tendono a 0 per $t \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\log(x + 1) \geq y \geq e^{1-x} - 1$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \leq 1$, specificando se non ne esistano.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $\dfrac{2^{-x} + x^3}{x + 1} = o(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

3. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \int_1^{\exp(2x)} \cos(1 + \log t)\, dt$.

4. Calcolare $\int_0^1 4x \cos(1 + x^2)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + 2^x)^a}$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n\, n!}$ (per gli x per cui è finita).

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} - 9x = 8e^{-t} + 5e^{-2t}$ che tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\log(x + 1) \geq e^{1-x} - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Determinare i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2 e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \leq 3$, specificando se non ne esistano.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^4 e^{-x} + x^3 \log x = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

3. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \int_{\exp(-x)}^{1} \cos(1 + \log t)\, dt$.

4. Calcolare $\int_0^{\pi} x \cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{1 + x^{2a}}{x^a(1 + x^a)}\, dx$ converge ad un numero finito.

6. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$ (per gli x per cui è finita).

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} - 9x = 8e^{-t} + 5e^{-2t}$ che tendono a 0 per $t \to +\infty$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\frac{1}{(1 - x)^3} \geq y \geq e^{-x}$.

SECONDA PARTE.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, sia $x_a(t)$ la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^2 - 4$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = a$.
   a) Calcolare $x_0(t)$ e disegnarne il grafico.
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione $x_a(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il comportamento dell'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} (x + 1)^a - x^a\, dx\,.$$
(Suggerimento: raccogliere x^a nella funzione integranda.)

3. Consideriamo la figura piana A delimitata da un arco di circonferenza di raggio r e dalla corda corrispondente. Indichiamo quindi con ℓ la lunghezza della corda, con L la lunghezza dell'arco,

e con α l'angolo compreso tra la corda e la retta tangente alla circonferenza in uno dei due estremi. Consideriamo infine la seguente quantità:

$$E = L\Big(1 + \frac{1}{r^2}\Big) + \ell\,.$$

a) Disegnare un esempio della figura A e dire tra quali estremi può variare l'angolo α.

b) Fissato l'angolo α, trovare la figura A che per cui il valore di E è minimo.

c) Detto $E(\alpha)$ il valore minimo di E calcolato al punto precedente, trovare il valore massimo e minimo di $E(\alpha)$ al variare di α.

Prima parte, gruppo 1.

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi]$ della disequazione $\cos(2x) \geq -1/2$.
2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \dfrac{x}{1+x^4}$ nel punto di ascissa $x = -1$.
3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua: $f(x) := \begin{cases} x^2 + b & \text{per } x \geq 2, \\ ae^x & \text{per } x < 2. \end{cases}$
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 della funzione $f(x) := (1 + x^4)\sqrt{1 - 4x^2}$.
5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{8x^3}{1+x^4}\, dx$.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2}{2^n + 4^n} x^n$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 4t^3 e^x$ tale che $x(1) = 0$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $(x-1)^3 \leq y \leq |\arctan(x+1)|$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi/2]$ della disequazione $\tan(2x) \geq -1$.
2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \dfrac{x}{1+x^6}$ nel punto di ascissa $x = 1$.
3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua: $f(x) := \begin{cases} x^2 + b & \text{per } x \geq -2, \\ ae^x & \text{per } x < -2. \end{cases}$
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione $f(x) := (3 + x^4)\log(1 + 2x^2)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_1^e 16\, x^3 \log x\, dx$.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2}{2^n + 5^n} x^n$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 4t(1 + x^2)$ tale che $x(1) = 0$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $-|\arctan(x-2)| \leq x \leq 1 - x^4$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi]$ della disequazione $\sin(2x) \geq -1/2$.
2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \dfrac{x}{1+x^4}$ nel punto di ascissa $x = 1$.
3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua: $f(x) := \begin{cases} x^2 + b & \text{per } x \geq -1, \\ ae^x & \text{per } x < -1. \end{cases}$
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 6 della funzione $f(x) := (1 + x^6)\sqrt{1 - 4x^3}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{8x^3}{1+x^4}\,dx$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+2}x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 3t^2(1+x^2)$ tale che $x(1) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \le 1 - x^4$ e $y \le -|\arctan(x-2)|$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi/2]$ della disequazione $\tan(2x) \le \sqrt{3}$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = \dfrac{x}{1+x^6}$ nel punto di ascissa $x = -1$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua: $f(x) := \begin{cases} x^2+b & \text{per } x \ge 1, \\ ae^x & \text{per } x < 1. \end{cases}$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 9 della funzione $f(x) := (3+x^6)\log(1+2x^3)$.

5. Calcolare $\displaystyle\int 16\,x^3 \log x\,dx$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{4^n+2}x^n$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = 3t^2 e^x$ tale che $x(1) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $(x-1)^3 \le |\arctan(x+1)|$.

SECONDA PARTE.

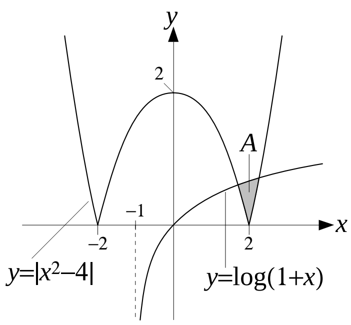
1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 9x = 18\,t\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per ogni $a > 0$.
b) Per quali $a > 0$ esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \gg e^{9t}$ per $t \to +\infty$?

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\left(x^2 - 1 + \frac{16}{x^2}\right).$$
a) Determinare l'insieme di definizione di f.
b) Disegnare il grafico di f.
c) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > 0$ e $f(x) \le y \le 2\log x$.
d) Dire se l'area di A è finita oppure no.

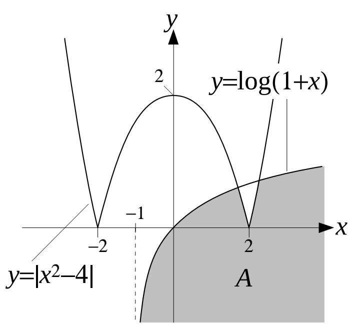
3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ discutere il comportamento dell'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e)^a}\,.$$

SOLUZIONI

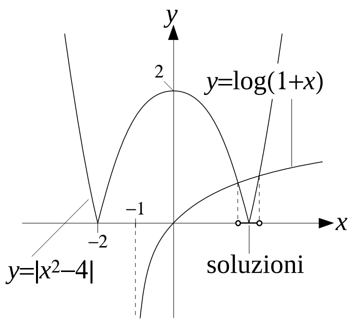
PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Le soluzioni cercate sono: $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(2, -\pi/2)$; b) $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$; c) $(2, -2\pi/3)$.
3. a) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$; b) $x^2(7+3\log x)$; c) $\frac{4}{x} - \log 4 \cdot x$.
4. Il punto di massimo assoluto è $x = -2$; il punto di minimo assoluto non esiste.
5. a) Non esiste; b) 0; c) -1.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 4x^3 - 12x^6$.
7. $a \geq 2$.
8. 

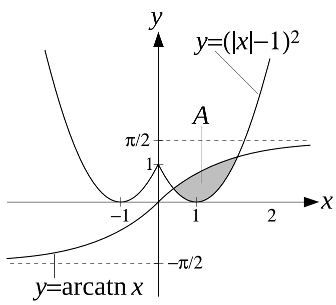
PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Le soluzioni cercate sono: $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(3, -\pi/2)$; b) $(2\sqrt{2}, 3\pi/4)$; c) $(2\sqrt{3}, -5\pi/6)$.
3. a) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; b) $x(7+2\log x)$; c) $\log 4 \cdot x - \frac{6}{x}$.
4. Il punto di massimo assoluto non esiste; il punto di minimo assoluto è $x = 2$.
5. a) $+\infty$; b) 0; c) -2.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 6x^2 + 2x^4 - 4x^6$.
7. $a \geq 3$.
8. 

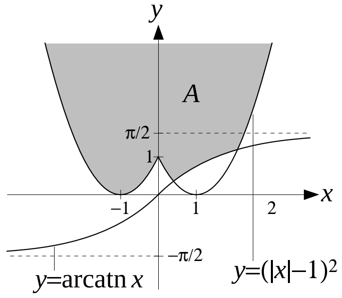
PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Le soluzioni cercate sono: $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(\sqrt{2}, -3\pi/4)$; b) $(4, -\pi/2)$; c) $(2\sqrt{3}, 2\pi/3)$.
3. a) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $\log(\log x) + \dfrac{1}{\log x}$; c) $\log 9 \cdot x - \dfrac{4}{x}$.
4. Il punto di massimo assoluto non esiste; il punto di minimo assoluto è $x = -1$.
5. a) $-\infty$; b) 0; c) 2.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 6x^2 - 6x^6$.
7. $a \geq 0$.
8. 

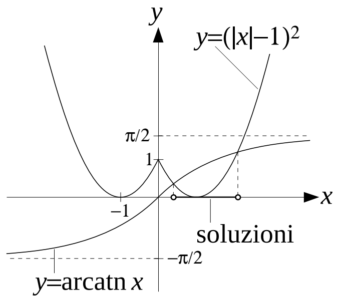
PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Le soluzioni cercate sono: $\dfrac{7\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{11\pi}{6}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(2\sqrt{2}, -3\pi/4)$; b) $(3, -\pi/2)$; c) $(2, 5\pi/6)$.
3. a) $\dfrac{2x}{1+x^4}$; b) $x^2(10 + 3\log x)$; c) $\dfrac{4}{x} - \log 9 \cdot x$.
4. Il punto di massimo assoluto è $x = 1$; il punto di minimo assoluto non esiste.
5. a) Non esiste; b) 0; c) non esiste.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 2x^3 + 4x^6$.
7. $a > -2$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Le soluzioni cercate sono: $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(2, -5\pi/6)$; b) $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$; c) $(4, -\pi/2)$.
3. a) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; b) $\log(\log x) + \frac{1}{\log x}$; c) $\frac{3}{x} - \log 16 \cdot x$.
4. Il punto di massimo assoluto non esiste; il punto di minimo assoluto è $x = 2$.
5. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) -1.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 2x^2 + 3x^4 + 2x^6$.
7. Nessun a.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Le soluzioni cercate sono: $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
2. Le coordinate polari (r, α) cercate sono a) $(2\sqrt{3}, -2\pi/3)$; b) $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$; c) $(2, -\pi/2)$.
3. a) $\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$; b) $x(5 + 2\log x)$; c) $\frac{2}{x} - \log 9 \cdot x$.
4. Il punto di massimo assoluto è $x = -2$; il punto di minimo assoluto non esiste.
5. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) -6.
6. Lo sviluppo cercato è $P_6(x) = 2x^4$.
7. $a > 4/e$.
8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Siccome $f(0) = 0$, ci aspettiamo una parte principale con esponente positivo. E infatti

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\cos(4x^2)} &= \sqrt[4]{1 - 8x^4 + O(x^8)} \\ &= 1 + \frac{1}{4}(-8x^4 + O(x^8)) + O\big((-8x^4 + O(x^8))^2\big) \\ &= 1 - 2x^4 + O(x^8) + O\big((O(x^4))^2\big) \\ &= 1 - 2x^4 + O(x^8)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

avendo usato nel primo passaggio lo sviluppo

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4) \quad \text{con} \quad t := 4x^2\,,$$

e nel secondo lo sviluppo

$$\sqrt[4]{1+t} = (1+t)^{1/4} = 1 + \frac{t}{4} + O(t^2) \quad \text{con} \quad t := -8x^4 + O(x^8)\,.$$

Usando la formula (1) otteniamo infine

$$f(x) := 1 - \sqrt[4]{\cos(4x^2)} = 2x^4 + O(x^8) \sim 2x^4\,, \tag{2}$$

ovvero la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $2x^4$.

b) Utilizzando la formula (2) otteniamo

$$f(x) + ax^4 \sim (2+a)x^4 \quad \text{per } a \neq -2.$$

Invece per $a = -2$ abbiamo bisogno di uno sviluppo più preciso della funzione f, che otteniamo procedendo come per la formula (1), con la differenza che stavolta usiamo sviluppi più precisi per ciascuna delle funzioni coinvolte:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\cos(4x^2)} &= \sqrt[4]{1 - 8x^4 + \frac{32}{3}x^8 + O(x^{12})} \\ &= 1 + \frac{1}{4}\Big(- 8x^4 + \frac{32}{3}x^8 + O(x^{12})\Big) \\ &\quad - \frac{3}{32}\Big(- 8x^4 + \frac{32}{3}x^8 + O(x^{12})\Big)^2 + O\Big(\Big(- 8x^4 + \frac{32}{3}x^8 + O(x^{12})\Big)^3\Big) \\ &= 1 - 2x^4 + \frac{8}{3}x^8 + O(x^{12}) - \frac{3}{32}\big(- 8x^4 + O(x^8)\big)^2 + O\big((O(x^4))^3\big) \\ &= 1 - 2x^4 + \frac{8}{3}x^8 + O(x^{12}) - \frac{3}{32}\big(64\,x^8 + O(x^{12})\big) + O(x^{12}) \\ &= 1 - 2x^4 - \frac{10}{3}x^8 + O(x^{12})\,, \end{aligned} \tag{3}$$

avendo usato nel primo passaggio lo sviluppo

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + O(t^6) \quad \text{con} \quad t := 4x^2\,,$$

e nel secondo lo sviluppo

$$\sqrt[4]{1+t} = 1 + \frac{t}{4} - \frac{3}{32}t^2 + O(t^3) \quad \text{con} \quad t := -8x^4 + \frac{32}{3}x^8 + O(x^{12})\,.$$

Usando la formula (3) otteniamo infine

$$f(x) - 2x^4 = 1 - 2x^4 - \sqrt[4]{\cos(4x^2)} = \frac{10}{3}x^8 + O(x^{12}) \sim \frac{10}{3}x^8\,.$$

Ricapitolando, la parte principale di $f(x) + ax^4$ per $x \to 0$ è

$$\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} (2+a)x^4 & \text{per } a \neq -2, \\ \frac{10}{3}x^8 & \text{per } a = -2. \end{cases}$$

2. a) Ponendo

$$f(x) := \frac{(x^3+4)^4}{(x^4+2)^3}$$

possiamo riscrivere la disequazione in oggetto nella forma $f(x) \leq 32$. Si tratta quindi di capire se è vero o meno che questa disequazione vale per ogni $x \geq 0$, ovvero se il valore massimo di $f(x)$ per $x \geq 0$ soddisfa

$$\max_{x\geq 0} f(x) \leq 32 \tag{4}$$

(e se il valore massimo non esiste va sostituito con l'estremo superiore dei valori $f(x)$ con $x \geq 0$). Per rispondere dobbiamo calcolare tale massimo. Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{24\,x^2(x^3+4)^3(1-2x)}{(x^4+2)^4}$$

limitatamente alla semiretta $x \geq 0$ si vede subito che f cresce nell'intervallo $[0, 1/2]$ e decresce nella semiretta $[1/2, +\infty)$, ed in particolare $x = 1/2$ è il punto di massimo *assoluto* di f. Di conseguenza

$$\max_{x\geq 0} f(x) = f(1/2) = 33\,,$$

ed in particolare la (4) non vale, per cui la risposta alla domanda a) è negativa.

b) Riprendendo quanto appena detto, la disuguaglianza $(x^3+4)^4 \leq M\,(x^4+2)^3$ può essere riscritta come $f(x) \leq M$ e quindi vale per ogni $x \geq 0$ se

$$\max_{x\geq 0} f(x) = 33 \leq M\,.$$

Di conseguenza il minimo valore ammissibile di M è 33.

c) La disuguaglianza $(x^3+4)^4 \geq m\,(x^4+2)^3$ può essere riscritta come $f(x) \geq m$ e quindi vale per ogni $x \geq 0$ se il valore minimo, o meglio, l'estremo inferiore dei valori $f(x)$ con $x \geq 0$ soddisfa

$$\inf_{x\geq 0} f(x) \geq m\,. \tag{5}$$

Poiché la funzione f cresce in $[0, 1/2]$ e decresce in $[1/2, +\infty)$, l'estremo inferiore dei valori viene raggiunto o per $x \to +\infty$ o per $x = 0$ (ed in tal caso è anche il valore minimo); confrontando $f(0) = 32$ con il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$, vale a dire 1, otteniamo che l'estremo inferiore dei valori di f è 1. Pertanto la disequazione (5) è soddisfatta se $1 \geq m$, ed in particolare il più grande valore ammissibile di m è 1.

3. Supponiamo di dividere l'acquisto del materiale in N ordini, e calcoliamo il costo totale dell'operazione. Per far questo osserviamo che:
   - il costo totale del materiale è pari a 300 (e non dipende da N);
   - la somma dei costi fissi per ogni ordine è pari a $20\,N$;
   - volendo minimizzare la capacità del serbatoio da costruire, conviene acquistare ad ogni ordine la stessa quantità di materiale, vale a dire $100/N$; così facendo serve un contenitore di capacità $c = 100/N$, il cui costo è pari a $5000/N^2$.

   Sommando i costi sopraelencati otteniamo infine che il costo totale dell'operazione è pari a

$$300 + 20\,N + \frac{5000}{N^2}\,.$$

Si tratta dunque di trovare il valore minimo di questa quantità al variare di N tra i numeri *interi* positivi.

Studiando il segno della derivata della funzione

$$f(x) := 300 + 20\,x + \frac{5000}{x^2}\,,$$

vale a dire

$$f'(x) = 20 - \frac{10000}{x^3} = \frac{20}{x^3}(x^3 - 500)\,,$$

si ottiene che f' si annulla in $x_0 := \sqrt[3]{500} \simeq 7{,}94$, ed in particolare la funzione decresce nell'intervallo $[0, x_0]$ e cresce nella semiretta $[x_0, +\infty)$. In particolare, il valore minimo di $f(N)$ tra tutti i numeri interi N nell'intervallo $[0, x_0]$ viene raggiunto per $N = 7$, mentre il valore minimo tra tutti gli interi N nella semiretta $[x_0, +\infty)$ viene raggiunto per $N = 8$. Confrontando

$f(7) \simeq 542{,}04$ e $f(8) \simeq 538{,}12$ otteniamo infine che il valore minimo di $f(N)$ al variare di N tra gli interi positivi viene raggiunto per $N = 8$, che è dunque la soluzione.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1: la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è p.p.$(f(x)) = \frac{1}{2}x^4$, inoltre
$$\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + a\right)x^4 & \text{per } a \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{3}{8}x^8 & \text{per } a = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Analogo al gruppo 1. Si pone
$$f(x) := \frac{(x^4 + 4)^5}{(x^5 + 2)^4}\,,$$
e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la risposta alla domanda b) è
$$M = \max_{x \geq 0} f(x) = f(1/2) = 65\,,$$
ed in particolare la risposta alla domanda a) è negativa. Invece la risposta alla domanda c) è
$$m = \inf_{x \geq 0} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1: la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è p.p.$(f(x)) = x^4$, inoltre
$$\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} (1 + a)x^4 & \text{per } a \neq -1, \\ \frac{1}{6}x^8 & \text{per } a = -1. \end{cases}$$

2. Analogo al gruppo 1. Si pone
$$f(x) := \frac{(x^3 + 2)^4}{(x^4 + 4)^3}\,,$$
e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la risposta alla domanda b) è
$$M = \max_{x \geq 0} f(x) = f(2) = \frac{5}{4}\,,$$
ed in particolare la risposta alla domanda a) è negativa. Invece la risposta alla domanda c) è
$$m = \min_{x \geq 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{4}\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Analogo al gruppo 1: la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è p.p.$(f(x)) = \frac{1}{2}x^4$, inoltre
$$\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + a\right)x^4 & \text{per } a \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{7}{8}x^8 & \text{per } a = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Analogo al gruppo 1. Si pone
$$f(x) := \frac{(x^4 + 2)^5}{(x^5 + 4)^4}\,,$$
e procedendo come per il gruppo 1 si ottiene che la risposta alla domanda b) è
$$M = \max_{x \geq 0} f(x) = f(2) = \frac{9}{8}\,,$$

ed in particolare la risposta alla domanda a) è positiva. Invece la risposta alla domanda c) è

$$m = \min_{x \geq 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{8}\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2. Pare che molti dei presenti abbiano calcolato l'angolo α delle coordinate polari del punto (x, y) usando la formula $\alpha = \arctan(y/x)$. Ma questa formula dà l'angolo corretto solo se il punto in questione è contenuto nel primo o nel quarto quadrante.

- Prima parte, esercizio 7. Molti dei presenti hanno fatto errori che si possono ricondurre al seguente ragionamento (sbagliato): siccome $\log x$ è trascurabile rispetto a tutte le potenze (positive) di x per $x \to +\infty$, allora $x^2/\log x$ è asintoticamente equivalente a x^2, e quindi l'equazione $x^2/\log x = o(x^a)$ equivale a $x^2 = o(x^a)$. Peccato che non è vero che $x^2/\log x$ e x^2 siano asintoticamente equivalenti, come si vede facendo il limite del rapporto di queste due funzioni; è invece vero che $x^2 + \log x$ e x^2 sono asintoticamente equivalenti, e forse questo ha indotto alcuni in confusione.

- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno risposto correttamente alla domanda a), ma al momento di passare al punto delicato della domanda b), hanno sviluppato ulteriormente solo una delle due funzioni coinvolte della definizione di f. Tale errore sarebbe stato messo in evidenza dal resto, se questo non fosse stato brutalmente omesso.

- Seconda parte, esercizio 3. Diversi dei presenti hanno determinato correttamente la funzione f da minimizzare, è una volta ottenuto che il minimo di $f(x)$ tra gli x reali e positivi viene raggiunto per $x = x_0 \simeq 7{,}94$, hanno argomentato che il minimo di $f(N)$ tra gli N interi positivi viene raggiunto per $N = 8$ perché "8 approssima 7,94 meglio di 7". Tuttavia questo argomento non è del tutto convincente, perché la domanda rilevante non è se 8 approssima 7,94 meglio di 7, ma semmai se $f(8)$ approssima $f(7{,}94)$ meglio di $f(7)$.
  Un argomento decisamente migliore, proposto da diversi altri, consiste nel confrontare i valori $f(7)$ e $f(8)$ e osservare che il secondo è più piccolo.
  Ma a ben vedere neanche questo è completamente convincente: è infatti possibile costruire una funzione f tale che il minimo di $f(x)$ tra tutti gli x reali viene raggiunto per $x = x_0 = 7{,}94$, mentre il minimo di $f(N)$ tra gli N interi non viene raggiunto né per $N = 7$ né per $N = 8$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Deve essere $-1 \leq e^{2x} - 2 \leq 1$, ovvero $0 \leq x \leq \dfrac{\log 3}{2}$,

2. $f(x) = 6x^2 - 42\,x^4 + O(x^6)$.

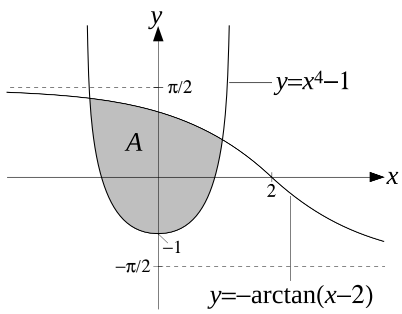
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $6a^2(1+at) = 24\,(1+at)$ che è verificata per $a = \pm 2$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(-4e^{2t}\sin(e^{2t});\ 4e^{2t}\cos(e^{2t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = 2e^2 - 2$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 2$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ per $a \leq 3$ e come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a-2}}$ per $a > 2$. Quindi converge per $a > 3$.

7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\big(e^{2t}(2t-1) - e^2\big)$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. Deve essere $e^{2x} - 2 \neq 0$, ovvero $x \neq \dfrac{\log 2}{2}$,

2. $f(x) = 4x^2 - 12\,x^4 + O(x^6)$.

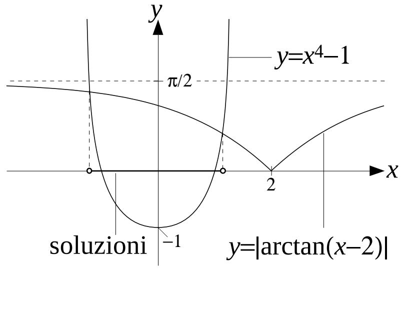
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $12\,a^2(1+at)^2 = 24\,(1+at)^2$ che è verificata per $a = \pm\sqrt{2}$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^{-t}\sin(e^{-t});\ e^{-t}\cos(e^{-t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = 1 - \frac{1}{e}$.

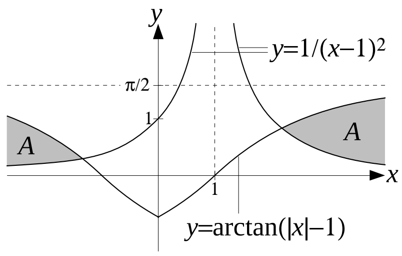
5. Il raggio di convergenza è $R = +\infty$.

6. L'integrale si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{2^x}\,dx$, e siccome $\dfrac{x^a}{2^x} \ll \dfrac{1}{x^2}$ converge per ogni $a > 0$.

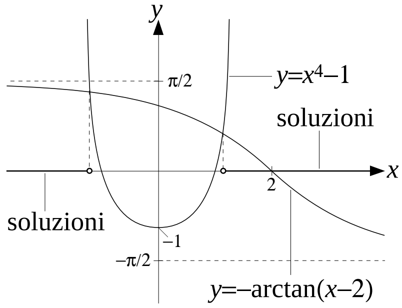
7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\big(2e^{t^2} - 2e^4\big)$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Deve essere $-1 \leq e^{4x} - 2 \leq 1$, ovvero $0 \leq x \leq \dfrac{\log 3}{4}$,
2. $f(x) = 1 - 3x^4 + O(x^8)$.
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $6a^2(1+at)^{-4} = 6(1+at)^{-4}$ che è verificata per $a = \pm 1$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(6e^{3t}\cos(e^{3t});\ -6e^{3t}\sin(e^{3t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = 2e^3 - 2$.
5. Il raggio di convergenza è $R = 4$.
6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} (a/2)^x\,dx$ e quindi converge per $0 < a < 2$.
7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \exp\big(e^{2t}(2t-1) - e^2\big) - 2$.
8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Deve essere $-1 \leq 2 - e^{4x} \leq 1$, ovvero $0 \leq x \leq \dfrac{\log 3}{4}$,
2. $f(x) = 6x^2 - 30\,x^4 + O(x^6)$.
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $6a^2(1+at) = 3(1+at)$ che è verificata per $a = \pm 1/\sqrt{2}$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(-2e^{2t}\sin(e^{2t});\ -2e^{2t}\cos(e^{2t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = e^2 - 1$.
5. Il raggio di convergenza è $R = 1/2$.
6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ per $a \geq 4$ e come $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{a-3}}$ per $a < 4$. Quindi converge per $0 < a < 2$.
7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \exp\big(2e^{t^2} - 2e^4\big) - 2$.
8. 

Prima parte, gruppo 5.

1. Deve essere $e^{2x} - 3 \neq 0$, ovvero $x \neq \dfrac{\log 3}{2}$,

2. $f(x) = 4x^2 - 4x^4 + O(x^6)$.

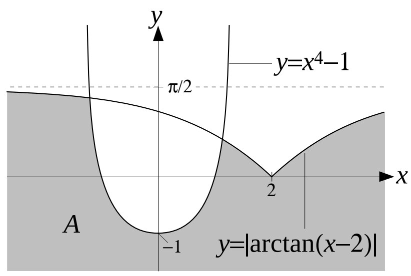
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $12\, a^2(1+at)^2 = 3(1+at)^2$ che è verificata per $a = \pm 1/2$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(2e^{-t}\sin(e^{-t});\, -2e^{-t}\cos(e^{-t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = 2 - \frac{2}{e}$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 0$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{a-3}}$ e quindi converge per $0 < a < 4$.

7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{e^{2t}(2t-1)} - 1$.

8. 

Prima parte, gruppo 6.

1. Deve essere $-1 \leq 2 - e^{2x} \leq 1$, ovvero $0 \leq x \leq \dfrac{\log 3}{2}$,

2. $f(x) = 1 - x^4 + O(x^8)$.

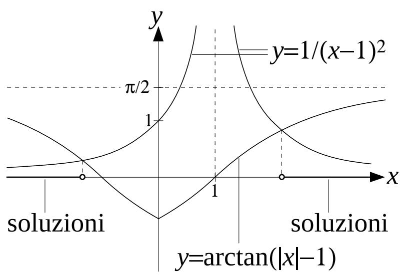
3. Sostituendo la formula per x nell'equazione si ottiene l'identità $6a^2(1+at)^{-4} = 12\,(1+at)^{-4}$ che è verificata per $a = \pm\sqrt{2}$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(3e^{3t}\cos(e^{3t});\, 3e^{3t}\sin(e^{3t})\big)$. La distanza è $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\,dt = e^3 - 1$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 1/3$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{3a}}$ e quindi converge per $0 < a < 1/3$.

7. Equazione a variabili separabili. La soluzione cercata è $x(t) = \dfrac{1}{2e^{t^2} - 1} - 1$.

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Scriviamo la funzione f nella forma

$$f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^{1/x^2} - 1 = \exp\left(\frac{1}{x^2}\log\big(\cos(2x^2)\big)\right) - 1\,.$$

Utilizzando lo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ con $t = 2x^2$ otteniamo

$$\cos(2x^2) = 1 - 2x^4 + O(x^8)\,.$$

Utilizzando quindi lo sviluppo $\log(1+t) = 1 - t + O(t^2)$ con $t = -2x^4 + O(x^8)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\log\big(\cos(2x^2)\big) &= \log(1 - 2x^4 + O(x^8)) \\ &= -2x^4 + O(x^8) + O((-2x^4)^2) = -2x^4 + O(x^8)\,,\end{aligned}$$

e dunque

$$\frac{1}{x^2}\log\big(\cos(2x^2)\big) = -2x^2 + O(x^6)\,.$$

Infine, usando lo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t = -2x^2 + O(x^6)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x^2}\log\big(\cos(2x^2)\big)\right) &= \exp\big(-2x^2 + O(x^6)\big) \\ &= 1 - 2x^2 + O(x^6) + O\big((-2x^2)^2\big) = 1 - 2x^2 + O(x^4)\,, \qquad (1)\end{aligned}$$

da cui segue $f(x) = -2x^2 + O(x^4)$ e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = -2x^2\,. \qquad (2)$$

b) Usando la formula (2) otteniamo

$$\text{p.p.}\big(f(x) - ax^2\big) = (-2-a)x^2 \quad \text{per ogni } a \neq -2.$$

Per $a = -2$ dobbiamo invece usare uno sviluppo più preciso di f. Per ottenerlo, procediamo come prima utilizzando però lo sviluppo $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$ al posto di $e^t = 1 + t + O(t^2)$ nella formula (1):

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x^2}\log\big(\cos(2x^2)\big)\right) &= \exp\big(-2x^2 + O(x^6)\big) \\ &= 1 - 2x^2 + O(x^6) + \frac{1}{2}\big(-2x^2 + O(x^6)\big)^2 + O\big((-2x^2)^3\big) \\ &= 1 - 2x^2 + 2x^4 + O(x^6)\,.\end{aligned}$$

(Che per ottenere uno sviluppo più preciso di f basti rendere più preciso solo lo sviluppo dell'esponenziale, e non quello del coseno e del logaritmo, non è per nulla evidente e anzi può sembrare sbagliato; solo controllando con cura i resti ci si rende conto che è corretto.)
Dalla formula precedente si ottiene infine $f(x) + 2x^2 = 2x^4 + O(x^6)$ e quindi

$$\text{p.p.}\big(f(x) + 2x^2\big) = 2x^4\,.$$

2. Risolvo direttamente il punto b). Per iniziare, riscrivo la disequazione $\exp(x^2) \geq x^a$ per ogni $x > 0$ nella forma

$$x^2 \geq a\log x \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Osservo adesso che questa disequazione è automaticamente verificata per $x \leq 1$ perché per tali x il logaritmo è negativo (mentre x^2 è positivo). La domanda diventa quindi: per quali $a > 0$ vale che $x^2 \geq a\log x$ per ogni $x > 1$, ovvero

$$\frac{x^2}{\log x} \geq a \quad \text{per ogni } x > 1?$$

(Ho diviso per $\log x$, che è *positivo* per $x > 1$, e quindi la disequazione non cambia.)
Ponendo $f(x) := x^2/\log x$ si vede che quest'ultima disequazione vale se e solo se

$$\min_{x>1} f(x) \geq a\,.$$

(E come al solito, se il minimo non esistesse andrebbe sostituito dall'estremo inferiore.)
Per calcolare il minimo di f studio il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{x(2\log x - 1)}{\log^2 x}\,,$$

ottenendo che f decresce nell'intervallo $(1, \sqrt{e}]$ e cresce nella semiretta $[\sqrt{e}, +\infty)$. Pertanto $\sqrt{e}$ è il punto di minimo *assoluto* di f relativamente alla semiretta $(1, +\infty)$, e quindi

$$\min_{x>1} f(x) = f(\sqrt{e}) = 2e\,,$$

e in particolare i valori di a cercati sono quelli tali che $a \leq 2e$.

Come conseseguenza dell'analisi appena fatta otteniamo infine la risposta alla domanda a): siccome $16/3 < 2e$, la disequazione $\exp(x^2) \geq x^{16/3}$ è verificata per ogni $x > 0$.

3. a), b). La soluzione dell'equazione generale differenziale lineare (*) può essere ottenuta tramite la formula

$$x = x_{\rm om} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

dove $x_{\rm om}$ è la soluzione *generale* dell'equazione omogenea associata, vale a dire

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 0\,, \tag{3}$$

mentre $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ sono rispettivamente soluzioni *particolari* delle equazioni non omogenee

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t\,, \tag{4}$$

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 4e^{2t}\,. \tag{5}$$

Calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica associata alla (3) è $\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0$, e le soluzioni sono

$$\lambda_1 = a + \sqrt{a^2-4}\,, \quad \lambda_2 = a - \sqrt{a^2-4}\,;$$

in particolare il discriminante è positivo per $a > 2$, nullo per $a = 2$ e negativo per $0 < a < 2$. Pertanto

$$x_{\rm om}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ e^{at}(c_1\cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \end{cases}$$

dove $\omega := \sqrt{|a^2-4|}$ e c_1, c_2 sono numeri reali qualunque.

Calcolo di $\tilde{x}_1$. Poiché il termine noto della (4) è un polinomio di primo grado, cerco $\tilde{x}_1$ tra i polinomi di primo grado, cioè della forma $\tilde{x}_1 = b_1 t + b_0$. Sostituendo questa espressione nella (4) otteniamo

$$(4b_1 - 8)t + (4b_0 - 2ab_1) = 0\,,$$

e questa identità è soddisfatta per ogni t se i coefficienti $4b_1 - 8$ e $4b_0 - 2ab_1$ sono entrambi nulli, ovvero se $b_1 = 2$ e $b_0 = a$; la soluzione cercata è quindi

$$\tilde{x}_1 = 2t + a\,.$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$ per $a \neq 2$. Poiché il termine noto della (5) è un multiplo di e^{2t}, e questa funzione non risolve l'equazione omogenea (3), cerco $\tilde{x}_2$ tra i multipli di e^{2t}, cioè della forma $\tilde{x}_1 = be^{2t}$. Sostituendo questa espressione nella (4) otteniamo l'identità $(8-4a)be^{2t} = 4e^{2t}$, che è soddisfatta se $(8-4a)b = 4$, ovvero se $b = 1/(2-a)$; la soluzione cercata è quindi

$$\tilde{x}_2 = \frac{e^{2t}}{2-a} \quad \text{per } a \neq 2.$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$ per $a = 2$. In questo caso sia e^{2t} che te^{2t} risolvono l'equazione omogenea (3), e quindi cerco $\tilde{x}_2$ della forma $\tilde{x}_1 = bt^2e^{2t}$. Sostituendo questa espressione nella (4) otteniamo l'identità $2be^{2t} = 4e^{2t}4$, che è soddisfatta per $b = 2$; la soluzione cercata è quindi

$$\tilde{x}_2 = 2t^2 e^{2t} \quad \text{per } a = 2.$$

c) Per quanto visto sopra, per $a > 2$ la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + t + 2 + \frac{e^{2t}}{2-a}\,.$$

Osserviamo ora che $\lambda_1 > \lambda_2$ e $\lambda_1 > a > 2$, quindi tutti gli addendi alla destra dell'uguale nell'equazione precedente (tranne il primo, ovviamente) sono trascurabili rispetto a $e^{\lambda_1 t}$ per $t \to +\infty$; pertanto

$$x(t) \sim c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{se } c_1 \neq 0,$$

da cui segue che

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} c_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c_1 > 0, \\ -\infty & \text{se } c_1 < 0. \end{cases}$$

In particolare la soluzione $x(t)$ tende a $+\infty$ se $c_1 > 0$ (qualunque sia c_2).

4. a) Osserviamo che la funzione $f(x)$ è ben definita, positiva e continua per $x > 0$, ma non è definita per $x = 0$; quindi l'integrale da studiare è improprio semplice in 0 ed ammette solo due comportamenti: o converge a un numero finito (positivo), oppure diverge a $+\infty$.
Per capire quale dei due casi si verifica, studio il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to 0$. Usando lo sviluppo $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$ con $t = x^a$ ottengo $\exp(x^a) - 1 \sim x^a$ e dunque

$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}} \sim \frac{1}{x^{a(a+4)}} .$$

Quindi

$$\int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{si comporta come} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^{a(a+4)}} ,$$

e pertanto è finito se e solo se $a(a+4) < 1$, vale a dire $0 < a < -2 + \sqrt{5}$.

b) Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e come il precedente ammette solo due casi: o converge a un numero positivo finito oppure diverge a $+\infty$. Usando che $e^t \gg t^b$ per $t \to +\infty$ e per ogni $b > 0$ ottengo

$$\exp(x^a) - 1 \sim \exp(x^a) \gg (x^a)^b = x^{ab}$$

e quindi

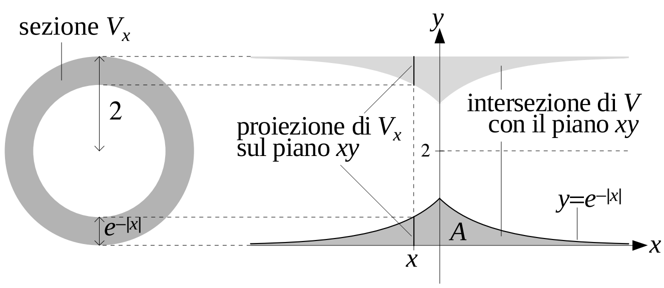
$$(\exp(x^a) - 1)^{a+4} \gg x^{ba(a+4)} .$$

Prendendo ora $b = \frac{2}{a(a+4)}$ ottengo

$$(\exp(x^a) - 1)^{a+4} \gg x^2 , \quad f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}} \ll \frac{1}{x^2} ,$$

e pertanto l'integrale $\int_1^\infty f(x)\,dx$ è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, per ogni $a > 0$.

5. a) Per ogni $x \in R$ indico con V_x la sezione ottenuta intersecando V con il piano ortogonale all'asse delle x e passante per il punto x (o meglio il punto $(x, 0, 0)$).



Come si vede dal disegno, V_x è una corona circolare con raggio esterno $r_e = 2$ e raggio interno $r_i = 2 - e^{-|x|}$, e quindi

$$\text{area}(V_x) = \pi\big(r_e^2 - r_i^2\big) = \pi\big(4 - (2 - e^{-|x|})^2\big) = \pi\big(4e^{-|x|} - e^{-2|x|}\big) .$$

b) Com'è noto, il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{area}(V_x)\,dx = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-|x|} - e^{-2|x|}\,dx ,$$

e siccome la funzione integranda è pari, l'ultimo integrale è il doppio di quello con estremi di integrazione 0 e $+\infty$, vale a dire

$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} 4e^{-x} - e^{-2x}\,dx = 2\pi \left| -4e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} \right|_0^{+\infty} = 7\pi\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1:
$$\text{p.p.}\big(f(x)\big) = -2x^4\,;\quad \text{p.p.}\big(f(x) - ax^4\big) = \begin{cases} (-2-a)x^4 & \text{per } a \neq -2; \\ 2x^8 & \text{per } a = -2. \end{cases}$$

2. b) Analogo al gruppo 1: i valori di a cercati sono $a \leq 4e$.
   a) Siccome $21/2 < 4e$ la disuguaglianza in questione vale per ogni $x > 0$.

3. Analogo al gruppo 1.
   a) e b). La soluzione è $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ dove:
$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ e^{at}(c_1\cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \end{cases}$$
   con $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2-9}$, $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2-9}$, $\omega := \sqrt{|a^2-9|}$, e c_1, c_2 numeri reali qualunque;
$$\tilde{x}_1 = t + \frac{2a}{9}\,,\quad \tilde{x}_2 = \begin{cases} \frac{e^{3t}}{3-a} & \text{se } a \neq 3, \\ 3t^2 e^{3t} & \text{se } a = 3. \end{cases}$$
   c) La soluzione $x(t)$ tende a $+\infty$ se $c_1 > 0$ (qualunque sia c_2).

4. Uguale al gruppo 1.

5. Analogo al gruppo 1: la sezione V_x è una corona circolare con raggio esterno $r_e = 3$ e raggio interno $r_i = 3 - e^{-|x|}$, e quindi
$$\text{area}(V_x) = \pi\big(6e^{-|x|} - e^{-2|x|}\big)\,,\quad \text{volume}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{area}(V_x)\,dx = 11\,\pi\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Uguale al gruppo 1.

2. b) Uguale al gruppo 1: i valori di a cercati sono $a \leq 2e$.
   a) Siccome $11/2 > 2e$ la disuguaglianza in questione non vale per ogni $x > 0$.

3. Analogo al gruppo 1.
   a) e b). La soluzione è $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ dove:
$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ e^{at}(c_1\cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \end{cases}$$
   con $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2-4}$, $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2-4}$, $\omega := \sqrt{|a^2-4|}$, e c_1, c_2 numeri reali qualunque;
$$\tilde{x}_1 = t + \frac{a}{2}\,,\quad \tilde{x}_2 = \begin{cases} \frac{e^{2t}}{a-2} & \text{se } a \neq 2, \\ -2t^2 e^{2t} & \text{se } a = 2. \end{cases}$$
   c) La soluzione $x(t)$ tende a $+\infty$ se $c_1 < 0$ (qualunque sia c_2).

4. Analogo al gruppo 1: l'integrale in a) è finito se $0 < a < -1 + \sqrt{2}$, mentre l'integrale in b) è finito per ogni $a > 0$.

5. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Uguale al gruppo 2.

2. b) Uguale al gruppo 2: i valori di a cercati sono $a \leq 4e$.
   a) Siccome $11 > 4e$ la disuguaglianza in questione non vale per ogni $x > 0$.

3. Analogo al gruppo 1.
   a) e b). La soluzione è $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ dove:

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \end{cases}$$

   con $\lambda_1 := a + \sqrt{a^2 - 9}$, $\lambda_2 := a - \sqrt{a^2 - 9}$, $\omega := \sqrt{|a^2 - 9|}$, e c_1, c_2 numeri reali qualunque;

$$\tilde{x}_1 = 3t + \frac{2a}{3}\,, \quad \tilde{x}_2 = \begin{cases} \frac{e^{3t}}{a-3} & \text{se } a \neq 3, \\ -3t^2 e^{3t} & \text{se } a = 3. \end{cases}$$

   c) La soluzione $x(t)$ tende a $+\infty$ se $c_1 < 0$ (qualunque sia c_2).

4. Uguale al gruppo 3.

5. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno calcolato la parte principale di $f(x)$ come segue (tralascio i resti, che non sono il punto):

$$f(x) := \big(\cos(2x^2)\big)^{1/x^2} - 1 = (1 - 2x^4)^{1/x^2} - 1 = 1 + \frac{1}{x^2}(-2x^4) - 1 = -2x^2\,,$$

  dove nel secondo passaggio è stato usato lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at$ con $t = -2x^4$ e $a = 1/x^2$. Anche se il risultato è corretto, la procedura è sbagliata perché non si può applicare questo sviluppo con a non costante. E infatti in situazioni analoghe questa procedura porta a risultati errati.

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno riscritto la disequazione $\exp(x^2) \geq x^a$ (mi riferisco qui al gruppo 1) come $x^2 \geq a \log x$, e quindi hanno diviso per $\log x$ ottenendo $x^2/\log x \geq a$, ma questo passaggio non è corretto perché $\log x$ non è sempre positivo. Con poche eccezioni, le stesse persone hanno quindi cercato di calcolare il minimo di $f(x) := x^2/\log x$ per $x > 0$ senza accorgersi che questa funzione ha un'asintoto verticale in 1 (dove non è definita) e che l'estremo inferiore dei valori è $-\infty$; in particolare queste persone non si sono accorte che $\sqrt{e}$ è solo un punti di minimo locale di $f(x)$. Anche se il risultato finale è corretto, questa soluzione è concettualmente sbagliata (in modo anche grave).

- Seconda parte, esercizio 2. Una soluzione alternativa consiste nel riscrivere la disequazione come $x^{-a}\exp(x^2) \geq 1$ (mi riferisco al gruppo 1) e quindi calcolare il valore minimo della funzione $x^{-a}\exp(x^2)$ tra tutti gli $x > 0$.
  Un'altra soluzione consiste nel riscrivere la disequazione come $x^2 - a\log x \geq 0$ e quindi calcolare il valore minimo della funzione $x^2 - a\log x$ tra tutti gli $x > 0$.

- Seconda parte, esercizio 3. Diversi dei presenti hanno omesso di scrivere la soluzione dell'equazione omogenea nel caso in cui l'equazione caratteristica ha radici complesse, oppure l'hanno scritta incompleta (senza specificare i valori di ρ e ω che appaiono nella formula) oppure sbagliata (per esempio, nel caso del gruppo 1, alcuni hanno scritto $\omega = \sqrt{a^2 - 4}$, per cui ω non è un numero reale).

- Seconda parte, esercizio 3. Nel calcolare le costanti che determinano le soluzioni particolari, alcuni dei presenti hanno ottenuto valori che dipendono da t, per cui le costanti non sono costanti; questo è un errore grave.

- Seconda parte, esercizio 3. Il punto c) è stato svolto da pochi, e pochissimi hanno messo chiaramente in evidenza il punto chiave, vale a dire che la soluzione è asintoticamente equivalente a $c_1 e^{\lambda_1 t}$ (quando $c_1 \neq 0$).

- Seconda parte, esercizio 4. Molti dei presenti hanno dato la risposta corretta al punto b), vale a dire che l'integrale è finito per ogni $a > 0$, ma senza dare alcuna dimostrazione, o nel migliore dei casi dicendo che la funzione integranda è trascurabile rispetto a $1/x^2$ per $x \to +\infty$. Questo fatto è vero, ma non così evidente da non richiedere alcuna dimostrazione. (La sensazione è che per molti l'integrale converge semplicemente perché c'è un esponenziale di mezzo...)

Prima parte, gruppo 1.

1. Le soluzioni sono $\frac{7}{12}\pi \le x \le \frac{11}{12}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -3/2$; il punto di massimo assoluto non esiste.

3. I risultati sono: a) non esiste; b) $+\infty$; c) 1.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^8$ ottengo

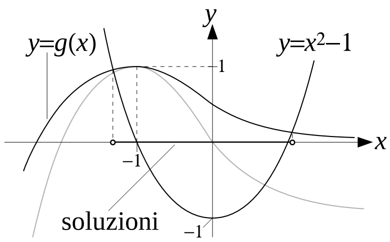
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^7}{(1+4x^8)^4}\,dx = \frac{1}{32}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^4} = -\frac{1}{96}\left|\frac{1}{y^3}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{96}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $a > 2$.

6. $R = +\infty$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = 2t^2 - 4$.

8.



Prima parte, gruppo 2.

1. Le soluzioni sono $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2}{3}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto non esiste; il punto di massimo assoluto è $x = 4$.

3. I risultati sono: a) 1; b) 0; c) non esiste.

4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^4$ ottengo

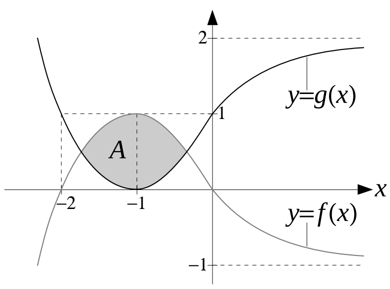
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+4x^4)^3}\,dx = \frac{1}{16}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{32}\left|\frac{1}{y^2}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{32}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $0 < a < 2$.

6. $R = 0$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = t^2 - 1$.

8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Le soluzioni sono $\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{5}{6}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -3/2$; il punto di massimo assoluto è $x = 0$.

3. I risultati sono: a) 0; b) $+\infty$; c) non esiste.

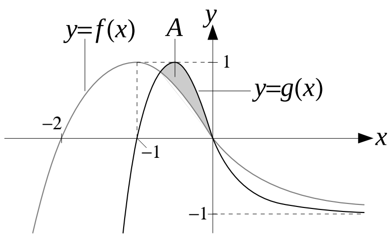
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^6$ ottengo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^5}{(1+4x^6)^2}\,dx = \frac{1}{24}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{24}\left|\frac{1}{y^1}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{24}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $a > 3$.

6. $R = +\infty$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = -2t^2 - 2$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Le soluzioni sono $\dfrac{2}{3}\pi \le x \le \dfrac{5}{6}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto non esiste; il punto di massimo assoluto è $x = 3$.

3. I risultati sono: a) -2; b) $-\infty$; c) 1.

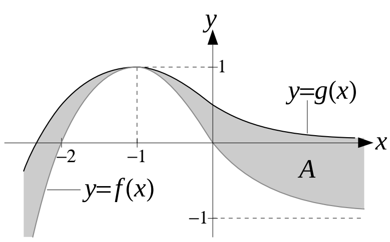
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^8$ ottengo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^7}{(1+4x^8)^5}\,dx = \frac{1}{32}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^5} = -\frac{1}{128}\left|\frac{1}{y^4}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{128}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $a > 3$.

6. $R = 2$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = -2t^2 + 4$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Le soluzioni sono $\dfrac{5}{12}\pi \le x \le \dfrac{7}{12}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = -2$; il punto di massimo assoluto non esiste.

3. I risultati sono: a) 1; b) 0; c) 1.

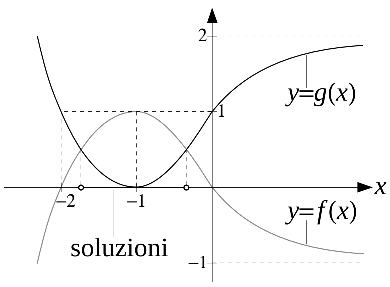
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^4$ ottengo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+4x^4)^4}\,dx = \frac{1}{16}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^4} = -\frac{1}{48}\left|\frac{1}{y^3}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{48}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $0 < a < 3$.

6. $R = \dfrac{5}{2}$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = -t^2 + 1$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Le soluzioni sono $\dfrac{\pi}{12} \le x \le \dfrac{11}{12}\pi$.

2. Il punto di minimo assoluto è $x = 0$; il punto di massimo assoluto è $x = 3$.

3. I risultati sono: a) non esiste; b) 0; c) non esiste.

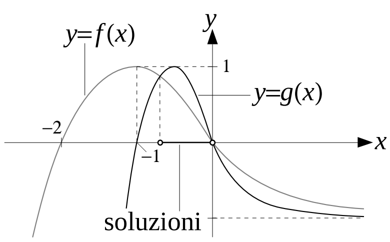
4. Utilizzando il cambio di variabile $y = 1 + 4x^6$ ottengo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^5}{(1+4x^6)^3}\,dx = \frac{1}{24}\int_{+\infty}^{1} \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{48}\left|\frac{1}{y^2}\right|_{+\infty}^{1} = -\frac{1}{48}\,.$$

5. I valori di a cercati sono $a > 2$.

6. $R = \dfrac{2}{5}$.

7. Cerco x tra i polinomi di secondo grado, vale a dire $x = at^2 + bt + c$, e ottengo $x = -t^2 - 1$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dividendo l'equazione (*) per $x^2 - 3$ ottengo

$$\frac{e^x}{x^2-3} = a \tag{1}$$

(il passaggio è corretto perché $x^2 - 3$ vale zero solo per $x = \pm\sqrt{3}$, e queste non sono soluzioni dell'equazione). Studio quindi la funzione

$$f(x) := \frac{e^x}{x^2-3}\,.$$

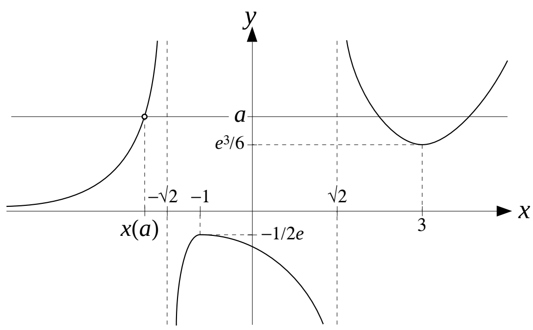
Questa funzione è definita per ogni $x \neq \pm\sqrt{3}$, è negativa per $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ e positiva altrimenti. Inoltre

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to(-\sqrt{3})^-} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^-} f(x) = -\infty\,, \\
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,.
\end{aligned}$$

Infine, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{e^x}{(x^2-3)^2}(x^2 - 2x - 3)$$

ottengo che f cresce negli intervalli $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1]$ e $[3, +\infty)$, e decresce negli intervalli $(-1, \sqrt{3})$ e $(\sqrt{3}, 3]$. In particolare -1 è un punto di massimo locale, e $f(-1) = -1/(2e)$, mentre 3 un punto di minimo locale, e $f(3) = e^3/6$.
Utilizzando queste informazioni traccio il grafico riportato nella figura sotto.



a) Chiamo N il numero di soluzioni dell'equazione (*), o equivalentemente dell'equazione (1). Usando dalla figura sopra si vede subito che

$$N = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < a < e^3/6, \\ 2 & \text{per } a = e^3/6, \\ 3 & \text{per } a > e^3/6. \end{cases}$$

b) Sempre dalla figura sopra è evidente che $x(a)$ tende a $L = -\sqrt{3}$ per $a \to +\infty$.

c) Devo trovare la parte principale per $a \to +\infty$ di

$$z(a) := x(a) - L = x(a) + \sqrt{3}\,.$$

Sostituendo x con $z - \sqrt{3}$ l'equazione (1) diventa

$$a = \frac{e^x}{x^2-3} = \frac{e^{z-\sqrt{3}}}{(z-\sqrt{3})^2 - 3} = \frac{e^{z-\sqrt{3}}}{z^2 - 2\sqrt{3}\,z} \tag{2}$$

(attenzione, anche se non lo scrivo esplicitamente, sia x che z sono funzioni di a). Ora, siccome $z(a) \to 0$ per $a \to +\infty$, ho che

$$\frac{e^{z-\sqrt{3}}}{z^2 - 2\sqrt{3}\,z} \sim \frac{e^{-\sqrt{3}}}{-2\sqrt{3}\,z} = -\frac{1}{2\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}}z}$$

e quindi l'equazione (2) diventa

$$a \sim -\frac{1}{2\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}}\,z} \quad \text{ovvero} \quad z \sim -\frac{1}{2\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}}\,a}\,.$$

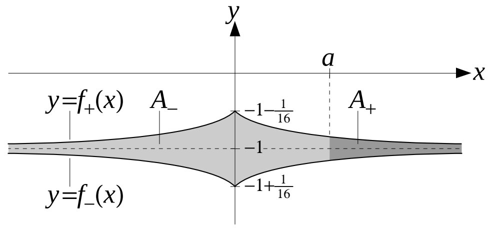
In conclusione

$$\text{p.p.}\big(x(a) - L\big) = \text{p.p.}(z(a)) = -\frac{1}{2\sqrt{3}\,e^{\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{a} \quad \text{per } a \to +\infty.$$

2. a) Riscrivo la disequazione che determina i punti di A come

$$\underbrace{-1 - \frac{1}{(|x|+2)^4}}_{f_-(x)} \le y \le \underbrace{-1 + \frac{1}{(|x|+2)^4}}_{f_+(x)}\,.$$

Disegno i grafici delle due funzioni $f_-(x)$ e $f_+(x)$ partendo dal grafico (ben noto!) della funzione $1/x^4$, e ottengo il disegno sottostante, dove A è l'insieme in grigio.



L'area di A è dunque data dall'integrale improprio

$$\begin{aligned}\text{area}(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(x) - f_-(x)\,dx \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(|x|+2)^4} = 4\int_0^{+\infty} (x+2)^{-4}\,dx = 4\left|\frac{(x+2)^{-3}}{-3}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho utilizzato che la funzione integranda è pari per passare dall'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ all'integrale da 0 a $+\infty$).

b) Considero una generica retta verticale di equazione $x = a$ con $a > 0$, e indico con A_- e A_+ le parti di A che stanno rispettivamente a sinistra e a destra di questa retta (vedere la figura sopra). Il punto è trovare a in modo tale che A_+ (la parte più "piccola") soddisfi

$$\text{area}(A_+) = \frac{1}{18}\,, \tag{3}$$

così facendo si ottiene infatti che $\text{area}(A_-) = \text{area}(A) - \text{area}(A_+) = 1/9$, e quindi l'area di A_- è il doppio di quella di A_+.
Poiché l'area di A_+ è data da

$$\text{area}(A_+) = 2\int_a^{+\infty} (x+2)^{-4}\,dx = 2\left|\frac{(x+2)^{-3}}{-3}\right|_a^{+\infty} = \frac{2}{3(a+2)^3}\,,$$

imponendo la (3) ottengo

$$\frac{2}{3(a+2)^3} = \frac{1}{18} \quad \text{cioè} \quad a = \sqrt[3]{12} - 2 \simeq 0{,}29\,.$$

3. a) Si tratta di una serie a termini positivi, che quindi converge ad un numero finito oppure diverge a $+\infty$. Applico ora il criterio del rapporto: indicando con a_n l'n-esimo addendo della serie ottengo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{((n+1)^2)}}{(n+1)^2+1} \Big/ \frac{a^{(n^2)}}{n^2+1} = a^{2n+1}\,\frac{n^2+1}{n^2+2n+2} \sim a^{2n+1} \quad \text{per } n \to +\infty,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 1 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Pertanto la serie converge per $a < 1$ e diverge per $a > 1$.
Per $a = 1$ il criterio del rapporto non permette di determinare il comportamento della serie, ma il criterio del confronto asintotico mostra che la serie si comporta come la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^2$, e in particolare converge.

b) Faccio vedere che la serie

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}}$$

è approssimata dalla somma parziale

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{80} = \frac{21}{80} = 2{,}625$$

con errore inferiore a 10^{-3}, ovvero che

$$|S - S_2| \le 10^{-3}\,. \tag{4}$$

Osservo per cominciare che

$$S - S_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}}\,;$$

questo dimostra che $S - S_2$ è un numero positivo, e quindi la stima (4) si riduce a $S - S_2 \le 10^{-3}$.
Osservo inoltre che per $n \ge 3$ si ha $n^2 + 1 \ge 3^2 + 1 = 10$ e $n^2 \ge 3n$, e quindi

$$\frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}} \le \frac{1}{10 \cdot 2^{3n}}\,,$$

da cui si ottiene infine

$$\begin{aligned} S - S_2 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\, 2^{(n^2)}} \\ &\le \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{10 \cdot 2^{3n}} = \frac{1}{10} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{10 \cdot 8^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n} \\ &= \frac{1}{10 \cdot 8^3} \cdot \frac{1}{1 - 1/8} = \frac{1}{10 \cdot 8^2 \cdot 7} = \frac{1}{4480} \le \frac{1}{10^3} \end{aligned}$$

(nella terza riga ho usato la formula per la serie geometrica di base 1/8).

Seconda parte, gruppo 2.

1. Procedo come per il gruppo 1 e riscrivo l'equazione nella forma $f(x) = a$ con

$$f(x) := \frac{e^x}{x^2 - 8}\,.$$

Il grafico di f assomiglia a quello del gruppo 1, con le seguenti differenze:
- gli asintoti verticali sono in $\pm\sqrt{8}$;
- il punto di minimo locale è $x = -2$, e $f(-2) = -1/(4e^2)$;
- il punto di massimo locale è $x = 4$, e $f(4) = e^4/8$.

a) Partendo dal grafico di f si vede subito che

$$N = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < a < e^4/8, \\ 2 & \text{per } a = e^4/8, \\ 3 & \text{per } a > e^4/8. \end{cases}$$

b) Partendo dal grafico di f si vede subito che $L = -\sqrt{8}$.

c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene $\text{p.p.}\big(x(a) - L\big) = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}\, e^{\sqrt{8}}} \cdot \dfrac{1}{a}$.

2. Analogo al gruppo 1.
   a) area$(A) = 1/8$.
   b) La retta cercata è quella di equazione $x = \sqrt{24} - 4 \simeq 0{,}90$.

3. a) Simile al gruppo 1. Usando il criterio del rapporto si vede che la serie S converge per $a < 1$ e diverge per $a > 1$, e diverge anche per $a = 1$ per confronto asintotico con la serie armonica.
   b) La serie S si approssima con la somma parziale
$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{(n+2)\,2^{(n^2)}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{64} = 0{,}1822\ldots$$
con errore inferiore a 10^{-3}. Per dimostrarlo procedo come per il gruppo 1, partendo dalla stima
$$\frac{1}{(n+2)\,2^{(n^2)}} \le \frac{1}{5 \cdot 2^{3n}}\,,$$
da cui ottengo
$$S - S_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^{(n^2)}(n^2+1)} \le \frac{1}{10} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \frac{1}{2240} \le \frac{1}{10^3}\,.$$

Seconda parte, gruppo 3.

1. Procedo come per il gruppo 1 e riscrivo l'equazione nella forma $f(x) = a$ con
$$f(x) := \frac{e^x}{x^2 - 3}\,.$$
La funzione f è la stessa del gruppo 1 (il cui grafico è stato disegnato sopra).
   a) Partendo dal grafico di f si vede subito che
$$N = \begin{cases} 0 & \text{per } -1/(2e) < a < 0, \\ 1 & \text{per } a = -1/(2e), \\ 2 & \text{per } a < -1/(2e). \end{cases}$$
   b) Partendo dal grafico di f si vede subito che $L = +\sqrt{3}$.
   c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene p.p.$\big(x(a) - L\big) = \dfrac{e^{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{a}$.

2. Analogo al gruppo 1.
   a) area$(A) = 1/6$.
   b) La retta cercata è quella di equazione $x = \sqrt[3]{12} - 2 \simeq 0{,}29$.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Procedo come per il gruppo 1 e riscrivo l'equazione nella forma $f(x) = a$ con
$$f(x) := \frac{e^x}{x^2 - 8}\,.$$
La funzione f è la stessa del gruppo 2.
   a) Partendo dal grafico di f si vede subito che
$$N = \begin{cases} 0 & \text{per } -1/(4e^2) < a < 0, \\ 1 & \text{per } a = -1/(4e^2), \\ 2 & \text{per } a < -1/(4e^2). \end{cases}$$

b) Partendo dal grafico di f si vede subito che $L = +\sqrt{8}$.

c) Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene $\text{p.p.}\big(x(a) - L\big) = \dfrac{e^{\sqrt{8}}}{4\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{a}$.

2. Analogo al gruppo 1.
   a) $\text{area}(A) = 1/8$.
   b) La retta cercata è quella di equazione $x = \sqrt{24} - 4 \simeq 0{,}90$.

3. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. La maggior parte dei presenti, pur avendo svolto correttamente il punto a), non ha risolto il punto b) che pure è elementare, e sopratutto analogo ad esercizi già dati in più di un'occasione in passato.

- Seconda parte, esercizio 3. È possibile affrontare il punto a) in molti altri modi; per esempio, utilizzando il criterio della radice invece che il criterio del rapporto. Inoltre per dimostrare che la serie diverge per $a > 1$ si può usare che l'addendo a_n tende a $+\infty$, mentre per dimostrare che converge per $a < 1$ si può usare il confronto con la serie geometrica a^n: vale infatti che $a_n \le a^{n^2} \le a^n$ per ogni n (per tutti i gruppi).

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) $\dfrac{2x}{x^4-2x^2+2}$; b) $\dfrac{4}{x}-1$.

2. $b \ll c \ll a \ll d$.

3. $\alpha = \pi/4$.

4. Utilizzando la sostituzione $y = x^4 + 1$ si ottiene

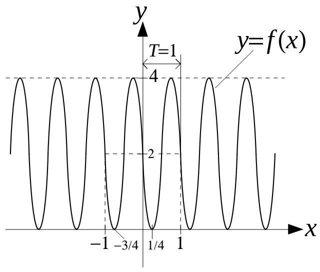
$$\int_0^1 \frac{2x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 y^{-1/4}dy = \frac{1}{2}\left|\frac{y^{3/4}}{3/4}\right|_1^2 = \frac{2}{3}(2^{3/4}-1)\,.$$

5. $f(x)$= $(1+2x^4)\log(1+2x^4) = (1+2x^4)\big(2x^4-2x^8+O(x^{12})\big) = 2x^4+2x^8+O(x^{12})$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4\sin(1/n^a)}{n^{2a}+n^a} \approx \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4/n^a}{n^{2a}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3a-4}}$ converge per $a > 5/3$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -2\cos(2t)+2$

8. Il periodo è $T = 1$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) $\dfrac{6x^5}{\sqrt{2x^6-x^{12}}} = \dfrac{\pm 6x^2}{\sqrt{2-x^6}}$; b) $\dfrac{3}{x}-\log 2$.

2. $b \ll d \ll a \ll c$.

3. $\alpha = -\pi/4$.

4. Utilizzando la sostituzione $y = x^6 + 1$ si ottiene

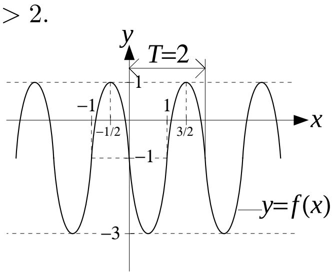
$$\int \frac{2x^5}{\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int y^{-1/3}dy = \frac{1}{2}y^{2/3}+c = \frac{1}{2}(x^6+1)^{2/3}+c\,.$$

5. $f(x)$= $(3+x^4)\sin(2x^2) = (3+x^4)\big(2x^2-\frac{4}{3}x^6+O(x^{10})\big) = 6x^2-2x^6+O(x^{10})$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n\log(1+1/a^n)}{a^n+n^2} \approx \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n/a^n}{a^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(4/a^2)^n$ converge per $a > 2$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -\cos(2t)+1$

8. Il periodo è $T = 2$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) $\dfrac{4x^3}{x^8+2x^4+2}$; b) $\dfrac{2}{x}-\log 3$.

2. $d \ll a \ll b \ll c$.

3. $\alpha = 3\pi/4$.

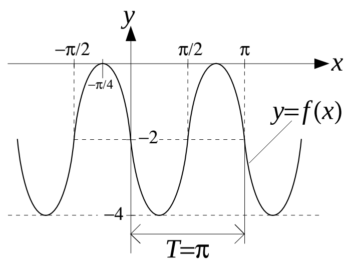
4. Utilizzando la sostituzione $y = x^6 + 1$ si ottiene
$$\int_0^1 \frac{2x^5}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dy}{y} = \frac{1}{3}\Big|\log y\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\log 2\,.$$

5. $f(x)$= $(1-x^4)\log(1+2x^4) = (1-x^4)\big(2x^4 - 2x^8 + O(x^{12})\big) = 2x^4 - 4x^8 + O(x^{12})$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4\sin(1/n^a)}{2^n+1} \approx \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{4-a}}{2^n}$ converge per ogni $a > 0$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -\cos(3t) + 1$

8. Il periodo è $T = \pi$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 4.

1. a) $\dfrac{4x^3}{\sqrt{2x^4 - x^8}} = \dfrac{4x}{\sqrt{2-x^4}}$; b) $1 - \dfrac{4}{x}$.

2. $b \ll c \ll a \ll d$.

3. $\alpha = -\pi/4$.

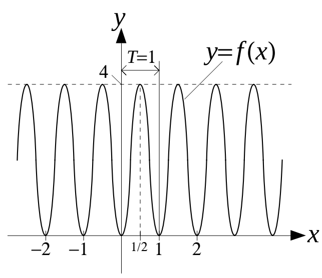
4. Utilizzando la sostituzione $y = x^4 + 1$ si ottiene
$$\int \frac{2x^3}{\sqrt[4]{x^4+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int y^{-1/4}dy = \frac{2}{3}y^{3/4} + c = \frac{2}{3}(x^4+1)^{3/4} + c\,.$$

5. $f(x)$= $(3-x^4)\sin(2x^2) = (3-x^4)\big(2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + O(x^{10})\big) = 6x^2 - 6x^6 + O(x^{10})$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4\sin(1/n^a)}{n^{3a}+n^a} \approx \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4/n^a}{n^{3a}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{4a-4}}$ converge per $a > 5/4$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -\sin(2t) + 2t$

8. Il periodo è $T = 1$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 5.

1. a) $\dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}$; b) $\log 2 - \dfrac{3}{x}$.

2. $c \ll b \ll a \ll d$.

3. $\alpha = -3\pi/4$.

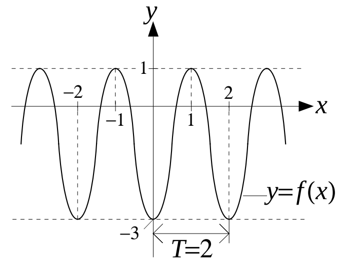
4. Utilizzando la sostituzione $y = x^6 + 1$ si ottiene
$$\int_0^1 \frac{2x^5}{\sqrt[3]{x^6+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 y^{-1/3}dy = \frac{1}{3}\left|\frac{y^{2/3}}{2/3}\right|_1^2 = \frac{1}{2}(2^{2/3}-1)\,.$$

5. $f(x)$= $(1-x^2)\log(1+2x^2) = (1-x^2)\big(2x^2 - 2x^4 + O(x^6)\big) = 2x^2 - 4x^4 + O(x^6)$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n\log(1+1/a^n)}{a^{3n}+n^2} \approx \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n/a^n}{a^{3n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(4/a^4)^n$ converge per $a > \sqrt{2}$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -\frac{1}{2}\sin(2t) + t$

8. Il periodo è $T = 2$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 6.

1. a) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \dfrac{\pm 2}{\sqrt{2-x^2}}$; b) $\log 3 - \dfrac{2}{x}$.

2. $c \ll a \ll d \ll b$.

3. $\alpha = \pi/4$.

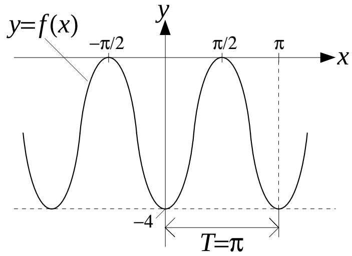
4. Utilizzando la sostituzione $y = x^6 + 1$ si ottiene
$$\int \frac{2x^5}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{3}\log y + c = \frac{1}{3}\log(x^6+1) + c\,.$$

5. $f(x) = (3-x^2)\sin(2x) = (3-x^2)\big(2x - \frac{4}{3}x^3 + O(x^5)\big) = 6x - 6x^3 + O(x^5)$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \sin(1/n^a)}{n^{2a}+n^a} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^{3a}}$ non converge per alcun $a > 0$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = -\frac{1}{3}\sin(3t) + t$

8. Il periodo è $T = \pi$; il grafico è disegnato nella figura accanto.



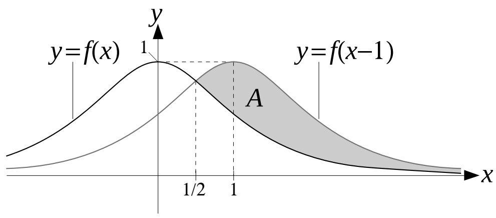
Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Usando lo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^4)$ con $t = 2x$ ottengo
$$\cos(2x^2) = 1 - 2x^4 + O(x^8)\,.$$
Usando poi lo sviluppo $(1+t)^6 = 1 + 6t + O(t^2)$ con $t = -2x^4 + O(x^8)$ ottengo
$$\begin{aligned}\big(\cos(2x^2)\big)^6 &= \big(1 - 2x^4 + O(x^8)\big)^6\\ &= 1 + 6\big[-2x^4 + O(x^8)\big] + O\big[(-2x^4)^2\big] = 1 - 12\,x^4 + O(x^8)\,,\end{aligned}$$
e quindi $f(x) = -12\,x^4 + O(x^8)$, da cui segue infine che
$$\text{p.p.}(f(x)) = -12\,x^4\,.$$
b) Partendo da quanto fatto al punto precedente ottengo subito che
$$\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = (a-12)\,x^4 \quad \text{per } a \neq 12.$$
Per $a = 12$ devo invece usare uno sviluppo più preciso di $f(x)$. Partendo dallo sviluppo $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/24 + O(t^6)$ con $t = 2x$ ottengo
$$\cos(2x^2) = 1 - 2x^4 + \tfrac{2}{3}x^8 + O(x^{12})\,;$$
usando quindi lo sviluppo $(1+t)^6 = 1 + 6t + 15\,t^2 + O(t^3)$ con $t = -2x^4 + \frac{2}{3}x^8 + O(x^{12})$ ottengo
$$\begin{aligned}\big(\cos(2x^2)\big)^6 &= \big(1 - 2x^4 + \tfrac{2}{3}x^8 + O(x^{12})\big)^6\\ &= 1 + 6\big[-2x^4 + \tfrac{2}{3}x^8 + O(x^{12})\big] + 15\,\big[-2x^4 + O(x^8)\big]^2 + O\big[(-2x^4)^3\big]\\ &= 1 - 12\,x^4 + 4x^8 + O(x^{12}) + 15\,\big[4x^8 + O(x^{12})\big] + O(x^{12})\\ &= 1 - 12\,x^4 + 64\,x^8 + O(x^{12})\,,\end{aligned}$$

e quindi $f(x) = -12\,x^4 + 64\,x^8 + O(x^{12})$, da cui segue che

$$\text{p.p.}(f(x) + 12\,x^4) = 64\,x^8\,.$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, sempre positiva, pari, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata vedo che $f(x)$ è crescente nella semiretta $x \le 0$ e decrescente nella semiretta $x \ge 0$. Infine risolvendo la disequazione $f(x) \le f(x-1)$ ottengo $x \ge 1/2$.
Sulla base di queste informazioni traccio il disegno sottostante.



b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{1/2}^{+\infty} f(x-1) - f(x)\,dx\,, \tag{1}$$

e per capire se questo integrale improprio è finito o meno studio il comportamento asintotico della funzione $f(x-1) - f(x)$ per $x \to +\infty$. Per cominciare osservo che

$$\begin{aligned} f(x-1) = (x^2 - 2x + 2)^{-1/3} &= x^{-2/3}\big(1 - 2x^{-1} + O(x^{-2})\big)^{-1/3} \\ &= x^{-2/3}\big(1 + \tfrac{2}{3}x^{-1} + O(x^{-2})\big) \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+t)^{-1/3} = 1 - t/3 + O(t^2)$ con $t = x^{-2}$). Analogamente

$$\begin{aligned} f(x) = (x^2 + 1)^{-1/3} &= x^{-2/3}\big(1 + x^{-2}\big)^{-1/3} \\ &= x^{-2/3}\big(1 - \tfrac{2}{3}x^{-2} + O(x^{-4})\big)\,. \end{aligned}$$

Mettendo insieme questi due sviluppi ottengo infine che

$$f(x-1) - f(x) \sim \tfrac{2}{3}x^{-5/3} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

da cui segue che l'integrale improprio che dà l'area di A si comporta come $\int_1^\infty x^{-5/3}dx$, ed in particolare è finito.

3. a) All'istante t, la distanza di P dall'origine è data da

$$d(t) = |P(t)| = \sqrt{(2t^2 - \tfrac{2}{3})^2 + (t^3 - t)^2)} = \sqrt{t^6 + 2t^4 - \tfrac{5}{3}t^2 + \tfrac{4}{9}}\,.$$

La funzione $d(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, pari, e tende a $+\infty$ per $t \to \pm\infty$, e la derivata

$$d'(t) = \frac{t\big(3t^4 + 2t^2 - \frac{5}{3}\big)}{\sqrt{t^6 + 2t^4 - \frac{5}{3}t^2 + \frac{4}{9}}}$$

si annulla per $t = 0$ e $t = \pm 1/\sqrt{3}$; confrontando quindi i valori di d in questi punti (e per $t \to \pm\infty$) ottengo che i punti di minimo di d sono $t = \pm 1/\sqrt{3}$, e quindi

$$d_{\min} = d\big(\pm 1/\sqrt{3}\big) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,.$$

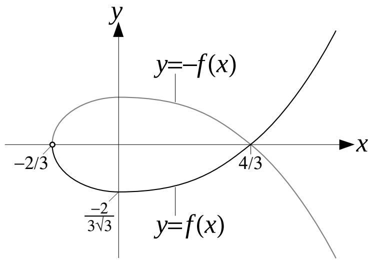
b) Esplicitando t in funzione di x ottengo

$$t = \pm\sqrt{\frac{3x+2}{6}}$$

e quindi

$$y = (t^2 - 1)t = \pm f(x) \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{1}{6\sqrt{6}}(3x-4)\sqrt{3x+2}\,.$$

Dunque la traiettoria di P è l'unione dei grafici di $f(x)$ e $-f(x)$.
Per disegnare questi grafici osservo che $f(x)$ è definita per $x \geq -2/3$, è positiva per $x \geq 4/3$, ed è asintoticamente equivalente a $(x/2)^{3/2}$ per $x \to +\infty$; studiando inoltre il segno della derivata ottengo che $f(x)$ decresce per $x \leq 0$ e cresce per $x \geq 0$.
Sulla base di queste informazioni ottengo il disegno sottostante; in particolare la traiettoria interseca l'asse delle x per $x = -2/3$ e $x = 4/3$, e l'asse delle y per $y = \pm 2/(3\sqrt{3})$.



Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.

$$\text{p.p.}(f(x)) = -18\,x^4\,, \quad \text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} (a-18)\,x^4 & \text{se } a \neq 18, \\ 150\,x^8 & \text{se } a = 18, \end{cases}$$

2. a) Il grafico di f è simile a quello del gruppo 1, come pure l'insieme A.
   b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{1/2}^{+\infty} f(x-1) - f(x)\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}\,,$$

   ed in particolare è finita.

3. Analogo al gruppo 1.
   a) All'istante t la distanza di P dall'origine è

$$d(t) = \sqrt{t^6 + 7t^4 - 5t^2 + 1}\,,$$

   il valore minimo viene assunto per $t = -1/\sqrt{3}$, e vale $d_{\min} = 2/(3\sqrt{3})$.
   b) Esplicitando y in funzione di x ottengo

$$y = \pm f(x) \quad \text{con} \quad f(x) := \frac{1}{3\sqrt{3}}(x+2)\sqrt{x+1}\,,$$

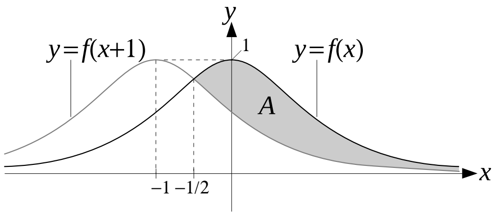
   e disegnando il grafico di f e $-f$ ottengo una traiettoria simile a quella del gruppo 1; in questo caso le intersezioni con l'asse delle x sono a $x = -1$ e $x = 2$, e quelle con l'asse delle y sono a $y = \pm 2/(3\sqrt{3})$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1.

$$\text{p.p.}(f(x)) = -12\,x^6\,, \quad \text{p.p.}(f(x) + ax^6) = \begin{cases} (a-12)\,x^6 & \text{se } a \neq 12, \\ 64\,x^{12} & \text{se } a = 12, \end{cases}$$

2. a) Il grafico di f è lo stesso del gruppo 1, mentre l'insieme A è dato nella figura sotto.



b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{-1/2}^{+\infty} f(x) - f(x+1)\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}\,,$$

ed in particolare è finita.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1.

$$\text{p.p.}(f(x)) = -18\, x^6\,, \quad \text{p.p.}(f(x) + ax^6) = \begin{cases} (a-18)\, x^6 & \text{se } a \neq 18, \\ 150\, x^{12} & \text{se } a = 18, \end{cases}$$

2. a) Il grafico di f è lo stesso del gruppo 2, mentre l'insieme A è simile a quello del gruppo 3.
   b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{-1/2}^{+\infty} f(x) - f(x+1)\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}\,,$$

   ed in particolare è finita.

3. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

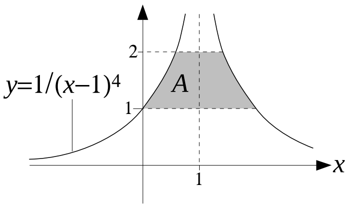
- Seconda parte, esercizio 2. Nessuno ha risolto correttamente il punto b). La maggior parte dei presenti che ci hanno provato ha scritto che

$$\text{area}(A) = \int_{1/2}^{+\infty} f(x-1)\, dx - \int_{1/2}^{+\infty} f(x)\, dx$$

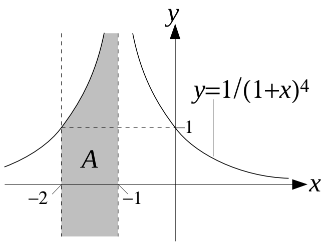
  (faccio riferimento al gruppo 1, ma lo stesso vale per gli altri gruppi), ovvero ha scomposto l'integrale nella formula (1) come differenza di due integrali.
  Tuttavia $f(x-1) \sim f(x1) \sim 1/x^{2/3}$, e quindi entrambi questi integrali valgono $+\infty$, il che significa che questa scomposizione non è corretta. Invece (quasi) tutti quelli che l'hanno fatta ne hanno dedotto erroneamente che l'area di A non è definita, o peggio ancora che è infinita.

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno impostato in modo errato il punto a), cominciando a calcolare la distanza percorsa da P in un non ben definito intervallo di tempo, invece che considerare la distanza di P dall'origine. Si tratta di un errore di impostazione grave.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. I valori di r e α sono a) $2\sqrt{2}$, $-3\pi/4$; b) 2, $-\pi/2$; c) 2, $-2\pi/3$.
2. a) non esiste; b) 0; c) 0.
3. $f(x) = -2x^3 + 2x^6 + O(x^9)$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = e^t\big(\sin(2t) + 2\cos(2t),\ -2\sin(2t) + \cos(2t)\big)$. In particolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{5}\, e^t$, e la distanza percorsa è $d = \int_{-\infty}^{0} |\vec{v}(t)|\, dt = \sqrt{5}$.
5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-2a}}$ e quindi converge per $0 < a < 1/2$.
6. Il raggio di convergenza è $R = 3/4$.
7. $x(t) = ce^{-2t} \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. I valori di r e α sono a) $\sqrt{2}$, $3\pi/4$; b) 3, $-\pi/2$; c) $2\sqrt{3}$, $2\pi/3$.
2. a) 1; b) $+\infty$; c) $1/2$.
3. $f(x) = -2x^3 - 4x^6 + O(x^9)$.
4. La velocità è $\vec{v}(t) = e^t\big(\sin(3t) + 3\cos(3t),\ -3\sin(3t) + \cos(3t)\big)$. In particolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{10}\, e^t$, e la distanza percorsa è $d = \int_{-\infty}^{0} |\vec{v}(t)|\, dt = \sqrt{10}$.
5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+2a}}$ e quindi converge per $a > 0$.
6. Il raggio di convergenza è $R = 3$.
7. $x(t) = ce^{2t} \sin t$ con $c \in \mathbb{R}$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. I valori di r e α sono a) 4, $-\pi/2$; b) $\sqrt{2}$, $-3\pi/4$; c) $2\sqrt{3}$, $-5\pi/6$.

2. a) 0; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

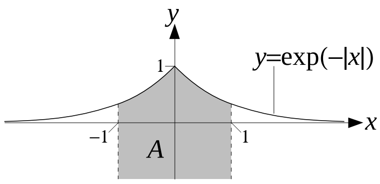
3. $f(x) = 8 + 2x^3 - 2x^6 + O(x^9)$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = e^t\big(-2\sin(2t) + \cos(2t),\, \sin(2t) + 2\cos(2t)\big)$. In particolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{5}\, e^t$, e la distanza percorsa è $d = \int_{-\infty}^0 |\vec{v}(t)|\, dt = \sqrt{5}$.

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3-2a}}$ e quindi converge per $0 < a < 1$.

6. Il raggio di convergenza è $R = 1/4$.

7. $x(t) = ce^{-t}\sin(2t)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. I valori di r e α sono a) 3, $-\pi/2$; b) $2\sqrt{2}$, $3\pi/4$; c) 2, $5\pi/6$.

2. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) -2.

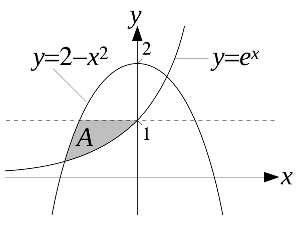
3. $f(x) = 2 + x^3 - 2x^6 + O(x^9)$.

4. La velocità è $\vec{v}(t) = e^t\big(-3\sin(3t) + \cos(3t),\, \sin(3t) + 3\cos(3t)\big)$. In particolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{10}\, e^t$, e la distanza percorsa è $d = \int_{-\infty}^0 |\vec{v}(t)|\, dt = \sqrt{10}$.

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a-2}}$ e quindi converge per $a > 3$.

6. Il raggio di convergenza è $R = 1$.

7. $x(t) = ce^{t}\sin(2t)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Usando lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$ con $t = 2x^6$ ottengo

$$f(x) := \sqrt[3]{\exp(2x^6) - 1} = \sqrt[3]{2x^6 + 2x^{12} + O(x^{18})}\,,$$

e raccogliendo $2x^6$ sotto la radice,

$$f(x) = \sqrt[3]{2}\, x^2\, \sqrt[3]{1 + x^6 + O(x^{12})}\,.$$

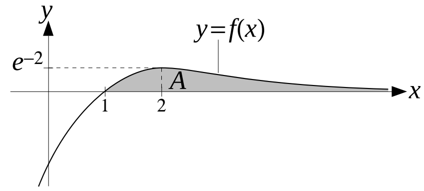
Usando ora lo sviluppo $\sqrt[3]{1+t} = (1+t)^{1/3} = 1 + t/3 + O(t^2)$ con $t = x^6 + O(x^{12})$ ottengo

$$f(x) = \sqrt[3]{2}\, x^2 \left[1 + \frac{x^6}{3} + O(x^{12})\right] = \sqrt[3]{2}\, x^2 + \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\, x^8 + O(x^{14})\,.$$

Questa formula implica chiaramente che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $\sqrt[3]{2}\, x^2$, e inoltre

$$f(x) - ax^2 \sim \begin{cases} (\sqrt[3]{2} - a)\, x^2 & \text{se } a \neq \sqrt[3]{2}, \\ \frac{\sqrt[3]{2}}{3}\, x^8 & \text{se } a = \sqrt[3]{2}. \end{cases}$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita (e continua) per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva per $x \geq 1$ e negativa altrimenti. Inoltre tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Studiando poi il segno della derivata $f'(x) = (2-x)e^{-x}$ ottengo che $f(x)$ cresce per $x \leq 2$ e decresce per $x \geq 2$; in particolare $x = 2$ è il punto di massimo assoluto. Utilizzando queste informazioni disegno il grafico sottostante (le proporzioni non sono quelle reali).



b) Usando la prima formula per i volumi dei solidi di rotazione (e la figura sopra) ottengo

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_1^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_1^{+\infty} (x^2 - 2x + 1)e^{-2x}\, dx = \frac{\pi}{4e^2}\,.$$

(L'ultimo passaggio nasconde una doppia integrazione per parti, in cui ogni volta ho preso la primitiva di e^{-2x}.)

c) Usando la seconda formula per i volumi dei solidi di rotazione (e la figura sopra) ottengo

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_1^{+\infty} x\, f(x)\, dx = 2\pi \int_1^{+\infty} (x^2 - x)e^{-x}\, dx = \frac{6\pi}{e}\,.$$

(L'ultimo passaggio nasconde una doppia integrazione per parti, in cui ogni volta ho preso la primitiva di e^{-x}.)

3. a) Per la definizione di integrale improprio, i limiti di $f(x)$ per x che tende a $\pm\infty$ coincidono con

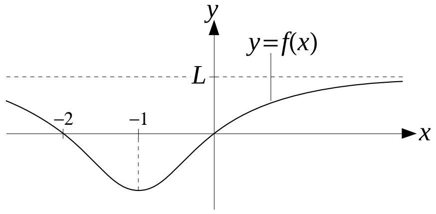
$$L := \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^5}\,.$$

Questo integrale improprio semplice esiste ed è positivo perché la funzione integranda è positiva, ed è finito per confronto asintotico con l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} t^{-5} dt$.

b) La funzione integranda $1/(1+t^5)$ in (*) è ben definita e positiva per $t > -1$, e gli estremi di integrazione 1 e $(x+1)^2$ sono entrambi positivi, e quindi strettamente maggiori di -1. Pertanto l'integrale che definisce $f(x)$ è proprio per ogni $x \in \mathbb{R}$, e l'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$. Inoltre il valore di $f(x)$ è positivo se l'estremo di integrazione $(x+1)^2$ è maggiore dell'estremo di integrazione 1, vale a dire se $x > 0$ oppure $x < -2$, si annulla per $x = 0$ e $x = -2$, ed è negativo per $-2 < x < 0$.
Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{1 + (x+1)^{10}}$$

ottengo infine che $f(x)$ decresce per $x \leq -1$ e cresce per $x \geq -1$; in particolare $x = -1$ è il punto di minimo assoluto. Utilizzando queste informazioni disegno il grafico sottostante.



c) Per $x \to 0$ l'estremo di integrazione superiore in (*) converge a 1, che è l'estremo di integrazione inferiore. Quindi i valori assunti della funzione integranda $1/(1+t^5)$ per t nell'intervallo di integrazione sono sempre più vicini al valore dell'integranda per $t = 1$, vale a dire $1/2$. Pertanto

$$f(x) = \int_1^{(1+x)^2} \frac{dt}{1+t^5} \sim \int_1^{(1+x)^2} \frac{dt}{2} = \frac{(1+x)^2 - 1}{2} \sim x\,,$$

e quindi la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è x.
(Una dimostrazione più precisa del fatto che $f(x) \sim x$ la si ottiene mostrando tramite la regola di de L'Hôpital che il limite del rapporto $f(x)/x$ per $x \to 0$ è uguale a 1; nel farlo si usa la formula per f' data sopra.)

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo

$$f(x) = \sqrt{2}\,x^2 + \frac{x^6}{\sqrt{2}} + O(x^{10})$$

da cui segue che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $\sqrt{2}\,x^2$, e inoltre

$$f(x) - ax^2 \sim \begin{cases} (\sqrt{2} - a)\,x^2 & \text{se } a \neq \sqrt{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,x^6 & \text{se } a = \sqrt{2}. \end{cases}$$

2. a) Il grafico di f è molto simile a quello del gruppo 1. Le differenze più significative sono che $f(x)$ è negativa per $x \leq 2$ e positiva altrimenti, cresce per $x \leq 3$ e decresce altrimenti.

   b) Analogo al gruppo 1:

$$\text{volume}(V_x) = \pi \int_2^{+\infty} \big(f(x)\big)^2\,dx = \pi \int_2^{+\infty} (x^2 - 4x + 4)e^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{4e^4}\,.$$

   c) Analogo al gruppo 1:

$$\text{volume}(V_y) = 2\pi \int_2^{+\infty} x\,f(x)\,dx = 2\pi \int_2^{+\infty} (x^2 - 2x)e^{-x}\,dx = \frac{8\pi}{e^2}\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 6. Molti dei presenti hanno risolto l'esercizio trascurando gli addendi n^2 e n presenti nel numeratore e nel denominatore del coefficiente della serie, e tenendo solo gli esponenziali $3^{\pm n}$ e $2^{\pm 2n}$. Questo passaggio è corretto quando gli esponenziali tendono a infinito, cioè quando all'esponente c'è il segno $+$.

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno impostato male il calcolo del volume al punto c), pur essendo completamente standard.

Prima parte, gruppo 1.

1. I valori di a cercati sono quelli per cui la derivata $f'(x) := 3x^2\big(2\cos(2x^3)+a\big)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale a dire $a \geq 2$.

2. L'ordine corretto è $b \ll a \ll d \ll c$.

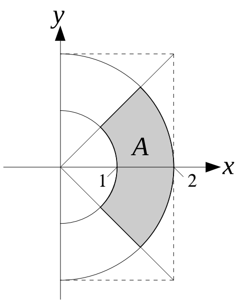
3. $f(x) \sim -\dfrac{x^4}{2}$ per $x \to 0$.

4. L'accelerazione è $\vec{a}(t) := (-\cos t,\, 12\,t - 6\pi)$; la seconda componente si annulla solo per $t = \pi/2$, dove si annulla anche la prima, e quindi $\vec{a}(t) = 0$ per $t = \pi/2$.

5. $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^8} - \dfrac{2}{1+(2x)^4}$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2-2a}}$ e quindi è finito per $a < \dfrac{1}{2}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan\big((t-1)e^t + 1\big)$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. I valori di a cercati sono quelli per cui la derivata $f'(x) := 3x^2\big(3\cos(3x^3)+a\big)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale a dire $a \geq 3$.

2. L'ordine corretto è $b \ll d \ll a \ll c$.

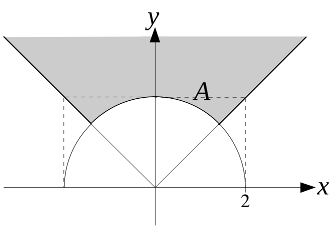
3. $f(x) \sim -\dfrac{x^4}{2}$ per $x \to 0$.

4. L'accelerazione è $\vec{a}(t) := (6t - 6,\, -\pi^2\cos(\pi t))$; la prima componente si annulla solo per $t = 1$, dove però non si annulla la seconda, e quindi non esiste alcun t per cui $\vec{a}(t) = 0$.

5. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^{12}} - \dfrac{3}{1+(3x)^4}$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a+1/2}}$ e quindi è finito per $a > \dfrac{1}{4}$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan\big(2e^{t^2} - 2\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. I valori di a cercati sono quelli per cui la derivata $f'(x) := 5x^4\big(3\cos(3x^5) + a\big)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale a dire $a \geq 3$.

2. L'ordine corretto è $c \ll d \ll a \ll b$.

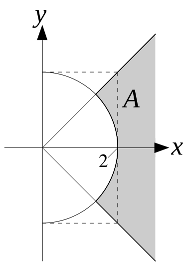
3. $f(x) \sim -x^4$ per $x \to 0$.

4. L'accelerazione è $\vec{a}(t) := (-4\cos(2t),\, 24\,t - 6\pi)$; la seconda componente si annulla solo per $t = \pi/4$, dove si annulla anche la prima, e quindi $\vec{a}(t) = 0$ per $t = \pi/4$.

5. $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^{12}} - \dfrac{2}{1 + (2x)^6}$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3-2a}}$ e quindi è finito per $a < 1$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan\Big((t-1)e^t + \dfrac{\pi}{4}\Big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. I valori di a cercati sono quelli per cui la derivata $f'(x) := 5x^4\big(4\cos(4x^5) + a\big)$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale a dire $a \geq 4$.

2. L'ordine corretto è $d \ll c \ll b \ll a$.

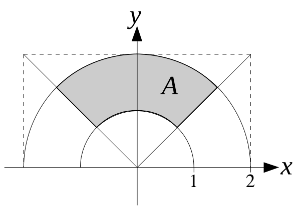
3. $f(x) \sim -\dfrac{x^8}{2}$ per $x \to 0$.

4. L'accelerazione è $\vec{a}(t) := (6t - 2,\, -\pi^2\sin(\pi t))$; la prima componente si annulla solo per $t = 1/3$, dove però non si annulla la seconda, e quindi non esiste alcun t per cui $\vec{a}(t) = 0$.

5. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{1 + x^{18}} - \dfrac{3}{1 + (3x)^6}$.

6. L'integrale in questione si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a-2}}$ e quindi è finito per $a > 3$.

7. Si tratta di un'equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan\big(2e^{t^2} - 2e\big)$.

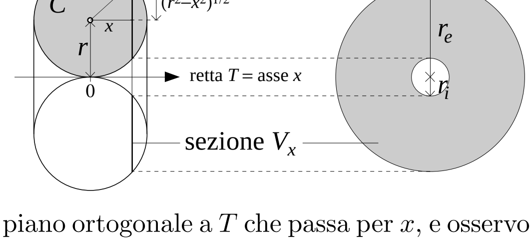
8. 

SECONDA PARTE.

1. Partiamo direttamente dal punto b), di cui a) è un caso particolare.
   Come prima cosa riscrivo la disequazione come
   $$a \le x^2 + 4x - 6\log x \quad \text{per ogni } x > 0, \tag{1}$$
   e ponendo $f(x) := x^2 + 4x - 6\log x$ ottengo che questa condizione equivale a
   $$a \le \inf_{x>0} f(x)\,.$$
   Per calcolare l'estremo inferiore dei valori di $f(x)$, osservo che questa funzione è definita e continua per ogni $x > 0$, e studiando il segno della derivata prima
   $$f'(x) = 2x + 4 - \frac{6}{x} = \frac{2x^2 + 4x - 6}{x}$$
   ottengo che $f(x)$ decresce per $x \le 1$ e cresce per $x \ge 1$. Quindi $x = 1$ è il punto di minimo *assoluto* di f, e
   $$\inf_{x>0} f(x) = \min_{x>0} f(x) = f(1) = 5\,,$$
   da cui segue che la (1) vale per $a \le 5$.
   In particolare vale per $a = 4$, e quindi la risposta alla domanda a) è affermativa.

2. La funzione integranda
   $$\frac{1}{(1+\cos x)^a}$$
   è definita, continua e positiva nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ ma non è definita agli estremi, e quindi l'integrale che dobbiamo studiare è improprio in $\pm\pi$, ed ammette solo due possibili comportamenti: è finito oppure vale $+\infty$.
   Siccome la funzione integranda è pari, ottengo inoltre
   $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(1+\cos x)^a} = 2\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{(1+\cos x)^a}\,.$$
   Studio l'integrale alla destra dell'uguale, che è improprio in $-\pi$, applicando il cambio di variabile $y = x + \pi$ in modo da ricondurmi ad un integrale improprio in 0:
   $$\int_{-\pi}^{0} \frac{dx}{(1+\cos x)^a} = \int_{0}^{\pi} \frac{dy}{(1+\cos(y-\pi))^a} = \int_{0}^{1} \frac{dy}{(1-\cos y)^a} \approx \int_{0}^{1} \frac{dy}{y^{2a}}\,.$$
   (nel terzo passaggio ho usato l'identità $\cos(y-\pi) = -\cos y$, mentre nel quarto ho usato il fatto che $1 - \cos y \sim y^2/2$ per $y \to 0$ e il principio del confronto asintotico).
   Mettendo insieme le formule precedenti ottengo infine che l'integrale di partenza si comporta come
   $$\int_{0}^{1} \frac{dy}{y^{2a}}\,,$$
   ed in particolare è finito per $a < 1/2$, ed è $+\infty$ altrimenti.

3. Per calcolare il volume del solido V, integro le aree delle sezioni di questo solido ortogonali alla retta T. Per la precisione, fisso l'asse delle x in modo che coincida con la retta T e che 0 sia il punto in cui T è tangente alla circonferenza di partenza.

   Indico quindi con P_x il piano ortogonale a T che passa per x, e osservo che la sezione $V_x := V \cap P_x$ è una corona circolare con raggio esterno r_e e raggio interno r_i dati da
   $$r_e = r + \sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad r_i = r - \sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Pertanto l'area di V_x è data da

$$\text{area}(V_x) = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = 4\pi r\sqrt{r^2 - x^2}$$

e il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = \int_{-r}^{r} \text{area}(V_x)\,dx = 4\pi r \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2\pi^2 r^3\,.$$

(Nell'ultimo passaggio ho usato che l'integrale corrisponde all'area della semicirconferenza di raggio r, e quindi vale $\pi r^2/2$.)

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno risposto indicando dei valori di a che dipendono da x; ma la risposta alla domanda se una funzione è crescente o meno su tutto il dominio non dipende da x. Si tratta di un errore grave.

- Prima parte, esercizio 8. Pur trattandosi di un esercizio molto facile, molti dei presenti hanno dato risposte gravemente errate (cosa che attribuisco ad una scarsa comprensione del significato geometrico delle coordinate polari).

Prima parte, gruppo 1.

1. Il punto di massimo è $x = 3$. Il punto di minimo non esiste.

2. I valori di a cercati sono $a \geq 4$.

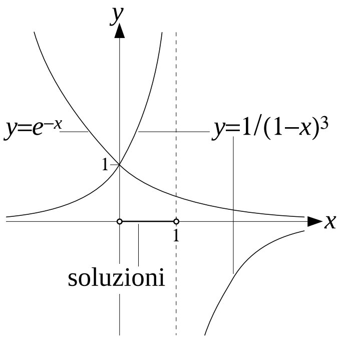
3. $f'(x) := 2e^{2x}\sin(1 + 2x)$.

4. Usando il cambio di variabile $t = 1 + x^2$ si ottiene
$$\int 4x\,\cos(1 + x^2)\,dx = 2\int \cos t\,dt = 2\sin t + c = 2\sin(1 + x^2) + c\,.$$

5. Nessun a.

6. Si tratta di una serie esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n\,n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x/3)^n}{n!} = \exp(x/3)\,.$

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t}$ con $c_1 > 0$ e c_2 qualunque.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. Il punto di massimo è $x = 3$. Il punto di minimo è $x = -1$.

2. I valori di a cercati sono $a > 1$.

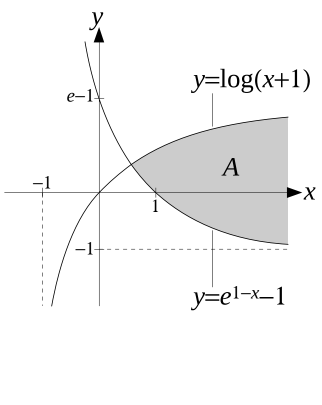
3. $f'(x) := e^{-x}\sin(1 - x)$.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int x\,\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\,dx = 2x\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) - \int 2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,dx = 2x\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) + 4\cos\Big(\frac{x}{2}\Big) + c\,.$$

5. Ogni $a > 0$.

6. Si tratta di una serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{x^2}{3}\Big)^n = \frac{1}{1 - x^2/3} = \frac{3}{3 - x^2}\,.$

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-2t} - e^{-t} + e^{-3t}$ con c qualunque.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $x = 0$.

2. I valori di a cercati sono $a > 0$.

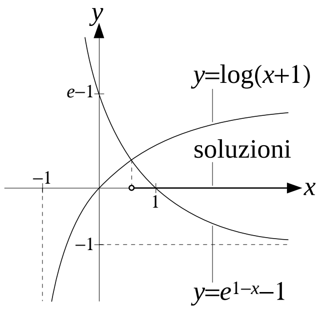
3. $f'(x) := 2e^{2x}\cos(1 + 2x)$.

4. Usando il cambio di variabile $t = 1 + x^2$ si ottiene
$$\int_0^1 4x\,\cos(1+x^2)\,dx = 2\int_1^2 \cos t\,dt = 2\,\Big|\sin t\Big|_1^2 = 2\sin(2) - 2\sin(1)\,.$$

5. Ogni $a > 0$.

6. Si tratta di una serie esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n\,n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x/2)^n}{n!} = \exp(x/2)\,.$

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-3t} - e^{-t} - e^{-2t}$ con $c_1 > 0$ e c_2 qualunque.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $x = 0$.

2. I valori di a cercati sono $a > 3$.

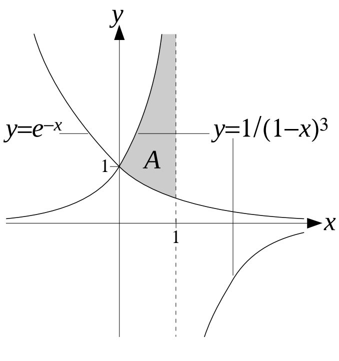
3. $f'(x) := e^{-x}\cos(1 - x)$.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int_0^\pi x\,\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\,dx = \Big|2x\,\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\,dx = 2\pi + \Big|4\cos\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big|_0^\pi = 2\pi - 4\,.$$

5. Nessun a.

6. Si tratta di una serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{x^3}{2}\Big)^n = \frac{1}{1 - x^3/2} = \frac{2}{2 - x^3}\,.$

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = ce^{-3t} - e^{-t} - e^{-2t}$ con c qualunque.

8. 

Seconda parte.

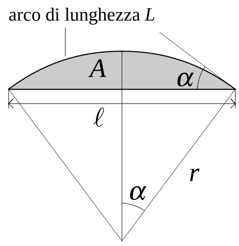
1. Per cominciare, trovo x_a per ogni $a \in \mathbb{R}$, ovvero trovo la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^2 - 4$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = a$. L'equazione in questione è a variabili separabili e si riduce alla forma
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int dt\,. \tag{1}$$
Tenuto conto che
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\big(\log|x-2| - \log|x+2|\big) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$
dalla (1) ottengo
$$\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| = 4t + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$
vale a dire
$$\frac{x-2}{x+2} = \pm e^c\, e^{4t} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$
e poiché $\pm e^c$ può essere una qualunque costante c' diversa da zero, posso riscrivere la precendente equazione come
$$\frac{x-2}{x+2} = c' e^{4t}\,,$$
imponendo infine la condizione iniziale $x(0) = a$ ottengo $c' = \frac{a-2}{a+2}$ (sono esclusi i valori $a = 2$, per cui $c' = 0$, ed $a = -2$ per cui c' non è definita). Esplicitando infine la x ottengo per $a \neq \pm 2$
$$x_a(t) = \frac{4}{1 - c'e^{4t}} - 2 \quad \text{con } c' = \frac{a-2}{a+2}. \tag{2}$$
I valori iniziali $a = \pm 2$ sono quelli per cui si annulla il denominatore $x^2 - 2$ in (1), ed in tal caso la soluzione x_a non è data dalla formula precedente, ma è la funzione costante $x_a(t) = a$.

a) In base a quanto fatto sopra
$$x_0(t) = \frac{4}{1+e^{4t}} - 2.$$
Questa funzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, è descrescente (perché il denominatore $1 + e^{4t}$ è chiaramente crescente), tende a 2 per $x \to -\infty$, e tende a -2 per $x \to +\infty$.

b) Consideriamo prima le soluzioni x_a con $a \neq \pm 2$, vale a dire quelle date dalla formula (2). Chiaramente, tali soluzioni sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se il denominatore $1 - c'e^{4t}$ non si annulla per alcun t, ovvero se e solo se la costante $c' = \frac{a-2}{a+2}$ è negativa (ricordo che c' non può essere nulla), ovvero se e solo se $-2 < a < 2$.
A questi valori di a a cui vanno aggiunti $a = \pm 2$, per cui x_a è la soluzione costante, ed è quindi definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Riassumendo, $x_a(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se $-2 \le a \le 2$.

2. L'integrale
$$\int_1^{+\infty} (x+1)^a - x^a\, dx$$
è improprio semplice a $+\infty$, e poichè la funzione integranda è positiva, ammette solo due possibili comportamenti: o converge ad un numero finito e positivo, oppure diverge a $+\infty$. Per capire quale dei due casi si verifica determino la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$:
$$(x+1)^a - x^a = x^a\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^a - 1\right] \sim x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1} \tag{3}$$
(nel secondo passaggio ho utilizzato lo sviluppo di Taylor $(1+y)^a = 1 + ay + O(y^2)$, che riscrivo nella forma $(1+y)^a - 1 \sim ay$ per $y \to 0$, unitamente al cambio di variabile $y = 1/x$).
Dalla (3) si ottiene infine che l'integrale improprio di partenza si comporta come $\int_1^{+\infty} x^{a-1}\,dx$, ed in particolare è finito per $a < 0$, infinito per $a \ge 0$.

3. a) L'angolo α varia tra 0 e π (esclusi).



b) La figura sopra mostra chiaramente che le lunghezze ℓ e L possono essere espresse in funzione dell'angolo α e del raggio r:

$$\ell = 2r\,\sin\alpha\,,\quad L = 2r\alpha\,.$$

Quindi posso scrivere anche la quantità E come funzione di α e di r:

$$E = L\Big(1+\frac{1}{r^2}\Big) + \ell = 2\alpha\bigg[\frac{1}{r} + \bigg(1+\frac{\sin\alpha}{\alpha}\bigg)\,r\bigg]$$

Pertanto, fissato α, per trovare la figura A che minimizza il valore di E devo trovare il valore di $r > 0$ che rende minima la funzione

$$\frac{1}{r} + \bigg(1+\frac{\sin\alpha}{\alpha}\bigg)\,r\,.$$

Studiando il segno della derivata di questa funzione, ottengo facilmente che il punto di minimo assoluto (per $r > 0$) è

$$r_{\min} = \bigg(1+\frac{\sin\alpha}{\alpha}\bigg)^{-1/2}\,,$$

mentre il valore minimo di E è

$$E(\alpha) = 4\big(\alpha^2 + \alpha\,\sin\alpha\big)^{1/2}\,.$$

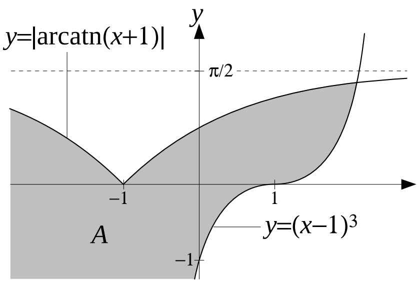
c) Calcoliamo la derivata (rispetto alla variabile α) della funzione $E(\alpha)$ data nella formula precedente:

$$E'(\alpha) = 2\big(\alpha^2+\alpha\,\sin\alpha\big)^{-1/2}\big((2+\cos\alpha)\alpha + \sin\alpha\big)\,.$$

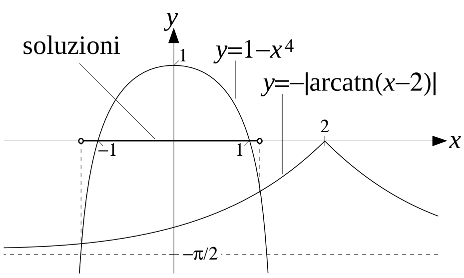
Osserviamo ora che per $0 < \alpha < \pi$ questa derivata è strettamente positiva (sono infatti positive le quantità α, $\sin\alpha$, $2+\cos\alpha$). Ne deduco che anche la funzione $E(\alpha)$ è strettamente crescente per $0 < \alpha < \pi$, da cui segue che

- $E(\alpha)$ non ha alcun punto di massimo o minimo all'interno dell'intervallo $0 < \alpha < \pi$;
- l'estremo inferiore dei valori $E(\alpha)$ viene raggiunto per $\alpha \to 0$, e vale 0;
- l'estremo superiore dei valori $E(\alpha)$ viene raggiunto per $\alpha \to \pi$, e vale 4π.

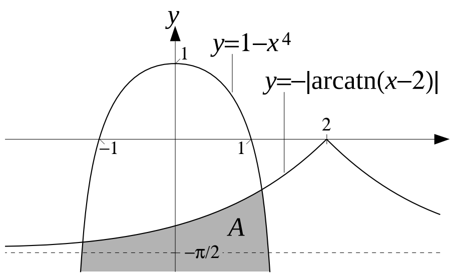
Prima parte, gruppo 1.

1. Le soluzioni sono $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} \le x \le \pi$.
2. La retta tangente ha equazione $y = -\frac{x}{2} - 1$.
3. La funzione f è continua se e solo se $b = ae^2 - 4$.
4. Lo sviluppo cercato è $f(x) = 1 - 2x^2 - x^4 + O(x^6)$.
5. Usando il cambio di variabile $y = 1+x^4$ ottengo $\int \frac{8x^3}{1+x^4}\,dx = 2\int \frac{dy}{y} = 2\log y + c = 2\log(1+x^4) + c$.
6. Il raggio di convergenza è $R = \frac{4}{3}$.
7. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = -\log(2 - t^4)$.
8. 

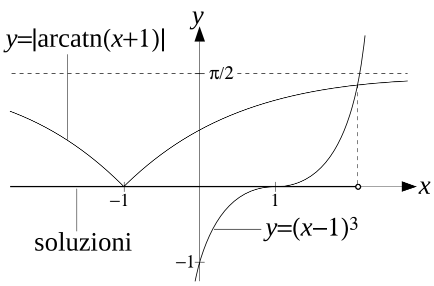
Prima parte, gruppo 2.

1. Le soluzioni sono $0 \le x < \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
2. La retta tangente ha equazione $y = -x + \frac{3}{2}$.
3. La funzione f è continua se e solo se $b = \frac{a}{e^2} - 4$.
4. Lo sviluppo cercato è $f(x) = 6x^2 - 6x^4 + 10\,x^6 + O(x^8)$.
5. Integrando per parti ottengo $\int_1^e 16\,x^3 \log x\,dx = \Big|4x^4 \log x\Big|_1^e - \int_1^e 4x^4\,\frac{1}{x}\,dx = 3e^4 + 1$.
6. Il raggio di convergenza è $R = \frac{5}{4}$.
7. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan(2t^2 - 2)$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Le soluzioni sono $0 \le x \le \dfrac{7\pi}{12}$, $\dfrac{11\pi}{12} \le x \le \pi$.
2. La retta tangente ha equazione $y = -\dfrac{x}{2} + 1$.
3. La funzione f è continua se e solo se $b = \dfrac{a}{e} - 1$.
4. Lo sviluppo cercato è $f(x) = 1 - 2x^3 - x^6 + O(x^9)$.
5. Usando il cambio di variabile $y = 1 + x^4$ ottengo $\displaystyle\int_0^1 \frac{8x^3}{1+x^4}\,dx = 2\int_1^2 \frac{dy}{y} = 2\log 2$.
6. Il raggio di convergenza è $R = \dfrac{3}{4}$.
7. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \tan(t^3 - 1)$.
8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Le soluzioni sono $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}$.
2. La retta tangente ha equazione $y = -x - \dfrac{3}{2}$.
3. La funzione f è continua se e solo se $b = ae - 1$.
4. Lo sviluppo cercato è $f(x) = 6x^3 - 6x^6 + 10\,x^9 + O(x^{12})$.
5. Integrando per parti ottengo $\displaystyle\int 16\,x^3 \log x\,dx = 4x^4\log x - \int 4x^4\,\frac{1}{x}\,dx = 4x^4\log x - x^4 + c$.
6. Il raggio di convergenza è $R = \dfrac{4}{5}$.
7. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = -\log(2 - t^3)$.
8. 

Seconda parte.

1. a) Calcolo prima la soluzione generale dell'equazione omogenea associata. Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2a\lambda + 9 =$ sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 9}$$

ed in particolare devo considerare i seguenti tre casi:

(i) se $a > 3$ allora λ_1 e λ_2 sono reali e distinte, e quindi

$$x_{\rm om}(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1a}$$

(ii) se $a = 3$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e quindi

$$x_{\rm om}(t) = e^{3t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1b}$$

(iii) se $0 < a < 3$ allora $\lambda_{1,2} = a \pm \omega i$ con $\omega := \sqrt{9 - a^2}$, e quindi

$$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1c}$$

Cerco ora una soluzione particolare dell'equazione di partenza (*) tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) = b_1 t + b_2$ con $b-1, b_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo l'identità

$$9b_1 t + 9b_2 - 2ab_1 = 18t$$

che è soddisfatta per ogni t se e solo se $9b_1 = 18$ e $9b_2 - 2ab_1 = 0$, vale a dire $b_1 = 2$ e $b_2 = \frac{4}{9}a$. Pertanto la soluzione particolare cercata è

$$\tilde{x}(t) = 2t + \frac{4a}{9}\,. \tag{2}$$

Sommando la soluzione dell'equazione omogenea $x_{\rm om}$ in (1a)-(1c) con la soluzione particolare $\tilde{x}$ in (2) ottengo infine la soluzione generale di (*).

b) Osservo che la soluzione particolare $\tilde{x}$ data in (2) soddisfa $\tilde{x}(t) \ll e^{9t}$ per $t \to +\infty$. Pertanto esiste una soluzione di (*) che soddisfa la proprietà che $x(t) \gg e^{9t}$ se e solo esiste una soluzione dell'equazione omogenea con questa stessa proprietà.
Date le formule (1b) e (1c) posso escludere i valori $a \leq 3$, per cui $x_{\rm om}(t) \ll e^{9t}$, e supporre che $a > 3$. In questo caso la formula (1a) mostra che è possibile scegliere i coefficienti c_1, c_2 in modo che $x_{\rm om}(t) \gg e^{9t}$ a patto che almeno una delle due radici caratteristiche λ_1, λ_2 sia strettamente maggiore di 9. O meglio, che lo sia la più grande delle due soluzioni, vale a dire che

$$a + \sqrt{a^2 - 9} > 9\,.$$

Risolvendo questa disequazione ottengo $a > 5$.

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui l'argomento del logaritmo che appare nella definizione è ben definito e strettamente positivo, vale a dire tutti gli $x \neq 0$ tali che

$$x^2 - 1 + \frac{16}{x^2} > 0\,.$$

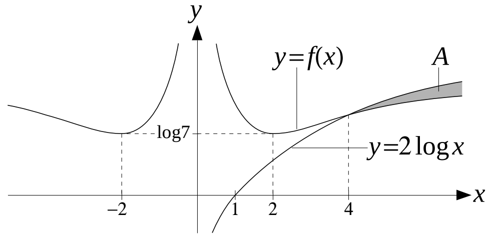
Moltiplicando questa disequazione per x^2 ottengo la disequazione $x^4 - x^2 + 16 > 0$, che è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, come conseguenza del fatto più generale che $t^2 - t + 16 > 0$ è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$ (dato che il discriminante è strettamente negativo).
Riassumendo, $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$.

b) Per disegnare il grafico di $f(x)$ osservo innanzitutto che si tratta di una funzione pari, e quindi mi basta studiarla per $x > 0$. Osservo inoltre che $f(x)$ che tende a $+\infty$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$, e per la precisione $f(x) \sim 2\log x$ per $x \to +\infty$.
Inoltre studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2(x^4 - 16)}{x(x^4 - x^2 + 16)}$$

vedo che $f(x)$ decresce per $0 < x \leq 2$ e cresce per $x \geq 2$. In particolare $x = 2$ è il punto di minimo assoluto (insieme a $x = -2$), mentre il valore minimo è $f(2) = \log 7$.

Usando queste informazioni traccio il grafico riportato nella figura sotto.



c) Per disegnare l'insieme A risolvo la disequazione $f(x) \leq 2\log x$, ottenendo $x \geq 4$. L'insieme A è quindi quello riportato nella figura sopra.

d) L'area di A è data dal seguente integrale (improprio semplice a $+\infty$):

$$\begin{aligned}
\text{area}(A) &= \int_4^{+\infty} 2\log x - f(x)\,dx \\
&= \int_4^{+\infty} \log\left(x^2\right) - \log\left(x^2 - 1 + \frac{16}{x^2}\right) dx \\
&= \int_4^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{16}{x^4}\right) dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty
\end{aligned}$$

e quindi l'area di A è finita. (Nel secondo passaggio ho usato l'identità $\log a - \log b = -\log(b/a)$, nel terzo ho usato il criterio del confronto asintotico più il fatto che

$$\log\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{16}{x^4}\right) \sim -\frac{1}{x^2} + \frac{16}{x^4} \sim -\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

ottenuto a sua volta a partire dallo sviluppo $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$.)

3. La funzione integranda

$$f(x) = \frac{1}{(e^x - e)^a}$$

è ben definita (e continua) per ogni x tale che la base $e^x - e$ della potenza al denominatore è strettamente positiva, vale a dire per $x > 1$. Inoltre per tali x la funzione è sempre positiva. Ne segue che l'integrale di $f(x)$ tra 1 e $+\infty$ è improprio sia in 1 che in $+\infty$ ed ammette solo due comportamenti: o diverge a $+\infty$ oppure converge ad un numero finito e positivo. Per capire quale dei due casi si verifica lo spezzo come

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_1^2 f(x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_2^{+\infty} f(x)\,dx}_{II} \tag{3}$$

ed analizzo separatamente il comportamento dei due integrali impropri semplici I e II.
Comincio da II. Osservo innanzitutto che

$$f(x) \sim e^{-ax} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Quindi, se $a < 0$ allora $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, mentre se $a = 0$ allora $f(x)$ tende a 1 (anzi, vale sempre 1); in entrambi ne deduco che II diverge a $+\infty$, e questo è sufficiente a dire che anche l'integrale di partenza diverge a $+\infty$.
Invece se $a > 0$ allora $f(x) \sim e^{-ax}$ per $x \to +\infty$, e quindi II si comporta come $\int_2^{+\infty} e^{-ax}\,dx$, che può essere calcolato ed è finito.
Resta dunque da studiare l'integrale I. Per prima cosa uso il cambio di variabile $y = x + 1$ per ricondurmi ad un integrale improprio in 0:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{(e^x - e)^a} = \int_0^1 \frac{dy}{(e^{y+1} - e)^a} = \frac{1}{e^a} \int_0^1 \frac{dy}{(e^y - 1)^a}\,;$$

usando lo sviluppo $e^y - 1 \sim y$ ottengo che I si comporta come $\int_0^1 dy/y^a$ e in particolare è finito se $a < 1$, e diverge altrimenti.
Mettendo insieme quanto fatto otteniamo che l'integrale di partenza è finito se $0 < a < 1$, e diverge a $+\infty$ altrimenti.

Commenti

- Prima parte, esercizio 1. Si tratta di un esercizio piuttosto standard, ma la maggior parte dei presenti lo ha svolto male (per la precisione, quasi tutti hanno dato solo le soluzioni in una metà dell'intervallo prescritto).

- Prima parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno trovato una coppia di numeri a, b per cui f è continua, ma non tutte le coppie.

- Seconda parte, esercizio 1. Anche questo esercizio è molto standard, e tuttavia la maggior parte dei presenti lo ha risolto male o solo in parzialmente. In particolare molti hanno impostato in modo scorretto la ricerca della soluzione particolare, mentre altri hanno scritto in modo incompleto la soluzione dell'equazione omogenea nel caso $a < 3$.

Versione: 30 settembre 2018

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2017-18

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti/

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 30 dicembre 2017]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici

   1.1 Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari, funzioni crescenti e decrescenti.
   1.2 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   1.3 Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   1.4 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.

2. Limiti di funzioni e continuità

   2.1 Limiti di funzioni, proprietà elementari, forme indeterminate. Funzioni continue.
   2.2 Punti di massimo e di minimo (assoluti e locali) di una funzione. Esistenza del punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione).
   2.3 Estremo superiore ed inferiore di un'unione finita di intervalli. Estremo superiore ed inferiore di una funzione la cui immagine è un'unione finita di intervalli.

3. Derivate

   3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. *Alcune interpretazioni non geometriche della derivata.*
   3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   3.3 Individuazione dei punti di massimo e di minimo (assoluti e locali) di una funzione.
   3.4 Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   3.5 Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Dimostrazione rigorosa (non grafica) della relazione tra monotonia e segno della derivata.
   3.6 Teorema di de l'Hôpital (dimostrazione parziale). Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   3.7 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero.
   3.8 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione, espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange (con dimostrazione). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   3.9 Legge oraria di un punto in movimento nel piano o nello spazio, velocità ed accelerazione come derivate.

4. Elementi di analisi astratta

   4.1 *Numeri interi, razionali e reali (definiti come i numeri con espansioni decimali finite o infinite). Definizione di estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Completezza dei numeri reali.*
   4.2 *Teorema di esistenza degli zeri. Algoritmo di bisezione per la determinazione dello zero di una funzione.*

5. Integrali

5.1 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Due interpretazioni fisica dell'integrale: distanza percorsa da un punto in movimento e lavoro di una forza (su un punto in movimento).
5.2 Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione).
5.3 Regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

6. Integrali impropri

6.1 Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
6.2 Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
6.3 Integrali impropri non semplici.

7. Serie numeriche e serie di potenze

7.1 *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
7.2 Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Primo esempio fondamentale: la serie geometrica.
7.3 Criteri del confronto con l'integrale. Secondo esempio fondamentale: la serie armonica generalizzata.
7.4 Criteri di convergenza per le serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
7.5 Serie di potenze, e raggio di convergenza. Serie di Taylor. Calcolo del raggio di convergenza per le serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. Espressione del numero e come serie.
7.6 *Giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$*. Espressione del numero* π *come serie.*

8. Equazioni differenziali

8.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica; significato delle condizioni iniziali.
8.2 Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
8.3 Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti. *Equazione del pendolo e dell'oscillatore armonico.*

T E S T I

Prima parte, gruppo 1.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -2,\ \ y = 2;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = 0,\ \ y = -4;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{3},\ \ \alpha = -\pi/3;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(2x) \geq -1$ tali che $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^3)}{x\sin(x^2)}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(e^{2x})$; b) $\dfrac{x^3}{x^2+4}$ c) $\dfrac{9^{x-3}}{3^{x-1}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2 e^x$ relativamente all'insieme $x \leq -1$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{5^x+1}{2^x+x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x\log x}{x^2+2\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x-2x^2}{4+x^3}}_{c} \ll \underbrace{2^x + \log x}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 4 della funzione $f(x) := \exp(4x^2)\cos(2x^2)$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\dfrac{1}{|x|+1} \leq \sqrt{-x}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -3,\ \ y = \sqrt{3};$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = -2,\ \ y = 0;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{2},\ \ \alpha = -\pi/4;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(2x) \leq -1$ tali che $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{2^x+4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(2^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^4)-1}{\cos(x^2)-1}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(2^x)$; b) $\dfrac{x^3}{x^5+4}$; c) $\dfrac{3^{2x-1}}{9^{x-3}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \log(4-x^2)$ relativamente all'insieme $-1 \leq x < 2$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{4^x+1}{3^x-x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{2x^2+\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x+2}{x^3+3x}}_{c} \ll \underbrace{2^x - \log x}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 3 della funzione $f(x) := 2\sin(3x)\sqrt{1+2x^2}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $1 - x^2 \leq \dfrac{1}{|x|-1}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -\sqrt{3},\ \ y = -3;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = 0,\ \ y = -2;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = 2,\ \ \alpha = 2\pi/3;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(2x) \geq -\sqrt{3}$ tali che $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^{14}+x^5}}{x^4+42}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \log(\log x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(1+x^3)}{x-\sin x}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(x^4)$ b) $\dfrac{x^2}{x^7+6}$ c) $\dfrac{2^{3x+1}}{4^{x+2}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2e^x$ relativamente all'insieme $x \geq -1$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2x^3+x}{x^5-x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{1+5^x}{x+3^x}}_{b} \ll \underbrace{2^x + x^{10}}_{c} \ll \underbrace{\frac{-2\log x}{x^2+\log x}}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 4 della funzione $f(x) := \log(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x|} \leq y \leq \dfrac{1}{|x|+1}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -\sqrt{2},\ \ y = \sqrt{2};$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = 0,\ \ y = 2;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{2},\ \ \alpha = 3\pi/4;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(2x) \leq -\sqrt{3}$ tali che $-\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+3}{\sqrt{x^{10}-x^5}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sin(x+e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x-\sin x}{x^2-\sin x}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(x^4)$; b) $\dfrac{x^4}{x^4+4}$ c) $\dfrac{2^{x+2}}{4^{x+1}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \log(2-x^2)$ relativamente all'insieme $-1 \leq x < \sqrt{2}$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{3^x - x}{4^x + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2x^2 + \log x}{\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x^3 + 3x}{x + 2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{2^x - \log x}}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 6 della funzione $f(x) := 2\sin(3x^2)\sqrt{1 + 2x^4}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{|x| + 1} \le y \le \sqrt{-x}$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = 0$, $y = -1$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 5\pi/6$; $x =$ $y =$
Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(\pi x) \le -1$ tali che $-1 \le x \le 0$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\log x}{\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin(e^x + x^8)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{\log(1 + x^4)}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(2^x)$; b) $\dfrac{x^5}{x^3 + 3}$ c) $\dfrac{4^{x+2}}{2^{3x+1}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := x^2 e^x$ relativamente all'insieme $x \le 1$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^5 - x}{2x^3 + x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x + 3^x}{1 + 5^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{2^x + x^{10}}}_{c} \ll \underbrace{\frac{\log x - x^2}{2\log x}}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 2 della funzione $f(x) := \log(1 + 2x)\sqrt{1 - x}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{|x| - 1} \le y \le 1 - x^2$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = -2$, $y = 2\sqrt{3}$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = -2$, $y = 0$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = \sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$; $x =$ $y =$
Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare le soluzioni x della disuguaglianza $\tan(\pi x) \ge -1$ tali che $-1 \le x \le 0$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 4^x}{3^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\exp(x^3) - 1}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(e^{2x})$; b) $\dfrac{x^7}{x^2+2}$ c) $\dfrac{4^{x+1}}{2^{2x+1}}$.

5. Dire se esistono i punti di massimo e minimo *assoluti* della funzione $f(x) := \log(4 - x^2)$ relativamente all'insieme $-2 < x \leq -1$ e in caso affermativo calcolarli.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2^x + x}{5^x + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^2 + 2\log x}{x \log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4 + x^3}{x - 2x^2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{2^x + \log x}}_{d}$$

7. Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 2 della funzione $f(x) := \exp(4x)\cos(2x)$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\dfrac{1}{|x|+1} \leq \sqrt{|x|}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\exp(2x^2) = a(x-2)^5$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log\big(\sin(x^3)\big) - 3\log x$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^6$.

3. Consideriamo i triangoli delimitati dagli assi cartesiani e da una retta tangente al grafico $y = e^{-x}$ in un punto di ascissa positiva. Tra tutti questi triangoli determinare quelli di area massima e di area minima.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\exp(2x^2) = a(x-3)^{16}$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log\big(\sin(x^2)\big) - 2\log x$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^4$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\exp(2x^2) = a(x-2)^{12}$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log\big(\exp(x^2) - 1\big) - 2\log x$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $\exp(2x^2) = a(x-3)^7$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \log\big(\exp(x^3) - 1\big) - 3\log x$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^3$.

3. Uguale al gruppo 1.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = 1 + e^t \cos t$; $y(t) = -2 + e^t \sin t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)}{\log^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x^3)}{x^4 \sin(x^2)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x) + ax$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

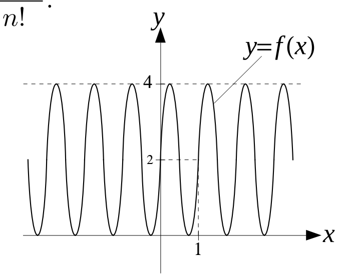
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi x \cos x \, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + n^a}{a^n + 1}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x^2}$ che soddisfa $x(0) = 1$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = -3 + t \cos t$; $y(t) = 2 + t \sin t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 2^x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(2^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \log(1-2x^2)}{x^2 \sin(x^2)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x) - ax$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

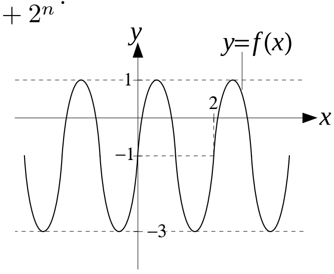
4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 a^n + 1}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{1 + 2^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove

nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = 1 - e^{-t}\cos t$; $y(t) = 3 + e^{-t}\sin t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x - 4^x$; b) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{1}{\sin^3 x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\big[\exp(1/x^3) - 1\big]$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x) + ax$ risulta essere decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

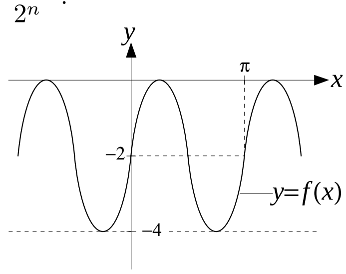
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^a + n^{2a}}{1+n^{4a}}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x^3}$ che soddisfa $x(0) = 1$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n x^n}{2^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



Prima parte, gruppo 4.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = 2 + e^t\sin t$; $y(t) = -1 + e^t\cos t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log^3 x}{\log(\log x)}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\sin x$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4\sin(x^2)}{1-\cos(2x^3)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x) - ax$ risulta essere decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

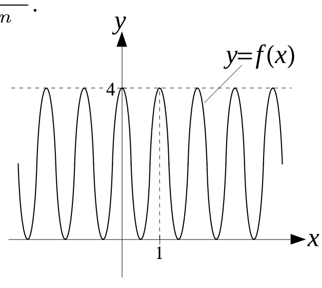
4. Calcolare $\displaystyle\int x\,\cos x\,dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n + 1}{2^n + n^a}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{x^3}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,x^n}{4^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



Prima parte, gruppo 5.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = -2 + t\sin t$; $y(t) = 3 + t\cos t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x^2}}{4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(2^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(x^2)}{2x^2+\log(1-2x^2)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \cos(2x) + ax$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

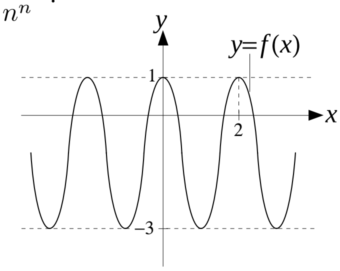
4. Calcolare $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3a^n+1}{n^3 3^n+1}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{x^2}$ che soddisfa $x(0) = 1$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Calcolare la velocità (intesa come vettore) e il modulo della velocità di un punto che si muove nel piano con la seguente legge oraria: $x(t) = 2 + e^{-t}\sin t$; $y(t) = 1 - e^{-t}\cos t$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^5 + 2^x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x \sin x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4\big[\cos(1/x^2) - 1\big]$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \cos(3x) + ax$ risulta essere decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

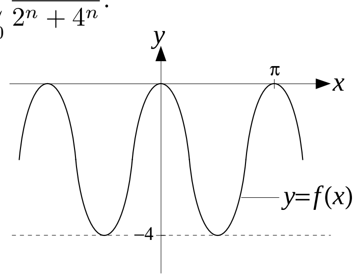
4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$.

5. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n^{2+a}}{1+n^{3a}}$ converge ad un numero finito.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

7. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n+4^n}$.

8. Trovare una formula per la funzione $f(x)$ il cui grafico è disegnato qui accanto.



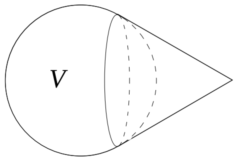
SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 2, 3 e 4.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+2x^4}\,.$$
   a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + a/x^4$ per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dalla formula
$$f(x) := \int_0^{\frac{x}{5+x^6}} 2\exp(-t^2)\, dt\,.$$
   a) Studiare il segno di $f(x)$ (osservare che la funzione integranda è sempre positiva).
   b) Studiare i limiti significativi di $f(x)$.
   c) Disegnare un grafico approssimativo di $f(x)$.
   d) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

3. Calcolare il volume del solido V dato dall'unione di una sfera e di un cono come in figura, dove la sfera ha raggio 2 e la distanza tra il vertice del cono e il centro della sfera è 4.



(Attenzione: come si vede dal disegno, nei punti di "giunzione" la sfera e il cono sono tangenti.)

4. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2 - 2a)x = 2e^t + 4t\,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = \frac{1}{2}$.
   c) Trovare gli $a \neq 0, \frac{1}{4}$ per cui tutte le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

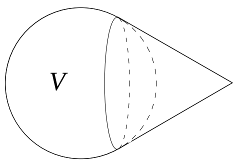
Seconda parte, gruppo 2.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 2, 3 e 4.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1+x^4}\,.$$
   a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + a/x^4$ per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dalla formula
$$f(x) := \int_0^{-\frac{x}{3+x^4}} \exp(-t^2)\, dt\,.$$
   a) Studiare il segno di $f(x)$ (osservare che la funzione integranda è sempre positiva).
   b) Studiare i limiti significativi di $f(x)$.
   c) Disegnare un grafico approssimativo di $f(x)$.
   d) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

3. Calcolare il volume del solido V dato dall'unione di una sfera e di un cono come in figura, dove la sfera ha raggio $\sqrt{2}$ e la distanza tra il vertice del cono e il centro della sfera è 2.



(Attenzione: come si vede dal disegno, nei punti di "giunzione" la sfera e il cono sono tangenti.)

4. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2+a)x = 2e^t - 4t\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -1, -\frac{1}{2}, 0$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -1$.
c) Trovare gli $a \neq 0, \frac{1}{4}$ per cui tutte le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

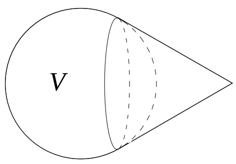
SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 2, 3 e 4.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{1+x^3} - \frac{1}{1+2x^3}\,.$$
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + a/x^3$ per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dalla formula
$$f(x) := \int_0^{-\frac{x}{5+x^6}} \exp(-t^2)\,dt\,.$$
a) Studiare il segno di $f(x)$ (osservare che la funzione integranda è sempre positiva).
b) Studiare i limiti significativi di $f(x)$.
c) Disegnare un grafico approssimativo di $f(x)$.
d) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

3. Calcolare il volume del solido V dato dall'unione di una sfera e di un cono come in figura, dove la sfera ha raggio 2 e la distanza tra il vertice del cono e il centro della sfera è 4.



(Attenzione: come si vede dal disegno, nei punti di "giunzione" la sfera e il cono sono tangenti.)

4. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2-2a)x = 2e^t + 4t\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = \frac{1}{2}$.
c) Trovare gli $a \neq 0, \frac{1}{4}$ per cui tutte le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 2, 3 e 4.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{1-x^3} - \frac{1}{1+x^3}\,.$$
a) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale di $f(x) + a/x^3$ per $x \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione $f(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dalla formula

$$f(x) := \int_0^{\frac{x}{3+x^4}} 2\exp(-t^2)\,dt\,.$$

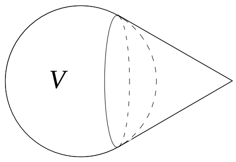
a) Studiare il segno di $f(x)$ (osservare che la funzione integranda è sempre positiva).

b) Studiare i limiti significativi di $f(x)$.

c) Disegnare un grafico approssimativo di $f(x)$.

d) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

3. Calcolare il volume del solido V dato dall'unione di una sfera e di un cono come in figura, dove la sfera ha raggio $\sqrt{2}$ e la distanza tra il vertice del cono e il centro della sfera è 2.



(Attenzione: come si vede dal disegno, nei punti di "giunzione" la sfera e il cono sono tangenti.)

4. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2+a)x = 2e^t - 4t\,. \qquad (*)$$

a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -1, -\frac{1}{2}, 0$.

b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -1$.

c) Trovare gli $a \neq 0, \frac{1}{4}$ per cui tutte le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ per $t \to +\infty$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $3 \sin x - 3 \cos x = r \sin(x + \alpha)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $(1 + x)e^{-x}$; b) x^{2x}; c) $\log\big(x^3/2^x\big)$.
3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq -1$, specificando quando non esistono.
4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 4 della funzione $f(x) := (3 - x^2) \cos(2x)$.
5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{4^x}{e^x+1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x + 1}{2^x}}_{b} \ll \underbrace{2^x + x^3 \log x}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x}{4^x + x}}_{d}$$
6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n + 2^n}{n!}$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $|x| - 1 \geq \arctan(1 - x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $2 \sin x + 2 \cos x = r \sin(x + \alpha)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $(1 - x)e^{-x}$; b) x^{-x}; c) $\log\big(x^2/4^x\big)$.
3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq 2$, specificando quando non esistono.
4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 6 della funzione $f(x) := (6 + 2x^2) \log(1 + x^2)$.
5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{4^x}{\log x + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{1}{3^x + 3^{-x}}}_{b} \ll \underbrace{e^{-x} + 4^{-x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^{3x}}{2^x + x}}_{d}$$
6. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 + 1)^{5/2}} dx$.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $x^2 \geq \arctan(|x + 1|)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $-2 \sin x + 2 \cos x = r \sin(x + \alpha)$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) xe^{x^2}; b) x^{3x}; c) $\log\big(x^2/2^x\big)$.

3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \leq 2$, specificando quando non esistono.

4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 9 della funzione $f(x) := (6 - 2x^3)\log(1 + x^3)$.

5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{2^x + (\log x)^2}_{a} \ll \underbrace{\frac{2^x}{4^x + x^3}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4^x}{e^x + x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{(1 + \log x)^2}{1 + 2^x}}_{d}$$

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\arctan(|x| - 1) \leq y \leq 2 - x^2$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $2\sin x - 2\cos x = r\sin(x + \alpha)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(e^{2x})$; b) $(2x)^x$; c) $\log\left(2^x/x^3\right)$.

3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{x/2}$ relativamente alla semiretta $x \geq -1$, specificando quando non esistono.

4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 8 della funzione $f(x) := (3 - x^4)\cos(2x^2)$.

5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{2^{-x} + 4^{-x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2^{3x}}{2^x - x^2}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4^x}{x^3 + 1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2}{3^x + 3^{-x}}}_{d}$$

6. Calcolare $\displaystyle\int x\, e^{-x} dx$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n + 3^n}{6^n}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x| - 1 \leq y \leq \arctan(1 - x)$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $3\sin x + 3\cos x = r\sin(x + \alpha)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(e^{-x})$; b) $(3x)^x$; c) $\log\left(4^x/x^2\right)$.

3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{x/2}$ relativamente alla semiretta $x \geq -3$, specificando quando non esistono.

4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 9 della funzione $f(x) := (6 + 2x^3)\log(1 + x^3)$.

5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{2^x + (\log x)^2}}_{a} \ll \underbrace{\frac{1+2^x}{(1+\log x)^2}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4^x + x^3}{2^x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{e^x}{4^x + x}}_{d}$$

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}}\,dx$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n}{n!}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2 - x^2 \leq \arctan(|x| - 1)$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Trovare $r > 0$ e $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $-3\sin x + 3\cos x = r \sin(x + \alpha)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(e^{3x})$; b) $(4x)^x$; c) $\log\big(2^x/x^2\big)$.

3. Trovare i punti di minimo e di massimo della funzione $f(x) := xe^{x/2}$ relativamente alla semiretta $x \leq 1$, specificando quando non esistono.

4. Trovare il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 6 della funzione $f(x) := (6 - 2x^2)\log(1 + x^2)$.

5. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2^{-x} + 2^x}{x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2}{2^x + 5^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{2^x}{2^{3x} + x^2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x}{x^3 + 1}}_{d}$$

6. Calcolare $\displaystyle\int x^2 e^{-x^3}\,dx$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x^2 \leq y \leq \arctan(|x + 1|)$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$x^2 - 3 = ae^x\,. \tag{*}$$
b) Per ogni $a \leq 0$ per cui l'equazione (*) ammette delle soluzioni, indico con $x(a)$ la più grande di queste soluzioni. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 di ordine 1 della funzione $x(a)$, cioè trovare le costanti c_0 e c_1 per cui vale $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$.

2. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali $|x| \leq y \leq \sqrt[3]{|x|^3 + 1}$.
b) Dire se A ha area finita.
c) Dire se il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse x ha volume finito.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è definita e finita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Dimostrare che $f(x)$ risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$.

c) Trovare una formula per $f(x)$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$x^2 - 8 = ae^x \,. \tag{*}$$
b) Per ogni $a \leq 0$ per cui l'equazione (*) ammette delle soluzioni, indico con $x(a)$ la più grande di queste soluzioni. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 di ordine 1 della funzione $x(a)$, cioè trovare le costanti c_0 e c_1 per cui vale $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$.

2. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali $|x| \leq y \leq \sqrt[5]{|x|^5 + 1}$.
b) Dire se A ha area finita.
c) Dire se il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse x ha volume finito.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,.$$
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è definita e finita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
b) Dimostrare che $f(x)$ risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$.
c) Trovare una formula per $f(x)$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$x^2 - 2 = ae^{2x} \,. \tag{*}$$
b) Per ogni $a \leq 0$ per cui l'equazione (*) ammette delle soluzioni, indico con $x(a)$ la più grande di queste soluzioni. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 di ordine 1 della funzione $x(a)$, cioè trovare le costanti c_0 e c_1 per cui vale $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$.

2. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali $|x| \leq y \leq \sqrt[3]{|x|^3 + 2}$.
b) Dire se A ha area finita.
c) Dire se il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse x ha volume finito.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,.$$
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è definita e finita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
b) Dimostrare che $f(x)$ risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$.
c) Trovare una formula per $f(x)$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$x^2 - 6 = ae^{2x} \,. \tag{*}$$

b) Per ogni $a \leq 0$ per cui l'equazione (*) ammette delle soluzioni, indico con $x(a)$ la più grande di queste soluzioni. Determinare lo sviluppo di Taylor in 0 di ordine 1 della funzione $x(a)$, cioè trovare le costanti c_0 e c_1 per cui vale $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$.

2. a) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali $|x| \leq y \leq \sqrt[5]{|x|^5 + 2}$.
   b) Dire se A ha area finita.
   c) Dire se il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse x ha volume finito.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \, .$$
   a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è definita e finita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   b) Dimostrare che $f(x)$ risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$.
   c) Trovare una formula per $f(x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = 0,\ \ y = -2;$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   b) $x = -3,\ \ y = \sqrt{3};$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   c) $r = 2,\ \ \alpha = \pi/3;$ $\quad x =$ $\quad y =$
   (Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x) + ax^2$ risulta essere convessa su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^4 2^x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{\sin(x^4)}$.

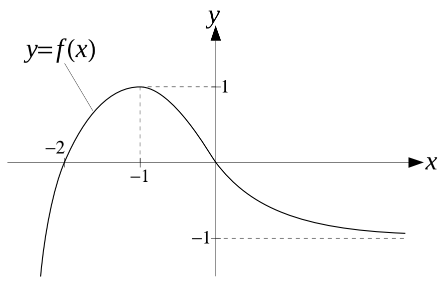
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $2^x - 3^x = o(xa^x)$ per $x \to +\infty$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 2e^{2t}\cos t + 1\,, \quad y(t) = 2e^{2t}\sin t - 2\,,$$
   e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^a}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{2}{t}x = 3$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, risolvere graficamente la disequazione $f(2x) + 1 \geq f(x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -3,\ \ y = 0;$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   b) $x = -2,\ \ y = 2;$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   c) $r = 2,\ \ \alpha = -\pi/4;$ $\quad x =$ $\quad y =$
   (Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x) - ax^2$ risulta essere convessa su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^x\sqrt{x}\log x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}{\cos(x^2) - 1}$.

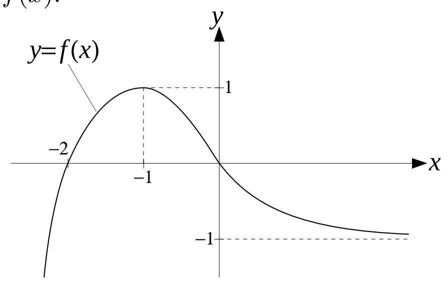
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $xe^{ax} = O(2^x)$ per $x \to +\infty$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = e^{-t}\cos t - 1\,, \quad y(t) = e^{-t}\sin t + 2\,,$$
   e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^a}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{2}{t}x = 4t$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(-x-1) \le y \le f(x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = 0,\ \ y = -3;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   b) $x = -\sqrt{3},\ \ y = 1;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{3},\ \ \alpha = 2\pi/3;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
   (Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(2x) + ax^2$ risulta essere concava su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log(\log x)}{\log^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{\sin(x^2) - x^2}$.

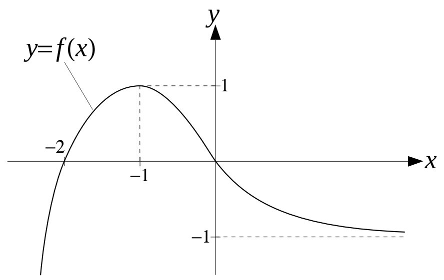
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^5 + x^4 \log x = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 2e^{2t}\cos t + 1\,, \quad y(t) = -2e^{2t}\sin t - 2\,,$$
   e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{2a}}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{3}{t}x = 4$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, risolvere graficamente la disequazione $\frac{1}{2}f(x) \le f(-x)$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:

a) $x = -2,\ \ y = 0;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
b) $x = \sqrt{3},\ \ y = 3;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
c) $r = 2\sqrt{2},\ \ \alpha = 3\pi/4;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
(Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \sin(3x) - ax^2$ risulta essere concava su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{4^x+1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{\log(1+x^2)-x^2}$.

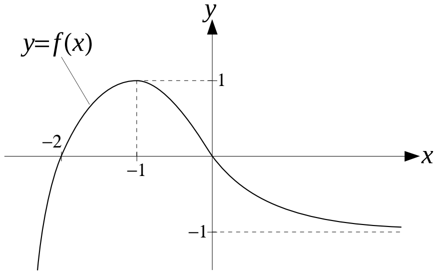
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(x^x) = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 2e^{-t}\cos t - 1\,, \quad y(t) = -2e^{-t}\sin t + 2\,,$$
e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{2a}}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{3}{t}x = 5t$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le f(2x) + 1$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = 0,\ \ y = 2;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
b) $x = -1,\ \ y = -1;$ $\qquad r =$ $\qquad \alpha =$
c) $r = 2\sqrt{3},\ \ \alpha = -5\pi/6;$ $\qquad x =$ $\qquad y =$
(Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \cos(2x) + ax^2$ risulta essere convessa su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x^2}}{4^x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to(2\pi)^-} \frac{x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

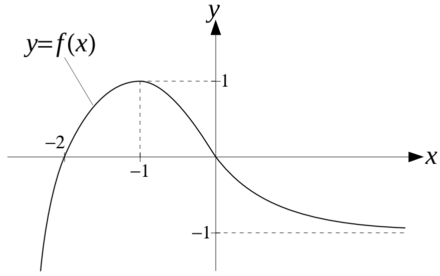
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $a^x \ll x2^x$ per $x \to -\infty$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 4e^{2t}\sin t + 1\,, \quad y(t) = 4e^{2t}\cos t - 2\,,$$
e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{3a}}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{4}{t}x = 5$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, risolvere graficamente la disequazione $f(-x-1) \le f(x)$.



Prima parte, gruppo 6.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -2,\ \ y = 0;$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   b) $x = 2,\ \ y = -2;$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   c) $r = \sqrt{2},\ \ \alpha = -3\pi/4;$ $\quad x =$ $\quad y =$
   (Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.)

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \cos(3x) + ax^2$ risulta essere concava su tutto $\mathbb{R}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x - x^4$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 2\pi} \frac{x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^6}$.

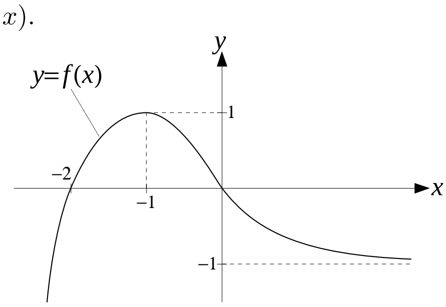
4. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(x^x) = O(x^a)$ per $x \to 0^+$.

5. Calcolare la velocità scalare $v(t)$ di un punto che si muove con legge oraria
$$x(t) = 3e^{-t}\sin t - 1\,, \quad y(t) = 3e^{-t}\cos t + 2\,,$$
e la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 2$.

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(4-x^2)^{3a}}$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + \dfrac{4}{t}x = 6t$ che soddisfa $x(2) = 1$.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ disegnato nella figura sotto, disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\frac{1}{2}f(x) \ge y \ge f(-x)$.

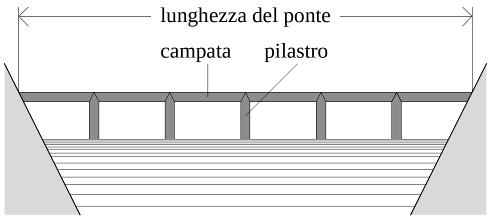


Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+2)^2 x = e^{-t}\,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \ne -1; -5$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -1$.

c) Per ogni a determinare le soluzioni di (*) che convergono a 1 per $t \to +\infty$.

2. Si decide di costruire attraverso un fiume un ponte di lunghezza 15 (non specifico l'unità di misura) formato da n campate di lunghezza uguale ed $n-1$ pilastri, come in figura.



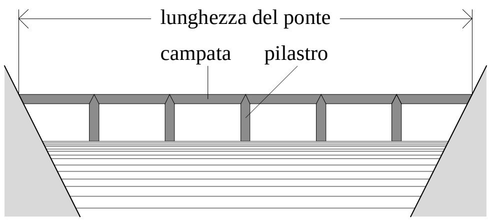
Sapendo che il costo di un pilastro è 3 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è $1+\ell^2$, come conviene prendere n?

3. Dimostrare che la serie $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n^2}}$ converge e calcolarne il valore con errore inferiore a 10^{-10}.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+4)^2 x = e^{-2t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -2; -10$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -2$.
c) Per ogni a determinare le soluzioni di (*) che convergono a 1 per $t \to +\infty$.

2. Si decide di costruire attraverso un fiume un ponte di lunghezza 13 (non specifico l'unità di misura) formato da n campate di lunghezza uguale ed $n-1$ pilastri, come in figura.



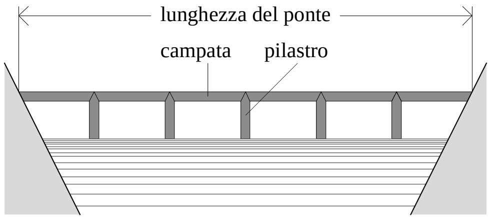
Sapendo che il costo di un pilastro è 2 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è $1+\ell^2$, come conviene prendere n?

3. Dimostrare che la serie $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n^2}}$ converge e calcolarne il valore con errore inferiore a 10^{-10}.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+2)^2 x = -e^{-t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -1; -5$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -1$.
c) Per ogni a determinare le soluzioni di (*) che convergono a 1 per $t \to +\infty$.

2. Si decide di costruire attraverso un fiume un ponte di lunghezza 25 (non specifico l'unità di misura) formato da n campate di lunghezza uguale ed $n-1$ pilastri, come in figura.



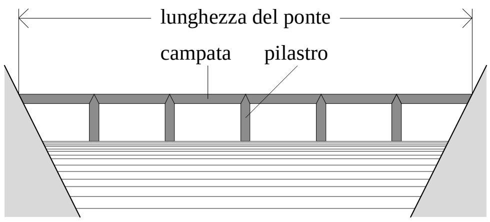
Sapendo che il costo di un pilastro è 3 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è $1+\ell^2$, come conviene prendere n?

3. Dimostrare che la serie $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n^2}}$ converge e calcolarne il valore con errore inferiore a 10^{-10}.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+4)^2 x = -e^{-2t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq -2; -10$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = -2$.
c) Per ogni a determinare le soluzioni di (*) che convergono a 1 per $t \to +\infty$.

2. Si decide di costruire attraverso un fiume un ponte di lunghezza 20 (non specifico l'unità di misura) formato da n campate di lunghezza uguale ed $n-1$ pilastri, come in figura.



Sapendo che il costo di un pilastro è 2 e che il costo di una campata di lunghezza ℓ è $1+\ell^2$, come conviene prendere n?

3. Dimostrare che la serie $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n^2}}$ converge e calcolarne il valore con errore inferiore a 10^{-10}.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(3x) \le 1$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi/3$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x\,\exp(-x^3)$ nel punto di ascissa $x = -1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $2\sin(3x^2 + x^6)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{8^x}{2^x+1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{x^3-2x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{2x-1}{x^4+1}}_{c} \ll \underbrace{e^{2x+1}}_{d}$$

5. Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_1^{+\infty} (1+n^a)\log(1+n^{-3a})$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(t^3/3 - 4t - 1;\ 2t^2 - 2\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + t\dot{x} + 12\,t^2 x = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{(x+1)^2} - 1 \le y \le 1 - x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(3x) \ge -\sqrt{3}$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi/3$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x^2\exp(-x^2)$ nel punto di ascissa $x = -1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $\log(1 + 2x^2 + x^4)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^3}{\sqrt{x}+1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{3\cdot 2^x+1}{8^x-1}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{5^x+3}}_{c} \ll \underbrace{x^2\log(1+e^x)}_{d}$$

5. Dire per quali $a > 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \frac{4^n+1}{2^{an}+n}$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(t^5/5 - 9t + 2;\ 2t^3 + 1\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + 3t\dot{x} - (10\,t^2 + 2)x = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2 - e^{-x} \le \sqrt{2-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \le \sqrt{3}$ nell'intervallo $0 \le x \le \pi/2$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x^2 \exp(x^2)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $\exp(4x^3 + x^6)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{3 \cdot 2^x + 1}{9^x - 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^4}{\sqrt[3]{x} + 2}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{4^x + 1}}_{c} \ll \underbrace{x^3 \log(e^x - 1)}_{d}$$

5. Dire per quali $a > 0$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a - 1}{x^{2x} + 1} dx$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(2t^2 - 1;\, t^3/3 - 4t + 3\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + t\dot{x} - (6t^2 + 2)x = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan(1 - x) \leq 2 \log(x + 3)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(3x) \leq 1$ nell'intervallo $-\pi/3 \leq x \leq 0$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x \exp(-x^3)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $2 \sin(3x^2 - x^6)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{5^x}{2^x + 1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{x^4 + 1}}_{b} \ll \underbrace{e^{x-1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2x^2 - 1}{x^6 + x}}_{d}$$

5. Dire per quali $a > 0$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} (1 + x^a) \log(1 + x^{-4a})\, dx$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(2t^3 + 2;\, t^5/5 - 9t - 4\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x} + t\dot{x} + (4 - 12\, t^2)x = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\displaystyle\frac{1}{(x+1)^2} - 1 \leq 1 - x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(3x) \geq -\sqrt{3}$ nell'intervallo $-\pi/3 \leq x \leq 0$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x^2 \exp(-x^2)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $\log(1 + 2x^2 - x^4)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^4}{\sqrt{x}-2}}_{a} \ll \underbrace{\frac{1}{5^x+3}}_{b} \ll \underbrace{\frac{3\cdot 2^x-1}{9^x+2}}_{c} \ll \underbrace{x^3\log(e^x-1)}_{d}$$

5. Dire per quali $a>0$ converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{8^x+1}{2^{ax}+x}dx$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(2t^2-3;\, t^3/3-4t-1\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t=0$ e l'istante $t=1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x}+3t\dot{x}+2x=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $2-e^{-x} \le y \le \sqrt{2-x}$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \le \sqrt{3}$ nell'intervallo $-\pi/2 \le x \le 0$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico $y = x^2\exp(x^2)$ nel punto di ascissa $x=-1$.

3. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $\exp(4x^3-x^6)$.

4. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{\log x}{x^2+1}}_{a} \ll \underbrace{\frac{6^x}{2^x+1}}_{b} \ll \underbrace{e^x-x}_{c} \ll \underbrace{\frac{\sin(2/x)}{x+1}}_{d}$$

5. Dire per quali $a>0$ converge la serie $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \frac{n^{2n}+1}{n^a-1}$.

6. Calcolare la velocità (vettore) del punto P che si muove con legge oraria
$$P(t) = \big(t^5/5-9t+1;\, 2t^3-2\big)$$
e la distanza percorsa tra l'istante $t=0$ e l'istante $t=1$.

7. Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(\lambda t^2)$ risolve l'equazione $\ddot{x}+t\dot{x}+(3-6t^2)x=0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $\arctan(1-x) \le y \le 2\log(x+3)$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a>0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \log(1+2x^a) - 2\big(\log(1+x)\big)^a$$
a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ quando $a=2$.
b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ per ogni $a>0$.

2. Sia V il solido ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio 2 attorno ad una retta che dista 1 dal centro del cerchio.
a) Fare un disegno approssimativo di V.
b) Calcolare il volume di V.

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0, 0)$, $(1/a^2, 0)$ e $(0, a)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.
   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.
   c) Trovare g nel caso in cui A sia invece l'unione dei triangoli T_a con $a \geq 1$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \log(1 - 2x^a) + 2\big(\log(1 + x)\big)^a$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ quando $a = 2$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ per ogni $a > 0$.

2. Sia V il solido ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio 2 attorno ad una retta che dista $\sqrt{2}$ dal centro del cerchio.
   a) Fare un disegno approssimativo di V.
   b) Calcolare il volume di V.

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0, 0)$, $(1/a, 0)$ e $(0, a)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.
   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.
   c) Trovare g nel caso in cui A sia invece l'unione dei triangoli T_a con $a \geq 1$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \log(1 + 4x^a) - 4\big(\log(1 + x)\big)^a$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ quando $a = 2$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ per ogni $a > 0$.

2. Sia V il solido ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio 4 attorno ad una retta che dista 2 dal centro del cerchio.
   a) Fare un disegno approssimativo di V.
   b) Calcolare il volume di V.

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0, 0)$, $(2/a, 0)$ e $(0, a)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.
   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.
   c) Trovare g nel caso in cui A sia invece l'unione dei triangoli T_a con $a \geq 1$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \log(1 - 4x^a) + 4\big(\log(1 + x)\big)^a$$
   a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ quando $a = 2$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x)$ per ogni $a > 0$.

2. Sia V il solido ottenuto facendo ruotare un cerchio di raggio 4 attorno ad una retta che dista $2\sqrt{2}$ dal centro del cerchio.

   a) Fare un disegno approssimativo di V.

   b) Calcolare il volume di V.

3. Per ogni numero reale $a > 0$ indichiamo con T_a il triangolo rettangolo (nel piano cartesiano) di vertici $(0,0)$, $(2/a^2, 0)$ e $(0, a)$. Indichiamo poi con A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a \geq 0$.

   a) Tracciare un disegno approssimativo di A.

   b) Si vede che A è delimitato dagli assi e dal grafico di una funzione g; trovare questa g.

   c) Trovare g nel caso in cui A sia invece l'unione dei triangoli T_a con $a \geq 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -2,\ \ y = 2;$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   b) $x = 0,\ \ y = -3;$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{3},\ \ \alpha = -2\pi/3;$ $\quad x =$ $\quad y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt{x}\log x$ relativamente all'insieme $x \geq 1/2$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arctan(3^x)$; b) $x\,(1+x^2)^{1/2}$; c) $\log\big(x^{2x}\big)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $e^x(\sin x - x) \gg \dfrac{x^a}{\log x}$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - 3^n}{(n+2)^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^a\,(\cos x)^{2a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = te^t(1 + x^2)$ tale che $x(1) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} \leq y \leq \sqrt[4]{1-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -\sqrt{3},\ \ y = 3;$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   b) $x = 0,\ \ y = -2;$ $\quad r =$ $\quad \alpha =$
   c) $r = \sqrt{2},\ \ \alpha = 3\pi/4;$ $\quad x =$ $\quad y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}\log x$ relativamente all'insieme $0 < x \leq 1/2$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2(1+x^2)^{1/2}$; b) $\arctan(2^x)$; c) $\log\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $(e^x - 1)\sin x \gg \dfrac{x^a}{\log x}$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n + 4^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^{2a}\,(\cos x)^{a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = te^t(1 + x^2)$ tale che $x(1) = \sqrt{3}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^{-x} \leq y \leq \sqrt{2-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:

a) $x = -1$, $y = 1$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = 0$, $y = 4$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2$, $\alpha = -2\pi/3$; $x =$ $y =$
Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt{x}\log x$ relativamente all'insieme $0 < x \leq 1$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(2^x)$; b) $x^3(1+x^2)^{1/2}$; c) $\log\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}\right)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(1+x) - x \gg x^a \log x$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4+1}{3-2^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_1^{\pi/2} \frac{dx}{(e^x - e)^{4a}(\sin x)^a}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = te^t(1+x^2)$ tale che $x(1) = -1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $e^x \leq y \leq \log(2-x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = -1$, $y = -\sqrt{3}$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = -2$, $y = 0$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2$, $\alpha = 3\pi/4$; $x =$ $y =$
Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}\log x$ relativamente all'insieme $x \geq 1/2$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x\,(1+x^4)^{1/2}$; b) $\arcsin(3^x)$; c) $\log\big(x^{3x}\big)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $e^x(\sin x - x) \ll x^a \log x$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{n^5+1} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_1^{\pi/2} \frac{dx}{(e^x - e)^{a}(\sin x)^{4a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2t}{e^x(1+t^2)}$ tale che $x(0) = 2$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \leq \sqrt{2-x}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
a) $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$; $r =$ $\alpha =$
b) $x = -\sqrt{2}$, $y = 0$; $r =$ $\alpha =$
c) $r = 2$, $\alpha = 5\pi/6$; $x =$ $y =$

Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt{x}\,\log x$ relativamente all'insieme $0 < x \le 1/2$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arccos(2^x)$; b) $x^2(1+x^4)^{1/2}$; c) $\log\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $(e^x - 1)\sin x \ll x^a \log x$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - 4^n}{5^n + 4^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x^a\,(\log x)^{3a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2t}{e^x(1+t^2)}$ tale che $x(0) = 3$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^x \le \log(2 - x)$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Per ciascuno dei seguenti punti dare le coordinate (polari o cartesiane) che mancano:
   a) $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$; $r =$ $\alpha =$
   b) $x = -3$, $y = 0$; $r =$ $\alpha =$
   c) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$; $x =$ $y =$
   Per le coordinate polari indicare un angolo α compreso tra $-\pi$ e π.

2. Trovare i punti di minimo e massimo *assoluti* della funzione $f(x) := \sqrt[3]{x}\,\log x$ relativamente all'insieme $0 < x \le 1$, specificando quando non esistono.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3(1+x^4)^{1/2}$; b) $\arccos(3^x)$; c) $\log\left(\dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{x+1}}\right)$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(1+x) - x \ll \dfrac{x^a}{\log x}$ per $x \to 0$.

5. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n - 5^n}{4^n + 2^n} x^n$.

6. Dire dove è improprio l'integrale $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x^{3a}\,(\log x)^{a}}$, e per quali $a > 0$ è finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2t}{e^x(1+t^2)}$ tale che $x(0) = 1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \le \sqrt[4]{1 - x}$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Disegnare il grafico $y = \log\log x$.
   b) Dire se è vero che $\log\log x \le \sqrt{\log x}$ per ogni $x > 1$.
   c) Dire per quali $a > 0$ vale che $\log\log x \le a\sqrt{\log x}$ per ogni $x > 1$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{2x^4 - x^2 + 1}{2x^2 - 2}$$
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \geq y \geq x^2 + \frac{1}{2}$.
c) Dire se A ha area finita oppure no.

3. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \bigl[(1+n)^{n^a} - 1\bigr]$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Disegnare il grafico $y = \log\log x$.
b) Dire se è vero che $\log\log x \leq \sqrt[3]{\log x}$ per ogni $x > 1$.
c) Dire per quali $a > 0$ vale che $\log\log x \leq a\sqrt[3]{\log x}$ per ogni $x > 1$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{4x^4 + 3x^2 + 3}{4x^2 - 1}$$
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \geq y \geq x^2 + 1$.
c) Dire se A ha area finita oppure no.

3. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \bigl[(1+n)^{n^a} - 1\bigr]$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\sin(x - \pi/3) = \cos(x + \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $f(x) := (2 + x^4)\,\sqrt[4]{1 + 4x^2}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{12^x}{2^x + x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x - x^4}{x + 1}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x + x^3}{\log x}}_{c} \ll \underbrace{xe^{2x}}_{d}$$

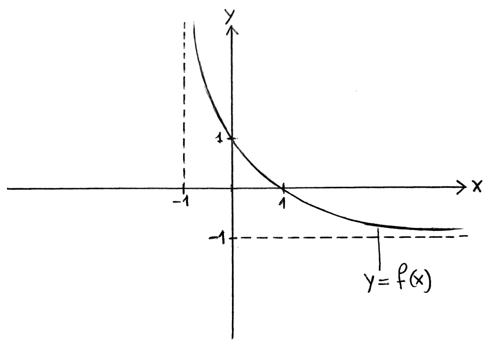
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(1 + e^{-2t}\cos t,\ 5 - e^{-2t}\sin t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^{\arcsin x} (\sin t)^4\, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{\cos x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n^{2a} + n^{3a}}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = 1 - f(|x|)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(|x|) \le y \le 1 - x^2$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\sin(x - \pi/4) = \cos(x + \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $f(x) := (3 + x^4)\log(1 + 2x^2)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{e^{2x}}{x^3}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x + x^3}{\sin(1/x)}}_{b} \ll \underbrace{\frac{9^x}{x^4 + 1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2x^4}{\log x}}_{d}$$

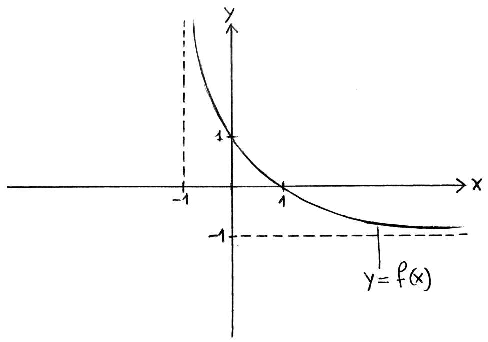
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(2 + e^{-3t}\cos t,\ 2 + e^{-3t}\sin t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^{\arctan x} (\tan t)^4\, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_2^a \frac{dx}{\cos x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n^{2a} + n^{4a}}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = 2f(|x|)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le 2f(|x|)$.



Prima parte, gruppo 3.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\sin(x + \pi/3) = \cos(x + \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $f(x) := (2 - x^4)\,\sqrt[3]{1 + 3x^2}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{\frac{12^x}{2^x + x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{9^x}{x^4 + 1}}_{b} \ll \underbrace{xe^{2x}}_{c} \ll \underbrace{x^3 - 1}_{d}$$

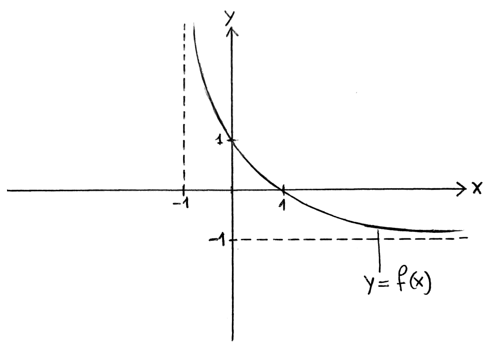
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(1 - 2e^{-2t}\cos t,\, 3 + 2e^{-2t}\sin t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^{\arccos x} (\cos t)^4\, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{a} \frac{dx}{\cos x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n} - 1}{n^{a} + n^{2a}}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = |f(x + 1)|$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le |f(x + 1)|$.



Prima parte, gruppo 4.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x + 2\pi/3) = \sin(x - \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $f(x) := (2 - x^6)\, \sqrt[4]{1 + 4x^3}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{2^x + x}{12^x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x - x^4}{x+1}}_{b} \ll \underbrace{x e^{-2x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x + x^3}{\log x}}_{d}$$

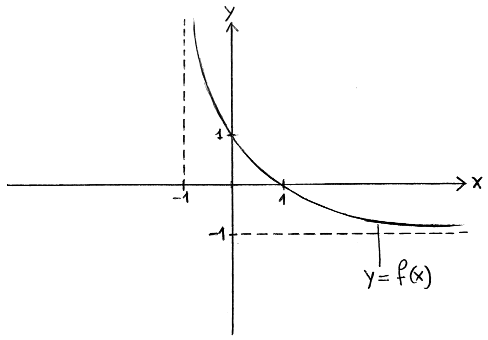
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(1 + 3e^{-3t}\cos t,\ 1 - 3e^{-3t}\sin t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\arcsin x} (\sin t)^5\, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{\sin x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-2a} + n^{-3a}}{e^{1/n^2} - 1}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = 1 - f(1 - x)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le 1 - f(1 - x)$.



Prima parte, gruppo 5.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x + 3\pi/4) = \sin(x - \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 9 della funzione $f(x) := (3 - x^6)\, \log(1 + 2x^3)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^3}{e^{2x}}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2x^4}{\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x + x^3}{\sin(1/x)}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x^4 + 1}{9^x}}_{d}$$

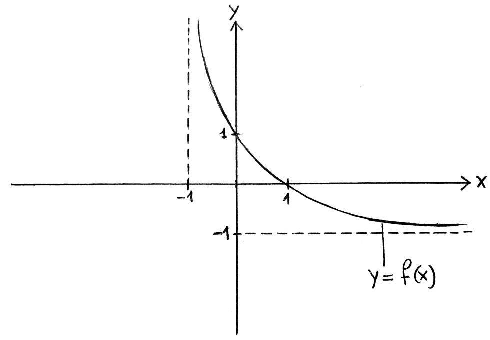
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(5 - e^{-2t}\sin t,\ 3 - e^{-2t}\cos t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\arctan x} (\tan t)^5\, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_4^a \frac{dx}{\sin x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-2a} + n^{-4a}}{n^a + n^{4a}}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = 2f(|x|)$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x^4 - 1 \le y \le 2f(|x|)$.



Prima parte, gruppo 6.

1. Trovare $\alpha \in [0, 2\pi)$ per cui vale l'identità trigonometrica $\cos(x + 5\pi/4) = \sin(x - \alpha)$.

2. Trovare il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $f(x) := (2 + x^6)\sqrt[3]{1 + 3x^3}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{\frac{2^x + x}{12^x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^4 + 1}{9^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x}{e^{2x}}}_{c} \ll \underbrace{x^3 - 1}_{d}$$

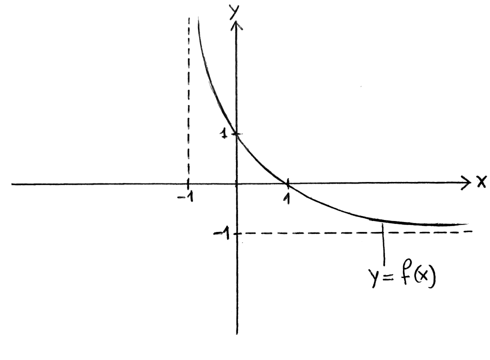
4. Consideriamo un punto P che si muove con la legge oraria $P(t) := \big(4 - e^{-3t}\sin t,\, 2 - e^{-3t}\cos t\big)$. Calcolare il vettore velocità di P e la distanza percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = +\infty$.

5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{\arccos x} (\cos t)^5\, dt$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{a} \frac{dx}{\sin x}$ non è improprio.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-a} + n^{-2a}}{e^n - 1}$ converge ad un numero finito.

8. Partendo dal grafico $y = f(x)$ riportato sotto, disegnare il grafico $y = |f(x+1)|$ e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \ge f(x)$ e $y \ge |f(x+1)|$.



Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = \sin t + 2 \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 0$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 0$.
c) Dire per quali valori di a esistono soluzioni asintoticamente equivalenti a e^{3t} per $t \to +\infty$, e specificare quante sono.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := x^2 \log x$.
b) Detto P_x il punto del grafico di f di ascissa x, dire per quali x il punto P_x è "direttamente visibile" dall'origine degli assi O, vale a dire che il segmento che congiunge O a P non interseca il grafico di f se non agli estremi.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\left(x^4 - 1 + \frac{16}{x^2}\right).$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq 4\log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 4a\dot{x} + (4a^2 - a + 1)x = \cos t + 1 \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 0$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 0$.
c) Dire per quali valori di a esistono soluzioni asintoticamente equivalenti a e^{3t} per $t \to +\infty$, e specificare quante sono.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := x^{1/2} \log x$.
b) Detto P_x il punto del grafico di f di ascissa x, dire per quali x il punto P_x è "direttamente visibile" dall'origine degli assi O, vale a dire che il segmento che congiunge O a P non interseca il grafico di f se non agli estremi.

3. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\left(x^4 - 1 + \frac{16}{x^2}\right).$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq 4\log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x^2 - 3)e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$, specificando quando non esistono.

2. Sia T la retta tangente al grafico $y = \exp(-x^2/2)$ nel punto di ascissa $x = -2$.
   a) Trovare l'equazione di T.
   b) Calcolare l'area del triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta T.

3. Dire per quali $a > 0$ vale che $2^x = o(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

4. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := (3x^2 - 2) \sin\Big(\dfrac{2}{x}\Big) - 6x$.

5. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^6}\, dx$.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + (-2)^n}{2^n - 4^n} x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $4 - x^2 \leq \sqrt{1 - x}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x^2 - 8)e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \geq -3$, specificando quando non esistono.

2. Sia T la retta tangente al grafico $y = \exp(-x^2/2)$ nel punto di ascissa $x = -4$.
   a) Trovare l'equazione di T.
   b) Calcolare l'area del triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta T.

3. Dire per quali $a > 0$ vale che $\log(1 + x^2) = O(\log^a x)$ per $x \to +\infty$.

4. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := (x + 2) \log\Big(1 + \dfrac{2}{x}\Big) - 2$.

5. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx$.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + n^n}{1 + (-n)^{2n}} x^n$ converge ad un numero finito.

7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{3 - x} \leq 4 - x^2$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x^2 - 3)e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \leq 4$, specificando quando non esistono.

2. Sia T la retta tangente al grafico $y = \exp(-x^2/2)$ nel punto di ascissa $x = 2$.
   a) Trovare l'equazione di T.
   b) Calcolare l'area del triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta T.
3. Dire per quali $a > 0$ vale che $x^2 + x^{2a} \ll x^a$ per $x \to 0$.
4. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := (3x^2 - 1)\,\sin\Big(\dfrac{2}{x}\Big) - 6x$.
5. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx$.
6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{1 + (-n)^n} x^n$ converge ad un numero finito.
7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 1$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $4 - x^2 \le y \le \sqrt{1 - x}$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare tutti i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x^2 - 8)e^{-x}$ relativamente alla semiretta $x \le 2$, specificando quando non esistono.
2. Sia T la retta tangente al grafico $y = \exp(-x^2/2)$ nel punto di ascissa $x = 4$.
   a) Trovare l'equazione di T.
   b) Calcolare l'area del triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta T.
3. Dire per quali $a > 0$ vale che $1/x^2 \ll e^{ax}$ per $x \to -\infty$.
4. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := = (x - 1)\,\log\Big(1 + \dfrac{2}{x}\Big) - 2$.
5. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} xe^{-x^2}\,dx$.
6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - 4^n}{1 + (-2)^n} x^n$ converge ad un numero finito.
7. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ che soddisfano la condizione iniziale $x(0) = 1$.
8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{3 - x} \le y \le 4 - x^2$.

Seconda parte.

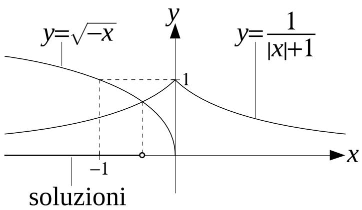
1. Consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $0 \le y \le f(x)$, dove
$$f(x) := (x - 1)\,e^{-x}\,.$$
   a) Disegnare il grafico di f e l'insieme A.
   b) Calcolare il volume del solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse delle x.
   c) Calcolare il volume del solido V' ottenuto ruotando A attorno alla retta di equazione $x = 1$.

2. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{(a+x^2)^2} \, .$$
   a) Disegnare il grafico di f per $a = 1$.
   b) Trovare il punto del grafico di f più vicino all'origine per $a = 1$.
   c) Trovare il punto del grafico di f più vicino all'origine per ogni $a > 0$.

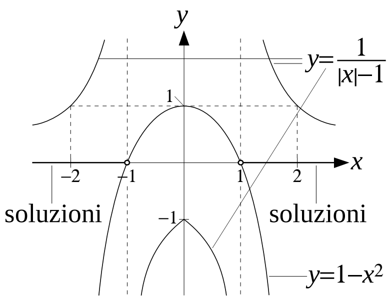
3. Determinare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} - e^2 \right] dx$

SOLUZIONI

Prima parte, gruppo 1.

1. a) $r = 2\sqrt{2}$; $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; b) $r = 4$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; c) $x = \sqrt{3}$; $y = -3$.
2. L'insieme delle soluzioni è $\Big[0, \dfrac{\pi}{4}\Big) \cup \Big[\dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}\Big]$.
3. a) $+\infty$; b) non esiste; c) 2.
4. a) $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$; b) $\dfrac{x^4 + 12\,x^2}{(x^2+4)^2}$ c) $\log 3 \cdot 3^{x-5} = \dfrac{\log 3}{243}\, 3^x$.
5. Il punto di massimo è $x = -2$; il punto di minimo non esiste.
6. L'ordine corretto è $c \ll b \ll d \ll a$.
7. $f(x) = 1 + 4x^2 + 6x^4 + O(x^6)$.
8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. a) $r = 2\sqrt{3}$; $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$; b) $r = 2$; $\alpha = \pi$; c) $x = 2$; $y = -2$.
2. L'insieme delle soluzioni è $\Big(-\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{8}\Big]$.
3. a) 0; b) 1; c) -2.
4. a) $\dfrac{\log 2 \cdot 2^x}{1+2^{2x}}$; b) $\dfrac{12\,x^2 - 2x^7}{(x^5+4)^2}$; c) 0.
5. Il punto di massimo è $x = 0$; il punto di minimo non esiste.
6. L'ordine corretto è $c \ll b \ll a \ll d$.
7. $f(x) = 6x - 3x^3 + O(x^5)$.
8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. a) $r = 2\sqrt{3}$; $\alpha = -\dfrac{2\pi}{3}$; b) $r = 2$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; c) $x = -1$; $y = \sqrt{3}$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

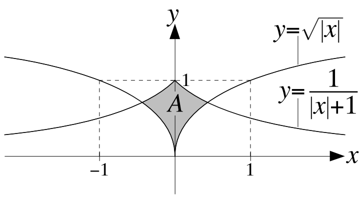
3. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 6.

4. a) $\dfrac{4x^3}{1+x^8}$ b) $\dfrac{12\,x - 5x^8}{(x^7+6)^2}$ c) $\log 2 \cdot 2^{x-3} = \dfrac{\log 2}{8}\, 2^x$.

5. Il punto di massimo non esiste; il punto di minimo è $x = 0$.

6. L'ordine corretto è $a \ll d \ll b \ll c$.

7. $f(x) = 2x^2 - 3x^4 + O(x^6)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $r = 2$; $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; b) $r = 2$; $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; c) $x = -2$; $y = 2$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

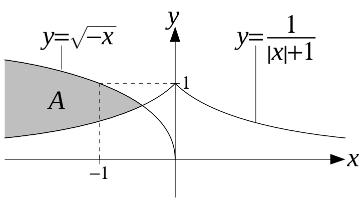
3. a) 0; b) non esiste; c) 0.

4. a) $\dfrac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}}$; b) $\dfrac{16\,x^3}{(x^4+4)^2}$ c) $-\log 2 \cdot 2^{-x} = -\dfrac{\log 2}{2^x}$.

5. Il punto di massimo è $x = 0$; il punto di minimo non esiste.

6. L'ordine corretto è $d \ll a \ll b \ll c$.

7. $f(x) = 6x^2 - 3x^6 + O(x^{10})$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. a) $r = \sqrt{6}$; $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$; b) $r = 1$; $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; c) $x = -3$; $y = \sqrt{3}$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$.

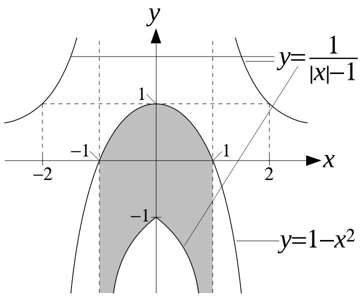
3. a) 0; b) non esiste; c) 1.

4. a) $\dfrac{\log 2 \cdot 2^x}{\sqrt{1-2^{2x}}}$; b) $\dfrac{2x^7 + 15\,x^4}{(x^3+3)^2}$ c) $-\log 2 \cdot 2^{-x+3} = -\dfrac{8 \log 2}{2^x}$.

5. Il punto di massimo è $x = 1$; il punto di minimo è $x = 0$.

6. L'ordine corretto è $c \ll b \ll d \ll a$.

7. $f(x) = 2x - 3x^2 + O(x^3)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. a) $r = 4$; $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$; b) $r = 2$; $\alpha = \pi$; c) $x = -1$; $y = 1$.

2. L'insieme delle soluzioni è $\Big[-1, -\dfrac{1}{2}\Big) \cup \Big[-\dfrac{1}{4}, 0\Big]$.

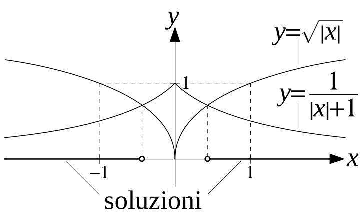
3. a) $-\infty$; b) 0; c) non esiste.

4. a) $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$; b) $\dfrac{5x^8 + 14\,x^6}{(x^2+2)^2}$ c) 0.

5. Il punto di massimo è $x = -1$; il punto di minimo non esiste.

6. L'ordine corretto è $a \ll d \ll b \ll c$.

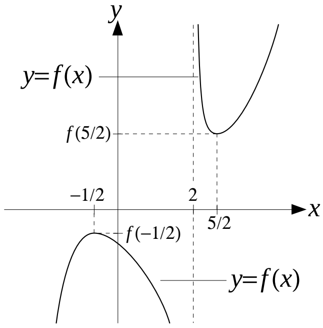
7. $f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + O(x^3)$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Riscrivo l'equazione in questione nella forma
$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := (x-2)^{-5}\exp(2x^2)\,.$$
Per determinare il numero di soluzioni dell'equazione devo quindi disegnare il grafico della funzione $f(x)$.
A questo scopo osservo che $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 2$, è positiva per $x > 2$ e negativa per $x < 2$, tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$ e per $x \to 2^-$, tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e per $x \to 2^+$.
Inoltre, studiando il segno della derivata prima
$$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)(x-2)^{-6}\exp(2x^2)\,,$$
ottengo che la funzione cresce negli intervalli $(-\infty, -1/2]$ e $[5/2, +\infty)$, e decresce negli intervalli $[-1/2, 2)$ e $(2, 5/2]$; in particolare $x = -1/2$ è un a punti di massimo locale con
$$f(-1/2) = -(2/5)^5 e^{1/2} \simeq -1{,}69 \cdot 10^{-2}\,,$$
mentre $x = 5/2$ è un punto di minimo locale con
$$f(5/2) = 2^5 e^{25/2} \simeq 8{,}59 \cdot 10^6\,.$$

Usando questi dati traccio il grafico $y = f(x)$ (nel farlo non rispetto le proporzioni):



Dal grafico ottengo il seguente schema per le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$:

- per $a < f(-1/2)$ ci sono due soluzioni;
- per $a = f(-1/2)$ c'è una soluzione ($x = -1/2$);
- per $f(-1/2) < a < f(5/2)$ non ci sono soluzioni;
- per $a = f(5/2)$ c'è una soluzione ($x = 5/2$);
- per $a > f(5/2)$ ci sono due soluzioni.

2. a) Osservo come prima cosa che

$$f(x) := \log\big(\sin(x^3)\big) - 3\log x = \log\left(\frac{\sin(x^3)}{x^3}\right).$$

Usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + O(t^5)$ con $t = x^3$ ottengo quindi

$$f(x) = \log\Big(1 - \frac{x^6}{6} + O(x^{12})\Big),$$

e usando il cambio di variabile $t = -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})$ e lo sviluppo $\log(1+t) \sim t$

$$f(x) = \log(1+t) \sim t = -\frac{x^6}{6} + O(x^{12}) \sim -\frac{x^6}{6}.$$

In conclusione la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $-\frac{1}{6}x^6$.

b) Per quanto visto al punto precedente,

$$\text{p.p.}(f(x)) = \Big(a - \frac{1}{6}\Big)x^6 \quad \text{per ogni } a \neq \frac{1}{6}.$$

Nel caso $a = 1/6$ ho bisogno di uno sviluppo più preciso di $f(x)$.
Usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + O(t^7)$ con $t = x^3$ ottengo

$$f(x) = \log\Big(1 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + O(x^{18})\Big),$$

e usando il cambio di variabile $t = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{12} + O(x^{18})$ e lo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+t)\\
&= t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)\\
&= \Big[-\frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + O(x^{18})\Big] - \frac{1}{2}\Big[-\frac{x^6}{6} + O(x^{12})\Big]^2 + O\Big[\Big(-\frac{x^6}{6}\Big)^3\Big]\\
&= \Big[-\frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + O(x^{18})\Big] - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^{12}}{36} + O(x^{18}) + O(x^{24})\Big] + O(x^{18})\\
&= -\frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{180} + O(x^{18}).
\end{aligned}$$

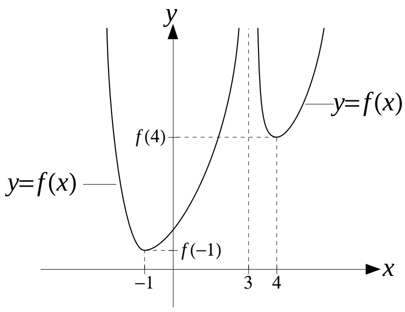
Quindi

$$f(x) + \frac{x^6}{6} = -\frac{x^{12}}{180} + O(x^{18}) \sim -\frac{x^{12}}{180}.$$

3. Per ogni $a \geq 0$ indico con T_a il triangolo delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico di $f(x) := e^{-x}$ nel punto di ascissa a.
Usando il fatto che la retta in questione ha equazione
$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a) = e^{-a}(1+a-x)$$
ottengo subito che l'intersezione con l'asse delle y, vale a dire l'altezza di T_a, è $y = e^{-a}(1+a)$, mentre l'intersezione con l'asse delle x, vale a dire la base di T_a, è $x = 1+a$. Ne segue che l'area di T_a è data dalla funzione
$$g(a) := \frac{1}{2}(1+a)^2 e^{-a}\,.$$
Cerco ora i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $g(a)$ relativamente alla semiretta $a \geq 0$. Per farlo confronto i valori di g per $a = 0$, $a = +\infty$, e per gli $a \geq 0$ dove si annulla la derivata
$$g'(a) = \frac{1}{2}(1-a^2)e^{-a}\,,$$
vale a dire $a = 1$.
Poiché $g(0) = 1/2$, $g(1) = 2/e$ e $g(+\infty) = 0$, concludo che $a = 1$ è il punto di massimo assoluto di g, e il valore massimo è $g(1) = 2/e$, mentre non ci sono punti di minimo assoluto, e l'estremo inferiore dei valori di g è 0 ("raggiunto" per $a \to +\infty$).
In altre parole, il triangolo di area massima è T_1, mentre quello di area minima non esiste.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Riscrivo l'equazione in questione nella forma $f(x) = a$ con $f(x) := (x-3)^{-16}\exp(2x^2)$ e disegno il grafico $y = f(x)$. A questo scopo osservo che $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 3$, è sempre positiva, e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$ e per $x \to 2$.
Inoltre, studiando il segno della derivata prima $f'(x) = (4x^2 - 12\,x - 16)(x-3)^{-17}\exp(2x^2)$ ottengo che la funzione decresce negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $(3, 4]$, e cresce negli intervalli $[-1, 3)$ e $[4, +\infty)$. In particolare $x = -1$ e $x = 4$ sono punti di minimo locale con $f(-1) = e^2/2^{32} = 1{,}72 \cdot 10^{-9}$ e $f(4) = e^{32} = 7{,}89 \cdot 10^{13}$.
Usando questi dati traccio il grafico $y = f(x)$:



Dal grafico ottengo il seguente schema per le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$:
- per $a < f(-1)$ non ci sono soluzioni;
- per $a = f(-1)$ c'è una soluzione ($x = -1$);
- per $f(-1) < a < f(4)$ ci sono due soluzioni;
- per $a = f(4)$ ci sono tre soluzioni (tra cui $x = 4$);
- per $a > f(4)$ ci sono quattro soluzioni.

2. Analogo al gruppo 1: a) $\text{p.p.}(f(x)) = -\frac{1}{6}x^4$; b) $\text{p.p.}(f(x) + ax^4) = \begin{cases} (a-\frac{1}{6})x^4 & \text{per } a \neq \frac{1}{6}, \\ -\frac{1}{180}x^8 & \text{per } a = \frac{1}{6}. \end{cases}$

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Riscrivo l'equazione come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-2)^{-12}\exp(2x^2)$. Il grafico di f è simile a quello del gruppo 2, con la differenza che l'asintoto verticale è in $x = 2$ e i punti di minimo locale sono $x = -1$ e $x = 3$. Dal grafico di f ottengo che
   - per $a < f(-1)$ non ci sono soluzioni;
   - per $a = f(-1)$ c'è una soluzione ($x = -1$);
   - per $f(-1) < a < f(3)$ ci sono due soluzioni;
   - per $a = f(3)$ ci sono tre soluzioni (tra cui $x = 3$);
   - per $a > f(3)$ ci sono quattro soluzioni.

2. a) Osservo che
$$f(x) = \log\Big(\frac{\exp(x^2)-1}{x^2}\Big)$$
e procedo come per il gruppo 1, usando gli sviluppi $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ e $\log(1+t) \sim t$:
$$f(x) = \log\Big(1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}_{t}\Big) = \log(1+t) \sim t = \frac{x^2}{2} + O(x^4) \sim \frac{x^2}{2}\,.$$
In conclusione la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $\frac{1}{2}x^2$.
b) Per quanto fatto sopra la parte principale di $f(x) + ax^2$ è $(a + \frac{1}{2})x^2$ per ogni $a \neq -\frac{1}{2}$.
Nel caso $a = -\frac{1}{2}$ ho bisogno di uno sviluppo più preciso della funzione $f(x)$, che ottengo usando gli sviluppi $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + O(t^4)$ e $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \log\Big(1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + O(x^6)}_{t}\Big) \\ &= \log(1+t) \\ &= t - \frac{t^2}{2} + O(t^3) \\ &= \Big[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + O(x^6))\Big] - \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2} + O(x^4)\Big]^2 + O\Big[\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^3\Big] \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\,. \end{aligned}$$
Da questo ottengo che la parte principale di $f(x) - \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$ è $\frac{1}{24}x^4$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Riscrivo l'equazione come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-3)^{-7}\exp(2x^2)$, Il grafico di f è simile a quello del gruppo 1, con la differenza che l'asintoto verticale è in $x = 3$, il punto di massimo locale è $x = -1/2$ e il punto di minimo locale è $x = 7/2$. Dal grafico di f ottengo che
   - per $a < f(-1/2)$ ci sono due soluzioni;
   - per $a = f(-1/2)$ c'è una soluzione ($x = -1/2$);
   - per $f(-1/2) < a < f(7/2)$ non ci sono soluzioni;
   - per $a = f(7/2)$ c'è una soluzione ($x = 7/2$);
   - per $a > f(7/2)$ ci sono due soluzioni.

2. Analogo al gruppo 3: a) $\text{p.p.}(f(x)) = \frac{1}{2}x^3$; b) $\text{p.p.}(f(x) + ax^3) = \begin{cases} (a+\frac{1}{2})x^3 & \text{per } a \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{24}x^6 & \text{per } a = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno provato a risolvere questo esercizio disegnando separatamente i grafici $y = \exp(2x^2)$ e $y = a(x-3)^{16}$ (mi riferisco per semplicità al gruppo 1), ottenendo risultati completamente errati. In effetti questo approccio presenta diversi problemi: il primo è che questi disegni sono solo approssimativi, mentre il numero di intersezioni dipende dalla precisione del disegno, il secondo è che le intersezioni di questi due grafici (quando ci sono) non rientrano tutte nell'area effettivamente disegnata; il terzo è che il grafico $y = a(x-3)^{16}$ è stato disegnato solo per un valore di a, mentre il disegno cambia con a e così anche il risultato finale.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno disegnato il grafico della funzione $f(x)$ senza studiare il segno della derivata $f'(x)$, ma risolvendo solo l'equazione $f'(x) = 0$. Pur essendo corretto il disegno, non è chiaro come sia possibile disegnare un grafico senza sapere dove la funzione cresce e dove decresce...

- Seconda parte, esercizio 2, punto b). Nel discutere il caso "difficile" ($a = 1/6$ per il gruppo 1) diversi dei presenti hanno sviluppato ulteriormente solo una delle due funzioni coinvolte: in un caso quella all'interno del logaritmo ma non il logaritmo, nell'altro il logaritmo ma non la funzione all'interno. In entrambi i casi il risultato finale è sbagliato, cosa di cui ci si può accorgere scrivendo (correttamente) i resti.
Per chiarire, nel primo caso la versione *corretta* dei passaggi fatti è la seguente (mi riferisco sempre al gruppo 1):
$$f(x) = \log\Big(\frac{\sin(x^3)}{x^3}\Big) = \log\Big(1 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{120} + O(x^{18})\Big)$$
usando quindi cambio di variabile $t = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{12} + O(x^{18})$ e lo sviluppo $\log(1+t) = t + O(t^2)$ si ottiene
$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+t) \\ &= t + O(t^2) \\ &= \Big[-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{120}x^{12} + O(x^{18})\Big] + O\Big[\Big(-\frac{1}{6}x^6\Big)^2\Big] = -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})\,. \end{aligned}$$
Nel secondo caso invece si comincia con
$$f(x) = \log\Big(\frac{\sin(x^3)}{x^3}\Big) = \log\Big(1 - \frac{x^6}{6} + O(x^{12})\Big)$$
e usando cambio di variabile $t = -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})$ e lo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ si ottiene
$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+t) \\ &= t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3) \\ &= \Big[-\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})\Big] - \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})\Big]^2 + O\Big[\Big(-\frac{1}{6}x^6\Big)^3\Big] \\ &= -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12}) - \frac{1}{72}x^{12} + O(x^{18}) + O(x^{24}) + O(x^{18}) = -\frac{1}{6}x^6 + O(x^{12})\,. \end{aligned}$$

- Seconda parte, esercizio 3. Pochissimi dei presenti hanno impostato correttamente l'esercizio. In particolare quasi tutti hanno scritto in modo errato l'equazione della retta tangente al grafico $y = e^{-x}$ (vanificando i calcoli successivi); l'errore è stato più o meno sempre lo stesso: indicare con x sia l'ascissa del punto di tangenza, sia la variabile indipendente nell'equ azione della retta tangente, ottenendo così un equazione che non è quella di una retta (e tantomeno quella della retta tangente).

- Seconda parte, esercizio 3. Molti hanno impostato l'esercizio senza fare alcun disegno...

Prima parte, gruppo 1.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^t(\cos t - \sin t);\ e^t(\sin t + \cos t)\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{2}\, e^t$.

2. a) 0; b) $+\infty$; c) 2.

3. La funzione $f(x)$ è crescente per $a \geq 2$.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int_0^\pi x \, \cos x \, dx = \Big| x \, \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = \Big| \cos x \Big|_0^\pi = -2\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{2}{a}\Big)^n$ e quindi converge per $a > 2$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[3]{3e^t - 2}$.

7. Usando il criterio del rapporto si ottiene $R = +\infty$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = 2 + 2\sin(2\pi x)$.

Prima parte, gruppo 2.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(\cos t - t\sin t;\ \sin t + t\cos t\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{1+t^2}$.

2. a) 0; b) non esiste; c) -2.

3. La funzione $f(x)$ è crescente per $a \leq -3$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 2x$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{2}\int y^{-1/2} dy = -y^{1/2} + c = -\sqrt{4-2x} + c\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{a}\Big)^n$ e quindi converge per $a > 1$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[3]{3e^t + 5}$.

7. Usando il criterio della radice si ottiene $R = \dfrac{2}{3}$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = -1 + 2\sin(\pi x)$.

Prima parte, gruppo 3.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^{-t}(\cos t + \sin t);\ e^{-t}(-\sin t + \cos t)\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{2}\, e^{-t}$.

2. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) 1.

3. La funzione $f(x)$ è decrescente per $a \leq -2$.

4. Raccogliendo 4 al denominatore e usando il cambio di variabile $y = x/2$ si ottiene
$$\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dx}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\Big| \arctan y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a}}$ e quindi converge per $a > \dfrac{1}{2}$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[4]{4e^t - 3}$.

7. Usando il criterio della radice si ottiene $R = 0$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = -2 + 2\sin(2x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^t(\sin t + \cos t);\ e^t(\cos t - \sin t)\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{2}\, e^t$.

2. a) $+\infty$; b) 0; c) $\dfrac{1}{2}$.

3. La funzione $f(x)$ è decrescente per $a \geq 3$.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{a}{2}\Big)^n$ e quindi converge per $a < 2$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[4]{4e^t + 12}$.

7. Usando il criterio del rapporto si ottiene $R = 0$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = 2 + 2\cos(2\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(\sin t + t\cos t;\ \cos t - t \sin t\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{1 + t^2}$.

2. a) $+\infty$; b) 1; c) $-\dfrac{1}{2}$.

3. La funzione $f(x)$ è crescente per $a \geq 2$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 2x$ si ottiene
$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = -\frac{1}{2}\int_2^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\int_0^2 y^{-1/2} dy = \Big|y^{1/2}\Big|_0^2 = \sqrt{2}\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{a}{3}\Big)^n$ e quindi converge per $a < 3$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[3]{3\sin t + 1}$.

7. Usando il criterio della radice si ottiene $R = +\infty$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = -1 + 2\cos(\pi x)$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. La velocità è $\vec{v}(t) = \big(e^{-t}(-\sin t + \cos t);\ e^{-t}(\cos t + \sin t)\big)$, e quindi $\big|\vec{v}(t)\big| = \sqrt{2}\, e^{-t}$.

2. a) $-\infty$; b) non esiste; c) $-\dfrac{1}{2}$.

3. La funzione $f(x)$ è decrescente per $a \le -3$.

4. Raccogliendo 4 al denominatore e usando il cambio di variabile $y = x/2$ si ottiene
$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+(x/2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\arctan y + c = \frac{1}{2}\arctan\Big(\frac{x}{2}\Big) + c\,.$$

5. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a-2}}$ e quindi converge per $a > \dfrac{3}{2}$.

6. La soluzione è $x(t) = \sqrt[3]{3\sin t + 8}$.

7. Usando il criterio della radice si ottiene $R = 4$.

8. Una formula per la funzione in questione è $f(x) = -2 + 2\cos(2x)$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

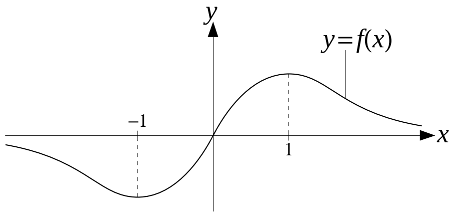
1. a) Usando il fatto che $1 + x^4 \sim x^4$ e $1 + 2x^4 \sim 2x^4$ per $x \to +\infty$ ottengo che
$$f(x) := \frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+2x^4} \sim \frac{1}{x^4} - \frac{1}{2x^4} = \frac{1}{2x^4}\,,$$
e quindi p.p.$\big(f(x)\big) = \frac{1}{2}x^{-4}$ per $x \to +\infty$.
b) Per quanto appena visto ho anche che p.p.$\big(f(x) + ax^{-4}\big) = \big(\frac{1}{2} + a\big)x^{-4}$ per ogni $a \ne -\frac{1}{2}$. Per $a = -\frac{1}{2}$ serve invece uno sviluppo più preciso di $f(x)$.
Siccome x tende a $+\infty$, conviene mettere in evidenza x^4 e $2x^4$ nei denominatori delle frazioni che compongono $f(x)$, cosa che permette poi di usare lo sviluppo di Taylor $1/(1+t) = 1-t+O(t^2)$:
$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{1+2x^4} \\ &= \frac{1}{x^4}\cdot\frac{1}{1+1/x^4} - \frac{1}{2x^4}\cdot\frac{1}{1+1/(2x^4)} \\ &= \frac{1}{x^4}\big(1 - 1/x^4 + O(1/x^8)\big) - \frac{1}{2x^4}\big(1 - 1/(2x^4) + O(1/x^8)\big) \\ &= \frac{1}{2x^4} - \frac{3}{4x^8} + O\big(1/x^{12}\big)\,. \end{aligned}$$
Da questo segue che p.p.$\big(f(x) - \frac{1}{2}x^{-4}\big) = -\frac{3}{4}x^{-8}$.

2. a) Ricordo che
$$f(x) := \int_0^{\frac{x}{5+x^6}} 2\exp(-t^2)\,dt\,.$$
Poiché l'integranda $2\exp(-t^2)$ è strettamente positiva, la funzione $f(x)$ è strettamente positiva quando l'estremo di integrazione $x/(5+x^6)$ è strettamente maggiore dell'estremo di integrazione 0, cioè quando $x > 0$. Analogamente $f(x) < 0$ per $x < 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$.
b) Siccome $f(x)$ è ben definita (e continua) per ogni $x \in \mathbb{R}$, i limiti significativi sono quelli per $x \to \pm\infty$. Siccome l'estremo di integrazione $x/(5+x^6)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, ottengo che
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \int_0^0 2\exp(-t^2)\,dt = 0\,.$$

c) Per disegnare il grafico di $f(x)$ osservo che la derivata di questa funzione è

$$f'(x) = 2\exp(-t^2)\left(\frac{x}{5+x^6}\right)' = 2\exp(-t^2)\,\frac{5(1-x^6)}{(5+x^6)^2} \quad \text{con } t = \frac{x}{5+x^6}\,.$$

Il segno di $f'(x)$ è quindi quello del fattore $1-x^6$, ed in particolare $f(x)$ cresce per $-1 \le x \le 1$, e decresce per $x \le -1$ e per $x \ge 1$.
Basandomi su quanto detto posso tracciare il grafico di $f(x)$.



d) Sia per $x \to 0$ che per $x \to +\infty$ l'estremo di integrazione superiore

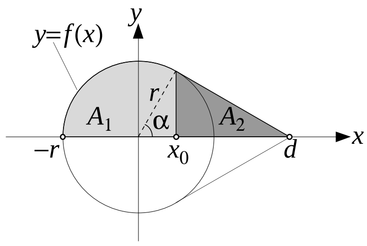
$$y := \frac{x}{5+x^6}$$

converge a 0, che è l'estremo di integrazione inferiore. Utilizzando quindi lo sviluppo di Taylor $\exp(-t^2) = 1 + O(t^2)$ ottengo

$$f(x) = \int_0^y 2\exp(-t^2)\,dt = \int_0^y 2 + O(t^2)\,dt = 2y + O\big(y^3\big) \sim 2y\,.$$

Osservo ora che per $x \to 0$ si ha $y \sim x/5$ e quindi la parte principale di $f(x)$ è $\frac{2}{5}x$.
Invece per $x \to +\infty$ si ha $y \sim 1/x^5$ e quindi la parte principale è $2/x^5$.

3. Il solido V è dato dall'unione dei solidi V_1 e V_2 ottenuti ruotando attorno all'asse delle x le figure piane A_1 ed A_2 disegnate qui sotto. Si noti in particolare che A_1 è un pezzo della circonferenza con centro l'origine e raggio $r = 2$ e V_1 è un pezzo di sfera, mentre A_2 è un triangolo e V_2 è un cono.



Per calcolare il volume di V_1 e V_2 dobbiamo innanzitutto determinare l'angolo α ed il valore di x_0. Usando la relazione $r = d\cos\alpha$ ed il fatto che $d = 4$ e $r = 2$ otteniamo $\cos\alpha = 1/2$, e quindi $\alpha = \pi/3$; infine $x_0 = r\cos\alpha = 1$.

Tenendo conto che la parte superiore della circonferenza nel disegno è il grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$$

otteniamo

$$\text{volume}(V_1) = \pi \int_{-r}^{x_0} \big(f(x)\big)^2 dx = \pi \int_{-2}^{1} x^2 - 4\,dx = 9\pi\,.$$

Invece il cono V_2 ha altezza h uguale alla base del triangolo A_2, vale a dire $h = d - x_0 = 3$, e raggio di base ρ uguale all'altezza del triangolo A_2, vale a dire $\rho = r\sin\alpha = \sqrt{3}$, e quindi

$$\text{volume}(V_2) = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h = 3\pi\,.$$

In conclusione

$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_1) + \text{volume}(V_2) = 9\pi + 3\pi = 12\,\pi\,.$$

4. a), b) L'equazione differenziale (*) è del secondo ordine, lineare, non omogenea e a coefficienti costanti. Pertanto la soluzione generale è

$$x(t) = x_{\rm om}(t) + x_1(t) + x_2(t)$$

dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2 - 2a)x = 0\,, \tag{1}$$

x_1 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2 - 2a)x = 4t\,, \tag{2}$$

x_2 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} + (1-6a)\dot{x} + (8a^2 - 2a)x = 2e^t\,. \tag{3}$$

Comincio con le soluzioni dell'equazione omogenea (1). Le soluzioni dell'equazione caratteristica associata $\lambda^2 + (1-6a)\lambda + (8a^2-2a) = 0$ sono

$$\lambda_1 = 4a - 1\,, \quad \lambda_2 = 2a\,.$$

In particolare λ_1 e λ_2 sono sempre reali, e coincidono solo per $a = \frac{1}{2}$, nel qual caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Quindi

$$x_{\rm om}(t) = \begin{cases} c_1 e^{(4a-1)t} + c_2 e^{2at} & \text{se } a \neq \frac{1}{2}, \\ (c_1 + c_2 t)e^t & \text{se } a = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.
Cerco ora una soluzione particolare x_1 della (2) della forma $x_1(t) = b_0 + b_1 t$, e trovo

$$x_1(t) = \frac{2}{4a^2 - a}t + \frac{6a-1}{(4a^2-a)^2}$$

(attenzione, questa formula ha senso solo per $a \neq 0, \frac{1}{4}$).
Per $a \neq \frac{1}{2}$ cerco una soluzione particolare x_2 della (2) della forma $x_2(t) = be^t$ e trovo

$$x_2(t) = \frac{1}{(2a-1)^2}e^t\,.$$

Infine per $a = \frac{1}{2}$ ho che $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e quindi cerco una soluzione particolare x_2 della (2) della forma $x_2(t) = bt^2e^t$ e trovo

$$x_2(t) = t^2 e^t\,.$$

In conclusione per $a \neq 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{(4a-1)t} + c_2 e^{2at} + \frac{1}{(2a-1)^2}e^t + \frac{2}{4a^2-a}t + \frac{6a-1}{(4a^2-a)^2}\,, \tag{4}$$

mentre per $a = \frac{1}{2}$

$$x(t) = (c_1 + c_2 t + t^2)e^t + 4t + 8\,. \tag{5}$$

c) Comincio dal caso $a = \frac{1}{2}$. In questo caso la formula (5) mostra che la soluzione $x(t)$ soddisfa

$$x(t) \sim t^2 e^t \quad \text{per } t \to +\infty$$

e quindi $x(t)$ converge a $+\infty$ per $t \to +\infty$.
Distinguo i rimanenti valori di a in due classi, a seconda che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda_1 = 4a - 1$ e $\lambda_2 = 2a$ siano maggiori o minori di 1.
Se $a < \frac{1}{2}$ ho che $4a - 1 < 2a < 1$ e dunque la formula (4) mostra che

$$x(t) \sim \frac{1}{(2a-1)^2}e^t \quad \text{per } t \to +\infty,$$

e poiché il coefficiente $1/(2a-1)^2$ è positivo, $x(t)$ converge a $+\infty$ per $t \to +\infty$.
Se invece $a > \frac{1}{2}$ ho che $4a - 1 > 2a > 1$, e quindi, per $c_1 \neq 0$,

$$x(t) \sim c_1 e^{(4a-1)t} \quad \text{per } t \to +\infty,$$

e di conseguenza il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$ è $\pm\infty$ a seconda del segno di c_1. In particolare non è più vero che tutte le soluzioni tendono a $+\infty$.

Riassumendo, le soluzioni di (*) tendono tutte a $+\infty$ se e solo se $a \leq \frac{1}{2}$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Analogo al gruppo 1. $\text{p.p.}\big(f(x)\big) = -2x^{-4}$.

   b) Usando la formula precedente ottengo che $\text{p.p.}\big(f(x) + ax^{-4}\big) = (a-2)x^{-4}$ per $a \neq 2$.
   Per $a = 2$ procedo in modo simile al gruppo 1, raccogliendo $1/x^4$ da entrambe le frazioni che compongono $f(x)$ e utilizzando quindi lo sviluppo di Taylor $1/(1+t) = 1 - t + t^2 + O(t^3)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{x^4}\Big(\frac{1}{1-x^{-4}} + \frac{1}{1+x^{-4}}\Big) \\ &= -x^{-4}\big(1 + x^{-4} + x^{-8} + O(x^{-12}) + 1 - x^{-4} + x^{-8} + O(x^{-12})\big) \\ &= -2x^{-4} - 2x^{-12} + O\big(x^{-16}\big)\,. \end{aligned}$$

   Di conseguenza $\text{p.p.}\big(f(x) + 2x^{-4}\big) = -2x^{-12}$.

2. Analogo al gruppo 1.

   a) La funzione $f(x)$ è strettamente positiva quando l'estremo di integrazione $-x/(3+x^4)$ è strettamente maggiore dell'estremo di integrazione 0, cioè quando $x < 0$. Analogamente $f(x) < 0$ per $x > 0$ e $f(x) = 0$ per $x = 0$.

   b) Siccome l'estremo di integrazione $-x/(3+x^4)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, i corrispondenti limiti di $f(x)$ sono uguali a 0.

   c) La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \exp(-t^2)\,\frac{3(x^4-1)}{(3+x^4)^2} \quad \text{con } t = \frac{x}{3+x^4}\,.$$

   In particolare $f(x)$ decresce per $-1 \leq x \leq 1$, e cresce per $x \leq -1$ e per $x \geq 1$.
   Sulla base dei fatti raccolti fin qui traccio il grafico sottostante.

   d) Sia per $x \to 0$ che per $x \to +\infty$ l'estremo di integrazione $y := -x/(3+x^4)$ converge a 0 e usando lo sviluppo di Taylor $\exp(-t^2) = 1 + O(t^2)$ ottengo

$$f(x) = \int_0^y 1 + O(t^2)\,dt = y + O\big(y^3\big) \sim y\,.$$

   Osservo infine che per $x \to 0$ si ha $y \sim x/3$ e quindi la parte principale di $f(x)$ è $\frac{1}{3}x$, mentre per $x \to +\infty$ si ha $y \sim 1/x^3$ e quindi la parte principale è $1/x^3$.

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso $r = \sqrt{2}$, $d = 2$, da cui si ricava che $\alpha = \pi/4$, $x_0 = 1$, e infine $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$. Facendo i dovuti calcoli si ottiene

$$\text{volume}(V) = \text{volume}(V_1) + \text{volume}(V_2) = \frac{\pi}{3}\big(5 + 4\sqrt{2}\big) + \frac{\pi}{3} = 2\pi\bigg(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\bigg)\,.$$

4. Procedo come per il gruppo 1.
   a), b) Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = -a$ e $\lambda_2 = -2a - 1$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2 + a)x = 0$ è

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{-at} + c_2 e^{(-2a-1)t} & \text{se } a \neq -1, \\ (c_1 + c_2 t)e^t & \text{se } a = -1. \end{cases}$$

   Per $a \neq 0, -\frac{1}{2}$ una soluzione dell'equazione non omogenea $\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2+a)x = -4t$ è

$$x_1(t) = -\frac{4}{2a^2 + a}t + \frac{4 + 12a}{(2a^2 + a)^2}\,.$$

   Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} + (1+3a)\dot{x} + (2a^2+a)x = 2e^t$ è

$$x_2(t) = \begin{cases} -\frac{1}{(a+1)^2}e^t & \text{per } a \neq -1, \\ t^2 e^t & \text{per } a = -1. \end{cases}$$

Infine la soluzione generale di (*) è

$$x(t) = \begin{cases} c_1 e^{-at} + c_2 e^{(-2a-1)t} - \frac{1}{(a+1)^2} e^t - \frac{4}{2a^2+a} t + \frac{4+12a}{(2a^2+a)^2} & \text{per } a \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, \\ (c_1 + c_2 t + t^2) e^t - 4t - 8 & \text{per } a = -1. \end{cases}$$

c) Le soluzioni di (*) tendono tutte a $+\infty$ se e solo se $a \geq -1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. a) Analogo al gruppo 1 $\text{p.p.}\big(f(x)\big) = \frac{1}{2}x^{-3}$.

   b) Analogo al gruppo 1: $\text{p.p.}\big(f(x) + ax^{-3}\big) = \begin{cases} \big(\frac{1}{2} + a\big)x^{-3} & \text{per } a \neq -1/2, \\ -\frac{3}{4}x^{-6} & \text{per } a = -1/2. \end{cases}$

2. Molto simile al gruppo 2; in particolare il grafico di $f(x)$ è sostanzialmente lo stesso mentre la parte principale è $-\frac{1}{5}x$ per $x \to 0$ e $-1/x^5$ per $x \to +\infty$.

3. Uguale al gruppo 1.

4. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) Analogo al gruppo 1 $\text{p.p.}\big(f(x)\big) = -2x^{-3}$.

   b) Analogo al gruppo 2: $\text{p.p.}\big(f(x) + ax^{-3}\big) = \begin{cases} (a-2)x^{-3} & \text{per } a \neq 2, \\ -2x^{-9} & \text{per } a = 2. \end{cases}$

2. Molto simile al gruppo 1; in particolare il grafico di $f(x)$ è sostanzialmente lo stesso mentre la parte principale è $-\frac{2}{3}x$ per $x \to 0$ e $-2/x^3$ per $x \to +\infty$.

3. Uguale al gruppo 2.

4. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Nella domanda b) il caso più difficile, vale a dire $a = 2$ per il gruppo 2, può anche essere risolto senza ricorrere agli sviluppi di Taylor, mettendo a comun denominatore le varie frazioni:
$$f(x) + \frac{2}{x^4} = \frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1+x^4} + \frac{2}{x^4} = \frac{2}{(1-x^4)(1+x^4)x^4} \sim -\frac{2}{x^{12}}\,.$$
Lo stesso discorso vale anche per gli altri gruppi.

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno utilizzato lo sviluppo di Taylor
$$\frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2) \tag{1}$$
nel seguente modo (mi riferisco per semplicità al gruppo 2):
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x^4} - \frac{1}{1+x^4} \\ &= \big(1 + x^4 + O(x^8)\big) - \big(1 - x^4 + O(x^8)\big) = 2x^4 + O(x^8) \sim 2x^4\,. \end{aligned}$$
In particolare hanno usato lo sviluppo (1) prima con $t = -x^4$ e poi con $t = x^4$. Questo è completamente errato, perché lo sviluppo (1) vale per t che tende a 0, ma in questi due casi t tende a $\pm\infty$ perché $x \to +\infty$.
Qualcuno ha giustificato questo passaggio invocando il fatto che le funzioni $1/(1 \pm x^4)$ tendono

a 0, ma questo non è rilevante; quello che conta è che la quantità che si mette al posto di t tenda a 0.

- Esercizio 2. Vale la pena di notare che la funzione $f(x)$ è dispari. La dimostrazione di questo fatto non è immediata, e utilizza sia che l'integranda $\exp(-t^2)$ è una funzione pari della variabile t, sia che l'estremo di integrazione superiore è una funzione dispari della variabile x (e quello inferiore è 0).

- Esercizio 2. Diversi dei presenti hanno calcolato (sbagliando) l'integrale che definisce $f(x)$, trovando una formula esplicita per questa funzione. Questo nonostante che fosse stato detto in aula che quell'integrale non si può calcolare.

- Esercizio 2. Incomprensibilmente, diversi dei presenti hanno studiato la funzione integranda $\exp(-t^2)$ invece della funzione $f(x)$.

- Esercizio 3. La maggior parte dei presenti ha avuto problemi a determinare il valore di x_0 (mi riferisco al disegno sopra) che è essenziale per il calcolo del volume.
  Alcuni hanno trovato x_0 a partire dall'equazione della retta che contiene l'ipotenusa del triangolo A_2, e per trovare questa equazione hanno imposto che la retta passasse per $(d, 0)$ e che fosse tangente alla circonferenza, cioè che ci fosse un'unica intersezione. Non è l'approccio più semplice ma va bene.
  Alcuni hanno scritto l'equazione della retta suddetta senza dare spiegazioni. Ma spesso l'equazione data è errata, perché descrive una retta secante alla circonferenza invece che tangente.

- Esercizio 4. Quasi nessuno dei presenti ha svolto correttamente il punto c). Stranamente, diversi hanno evidenziato il punto chiave senza però scrivere delle conclusioni chiare. Infine molti hanno scritto che il limite per $t \to +\infty$ di funzioni tipo ce^t è $+\infty$, senza accorgersi che il limite dipende invece dal segno di c.

Prima parte, gruppo 1.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = 3$, $r\sin\alpha = -3$, e quindi $r = 3\sqrt{2}$, $\alpha = -\pi/4$.

2. a) $-xe^{-x}$; b) $x^{2x}(2 + 2\log x)$; c) $\dfrac{3}{x} - \log 2$.

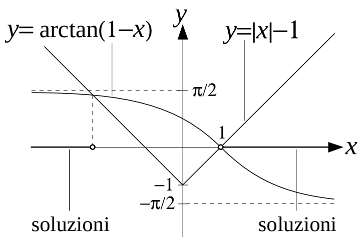
3. Il punto di minimo è $x = -1$, il punto di massimo è $x = 1$.

4. Il polinomio è $P(x) = 3 - 7x^2 + 4x^4$.

5. L'ordine corretto è $d \ll b \ll a \ll c$.

6. Integrando per parti ottengo
$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-x} dx = \Big| x(-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x}) dx = \Big| -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1\,.$$

7. Mi riconduco alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n + 2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = e^4 + e^2$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = 2$, $r\sin\alpha = 2$, e quindi $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = \pi/4$.

2. a) $(x-2)e^{-x}$; b) $-x^{-x}(1 + \log x)$; c) $\dfrac{2}{x} - \log 4$.

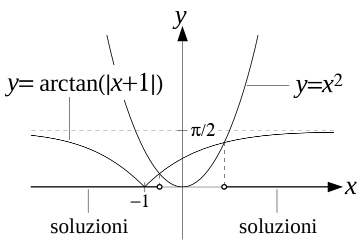
3. Il punto di minimo non esiste, il punto di massimo è $x = 2$.

4. Il polinomio è $P(x) = 6x^2 - x^4 + x^6$.

5. L'ordine corretto è $b \ll c \ll a \ll d$.

6. Usando il cambio di variabile $y = x^2 + 1$ ottengo
$$\int \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}}\, dx = \frac{1}{2}\int y^{-5/2}\, dy = -\frac{1}{3} y^{-3/2} + c = -\frac{1}{3(x^2+1)^{3/2}} + c\,.$$

7. Mi riconduco alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2/4)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (3/4)^n = \frac{1}{1-2/4} + \frac{1}{1-3/4} = 6$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = -2$, $r\sin\alpha = 2$, e quindi $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$.

2. a) $(1+2x^2)e^{x^2}$; b) $x^{3x}(3+3\log x)$; c) $\dfrac{2}{x} - \log 2$.

3. Il punto di minimo non esiste, il punto di massimo è $x = 1$.

4. Il polinomio è $P(x) = 6x^3 - 5x^6 + 3x^9$.

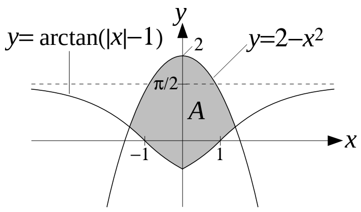
5. L'ordine corretto è $b \ll d \ll c \ll a$.

6. Usando il cambio di variabile $y = -x^3$ ottengo

$$\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-x^3)\, dx = -\frac{1}{3}\int_0^{-\infty} e^y\, dx = -\frac{1}{3}\Big| e^y \Big|_0^{-\infty} = \frac{1}{3}\,.$$

7. Mi riconduco alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}\right] - 1 - 2 = e^2 - 3.$

8.



Prima parte, gruppo 4.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = 2$, $r\sin\alpha = -2$, e quindi $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -\pi/4$.

2. a) $2e^{2x}\cos(e^{2x})$; b) $(2x)^x(1+\log(2x))$; c) $\log 2 - \dfrac{3}{x}$.

3. Il punto di minimo è $x = -1$, il punto di massimo non esiste.

4. Il polinomio è $P(x) = 3 - 7x^4 + 4x^8$.

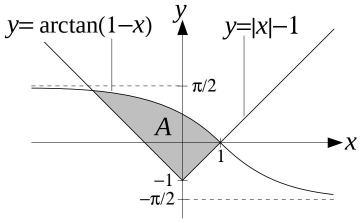
5. L'ordine corretto è $d \ll a \ll c \ll b$.

6. Integrando per parti ottengo

$$\int x\, e^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(1+x)e^{-x} + c\,.$$

7. Mi riconduco alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(4/6)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(3/6)^n = \frac{1}{1-4/6} + \frac{1}{1-3/6} = 5.$

8.



Prima parte, gruppo 5.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = 3$, $r\sin\alpha = 3$, e quindi $r = 3\sqrt{2}$, $\alpha = \pi/4$.

2. a) $e^{-x}\sin(e^{-x})$; b) $(3x)^x(1+\log(3x))$; c) $\log 4 - \dfrac{2}{x}$.

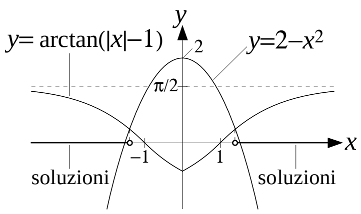
3. Il punto di minimo è $x = -2$, il punto di massimo non esiste.

4. Il polinomio è $P(x) = 6x^3 - x^6 + x^9$.

5. L'ordine corretto è $a \ll d \ll b \ll c$.

6. Usando il cambio di variabile $y = x^2 + 1$ ottengo
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} y^{-5/2}\,dy = -\frac{1}{3}\Big|y^{-3/2}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3}\,.$$

7. Mi riconduco alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-3^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{n!} = e^2 - e^3$.

8.


Prima parte, gruppo 6.

1. Poiché $r\sin(x+\alpha) = r\cos\alpha\sin x + r\sin\alpha\cos x$ devo trovare r e α in modo che $r\cos\alpha = -3$, $r\sin\alpha = 3$, e quindi $r = 3\sqrt{2}$, $\alpha = 3\pi/4$.

2. a) $3e^{3x}\cos(e^{3x})$; b) $(4x)^x(1+\log(4x))$; c) $\log 2 - \dfrac{2}{x}$.

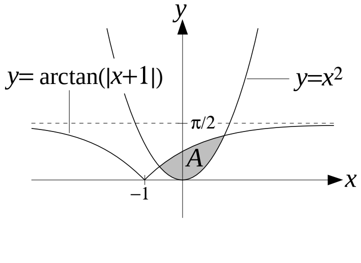
3. Il punto di minimo è $x = -2$, il punto di massimo è $x = 1$.

4. Il polinomio è $P(x) = 6x^2 - 5x^4 + 3x^6$.

5. L'ordine corretto è $b \ll c \ll d \ll a$.

6. Usando il cambio di variabile $y = -x^3$ ottengo
$$\int x^2\exp(-x^3)\,dx = -\frac{1}{3}\int e^y\,dx = -\frac{e^y}{3} + c = -\frac{\exp(-x^3)}{3} + c\,.$$

7. Mi riconduco alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty}(1/2)^n\right] - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-1/2} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

8.


Seconda parte, gruppo 1.

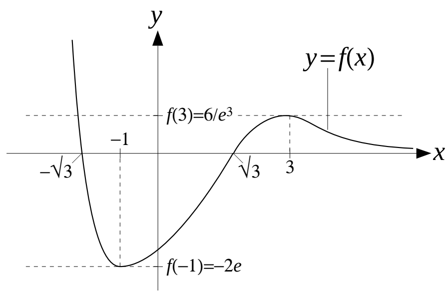
1. a) Riscrivo l'equazione nella forma

$$(x^2-3)e^{-x} = a \tag{*}$$

e studio quindi la funzione $f(x) = (x^2-3)e^{-x}$. Questa funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, positiva per $x \geq \sqrt{3}$ e per $x \leq -\sqrt{3}$ e negativa altrimenti (in particolare $f(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{3}$), inoltre $f(x)$ tende a 0 per $x \to +\infty$ e tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$. Infine, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = (-x^2+2x+3)e^{-x},$$

ottengo che $f(x)$ cresce nell'intervallo $-1 \leq x \leq 3$, e decresce nelle semirette $x \leq -1$ e $x \geq 3$. Utilizzando queste informazioni traccio il grafico sottostante.



Da questo grafico si vede subito che l'equazione (*) ha

- 1 soluzione per $a > 6/e^3 = f(3)$,
- 2 soluzioni per $a = 6/e^3$,
- 3 soluzioni per $6/e^3 > a > 0$,
- 2 soluzioni per $0 \geq a > -2e = f(-1)$,
- 1 soluzione per $a = -2e$,
- 0 soluzioni per $a < -2e$.

b) Le costanti c_0 e c_1 nello sviluppo di Taylor $x(a) = c_0 + c_1 a + o(a)$ sono date da

$$c_0 = x(0) = \sqrt{3}\,, \quad c_1 = \dot{x}(0) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})} = \frac{\exp(\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\,.$$

(Per calcolare c_1 ho usato il fatto che $x(a)$ è la funzione inversa di $f(x)$ e la formula per la derivata della funzione inversa.)

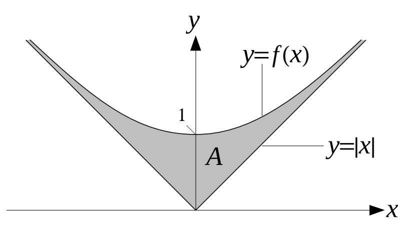
2. a) Come prima cosa studio la funzione $f(x) := \sqrt[3]{|x|^3+1}$. Osservo che questa funzione è pari, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, strettamente positiva, e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre

$$f'(x) = 3x^2(x^3+1)^{-2/3} \quad \text{per } x \geq 0,$$

e dunque $f(x)$ è crescente per $x > 0$. Infine

$$f(x) = \sqrt[3]{|x|^3+1} > \sqrt[3]{|x|^3} = |x|$$

e $f(x) \sim |x|$ per $x \to \pm\infty$. Utilizzando queste informazioni traccio la figura sottostante.



b) L'area di A è data da

$$\operatorname{area}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) - |x|\,dx = 2\int_0^{+\infty} (x^3+1)^{1/3} - x\,dx\,. \tag{1}$$

Osservo che il secondo integrale è improprio (semplice) a $+\infty$, e per capirne il comportamento cerco la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$:

$$(x^3+1)^{1/3} - x = x\left[\Big(1+\frac{1}{x^3}\Big)^{1/3} - 1\right] = x\left[1 + \frac{1}{3x^3} + O\Big(\frac{1}{x^6}\Big) - 1\right] \sim \frac{1}{3x^2}$$

(nel primo passaggio ho raccolto x dalla potenza, nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}t + O(t^2)$.)
Pertanto il secondo integrale in (1) si comporta come $\int_1^{+\infty} dx/x^2$, e quindi è finito. Dunque l'area di A è finita.

c) Le sezioni di V con piani ortogonali all'asse delle x sono corone circolari con raggio esterno $f(x)$ e raggio interno $|x|$ e quindi hanno area $\pi(f^2(x) - |x|^2)$; in particolare il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x)\big)^2 - |x|^2 dx = 2\pi \int_0^{+\infty} (x^3+1)^{2/3} - x^2\, dx\,. \tag{2}$$

Osservo che il secondo integrale è improprio (semplice) a $+\infty$, e per capirne il comportamento cerco la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$:

$$(x^3+1)^{2/3} - x^2 = x^2\left[\Big(1+\frac{1}{x^3}\Big)^{2/3} - 1\right] = x^2\left[1 + \frac{2}{3x^3} + O\Big(\frac{1}{x^6}\Big) - 1\right] \sim \frac{2}{3x}$$

(nel primo passaggio ho raccolto x^2 dalla potenza, nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{2/3} = 1 + \frac{2}{3}t + O(t^2)$.)
Pertanto il secondo integrale in (2) si comporta come $\int_1^{+\infty} dx/x$, e quindi è infinito. Dunque il volume di V è infinito.

3. a) Usando il cambio di variabile $y = x^2$ ottengo

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{(2n)!} \tag{3}$$

e per la seconda serie di potenze posso calcolare il raggio di convergenza R usando il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(2(n+1))!}{1/(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0\,,$$

e quindi $R = +\infty$. Questo implica che la seconda serie di potenze in (3) converge per ogni $y \in \mathbb{R}$, e dunque la funzione $f(x)$ è definita (e finita) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Derivando la somma $f(x)$ termine a termine per due volte ottengo

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^{2n})''}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(2n-1)\,x^{2n-2}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{(2m)!} = f(x)\,, \end{aligned}$$

da cui segue che $f'' = f$. (Nel secondo passaggio ho utilizzato il fatto che la derivata seconda del primo addendo della serie è zero, nel penultimo ho usato il cambio di variabile $m = n - 1$.)

c) La funzione f risolve l'equazione differenziale $f'' - f = 0$, che è del secondo ordine, lineare, omogenea e a coefficienti costanti, ed ha equazione caratteristica $\lambda^2 - 1 = 0$, con soluzioni $\lambda = \pm 1$. Ne segue che f è della forma

$$f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

con c_1 e c_2 costanti opportune. Per determinare queste costanti osservo che $f(0) = 1$ e che essendo f una funzione pari, f' è dispari e quindi $f'(0) = 0$. Riscrivendo queste due condizioni in termini di c_1 e c_2 ottengo

$$0 = f(0) = c_1 + c_2\,, \quad 0 = f'(0) = c_1 - c_2\,,$$

da cui segue che $c_1 = c_2 = 1/2$ e quindi

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.
   a) Riscrivo l'equazione nella forma $(x^2 - 8)e^{-x} = a$ e studio la funzione $f(x) := (x^2 - 8)e^{-x}$. Questa funzione tende a 0 per $x \to +\infty$ e a $+\infty$ per $x \to -\infty$, ha un punto di minimo assoluto in $x = -2$ e un punto di massimo locale in $x = 4$. Infine il numero di soluzioni della (*) è
   - 1 soluzione per $a > 8/e^4 = f(4)$,
   - 2 soluzioni per $a = 8/e^4$,
   - 3 soluzioni per $8/e^4 > a > 0$,
   - 2 soluzioni per $0 \geq a > -4e^2 = f(-2)$,
   - 1 soluzione per $a = -4e^2$,
   - 0 soluzioni per $a < -4e^2$.

   b) Lo sviluppo di Taylor cercato è $x(a) = 2\sqrt{2} + \frac{\exp(2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} a + o(a)$.
2. Il disegno dell'insieme A è sostanzialmente lo stesso del gruppo 1. L'area di A è data da:
   $$\text{area}(A) = 2\int_0^{+\infty} (x^5 + 1)^{1/5} - x\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} < +\infty ,$$
   mentre il volume di V è dato da
   $$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} (x^5 + 1)^{2/5} - x^2\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < +\infty .$$
3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1.
   a) Riscrivo l'equazione nella forma $(x^2 - 2)e^{-2x} = a$ e studio la funzione $f(x) := (x^2 - 2)e^{-2x}$. Questa funzione tende a 0 per $x \to +\infty$ e a $+\infty$ per $x \to -\infty$, ha un punto di minimo assoluto in $x = -1$ e un punto di massimo locale in $x = 2$. Infine il numero di soluzioni della (*) è
   - 1 soluzione per $a > 2/e^4 = f(2)$,
   - 2 soluzioni per $a = 2/e^4$,
   - 3 soluzioni per $2/e^4 > a > 0$,
   - 2 soluzioni per $0 \geq a > -e^2 = f(-1)$,
   - 1 soluzione per $a = -e^2$,
   - 0 soluzioni per $a < -e^2$.

   b) Lo sviluppo di Taylor cercato è $x(a) = \sqrt{2} + \frac{\exp(2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} a + o(a)$.
2. Il disegno dell'insieme A è sostanzialmente lo stesso del gruppo 1. L'area di A è data da:
   $$\text{area}(A) = 2\int_0^{+\infty} (x^3 + 2)^{1/3} - x\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty ,$$
   mentre il volume di V è dato da
   $$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} (x^3 + 2)^{2/3} - x^2\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty .$$
3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1.
   a) Riscrivo l'equazione nella forma $(x^2-6)e^{-2x} = a$ e studio la funzione $f(x) := (x^2-6)e^{-2x}$. Questa funzione tende a 0 per $x \to +\infty$ e a $+\infty$ per $x \to -\infty$, ha un punto di minimo assoluto in $x = -2$ e un punto di massimo locale in $x = 3$. Infine il numero di soluzioni della (*) è
   - 1 soluzione per $a > 3/e^6 = f(3)$,
   - 2 soluzioni per $a = 3/e^6$,
   - 3 soluzioni per $3/e^6 > a > 0$,
   - 2 soluzioni per $0 \geq a > -2e^4 = f(-2)$,
   - 1 soluzione per $a = -2e^4$,
   - 0 soluzioni per $a < -2e^4$.

   b) Lo sviluppo di Taylor cercato è $x(a) = \sqrt{6} + \frac{\exp(2\sqrt{6})}{2\sqrt{6}} a + o(a)$.

2. Il disegno dell'insieme A è sostanzialmente lo stesso del gruppo 1. L'area di A è data da:
$$\text{area}(A) = 2\int_0^{+\infty} (x^5+2)^{1/5} - x\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} < +\infty\,,$$
   mentre il volume di V è dato da
$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} (x^5+2)^{2/5} - x^2\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < +\infty\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Nessuno dei presenti ha svolto correttamente il punto b).

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno disegnato correttamente l'insieme A senza tuttavia giustificare in alcun modo il disegno. In particolare quasi nessuno ha controllato che effettivamente $f(x) > |x|$ per ogni x (faccio riferimento alla soluzione data sopra), cosa che è fondamentale per impostare il disegno e il calcolo dell'area di A.

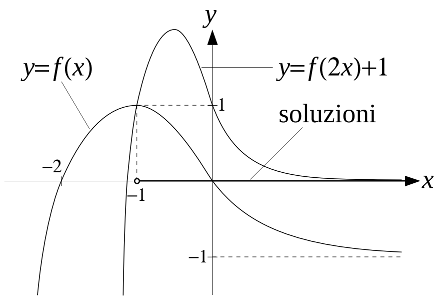
- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno scritto che
$$\text{area}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,dx = +\infty - (+\infty)$$
  e ne hanno dedotto che l'area di A non esiste. Il punto è che è sbagliato scrivere l'area come differenza di due integrali impropri se questi vengono entrambi uguali a $+\infty$.

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno scritto che l'area di A è infinita semplicemente perché l'insieme A è illimitato.

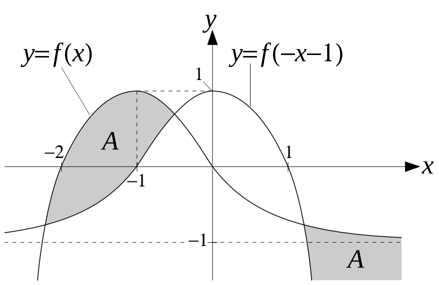
- Seconda parte, esercizio 2. La maggior parte dei presenti ha scritto che il volume di V è dato da
$$\text{volume}(A) = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x) - |x|\big)^2 dx\,,$$
  cosa che è semplicemente sbagliata.

- Seconda parte, esercizio 3. La serie presentata non è una serie di potenze nel senso solito, per via del fatto che nell'addendo generico appare x^{2n} invece di x^n. Per ricondursi ad una serie di potenze nel senso solito (di cui calcolare il raggio di convergenza) bisogna utilizzare il cambio di variabile $y = x^2$ come spiegato nella soluzione data sopra.

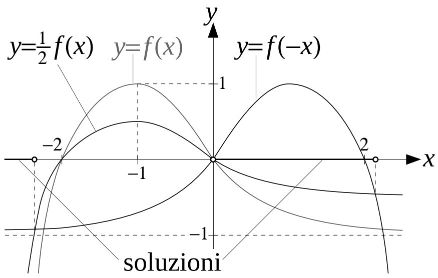
Prima parte, gruppo 1.

1. a) $r = 2$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; b) $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$; c) $x = 1$, $y = \sqrt{3}$.
2. I valori cercati di a sono: $a \geq 2$.
3. a) 0; b) non esiste; c) $-\dfrac{1}{2}$.
4. I valori cercati di a sono: $a \geq 3$.
5. $v(t) = \sqrt{20}\, e^{2t}$, $d = \sqrt{5}(e^4 - 1)$.
6. L'integrale è improprio in 1, e tramite il cambio di variabile $x = 1 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^1 dy/y^a$ ed in particolare è finito per $0 < a < 1$.
7. La soluzione è $x(t) = t - \dfrac{4}{t^2}$.
8. 

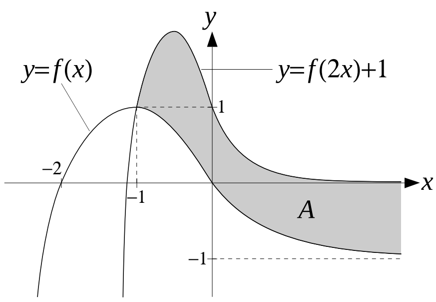
Prima parte, gruppo 2.

1. a) $r = 3$, $\alpha = \pi$; b) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$; c) $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$.
2. I valori cercati di a sono: $a \leq -\dfrac{9}{2}$.
3. a) 0; b) $-\infty$; c) $-\dfrac{1}{2}$.
4. I valori cercati di a sono: $0 < a < \log 2$.
5. $v(t) = \sqrt{2}\, e^{-t}$, $d = \sqrt{2}(1 - e^{-2})$.
6. L'integrale è improprio in 2, e tramite il cambio di variabile $x = 2 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^2 dy/y^a$ ed in particolare è finito per $0 < a < 1$.
7. La soluzione è $x(t) = t^2 - \dfrac{12}{t^2}$.
8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. a) $r = 3$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; b) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$; c) $x = -\sqrt{3}$, $y = 3$.
2. I valori cercati di a sono: $a \le -2$.
3. a) 0; b) non esiste; c) -6.
4. I valori cercati di a sono: $0 < a < 4$.
5. $v(t) = \sqrt{20}\, e^{2t}$, $d = \sqrt{5}(e^4 - 1)$.
6. L'integrale è improprio in 1, e tramite il cambio di variabile $x = 1 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^1 dy/y^{2a}$ ed in particolare è finito per $0 < a < \frac{1}{2}$.
7. La soluzione è $x(t) = t - \dfrac{8}{t^3}$.
8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. a) $r = 2$, $\alpha = \pi$; b) $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$; c) $x = -2$, $y = 2$.
2. I valori cercati di a sono: $a \ge \dfrac{9}{2}$.
3. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) -2.
4. I valori cercati di a sono: $a > 1$.
5. $v(t) = \sqrt{8}\, e^{-t}$, $d = \sqrt{8}(1 - e^{-2})$.
6. L'integrale è improprio in 2, e tramite il cambio di variabile $x = 2 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^2 dy/y^{2a}$ ed in particolare è finito per $0 < a < \frac{1}{2}$.
7. La soluzione è $x(t) = t^2 - \dfrac{24}{t^3}$.
8. 

Prima parte, gruppo 5.

1. a) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; b) $r = \sqrt{2}$, $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$; c) $x = -3$, $y = -\sqrt{3}$.

2. I valori cercati di a sono: $a \geq 2$.

3. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) -2.

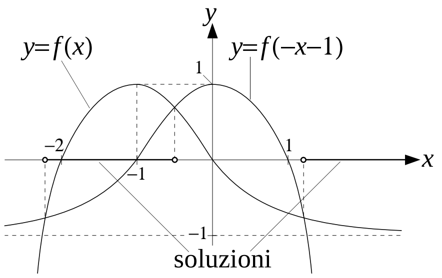
4. I valori cercati di a sono: $a \geq 2$.

5. $v(t) = \sqrt{80}\, e^{2t}$, $d = \sqrt{20}(e^4 - 1)$.

6. L'integrale è improprio in 1, e tramite il cambio di variabile $x = 1 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^1 dy/y^{3a}$ ed in particolare è finito per $0 < a < \frac{1}{3}$.

7. La soluzione è $x(t) = t - \dfrac{16}{t^4}$.

8.



Prima parte, gruppo 6.

1. a) $r = 2$, $\alpha = \pi$; b) $r = 2\sqrt{2}$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$; c) $x = -1$, $y = -1$.

2. I valori cercati di a sono: $a \leq -\dfrac{9}{2}$.

3. a) $-\infty$; b) non esiste; c) $-\dfrac{1}{6}$.

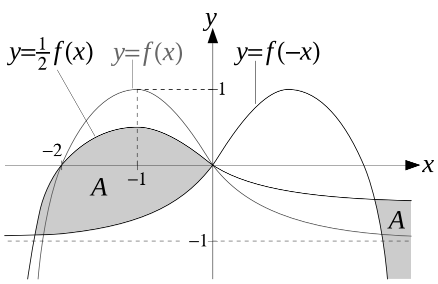
4. I valori cercati di a sono: $a < 1$.

5. $v(t) = \sqrt{18}\, e^{-t}$, $d = \sqrt{18}(1 - e^{-2})$.

6. L'integrale è improprio in 2, e tramite il cambio di variabile $x = 2 - y$ si vede che si comporta come l'integrale improprio $\int_0^2 dy/y^{3a}$ ed in particolare è finito per $0 < a < \frac{1}{3}$.

7. La soluzione è $x(t) = t^2 - \dfrac{48}{t^4}$.

8.



Seconda parte, gruppo 1.

1. a), b) La soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a+2)^2 x = e^{-t} \tag{*}$$
è data da $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}$ dove x_{om} è la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare di (*).
Per trovare x_{om} osservo che le soluzioni dell'equazione caratteristica sono
$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{-4a-4}\,;$$
considero dunque tre casi:
   - se $a < -1$ allora le soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono reali e distinte e quindi
   $$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
   - se $a = -1$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ e
   $$x_{\text{om}}(t) = e^{at}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
   - se $a > -1$ allora le soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono complesse e posto $\omega := \sqrt{4a+4}$,
   $$x_{\text{om}}(t) = e^{at}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

   Cerco adesso la soluzione particolare $\tilde{x}$. Essendo il termine noto dell'equazione e^{-t} cerco una soluzione della forma $\tilde{x} = be^{-t}$, perlomeno quando $\lambda_{1,2} \neq -1$, vale a dire per $a \neq -1, -5$.
Sostituendo $\tilde{x} = be^{-t}$ nella (*) ottengo $be^{-t}(a^2+6a+5) = e^{-t}$, equazione che è verificata per ogni t se $b = 1/(a^2+6a+5)$. Dunque
$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{-t}}{a^2+6a+5}\,.$$
Per $a = -1$ ho che $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, e quindi cerco una soluzione della forma $\tilde{x} = bt^2e^{-t}$, ottenendo
$$\tilde{x}(t) = \frac{t^2e^{-t}}{2}\,.$$
In conclusione la soluzione generale della (*) è data da
$$x(t) = \begin{cases} c_1e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{a^2+6a+5}e^{-t} & \text{per } a < -1,\ a \neq -5, \\ e^{-t}\big(c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}t^2\big) & \text{per } a = -1, \\ e^{at}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\big) + \frac{1}{a^2+6a+5}e^{-t} & \text{per } a > -1. \end{cases}$$
c) Studio ora il limite delle soluzioni di (*) per $t \to +\infty$. Dalla formula precedente vedo che
   - per $a = -1$ ogni soluzione converge a 0 e nessuna a 1;
   - per $-1 < a < 0$ ogni soluzione converge a 0 e nessuna a 1;
   - per $a \geq 0$ ogni soluzione di (*) non ha limite tranne che per $c_1 = c_2 = 0$, nel qual caso converge a 0; in ogni caso nessuna soluzione converge a 1.

   Resta da esaminare il caso $a < -1$. Siccome $e^{\lambda t}$ converge a 0 o a $+\infty$ per $\lambda \neq 0$, quando $\lambda_{1,2} \neq 0$ le soluzioni di (*) convergono a $\pm\infty$ oppure a 0 a seconda del segno di $\lambda_{1,2}$ e dei coefficienti $c_{1,2}$; in ogni caso nessuna soluzione converge a 1.
Quindi l'unica possibilità di avere almeno una soluzione che converge a 1 è che $\lambda_1 = 0$ oppure $\lambda_2 = 0$, cioè che 0 risolva l'equazione caratteristica, vale a dire $a = -2$. In tal caso la soluzione generale della (*) è $x(t) = c_1 + c_2e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t}$, ed in particolare converge a c_1. Pertanto le soluzioni che convergono a 1 sono quelle della forma
$$x(t) = 1 + ce^{-4t} - \frac{e^{-t}}{3} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

2. Se il ponte ha n campate la lunghezza di ogni campata è $\ell = 15/n$, e quindi il costo complessivo del ponte è
$$c(n) = (1+\ell^2)n + 3(n-1) = 4n - 3 + \frac{225}{n}\,.$$

Voglio dunque trovare il numero *intero positivo* n per cui $c(n)$ è minimo.
Per farlo studio la funzione

$$c(x) := 4x - 3 + \frac{225}{x} \quad \text{con } x > 0.$$

Guardando il segno della derivata

$$c'(x) = 4 - \frac{225}{x^2}$$

ottengo che $c(x)$ decresce per $x \le x_0$ con $x_0 := 7{,}5$ e cresce per $x \ge x_0$; in particolare $x_0 := 7{,}5$ è il punto di minimo assoluto.
Il problema è che 7,5 non è un numero intero e quindi non è la soluzione cercata.
Tuttavia sapendo che la funzione $c(x)$ decresce per $x \le 7{,}5$ ottengo che tra gli interi $n \le 7$ il minimo di $c(n)$ si ha per $n = 7$, mentre sapendo che $c(x)$ cresce per $x \ge 7{,}5$ ottengo che tra gli interi $n \ge 8$ il minimo di $c(n)$ si ha per $n = 8$. Per trovare il minimo tra tutti gli interi non mi resta quindi che confrontare $c(7)$ e $c(8)$: siccome

$$c(7) = 57{,}143 \pm 0{,}001 \quad \text{e} \quad c(8) = 57{,}125$$

concludo che $n = 8$ rende minimo il valore di $c(n)$ tra tutti gli interi positivi n.

3. Per dimostrare la convergenza della serie osservo che $n/4^{n^2} \ll n/4^n \ll 1/n^2$ e quindi applico il criterio del confronto asintotico (con la serie $\sum 1/n^2$, che com'è noto è finita).
   Siccome la serie è a termini positivi le somme parziali

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{4^{n^2}}$$

   sono sempre inferiori al valore S della serie, e convergono ad S quando $N \to +\infty$; cerco quindi di trovare N in modo tale che

$$S - S_N \le 10^{-10} \tag{1}$$

   e prendo come approssimazione di S il valore di S_N, che posso calcolare esplicitamente.
   Per ottenere la stima (1) uso la seguente stima integrale (vista a lezione):

$$S - S_N \le \int_N^{+\infty} \frac{x}{4^{x^2}}\, dx\,.$$

   (Ricordo che questa stima richiede che la funzione integranda $x/4^{x^2}$ sia decrescente per $x \ge N$, cosa che verifico studiando il segno della derivata.)
   Utilizzando la formula $x/4^{x^2} = x\exp(-\log 4 \cdot x^2)$ e il cambio di variabile $y = -\log 4 \cdot x^2$ ottengo

$$S - S_N \le \int_N^{+\infty} x\exp(-\log 4 \cdot x^2)\, dx = \frac{1}{2\log 4}\int_{-\infty}^{-\log 4 \cdot N^2} e^y\, dy = \frac{1}{2\log 4 \cdot 4^{N^2}}$$

   Affinché valga la (1) basta dunque prendere N in modo tale che

$$\frac{1}{2\log 4 \cdot 4^{N^2}} \le 10^{-10}$$

   e facendo i calcoli per $N = 1, 2, \dots$ si vede che il primo intero che va bene è $N = 4$. Pertanto

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4^9} + \frac{1}{4^{15}} = 1{,}50001144502\dots$$

   approssima S con errore inferiore a 10^{-10}.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1.
   a), b) La soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{a^2+12\,a+20} e^{-2t} & \text{per } a < -2,\ a \ne -10, \\ e^{-2t}\big(c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}t^2\big) & \text{per } a = -2, \\ e^{at}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\big) + \frac{1}{a^2+12\,a+20} e^{-2t} & \text{per } a > -2. \end{cases}$$

con $\lambda_{1,2} := a \pm \sqrt{-8a-16}$, $\omega := \sqrt{8a+16}$, e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
c) Per $a \neq -4$ non ci sono soluzioni di (*) che tendono a 1 per $t \to +\infty$. Per $a = -4$ le soluzioni che tendono a 1 sono

$$x(t) = 1 + ce^{-8t} - \frac{e^{-t}}{12} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

2. Analogo al gruppo 1. Il costo complessivo di un ponte con n campate è

$$c(n) = (1+\ell^2)n + 2(n-1) = 3n - 2 + \frac{169}{n}\,,$$

e tra i numeri interi positivi n quello che rende minima questa funzione è $n = 8$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1.
a), b) La soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = x(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{a^2+6a+5} e^{-t} & \text{per } a < -1,\ a \neq -5, \\ e^{-t}\big(c_1 + c_2 t - \frac{1}{2}t^2\big) & \text{per } a = -1, \\ e^{at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) - \frac{1}{a^2+6a+5} e^{-t} & \text{per } a > -1. \end{cases}$$

con $\lambda_{1,2} := a \pm \sqrt{-4a-4}$, $\omega := \sqrt{4a+4}$, e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
c) Per $a \neq -2$ non ci sono soluzioni di (*) che tendono a 1 per $t \to +\infty$. Per $a = -2$ le soluzioni che tendono a 1 sono

$$x(t) = 1 + ce^{-4t} + \frac{e^{-t}}{3} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

2. Analogo al gruppo 1. Il costo complessivo di un ponte con n campate è

$$c(n) = (1+\ell^2)n + 3(n-1) = 4n - 3 + \frac{625}{n}\,,$$

e tra i numeri interi positivi n quello che rende minima questa funzione è $n = 13$.

3. Uguale al gruppo 1.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1.
a), b) La soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{a^2+12a+20} e^{-2t} & \text{per } a < -2,\ a \neq -10, \\ e^{-2t}\big(c_1 + c_2 t - \frac{1}{2}t^2\big) & \text{per } a = -2, \\ e^{at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) - \frac{1}{a^2+12a+20} e^{-2t} & \text{per } a > -2. \end{cases}$$

con $\lambda_{1,2} := a \pm \sqrt{-8a-16}$, $\omega := \sqrt{8a+16}$, e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
c) Per $a \neq -4$ non ci sono soluzioni di (*) che tendono a 1 per $t \to +\infty$. Per $a = -4$ le soluzioni che tendono a 1 sono

$$x(t) = 1 + ce^{-8t} + \frac{e^{-t}}{12} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

2. Analogo al gruppo 1. Il costo complessivo di un ponte con n campate è

$$c(n) = (1+\ell^2)n + 2(n-1) = 3n - 2 + \frac{400}{n}\,,$$

e tra i numeri interi positivi n quello che rende minima questa funzione è $n = 12$.

3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Nella soluzione dell'equazione omogenea molti dei presenti hanno scritto $\omega := \sqrt{-4a-4}$ invece di $\omega := \sqrt{4a+4}$ per i gruppi 1 e 3 (ed un analogo errore è stato fatto per i gruppi 2 e 4).

- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno deciso le soluzioni dell'equazione caratteristica sono sempre complesse.

- Seconda parte, esercizio 2. Pochi dei presenti hanno affrontato questo esercizio, e di questi quasi tutti hanno dato come risposta il numero *reale* che minimizza la funzione $c(n)$, a dispetto del fatto che questo numero non è intero.

- Seconda parte, esercizio 3. La convergenza della serie può essere dimostrata in molti altri modi, per esempio usando il criterio del rapporto o quello della radice.

Prima parte, gruppo 1.

1. Le soluzioni sono $0 \le x \le \dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{3}$.

2. L'equazione è $y = 4ex + 3e$.

3. Il polinomio è $6x^2 - 7x^6$.

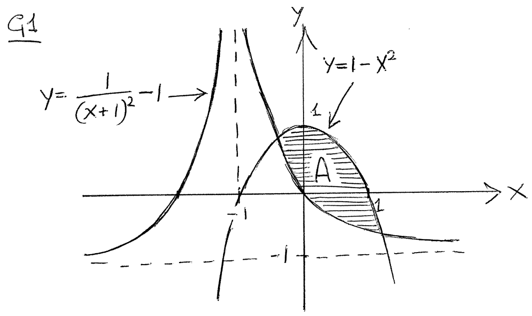
4. $c \ll b \ll a \ll d$.

5. Per ogni $a > \dfrac{1}{2}$.

6. La velocità è $\vec{v} = \big(t^2 - 4\,; 4t\big)$; la distanza è $d = \dfrac{13}{3}$.

7. L'equazione si riduce all'identità $2\lambda + (4\lambda^2 + 2\lambda + 12)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda = 0$ e $4\lambda^2 + 2\lambda + 12 = 0$. Questo sistema non ha soluzioni.

8. G1



Prima parte, gruppo 2.

1. Le soluzioni sono $0 \le x < \dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{2\pi}{9} \le x \le \dfrac{\pi}{3}$.

2. L'equazione è $y = \dfrac{1}{e}$.

3. Il polinomio è $2x^2 - x^4$.

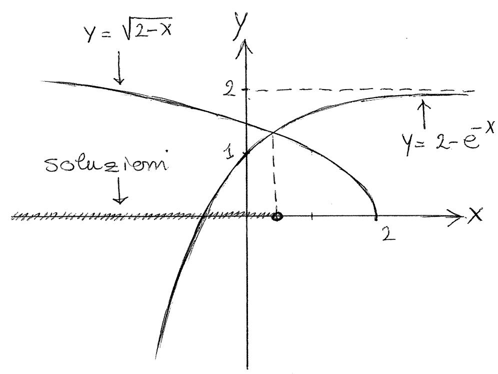
4. $c \ll b \ll a \ll d$.

5. Per ogni $a > 2$.

6. La velocità è $\vec{v} = \big(t^4 - 9\,; 6t^2\big)$; la distanza è $d = \dfrac{46}{5}$.

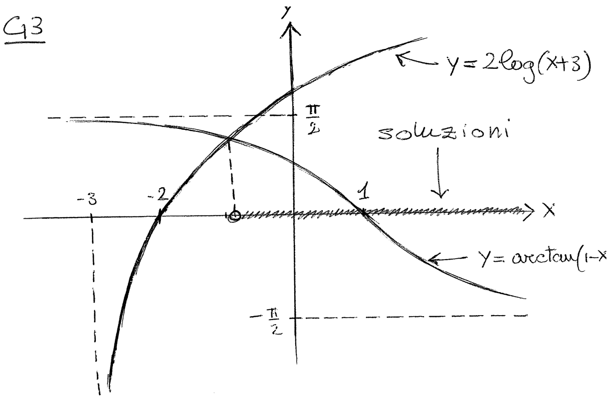
7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda - 2) + (4\lambda^2 + 6\lambda - 10)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda - 2 = 0$ e $4\lambda^2 + 6\lambda - 10 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è $\lambda = 1$.

8. G2



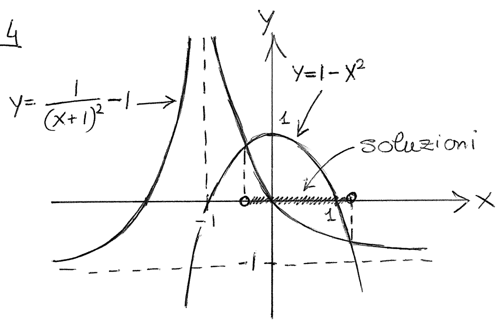
Prima parte, gruppo 3.

1. Le soluzioni sono $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$.
2. L'equazione è $y = 4ex - 3e$.
3. Il polinomio è $1 + 4x^3 + 9x^6$.
4. $a \ll c \ll b \ll d$.
5. Per ogni $a > 0$.
6. La velocità è $\vec{v} = \big(4t\,;\, t^2 - 4\big)$; la distanza è $d = \frac{13}{3}$.
7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda - 2) + (4\lambda^2 + 2\lambda - 6)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda - 2 = 0$ e $4\lambda^2 + 2\lambda - 6 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è $\lambda = 1$.
8. G3

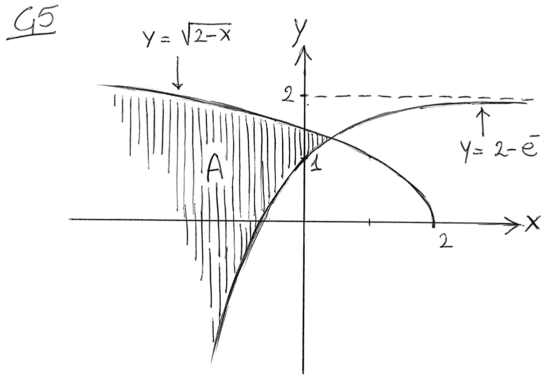


Prima parte, gruppo 4.

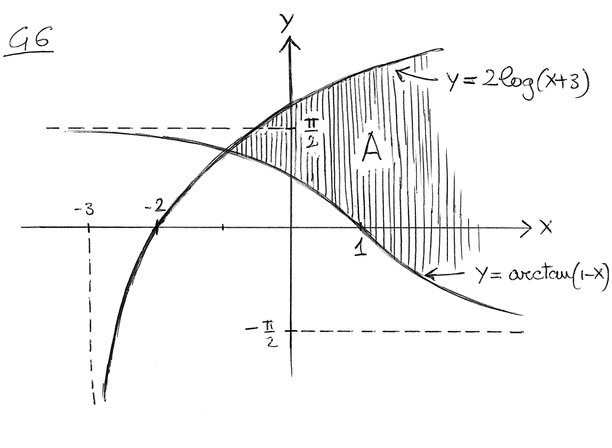
1. Le soluzioni sono $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{6} < x \leq 0$.
2. L'equazione è $y = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}$.
3. Il polinomio è $6x^2 - 11\,x^6$.
4. $d \ll b \ll a \ll c$.
5. Per ogni $a > \frac{1}{3}$.
6. La velocità è $\vec{v} = \big(6t^2\,;\, t^4 - 9\big)$; la distanza è $d = \frac{46}{5}$.
7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda + 4) + (4\lambda^2 + 2\lambda - 12)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda + 4 = 0$ e $4\lambda^2 + 2\lambda - 12 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è $\lambda = -2$.
8. G4



Prima parte, gruppo 5.

1. Le soluzioni sono $-\dfrac{\pi}{3} \leq x < -\dfrac{\pi}{6}$, $-\dfrac{\pi}{9} \leq x \leq 0$.
2. L'equazione è $y = \dfrac{1}{e}$.
3. Il polinomio è $2x^2 - 3x^4$.
4. $b \ll c \ll a \ll d$.
5. Per ogni $a > 3$.
6. La velocità è $\vec{v} = \big(4t\,;\, t^2 - 4\big)$; la distanza è $d = \dfrac{13}{3}$.
7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda + 2) + (2\lambda^2 + 6\lambda)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda + 2 = 0$ e $2\lambda^2 + 6\lambda = 0$. Questo sistema non ha soluzioni.
8. 

Prima parte, gruppo 6.

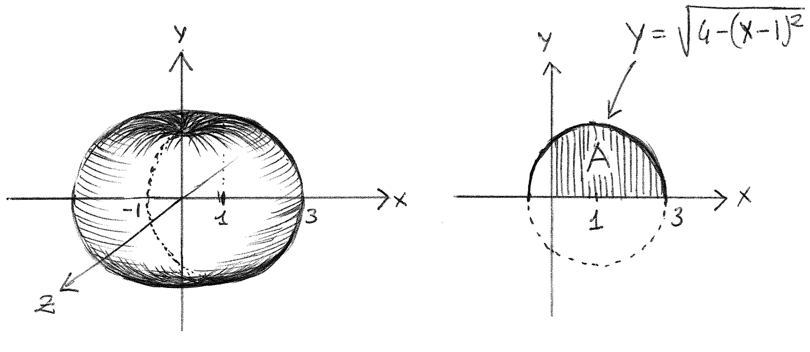
1. Le soluzioni sono $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq -\dfrac{\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{4} < x \leq 0$.
2. L'equazione è $y = -4ex - 3e$.
3. Il polinomio è $1 + 4x^3 + 7x^6$.
4. $d \ll a \ll c \ll b$.
5. Per nessun a.
6. La velocità è $\vec{v} = \big(t^4 - 9\,;\, 6t^2\big)$; la distanza è $d = \dfrac{46}{5}$.
7. L'equazione si riduce all'identità $(2\lambda + 3) + (4\lambda^2 + 2\lambda - 6)t^2 = 0$ che è verificata per ogni t se e solo se $2\lambda + 3 = 0$ e $4\lambda^2 + 2\lambda - 6 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è $\lambda = -3/2$.
8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Parto direttamente dal punto b), di cui il punto a) è un caso particolare. Ricordo che
$$f(x) := \log(1+2x^a) - 2\big(\log(1+x)\big)^a .$$
Osservo innanzitutto che usando lo sviluppo al primo ordine $\log(1+t) \sim t$ ottengo gli sviluppi
$$\log(1+2x^a) \sim 2x^a , \quad 2\big(\log(1+x)\big)^a \sim 2x^a ,$$
che però non bastano a trovare la parte principale di $f(x)$.
Procedo dunque con lo sviluppo al secondo ordine $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$:
$$\begin{aligned}\log(1+2x^a) &= 2x^a - 2x^{2a} + O(x^{3a}) ,\\ \big(\log(1+x)\big)^a &= \Big(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\Big)^a \\ &= x^a\Big(1 - \frac{x}{2} + O(x^2)\Big)^a \\ &= x^a\Big(1 - \frac{ax}{2} + O(x^2)\Big) = x^a - \frac{a}{2}x^{a+1} + O(x^{a+2}) ,\end{aligned}$$
dove nel penultimo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+t)^a = 1+at+O(t^2)$ con $t := -\frac{1}{2}x+O(x^2)$.
Mettendo insieme questi sviluppi ottengo infine
$$f(x) = -2x^{2a} + O(x^{3a}) + ax^{a+1} + O(x^{a+2}) . \tag{1}$$
Distinguo ora tre casi, a seconda che $2a$ sia maggiore o minore di $a+1$:
   - se $a < 1$ allora $2a < a+1$ e quindi p.p.$(f(x)) = -2x^{2a}$,
   - se $a = 1$ allora $2a = a+1 = 2$ e quindi p.p.$(f(x)) = -x^2$,
   - se $a > 1$ allora $2a > a+1$ e quindi p.p.$(f(x)) = ax^{a+1}$.

   a) In particolare per $a = 2$ si ha p.p.$(f(x)) = 2x^3$.

2. a) Si può supporre che la retta sia l'asse delle y e che il centro del cerchio sia nel punto $(1, 0)$. In tal caso il solido V è quello rappresentato a sinistra nella figura sotto.



b) Sia A la figura piana a destra nella figura sopra, vale a dire la di piano delimitata dagli assi e dalla semicirconferenza superiore di raggio 2 e centro $(1, 0)$, vale a dire il grafico della funzione
$$f(x) := \sqrt{4-(x-1)^2} .$$
Indico ora con V' il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y. Chiaramente il volume di V è il doppio di quello di V', e quest'ultimo può essere calcolato usando una delle due formule per i volumi dei solidi di rotazione:
$$\text{volume}(V) = 2\,\text{volume}(V') = 4\pi\int_0^3 x\, f(x)\, dx = 4\pi\int_0^3 x\,\sqrt{4-(x-1)^2}\, dx . \tag{2}$$

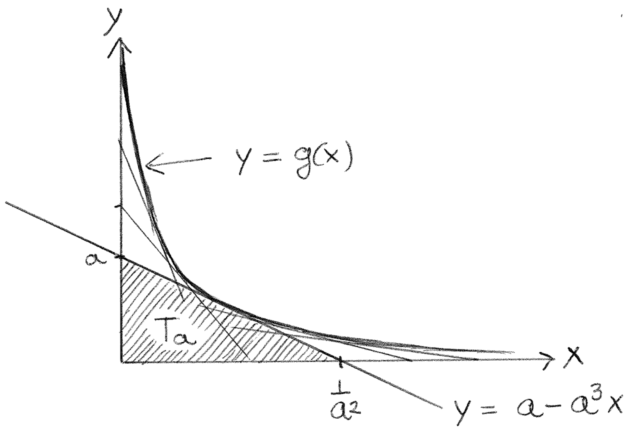
Il calcolo di questo integrale richiede un po' di passaggi:

$$\begin{aligned}\int_0^3 x\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx &= \int_{-1}^2 (y+1)\sqrt{4-y^2}\,dy \\ &= \int_{-1}^2 y\sqrt{4-y^2}\,dy + 2\int_{-1}^2 \sqrt{1-(y/2)^2}\,dy \\ &= \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{2}dt + \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 4\cos^2 u\,du \\ &= \int_0^3 \frac{t^{1/2}}{2}dt + \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 2+2\cos(2u)\,du \\ &= \left|\frac{t^{3/2}}{3}\right|_0^3 + \left|2u+\sin(2u)\right|_{-\pi/6}^{\pi/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

(Nel primo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = x-1$, nel secondo passaggio ho spezzato l'integrale come somma di due integrali e ho raccolto 4 all'interno della radice nel secondo integrale, nel terzo ho usato il cambio di variabile $t = 4-y^2$ per il primo integrale e $y/2 = \sin u$ per il secondo, nel quarto ho usato la formula $2\cos^2 u = \cos(2u) - 1$.)
Mettendo insieme la (2) e la (3) ottengo infine

$$\text{volume}(V) = 4\pi\int_0^3 x\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx = 6\sqrt{3}\,\pi + \frac{16\,\pi^2}{3}\,.$$

3. a) L'insieme A è raffigurato nella figura sotto.



b) La retta che contiene l'ipotenusa del triangolo T_a ha equazione

$$y = a - a^3 x$$

e quindi, fissato $x > 0$, $g(x)$ corrisponde al più grande dei valori $a - a^3x$ al variare di a tra i numeri positivi, vale a dire

$$g(x) = \max_{a>0} f_x(a) \quad \text{dove} \quad f_x(a) := a - a^3 x\,.$$

Studiando il segno della derivata della funzione $f_x(a)$ (rispetto alla variabile a, ovviamente) si ottiene che il massimo relativamente alla semiretta $a > 0$ viene raggiunto per $a = \frac{1}{\sqrt{3x}}$, e quindi

$$g(x) = f_x\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{27\,x}}\,.$$

c) In questo caso

$$g(x) = \max_{a\geq 1} f_x(a)\,.$$

Studiando il segno della derivata di $f_x(a)$ si ottiene che il massimo relativamente alla semiretta $a \geq 1$ viene raggiunto per $a = 1/\sqrt{3x}$ se $0 < x < \frac{1}{3}$, e per $a = 1$ se $x \geq \frac{1}{3}$. Quindi

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{27\,x}} & \text{per } 0 < x < \frac{1}{3}, \\ 1 - x & \text{per } x \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.

   b) Si ottiene come prima cosa lo sviluppo

$$f(x) = -2x^{2a} + O(x^{3a}) - ax^{a+1} + O(x^{a+2})$$

   da cui si deduce che:
   - se $a < 1$ allora p.p.$(f(x)) = -2x^{2a}$,
   - se $a = 1$ allora p.p.$(f(x)) = -3x^2$,
   - se $a > 1$ allora p.p.$(f(x)) = -ax^{a+1}$.

   a) In particolare per $a = 2$ si ha p.p.$(f(x)) = -2x^3$.

2. Analogo al gruppo 1. In questo caso il cerchio ha centro $\big(\sqrt{2}, 0\big)$ e raggio 2, la semicirconferenza che delimita A è il grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{4 - \big(x - \sqrt{2}\big)^2}\,,$$

   ed il calcolo del volume di V dà

$$\text{volume}(V) = 4\pi \int_0^{2+\sqrt{2}} x\,\sqrt{4 - \big(x - \sqrt{2}\big)^2}\,dx = \frac{20\sqrt{2}\,\pi}{3} + 6\sqrt{2}\,\pi^2\,.$$

3. Analogo al gruppo 1.

   b) Fissato $x > 0$, $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a) := a - a^2x$ tra tutti gli $a > 0$. Tale valore massimo viene raggiunto per $a = \frac{1}{2x}$ e vale

$$g(x) = \frac{1}{4x}\,.$$

   c) In questo caso $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a)$ tra tutti gli $a \geq 1$, e vale

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4x} & \text{per } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{per } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1.

   b) Si ottiene come prima cosa lo sviluppo

$$f(x) = -8x^{2a} + O(x^{3a}) + 2ax^{a+1} + O(x^{a+2})$$

   da cui si deduce che:
   - se $a < 1$ allora p.p.$(f(x)) = -8x^{2a}$,
   - se $a = 1$ allora p.p.$(f(x)) = -6x^2$,
   - se $a > 1$ allora p.p.$(f(x)) = 2ax^{a+1}$.

   a) In particolare per $a = 2$ si ha p.p.$(f(x)) = 4x^3$.

2. Analogo al gruppo 1. In questo caso il cerchio ha centro $\big(2, 0\big)$ e raggio 4, la semicirconferenza che delimita A è il grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{16 - (x - 2)^2}\,,$$

ed il calcolo del volume di V dà

$$\text{volume}(V) = 4\pi \int_0^6 x\sqrt{16-(x-2)^2}\,dx = 48\sqrt{3}\,\pi + \frac{128\,\pi^2}{3}\,.$$

3. Analogo al gruppo 1.

b) Fissato $x > 0$, $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a) := a - \frac{a^2}{2}x$ tra tutti gli $a > 0$. Tale valore massimo viene raggiunto per $a = \frac{1}{x}$ e vale

$$g(x) = \frac{1}{2x}\,.$$

c) In questo caso $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a)$ tra tutti gli $a \geq 1$, e vale

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{per } 0 < x < 1, \\ 1 - \frac{x}{2} & \text{per } x \geq 1. \end{cases}$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1.

b) Si ottiene come prima cosa lo sviluppo

$$f(x) = -8x^{2a} + O(x^{3a}) - 2ax^{a+1} + O(x^{a+2})$$

da cui si deduce che:

- se $a < 1$ allora p.p.$(f(x)) = -8x^{2a}$,
- se $a = 1$ allora p.p.$(f(x)) = -10\,x^2$,
- se $a > 1$ allora p.p.$(f(x)) = -2ax^{a+1}$.

a) In particolare per $a = 2$ si ha p.p.$(f(x)) = -4x^3$.

2. Analogo al gruppo 1. In questo caso il cerchio ha centro $(2\sqrt{2}, 0)$ e raggio 4, la semicirconferenza che delimita A è il grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{16 - \big(x - 2\sqrt{2}\big)^2}\,,$$

ed il calcolo del volume di V dà

$$\text{volume}(V) = 4\pi \int_0^{4+2\sqrt{2}} x\sqrt{16-\big(x-2\sqrt{2}\big)^2}\,dx = \frac{160\sqrt{2}\,\pi}{3} + 48\sqrt{2}\,\pi^2\,.$$

3. Analogo al gruppo 1.

b) Fissato $x > 0$, $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a) := a - \frac{a^3}{2}x$ tra tutti gli $a > 0$. Tale valore massimo viene raggiunto per $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x}}$ e vale

$$g(x) = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27\,x}}\,.$$

c) In questo caso $g(x)$ è il valore massimo della funzione $f_x(a)$ tra tutti gli $a \geq 1$, e vale

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{27\,x}} & \text{per } 0 < x < \frac{2}{3}, \\ 1 - \frac{x}{2} & \text{per } x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno svolto i calcoli in modo sostanzialmente corretto arrivando alla formula (1), ma a questo punto quasi tutti hanno dato per scontato che l'esponente $a+1$ è sempre minore di $2a$ (forse pensando che a è intero) e quindi non hanno distinto tre casi come sopra, ma hanno dato come unica parte principale di $f(x)$ quella corrispondente al caso $a > 1$.

- Seconda parte, esercizio 2. Nessuno dei presenti ha impostato correttamente questo esercizio, e molti hanno sbagliato persino il disegno! Questo è sorprendente, visto che si tratta di un esercizio standard (almeno a livello di impostazione—il calcolo dell'integrale è in realtà abbastanza complicato).

- Seconda parte, esercizio 3. Nessuno dei presenti ha impostato correttamente questo esercizio, che peraltro non era facile.

Prima parte, gruppo 1.

1. a) $r = 2\sqrt{2}$; $\alpha = 3\pi/4$; b) $r = 3$; $\alpha = -\pi/2$; c) $x = -\sqrt{3}$; $y = -3$.

2. Il punto di minimo è $x = 1/2$. Il punto di massimo non esiste.

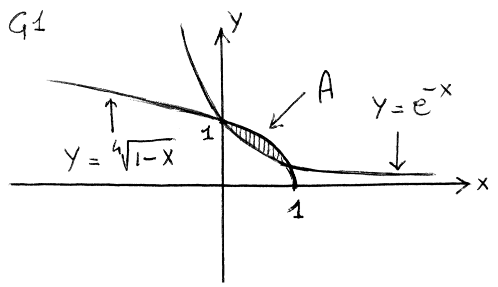
3. a) $\dfrac{3^x \log 3}{1 + 3^{2x}}$; b) $(1 + 2x^2)\,(1 + x^2)^{-1/2}$; c) $2 \log x + 2$.

4. I valori cercati sono $a \geq 3$.

5. Il raggio di convergenza è $R = +\infty$.

6. L'integrale è improprio semplice in $\pi/2$ ed è finito per $0 < a < 1/2$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\big(e^t(t-1) + \pi/4\big)$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. a) $r = 2\sqrt{3}$; $\alpha = 2\pi/3$; b) $r = 2$; $\alpha = -\pi/2$; c) $x = -1$; $y = 1$.

2. Il punto di minimo è $x = 1/e^3$. Il punto di massimo non esiste.

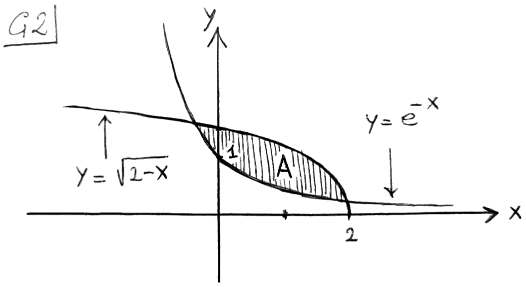
3. a) $(2x + 3x^3)\,(1 + x^2)^{-1/2}$; b) $\dfrac{2^x \log 2}{1 + 2^{2x}}$; c) $-\dfrac{2}{\sin x \, \cos x}$.

4. I valori cercati sono $a \geq 2$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 0$.

6. L'integrale è improprio semplice in $\pi/2$ ed è finito per $0 < a < 1$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\big(e^t(t-1) + \pi/3\big)$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. a) $r = \sqrt{2}$; $\alpha = 3\pi/4$; b) $r = 4$; $\alpha = \pi/2$; c) $x = -1$; $y = -\sqrt{3}$.

2. Il punto di minimo è $x = 1/e^2$. Il punto di massimo è $x = 1$.

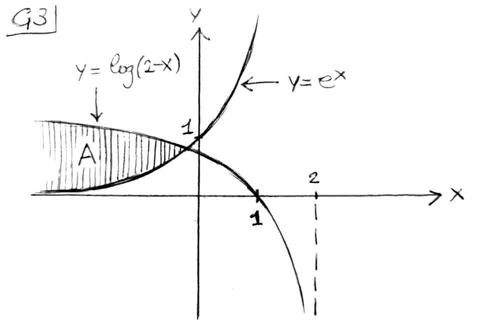
3. a) $\dfrac{2^x \log 2}{\sqrt{1-2^{2x}}}$; b) $(3x^2+4x^4)\,(1+x^2)^{-1/2}$; c) $\dfrac{1}{12\,(x+1)}$.

4. I valori cercati sono $a > 2$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 2$.

6. L'integrale è improprio semplice in 1 ed è finito per $0 < a < 1/4$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \tan\big(e^t(t-1) - \pi/4\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. a) $r = 2$; $\alpha = -2\pi/3$; b) $r = 2$; $\alpha = \pm\pi$; c) $x = -\sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$.

2. Il punto di minimo è $x = 1/2$. Il punto di massimo non esiste.

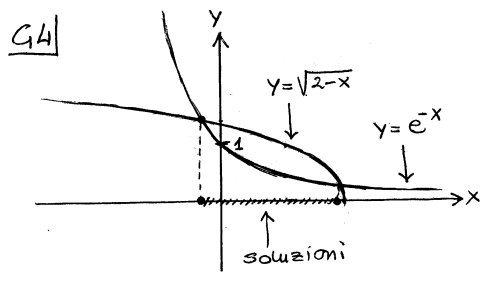
3. a) $(1+3x^4)\,(1+x^4)^{-1/2}$; b) $\dfrac{3^x \log 3}{\sqrt{1-3^{2x}}}$; c) $3\log x + 3$.

4. I valori cercati sono $a \leq 3$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 1/2$.

6. L'integrale è improprio semplice in 1 ed è finito per $0 < a < 1$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \log\big(\log(1+t^2) + e^2\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. a) $r = 2$; $\alpha = 3\pi/4$; b) $r = \sqrt{2}$; $\alpha = \pm\pi$; c) $x = -\sqrt{3}$; $y = 1$.

2. Il punto di minimo è $x = 1/e^2$. Il punto di massimo non esiste.

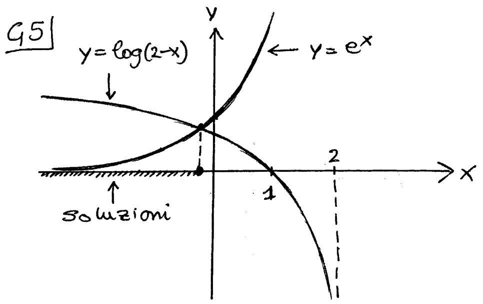
3. a) $-\dfrac{2^x \log 2}{\sqrt{1-2^{2x}}}$; b) $(2x+4x^5)\,(1+x^4)^{-1/2}$; c) $\dfrac{2}{\sin x\,\cos x}$.

4. I valori cercati sono $a \leq 2$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 5/4$.

6. L'integrale è improprio semplice in 1 ed è finito per $0 < a < 1/3$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \log\big(\log(1+t^2) + e^3\big)$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. a) $r = 2$; $\alpha = 5\pi/6$; b) $r = 3$; $\alpha = \pm\pi$; c) $x = -2$; $y = 2$.

2. Il punto di minimo è $x = 1/e^3$. Il punto di massimo è $x = 1$.

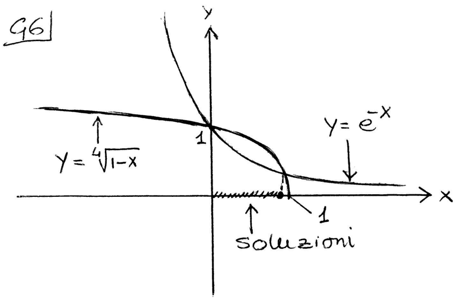
3. a) $(3x^2 + 5x^6)\,(1+x^4)^{-1/2}$; b) $-\dfrac{3^x \log 3}{\sqrt{1-3^{2x}}}$; c) $\dfrac{1}{20\,(x+1)}$.

4. I valori cercati sono $a < 2$.

5. Il raggio di convergenza è $R = 4/5$.

6. L'integrale è improprio semplice in 1 ed è finito per $0 < a < 1$.

7. La soluzione cercata è $x(t) = \log\big(\log(1+t^2) + e\big)$.

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) La funzione $\log\log x$ è definita per $x > 1$ e positiva per $x \geq e$, cresce su tutto il dominio, e infine converge a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a $-\infty$ per $x \to 1^+$. (Ometto il disegno del grafico.)

   Considero ora il punto c), visto che include il punto b) come caso particolare. Procedo al solito modo, ponendo
$$f(x) := \frac{\log\log x}{\sqrt{\log x}}$$
   e riscrivendo la disuguaglianza
$$\log\log x \leq a\sqrt{\log x} \quad \text{per ogni } x > 1 \tag{1}$$
   come
$$f(x) \leq a \quad \text{per ogni } x > 1,$$

che equivale a dire

$$M \le a \quad \text{con } M := \max_{x>1} f(x)\,.$$

(Al solito, se il massimo non esiste va sostituito con l'estremo superiore.)
Per trovare M osservo che la derivata

$$f'(x) = \frac{2 - \log\log x}{2x(\log x)^{3/2}}$$

si annulla solo per $x = \exp(e^2)$, e confronto quindi il valore $f(x)$ per $x = \exp(e^2)$ con i limiti di $f(x)$ per $x \to 1^+$ e $x \to +\infty$:

$$f(\exp(e^2)) = 2/e\,, \quad f(1^+) = -\infty\,, \quad f(+\infty) = 0\,.$$

Dal confronto deduco che $x = \exp(e^2)$ è il punto di massimo assoluto di $f(x)$ e che $2/e$ è il valore massimo. In conclusione i valori di a per cui vale la (1) sono

$$a \ge 2/e\,.$$

b) In particolare la (1) vale per $a = 1$ perché $1 \ge 2/e$.

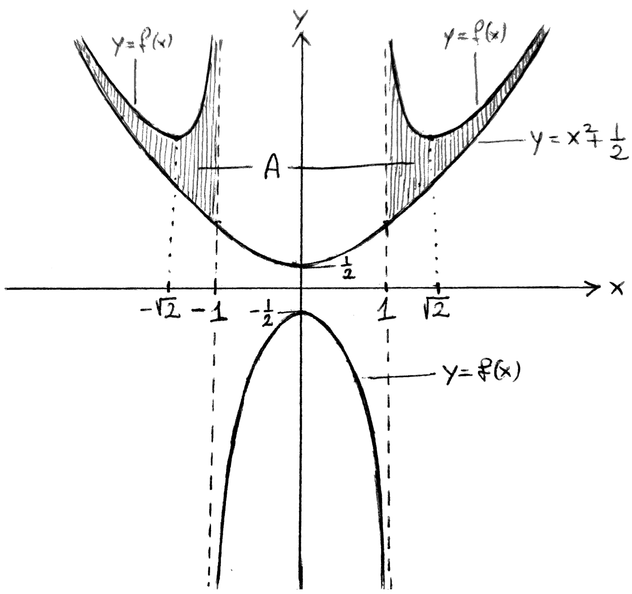
2. a) La funzione

$$f(x) := \frac{2x^4 - x^2 + 1}{2x^2 - 2}$$

è definita per $x \ne \pm 1$, positiva per $x > 1$ e $x < -1$ e negativa altrimenti (si vede infatti che il numeratore non si annulla mai e ha segno sempre positivo). Siccome la funzione è pari, per disegnarla posso limitarmi a studiarla per $x > 0$. In particolare noto che $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e per $x \to 1^+$, e tende a 0∞ per $x \to 1^-$, e studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-2)}{2(x^2-1)^2}$$

vedo che la funzione decresce per $0 \le x < 1$ e per $1 < x \le \sqrt{2}$, e cresce per $x \ge \sqrt{2}$. Utilizzando queste informazioni traccio il grafico riportato nella figura sotto.



b) Per disegnare l'insieme A devo capire per quali x il grafico $y = f(x)$ sta sopra al grafico $y = x^2 + \frac{1}{2}$ (che è una parabola), e questo vuol dire risolvere la disequazione $f(x) \ge x^2 + \frac{1}{2}$, che si riduce fatte le dovute semplificazioni a $1/(x^2-1) \ge 0$. Chiaramente le soluzioni di questa disequazione sono $x > 1$ e $x < -1$. Utilizzando questa informazione ottengo l'insieme A riportato nella figura sopra.

c) Usando il fatto che sia $f(x)$ che $x^2 + \frac{1}{2}$ sono funzioni pari ottengo che l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse delle y, e quindi la sua area è esattamente il doppio dell'area della parte di A

che sta a destra dell'asse y, che indico con A', e quindi

$$\text{area}(A) = 2\text{area}(A') = 2\int_1^{+\infty} f(x) - \left(x^2 + \tfrac{1}{2}\right) dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} \,.$$

L'integrale così ottenuto è improprio in 1 e in $+\infty$ e vale $+\infty$ oppure un numero finito perché la funzione integranda è sempre positiva. Per capire quale dei due casi si verifica lo spezzo come somma di due integrali impropri semplici. Il primo, improprio in $+\infty$, è finito per confronto asintotico:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} \approx \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$$

Il secondo, improprio in 1, lo riconduco ad un integrale improprio in 0 usando il cambio di variabile $x = y + 1$:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2+2y} \approx \int_0^1 \frac{dy}{2y} \approx \int_0^1 \frac{dy}{y} = +\infty$$

Concludo che A ha area infinita.

3. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(1+n)^{n^a} - 1\right] \tag{2}$$

è a termini positivi (osservo infatti che $(1+n)^{n^a} > 1$ per ogni n e per ogni a) e quindi ammette solo due comportamenti: o converge a un numero finito e positivo, oppure diverge a $+\infty$. Studio il comportamento dell'addendo della serie

$$(1+n)^{n^a} - 1 = \exp\big(n^a \log(1+n)\big) - 1$$

e in particolare osservo che

$$\lim_{n\to+\infty} n^a \log(1+n) = \lim_{n\to+\infty} n^a \log n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq 0, \\ 0 & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \big((1+n)^{n^a} - 1\big) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq 0, \\ 0 & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

Dunque per $a \geq 0$ la serie (2) diverge a $+\infty$.
Invece per $a < 0$ il fatto che l'addendo della serie tende a 0 non è sufficiente a stabilire il comportamento della serie. Usando però lo sviluppo $e^x - 1 \sim x$ con $x := n^a \log(1+n)$, e posso farlo perché $x \to 0$, ottengo che

$$(1+n)^{n^a} - 1 = \exp\big(n^a \log(1+n)\big) - 1 \sim n^a \log(1+n) \sim n^a \log n \,,$$

e quindi la serie (2) si comporta come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \log n \tag{3}$$

Ora, per $-1 \leq a < 0$ questa serie diverge a $+\infty$ per confronto asintotico con la serie $\sum n^a$ (osservo infatti che $n^a \log n \gg n^a$ e che $\sum n^a = +\infty$).
Invece per $a < -1$ la serie in (3) converge per confronto asintotico con la serie $\sum n^b$ dove $b := \frac{1}{2}(-1+a)$ (osservo infatti che $n^a \log n \ll n^b$ e che $\sum n^b < +\infty$).
Riassumendo: le serie in (2) converge per $a < -1$ e diverge a $+\infty$ per $a \geq 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. a) Uguale al gruppo 1.

   c) Simile al gruppo 1. La disuguaglianza $\log\log x \leq a\sqrt[3]{\log x}$ è soddisfatta per ogni $x > 1$ se e solo se $a \geq M$ dove M è il valore massimo tra tutti gli $x > 1$ di

$$f(x) := \frac{\log\log x}{\sqrt[3]{\log x}} \,.$$

Si vede che il punto di massimo assoluto di $f(x)$ è $x = \exp(e^3)$ e quindi $M = f(\exp(e^3)) = 3/e$. Pertanto i valori di a cercati sono $a \geq 3/e$.

b) Siccome $1 < 3/e$, la disuguaglianza $\log\log x \leq \sqrt[3]{\log x}$ non è soddisfatta per ogni $x > 1$.

2. Molto simile al gruppo 1. Le principali differenze nel grafico di $f(x)$ sono che la funzione è definita per $x \neq \pm 1/2$, (e quindi i due asintoti verticali hanno equazione $x = \pm 1/2$) e i punti di minimo locale sono $x = \pm\sqrt{5}/2$. Inoltre
$$\text{area}(A) = 2\int_{1/2}^{+\infty} f(x) - \big(x^2+1\big)\,dx = 2\int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{4}}$$
e questo integrale improprio diverge a $+\infty$.

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Sorprendentemente, molti dei presenti hanno sbagliato a disegnare il grafico $y = \log\log x$.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno svolto correttamente i calcoli necessari a rispondere al punto c), senza però riportare le conclusioni corrette, o addirittura riportando delle conclusioni nettamente sbagliate, ed infatti hanno poi sbagliato a rispondere al punto b). Sembra quasi che queste persone hanno applicato una procedura risolutiva che non hanno del tutto capito.

- Seconda parte, esercizio 2 (faccio riferimento al gruppo 1 ma lo stesso discorso si applica al gruppo 2). Molti dei presenti hanno disegnato l'insieme A senza risolvere la disequazione $f(x) \geq x^2 + \frac{1}{2}$, ed infatti hanno ottenuto un disegno sbagliato.
In particolare molti hanno considerato i punti (x, y) con $-1 < x < 1$ e $y \geq x^2 + \frac{1}{2}$ come parte dell'insieme A, mentre non lo sono.

- Seconda parte, esercizio 2. Pochissimi dei presenti hanno disegnato correttamente l'insieme A, e di questi nessuno ha impostato e discusso correttamente l'integrale improprio che ne determina l'area. Eppure si tratta di un esercizio abbastanza di routine.

- Seconda parte, esercizio 3. Nessuno dei presenti ha risolto anche parzialmente questo esercizio, ma d'altronde si tratta di un esercizio relativamente complicato.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Il valore cercato è $\alpha = 7\pi/6$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 2 + 2x^2 - 2x^4$.

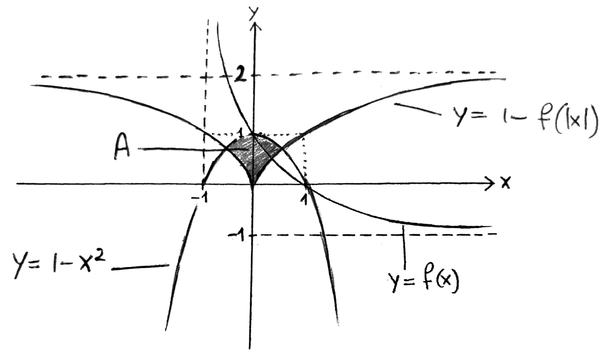
3. L'ordine corretto è: $c \ll b \ll a \ll d$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-2t}(-\sin t - 2\cos t),\, e^{-2t}(2\sin t - \cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{5}/2$.

5. $f'(x) = \dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[1, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $\pi/2 + k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $-\pi/2 < a < \pi/2$.

7. La serie converge per $a > 1/3$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Il valore cercato è $\alpha = 5\pi/4$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 6x^2 - 6x^4 + 10\,x^6$.

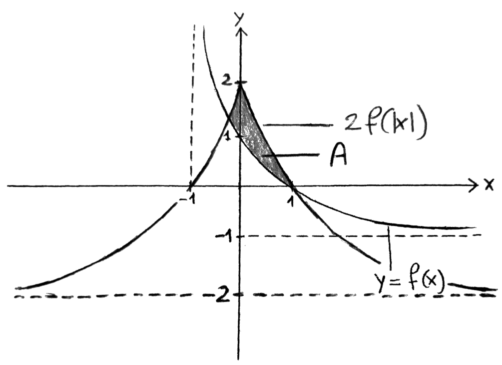
3. L'ordine corretto è: $d \ll b \ll a \ll c$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-3t}(-\sin t - 3\cos t),\, e^{-3t}(-3\sin t + \cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{10}/3$.

5. $f'(x) = \dfrac{x^4}{1+x^2}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[2, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $\pi/2 + k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $\pi/2 < a < 3\pi/2$.

7. La serie converge per ogni $a > 0$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Il valore cercato è $\alpha = 11\pi/6$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 2 + 2x^2 - 3x^4$.

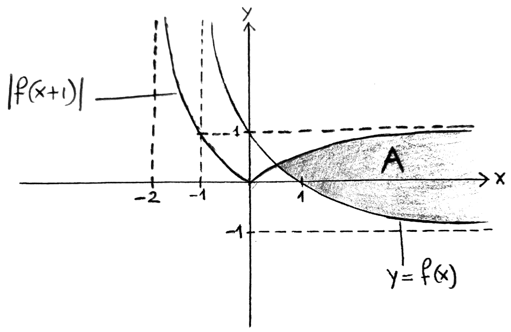
3. L'ordine corretto è: $d \ll a \ll c \ll b$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-2t}(2\sin t + 4\cos t),\, e^{-2t}(-4\sin t + 2\cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{5}$.

5. $f'(x) = -\dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[-2, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $\pi/2 + k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $-3\pi/2 < a < -\pi/2$.

7. La serie non converge per alcun $a > 0$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Il valore cercato è $\alpha = 5\pi/6$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 2 + 2x^3 - 4x^6$.

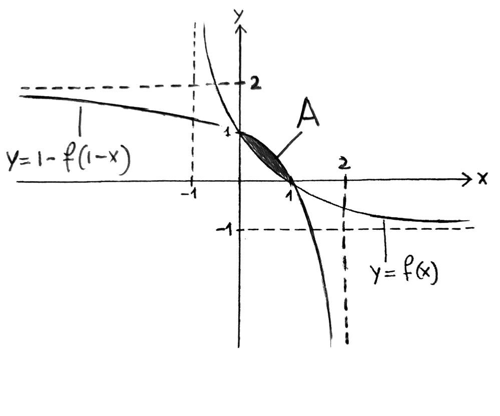
3. L'ordine corretto è: $c \ll a \ll d \ll b$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-3t}(-3\sin t - 9\cos t),\, e^{-3t}(9\sin t - 3\cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{10}$.

5. $f'(x) = \dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[1, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $0 < a < \pi$.

7. La serie converge per $a > 3/2$.

8. 

Prima parte, gruppo 5.

1. Il valore cercato è $\alpha = 3\pi/4$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 6x^3 - 6x^6 + 6x^9$.

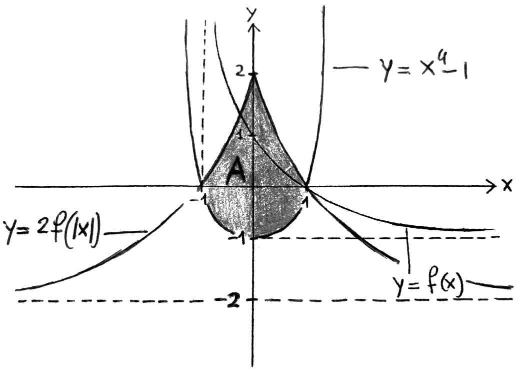
3. L'ordine corretto è: $d \ll a \ll b \ll c$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-2t}(2\sin t - \cos t),\, e^{-2t}(\sin t + 2\cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{5}/2$.

5. $f'(x) = \dfrac{x^5}{1+x^2}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[4, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $\pi < a < 2\pi$.

7. La serie converge per $a > 1/6$.

8. 

Prima parte, gruppo 6.

1. Il valore cercato è $\alpha = \pi/4$.

2. Il polinomio di Taylor cercato è $f(x) = 2 + 2x^3 - x^6$.

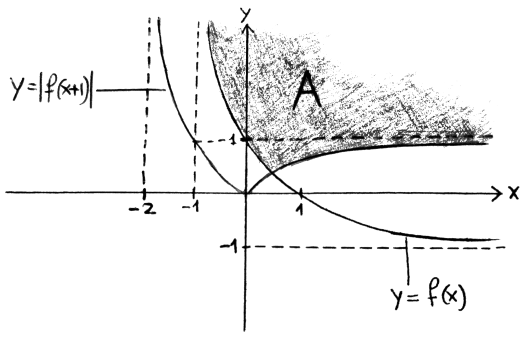
3. L'ordine corretto è: $b \ll c \ll a \ll d$.

4. La velocità di P è $\big(e^{-3t}(3\sin t - \cos t),\, e^{-3t}(\sin t + 3\cos t)\big)$. La distanza è $d = \sqrt{10}/3$.

5. $f'(x) = -\dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. L'integrale non è improprio solo se l'intervallo di integrazione $[-2, a]$ non contiene nessuno dei punti in cui si annulla il denominatore della funzione integranda, vale i punti della forma $k\pi$ con k intero. Questa condizione si verifica per $-\pi < a < 0$.

7. La serie converge per ogni $a > 0$.

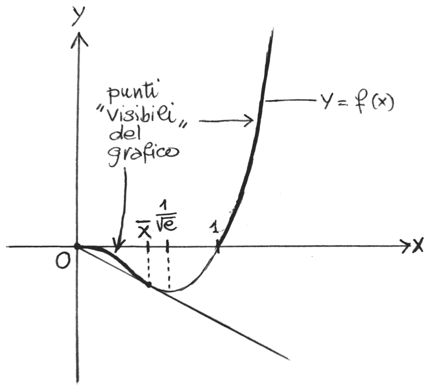
8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. Svolgo i punti a) e b) insieme. Siccome l'equazione (*) è lineare, la soluzione generale si scrive come
$$x(t) = x_{\rm om}(t) + x_1(t) + x_2(t) \tag{1}$$
dove $x_{\rm om}(t)$ è la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*), $x_1(t)$ è una particolare soluzione dell'equazione
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = \sin t\,, \tag{2}$$
mentre $x_2(t)$ è una particolare soluzione dell'equazione
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 2\,. \tag{3}$$
Per prima cosa trovo $x_{\rm om}$: partendo dal fatto che le soluzioni dell'equazione caratteristica sono
$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a-1}$$
ottengo che
$$x_{\rm om}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 1, \\ e^t(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 1, \\ e^{at}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) & \text{per } a < 1, \end{cases} \tag{4}$$
dove c_1, c_2 sono coefficienti arbitrari e $\omega := \sqrt{1-a}$ (definita per $a < 1$).
Cerco ora x_1, soluzione particolare dell'equazione (2). Per $a \neq 0$ il termine noto di questa equazione, $\sin t$, non è soluzione dell'equazione omogenea, e quindi so di dover cercare x_1 tra le funzioni della forma
$$x_1 = b_1 \cos t + b_2 \sin t\,.$$
Calcolo quindi $\dot{x}_1$ e $\ddot{x}_1$, sostituisco queste espressioni nell'equazione (1), ed ottengo un sistema di due equazioni nelle incognite b_1 e b_2, cosa che mi permette di determinarle. Alla fine:
$$x_1(t) = \frac{2}{a(a^2-2a+5)}\cos t + \frac{a-1}{a(a^2-2a+5)}\sin t \quad \text{per } a \neq 0. \tag{5}$$
Per $a = 0$ il termine noto $\sin t$ dell'equazione (2) è soluzione dell'equazione omogenea. So quindi di dover cercare x_1 della forma
$$x_1 = b_1 t\cos t + b_2 t \sin t\,.$$
Fatti i dovuti conti trovo $b_1 = -1/2$ e $b_2 = 0$, ovvero
$$x_1(t) = -\tfrac{1}{2} t\cos t \quad \text{per } a = 0. \tag{5'}$$
Cerco infine x_2 soluzione particolare di (3) tra le funzioni costanti e trovo
$$x_2(t) = \frac{2}{a^2 - a + 1}\,. \tag{6}$$
Mettendo insieme le formule (1), (4), (5), (5') e (6) ottengo la soluzione generale di (*).
c) Le formule (5), (5') e (6) mostrano che $x_1(t) \ll e^{3t}$) e $x_2(t) \ll e^{3t}$) per $t \to +\infty$, e quindi la soluzione $x(t)$ di (*) soddisfa $x(t) \sim e^{3t}$ se e solo se $x_{\rm om}(t) \sim e^{3t}$.
La formula (4) mostra poi che per $a \leq 1$ si ha $x_{\rm om}(t) \ll e^{3t}$ per ogni possibile scelta di c_1 e c_2, e quindi per questi a nessuna soluzione di (*) soddisfa $x(t) \sim e^{3t}$.
Resta il caso $a > 1$. Indico con λ_1 la più piccola delle due soluzioni dell'equazione caratteristica. Dalla formula (4) si vede subito che $x_{\rm om}(t) \sim e^{3t}$ solo se si verifica uno dei seguenti casi
   - $\lambda_2 = 3$, $c_2 = 1$, c_1 qualunque (infinite soluzioni).
   - $\lambda_1 = 3$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ (una sola soluzione);

   Facendo i conti si vede che il primo caso si verifica per $a = 2$, il secondo per $a = 5$.
In conclusione, $a = 2$ e $a = 5$ sono gli unici valori di a per cui esiste almeno una soluzione della (*) che soddisfa $x(t) \sim e^{3t}$, nel primo caso le soluzioni in questione sono infinite, nel secondo ce n'è una sola.

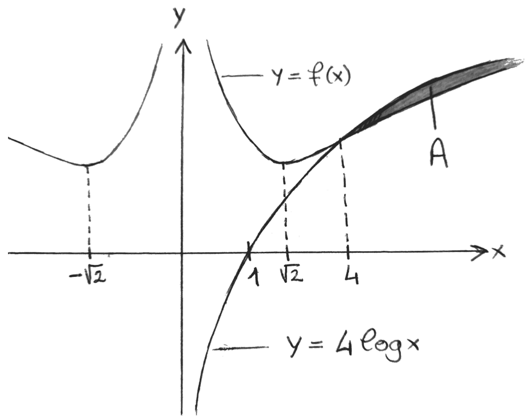
2. a) La funzione $f(x) = x^2 \log x$ è definita per ogni $x > 0$, è positiva per $x \geq 1$ e negativa altrimenti.
Inoltre la funzione tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, e tende a 0 per $x \to 0^+$, e siccome la derivata tende a 0 per $x \to 0^+$, il grafico parte dall'origine con retta tangente orizzontale.
Studiando infine il segno della derivata $f'(x) = x(2\log x + 1)$ ottengo che la funzione cresce per $\geq 1/\sqrt{e}$ e decresce altrimenti, mentre studiando il segno della derivata seconda $f''(x) = 2\log x + 3$ ottengo che la funzione è convessa per $x \geq 1/e^{3/2}$ e concava altrimenti.
Usando queste informazioni traccio il disegno qui sotto. (Attenzione: il disegno non rispetta le proporzioni.)



b) Il disegno suggerisce che i punti P_x direttamente visibili dall'origine O sono quelli per con $x \geq 1$ e quelli con $x \leq \bar{x}$, dove $\bar{x}$ è caratterizzato dal fatto che la retta R che passa per 0 e per $P_{\bar{x}}$ è tangente al grafico in quest'ultimo punto. Siccome la pendenza di R è $f(\bar{x})/\bar{x}$ abbiamo che $\bar{x}$ risolve l'equazione
$$\frac{f(\bar{x})}{\bar{x}} = f'(\bar{x})$$
ovvero $\bar{x}\log\bar{x} = \bar{x}(2\log\bar{x} + 1)$, da cui ricavo $\bar{x} = 1/e$.
In conclusione il punto P_x è direttamente visibile da O per $0 < x \leq 1/e$ e per $x \geq 1$.

3. a) La funzione
$$f(x) := \log\left(x^4 - 1 + \frac{16}{x^2}\right)$$
è pari ed è definita per ogni $x \neq 0$. Attenzione: che la funzione non sia definita per $x = 0$ è evidente, ma che sia definita per ogni altro valore di x non lo è per niente: si tratta infatti di dimostrare che l'argomento del logaritmo nella formula sopra è sempre positivo (tranne che per $x = 0$, dove non è definito). Moltiplicando tale argomento per x^2 mi riduco a far vedere che
$$x^6 - x^2 + 16 > 0 \quad \text{per ogni } x,$$
che con il cambio di variabile $t = x^2$ si traduce in
$$t^3 - t + 16 > 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$
Dimostro questa disuguaglianza trovando il valore minimo di $t^3 - 3 + 16$ relativamente alla semiretta $t \geq 0$: un semplice calcolo mostra che il punto di minimo è quello dove si annulla la derivata, vale a dire $t = 1/\sqrt{3}$, e quindi il valore minimo di $t^3 - t + 16$ è $16 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \simeq 15{,}6 > 0$.
Procedendo oltre, è facile verificare che $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to 0$ e per $x \to \pm\infty$, e anzi per $x \to +\infty$ la funzione è asintoticamente equivalente a $\log(x^4) = 4\log x$.
Studiando inoltre il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{4x^6 - 32}{x(x^6 - x^2 + 16)}$$
ottengo che $f(x)$ decresce per $0 < x \leq \sqrt{2}$ e cresce per $x \geq \sqrt{2}$ (e similmente per $x \leq 0$).
Sulla base delle informazioni raccolte fin qui traccio il grafico di f riportato nella figura sotto. (Attenzione, anche questa figura non rispetta le proporzioni.)

b) Risolvendo la disequazione $f(x) \leq 4\log x$ ottengo $x \geq 4$. Grazie a questa informazione posso disegnare il grafico $y = f(x)$ in relazione al grafico $y = \log x$ come nella figura sotto, e questo mi permette di disegnare l'insieme A. In particolare questo insieme risulta illimitato.



c) Sulla base di quanto visto l'area di A è data da

$$\begin{aligned}\text{area}(A) &= \int_4^{+\infty} 4\log x - f(x)\,dx \\ &= \int_4^{+\infty} \log(x^4) - \log\left(x^4 - 1 + 16/x^2\right) dx \\ &= \int_4^{+\infty} -\log\left(\frac{x^4 - 1 + 16/x^2}{x^4}\right) dx = \int_4^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{x^4} + \frac{16}{x^6}\right) dx\,.\end{aligned}$$

Osservo infine che l'ultimo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e per via dello sviluppo

$$\log\left(1 - \frac{1}{x^4} + \frac{16}{x^6}\right) \sim -\frac{1}{x^4} + \frac{16}{x^6} \sim -\frac{1}{x^4} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

si comporta come l'integrale improprio $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx$, che converge ad un numero finito. Pertanto l'area di di A è finita.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Simile al gruppo 1.
   a) e b). In questo caso le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda_{1,2} = 2a \pm \sqrt{a-1}$ e la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 1, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 1, \\ e^{2at}\big(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\big) & \text{per } a < 1, \end{cases}$$

   con $\omega := \sqrt{1-a}$. La soluzione particolare dell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = \cos t$ è

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{4a-1}{a(16\,a^2-8a+17)}\cos t - \frac{4}{a(16\,a^2-8a+17)}\sin t & \text{per } a \neq 0, \\ \frac{1}{2}t\sin t & \text{per } a = 0. \end{cases}$$

   Infine la soluzione particolare dell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 1$ è

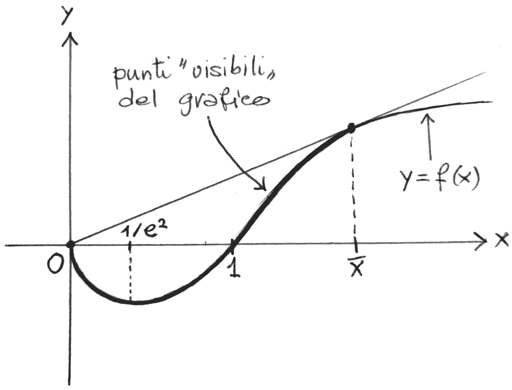
$$x_2(t) = \frac{1}{4a^2 - a + 1}\,,$$

   e la soluzione generale della (*) è $x(t) = x_{\text{om}}(t) + x_1(t) + x_2(t)$.

   c) L'equazione (*) ha infinite soluzioni asintoticamente equivalente a e^{3t} per $a = 5/4$, ne ha una per $a = 2$, nessuna in tutti gli altri casi.

2. Simile al gruppo 1. Il grafico di $f(x)$ è riportato nel disegno sotto. Come si vede dal disegno, i punti P_x direttamente visibili da O sono quelli con $0 < x \leq \bar{x}$ dove $\bar{x}$ risolve l'equazione

$f(\bar{x})/\bar{x} = f'(\bar{x})$, vale a dire $\bar{x} = e^2$.



3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 5. Molti dei presenti non si sono ricordati dell'identità $\sin(\arcsin x) = x$ (mi riferisco qui al gruppo 1, ma un discorso analogo vale per gli altri gruppi). Questo l'ho considerato un'errore.

- Prima parte, esercizio 6. Quasi nessuno dei presenti ha svolto correttamente questo esercizio. Il problema sembra essere la convinzione (errata) che un integrale è improprio solo quando la funzione non è definita in uno degli estremi, mentre è improprio anche se non è definita in uno o più punti interni all'intervallo di integrazione.

- Seconda parte, esercizio 1, punto c). Diversi dei presenti hanno trovato i valori di a per cui esiste almeno una soluzione dell'equazione asintoticamente equivalente a e^{3t} per $t \to +\infty$. Tuttavia il procedimento seguito non è mai stato spiegato bene, e anzi sembra poco chiaro agli autori stessi, tant'è che nessuno (tranne forse una persona) ha risposto correttamente alla seconda parte della domanda, in cui si chiedeva quante fossero le soluzioni in questione.

- Seconda parte, esercizio 2. Questo è uno dei pochi casi in cui per risolvere l'esercizio servono informazioni molto precise sul grafico, al di là di quelle che uno può ottenere studiando solo il segno della derivata. In particolare servono le informazioni su concavità e convessità.

- Seconda parte, esercizio 2. Quasi tutti i presenti che hanno affrontato questo esercizio hanno sbagliato il disegno del grafico di $f(x)$. In particolare hanno scritto che questa funzione tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$, mentre invece tende a 0 (si tratta di una forma indeterminata che chi ha seguito questo corso dovrebbe conoscere a memoria).

- Seconda parte, esercizio 3. Molti dei presenti hanno trovato che la derivata di f si annulla per $x = \pm\sqrt[6]{8}$, ma solo uno dei presenti si è accorto che $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$ (!)

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Il punto di massimo è $x = 3$. Il punto di minimo è $x = 0$.

2. a) L'equazione della retta T è $y = \dfrac{5+2x}{e^2}$. b) L'area del triangolo è $\dfrac{25}{4e^2}$.

3. I valori cercati di a sono: $a > \log 2$.

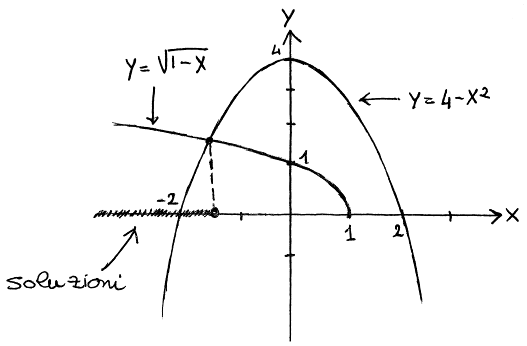
4. $f(x) = (3x^2 - 2)\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{3x^3} + O\Big(\dfrac{1}{x^5}\Big)\right) - 6x = -\dfrac{8}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big) \sim -\dfrac{8}{x}$.

5. Usando il cambio di variabile $t = x^3$ ottengo
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\Big|\arctan t\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{12}\,.$$

6. Il raggio di convergenza della serie è $R = 2$; la serie converge per $-2 < x < 2$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = e^{-2t}\big(-\cos t + c \sin t\big)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Il punto di massimo è $x = -3$. Il punto di minimo è $x = -2$.

2. a) L'equazione della retta T è $y = \dfrac{17+4x}{e^8}$. b) L'area del triangolo è $\dfrac{289}{8e^8}$.

3. I valori cercati di a sono: $a \geq 1$.

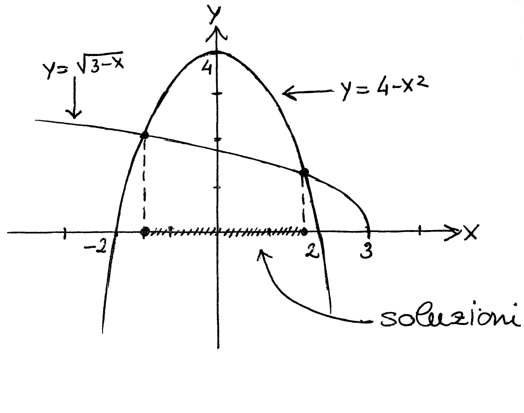
4. $f(x) = (x+2)\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} + O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)\right) - 2 = \dfrac{2}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big) \sim \dfrac{2}{x}$.

5. Usando il cambio di variabile $t = -x^2$ ottengo
$$\int_2^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-4}^{-\infty} e^t dt = \frac{1}{2}\Big|\;e^t\;\Big|_{-\infty}^{-4} = \frac{1}{2e^4}\,.$$

6. Il raggio di convergenza della serie è $R = +\infty$; la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = e^t\big(-\cos(2t) + c\sin(2t)\big)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8.



Prima parte, gruppo 3.

1. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $x = -1$.

2. a) L'equazione della retta T è $y = \dfrac{5-2x}{e^2}$. b) L'area del triangolo è $\dfrac{25}{4e^2}$.

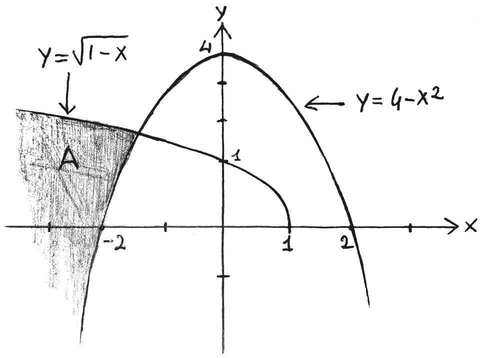
3. I valori cercati di a sono: $0 < a < 2$.

4. $f(x) = (3x^2 - 1)\Big(\dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{3x^3} + O\Big(\dfrac{1}{x^5}\Big)\Big) - 6x = -\dfrac{6}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big) \sim -\dfrac{6}{x}$.

5. Integrando per parti ottengo
$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}dx = \Big| -e^{-x}x \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -e^{-x}dx = \frac{1}{e} - \Big|e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = \frac{2}{e}\,.$$

6. Il raggio di convergenza della serie è $R = +\infty$; la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = e^{2t}\big(\cos t + c\sin t\big)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $x = -2$.

2. a) L'equazione della retta T è $y = \dfrac{17-4x}{e^8}$. b) L'area del triangolo è $\dfrac{289}{8e^8}$.

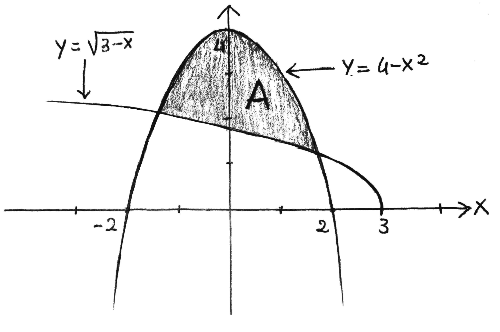
3. I valori cercati di a sono: nessuno.

4. $f(x) = (x-1)\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2} + O\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)\right) - 2 = -\dfrac{4}{x} + O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big) \sim -\dfrac{4}{x}$.

5. Usando il cambio di variabile $t = -x^2$ ottengo
$$\int_{-\infty}^{2} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-4} e^t dt = -\frac{1}{2}\Big|\, e^t\, \Big|_{-\infty}^{-4} = -\frac{1}{2e^4}\,.$$

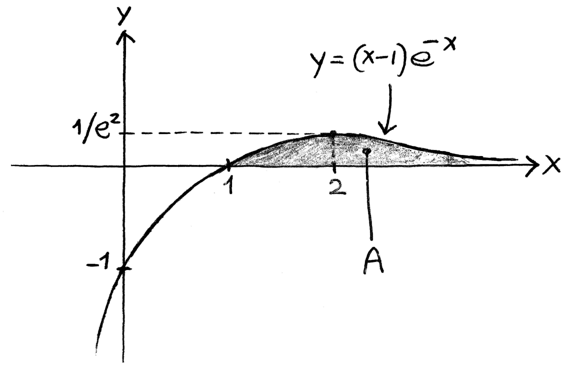
6. Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/2$; la serie converge per $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

7. Le soluzioni cercate sono $x(t) = e^{-t}\big(\cos(2t) + c\sin(2t)\big)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. 

Seconda parte.

1. a) La funzione $f(x) := (x-1)\,e^{-x}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è positiva per $x \geq 1$ e negativa altrimenti, tende a 0 per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$.
Studiando inoltre il segno della derivata $f'(x) := (2-x)\,e^{-x}$ ottengo che la funzione cresce per $x < 2$ e decresce per $x > 2$; in particolare $x = 2$ è il punto di massimo assoluto.
Utilizzando queste informazioni traccio il disegno sottostante (che non rispetta le giuste proporzioni).



b) Il volume del solido V è dato dalla solita formula:

$$\text{volume}(V) = \pi \int_1^{+\infty} \big(f(x)\big)^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} (x-1)^2\, e^{-2x} dx\,.$$

Per calcolare il valore di questo integrale improprio uso il cambio di variabile $y = x - 1$ (questo passaggio non è strettamente necessario, ma semplifica un po' i calcoli) e applico per due volte la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V) &= \frac{\pi}{e^2} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-2y} dy \\
&= \frac{\pi}{e^2} \left[\left| y^2 \, \frac{e^{-2y}}{-2} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} y e^{-2y} dy \right] \\
&= \frac{\pi}{e^2} \left[\left| y^2 \, \frac{e^{-2y}}{-2} \right|_0^{+\infty} + \left| y \, \frac{e^{-2y}}{-2} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2y}}{2} \, dy \right] \\
&= \frac{\pi}{e^2} \left| \frac{e^{-2y}}{-4} \right|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4e^2}\,.
\end{aligned}$$

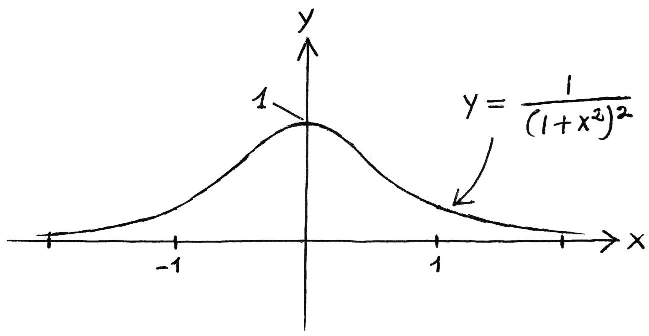
c) Per calcolare il volume del solido V' procedo così: indico con A'' la traslazione di A verso sinistra di 1, e con V'' il solido ottenuto ruotando A'' attorno all'asse delle y. Chiaramente i volumi di V' e V'' sono uguali, ed il secondo può essere calcolato usando la formula vista a lezione. Per la precisione la figura piana A'' è delimitata superiormente dalla traslazione verso sinistra di 1 del grafico $y = f(x)$, vale a dire il grafico $y = f(x+1)$, e quindi

$$\text{volume}(V') = \text{volume}(V'') = 2\pi \int_0^{+\infty} x\, f(x+1)\, dx = \frac{2\pi}{e} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx\,.$$

Per calcolare il valore di questo integrale improprio applico per due volte la formula di integrazione per parti e ottengo

$$\text{volume}(V') = \frac{2\pi}{e} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \frac{4\pi}{e}\,.$$

2. a) La funzione $f(x) := (1+x^2)^{-2}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è pari e positiva, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando il segno della derivata $f'(x) := -4x\,(1+x^2)^{-3}$ ottengo che la funzione cresce per $x < 0$ e decresce per $x > 0$ e in particolare $x = 0$ è il punto di massimo assoluto.
Utilizzando queste informazioni traccio il disegno sottostante.



b) La distanza dell'origine dal punto di ascissa x del grafico di f, vale a dire il punto $(x, f(x))$, è data da

$$g(x) := \left[x^2 + (f(x))^2\right]^{1/2} = \left[x^2 + (1+x^2)^{-4}\right]^{1/2}.$$

Cercare i punti del grafico di f più vicini all'origine significa quindi cercare i punti di minimo *assoluto* di g. Per farlo, cerco innanzitutto gli x in cui si annulla la derivata

$$g'(x) = x\left(1 - 4(1+x^2)^{-5}\right)\left[x^2 + (1+x^2)^{-4}\right]^{-1/2}.$$

Da questa formula risulta chiaro che $g'(x) = 0$ se $x = 0$ e se $1 - 4(1+x^2)^{-5} = 0$, vale a dire

$$x = \pm x_0 \text{ con } x_0 := \sqrt{\sqrt[5]{4} - 1}\,.$$

Confrontando i valori $g(x)$ per $x = 0$, $x = \pm x_0$ e per $x \to \pm\infty$ ottengo che i punti di minimo assoluto sono $x = \pm x_0$.

c) Procedo come nel punto precedente: fissato un generico $a > 0$ la distanza del punto $(x, f(x))$ dall'origine è

$$g(x) := \left[x^2 + (a+x^2)^{-4}\right]^{1/2},$$

la derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = x\left(1 - 4(a+x^2)^{-5}\right)\left[x^2 + (a+x^2)^{-4}\right]^{-1/2}$$

e si annulla per $x = 0$ e, se $a < \sqrt[5]{4}$, anche per

$$x = \pm x_0 \text{ con } x_0 := \sqrt{\sqrt[5]{4} - a}\,.$$

Confrontando i valori di $g(x)$ in questi punti e per $x \to \pm\infty$ ottengo che

- se $a \geq \sqrt[5]{4}$ l'unico punti di minimo assoluto è $x = 0$,
- se $a < \sqrt[5]{4}$ i due punti di minimo assoluto sono $x = \pm x_0$.

3. La funzione

$$f(x) := \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} - e^2 \tag{1}$$

è definita e continua per $x > 0$, e quindi l'integrale in esame è improprio sia in 0 che in $+\infty$. Lo spezzo dunque come

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{(I)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{(II)}.$$

Per determinare il comportamento dell'integrale (I), che è improprio (semplice) in 0, studio il comportamento asintotico della funzione $f(x)$ per $x \to 0$. A questo scopo osservo che per $x \to 0$ l'esponente $x + 1/2$ nella formula (1) tende a $1/2$ mentre la base $1 + 2/x$ è asintoticamente equivalente a $2/x$; quindi

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

e dunque

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.$$

Usando il principio del confronto asintotico concludo che

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \text{numero finito}\,. \tag{2}$$

Per determinare il comportamento dell'integrale (II), che è improprio (semplice) in $+\infty$, studio il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to +\infty$. A questo scopo scrivo $f(x)$ come

$$f(x) = \exp\Big(\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\,\log\Big(1+\frac{2}{x}\Big)\Big) - e^2$$

e osservo che, per $x \to +\infty$,

$$\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\,\log\Big(1+\frac{2}{x}\Big) = \Big(x+\frac{1}{2}\Big)\Big[\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big] = 2 - \frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

(nel primo passaggio ho usato lo sviluppo $\log(1+t) = t - t^2/2 + O(t^3)$ con $t = 2/x$). A partire da questa formula ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\Big(2 - \frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) - e^2 \\ &= e^2\Big[\exp\Big(-\frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) - 1\Big] = e^2\Big[-\frac{1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big] \sim -\frac{e^2}{x} \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo $e^t = 1 + t = O(t^2)$ con $t = -1/2 + O(1/x^2)$). Quindi, per il principio del confronto asintotico,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \approx -\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = -\infty\,. \tag{3}$$

Dalle formule (2) e (3) segue che l'integrale improprio di partenza diverge a $-\infty$.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. La maggior parte dei presenti ha disegnato correttamente l'insieme A (punto a)) e risolto correttamente il punto b), ma quasi nessuno ha impostato correttamente il punto c).

- Seconda parte, esercizio 2. Quasi nessuno dei presenti ha impostato correttamente il punto b). Nessuno ha affrontato il punto c).

- Seconda parte, esercizio 3. Per studiare il comportamento asintotico della funzione $f(x)$ per $x \to 0$ ho dato per scontato il seguente fatto generale: se $g(x)$ è asintoticamente equivalente a $\tilde{g}(x)$ per $x \to x_0$ e $h(x)$ tende ad un limite finito $L \neq 0$, allora

  $$\big(g(x)\big)^{h(x)} \sim \big(\tilde{g}(x)\big)^L\,.$$

  Questa affermazione è corretta, ma richiederebbe una dimostrazione.

Versione: 20 settembre 2021

Università di Pisa
Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica I (158AA), a.a. 2020-21

Testi e soluzioni

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande relativamente semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per ottenere la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.
Questa raccolta contiene i testi e le soluzioni degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2020-21, incluse le prove in itinere. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti qui viene riportata solo la prima.

Programma del corso [versione: 20 dicembre 2020]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   - Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente), funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. Limiti di funzioni e continuità
   - Limiti di funzioni; calcolo dei limiti elementari; forme indeterminate.
   - Funzioni continue.

3. Derivate
   - Derivata di una funzione. Significato geometrico come pendenza della retta tangente al grafico. Altre applicazioni del concetto di derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Esistenza del punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione). Individuazione dei valori e dei punti di massimo e di minimo di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
   - Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy e dimostrazione (parziale) del teorema di de L'Hôpital.
   - Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione ed espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Funzioni crescenti e decrescenti; caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave; caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Applicazioni al disegno del grafico di una funzione.

4. Elementi di analisi astratta
   - *Numeri interi, razionali e reali.*
   - *Estremo superiore ed inferiore di un insieme qualunque di numeri reali. Esistenza dell'estremo inferiore e superiore (completezza dei numeri reali).*
   - Teorema di esistenza degli zeri. Algoritmo di bisezione per la determinazione dello zero di una funzione.

5. Integrali
   - Definizione di integrale (definito) di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.
   - Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
   - Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

6. Integrali impropri
   - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
   - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
   - Integrali impropri non semplici.

7. Serie numeriche e serie di potenze
   - *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
   - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. La serie geometrica.
   - Criterio del confronto con l'integrale. La serie armonica generalizzata.
   - Criteri per determinare il comportamento di una serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta, della radice e del rapporto.
   - Serie di potenze, e raggio di convergenza. Serie di Taylor. Coincidenza della serie di Taylor con la funzione per alcune funzioni elementari. Espressione del numero e come serie.
   - *Definizione di esponenziale complesso e giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

8. Equazioni differenziali
   - Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
   - Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee, e ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti.
   - *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica: equazione di decadimento, equazione dell'oscillatore armonico e dell'oscillatore armonico smorzato.*

TESTI E SOLUZIONI

PRIMA PARTE, AULE A-D (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \sqrt{\log 7 - \log(x-3)} + \dfrac{1}{x^2+16}$.

   SOLUZIONE. $3 < x \le 10$.

2. Calcolare le derivate di: a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, b) $\log\left(\dfrac{7}{\exp(3x^2-4)}\right)$, c) $\arcsin(1-x^4)$.

   SOLUZIONE. a) $\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, b) $-6x$, c) $\dfrac{-4x}{\sqrt{2-x^4}}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\log(1+x)}{2x+\sin x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+\cos x}{x^5-3}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{e^x}{\sin x}$.

   SOLUZIONE. a) $2/3$, b) 0 , c) $+\infty$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(x^2-x^4)}{x^3-\log(1+x^3)}$.

   SOLUZIONE. $2/x^4$.

5. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) := x^3 - 3x^2$ relativamente alla semiretta $x \le 3$.

   SOLUZIONE. Punti di massimo: 0 e 3; punti di minimo: non esistono.

6. Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^2-x^5}{1+\log x} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

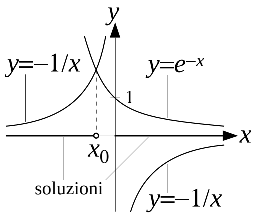
   SOLUZIONE. $a \ge 5$.

7. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico di $f(x) := \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ha pendenza $1/2$.

   SOLUZIONE. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \ge -\dfrac{1}{x}$.

   SOLUZIONE.



Prima parte, aule E-H (prima variante)

1. Trovare le soluzioni $x \in [0, \pi/3]$ della disequazione $\tan(3x) \le \sqrt{3}$.
   Soluzione. $x \in [0, \pi/9] \cup (\pi/6, \pi/3]$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua $f(x) := \begin{cases} a\cos x + \sin x & \text{se } x \le 0, \\ a^2\sqrt{x+4} & \text{se } x > 0. \end{cases}$.
   Soluzione. $a = 0, \dfrac{1}{2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-3^x}{x2^x+1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2-\sin x}{e^x-1}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(2^{-x})$.
   Soluzione. a) $-\infty$, b) -1 , c) 1.

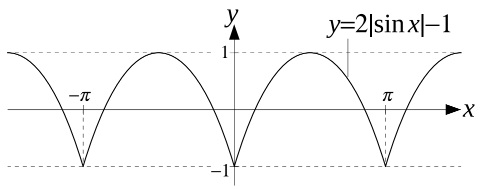
4. Scrivere il polinomio di Taylor (in 0) di ordine 4 della funzione $f(x) := \cos(x^3 + x)$.
   Soluzione. $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{23}{24}x^4$.

5. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i punti di massimo e minimo assolutidella funzione $f(x) := -x^3 + 6x^2$ relativamente alla semiretta $x \le 2$.
   Soluzione. Punti di massimo: non esistono; punto di minimo: 0.

6. Scrivere dominio, immagine e inversa della funzione $f(x) := \log_3(x + 1)$.
   Soluzione. Dominio: $(-1, +\infty)$; immagine: $\mathbb{R}$; inversa: $f^{-1}(y) = 3^y - 1$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \frac{a}{6}x^3 + \frac{a}{4}x^2 + x$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.
   Soluzione. $0 \le a \le 8$.

8. Disegnare il grafico della funzione $y = 2|\sin x| - 1$.
   Soluzione.



PRIMA PARTE, AULE I-M (prima variante)

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti espressi in coordinare cartesiane, scegliendo l'angolo α nell'intervallo $(-\pi, \pi]$: a) $(0, -2)$; b) $(-1, 0)$; c) $(-\sqrt{3}, 1)$.

   SOLUZIONE. a) $r = 2$, $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$; b) $r = 1$, $\alpha = \pi$; c) $r = 2$, $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

2. Determinare l'immagine della funzione $f(x) := 2\sin(\pi/6 - 3x) + 2$.

   SOLUZIONE. $[0, 4]$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2(e^x + \log x)$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\exp(x^2)}{\sin^3 x}$, c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-\log x}$.

   SOLUZIONE. a) 0 , b) non esiste , c) 0.

4. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta per $x \to +\infty$:
$$4^{-x} \quad \ll \quad (1-x^2)\,2^x \quad \ll \quad \frac{2^x+3}{3^x} \quad \ll \quad (1+x)\,2^x$$

   SOLUZIONE. $4^{-x} \ll \dfrac{2^x+3}{3^x} \ll (1+x)\,2^x \ll (1-x^2)\,2^x$.

5. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 1 + 3x^2 - \sqrt{1+2x^2}$.

   SOLUZIONE. $2x^2$.

6. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := 2\sin x + \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ nel punto $x = \dfrac{\pi}{4}$.

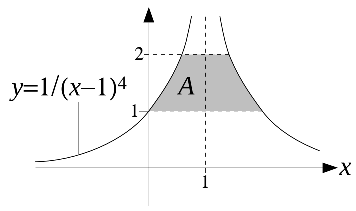
   SOLUZIONE. $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$.

7. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := (x^2-2)\exp(x^2)$ è convessa.

   SOLUZIONE. $\big(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big]$ e $\big[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\big)$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $1 \le y \le 2$ e $y \le \dfrac{1}{(x-1)^4}$.

   SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

1 Dire per quali $a \geq 0$ è vero che

$$\exp(x^2) \geq a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

Soluzione. Osservo che la disequazione (*) è sempre verificata per $x = 3/2$, cioè quando si annulla il termine di destra. Per gli altri x riscrivo questa disequazione (*) come

$$\underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)^{-2} \exp(x^2)}_{f(x)} \geq a \quad \text{per ogni } x \neq 3/2,$$

e chiaramente questa disequazione vale se solo se $\min f(x) \geq a$ (se il minimo non esiste va sostituito con l'estremo inferiore dei valori).

Calcolo ora il valore minimo di $f(x)$. Osservo per cominciare che $f(x)$ è ben definita e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ tranne $x = \frac{3}{2}$, vale a dire sull'unione degli intervalli $\big(-\infty, \frac{3}{2}\big)$ e $\big(\frac{3}{2}, +\infty\big)$, e che la derivata

$$f'(x) = (2x^2 - 3x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)^{-3} \exp(x^2)$$

si annulla per $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$. Come visto a lezione, per trovare il valore minimo di $f(x)$ (o l'estremo inferiore) confronto i valori di f in questi due punti con i limiti agli estremi degli intervalli di definizione

$$f\big(-\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{4}\, e^{1/4} \simeq 0{,}32\,, \ f(2) = 4e^4 \simeq 218{,}4\,, \ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty\,, \ \lim_{x \to 3/2} f(x) = +\infty\,.$$

Così facendo ottengo che

$$\min f(x) = f\big(-\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{4}\, e^{1/4}\,,$$

e dunque (*) è vera se e solo se $a \leq \frac{1}{4}\, e^{1/4}$.

Osservazioni. In alternativa il valore minimo di f può essere trovato studiando il segno della derivata ed individuando gli intervalli di monotonia della funzione: in questo caso si trova che f decresce negli intervalli $\big(-\infty, -\frac{1}{2}\big]$ e $\big(\frac{3}{2}, 2\big]$, e cresce in $\big[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\big)$ e in $[2, +\infty)$: queste informazioni bastano a dire che $f(-\frac{1}{2})$ è il valore minimo di f nella semiretta $\big(-\infty, \frac{3}{2}\big)$, e che $f(2)$ è il valore minimo di f nella semiretta $\big(\frac{3}{2}, +\infty\big)$; e confrontando questi due valori si ottiene infine che il minimo è $f\big(-\frac{1}{2}\big)$.

2 Dato $a \in \mathbb{R}$ considero la funzione

$$f(x) := (x + 3a)^a + (x - 1)^a - 2x^a\,.$$

Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ nei seguenti casi:

a) $a \neq 0, \frac{1}{3}$;

b) $a = \frac{1}{3}$.

Soluzione. Siccome $\text{p.p.}((x+3a)^a) = x^a$ e $\text{p.p.}((x-1)^a) = x^a$ per $x \to +\infty$, le parti principali dei tre addendi che formano $f(x)$ si cancellano e devo quindi utilizzare uno sviluppo più preciso dei primi due addendi.

Raccogliendo x all'interno di ciascuna delle parentesi ottengo

$$f(x) = (x + 3a)^a + (x - 1)^a - 2x^a = x^a \left[\left(1 + \frac{3a}{x}\right)^a + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^a - 2\right]. \tag{1}$$

Siccome $3a/x$ e $-1/x$ tendono a 0 per $x \to +\infty$ posso applicare ai primi due addendi tra le parentesi quadre lo sviluppo di Taylor

$$(1 + t)^a = 1 + at + \frac{a(a-1)}{2} t^2 + O(t^3)\,. \tag{2}$$

(Ho scelto lo sviluppo all'ordine 2 in vista del punto b); per il punto a) basta infatti lo sviluppo all'ordine 1.)
In particolare ponendo $t = 3a/x$ in (2) ottengo

$$\left(1+\frac{3a}{x}\right)^a = 1 + \frac{3a^2}{x} + \frac{9a^3(a-1)}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

e ponendo $t = -1/x$ ottengo

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^a = 1 - \frac{a}{x} + \frac{a(a-1)}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Usando queste ultime due formule la (1) diventa

$$f(x) = a(3a-1)\,x^{a-1} + \frac{a(a-1)(9a^2+1)}{2}\,x^{a-2} + O(x^{a-3})\,. \tag{3}$$

Posso ora rispondere alle due domande dell'esercizio:

a) per $a \neq 0, \frac{1}{3}$ il primo termine nello sviluppo (3) non si annulla e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = a(3a-1)\,x^{a-1}\,;$$

b) per $a = \frac{1}{3}$ il primo termine nello sviluppo (3) si annulla e resta il secondo:

$$\text{p.p.}(f(x)) = -\tfrac{2}{9}\,x^{-5/3}\,.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Dato $a > 0$ considero la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := (x^2 + a)\,e^{ax}$.

a) Determinare l'immagine di f.

b) Ponendo il codominio di f uguale all'immagine, dire per quali a esiste l'inversa $f^{-1}(y)$.

c) Per a come al punto b) trovare una funzione $g(y)$ data da una formula esplicita e asintoticamente equivalente a $f^{-1}(y)$ per $y \to +\infty$.

d) Per a come al punto b) trovare una funzione $h(y)$ data da una formula esplicita tale che $f^{-1}(y) - h(y)$ tende a 0 per $y \to +\infty$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e strettamente positiva, e quindi l'immagine è contenuta in $(0, +\infty)$; inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$

e quindi l'immagine di $f(x)$ deve essere tutto $(0, +\infty)$.

b) Siccome ho imposto che il codominio di f coincide con l'immagine, f è automaticamente surgettiva e quindi la funzione inversa esiste se (e solo se) f è iniettiva. Studio quindi il segno della derivata

$$f'(x) = \underbrace{(ax^2 + 2x + a^2)}_{p(x)}\,e^{ax}\,.$$

Osservo che tale segno coincide con quelle del polinomio di secondo grado p, che ha discriminante $\Delta = 4(1 - a^3)$. Si presentano quindi tre casi:

- se $0 < a < 1$ allora $\Delta > 0$ e p ha due radici distinte x_1 e x_2; quindi f è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, x_1)$ e $(x_2, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(x_1, x_2])$, e questo pertanto f e disegnando il grafico si vede che f non è iniettiva e dunque l'inversa non esiste;
- se $a = 1$ allora $\Delta = 0$ e p ha un'unica radice x_1 ed è positivo altrove; quindi f è strettamente crescente sia nell'intervallo $(-\infty, x_1)$ che in $(x_1, +\infty)$, e quindi è strettamente crescente anche su tutto $\mathbb{R}$; in particolare f è iniettiva e l'inversa esiste;
- se $a > 1$ allora $\Delta < 0$ e p è sempre strettamente positivo; quindi f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ ed in particolare è iniettiva e l'inversa esiste.

Riassumendo: l'inversa f^{-1} esiste per $a \geq 1$ e non esiste per $0 < a < 1$.

c) Nel resto dell'esercizio le variabili x e y sono collegate dalla relazione $y = f(x)$, o equivalentemente $x = f^{-1}(y)$; in particolare $y \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ e viceversa.
Riscrivo la relazione $y = f(x)$ come

$$y = e^{ax}\, x^2 \left(1 + \frac{a}{x^2}\right);$$

passando al logaritmo ottengo

$$\log y = ax + 2\log x + \log\left(1 + \frac{a}{x^2}\right) \tag{4}$$

e siccome per $x \to +\infty$ la funzione a destra dell'uguale è asintoticamente equivalente ad ax, ho che

$$\tfrac{1}{a}\log y \sim x \tag{5}$$

per $x \to +\infty$ e quindi anche per $y \to +\infty$, e siccome $x = f^{-1}(y)$ questa formula equivale a

$$f^{-1}(y) \sim \tfrac{1}{a}\log y \quad \text{per } y \to +\infty.$$

La funzione cercata è quindi

$$g(y) := \tfrac{1}{a}\log y\,.$$

d) Riscrivo la relazione (5) come

$$\frac{\log y}{ax} \to 1$$

per $y \to +\infty$, e passando al logaritmo ottengo

$$\log\log y - \log a - \log x \to 0 \tag{6}$$

Inoltre posso riscrivere l'equazione (4) come

$$ax - \log y + 2\log x = -\log\left(1 + \frac{a}{x^2}\right)$$

e sommando ad entrambi i termini l'espressione $2(\log\log y - \log a - \log x)$ ottengo

$$ax - \log y + 2\log\log y - 2\log a = 2(\log\log y - \log a - \log x) - \log\left(1 + \frac{a}{x^2}\right). \tag{7}$$

Usando la (6) si vede subito che il termine di sinistra di questa uguaglianza tende a 0 per $y \to +\infty$, e quindi anche il termine di destra tende a 0:

$$ax - \log y + 2\log\log y - 2\log a \to 0\,;$$

dividendo per a e usando che $x = f^{-1}(y)$ ottengo infine che

$$f^{-1}(y) - \tfrac{1}{a}\big[\log y - 2\log\log y + 2\log a\big] \to 0\,.$$

La funzione cercata è quindi

$$h(y) := \tfrac{1}{a}\big[\log y - 2\log\log y + 2\log a\big]\,.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to-\infty} x^3 2^x$, b) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-5x}{x-2}$, c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^4)}{\cos(x^2)-1}$.

   SOLUZIONE. a) 0 , b) $-\infty$, c) -2.

2. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := (2+2x^4)\exp(x^2)$.

   SOLUZIONE. Usando lo sviluppo di Taylor $e^t = 1+t+\frac{1}{2}t^2+O(t^3)$ con $t = x^2$ ottengo
   $$f(x) = (2+2x^4)\big(1+x^2+\tfrac{1}{2}x^4+O(x^6)\big) = 2+2x^2+3x^4+O(x^6)\,,$$
   e quindi $P_4(x) = 2+2x^2+3x^4$.

3. Il punto P si muove con legge oraria $P = (t\cos t,\, t\sin t)$; calcolare il *modulo* della velocità.

   SOLUZIONE. La velocità di P è $\vec{v} = (\cos t - t\sin t,\, \sin t + t\cos t)$; il modulo è $|\vec{v}| = \sqrt{1+t^2}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x\, dx$.

   SOLUZIONE. Integrando due volte per parti si ottiene $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin x\,dx = \pi^2-4$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x^4}{(1-\cos x)^a}\,dx$ converge ad un numero finito.

   SOLUZIONE. L'integrale è improprio in 0 e usando il fatto che $x^2+x^4 \sim x^2$ e $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$ si ottiene che
   $$\int_0^1 \frac{x^2+x^4}{(1-\cos x)^a}\,dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{2a-2}}\,,$$
   e quindi l'integrale di partenza converge per $2a-2 < 1$, vale a dire $a < 3/2$.

6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n+n^4}$.

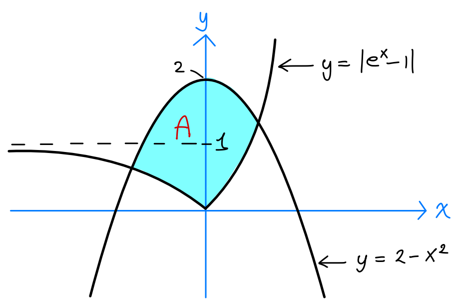
   SOLUZIONE. I coefficienti sono $a_n := \frac{1}{3^n+n^4} \sim 3^{-n}$ e applicando il criterio della radice per le serie di potenze si ottiene $R = 3$.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(x^2+1)$ che soddisfa $x(0) = 1$.

   SOLUZIONE. Si tratta di un'equazione a variabili separabili:
   $$\frac{\dot{x}}{1+x^2} = 3t^2\,, \qquad \int\frac{dx}{1+x^2} = \int 3t^2\,dt\,, \qquad \arctan x = t^3 + c\,;$$
   inoltre la condizione iniziale è soddisfatta per $c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ e quindi $x = \tan\big(t^3+\frac{\pi}{4}\big)$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) nel piano tali che $|e^x-1| \le y \le 2-x^2$.

   SOLUZIONE.



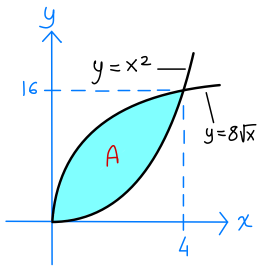
SECONDA PARTE (prima variante)

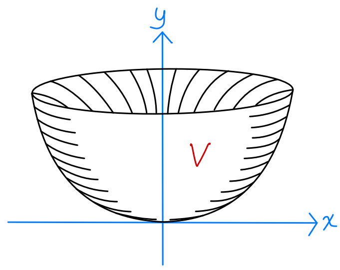
1 Sia A l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che $x \geq 0$ e $x^2 \leq y \leq 8\sqrt{x}$ e sia V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse delle y.

a) Disegnare A e calcolarne l'area.

b) Disegnare V e calcolarne il volume.

SOLUZIONE. a) x^2 e $8\sqrt{x}$ sono funzioni elementari ben note i cui grafici si intersecano, oltre che nell'origine, nel punto P la cui ascissa x che soddisfa l'equazione $x^2 = 8\sqrt{x}$, cioè $x^{3/2} = 8$, cioè $x = 8^{2/3} = 4$. L'insieme A è disegnato nella figura sotto (dove le proporzioni non sono rispettate):



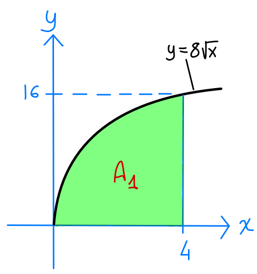


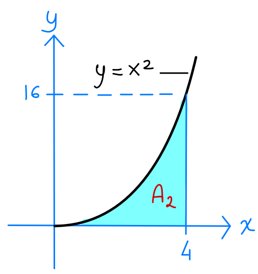
L'area di A è data dall'integrale per x compreso tra 0 e 4 della lunghezza $\ell(x)$ della sezione verticale A_x; chiaramente $\ell(x) = 8\sqrt{x} - x^2$, e quindi

$$\text{area}(A) = \int_0^4 \ell(x)\, dx = \int_0^4 8\sqrt{x} - x^2\, dx = \left| \frac{16\, x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{3} \right|_0^4 = \frac{64}{3}\,.$$

b) Il solido V è disegnato nella figura sopra. Per calcolarne il volume considero gli insiemi

$$A_1 := \big\{(x, y) \colon 0 \leq x \leq 4\,,\ 0 \leq y \leq 8\sqrt{x}\big\}\,,$$
$$A_2 := \big\{(x, y) \colon 0 \leq x \leq 4\,,\ 0 \leq y \leq x^2\big\}\,,$$





ed osservo che A si ottiene sottraendo A_2 da A_1. Indicando con V_1 e V_2 i solidi ottenuti ruotando gli insiemi A_1 ed A_2 (rispettivamente) attorno all'asse y, osservo che V si ottiene sottraendo V_2 da V_1 e quindi, calcolando i volumi di V_1 e V_2 con la seconda formula per i volumi dei solidi di rotazione,

$$\begin{aligned}\text{volume}(V) &= \text{volume}(V_1) - \text{volume}(V_2)\\ &= 2\pi \int_0^4 8x^{3/2}\, dx - 2\pi \int_0^4 x^3\, dr = 2\pi \left| \frac{16\, x^{5/2}}{5} \right|_0^4 - 2\pi \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^4 = \frac{384\,\pi}{5}\,.\end{aligned}$$

OSSERVAZIONI. Prima soluzione alternativa di b). Come visto a lezione, il volume di V è dato anche dall'integrale per r che varia da 0 a 4 dell'area della sezione cilindrica V_r, vale a dire l'insieme dei punti di V che distano r dall'asse delle y. Siccome V_r è la superficie laterale di un cilindro di raggio di base r e altezza $\ell(r) = 8\sqrt{r} - r^2$, la sua area è

$$a(r) = 2\pi r\, \ell(r) = 2\pi\big(8r^{3/2} - r^3\big)\,,$$

e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_0^4 a(r)\,dr = 2\pi \int_0^4 8r^{3/2} - r^3\,dr = 2\pi \left| \frac{16\,r^{5/2}}{5} - \frac{r^4}{4} \right|_0^4 = \frac{384\,\pi}{5}\,.$$

Seconda soluzione alternativa di b). Il volume di V è anche dato dall'integrale per y che varia da 0 a 16 dell'area della sezione orizzontale di V ad altezza y. Osservo che questa sezione è una corona circolare con raggio esterno $r_e = \sqrt{y}$ (funzione inversa di x^2) e raggio interno $r_i = \frac{1}{64}y^2$ (funzione inversa di $8\sqrt{x}$) e quindi l'area è data da

$$a(y) = \pi r_e^2 - \pi r_i^2 = \pi\big(y - \tfrac{1}{2^{12}}y^4\big)\,,$$

e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_0^{16} a(y)\,dy = \pi \int_0^{16} y - \tfrac{1}{2^{12}}y^4\,dy = \pi \left| \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{5\cdot 2^{12}}y^5 \right|_0^{2^4} = \frac{384\,\pi}{5}\,.$$

$\boxed{2}$ Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 1 + e^{3t} \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2,\ 5$.

b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2,\ 5$.

c) Per ogni $a > 1$ dire quante sono le soluzioni $x(t)$ di (*) tali che $x(t) = O(e^{3t})$ per $t \to +\infty$.

<u>Soluzione</u>. a), b) Com'è noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, la soluzione generale di (*) è data da

$$x(t) = x_{\text{om}}(t) + x_1(t) + x_2(t)$$

dove

(i) x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 0$,

(ii) x_1 è una soluzione particolare di $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = 1$,

(iii) x_2 è una soluzione particolare di $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 - a + 1)x = e^{3t}$.

Calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea è

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 - a + 1 = 0 \tag{1}$$

e le soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a - 1}\,.$$

Abbiamo quindi diversi casi:

- $a > 1$: le soluzioni λ_1, λ_2 sono reali e distinte e
$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
  $a = 1$: le soluzioni λ_1, λ_2 sono reali e coincidenti, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, e
$$x_{\text{om}}(t) = e^t(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
- $a < 1$: le soluzioni λ_1, λ_2 sono complesse coniugate, e posto $\omega := \sqrt{1 - a}$ vale che
$$x_{\text{om}}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Calcolo della soluzione particolare x_1. Poiché il termine noto è la funzione costante 1, cerco una soluzione particolare della forma $x_1 =$ costante, ed ottengo

$$x_1 = \frac{1}{a^2 - a + 1}$$

(notare che il denominatore $a^2 - a + 1$ non si annulla mai).

Calcolo della soluzione particolare x_2. Il termine noto è e^{3t}; per vedere per quali a l'esponente 3 risolve l'equazione caratteristica, sostituisco 3 al posto di λ nella (1) ed ottengo

$$a^2 - 7a + 10 = 0\,,$$

ovvero $a = 2,\ 5$. Distinguo ora tre casi:

- $a \neq 2, 5$: cerco una soluzione della forma $x_2 = ce^{3t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione in (iii) ottengo l'identità $c(a^2 - 7a + 10)e^{3t} = e^{3t}$ che è soddisfatta per $c = \frac{1}{a^2-7a+10}$, e dunque
$$x_2(t) = \tfrac{1}{a^2-7a+10}e^{3t} \quad \text{per } a \neq 2, 5.$$
- $a = 2$: in questo caso 3 è una delle due soluzioni dell'equazione caratteristica e quindi cerco una soluzione della forma $x_2 = cte^{3t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione in (iii) ottengo l'identità $2ce^{3t} = e^{3t}$ che è soddisfatta per $c = \frac{1}{2}$, e dunque
$$x_2(t) = \tfrac{1}{2}te^{3t} \quad \text{per } a = 2.$$
- $a = 5$: come nel caso precedente cerco una soluzione della forma $x_2 = cte^{3t}$ e sostituendo questa espressione nell'equazione in (iii) ottengo $c = -\frac{1}{4}$, e dunque
$$x_2(t) = -\tfrac{1}{4}te^{3t} \quad \text{per } a = 5.$$

c) *Caso* $a = 2$. La soluzione di (*) è
$$x(t) = c_1e^{3t} + c_2e^t + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}te^{3t}\,,$$
quindi per $t \to +\infty$ si ha che $x(t) \sim \frac{1}{2}te^{3t}$ e dunque x non è mai $O(e^{3t})$.

Caso $a = 5$. La soluzione di (*) è
$$x(t) = c_1e^{7t} + c_2e^{3t} + \tfrac{1}{21} - \tfrac{1}{4}te^{3t}\,,$$
quindi per $t \to +\infty$ vale che $x(t) \sim c_1e^{7t}$ se $c_1 \neq 0$, e $x(t) \sim -\frac{1}{4}te^{3t}$ se $c_1 = 0$; in entrambi i casi x non è $O(e^{3t})$.

Caso $a > 1$ *e* $a \neq 2, 5$. La soluzione di (*) è
$$x(t) = \underbrace{c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}}_{x_{\text{om}}} + \underbrace{\tfrac{1}{a^2-a+1} + \tfrac{1}{a^2-7a+10}e^{3t}}_{x_1+x_2}$$
e siccome $x_1 + x_2 = O(e^{3t})$ per $t \to +\infty$, la domanda diventa: *quante soluzioni x_{om} sono* (e^{3t})*?* Si vede subito che $x_{\text{om}} = O(e^{3t})$ per $c_1 = c_2 = 0$; resta da vedere se ce ne sono altre, e quante sono. Detta λ_2 la più piccola della due soluzioni di (1), cioè $\lambda_2 = a - \sqrt{a-1}$, si presentano due casi:

- se $\lambda_2 > 3$ allora $x_{\text{om}}(t) = O(e^{3t})$ solo se $c_1 = c_2 = 0$;
- se $\lambda_2 \leq 3$ allora $x_{\text{om}}(t) = O(e^{3t})$ per $c_1 = 0$ e c_2 qualunque, e queste soluzioni sono infinite.

Osservo infine che la condizione $\lambda_2 > 3$ si traduce nella disequazione $a - \sqrt{a-1} > 3$, e risolvendola ottengo $a > 5$.

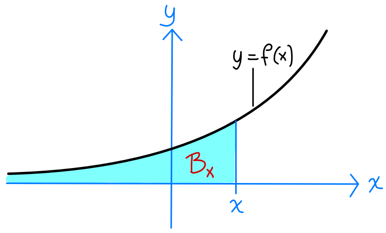
Riassumendo, il numero delle soluzioni x di (*) che soddisfano $x(t) = O(e^{3t})$ è
$$\begin{cases} 0 & \text{se } a = 2, 5, \\ 1 & \text{se } a > 5, \\ \text{infinito} & \text{se } 1 < a < 5 \text{ e } a \neq 2. \end{cases}$$

3 Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e positiva, per ogni $x \in \mathbb{R}$ indico con B_x l'insieme dei punti del piano compresi tra l'asse delle x e il grafico di f e con ascissa minore o uguale a x. Considero quindi la seguente proprietà:
$$\text{area}(B_x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{P}$$

a) Trovare una funzione f che soddisfa (P).

b) Trovare tutte le funzioni f che soddisfano (P). [*Suggerimento: considerare la funzione $F(x) :=$ area(B_x) e scrivere la condizione (P) in termini di F e della sua derivata.*]

SOLUZIONE. Svolgo direttamente il punto b).



Siccome l'insieme B_x è quello dato nella figura sopra, l'area di B_x, che indico appunto con $F(x)$, è data da

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt\,; \tag{2}$$

dunque per il teorema fondamentale del calcolo integrale vale che

$$F'(x) = f(x)\,, \tag{3}$$

e pertanto la condizione (P) equivale a

$$F'(x) = F(x)\,.$$

Questo significa che F risolve l'equazione differenziale del primo ordine $\dot{y} = y$.[1] Scrivendo questa equazione nella forma $\dot{y} - y = 0$ si vede che è lineare, omogenea e con coefficienti costanti, e che l'equazione caratteristica è $\lambda - 1 = 0$. Quindi $\lambda = 1$ e le soluzioni dell'equazione sono $y = ce^x$ con $c \in \mathbb{R}$.
Pertanto $F(x)$ deve essere della forma $F(x) = ce^x$, da cui segue che $f = F'$ deve essere della forma $f(x) = ce^x$; inoltre la costante c soddisfa $c \geq 0$ perchè per ipotesi f è positiva.

Per concludere dobbiamo verificare che effettivamente tutte le funzioni $f(x) = ce^x$ con $c \geq 0$ soddisfano la proprietà (P),[2] ma questo è un semplice calcolo:

$$\text{area}(B_x) = \int_{-\infty}^{x} ce^t\, dt = \Big| ce^t \Big|_{-\infty}^{x} = ce^x\,.$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. A prima vista la verifica che le funzioni del tipo $f(x) = ce^x$ soddisfano la proprietà (P) non sembra essere necessaria. Per capire che in realtà lo è pensate alla variante del problema in cui si considera solo $x \geq 0$ e B_x è l'insieme dei punti compresi tra il grafico di f e l'asse delle x, con ascissa compresa tra 0 e x (invece che minore di x). Procedendo come sopra si ottiene di nuovo che f deve essere della forma $f(x) = ce^x$, ma poi si scopre che la proprietà (P) vale solo se $c = 0$.

[1] Uso la lettera y per l'incognita perché la lettera x indica la variabile indipendente.

[2] In effetti il ragionamento fatto in precedenza dimostra che se f soddisfa (P) allora f è della forma $f(x) = ce^x$, ma non che tutte le f di questa forma soddisfano (P). Il punto delicato è il seguente: l'equazione (2) implica l'equazione (3) ma in generale non vale il viceversa.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Per ciascuno dei seguenti punti aggiungere le coordinate mancanti, polari o cartesiane (per quelle polari l'angolo α va preso in $[0, 2\pi)$):
$$P_1 \begin{cases} x = 0 & y = -2 \\ r = & \alpha = \end{cases}, \qquad P_2 \begin{cases} x = & y = \\ r = \sqrt{2} & \alpha = \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \qquad P_3 \begin{cases} x = -\sqrt{3} & y = -3 \\ r = & \alpha = \end{cases}.$$

SOLUZIONE. P_1: $r = 2$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$; P_2: $x = -1$, $y = 1$; P_3: $r = 2\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^4}}{\sin^4 x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(x\, 2^{-x})$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{9^x}{(1+2^x)^3}$.

SOLUZIONE. a) $-1/2$, b) 1 , c) $+\infty$.

3. Trovare i punti di massimo e di minimo di $f(x) := \dfrac{x}{(x-1)^2}$, specificando se non esistono.

SOLUZIONE. L'unico punto di minimo è -1 e non esistono punti di massimo.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 4x^3 \exp(x^2)\, dx$.

SOLUZIONE. Utilizzando il cambio di variabile $y = x^2$ e poi integrando per parti si ottiene
$$\begin{aligned} \int 4x^3 \exp(x^2)\, dx &= \int 2y\, e^y\, dy = 2y\, e^y - \int 2e^y\, dy \\ &= (2y-2)\, e^y + c = (2x^2-2)\, \exp(x^2) + c\,. \end{aligned}$$

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n^4}{(1+n^2)^a}$ converge ad un numero finito.

SOLUZIONE. Per $n \to +\infty$ si ha che $2n^2 + n^4 \sim n^4$ e $(1+n^2)^a \sim n^{2a}$, e quindi, per il secondo criterio del confronto asintotico,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n^4}{(1+n^2)^a} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2a-4}}\,.$$
Pertanto la serie converge ad un numero finito se e solo se $2a - 4 > 1$, cioè $a > \frac{5}{2}$.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) := \exp(at^2)$ risolve l'equazione differenziale $\dot{x}^2 - t^2x^2 = 0$.

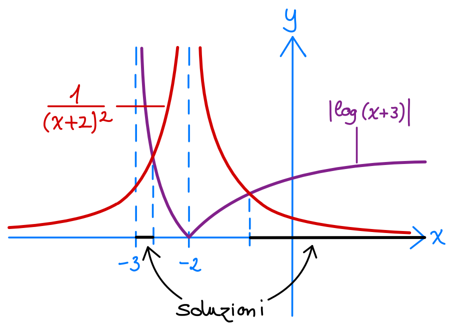
SOLUZIONE. Per $x = \exp(at^2)$ l'equazione diventa $(4a^2-1)\, t^2 \exp(2at^2) = 0$, ed è verificata per ogni t se e solo se $4a^2 - 1 = 0$, vale a dire $a = \pm\frac{1}{2}$.

7. Determinare la soluzione dell'equazione $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ tale che $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 2$.

SOLUZIONE. La soluzione generale dell'equazione è $x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t)$; imponendo le condizioni iniziali ottengo $x(t) = 2te^{2t}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $|\log(x+3)| \geq \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{xe^{8x}}{3x+2}.$$

a) Disegnare il grafico di f.

b) Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $x(a)$ la più piccola delle soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ (ammesso che ne esista almeno una): determinare il dominio della funzione $x(a)$, i punti di discontinuità, ed i limiti per $a \to 0^+$ e $a \to 0^-$.

SOLUZIONE. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \neq -\frac{2}{3}$, vale 0 per $x = 0$, è positiva per $x > 0$ e $x < -\frac{2}{3}$, negativa per $-\frac{2}{3} < x < 0$. I limiti significativi sono:

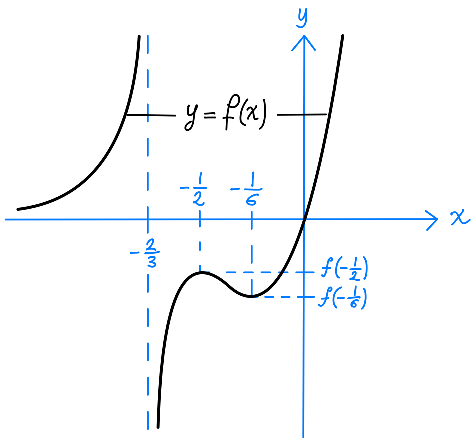
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to(-\frac{2}{3})^\pm} f(x) = \mp\infty\,.$$

Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{e^{8x}}{(3x+2)^2}(24\,x^2 + 16\,x + 2)$$

si vede che la funzione cresce negli intervalli $x < -\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3} < x \leq -\frac{1}{2}$, $x \geq -\frac{1}{6}$, e decresce nell'intervallo $-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{6}$ (in particolare $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di massimo locale e $x = -\frac{1}{6}$ è un punto di minimo locale).

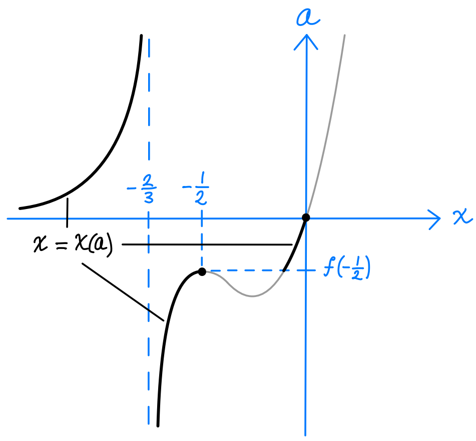
Usando queste informazioni traccio il disegno del grafico qui sotto (le proporzioni non sono rispettate).



b) Detto $N(a)$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$, partendo dal grafico dato sopra ottengo che:

$$N(a) = \begin{cases} 1 & \text{per } a < f\big(-\frac{1}{6}\big) = -\frac{1}{9}e^{-4/3} \simeq -0{,}029; \\ 2 & \text{per } a = f\big(-\frac{1}{6}\big) \text{ (una delle due soluzioni è } -\frac{1}{6}); \\ 3 & \text{per } f\big(-\frac{1}{6}\big) < a < f\big(-\frac{1}{2}\big) = -e^{-4} \simeq -0{,}018; \\ 2 & \text{per } a = f\big(-\frac{1}{2}\big) \text{ (una delle due soluzioni è } -\frac{1}{6}); \\ 1 & \text{per } f\big(-\frac{1}{2}\big) \leq a \leq 0; \\ 1 & \text{per } a = 0 \text{ (la soluzione è 0)}; \\ 2 & \text{per } a > 0. \end{cases}$$

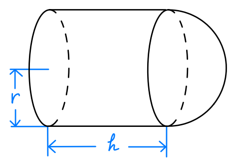
c) Lo schema al punto b) dice l'equazione $f(x) = a$ ammette almeno una soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$, e questo significa che la funzione $x(a)$ è definita per ogni $a \in \mathbb{R}$. Partendo dal grafico di f ottengo quella della funzione $x(a)$ qui sotto (ho messo la variabile indipendente a al posto della y nell'asse verticale, lasciando la variabile dipendente x sull'asse orizzontale; di nuovo, le proporzioni non sono rispettate).



In particolare si vede che $x(a)$ è discontinua per $a = 0$ e $a = f\big(-\frac{1}{2}\big)$, e che

$$\lim_{a\to 0^+} x(a) = -\infty\,, \qquad \lim_{a\to 0^-} x(a) = x(0) = 0\,.$$

$\boxed{2}$ Devo costruire un serbatoio di volume π (non specifico l'unità di misura) con la forma di un cilindro con attaccata una semisfera, come nel disegno accanto.



a) Se voglio che il serbatoio abbia la superficie più piccola possibile, che misure devo prendere?

b) È possibile fare in modo che la superficie del serbatoio sia pari a 1000?

SOLUZIONE. a) Indico con r il raggio di base del cilindro e con h l'altezza.
Il volume del serbatoio è dato dalla somma del volume del cilindro, $\pi r^2 h$, e del volume della semisfera, $\frac{2}{3}\pi r^3$, e imponendo che tale somma sia π ottengo

$$\pi r^2 h + \tfrac{2}{3}\pi r^3 = \pi\,,$$

da cui ricavo

$$h = \frac{1}{r^2} - \frac{2r}{3} = r\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{2}{3}\Big)\,. \tag{1}$$

Inoltre la superficie S del serbatoio è data dalla somma dell'area di base del cilindro πr^2, della sua superficie laterale $2\pi rh$, e dalla superficie della semisfera $2\pi r^2$, ovvero

$$S = 3\pi r^2 + 2\pi r h\,,$$

e utilizzando la formula (1) ottengo

$$S = \frac{5\pi r^2}{3} + \frac{2\pi}{r} = \frac{\pi}{r}\Big(\frac{5}{3}r^3 + 2\Big)\,.$$

Voglio ora trovare il minimo della funzione $S = S(r)$ fra tutti i valori ammissibili di r, vale a dire tutti gli $r > 0$ per cui $h \geq 0$; risolvendo la disequazione $h = \frac{1}{r^2} - \frac{2r}{3} \geq 0$ ottengo che l'insieme degli r ammissibili è

$$0 < r \leq r_0 := \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}} \simeq 1{,}14\,.$$

Osservo ora che la derivata $S'(r) = \frac{10\pi r}{3} - \frac{2\pi}{r^2}$ si annulla in

$$r_1 := \sqrt[3]{\tfrac{3}{5}} \simeq 0{,}84\,,$$

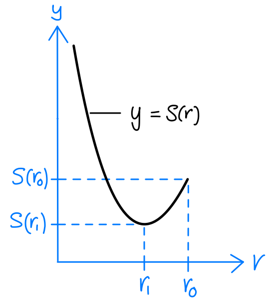
e confrontando il valore di $S(r)$ per $r = r_1$ con i valori/limiti agli estremi dell'intervallo degli r ammissibili, vale a dire

$$S(r_1) = \pi\sqrt[3]{45} =\simeq 11{,}17\,, \quad S(r_2) = \pi\sqrt[3]{\tfrac{243}{4}} \simeq 12{,}35\,, \quad S(0^+) = +\infty\,, \tag{2}$$

ottengo che r_1 è il punto di minimo assoluto di S; in tal caso l'altezza è h è uguale a r_1.

b) Studiando il segno della derivata ottengo che $S(r)$ decresce nell'intervallo $0 < r \leq r_1$ e cresce nell'intervallo $r_1 \leq r \leq r_0$; usando queste informazioni e i valori in (2) ottengo il disegno del

grafico di S riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



Quindi che l'immagine di S è la semiretta $[S(r_1), +\infty)$ e siccome $S(r_1) \simeq 11{,}17$ è minore di 1000, esiste r per cui l'area del contenitore vale 1000.

3 Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale improprio $I := \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{(\sin x)^a} - \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$.

a) Dire in quali punti Iè improprio.

b) Determinare la parte principale della funzione integranda $f(x) := \frac{1}{(\sin x)^a} - \frac{1}{x}$ per $x \to 0$.

c) Discutere il comportamento di I.

SOLUZIONE. a) Affinché $f(x)$ sia definita è necessario che x e $\sin x$ siano strettamente positivi (le potenze al denominatore siano ben definite, e diverse da zero). Da questa osservazione segue che $f(x)$ non è definita per $x = 0$ e $x = \pi$, ed è definita e continua per $x \in (0, \pi)$. Quindi l'integrale è improprio in 0 e π.

b) Siccome $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, ho che $(\sin x)^{-a} \sim x^{-a}$ e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = \text{p.p.}\big((\sin x)^{-a} - x^{-3/2}\big) = \begin{cases} -x^{-3/2} & \text{per } a < \frac{3}{2}, \\ x^{-a} & \text{per } a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Per $a = \frac{3}{2}$ la parte principale di $(\sin x)^{-a}$ si cancella con $x^{3/2}$ e serve quindi uno sviluppo più preciso di $(\sin x)^{-a}$.

Usando lo sviluppo di Taylor $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ ottengo

$$(\sin x)^{-3/2} = \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)\big)^{-3/2} = x^{-3/2}\big(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + O(x^4)\big)^{-3/2};$$

usando poi lo sviluppo di Taylor $(1+t)^b = 1 + bt + O(t^2)$ con $b := -\frac{3}{2}$ e $t := -\frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ ottengo

$$\begin{aligned}(\sin x)^{-3/2} &= x^{-3/2}(1+t)^{-3/2} \\ &= x^{-3/2}\big(1 - \tfrac{3}{2}t + O(t^2)\big) \\ &= x^{-3/2}\big(1 + \tfrac{1}{4}x^2 + O(x^4)\big) = x^{-3/2} + \tfrac{1}{4}x^{1/2} + O(x^{5/2})\big).\end{aligned}$$

Quindi $f(x) = \frac{1}{4}x^{1/2} + O(x^{5/2})$, da cui segue che

$$\text{p.p.}(f(x)) = \tfrac{1}{4}x^{1/2} \quad \text{per } a = \tfrac{3}{2}.$$

c) Siccome l'integrale è improprio in 0 e π, per studiarne il comportamento devo scomporlo come somma di due integrali impropri semplici, il primo improprio in 0 e il secondo improprio in π:

$$I = \int_0^\pi f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\pi f(x)\,dx}_{I_2}.$$

Grazie al secondo criterio del confronto asintotico e a quanto fatto al punto b) ottengo che

- per $a < \frac{3}{2}$, I_1 si comporta come $\int_0^1 -\frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ e quindi diverge a $-\infty$,
- per $a = \frac{3}{2}$, I_1 si comporta come $\int_0^1 x^{1/2}\,dx$ (che non è improprio) e quindi converge,
- per $a > \frac{3}{2}$, I_1 si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx$ e quindi diverge a $+\infty$.

Per studiare il comportamento di I_2 osservo innanzitutto che per $x \to \pi$ la parte principale di $f(x)$ è $(\sin x)^{-a}$, e usando il cambio di variabile $x = \pi - t$ e l'identità $\sin(\pi - t) = \sin t$ ottengo

$$I_2 \approx \int_1^{\pi} (\sin x)^{-a}\, dx = \int_0^{\pi-1} (\sin t)^{-a}\, dt \approx \int_0^{\pi-1} \frac{1}{t^a}\, dt$$

e quindi

- per $a < 1$, I_2 converge,
- per $a \geq 1$, I_2 diverge a $+\infty$.

Mettendo insieme i comportamenti di I_1 ed I_2 ottengo infine che

- per $a < 1$, I_1 diverge a $-\infty$ e I_2 converge, quindi I diverge a $-\infty$,
- per $1 \leq a < \frac{3}{2}$, I_1 diverge a $-\infty$ e I_2 diverge a $+\infty$, quindi I non esiste,
- per $a \geq \frac{3}{2}$, I_1 diverge a $+\infty$ oppure converge e I_2 diverge a $+\infty$, quindi I diverge a $+\infty$.

Prima parte, gruppo A (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log\left(\sin(2x) - \frac{1}{2}\right)$.
   Soluzione. Deve essere $\sin(2x) > \frac{1}{2}$ vale a dire $\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi$ con k intero.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^3 + ax^2 + x)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
   Soluzione. Deve essere $f'(x) = \exp(\cdots)\,(3x^2+2ax+1) \geq 0$ per ogni x, ovvero il discriminante Δ di $3x^2 + 2ax + 1$ deve soddisfare $\Delta \leq 0$, cosa che si verifica per $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{x^{10} - 2^x}_{a}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{1+\log x}}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{2^x \log x}{1+1/x}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{x+x^2}}_{d}\,.$$
   Soluzione. $d \ll b \ll a \ll c$.

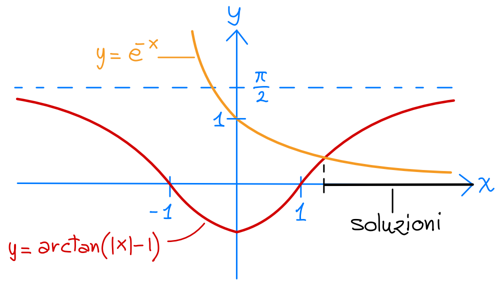
4. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione $f(x) := (3-2x^4)\log(1+2x^2)$.
   Soluzione. Usando lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + O(t^4)$ con $t = 2x^2$ ottengo
$$f(x) = (3-2x^4)\big(2x^2 - 2x^4 + \tfrac{8}{3}x^6 + O(x^8)\big) = 6x^2 - 6x^4 + 4x^6 + O(x^8)\,,$$
   e quindi $P_6(x) = 6x^2 - 6x^4 + 4x^6$.

5. Il punto P si muovo con legge oraria $P = (2t+2, 1-\cos t, \sin t)$. Calcolare la distanza d percorsa tra l'istante $t = 0$ e $t = 4$.
   Soluzione. La velocità di P è $\vec{v} = (2, \sin t, \cos t)$, quindi $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ e $d = \displaystyle\int_0^4 |\vec{v}|\,dt = 4\sqrt{5}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(n^{-a}) - 1}{1+\sqrt{n}}$ converge ad un numero finito.
   Soluzione. Usando lo sviluppo $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$ con $t = n^{-a}$ ottengo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(n^{-a}) - 1}{1+\sqrt{n}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+1/2}}\,,$$
   e quindi la serie converge per $a > \frac{1}{2}$.

7. Risolvere l'equazione differenziale $\dot{x} = (9x^2+1)\cos t$.
   Soluzione. Equazione a variabili separabili: in forma integrale diventa $\int \frac{1}{9x^2+1}dx = \int \cos t\,dt$, vale a dire $\arctan(3x) = 3\sin t + c$, e infine $x = \frac{1}{3}\tan(3\sin t + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $e^{-x} \leq \arctan(|x|-1)$.
   Soluzione.



PRIMA PARTE, GRUPPO B (prima variante)

1. Trovare le soluzioni della disequazione $2\cos(2x) \geq -\sqrt{2}$ nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.
   SOLUZIONE. Le soluzioni sono $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{8}$ e $\frac{5\pi}{8} \leq x \leq \pi$.

2. Trovare l'inversa della funzione $y = \dfrac{3x+1}{2-x}$.
   SOLUZIONE. Esplicitando x nella relazione $y = \dfrac{3x+1}{2-x}$ ottengo $x = \dfrac{2y-1}{y+3}$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{\exp(x^2)}{1-x^2} - 1$.
   SOLUZIONE. Usando gli sviluppi $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t = x^2$ e $(1+t)^{-1} = 1 - t + O(t^2)$ con $t = -x^2$ ottengo
   $$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x^2)\,(1-x^2)^{-1} - 1 \\ &= \big(1 + x^2 + O(x^4)\big)\big(1 + x^2 + O(x^4)\big) - 1 = 2x^2 + O(x^4) \sim 2x^2\,. \end{aligned}$$

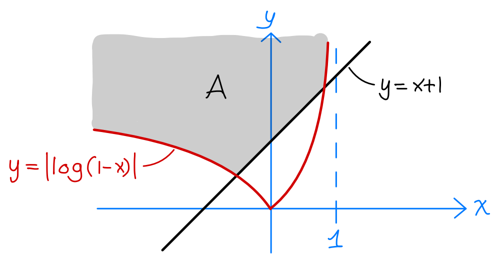
4. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to 0$:
   $$\underbrace{\log x}_{a}\,,\quad \underbrace{x^2 \log x}_{b}\,,\quad \underbrace{\frac{\log(1+2x^2)}{e^x}}_{c}\,,\quad \underbrace{\frac{x + \log x}{\sin x}}_{d}\,.$$
   SOLUZIONE. $c \ll b \ll a \ll d$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$
   SOLUZIONE. Usando il cambio di variabile $x = 2y$ ottengo
   $$\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\arctan(1) = \frac{\pi}{8}\,.$$

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{(1-x)^{2a}}\,dx$ è finito.
   SOLUZIONE. L'integrale è improprio in 1, e usando il cambio di variabile $x = 1 - y$ ottengo
   $$\int_0^1 \frac{x^a}{(1-x)^{2a}}\,dx \approx \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{2a}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{y^{2a}}\,dy$$
   e quindi l'integrale è finito per $a < \frac{1}{2}$.

7. Risolvere l'equazione differenziale $\dot{x} + x\cos t = 2t\exp(-\sin t)$.
   SOLUZIONE. Equazione lineare del primo ordine: $x = (t^2 + c)\exp(-\sin t)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \geq x + 1$ e $y \geq |\log(1-x)|$.
   SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

1 Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione

$$f(x) := (\cos x)^a - \exp(-2x^2)\,.$$

Calcolare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, cominciando se opportuno dal caso $a \neq 4$.

Soluzione. Entrambi gli addendi della funzione valgono 1 per $x = 0$ e quindi la funzione tende a 0. Per trovare la parte principale uso lo sviluppo $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ e lo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t = -2x^2$, e ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^a - \big(1 + t + O(t^2)\big) \\ &= \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^a - 1 + 2x^2 + O(x^4) \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato che $O(t^2) = O(x^4)$).
Per il primo addendo uso adesso lo sviluppo $(1 + t)^a = 1 + at + O(t^2)$ con $t = -\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ e ottengo

$$f(x) = at + O(t^2) + 2x^2 + O(x^4) = \big(2 - \tfrac{1}{2}a\big)\, x^2 + O(x^4) \tag{1}$$

(nel secondo passaggio ho usato che $O(t^2) = O(x^4)$ perchè $t = O(x^2)$). Pertanto

$$\text{p.p.}(f(x)) = \big(2 - \tfrac{1}{2}a\big)\, x^2 \quad \text{per } a \neq 4.$$

Per $a = 4$ la (1) diventa $f(x) = O(x^4)$ e non basta a determinare la parte principale di f. Servono quindi sviluppi di ordine superiore a 4: usando $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ e $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = -2x^2$ ottengo

$$f(x) = \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big)^4 - 1 + 2x^2 - 2x^4 + O(x^6)\,,$$

usando quindi lo sviluppo $(1 + t)^4 = 1 + 4t + 6t^2 + O(t^3)$ con $t = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= 4t + 6t^2 + O(t^3) + 2x^2 - 2x^4 + O(x^6) \\ &= -2x^2 + \tfrac{1}{6}x^4 + O(x^6) + 6\big(- \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^2 + 2x^2 - 2x^4 = -\tfrac{1}{3}x^4 + O(x^6) \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = -\tfrac{1}{3}x^4 \quad \text{per } a = 4.$$

2 Consideriamo la funzione

$$f(x) := \int_0^{x^2} t - \frac{2t^9}{t^8 + 1}\, dt\,.$$

a) Scrivere la derivata di $f(x)$.
b) Disegnare il grafico di $f(x)$.
c) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

Soluzione. a) Indico con g la funzione da integrare nella definizione di f, vale a dire

$$g(t) := t - \frac{2t^9}{t^8 + 1} = \frac{t(1 - t^8)}{t^8 + 1}\,.$$

Per una formula vista a lezione, la derivata di f è

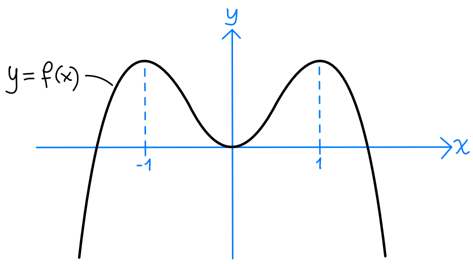
$$f'(x) = g(x^2)\,(x^2)' = \frac{2x^3(1 - x^{16})}{x^{16} + 1}\,. \tag{2}$$

b) L'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$ perché l'integrale che definisce $f(x)$ è un integrale in senso proprio per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre la funzione f è chiaramente pari (sostituendo x con $-x$ l'estremo di integrazione x^2 non cambia) e quindi basta studiarla per $x \geq 0$.
Osservo che a meno di non trovare una formula esplicita per la primitiva di g, cosa che sembra complicata, non è possibile studiare il segno di f.
Per $t \to +\infty$ vale che $g(t) \sim -t$, quindi $\lim g(t) = -\infty$ e siccome $-\infty$ è negativo ottengo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} g(t)\, dt = -\infty\,.$$

Osservo adesso che il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno del fattore $1 - x^{16}$, che è positivo per $x^{16} \leq 1$, vale a dire $0 \leq x \leq 1$. Dunque $f(x)$ cresce nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ e decresce nella semiretta $x \geq 1$; in particolare 1 è il punto di massimo assoluto (ma in mancanza di una primitiva di g non posso calcolare esplicitamente il valore massimo $f(1)$), mentre 0 è un punto di minimo locale; inoltre $f(0) = 0$ perché per $x = 0$ gli estremi di integrazione nella definizione di $f(x)$ coincidono.

Sulla base di queste informazioni traccio il disegno sotto (le proporzioni non sono rispettate):



c) Il fatto che $g(t) \sim -t$ per $t \to +\infty$ suggerisce che, per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \int_0^{x^2} g(t)\, dt \sim \int_0^{x^2} -t\, dt = -\tfrac{1}{2}x^4 \quad \Rightarrow \quad \text{p.p.}(f(x)) = -\tfrac{1}{2}x^4 .$$

Dimostro rigorosamente questa formula usando il teorema di de L'Hôpital e la formula per f' data in (2):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{-x^4/2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{-2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^{16}}{-1 - x^{16}} = 1 .$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. Osservo che la derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = \frac{2x^2(3 - 16\,x^{16} - 3\,x^{32})}{(x^{16}+1)^2}$$

e studiandone il segno per $x \geq 0$ ottengo che f è convessa nell'intervallo $0 \leq x \leq x_0$ e concava nella semiretta $x \geq x_0$, dove

$$x_0 := \sqrt[16]{\frac{\sqrt{265} - 16}{3}} \simeq 0{,}86 .$$

$\boxed{3}$ Dato $a > 0$, considero l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > 1$ e $x^{3/2} \leq y \leq f(x)$ dove

$$f(x) := \frac{(x^3+1)^{a+1/2}}{(x^3-1)^a} .$$

a) Disegnare l'insieme A.

b) Dire per quali a l'area di A è finita.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Osservo innanzitutto che la funzione $f(x)$ è definita solo per $x > 1$. Infatti le potenze coinvolte hanno esponente reale e positivo, e quindi le basi devono essere positive: dunque deve essere $x^3 + 1 \geq 0$, cioè $x \geq -1$, e $x^3 - 1 > 0$ (non è ammissibile avere 0 al denominatore), cioè $x > 1$. Inoltre

$$f(x) > x^{3/2} \quad \text{per ogni } x > 1, \tag{3}$$

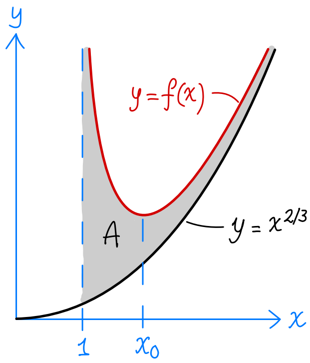
infatti il numeratore della frazione che dà $f(x)$ soddisfa $(x^3+1)^{a+1/2} > (x^3)^{a+1/2} = x^{3a+3/2}$, mentre il denominatore soddisfa $(x^3-1)^a < (x^3)^a = x^{3a}$.

Osservo poi che la funzione $f(x)$ è sempre positiva e tende a $+\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to 1^+$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^3+1)^{a-1/2}(x^3-1)^{-a-1}x^2(x^3 - 4a - 1)$$

ottengo che $f(x)$ è decrescente per $1 < x \leq x_0$ e crescente per $x \geq x_0 := \sqrt[3]{4a+1}$; in particolare x_0 è il punto di minimo assoluto di $f(x)$ per $x > 1$.

Usando il grafico della funzione elementare $x^{3/2}$, che è noto, le informazioni date sopra a proposito del grafico di $f(x)$ e la disuguaglianza (3) ottengo il disegno di A riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



b) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_1^{+\infty} \underbrace{f(x) - x^{3/2}}_{g(x)}\, dx\,.$$

Osservo adesso che questo integrale è improprio sia a $+\infty$ che in 1 (ricordo che $f(x)$ non è definita per $x = 1$) e vale $+\infty$ oppure un numero finito e positivo perché l'integranda $g(x)$ è positiva. Per capire quando è finito lo spezzo come somma di due integrali impropri semplici,

$$\text{area}(A) = \underbrace{\int_1^2 g(x)\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty} g(x)\, dx}_{I_2}\,,$$

e quindi l'area di A è finita quando I_1 e I_2 sono entrambi finiti.

Per studiare il comportamento di I_1 osservo che, per $x \to 1$,

$$g(x) = \frac{(x^3+1)^{a+1/2}}{(x^2+x+1)^a (x-1)^a} - x^{3/2} \sim \frac{2^{a+1/2}}{3^a (x-1)^a}$$

(nel secondo passaggio ho usato la scomposizione $x^3 - 1 = (x^2+x+1)(x-1)$, nel terzo ho usato il fatto che $x^3 + 1 \to 2$ e $x^2 + x + 1 \to 3$).

Usando ora il secondo criterio del confronto asintotico ottengo

$$I_1 = \int_1^2 g(x)\, dx \approx \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^a}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{y^a}\, dy$$

(nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $x = y + 1$, in modo da ricondurmi ad un integrale improprio in 0) e dunque

$$I_1 < +\infty \quad \text{per } a < 1.$$

Per studiare il comportamento di I_2 trovo la parte principale di $g(x)$ per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= (x^3+1)^{a+1/2}(x^3-1)^{-a} - x^{3/2} \\
&= x^{3/2}\big(1 + x^{-3}\big)^{a+1/2}\big(1 - x^{-3}\big)^{-a} - x^{3/2} \\
&= x^{3/2}\Big(1 + \big(a + \tfrac{1}{2}\big)x^{-3} + O\big(x^{-6}\big)\Big)\Big(1 + ax^{-3} + O\big(x^{-6}\big)\Big) - x^{3/2} \\
&\sim \big(2a + \tfrac{1}{2}\big)x^{-3/2}
\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho raccolto x^3 nelle basi $x^3 + 1$ e $x^3 - 1$, e nel terzo ho usato due volte lo sviluppo $(1+t)^b = 1 + bt + O(t^2)$).

Quindi, per il secondo criterio del confronto asintotico,

$$I_2 = \int_2^{+\infty} g(x)\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx < +\infty \quad \text{per ogni } a.$$

Concludo infine che A ha area finita se e solo se $a < 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO A (prima variante)

1. Calcolare l'area del triangolo T delimitato dagli assi e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} nel punto di ascissa $x = 1$.
   SOLUZIONE. La retta tangente è $y = \frac{1}{e}(2 - x)$, l'altezza e la base di T sono $\frac{2}{e}$ e 2, l'area è $\frac{2}{e}$.

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \sqrt{\log(4^x - 1)}$.
   SOLUZIONE. Deve essere $4^x - 1 \geq 1$, vale a dire $x \geq \frac{1}{2}$.

3. Scrivere il polinomio di Taylor in 0 all'ordine 4 di $f(x) := \exp(2x^2)\cos(2x)$.
   SOLUZIONE. $P_4(x) := 1 - \frac{4}{3}x^4$.

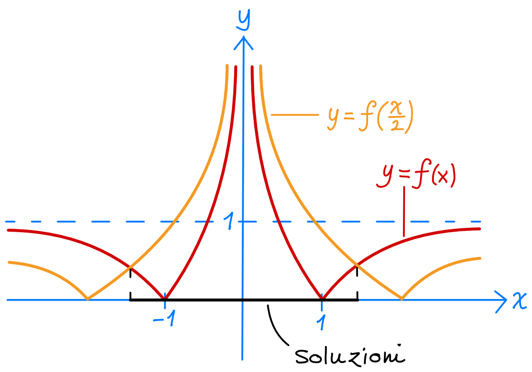
4. Dire per quali a vale che $x^2 \log(2 + e^{-x}) = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.
   SOLUZIONE. $a > 2$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty \frac{a^x}{1 + x^2}\, dx$ è finito.
   SOLUZIONE. $0 < a \leq 1$.

6. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + \sqrt{n!}}$ converge ad un numero finito.
   SOLUZIONE. Applicando il criterio del rapporto per le serie di potenze si ottiene
   $$L := \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{n+1}} = 0\,,$$
   e quindi il raggio di convergenza è $R = 1/L = +\infty$; la serie converge per ogni x.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{1}{x(4 + t^2)}$ tale che $x(2) = 1$.
   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili: $x(t) = \sqrt{\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + 1 - \frac{\pi}{4}}$.

8. Sia $f(x) := \left|\dfrac{1}{x^2} - 1\right|$. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq f(\frac{1}{2}x)$.
   [*Nel disegno indicare i punti $x = \pm 1$.*]
   SOLUZIONE.



PRIMA PARTE, GRUPPO B (prima variante)

1. Dire per quali $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $r > 0$ vale l'identità $\sin x - \sqrt{3} \cos x = r \sin(x + \alpha)$.
   SOLUZIONE. $r = 2$, $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.

2. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{x} + 2 \log x}_{a}\,, \quad \underbrace{\frac{6}{2^x}}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{\log x}{\log(\log x)}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{2^x (x+1)}{4^x + x}}_{d}\,.$$
   SOLUZIONE. $b \ll d \ll c \ll a$.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\log(1 + x^4) - x^4}{\exp(x^2)}$.
   SOLUZIONE. $\text{p.p.}(f(x)) = -\frac{1}{2} x^8$.

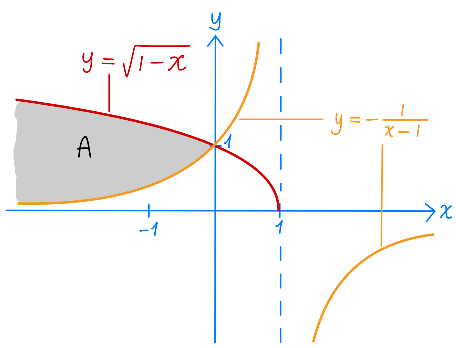
4. Data la funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{dt}{2 + \cos t}$, calcolare $f'(\sqrt{\pi})$.
   SOLUZIONE. La derivata è $f'(x) = \dfrac{2x}{2 + \cos(x^2)}$ e quindi $f'(\sqrt{\pi}) = 2\sqrt{\pi}$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'area compresa tra gli assi e il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{1 + a^x}$ è finita.
   SOLUZIONE. L'area è data dall'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + a^x}$ ed è finita per $a > 1$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n$ (per gli x per cui converge).
   SOLUZIONE. Ci si riconduce alla serie geometrica: la serie converge per $|x| < \frac{1}{2}$ e vale che
$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1 - 2x} - 1 - 2x = \frac{4x^2}{1 - 2x}\,.$$

7. Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale $\ddot{x} - \dot{x} + x = t^2$
   SOLUZIONE. Cerco una soluzione del tipo $x(t) = at^2 + bt + c$ e trovo $x(t) = t^2 + 2t$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $-\dfrac{1}{x - 1} \le y \le \sqrt{1 - x}$.
   [*Nel disegno indicare i punti* $x = \pm 1$.]
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

$\boxed{1}$ Dato a reale e *positivo*, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + (a^4 + 4)x = e^t + e^{-2\sqrt{2}t} \qquad (*)$$

a) Risolvere (*) per ogni $a \neq \sqrt{2}$.
b) Risolvere (*) per $a = \sqrt{2}$.
c) Per $a = \sqrt{2}$, trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

SOLUZIONE. a), b) Ricordo che la soluzione generale dell'equazione (*) è

$$x = x_{\text{om}} + x_1 + x_2$$

dove

(i) x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + 4a\dot{x} + (a^4 + 4)x = 0$;
(ii) x_1 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} + 4a\dot{x} + (a^4 + 4)x = e^t$;
(iii) x_2 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} + 4a\dot{x} + (a^4 + 4)x = e^{-2\sqrt{2}t}$.

Passo 1: calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea in (i) è

$$\lambda^2 + 4a\lambda + a^4 + 4 = 0\,,$$

e le soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = -2a \pm \sqrt{4a^2 - a^4 - 4} = -2a \pm \sqrt{-(a^2 - 2)^2}\,.$$

Distinguo quindi due casi:

- se $a^2 - 2 = 0$, ovvero se $a = \sqrt{2}$ (ricordo che a è sempre positivo), ho che $\lambda_1 = \lambda_2 = -2\sqrt{2}$, e quindi,
$$x_{\text{om}}(t) = e^{2\sqrt{2}t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a \neq \sqrt{2}$ ho che $\lambda_{1,2} = -2a \pm i(a^2 - 2)$ e quindi, posto $\omega := a^2 - 2$,
$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: calcolo di x_1. Siccome 1 non è mai soluzione dell'equazione caratteristica, posso sempre trovare una soluzione particolare dell'equazione in (ii) della forma $x_1 = ce^t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $c(a^4 + 4a + 5) = 1$, e quindi

$$x_1(t) = \tfrac{1}{a^4+4a+5} e^t\,.$$

(Il fatto che il denominatore $a^4 + 4a + 5$ non si annulli per alcun a segue dalla teoria, ma non è affatto evidente.)

Passo 3: calcolo di x_2 per $a \neq \sqrt{2}$. Il coefficiente $-2\sqrt{2}$ non è mai una soluzione dell'equazione caratteristica per $a \neq \sqrt{2}$, e quindi posso sempre trovare una soluzione particolare dell'equazione in (iii) della forma $x_2 = ce^{-2\sqrt{2}t}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $c(a^4 - 8\sqrt{2}a + 12) = 1$, e quindi

$$x_2(t) = \tfrac{1}{a^4 - 8\sqrt{2}a + 12} e^{-2\sqrt{2}t}\,.$$

Passo 4: calcolo di x_2 per $a = \sqrt{2}$. In questo caso il coefficiente $-2\sqrt{2}$ coincide con le due soluzioni dell'equazione caratteristica, e quindi posso trovare una soluzione particolare dell'equazione in (iii) della forma $x_2 = ct^2 e^{-2\sqrt{2}t}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $2c = 1$, e quindi

$$x_2(t) = \tfrac{1}{2} t^2 e^{-2\sqrt{2}t}\,.$$

Riassumendo, per $a \neq \sqrt{2}$ la soluzione generale di (*) è

$$x(t) = e^{-2at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) + \tfrac{1}{a^4+4a+5} e^t + \tfrac{1}{a^4 - 8\sqrt{2}a + 12} e^{-2\sqrt{2}t}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, mentre per $a = \sqrt{2}$ è

$$x(t) = e^{-2\sqrt{2}t}\big(c_1 + c_2 t + \tfrac{1}{2}t^2\big) + \tfrac{1}{9+4\sqrt{2}} e^t\,.$$

c) Per $a \neq \sqrt{2}$ si ha inoltre che

$$x(t) = e^{-2\sqrt{2}t}\big(c_2 - 2\sqrt{2}c_1 + (1 - 2\sqrt{2}c_2)t - \sqrt{2}t^2\big) + \tfrac{1}{9+4\sqrt{2}}e^t\,,$$

e quindi, imponendo che $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{9+4\sqrt{2}} = 0 \\ c_2 - 2\sqrt{2}c_1 + \frac{1}{9+4\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene infine $c_1 = -\frac{1}{9+4\sqrt{2}}$ e $c_2 = -\frac{1+2\sqrt{2}}{9+4\sqrt{2}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Dato a reale e *positivo*, consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{1}{x(x+1)^a - x^{a+1}}\,,$$

e indichiamo con A la figura piana costituita dai punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq f(x)$, e con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse verticale di equazione $x = 1$.

a) Per $a = 2$, disegnare A e V e calcolare l'area di A.

b) Dire per quali a l'area di A è finita.

c) Dire per quali a il volume di V è finito.

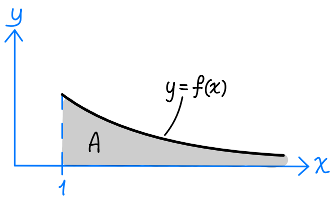
SOLUZIONE. a) Tenendo conto della definizione di A, come prima cosa studio la funzione

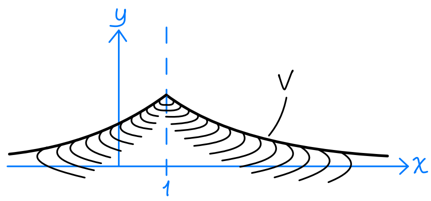
$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^2 - x^3} = \frac{1}{x(2x+1)}$$

limitatamente alla semiretta $x \geq 1$: osservo che $f(x)$ è ben definita e positiva per ogni $x \geq 1$, tende a 0 per $x \to +\infty$, e poiché la derivata

$$f'(x) = -\frac{4x+1}{(2x^2+x)^2}$$

è chiaramente negativa per $x \geq 1$, la funzione è sempre decrescente.
Sulla base di queste informazioni traccio i disegni riportati sotto (al solito, le proporzioni non sono rispettate).





L'area di A è data quindi dall'integrale improprio semplice

$$\text{area}(A) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx\,. \tag{1}$$

Poiché

$$f(x) = \frac{1}{x(2x+1)} \sim \frac{1}{2x^2} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

questo integrale improprio è finito. Per capire quanto vale devo trovare una primitiva di $f(x)$, e per farlo cerco una scomposizione di $f(x)$ della forma

$$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+1}\,;$$

facendo i conti ottengo $A = 1$ e $B = -2$ e quindi

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1}\,dx = \log x - \log(2x+1) + c = \log\Big(\frac{x}{2x+1}\Big) + c\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\text{area}(A) = \int_1^\infty f(x)\,dx &= \Big|\log\Big(\frac{x}{2x+1}\Big)\Big|_1^\infty \\ &= \lim_{x\to+\infty}\log\Big(\frac{x}{2x+1}\Big) - \log\Big(\frac{1}{3}\Big) \\ &= \log\Big(\frac{1}{2}\Big) - \log\Big(\frac{1}{3}\Big) = \log\Big(\frac{3}{2}\Big) \simeq 0{,}405\,.\end{aligned}$$

b) Dato $a > 0$ la funzione $f(x)$ è ben definita e strettamente positiva per ogni $x \geq 1$, e quindi l'area di A è data, di nuovo, dall'integrale improprio semplice in (1).

Per capire come si comporta questo integrale cerco la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$: ricordando che $(1+t)^a - 1 \sim at$ per $t \to 0$ ottengo

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)^a - x^{a+1}} = \frac{1}{x^{a+1}\big[\big(1+\frac{1}{x}\big)^a - 1\big]} \sim \frac{1}{ax^a} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Quindi

$$\text{area}(A) = \int_1^\infty f(x)\,dx \approx \int_1^\infty \frac{1}{x^a}\,dx$$

e in particolare l'area di A è finita se e solo se $a > 1$.

c) Voglio utilizzare la nota formula per il volume del solido ottenuto per rotazione attorno all'asse $x = 0$. Per farlo devo traslare A verso sinistra di 1, cioè devo applicare detta formula alla funzione $f(x+1)$:

$$\text{volume}(V) = \int_0^\infty 2\pi x\, f(x+1)\,dx = \int_1^\infty 2\pi(y-1)\,f(y)\,dy \approx \int_1^\infty \frac{dy}{y^{a-1}}\,,$$

e quindi il volume di V è finito se e solo se $a > 2$ (nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = x+1$, e nel terzo ho usato che $f(y) \sim \frac{1}{ay^a}$ e $y - 1 \sim y$ per $y \to +\infty$).

3 Dato a reale e *positivo*, consideriamo la serie

$$S(a) := \sum_{n=4}^\infty \frac{(-1)^n n}{a^n + 1}\,.$$

a) Discutere il comportamento di questa serie al variare di a.

b) Calcolare $S(4)$ con errore inferiore a 10^{-4}.

Soluzione. a) Indico con a_n l'addendo n-esimo della serie $S(a)$, e con $S_N(a)$ la somma parziale N-esima, vale a dire

$$a_n := \frac{(-1)^n n}{a^n+1}\,, \quad S_N(a) := \sum_{n=4}^N a_n = \sum_{n=4}^N \frac{(-1)^n n}{a^n+1}\,.$$

Osservo che questi addendi hanno segno variabile (il numero $(-1)^n$ vale 1 quando n è pari e -1 quando n è dispari) e quindi non posso usare nessuno dei criteri che funzionano solo per le serie a segno costante, come ad esempio i criteri di confronto asintotico.

Osservo per cominciare che per $a < 1$ vale $a^n \to 0$ per $n \to +\infty$ e quindi

$$|a_n| = \frac{n}{a^n+1} \sim n\,,$$

mentre per $a = 1$ vale $a^n = 1$ per ogni n e quindi

$$|a_n| = \frac{n}{2}\,;$$

in entrami i casi a_n non tende a 0 per $n \to \infty$, e quindi la serie non può convergere ad un numero finito (ma non so specificare se diverge a $+\infty$, a $-\infty$, oppure non esiste).

Per capire il comportamento per $a > 1$ uso il criterio del rapporto: in questo caso $a^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, quindi $a^n + 1 \sim a^n$ e

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{a^{n+1}+1}\cdot\frac{a^n+1}{n} \sim \frac{n}{a^{n+1}}\cdot\frac{a^n}{n} = \frac{1}{a}\,,$$

e siccome $\frac{1}{a} < 1$ la serie converge.

b) Fissato $a = 4$, considero la funzione $f(x) := x\,4^{-x}$ e osservo che

$$|a_n| = \frac{n}{4^n + 1} \leq \frac{n}{4^n} = f(n) \quad \text{per ogni } n \text{ intero;}$$

inoltre studiando il segno della derivata $f'(x) = (1 - x\,\log 4)\,4^{-x}$ trovo che $f(x)$ è decrescente per $x \geq 1$, e di conseguenza vale la seguente stima, vista a lezione:

$$\big|S(4) - S_N(4)\big| \leq \int_N^\infty f(x)\,dx = \int_N^\infty x\,4^{-x}\,dx = \underbrace{\left(\frac{N}{\log 4} + \frac{1}{(\log 4)^2}\right)4^{-N}}_{e(N)}$$

(nell'ultimo passaggio ho integrato per parti).

Uso ora la calcolatrice per calcolare $e(N)$ a partire da $N = 5$, e scopro che $e(8) < 10^{-4}$. Quindi la somma parziale $S_8(4)$ approssima il valore della serie $S(4)$ con errore inferiore a 10^{-4}. Sempre usando la calcolatrice ottengo che

$$S_8(4) = \sum_{n=4}^{8} a_n = \frac{4}{4^4+1} - \frac{5}{4^5+1} + \frac{6}{4^6+1} - \frac{7}{4^7+1} + \frac{8}{4^8+1} = 0{,}011845 \pm 10^{-6}\,,$$

e quindi

$$S(4) = 0{,}011845 \pm 10^{-4}\,.$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. È possibile dimostrare che per $a \leq 1$ la serie $S(a)$ non solo non converge ad un numero finito, ma più precisamente non esiste. Si riesce infatti a far vedere che la successione delle somme parziali S_N con N pari diverge a $+\infty$, mentre la successione S_N con N dispari diverge a $-\infty$.

Prima parte (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log\left(x - \sqrt{x+2}\right)$.
   Soluzione. La funzione è definita per $x > 2$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log x}}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^4\, e^x}{x^2 + \log(1-x^2)}$.

   Soluzione. a) 0; b) $+\infty$; c) -2.

3. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(-2x^2 + 4x + 2)$ è concava.
   Soluzione. $\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}$.

4. Usando il fatto che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\, dt = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-9(x+3)^2\big)\, dx$.

   Soluzione. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x^a}\right)}{x^a + x^{2a}}\, dx$ è finito.

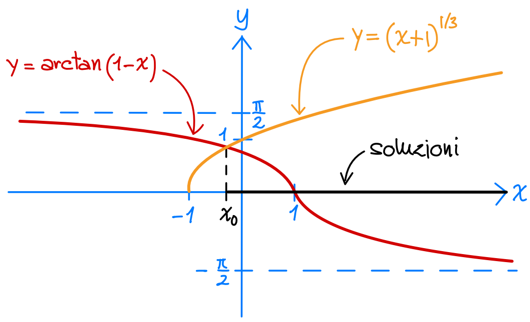
   Soluzione. $a > \dfrac{1}{3}$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}-1}{2^n}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   Soluzione. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}-1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2x^2-2}{2-x^2}$

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2te^x}{1+t^2}$ che soddisfa $x(0) = 0$.
   Soluzione. Equazione a variabili separabili: $x(t) = -\log\left(1 - \log(1+t^2)\right)$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan(1-x) \le (x+1)^{1/3}$.
   Soluzione.



SECONDA PARTE

$\boxed{1}$ Consideriamo la famiglia di funzioni $f(x) := x^4 - 15x^2 + ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Trovare a, b in modo tale che il grafico della funzione $f(x)$ sia tangente nel punto $x = 1$ alla retta di equazione $y = -26\,x + 52$.

b) Disegnare la funzione trovata al punto a) ristretta all'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$.

c) Considerare tutti i rettangoli R con assi paralleli agli assi coordinati, un vertice nell'origine, ed il vertice opposto sul grafico della funzione f trovata al punto a) ristretta all'intervallo I; tra questi rettangoli trovare quello di area massima.

SOLUZIONE. a) Dire che i grafici delle funzioni $f(x)$ e di $g(x) := -26\,x + 52$ sono tangenti per $x = 1$ equivale a dire che i grafici si intersecano in questo punto, cioè $f(1) = g(1)$, e che le rette tangenti hanno la stessa pendenza, cioè $f'(1) = g'(1)$. Svolgendo i calcoli la prima condizione diventa $a + b - 14 = 26$, vale a dire $a + b = 40$, e la seconda diventa $a - 26 = -26$, cioè $a = 0$. Pertanto la funzione cercata è quella corrispondente ai parametri $a = 0$ e $b = 40$, ovvero

$$f(x) = x^4 - 15\,x^2 + 40\,.$$

Da qui in poi f indica questa specifica funzione.

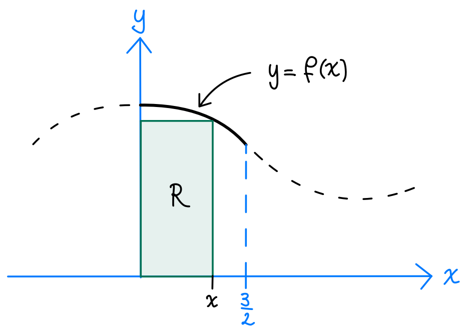
b) Indico con I l'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$; la funzione f è definita su tutto I; la derivata

$$f'(x) = 4x^3 - 30\,x = 2x(x^2 - 15)$$

è negativa in I e quindi f è decrescente in questo intervallo, e la derivata seconda

$$f''(x) = 12\,x^2 - 30 = 6(2x^2 - 5)$$

è negativa in I e quindi f è concava. Usando queste informazioni traccio il grafico sotto (le proporzioni non sono rispettate).



c) Dato un rettangolo R come richiesto (in verde nella figura sopra), indico con x l'ascissa del vertice che sta sul grafico di f, e quindi la base di R è x mentre l'altezza è $f(x)$ (notare che x e $f(x)$ sono positivi), e pertanto l'area di R è

$$a(x) = x\,f(x) = x^5 - 15\,x^3 + 40\,x\,.$$

Si tratta ora di trovare il punto di massimo di $a(x)$ al variare di x nell'intervallo I. Per farlo confronto i valori di a negli estremi di I, cioè 0 e $\frac{3}{2}$, e nei punti di I dove si annulla la derivata

$$a'(x) = 5x^4 - 45\,x^2 + 40\,,$$

vale a dire $x = 1$ (per risolvere l'equazione $a'(x) = 0$ applico la sostituzione $t = x^2$ e ottengo un'equazione di secondo grado con soluzioni $t = 1$ e $t = 8$, e quindi $x = \pm 1$ e $x = \pm 2\sqrt{2}$; di queste soluzioni solo $x = 1$ appartiene a I). Siccome $a(0) = 0$, $a(1) = 36$ e $a(3/2) = 17 \pm 0{,}5$, il valore massimo di $a(x)$ per $x \in I$ vale 36 e viene raggiunto per $x = 1$.

$\boxed{2}$ a) Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 in 0 della funzione $\tan x$.

b) Per ogni $a > 0$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \tan(x^a) - \tan(\sin x)$.[1]

SOLUZIONE. a) Calcolo lo sviluppo di Taylor cercato direttamente a partire dalla definizione:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= 1 + \tan^2 x\,,\\ (\tan x)'' &= (1 + \tan^2 x)' = 2\tan x\,(\tan x)' = 2\tan x + 2\tan^3 x\,,\\ (\tan x)''' &= (2\tan x + 2\tan^3 x)' = (2 + 6\tan^2 x)\,(\tan x)' = (2 + 6\tan^2 x)\,(1 + \tan^2 x)\,,\end{aligned}$$

e quindi per $x = 0$ vale che $(\tan x)' = 1$, $(\tan x)'' = 0$ e $(\tan x)''' = 2$; ne segue che lo sviluppo di Taylor di $\tan x$ all'ordine 3 in 0 è

$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + O(x^4)\,. \tag{1}$$

(Siccome la funzione $\tan x$ è dispari, potrei sostituire il resto $O(x^4)$ con $O(x^5)$, ma questo non dà particolari vantaggi nel seguito.)

b) Per x che tende a 0 vale che $\tan x \sim x$, quindi

$$\tan(x^a) \sim x^a\,, \quad \tan(\sin x) \sim \sin x \sim x\,,$$

e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = \text{p.p.}\big(\tan(x^a) - \tan(\sin x)\big) = \begin{cases} x^a & \text{se } a < 1, \\ -x & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Invece per $a = 1$ le parti principali dei due addendi che formano f si cancellano, e ho bisogno di sviluppi più precisi. Usando lo sviluppo (1) con $\sin x$ al posto di x e ottengo

$$\tan(\sin x) = \sin x + \tfrac{1}{3}(\sin x)^3 + O((\sin x)^4)\,,$$

usando poi gli sviluppi $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$, $\sin x = x + O(x^3)$ e $\sin x \sim x$ ottengo

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &= \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)\big) + \tfrac{1}{3}\big(x + O(x^3)\big)^3 + O(x^4)\\ &= x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5) + \tfrac{1}{3}\big(x^3 + O(x^5)\big) + O(x^4) = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho sviluppato $(x + O(x^3))^3$ tramite la formula del binomio di Newton). Grazie a (1) e a quest'ultima formula ottengo infine che, per $a = 1$,

$$f(x) = \tan x - \tan(\sin x) = \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)\,,$$

e quindi $\text{p.p.}(f(x)) = \frac{1}{6}x^3$.

OSSERVAZIONI. Lo sviluppo di $\tan x$ (punto a)) può essere ottenuto anche partendo dagli sviluppi (noti) di $\sin x$, $\cos x$ e $(1 + t)^{-1}$:

$$(\cos x)^{-1} = \big(1 \underbrace{- \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)}_{t}\big)^{-1} = 1 - t + O(t^2) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\,,$$

e quindi

$$\tan x = \sin x\,(\cos x)^{-1} = \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)\big)\big(1 + \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big) = x + \tfrac{1}{3}x^3 + O(x^5)\,.$$

3 Sia S un quarto di un cerchio di raggio 1, sia R il raggio che divide S in due, e sia R' la retta ortogonale a R che passa per il centro del cerchio.

a) Disegnare S, R ed R'.

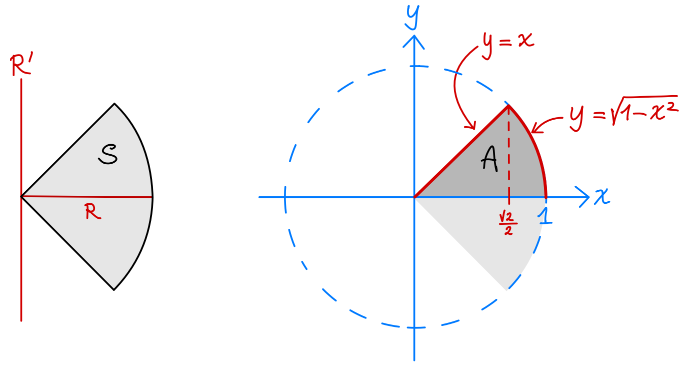
b) Calcolare il volume del solido V ottenuto facendo ruotare S attorno al raggio R.

c) Calcolare il volume del solido V' ottenuto facendo ruotare S attorno alla retta R'.

SOLUZIONE. a) S, R ed R' sono disegnati sotto a sinistra; a destra li ridisegno facendo coincidere il centro del cerchio con l'origine degli assi, R' con l'asse delle y, e R con il segmento $[0, 1]$

[1] La funzione $f(x)$ è definita per $x \geq 0$.

sull'asse delle x.



b) Come si vede dalla figura sopra a destra, il solido V può essere ottenuto ruotando attorno all'asse delle x la figura piana A delimitata dall'asse delle x e dal grafico della funzione f data da

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{per } 0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{per } \frac{\sqrt{2}}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Usando la prima formula sul volume dei solidi di rotazione vista a lezione ottengo

$$\begin{aligned} \text{volume}(V) &= \pi \int_0^1 \pi (f(x))^2\, dx \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} x^2\, dx + \pi \int_{\sqrt{2}/2}^1 (1-x^2)\, dx \\ &= \pi \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{\sqrt{2}/2} + \pi \left| x - \frac{x^3}{3} \right|_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

c) Il volume del solido V' è il doppio di quello del solido ottenuto facendo ruotare A attorno all'asse delle y, che a sua volta può essere calcolato tramite la seconda formula sul volume dei solidi di rotazione:

$$\begin{aligned} \text{volume}(V') &= 4\pi \int_0^1 x\, f(x)\, dx \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} x^2\, dx + 4\pi \int_{\sqrt{2}/2}^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx \\ &= 4\pi \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^{\sqrt{2}/2} + 4\pi \left| -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right|_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio ho trovato la primitiva di $x\sqrt{1-x^2}$ usando il cambio di variabile $t = 1-x^2$.)

<u>OSSERVAZIONI</u>. Il volume di V' può essere calcolato a partire da quello di V osservando che V' è uguale ad una sfera S di raggio 1 a cui sono stati tolti due solidi uguali a V, e quindi

$$\text{volume}(V') = \text{volume}(S) - 2\,\text{volume}(V) = \frac{4\pi}{3} - 2\,\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}\,.$$

Un approccio alternativo ai punti b) e c) è questo: si fa coincidere la retta R' con l'asse delle x, il raggio R con il segmento $[0,1]$ sull'asse delle y, e si considera la figura piana E delimitata a destra dall'asse delle x, sopra dal grafico di $f(x) := \sqrt{1-x^2}$, e sotto dal grafico di $g(x) = x$. In questo caso V coincide con il solido ottenuto ruotando E attorno all'asse delle y, e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_0^{\sqrt{2}/2} 2\pi x\, f(x)\, dx - \int_0^{\sqrt{2}/2} 2\pi x\, g(x)\, dx = \cdots\,, \tag{2}$$

mentre V' è il doppio del solido ottenuto ruotando E attorno all'asse delle x, e quindi

$$\text{volume}(V') = 2\left[\int_0^{\sqrt{2}/2} \pi (f(x))^2\, dx - \int_0^{\sqrt{2}/2} \pi (g(x))^2\, dx \right] = \cdots \tag{3}$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Consideriamo la funzione $f(x) := \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$. Trovare la formula della funzione inversa $f^{-1}(y)$.

   SOLUZIONE. $f^{-1}(y) = \log\left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)$.

2. Trovare i *valori* massimi e minimi della funzione $f(x) := \dfrac{x^2-28}{(x+1)^4}$, e se non esistono gli estremi inferiori e superiori dei valori.

   SOLUZIONE. Il valore massimo è $f(-7) = \frac{21}{6^4} \simeq 0{,}016$; il valore minimo non esiste e l'estremo inferiore è $-\infty$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:

$$\underbrace{\sqrt{\frac{x^7}{x^2+1}}}_{a}\,, \quad \underbrace{\frac{2^x+1}{8^x+1}}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{6^x+3}}_{c}\,, \quad \underbrace{x^2\log(1+e^x)}_{d}\,.$$

   SOLUZIONE. $c \ll b \ll a \ll d$.

4. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 6 (in 0) della funzione $f(x) := \dfrac{1+x^3}{\sqrt{1+4x^3}}$.

   SOLUZIONE. $P_6(x) = 1 - x^3 + 4x^6$.

5. Calcolare velocità e accelerazione di un punto con legge oraria $P = \big(\exp(t^2),\, t^3+1\big)$.

   SOLUZIONE. $\vec{v} = \big(2t\exp(t^2),\, 3t^2\big)$; $\vec{a} = \big((2+4t^2)\exp(t^2),\, 6t\big)$.

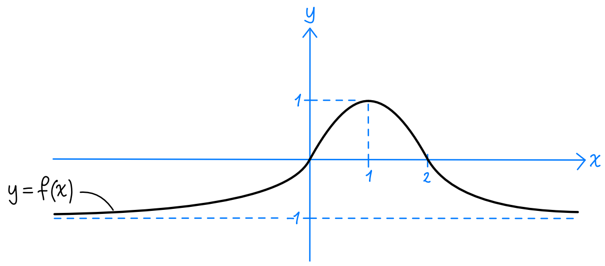
6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n^{2a}(1+n)}$ converge a un numero finito.

   SOLUZIONE. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^{2a+1}}$ e converge per ogni $a \in \mathbb{R}$.

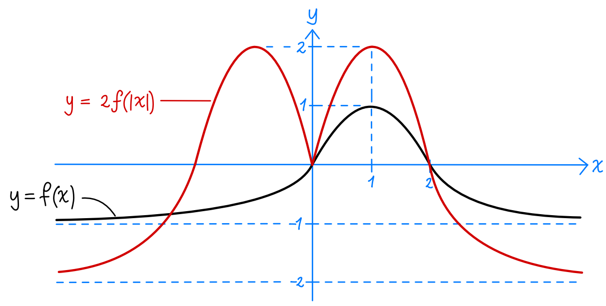
7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = \exp(t - t^2)$.

   SOLUZIONE. Equazione differenziale lineare del primo ordine: $x(t) = e^{-t^2}(e^t + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. Nella figura sotto è disegnato il grafico della funzione $f(x)$. Aggiungere il grafico di $2\,f(|x|)$.



   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

$\boxed{1}$ Per ogni $a > 0$, trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$a\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 8t + e^{-2t}\,. \tag{*}$$

[*Fare attenzione al caso* $a = 1$.]

SOLUZIONE. L'equazione (*) è una equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti, e la soluzione generale di (*) si scrive come

$$x = x_{\rm om} + x_1 + x_2$$

dove

(i) $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea $a\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$;

(ii) x_1 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $a\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 8t$;

(iii) x_2 è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $a\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = e^{-2t}$.

Passo 1: calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea in (i) è

$$a\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0\,, \tag{1}$$

e le soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1-a}}{a}\,.$$

Sulla base del segno del discriminante distinguo tre casi:

- se $0 < a < 1$ le soluzioni λ_1, λ_2 sono reali e positive, e quindi
$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a = 1$ ho che $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, e quindi
$$x_{\rm om}(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-2t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a > 1$ ho che $\lambda_{1,2} = -\frac{2}{a} \pm \omega i$ con $\omega := \frac{2}{a}\sqrt{a-1}$, e quindi
$$x_{\rm om}(t) = e^{-2t/a}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Passo 2: calcolo di x_1. Posso sempre trovare una soluzione particolare dell'equazione in (ii) della forma $x_1 = bt + c$. Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $4b = 8$ e $4b + 4c = 0$, cioè $b = 2$ e $c = -2$, e quindi

$$x_1(t) = 2t - 2\,.$$

Passo 3: calcolo di x_2. Per trovare x_2 devo prima capire per quali a il coefficiente -2 nel termine noto e^{-2t} risolve l'equazione caratteristica (1): sostituendo -2 al posto di λ, la (1) diventa $4a - 4 = 0$, ovvero $a = 1$. Distinguo quindi due casi:

- se $a \neq 1$ posso trovare una soluzione particolare dell'equazione in (iii) della forma $x_2 = ce^{-2t}$; Sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $c(4a - 4) = 1$, e quindi
$$x_2(t) = \tfrac{1}{4a-4} e^{-2t}\,.$$
- se $a = 1$ il coefficiente -2 coincide con *entrambe* le soluzioni dell'equazione caratteristica (1), e quindi posso trovare una soluzione particolare dell'equazione in (iii) della forma $x_2 = ct^2 e^{-2t}$; sostituendo questa espressione nell'equazione ottengo che quest'ultima è soddisfatta se $2c = 1$, e quindi
$$x_2(t) = \tfrac{1}{2} t^2 e^{-2t}\,.$$

Riassumendo, per $0 < a < 1$ la soluzione generale di (*) è

$$x(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + 2t - 2 + \frac{1}{4a-4} e^{-2t} & \text{per } 0 < a < 1, \\ \big(c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} t^2\big)\, e^{-2t} + 2t - 2 & \text{per } a = 1, \\ e^{-2t/a}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) + 2t - 2 + \frac{1}{4a-4} e^{-2t} & \text{per } a > 1. \end{cases}$$

2 Una ditta deve organizzare la spedizione di 100 scatoloni uguali ad un certo destinatario. Per farlo si serve di due compagnie di spedizione: la compagnia A offre furgoni che possono trasportare 5 scatole per volta, ad un prezzo di 200 euro a furgone, mentre la compagnia B offre furgoni che possono trasportare 10 scatole per volta ad un prezzo base di 200 euro a furgone, a cui però va aggiunto un sovrapprezzo complessivo pari a $15\,n^2$ euro, dove n è il numero totale di furgoni affittati.
Quanti furgoni conviene affittare dalla compagnia A e quanti dalla compagnia B?

<u>SOLUZIONE</u>. Supponiamo di affittare x furgoni dalla compagnia A e y da B. Dovendo trasportare 100 scatole, deve valere che

$$5x + 10\,y = 100\,,$$

vale a dire

$$x = 20 - 2y\,. \tag{2}$$

Osservo che sia x che y devono essere interi e maggiori o uguali a zero. Osservo poi che, per via della (2), se y è intero lo è automaticamente anche x, e la condizione $x \geq 0$ equivale a $y \leq 10$.
Sempre tenendo conto della (2), il costo complessivo (in euro) della spedizione così organizzata è uguale a

$$\begin{aligned} c = 200\,x + 200\,y + 15\,y^2 &= 200\,(20-2y) + 200\,y + 15\,y^2 \\ &= 4.000 - 200\,y + 15\,y^2\,. \end{aligned}$$

Devo quindi cercare il minimo di $c(y) = 4.000 - 200\,y + 15\,y^2$ tra tutti i numeri *interi* y compresi tra 0 e 10.
Studiando il segno della derivata $c'(y) = -200 + 30\,y$ ottengo che $c(y)$ decresce per $0 \leq y \leq y_0$ con $y_0 := \frac{20}{3} \simeq 6{,}67$, e cresce per $y_0 \leq y \leq 10$. Quindi il valore minimo di $c(y)$ viene raggiunto per $y = 6$ oppure $y = 7$. Siccome $c(6) = 3.340$ e $c(7) = 3.335$, il costo è minimo per $y = 7$, e in questo caso $x = 6$.
In conclusione conviene affittare 6 furgoni dalla compagnia A e 7 dalla compagnia B.

3 a) Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := x^{\log x} - 1$, e disegnarne il grafico.
b) Dire dov'è improprio l'integrale

$$I := \int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$$

e studiarne il comportamento.

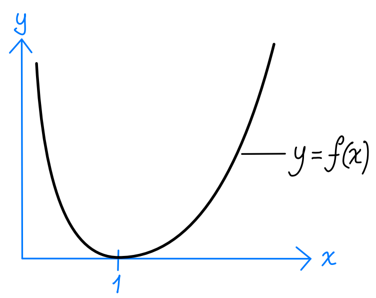
<u>SOLUZIONE</u>. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x > 0$. Riscrivendola come

$$f(x) = (e^{\log x})^{\log x} - 1 = e^{\log^2 x} - 1$$

ottengo che $f(x) \geq 0$ se e solo se $\log^2 x \geq 0$, cioè sempre, e $f(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$, cioè $x = 1$; inoltre $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$. Studiando poi il segno della derivata

$$f'(x) = \big(e^{\log^2 x} - 1\big)' = \frac{2\log x}{x} e^{\log^2 x}$$

ottengo che $f'(x)$ decresce per $0 < x \leq 1$ e cresce per $x \geq 1$.
Sulla base di quanto appena detto traccio il grafico sotto (le proporzioni non sono rispettate).



b) La funzione integranda $1/f(x)$ è ben definita e continua per $x \neq 1$ ma non è definita per

$x = 1$, e quindi l'integrale I è improprio in 1 e in $+\infty$. Inoltre, la funzione integranda è positiva e quindi I esiste e vale un numero finito (positivo) oppure $+\infty$.
Studio il comportamento di I spezzandolo come somma di due integrali impropri semplici:

$$I = \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{f(x)}}_{I_1} + \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}}_{I_2}$$

Comincio con lo studio dell'integrale I_1: siccome questo integrale è improprio in 1, come prima cosa uso il cambio di variabile $x = 1 + t$ per passare ad un integrale improprio in 0:[1]

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{f(1+t)} \,.$$

Osservo ora che, per t che tende a 0,

$$f(1+t) = \exp\big((\log(1+t))^2\big) - 1 \sim (\log(1+t))^2 \sim t^2$$

(nel secondo passaggio ho usato che $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$ con $x := (\log(1+t))^2$, mentre nel terzo passaggio ho usato che $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$).
Pertanto

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{f(1+t)} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^2} = +\infty \,.$$

Siccome $I_1 = +\infty$ e l'integrale I_2 esiste e non è $-\infty$, posso già concludere che $I = +\infty$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Anche se non è necessario farlo, si può dimostrare che I_2 è finito. Usando infatti che $\log x \geq 2$ per x sufficientemente grande, ottengo che $f(x) = x^x - 1 \geq x^2 - 1$ e quindi

$$I_2 \leq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} \approx \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty \,.$$

[1] Lo faccio perché ho più strumenti per studiare gli integrali impropri in 0.

PRIMA PARTE

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq -1$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   SOLUZIONE. Le soluzioni sono $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{4}$ e $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (x + a)\exp(x^2)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
   SOLUZIONE. La derivata $f'(x) = (2x^2 + 2ax + 1)\exp(x^2)$ è positiva o nulla per ogni $x \in \mathbb{R}$ se il discriminante di $2x^2 + 2ax + 1$ è negativo o nullo, vale a dire se $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 (in zero) della funzione $f(x) := e^{-2x}\log(1 + x)$.
   SOLUZIONE. $f(x) = x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{10}{3}x^3 + O(x^4)$.

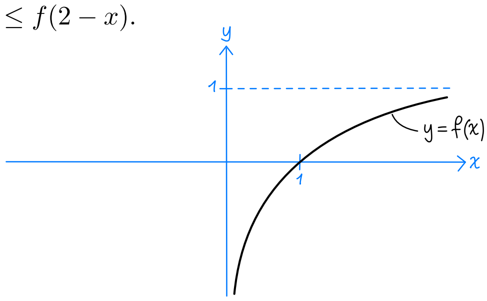
4. Calcolare il valore dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\exp(1 - 2x^2)\,dx$.
   SOLUZIONE. Usando il cambio di variabile $y = 1 - 2x^2$ ottengo
$$\int_0^{+\infty} x\,\exp(1 - 2x^2)\,dx = \int_1^{-\infty} e^y\left(-\tfrac{1}{4}\right)dy = \left|\,\frac{e^y}{4}\,\right|_{-\infty}^{1} = \frac{e}{4}\,.$$

5. Dire per quali $a > 0$ è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{2a}}$.
   SOLUZIONE. L'integrale è improprio in 1; usando il cambio di variabile $y = 1 - x$ ottengo
$$\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{2a}} = \int_0^1 \frac{dy}{(2y - y^2)^{2a}} \approx \int_0^1 \frac{dy}{y^{2a}} < +\infty \quad \text{per } 0 < a < \tfrac{1}{2}.$$

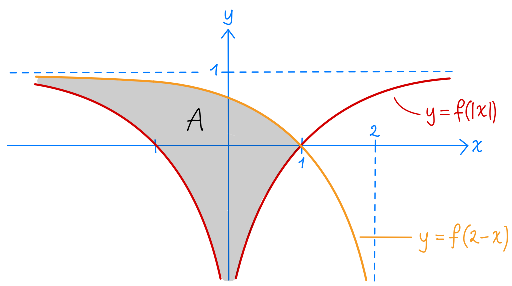
6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n}$ per gli x per cui converge.
   SOLUZIONE. Mi riconduco alla serie geometrica:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} = \frac{x^3}{4}\left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{x^3}{4} \cdot \frac{1}{1 - x/2} = \frac{x^3}{4 - 2x}\,.$$

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = xe^t$ tale che $x(0) = -1$.
   SOLUZIONE. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x(t) = c\exp(e^t)$ con $c \in \mathbb{R}$, e quindi $x = -\frac{1}{e}\exp(e^t)$.

8. Nella figura sotto è riportato il grafico della funzione $f(x)$. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(|x|) \leq y \leq f(2 - x)$.



   SOLUZIONE.



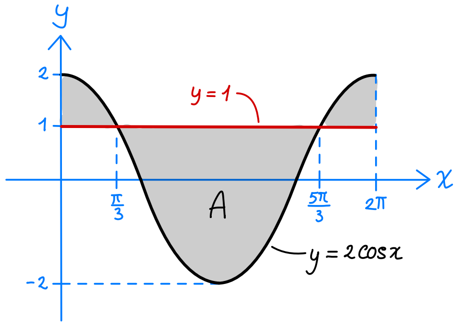
SECONDA PARTE

1 Sia A l'insieme dei punti (x, y) con $0 \le x \le 2\pi$ compresi tra la retta di equazione $y = 1$ e il grafico della funzione $2\cos x$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno alla retta $y = 1$.

a) Disegnare l'insieme A e calcolarne l'area.

b) Disegnare l'insieme V e calcolarne il volume.

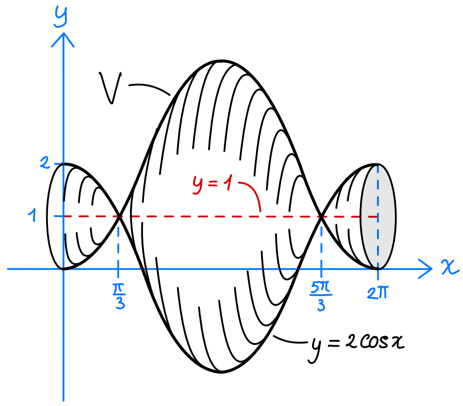
<u>SOLUZIONE</u>. a) L'insieme A è disegnato nella figura sotto.



Osservo che $2\cos x \le 1$ per $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3}$, mentre $2\cos x \ge 1$ per $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3} \le x \le 2\pi$. Pertanto l'area di A è data da

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(A) &= \int_0^{\pi/3} 2\cos x - 1\,dx + \int_{\pi/3}^{5\pi/3} 1 - 2\cos x\,dx + \int_{5\pi/3}^{2\pi} 2\cos x - 1\,dx \\ &= \Big|2\sin x - x\Big|_0^{\pi/3} + \Big|x - 2\sin x\Big|_{\pi/3}^{5\pi/3} + \Big|2\sin x - x\Big|_{5\pi/3}^{2\pi} = 4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\,.\end{aligned}$$

b) L'insieme V è disegnato nella figura sotto.



Indico con A' l'insieme ottenuto spostando A verso il basso di 1 e con V' il solido ottenuto ruotando A' attorno all'asse delle x. Chiaramente il volume di V è uguale a quello di V', e quest'ultimo può essere calcolato tramite la formula vista a lezione partendo dal fatto che A' è delimitato dal grafico della funzione $2\cos x - 1$ e l'asse delle x:

$$\begin{aligned}\operatorname{volume}(V) &= \operatorname{volume}(V') \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (2\cos x - 1)^2\,dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} 4\cos^2 x - 4\cos x + 1\,dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} 2\cos(2x) - 4\cos x + 3\,dx = \pi \Big|\sin(2x) - 4\sin x + 3x\Big|_0^{2\pi} = 6\pi^2\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato l'identità $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$).

2 a) Dire se è vero che $x^4+8 \geq \frac{1}{4}(x+1)^4$ per ogni $x \geq 0$.
b) Trovare i numeri $m > 0$ per cui vale che $x^4+8 \geq m(x+1)^4$ per ogni $x \geq 0$.
c) Trovare i numeri $M > 0$ per cui vale che $x^4+8 \leq M(x+1)^4$ per ogni $x \geq 0$.

Soluzione. Risolvo i punti b) e c) insieme, mentre la risposta al punto a) segue da quella al punto b).
Dividendo le diseguaglianze in b) e c) per $(x+1)^4$, queste domande possono essere riformulate come segue: per quali costanti positive m e M vale che

$$m \leq \frac{x^4+8}{(x+1)^4} \leq M \quad \text{per ogni } x \geq 0?$$

Chiaramente la risposta è

$$m \leq \min_{x\geq 0} f(x)\,, \quad M \geq \max_{x \geq 0} f(x)\,, \quad \text{dove } f(x) := \frac{x^4+8}{(x+1)^4}\,,$$

(il minimo e il massimo, se non esistono, vanno sostituiti rispettivamente con l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori).
Cerco i valori minimo e massimo di $f(x)$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$ seguendo la solita procedura vista a lezione. Per prima cosa cerco i punti $x \geq 0$ in cui si annulla la derivata

$$f'(x) = \frac{4(x^3-8)}{(x+1)^5}\,,$$

e ottengo $x = 2$. Quindi confronto i valori di f in $x = 2$ e negli estremi della semiretta $x \geq 0$, vale a dire 0 e $+\infty$:

$$f(0) = 8\,, \quad f(2) = \frac{8}{27}\,, \quad f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+8}{(x+1)^4} = 1\,,$$

ed ottengo che

$$\min_{x\geq 0} f(x) = f(2) = \tfrac{8}{27}\,, \quad \max_{x\geq 0} f(x) = f(0) = 8\,.$$

Dunque i valori cercati di m e M sono quelli per cui

$$m \leq \frac{8}{27}\,, \quad M \geq 8\,;$$

in particolare la risposta al punto a) è affermativa perché $\frac{1}{4} < \frac{8}{27}$.

3 Consideriamo $f(x) := x^2e^x$. Dire quali punti P del grafico di f sono "visibili direttamente dall'origine O", cioè il segmento che congiunge P e O interseca il grafico di f solo negli estremi.

Soluzione. Dato $a \in \mathbb{R}$ indico con P_a il punto del grafico di f di ascissa a, cioè $P_a := (a, f(a))$.
Considero ora una generica retta passante per l'origine: questa retta ha equazione $y = mx$ dove m è la pendenza, e osservo che P_a appartiene a questa retta se e solo se a risolve l'equazione

$$m = \frac{f(x)}{x} = xe^x\,. \tag{1}$$

Ma allora il punto P_a è visibile dall'origine se *non esiste* alcun a' strettamente compreso tra 0 e a tale che $P_{a'}$ appartiene alla stessa retta, cioè a' risolve l'equazione (1).
Per capire quali punti P_a sono visibili dall'origine devo quindi studiare le soluzioni dell'equazione (1) al variare di $m \in \mathbb{R}$, e per farlo disegno il grafico della funzione

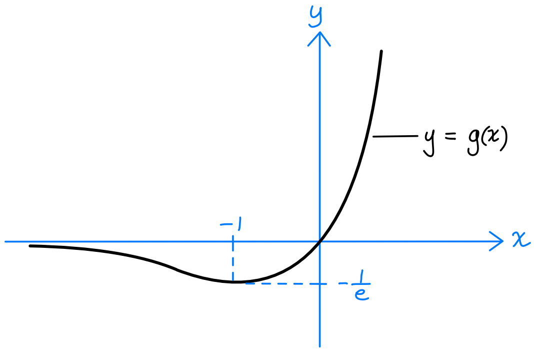
$$g(x) := xe^x\,.$$

Osservo che $g(x)$ è positiva per $x \geq 0$ e negativa altrimenti, e $g(x)$ tende a 0 per $x \to -\infty$, e a $+\infty$ per $x \to -\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$g'(x) = (x+1)e^x$$

ottengo che g decresce per $x \leq -1$ e cresce per $x \geq 1$, ed in particolare $x = -1$ è il punto di minimo assoluto, e il valore minimo è $g(-1) = -\frac{1}{e}$.

Sulla base di queste informazioni disegno il grafico riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



Partendo da questo grafico ottengo che

- per $m \geq 0$ l'equazione (1), cioè $g(x) = m$, ammette un'unica soluzione e questa soluzione è positiva, e quindi il punto del grafico di f corrispondente è visibile dall'origine;
- per $-\frac{1}{e} < m < 0$ l'equazione (1) ammette due soluzioni, una minore di -1 ed una compresa tra -1 e 0; quindi il punto corrispondente alla prima soluzione non è visibile dall'origine, mentre quello corrispondente alla seconda lo è;
- per $m = -\frac{1}{e}$ l'equazione (1) ammette un'unica soluzione, e il punto corrispondente è visibile dall'origine;
- per $m < -\frac{1}{e}$ l'equazione (1) non ammette soluzioni.

Riassumendo, i punti P_a con $a \geq -1$ sono visibili dall'origine, mentre i punti P_a con $a < -1$ non lo sono.

Prima parte

1. Scrivere le coordinate polari dei seguenti punti del piano (espressi in coordinate cartesiane) scegliendo l'angolo α in $(-\pi, \pi]$: $P_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $P_2 = (5, -5\sqrt{3})$; $P_3 = (0, -2)$.
   Soluzione. $P_1: \ r = 2, \ \alpha = \frac{3\pi}{4}$; $P_2: \ r = 10, \ \alpha = -\frac{\pi}{3}$; $P_3: \ r = 2, \ \alpha = -\frac{\pi}{2}$.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) := \log(1/x)$ nel punto di ascissa $x = 1/\sqrt[3]{e}$.
   Soluzione. $y = -\sqrt[3]{e}\, x + \frac{4}{3}$.

3. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{per } x < 0 \\ \exp(x^2) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$
   è continua e derivabile.
   Soluzione. Le funzioni $ax^2 + b$ e $\exp(x^2)$ devono coincidere per $x = 0$, e così pure le derivate $2ax$ e $2x \exp(x^2)$: la prima equazione vale se $b = 1$, la seconda vale sempre. Quindi deve essere $b = 1$, a qualunque.

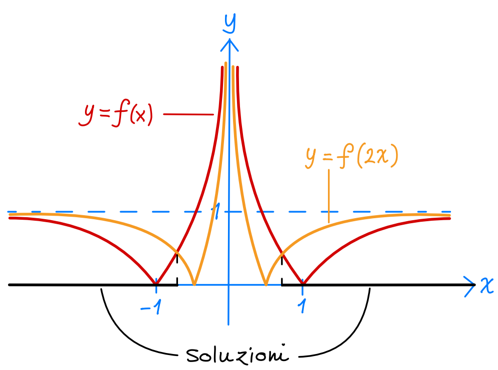
4. Scrivere la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := x + \log(1 - x + x^2)$.
   Soluzione. Usando lo sviluppo $\log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + O(y^3)$ con $y = -x + x^2$ ottengo
$$f(x) = x + (-x + x^2) - \tfrac{1}{2}(-x + x^2)^2 + O(x^3) = \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^3) \sim \tfrac{1}{2}x^2 \,.$$

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - 3x}}$.
   Soluzione. Utilizzando il cambio di variabile $y = 9 - 3x$ ottengo
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - 3x}} = \frac{1}{3} \int_0^9 y^{-1/2} dy = \frac{1}{3} \Big| 2y^{1/2} \Big|_0^9 = 2 \,.$$

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-n} + n^3}{n^{2a}(1 + n)}$ converge ad un numero finito.
   Soluzione. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a-2}}$ e quindi deve essere $2a - 2 > 1$, cioè $a > \frac{3}{2}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = x^3 \sin t$ tale che $x(0) = 1$.
   Soluzione. Equazione a variabili separabili: $-\frac{1}{2x^2} = -\cos t + c$ con $c = \frac{1}{2}$, quindi
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\cos t - 1}} \,.$$

8. Sia $f(x) := \left| \dfrac{1}{x^2} - 1 \right|$. Risolvere graficamente la disequazione $f(x) \leq f(2x)$.
   Soluzione.



SECONDA PARTE

1 Dato $a > 0$ consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t\,. \qquad (*)$$

a) Trovare la soluzione generale di (*).

b) Per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \gg e^{4t}$ per $t \to +\infty$?

SOLUZIONE. a) Ricordo che la soluzione generale di (*) è data da

$$x(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare di (*).

Calcolo di x_{om}. Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0$ sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}$$

ed in particolare devo considerare i seguenti tre casi:

(i) se $a > 2$ allora λ_1 e λ_2 sono reali e distinte, e quindi

$$x_{\rm om}(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) se $a = 2$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e quindi

$$x_{\rm om}(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(iii) se $0 < a < 2$ allora $\lambda_{1,2} = a \pm \omega i$ con $\omega := \sqrt{4 - a^2}$, e quindi

$$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Calcolo di $\tilde{x}$. Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) = b_1 t + b_2$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo l'identità

$$4b_1 t + 4b_2 - 2ab_1 = 8t\,,$$

che è soddisfatta per ogni t se e solo se $4b_1 = 8$ e $4b_2 - 2ab_1 = 0$, vale a dire $b_1 = 2$ e $b_2 = a$. Pertanto la soluzione particolare cercata è

$$\tilde{x}(t) = 2t + a\,.$$

b) Osservo che la soluzione particolare $\tilde{x} = 2t + a$ soddisfa $\tilde{x}(t) \ll e^{4t}$ per $t \to +\infty$. Pertanto esiste una soluzione di (*) che soddisfa la proprietà che $x(t) \gg e^{4t}$ se e solo esiste una soluzione dell'equazione omogenea con questa proprietà.

Le formule per $x_{\rm om}$ nei casi (i) e (ii) mostrano che per $a \le 2$ si ha $x_{\rm om}(t) = o(e^{4t})$ per ogni possibile scelta dei coefficienti c_1, c_2, e quindi per questi valori di a non esiste alcuna soluzione di (*) che si comporta come richiesto.

Resta da vedere cosa succede per $a > 2$. In questo la formula per $x_{\rm om}$ mostra che è possibile scegliere i coefficienti c_1, c_2 in modo che $x_{\rm om}(t) \gg e^{4t}$ a patto che *almeno una* delle radici caratteristiche λ_1, λ_2 sia strettamente maggiore di 4, ovvero che lo sia la più grande delle due, vale a dire

$$a + \sqrt{a^2 - 4} > 4\,.$$

Risolvendo questa disequazione [1] ottengo $a > \frac{5}{2}$.

2 a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 1 - \sqrt[3]{\cos x}$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$.

SOLUZIONE. La domanda a) corrisponde alla b) per $a = 0$; rispondo quindi alla domanda b).

Usando lo sviluppo $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ e poi lo sviluppo

$$(1 + t)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}t + O(t^2) \quad \text{con } t = -\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)$$

[1] Riscrivo la disequazione come $\sqrt{a^2 - 4} > 4 - a$ e distinguo due casi: se $4 - a < 0$ la disequazione è sempre verificata, se invece $4 - a \ge 0$ elevo al quadrato entrambi i termini arrivando a una disequazione di primo grado in a.

ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^{1/3} \\ &= 1 - (1+t)^{1/3} = -\tfrac{1}{3}t + O(t^2) = -\tfrac{1}{3}\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big) + O(x^4) \sim \tfrac{1}{6}x^2\,, \end{aligned}$$

e quindi, per $a \neq -\frac{1}{6}$,

$$\text{p.p.}\big(f(x) + ax^2\big) = \big(\tfrac{1}{6} + a\big)\, x^2\,.$$

Per $a = -\frac{1}{6}$ la parte principale di $f(x)$ si cancella con ax^2, e quindi devo trovare uno sviluppo più preciso di $f(x)$. Procedo come prima, usando stavolta gli sviluppi $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ e

$$(1+t)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}t - \tfrac{1}{9}t^2 + O(t^3) \quad \text{con } t = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6),$$

ed ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big)^{1/3} \\ &= 1 - (1+t)^{1/3} \\ &= -\tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{9}t^2 + O(t^3) \\ &= -\tfrac{1}{3}\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big) + \tfrac{1}{9}\big(-\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^2 + O(x^6) \\ &= \tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{72}x^4 + O(x^6) + \tfrac{1}{9}\big(\tfrac{1}{4}x^4 + O(x^6)\big) + O(x^6) \\ &= \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{72}x^4 + O(x^6)\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\text{p.p.}\big(f(x) - \tfrac{1}{6}x^2\big) = \tfrac{1}{72}x^4\,.$$

3 a) Trovare lo sviluppo di Taylor al primo ordine in 0 della funzione $\arctan x$.

b) Dimostrare che la funzione $g(x) := x - \log(1+x)$ è strettamente positiva per ogni $x > 0$.

c) Dato $a \in \mathbb{R}$, dire dove è improprio l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a}\,dx\,,$$

e discuterne il comportamento.

<u>Soluzione</u>. a) Usando definizione del polinomio di Taylor ottengo $\arctan x = x + O(x^2)$.

b) Osservo che la derivata

$$g'(x) = \frac{x}{1+x}$$

è strettamente positiva per $x > 0$, e quindi la funzione g è strettamente crescente per $x > 0$. Inoltre g vale zero per $x = 0$ e quindi deve essere strettamente positiva per $x > 0$.

c) Usando quanto fatto al punto b) si vede che la funzione integranda è ben definita e continua per $x > 0$ e non è definita per $x = 0$, e quindi l'integrale I è improprio in 0 e $+\infty$.
Inoltre la funzione integranda è sempre positiva, e quindi I esiste per qualunque a, e si tratta quindi di stabilire se è finito oppure no. Per farlo spezzo I come somma di due integrali impropri semplici, che studio separatamente:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a}dx}_{I_2}\,.$$

Comportamento di I_1. Questo integrale è improprio in 0, e quindi serve trovare il comportamento della funzione integranda per $x \to 0$. A questo scopo osservo che $\arctan(1/x) \to \frac{\pi}{2}$, e usando lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di $\log(1+x)$ ottengo che, per $x \to 0$,

$$g(x) = x - \log(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2\,,$$

da cui segue che

$$\frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a} \sim \frac{2^{a-1}\pi}{x^{2a}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri, $I_1 \approx \int_0^1 \frac{1}{x^{2a}} dx$, e pertanto I_1 è finito se e solo se $2a < 1$, cioè $a < \frac{1}{2}$.

Comportamento di I_2. Questo integrale è improprio in $+\infty$, e quindi serve trovare il comportamento della funzione integranda per $x \to +\infty$. Osservo ora che $\arctan(1/x) \sim \frac{1}{x}$ (per via del punto a)) e $g(x) = x - \log(1+x) \sim x$, da cui segue che

$$\frac{\arctan(1/x)}{(g(x))^a} \sim \frac{1}{x^{a+1}} .$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri, $I_2 \approx \int_1^\infty \frac{1}{x^{a+1}} dx$, e pertanto I_2 è finito se e solo se $a + 1 > 1$, cioè $a > 0$.

Comportamento di I. Mettendo insieme quanto fatto per I_1 e I_2 ottengo infine che I è finito se e solo se $0 < a < \frac{1}{2}$.

Versione: 12 settembre 2022

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA GESTIONALE

PROVE SCRITTE DELL'ESAME DI

Analisi Matematica I (158AA), a.a. 2021-22

Testi e soluzioni

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande relativamente semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per ottenere la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.
Questa raccolta contiene i testi e le soluzioni degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2021-22, incluse le prove in itinere. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti qui viene riportata solo la prima.

Programma del corso [versione: 20 dicembre 2021]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - Richiamo delle nozioni di base di trigonometria. Coordinate polari di un punto nel piano.
   - Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente), funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. Limiti di funzioni e continuità
   - Limiti di funzioni; calcolo dei limiti elementari; forme indeterminate.
   - Funzioni continue.

3. Derivate
   - Derivata di una funzione. Significato geometrico come pendenza della retta tangente al grafico. Altre applicazioni del concetto di derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali); estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Esistenza del punti di minimo e di massimo per una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass, senza dimostrazione). Individuazione dei valori e dei punti di massimo e di minimo di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
   - Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione ed espressione del resto come "o grande" e nella forma di Lagrange. Sviluppi di Taylor di alcune funzioni fondamentali. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy e dimostrazioni (parziali) dei teoremi di de L'Hôpital e dello sviluppo di Taylor.
   - Funzioni crescenti e decrescenti; caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave; caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Applicazioni al disegno del grafico di una funzione.

4. Integrali
   - Definizione di integrale (definito) di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.

- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza.
- Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

5. Integrali impropri
   - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
   - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
   - Integrali impropri non semplici.

6. Serie numeriche e serie di potenze
   - *Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i limiti di funzioni.*
   - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. La serie geometrica.
   - Criterio del confronto con l'integrale. La serie armonica generalizzata.
   - Criteri per determinare il comportamento di una serie: del confronto, del confronto asintotico, della convergenza assoluta.
   - Serie di Taylor di alcune funzioni elementari. Espressione del numero e come serie. *Definizione di esponenziale complesso e giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.
   - Serie di potenze e raggio di convergenza, calcolo del raggio di convergenza con il criterio del rapporto e della radice.

7. Equazioni differenziali
   - Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali. Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
   - Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Risoluzione delle equazioni a coefficienti costanti omogenee; ricerca della soluzione particolare per quelle non omogenee per alcune classi di termini noti.

TESTI E SOLUZIONI

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare le soluzioni della disequazione trigonometrica $\sin(\pi x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.
   SOLUZIONE. $\big[-1, \frac{1}{4}\big] \cup \big[\frac{3}{4}, 1\big]$.

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 3}{-x^2 - 9}}$.
   SOLUZIONE. $-1 \leq x \leq 3$.

3. Dire se esistono, e in caso affermativo calcolare, i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) := 2x^3 \log x$ relativi alla semiretta $x > 0$.
   SOLUZIONE. Il punto di massimo non esiste. Il punto di minimo è $e^{-1/3}$.

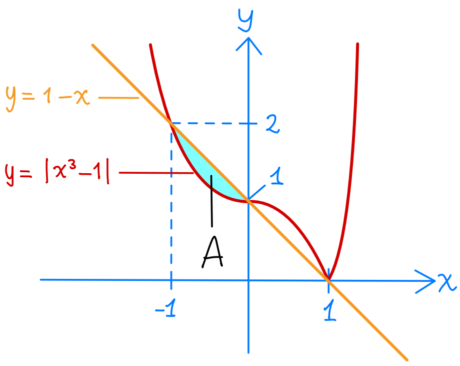
4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{9^{x-1}}{3^{x-1}}$ nel punto $x = 1$.
   SOLUZIONE. $y = \log 3 \cdot (x - 1) + 1$.

5. Scrivere la parte principale per $x \to +\infty$ di $f(x) := \sqrt[3]{x^2 - 1} - \sqrt[4]{x^5 + 1}$.
   SOLUZIONE. La parte principale è $-x^{5/4}$.

6. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x + \log x}{x^3 + x^5}}_{a}, \quad \underbrace{\frac{4^x + 1}{2^x - 1}}_{b}, \quad \underbrace{2^x \log x}_{c}, \quad \underbrace{\frac{x - x^3}{3 + x^2}}_{d}.$$
   SOLUZIONE. $a \ll d \ll b \ll c$.

7. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 7 in $x = 0$ di $f(x) := \big(x + 2x^4\big)\big(1 + 2x^3\big)^{1/3}$.
   SOLUZIONE. Il polinomio è $x + \frac{8}{3}x^4 + \frac{8}{9}x^7$.
   SOLUZIONE.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano tali che $|x^3 - 1| \leq y \leq 1 - x$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

$\boxed{1}$ Trovare per quali numeri reali a vale la disuguaglianza $x - 2 \leq ae^{x/2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE. Siccome la funzione $e^{x/2}$ è sempre positiva, posso riscrivere la disuguaglianza nella forma

$$a \geq \underbrace{(x-2)\,e^{-x/2}}_{f(x)},$$

che è soddisfatta per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$a \geq \max_{x\in\mathbb{R}} f(x)$$

(al solito, se il valore massimo non esiste, va sostituito con l'estremo superiore dei valori).

Devo quindi trovare il valore massimo (o l'estremo superiore dei valori) della funzione $f(x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. Per farlo applico la solita strategia: confronto il valore di f in $\pm\infty$ (cioè gli estremi dell'intervallo $\mathbb{R}$) con il valore nell'unico punto in cui si annulla la derivata

$$f'(x) = \big(-\tfrac{1}{2}x + 2\big)\,e^{-x/2},$$

vale a dire $x = 4$:

$$\begin{aligned} f(-\infty) &:= \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-2)\,e^{-x/2} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty\,, \\ f(+\infty) &:= \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{e^{x/2}} = 0\,, \\ f(4) &= 2e^{-2}\,. \end{aligned}$$

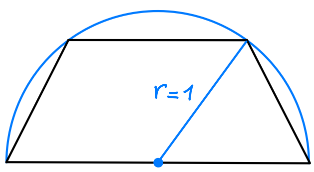
(Nella seconda riga ho usato il fatto ben noto che $x - 2 \sim x \ll e^{x/2} = (e^{1/2})^x$ per $x \to +\infty$.)

Posso dunque concludere che il valore massimo di $f(x)$ è $f(4) = 2e^{-2}$, e quindi la disuguaglianza di partenza, $x - 2 \leq ae^{x/2}$, è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$ se e solo se

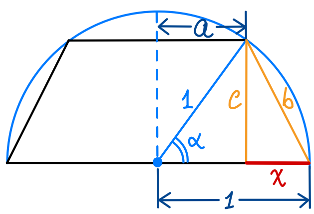
$$a \geq 2e^{-2}\,.$$

OSSERVAZIONI. In alternativa si può cercare il massimo della funzione $f(x)$ studiando solo il segno della derivata: così facendo si ottiene infatti che $f(x)$ cresce per $x \leq 4$ e decresce per $x \geq 4$, da cui segue che necessariamente $x = 4$ è il punto di massimo.

$\boxed{2}$ Tra tutti i trapezi iscritti nella semicirconferenza di raggio 1 come nella figura sotto, trovare quello di perimetro massimo.



SOLUZIONE. Osservo che il trapezio è univocamente determinato dalla lunghezza x nella figura sotto, che varia tra 0 e 1 (per $x = 0$ e $x = 1$ ottengo dei trapezi degeneri).



Voglio quindi esprimere il perimetro p del trapezio in funzione di x. Per farlo considero le lunghezze a, b, c nel disegno ($2a$ è la base minore del trapezio e c l'altezza), e osservo che siccome il trapezio è simmetrico rispetto all'asse verticale tratteggiato, vale che

$$p = 2(a + b + 1)\,.$$

Usando inoltre considerazioni di geometria elementare (al più il teorema di Pitagora) esprimo a, b, c in funzione di x:

$$a = 1 - x\,, \quad c = \sqrt{1-a^2} = \sqrt{2x - x^2}\,, \quad b = \sqrt{c^2 + x^2} = \sqrt{2x}\,,$$

e sostituendo questi valori nella formula per p ottengo infine

$$p = 4 - 2x + 2\sqrt{2x}\,.$$

Devo ora trovare il valore massimo della funzione $p(x)$ al variare di x nell'intervallo $[0, 1]$. Per farlo confronto il valore di p negli estremi dell'intervallo con il valore nel punto in cui si annulla la derivata

$$p'(x) = -2 + \sqrt{\frac{2}{x}}\,,$$

vale a dire $x = \frac{1}{2}$. Siccome

$$p(0) = 4\,, \quad p(1) = 2 + 2\sqrt{2} = 4{,}83 \pm 0{,}002\,, \quad p\big(\tfrac{1}{2}\big) = 5\,,$$

deduco che il perimetro massimo è 5 ed è raggiunto per $x = \frac{1}{2}$, vale a dire dal trapezio iscritto con base minore $2a = 1$ e altezza $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. La scelta di x come variabile per descrivere il trapezio non è l'unica possibile. Una possibile alternativa è l'altezza (ma in questo caso la formula per p si complica), un'altra è l'angolo α riportato nella figura sopra; in questo caso α varia nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e il perimetro è $p = 2 + 4\sin(\alpha/2) + 2\cos\alpha$. Inoltre la derivata

$$p'(\alpha) = 2\cos(\alpha/2) - 2\sin\alpha = 2\cos(\alpha/2)\big(1 - 2\sin(\alpha/2)\big)$$

si annulla quando $\sin(\alpha/2) = \frac{1}{2}$, vale a dire $\alpha = \frac{\pi}{3}$, e si verifica facilmente che il valore massimo di p è raggiunto proprio per questo valore di α.

3 Consideriamo la funzione

$$f(x) := \log\big(x^3\cos(x + x^3)\big) - 3\log x\,.$$

a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare la parte principale di $f(x) + ax^2$ per $x \to 0^+$.

<u>SOLUZIONE</u>. Usando le proprietà dei logaritmi riscrivo la funzione $f(x)$ come

$$f(x) = \log\big(\cos(x + x^3)\big)\,.$$

a) Per prima cosa sviluppo l'argomento del logaritmo: usando lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ con $t := x + x^3$,[1] ottengo

$$\begin{aligned}\cos(x + x^3) = \cos t &= 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^4) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(x + x^3)^2 + O(x^4) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato che $t \sim x$ e quindi $O(t^4) = O(x^4)$; nel quarto passaggio ho usato che $(x + x^3)^2 = x^2 + 2x^4 + x^6 = x^2 + O(x^4)$).

Uso ora lo sviluppo $\log(1 + t) = t + O(t^2)$ con $t := -\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$, ed ottengo

$$\begin{aligned}f(x) = \log\big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big) &= \log(1 + t) \\ &= t + O(t^2) = -\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\end{aligned}$$

(nel quarto passaggio ho usato il fatto che $t \sim -\frac{1}{2}x^2$ e quindi $O(t^2) = O(x^4)$).

In conclusione

$$\text{p.p.}(f(x)) = -\tfrac{1}{2}x^2\,.$$

b) Se $a \neq \frac{1}{2}$, usando quanto fatto al punto a) ottengo

$$\text{p.p.}\big(f(x) + ax^2\big) = \big(a - \tfrac{1}{2}\big)\,x^2\,.$$

[1] Posso farlo perché $x + x^3 \to 0$ per $x \to 0$.

Per $a = \frac{1}{2}$ devo però procedere in modo diverso, utilizzando sviluppi più precisi di quelli utilizzati nella risoluzione del punto a). Usando lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + O(t^6)$ con $t := x + x^3$ ottengo

$$\begin{aligned}\cos(x + x^3) = \cos t &= 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{24}t^4 + O(t^6)\\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(x + x^3)^2 + \tfrac{1}{24}(x + x^3)^4 + O(x^6)\\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{23}{24}x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato che $t \sim x$ e quindi $O(t^6) = O(x^6)$; nel quarto passaggio ho usato che $(x + x^3)^2 = x^2 + 2x^4 + O(x^6)$ e $(x + x^3)^4 = x^4 + O(x^6)$).
Uso ora lo sviluppo $\log(1 + t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t := -\frac{1}{2}x^2 - \frac{23}{24}x^4 + O(x^6)$, ed ottengo

$$\begin{aligned}f(x) &= \log\big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{23}{24}x^4 + O(x^6)\big)\\ &= \log(1 + t)\\ &= t - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3)\\ &= \big(- \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{23}{24}x^4 + O(x^6)\big) - \tfrac{1}{2}\big(- \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big)^2 + O(x^6)\\ &= -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{13}{12}x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$

(nel quarto passaggio ho usato che $t \sim -\frac{1}{2}x^2$ e quindi $O(t^6) = O(x^6)$; nel quinto passaggio ho usato che $(-\frac{1}{2}x^2 + O(x^4))^2 = \frac{1}{4}x^4 + O(x^6)$).
Ma allora

$$f(x) + \tfrac{1}{2}x^2 = -\tfrac{13}{12}x^4 + O(x^6)$$

e quindi

$$\text{p.p.}\big(f(x) + +\tfrac{1}{2}x^2\big) = -\tfrac{13}{12}x^4\,.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti (dati in coordinate cartesiane), scegliendo l'angolo nell'intervallo $[0, 2\pi)$: a) $(0, -3)$; b) $(-3, -\sqrt{3})$; c) $(-4, 4)$.
SOLUZIONE. a) $\rho = 3$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$; b) $\rho = 2\sqrt{3}$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$; c) $\rho = 4\sqrt{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{(\sin x)^4}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\cos(2^x)$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^8+2^x}{x^{10}+1}$.
SOLUZIONE. a) $\frac{1}{2}$, b) non esiste, c) $+\infty$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := (2-3x^4)\exp(x^2)$.
SOLUZIONE. $P(x) = 2 + 2x^2 - 2x^4$.

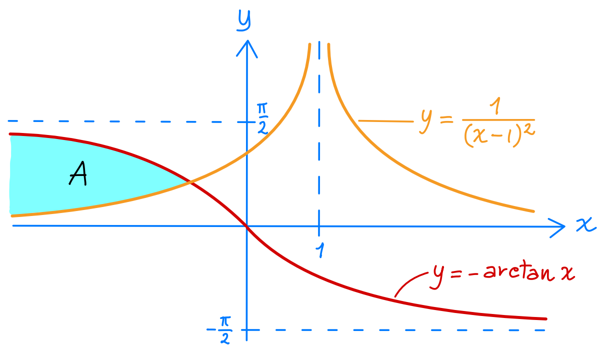
4. Calcolare la velocità *scalare* e la distanza percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$ da un punto che si muove con legge oraria $P(t) := \big(\sin(3t^3), -\cos(3t^3)\big)$.
SOLUZIONE. Velocità scalare $= 9t^2$; distanza percorsa $= 3$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{1}{(x-7)(x-2)}\,dx$.
SOLUZIONE. Per prima cosa si scrive la frazione $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$ nella forma $\frac{c}{x-a} + \frac{d}{x-b}$:
$$\int \frac{1}{(x-7)(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{5(x-7)} - \frac{1}{5(x-2)}\,dx = \frac{1}{5}\log\left|\frac{x-7}{x-2}\right| + c\,.$$

6. Dire per quali $a > 0$ risulta finito il seguente integrale improprio: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^{-a})}{x^{2a}+4}\,dx$
SOLUZIONE. L'integrale si comporta come $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3a}}$ e quindi è finito per $a > \frac{1}{3}$.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = e^t\,(4x^2+1)$ che soddisfa $x(0) = \frac{1}{2}$.
SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili:
$$\int \frac{dx}{4x^2+1} = \int e^t\,dt \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2}\arctan(2x) = e^t + c \quad\Leftrightarrow\quad x = \tfrac{1}{2}\tan(2e^t + 2c)$$
e imponendo la condizione iniziale ottengo $x(t) = \frac{1}{2}\tan\big(2e^t - 2 + \frac{\pi}{4}\big)$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{(x-1)^2} \leq y \leq -\arctan x$.
SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

$\boxed{\mathbf{1}}$ a) Dire se la disequazione $(x^2+1)^5 \geq x^{10}+16$ vale per ogni $x \geq 1$.
b) Dire per quali $m > 0$ vale che $(x^2+1)^5 \geq m(x^{10}+16)$ per ogni $x \geq 1$.

SOLUZIONE. Trovo prima la risposta al punto b), da cui seguirà che la risposta ad a) è positiva. Per farlo riscrivo la disequazione $(x^2+1)^5 \geq m(x^{10}+16)$ nella forma

$$\underbrace{\frac{(x^2+1)^5}{x^{10}+16}}_{f(x)} \geq m$$

ed noto quindi che questa disequazione è verificata per ogni $x \geq 1$ se e solo se

$$m \leq \min_{x \geq 1} f(x)$$

(se il minimo non esiste va sostituito con l'estremo inferiore).
Per calcolare questo minimo (o estremo inferiore) seguo la solita procedura, cioè confronto i valori di f negli estremi dell'intervallo $[1,+\infty)$ e nei punti x di questo intervallo in cui si annulla la derivata

$$f'(x) = \frac{10\,x\,(x^2+1)^4\,(x^{10}+16) - (x^2+1)^5\,10\,x^9}{(x^{10}+16)^2} = \frac{10\,x\,(x^2+1)^4(16-x^8)}{(x^{10}+16)^2}\,;$$

la derivata si annulla quando $x = 0$ (che non ci interessa) e quando $16 - x^8 = 0$, cioè $x = \sqrt{2}$. Inoltre

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{32}{17} = 1{,}88 \pm 0{,}01\,, \\ f(\sqrt{2}) &= \frac{81}{16} = 5{,}06 \pm 0{,}01\,, \\ f(+\infty) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)^5}{x^{10}+16} = 1\,, \end{aligned}$$

e quindi il valore minimo di $f(x)$ per $x \geq 1$ non esiste, mentre l'estremo inferiore dei valori è 1.
In conclusione la risposta al punto b) è $m \leq 1$ e di conseguenza la risposta al punto a) è affermativa.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Un punto P si muove con legge oraria $P(t) = \big(\rho(t)\cos t,\, \rho(t)\,\sin t\big)$ con $\rho(t) := 4\cos^2\Big(\frac{\sqrt{3}}{4}t\Big) - 1$.
a) Calcolare la distanza percorsa da P nell'intervallo di tempo $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
b) Disegnare la traiettoria di P nello stesso intervallo di tempo.

SOLUZIONE. a) Calcolo la velocità vettoriale P:

$$\vec{v}(t) = \big(\dot\rho(t)\cos t - \rho(t)\sin t\,,\, \dot\rho(t)\sin t + \rho(t)\cos t\big)\,,$$

e la velocità scalare :

$$\begin{aligned} v(t) = |\vec{v}(t)| &= \sqrt{(\dot\rho\cos t - \rho\sin t)^2 + (\dot\rho\sin t + \rho\cos t)^2} \\ &= \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2} \\ &= \sqrt{\Big(4\cos^2\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\Big) - 1\Big)^2 + \Big(-2\sqrt{3}\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\Big)\,\sin\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\Big)\Big)^2} \\ &= \sqrt{\big(16\cos^4(\cdots) - 8\cos^2(\cdots) + 1\big) + 12\cos^2(\cdots)\big(1-\cos^2(\cdots)\big)} \\ &= \sqrt{4\cos^4(\cdots) + 4\cos^2(\cdots) + 1} \\ &= 2\cos^2(\cdots) + 1\,. \end{aligned}$$

Quindi la distanza percorsa d è data da

$$\begin{aligned} d = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v(t)\, dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}t\Big) + 1\, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}t\Big) + 2\, dt \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi}^{\frac{\sqrt{3}}{4}\pi} \cos(s)\, ds + 2\pi = \tfrac{4}{\sqrt{3}} \sin\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}\pi\Big) + 2\pi\, . \end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio ho usato l'identità $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1)$; nel quarto ho spezzato l'integrale come somma di due integrali, calcolando direttamente quello della funzione 2 ed usando il cambio di variabile $s = \frac{\sqrt{3}}{2}t$ per quello di $\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$.)

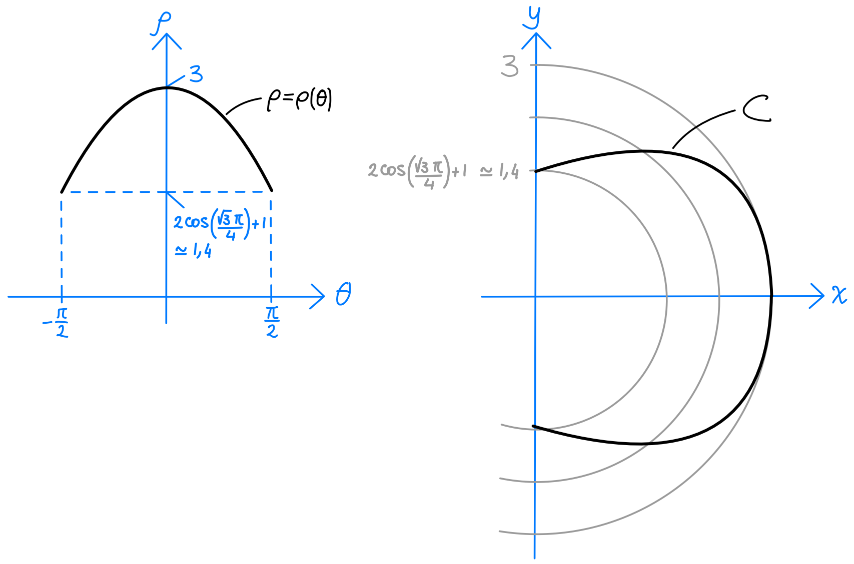
b) Osservo che le coordinate *polari* del punto P all'istante t sono $\theta = t$ e $\rho = \rho(t)$, e quindi la traiettoria di P è data dalla curva dei punti del piano le cui coordinate polari soddisfano

$$-\tfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \rho = \rho(\theta)\, .$$

Osservo ora che

$$\rho(\theta) = 4\cos^2\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{4}\theta\Big) - 1 = 2\cos\Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\theta\Big) + 1$$

(nel secondo passaggio ho usato l'identità $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha)+1)$) e traccio quindi il grafico della funzione $\rho(\theta)$ relativamente all'intervallo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (figura sotto a sinistra).
Usando questo grafico traccio infine la traiettoria di P (figura sotto a destra).



3 Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 4a\dot{x} + a^3 x = t \tag{*}$$

Determinare la soluzione generale di (*), facendo particolare attenzione al caso $a = 0$.

SOLUZIONE. La (*) è un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare e a coefficienti costanti. Ricordo che per questo tipo di equazioni la soluzione generale è della forma

$$x(t) = x_{\text{om}}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} + 4a\dot{x} + a^3x = 0$, mentre $\tilde{x}$ è una soluzione particolare dell'equazione (*).

Calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 + 4a\lambda + a^3 = 0$, ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -2a \pm \sqrt{a^2(4-a)}\, .$$

Distinguo ora diversi casi:

- se $a < 4$ e $a \neq 0$ le soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono numeri reali distinti e quindi
$$x_{\mathrm{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a = 4$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = -8$ e quindi
$$x_{\mathrm{om}}(t) = e^{-8t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a = 0$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e quindi
$$x_{\mathrm{om}}(t) = c_1 + c_2 t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$
- se $a > 4$ le soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono numeri complessi della forma $-2a \pm \omega i$ con $\omega := a\sqrt{a-4}$, e quindi
$$x_{\mathrm{om}}(t) = e^{-2at}(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Calcolo di $\tilde{x}$. Poiché il termine noto t è un polinomio di primo grado, cerco $\tilde{x}$ tra i polinomi di primo grado, vale a dire le funzioni della forma $\tilde{x}(t) = b + ct$. Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo
$$(4ac + a^3 b) + a^3 ct = t\,,$$
e questa identità di polinomi è soddisfatta per tutti i t se $a^3 c = 1$ e $4ac + a^3 b = 0$, vale a dire $c = \frac{1}{a^3}$ e $b = -\frac{4c}{a^2} = -\frac{4}{a^5}$ (devo supporre $a \neq 0$, altrimenti il sistema non ammette soluzioni b, c). Pertanto la soluzione particolare cercata è
$$\tilde{x}(t) = -\frac{4}{a^5} + \frac{t}{a^3} \quad \text{per } a \neq 0.$$
Nel caso $a = 0$ non ho alcuna soluzione particolare tra i polinomi di primo grado, e devo procedere in modo diverso. In questo caso l'equazione (*) si riduce a $\ddot{x} = t$, ed integrando due volte termine a termine ottengo $\dot{x} = \frac{1}{2}t^2 + c$ e poi $x = \frac{1}{6}t^3 + ct + c'$; quindi una soluzione particolare è
$$\tilde{x}(t) = \tfrac{1}{6}t^3 \quad \text{per } a = 0.$$

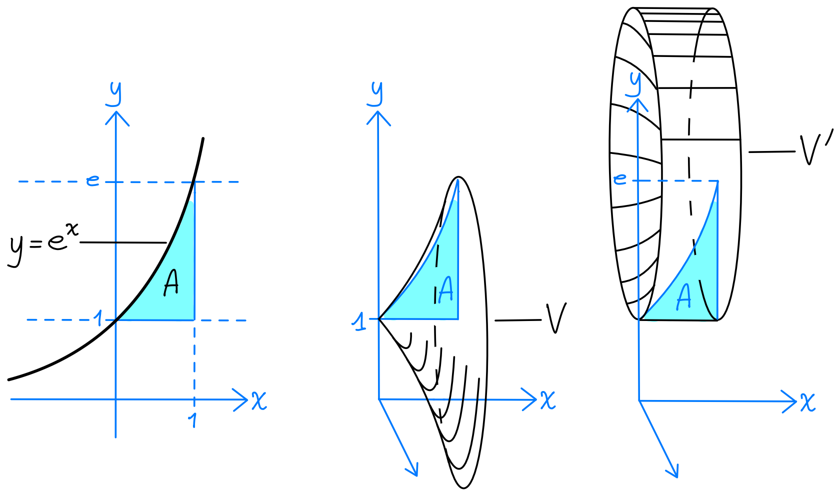
4 Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 \leq y \leq e^x$ e $-1 \leq x \leq 1$, sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse $y = 1$, e sia V' il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse $y = e$.

a) Disegnare A, V e V'.

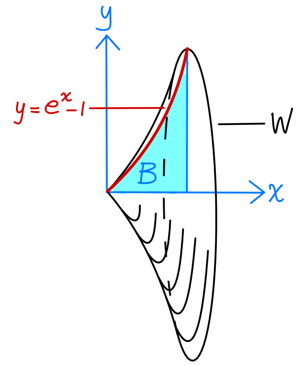
b) Calcolare il volume di V.

c) Calcolare il volume di V'.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Gli insiemi A, V e V' sono disegnati nella figura sotto:



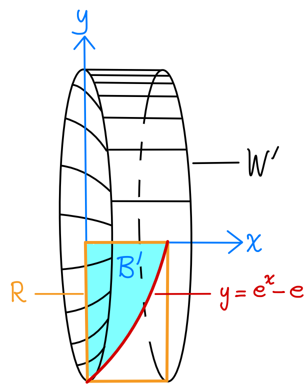
b) Siano B e W le figure ottenute traslando A e V verso il basso di 1, come in figura:



Allora V e W hanno lo stesso volume, e siccome W è il solido ottenuto ruotando B attorno all'asse x, possiamo calcolarne il volume usando la formula vista a lezione:

$$\begin{aligned}\text{volume}(V) = \text{volume}(W) &= \pi \int_0^1 (e^x - 1)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^1 e^{2x} - 2e^x + 1 \, dx \\ &= \pi \left| \frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + x \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 4e + 5) = 2{,}38 \pm 0{,}01\,.\end{aligned}$$

c) Sia W' il solido ottenuto traslando V' verso il basso di e, e siano R e B' il rettangolo e la sua parte descritti nella figura sotto:



Allora V' e W' hanno lo stesso volume, e quello di W' è uguale al volume del cilindro C ottenuto ruotando R attorno all'asse x meno il volume del solido W'' ottenuto ruotando B attorno all'asse x. Quindi

$$\begin{aligned}\text{volume}(W'') &= \pi \int_0^1 (e^x - e)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^1 e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 \, dx \\ &= \pi \left| \frac{e^{2x}}{2} - 2e^{x+1} + e^2 x \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}(-e^2 + 4e - 1)\,,\end{aligned}$$

e infine, tenuto conto che C ha raggio di base $e - 1$ ed altezza 1,

$$\begin{aligned}\text{volume}(V') = \text{volume}(W') &= \text{volume}(C) - \text{volume}(W'') \\ &= \pi(e-1)^2 - \frac{\pi}{2}(-e^2 + 4e - 1) \\ &= \frac{\pi}{2}(3e^2 - 8e + 3) = 5{,}37 \pm 0{,}01\,.\end{aligned}$$

5 Dire dove è improprio il seguente integrale, e studiarne il comportamento:

$$I = \int_0^{+\infty} \exp\left(\tfrac{1}{x} - x\right) dx\,.$$

<u>Soluzione</u>. La funzione integranda

$$f(x) := \exp\left(\tfrac{1}{x} - x\right)$$

è ben definita e continua per $x \neq 0$ ma non è definita per $x = 0$, e quindi l'integrale I è improprio in 0 e $+\infty$. e per studiarne lo scrivo come somma degli integrali impropri semplici

$$I_1 := \int_0^1 f(x)\,dx\,, \quad I_2 := \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\,,$$

di cui studio separatamente il comportamento. Osservo per cominciare che siccome la funzione f è positiva, I_1 ed I_2 esistono e sono finiti oppure uguali a $+\infty$.

Comportamento di I_2. Per $x \to +\infty$ si ha che $f(x) \sim e^{-x}$ perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{x} - x\right)}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\tfrac{1}{x}\right) = \exp(0) = 1\,,$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico forte,

$$I_2 \approx \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \Big| -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e}\,,$$

ed in particolare I_2 è finito.

Comportamento di I_1. Procedendo come sopra si vede che $f(x) \sim \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \to 0$ e quindi

$$I_1 \approx \int_0^1 \exp\left(\tfrac{1}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t^2}\,dt = +\infty\,,$$

dove nel primo passaggio ho usato il criterio del confronto asintotico forte, nel secondo ho usato il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$, mentre l'ultima uguaglianza segue dal fatto che l'ultimo integrale è improprio a $+\infty$ e la funzione integranda e^t/t^2 ha limite positivo per $t \to +\infty$ (per la precisione tende a $+\infty$).

In conclusione $I_1 = +\infty$, e quindi anche $I = +\infty$.

<u>Osservazioni</u>. (i) Per concludere che $I = +\infty$ basta dimostrare che $I_1 = +\infty$ e che I_2 esiste e non vale $-\infty$; la dimostrazione che I_2 è finito (data sopra) è superflua.

(ii) Si potrebbe pensare che l'equivalenza asintotica $\exp\left(\frac{1}{x} - x\right) \sim \exp(-x)$ per $x \to +\infty$ segue dal fatto che $\frac{1}{x} - x \sim -x$. Tuttavia questa giustificazione non è corretta perché in generale non è vero che $f_1(x) \sim f_2(x)$ implica $\exp(f_1(x)) \sim \exp(f_2(x))$. Per esempio, $-x+1 \sim -x$ per $x \to +\infty$, ma $e^{-x+1} \not\sim e^{-x}$ perché il rapporto e^{-x+1}/e^{-x} vale e per ogni x, e dunque non tende a 1.

(iii) Per dimostrare che $I_1 = +\infty$ si può anche usare il fatto che $\frac{1}{x} \to +\infty$ per $x \to 0^+$, e quindi, ricordando che $y \ll e^y$ per $y \to +\infty$,

$$\tfrac{1}{x} \ll \exp\left(\tfrac{1}{x}\right) \sim \exp\left(\tfrac{1}{x} - x\right) = f(x) \quad \text{per } x \to 0^+;$$

poiché inoltre $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$, usando il criterio del confronto asintotico debole ottengo $I_1 = +\infty$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Scrivere la formula dell'inversa $g(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{x+1}{x-2}$.

   SOLUZIONE. $g(y) = \dfrac{2y+1}{y-1}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(ax^3 + x^2 + 3ax)$ è crescente.

   SOLUZIONE. Serve che la derivata di $f(x)$ sia sempre positiva (o nulla), ovvero che che il polinomio $3ax^2 + 2x + 3a$ sia sempre positivo (o nullo). Questo lo si ottiene imponendo che il discriminante sia negativo o nullo, e che il coefficiente di x^2 sia positivo. Facendo i conti si ottiene $a \geq \frac{1}{3}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nell'ordine corretto rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{x^6 + \log x}{x^3 + x^4}}_{a}\,, \quad \underbrace{\frac{2x \log x}{x^3+1}}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{4}{x^2+1}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{x^6-1}{1+x^3}}_{d}\,.$$
   SOLUZIONE. $c \ll b \ll a \ll d$.

4. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := \dfrac{\exp(x^2)-1}{1+x^2}$.

   SOLUZIONE. $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^5}\, dx$.

   SOLUZIONE. Utilizzando il cambio di variabile $y = x^2 + 1$ si ottiene il valore $\frac{1}{8}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + n^4) \sin\big(\tfrac{1}{n^a}\big)$ converge ad un numero finito.

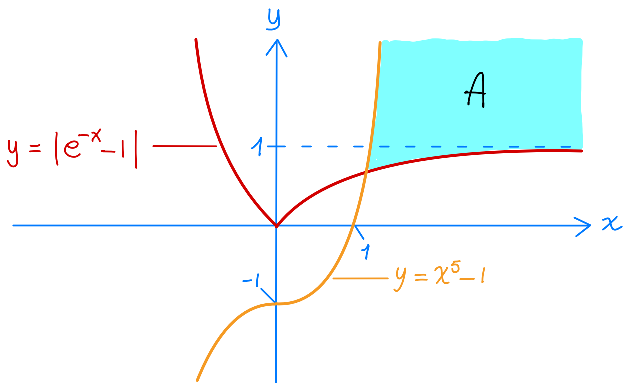
   SOLUZIONE. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{a-4}}$ e quindi converge per $a > 5$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2x + 4e^t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

   SOLUZIONE. Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine *lineare*. La soluzione cercata è $x(t) = 4(e^{2t} - e^t)$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\left|e^{-x} - 1\right| \leq y \leq x^5 - 1$.

   SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

1 Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione

$$f(x) := \log(\cos(2x)) - \log(1 + ax^2)\,.$$

Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, facendo particolare attenzione al caso $a = -2$.

Soluzione. Usando lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ con $t = 2x$ ottengo

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + O(x^4)\,,$$

usando poi lo sviluppo $\log(1 + t) = t + O(t^2)$ con $t = -2x^2 + O(x^4)$ ottengo

$$\begin{aligned}\log(\cos(2x)) &= \log(1 - 2x^2 + O(x^4)) \\ &= \big[-2x^2 + O(x^4)\big] + O((-2x^2)^2) = -2x^2 + O(x^4)\,,\end{aligned}$$

e analogamente

$$\log(1 + ax^2) = ax^2 + O(x^4)\,.$$ [1]

Mettendo insieme le ultime due equazioni ottengo $f(x) = -(2 + a)x^2 + O(x^4)$, e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = -(a + 2)\,x^2 \quad \text{per } a \neq -2.$$

Per $a = -2$ so solo che $f(x) = O(x^4)$; questo non basta a determinare la parte principale di $f(x)$, ma mi dice che ha grado 4 o più. Per trovarla ripercorro i calcoli svolti sopra usando sviluppi di Taylor più precisi.
Usando lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + O(t^6)$ con $t = 2x$ ottengo

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + O(x^6)\,,$$

usando poi lo sviluppo $\log(1 + t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)$ ottengo

$$\begin{aligned}\log(\cos(2x)) &= \log(1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + O(x^6)) \\ &= \big[-2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + O(x^6)\big] - \tfrac{1}{2}\big[-2x^2 + O(x^4)\big]^2 + O((-2x^2)^3) \\ &= -2x^2 - \tfrac{4}{3}x^4 + O(x^6)\,.\end{aligned}$$

e analogamente

$$\log(1 - 2x^2) = -2x^2 - 2x^4 + O(x^6)\,.$$

Mettendo insieme le ultime due equazioni ottengo infine $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + O(x^6)$, e quindi

$$\text{p.p.}(f(x)) = \tfrac{2}{3}x^4 \quad \text{per } a = -2.$$

2 Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 \leq y \leq \sqrt{1 + x^4}$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse y.

a) Tracciare un disegno approssimativo di A e di V.

b) Dire se l'area di A è finita o infinita.

c) Dire se il volume di V è finito o infinito.

Soluzione. a) Per disegnare A devo innanzitutto disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{1 + x^4} = (1 + x^4)^{1/2}\,.$$

Si vede subito che questa funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, pari, strettamente positiva, e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre studiando il segno della derivata

$$f'(x) = 2x^3\,(1 + x^4)^{-1/2}$$

si vede che $f(x)$ cresce per $x \geq 0$ e decresce per $x \leq 0$, e studiando il segno della derivata seconda

$$f''(x) = 2x^2(3 + x^4)\,(1 + x^4)^{-3/2}$$

si vede che $f(x)$ è convessa.

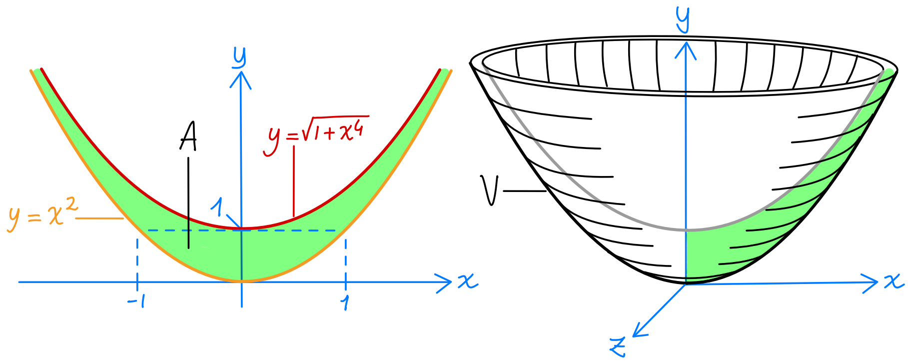
[1] Questa formula vale anche per $a = 0$, anche se in questo caso si ha, più semplicemente, $\log(1 + ax^2) = 0$.

Devo poi confrontare il grafico di $f(x)$ e quello di x^2. Elevando al quadrato entrambe le funzioni si vede che $f(x) > x^2$ per ogni x (i grafici non si intersecano mai).
Inoltre, per $x \to \pm\infty$,

$$f(x) - x^2 = x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{1/2} - 1 \right) = x^2 \left(\frac{1}{2x^4} + O\Big(\frac{1}{x^8}\Big) \right) \sim \frac{1}{2x^2} \tag{1}$$

(nel primo passaggio ho raccolto x^4 dentro la radice, e nel secondo ho usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + O(t^2)$ con $t = \frac{1}{x^4}$). Questo significa che i grafici di $f(x)$ e x^2 si avvicinano sempre di più per $x \to \pm\infty$ (sono tangenti "all'infinito").

Usando queste informazioni posso finalmente disegnare gli insiemi A e V (le proporzioni non sono rispettate, ed entrambe le figure sono state "tagliate" ad una certa altezza, mentre in realtà sono illimitate):



b) Siccome $f(x)$ e x^2 sono funzioni pari, l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse delle y, e quindi è L'area di A è data dall'integrale improprio

$$\text{area}(A) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) - x^2 \, dx$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e per via della formula (1) si comporta come l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$, che è finito. Quindi A ha area finita.

c) Usando nel modo giusto la formula per il volume dei solidi di rotazione attorno all'asse y ottengo che il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = 2\pi \int_0^{+\infty} x\big(f(x) - x^2\big) \, dx \, .$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e per via della formula (1) si comporta come l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$, che vale $+\infty$. Quindi V ha volume infinito.

3 Consideriamo la funzione

$$f(x) := \int_{x+1}^{2x} \exp(t^2) \, dt \, . \tag{*}$$

a) Determinare il dominio di definizione di $f(x)$ e studiarne il segno.

b) Trovare il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$.

c) Tracciare il grafico di $f(x)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Attenzione: come detto a lezione, non è possibile trovare una primitiva della funzione $\exp(t^2)$; la difficoltà dell'esercizio sta nel fatto che non si può quindi trovare una formula esplicita per $f(x)$.

a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, infatti l'integrale in (*) ha sempre senso. Inoltre, siccome la funzione integranda $\exp(t^2)$ è strettamente positiva per ogni t, il valore dell'integrale è strettamente positivo quando l'estremo di integrazione superiore $2x$ è strettamente maggiore dell'estremo inferiore $x+1$, cioè quando $x > 1$. Invece l'integrale è strettamente negativo se $2x$ è strettamente minore di $x+1$, cioè se $x < 1$.
Riassumendo, $f(x) > 0$ per $x > 1$, $f(x) < 0$ per $x < 1$, e chiaramente $f(x) = 0$ per $x = 1$.

b) Osservo che $\exp(t^2) \geq 1$ e quindi, quando $2x > x + 1$ (cioè quando $x > 1$), vale che

$$f(x) := \int_{x+1}^{2x} \exp(t^2)\, dt \geq \int_{x+1}^{2x} 1\, dt = x - 1\,,$$

e siccome la funzione $x - 1$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, lo stesso vale per la funzione $f(x)$.
Invece quando $2x < x + 1$ (cioè quando $x < 1$) la disuguaglianza nella formula sopra si inverte:

$$f(x) := \int_{x+1}^{2x} \exp(t^2)\, dt = -\int_{2x}^{x+1} \exp(t^2)\, dt \leq -\int_{2x}^{x+1} 1\, dt = x - 1\,,$$

e siccome la funzione $x - 1$ tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, lo stesso vale per la funzione $f(x)$.

c) La derivata di $f(x)$ è data da

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\exp((2x)^2) - \exp((x+1)^2) \\ &= 2\exp(4x^2) - \exp(x^2 + 2x + 1) \\ &= \exp(4x^2 + \log 2) - \exp(x^2 + 2x + 1)\,, \end{aligned}$$

e dunque $f'(x) \geq 0$, ovvero $f(x)$ è crescente, se

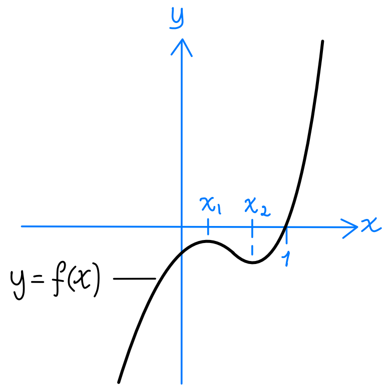
$$4x^2 + \log 2 \geq x^2 + 2x + 1$$

cioè se $x \leq x_1$ oppure $x \geq x_2$ dove

$$x_1 := \frac{1}{3}\big(1 - \sqrt{4 - 3\log 2}\big) \simeq -0{,}1286\,, \quad x_2 := \frac{1}{3}\big(1 + \sqrt{4 - 3\log 2}\big) \simeq +0{,}7953\,;$$

e invece $f'(x) \leq 0$, ovvero $f(x)$ è decrescente, se $x_1 \leq x \leq x_2$.

Sulla base di quanto visto ottengo il grafico riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate).



PRIMA PARTE (prima variante)

1. Dire per quali $\alpha \in [0, 2\pi)$ vale l'identità $\cos(x - \alpha) = \sin\big(x - \frac{\pi}{6}\big)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   SOLUZIONE. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{\exp(x^4) - 1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{e^x \sin x}{\cos x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3^x \sqrt{1 + x^4}$.
   SOLUZIONE. a) 1; b) $-\infty$; c) 0.

3. Dire se esistono i valori di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x) := \arctan(x^5 - 45\,x)$ relativamente alla semiretta $x \geq -2$ e calcolarli; se non esistono calcolare l'estremo inferiore e superiore dei valori.
   SOLUZIONE. Il massino non esiste e l'estremo superiore è $\pi/2$. Il minimo è $\arctan\big(-36\sqrt{3}\big)$.

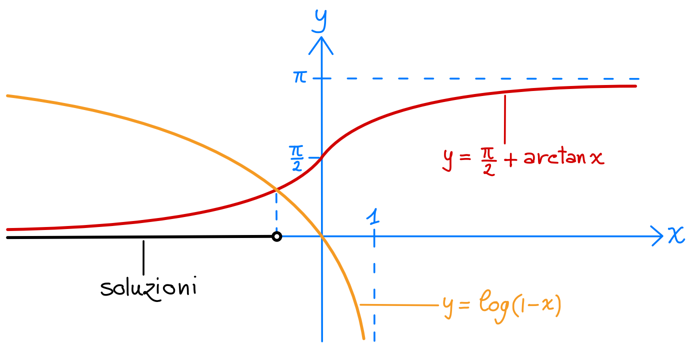
4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{e^x \log x}{x^4 + x^3} = o(x^a)$ per $x \to 0^+$.
   SOLUZIONE. $a < -3$.

5. Calcolare la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria $P(t) = (t^3 - 3t, 3t^2 + 4)$.
   SOLUZIONE. $d = \displaystyle\int_0^1 \big|\vec{v}(t)\big|\, dt = \int_0^1 3t^2 + 3\, dt = 4$.

6. Dire per quali $a > 0$ il seguente integrale improprio è finito: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4 \log\big(1 + \frac{1}{x^2}\big)}{x^{2a} + x^a} dx$.
   SOLUZIONE. L'integrale si comporta come $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a-2}}$, e quindi è finito per $a > \frac{3}{2}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{2t \log t}{x}$ tale che $x(1) = 1$.
   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili: risolvendola ottengo $x^2 = 2t^2 \log t - t^2 + c$ con c numero reale, ed imponendo la condizione iniziale ottengo
   $$x(t) = \sqrt{2t^2 \log t - t^2 + 2}\,.$$

8. Risolvere graficamente la disequazione $\frac{\pi}{2} + \arctan x \leq \log(1 - x)$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

$\boxed{1}$ Consideriamo la funzione

$$f(x) := e^x\left(\frac{1}{x}+6\right).$$

a) Disegnare il grafico $y = f(x)$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, dire quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.

c) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ (se ce n'è almeno una): calcolare il limite di $x(a)$ per $a \to +\infty$ e trovare una funzione elementare $g(a)$ asintoticamente equivalente a $x(a)$ per $a \to +\infty$.

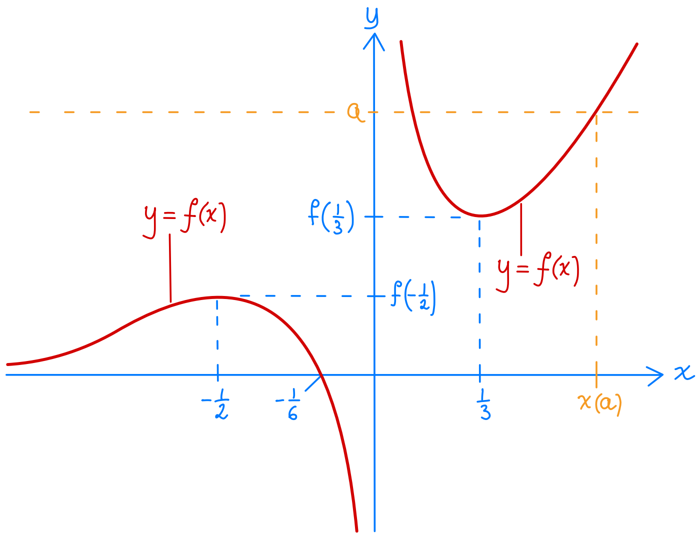
SOLUZIONE. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty\,.$$

Inoltre $f(x)$ vale 0 per $x = -\frac{1}{6}$, è positiva per $x < -\frac{1}{6}$ e per $x > 0$, ed è negativa per $-\frac{1}{6} < x < 0$. Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(6x^2 + x - 1)$$

si ottiene che $f(x)$ cresce per $x \leq -\frac{1}{2}$ e per $x \geq \frac{1}{3}$, e decresce per $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ e $0 < x \leq \frac{1}{3}$. Usando queste informazioni traccio il grafico riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



b) Dal grafico risulta chiaramente che il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ è

- 2 per $a \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = 9\sqrt[3]{e} = 12{,}56 \pm 0{,}01$;
- 1 per $a = 9\sqrt[3]{e}$;
- 0 per $9\sqrt[3]{e} > a > f\left(\frac{1}{2}\right) = 8/\sqrt{e} = 4{,}85 \pm 0{,}01$;
- 1 per $a = 8/\sqrt{e}$;
- 2 per $8/\sqrt{e} > a > 0$;
- 1 per $a \leq 0$.

c) Sempre dal grafico risulta chiaro che $x(a)$ tende a $+\infty$ per $a \to +\infty$. Inoltre vale

$$a = f(x(a)) = e^{x(a)}\left(\frac{1}{x(a)}+6\right) \sim 6\,e^{x(a)}\,.$$

(nell'ultimo passaggio ho usato che $1/x(a)$ tende a 0 e quindi è trascurabile rispetto a 6). Passando al logaritmo nell'equazione $a \sim 6\,e^{x(a)}$ ottengo

$$\log a \sim x(a) + \log 6\,.$$

(Per fare questo passaggio uso il seguente fatto, che non è stato menzionato a lezione e che quindi andrebbe dimostrato: se $f_1(x) \sim f_2(x)$ per $x \to x_0$ allora $\log(f_1(x)) \sim \log(f_2(x))$.)

Infine, poichè $\log 6$ è trascurabile rispetto a $\log a$ per $a \to +\infty$, ottengo

$$x(a) \sim \log a\,.$$

$\boxed{2}$ Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$\dot{x} + \big(2at + \tfrac{1}{t}\big)\, x = \exp(t^2)\,. \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione generale di (*), facendo particolare attenzione al caso $a = -1$.

b) Dire per quali a vale che *tutte* le soluzioni di (*) tendono a $+\infty$ poer $t \to +\infty$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine lineare con coefficiente $2at + \frac{1}{t}$ non costante, e la risolvo moltiplicandola per

$$\exp\big(\textstyle\int 2at + \frac{1}{t}\, dt\big) = \exp(at^2 + \log t) = t \exp(at^2)\,.$$

Così facendo l'equazione diventa

$$\big(t \exp(at^2)\, x\big)' = t \exp((a+1)t^2)$$

ovvero

$$t \exp(at^2)\, x = \int t \exp((a+1)t^2)\, dt\,,$$

ovvero

$$x = \frac{1}{t} \exp(-at^2) \int t \exp((a+1)t^2)\, dt\,.$$

Osservo ora che per $a = -1$ si ha

$$\int t \exp((a+1)t^2)\, dt = \int t\, dt = \tfrac{1}{2} t^2 + c\,,$$

mentre per $a \neq -1$, usando il cambio di variabile $s = (a+1)t^2$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int t \exp((a+1)t^2)\, dt &= \frac{1}{2a+2} \int \exp(s)\, ds \\ &= \frac{\exp(s)}{2a+2} + c = \frac{\exp((a+1)t^2)}{2a+2} + c\,.\end{aligned}$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = \exp(t^2)\left(\frac{t}{2} + \frac{c}{t}\right) \quad \text{per } a = -1, \tag{1}$$

e

$$x(t) = \frac{\exp(t^2)}{(2a+2)t} + \frac{c \exp(-at^2)}{t} \quad \text{per } a \neq -1. \tag{2}$$

b) Per $a = -1$ la formula (1) mostra che

$$x(t) \sim \frac{t}{2} \exp(t^2) \quad \text{per } t \to +\infty,$$

ed in particolare

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{2} \exp(t^2) = +\infty\,.$$

Per $a > -1$ si ha $-a < 1$, per cui $\exp(-at^2) \ll \exp(t^2)$ per $t \to +\infty$, e quindi la formula (2) mostra che

$$x(t) \sim \frac{\exp(t^2)}{(2a+2)t} \quad \text{per } t \to +\infty,$$

e usando che $2a + 2 > 0$ ottengo

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\exp(t^2)}{(2a+2)t} = +\infty\,.$$

Infine per $a < -1$ e $c \neq 0$ la formula (2) mostra che

$$x(t) \sim c\frac{\exp(-at^2)}{t} \quad \text{per } t \to +\infty,$$

e dunque

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{c\exp(-at^2)}{t} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0, \\ -\infty & \text{se } c < 0; \end{cases}$$

in particolare non tutte le soluzioni dell'equazione tendono a $+\infty$.

Riassumendo, le soluzioni dell'equazione convergono tutte a $+\infty$ se e solo se $a \geq -1$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Dato $a > 0$, consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}}\,.$$

Dire dove è improprio l'integrale $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, e discuterne il comportamento.

<u>SOLUZIONE</u>. Per $x > 0$ si ha che $x^a > 0$, quindi $\exp(x^a) > 1$, e quindi $(\exp(x^a) - 1)^{a+4} > 0$; dunque la funzione $f(x)$ è ben definita, positiva e continua per tali x. Tuttavia per $x = 0$ si ha $(\exp(x^a) - 1)^{a+4} = 0$ e quindi la funzione non è definita in 0.

Pertanto l'integrale I è improprio in 0 e $+\infty$, ed ammette solo due comportamenti: diverge a $+\infty$ oppure converge ad un numero finito positivo.

Per studiarne il comportamento lo spezzo come somma di due integrali impropri semplici che studio separatamente:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{I_2}\,.$$

Per capire il comportamento di I_1 studio il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to 0$: usando lo sviluppo $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$ con $t = x^a$ ottengo $\exp(x^a) - 1 \sim x^a$ e dunque

$$f(x) = \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}} \sim \frac{1}{x^{a(a+4)}}\,;$$

quindi

$$I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{a(a+4)}}\,,$$

e pertanto è finito se e solo se $a(a+4) < 1$, vale a dire $0 < a < -2 + \sqrt{5}$.

Per capire il comportamento di I_2 studio il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to +\infty$: usando che $e^t \gg t^b$ per $t \to +\infty$ per ogni $b > 0$, ottengo

$$\exp(x^a) - 1 \sim \exp(x^a) \gg x^{ab}\,,$$

quindi

$$(\exp(x^a) - 1)^{a+4} \gg x^{ba(a+4)}\,,$$

e

$$f(x) = \frac{1}{(\exp(x^a) - 1)^{a+4}} \ll \frac{1}{x^{ba(a+4)}}\,.$$

In particolare, prendendo $b = \frac{2}{a(a+4)}$, ottengo $f(x) \ll \frac{1}{x^2}$ e quindi l'integrale I_2 è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

Mettendo insieme i comportamenti di I_1 ed I_2 ottengo che I è finito se $0 < a < -2 + \sqrt{5}$ e altrimenti $I = +\infty$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare le coordinate polari dei seguenti punti (espressi in coordinate cartesiane), *scegliendo l'angolo nell'intervallo* $(-\pi, \pi]$: a) $(0, -3)$; b) $(-\sqrt{7}, -\sqrt{7})$; c) $(-2\sqrt{3}, 2)$.
   SOLUZIONE. a) $\rho = 3$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$; b) $\rho = \sqrt{14}$, $\theta = -\frac{3\pi}{4}$; c) $\rho = 4$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^3 + ax^2 + 2x)$ è crescente su tutto $\mathbb{R}$.
   SOLUZIONE. La derivata $f'(x) := (3x^2+2ax+2)\exp(x^3+ax^2+2x)$ deve essere sempre positiva, ovvero il polinomio di secondo grado $3x^2 + 2ax + 2$ deve essere sempre positivo; questo equivale a dire che il discriminante è negativo o nullo, cosa che si verifica per $-\sqrt{6} \le a \le \sqrt{6}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 di $f(x) := \sin(2x^2)\exp(3x^2)$.
   SOLUZIONE. $P(x) = 2x^2 + 6x^4 + \frac{23}{3}x^6$.

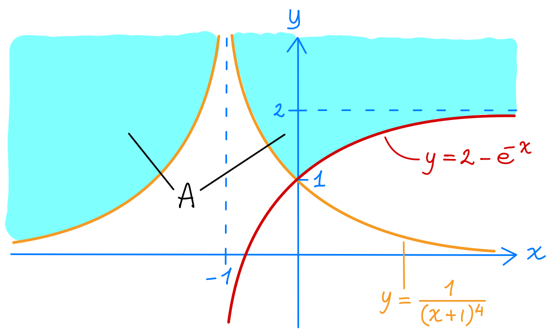
4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)}$.
   SOLUZIONE. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{5}\log|x-2| - \frac{1}{5}\log|x+3| + c\,.$

5. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n n!}$.
   SOLUZIONE. Uso la serie di Taylor di e^x: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n n!} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/3)^n}{n!}\right] - 1 - \frac{1}{3} = e^{1/3} - \frac{4}{3}\,.$

6. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{(1-x^2)^{2a}}\,dx$ è finito.
   SOLUZIONE. L'integrale è improprio semplice in 1, e con il cambio di variabile $x = 1-t$ ottengo un integrale improprio in 0:
   $$\int_0^1 \frac{\sin x}{(1-x^2)^{2a}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(1-t)}{(2t-t^2)^{2a}}\,dt \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{2a}}\,.$$
   Pertanto l'integrale di partenza è finito per $a < \frac{1}{2}$.

7. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = at^b$ risolve l'equazione differenziale $t^2\ddot{x} + x = t^6$.
   SOLUZIONE. $a = \frac{1}{31}$, $b = 6$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $y \ge \dfrac{1}{(x+1)^4}$ e $y \ge 2 - e^{-x}$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Dire per quali valori del parametro reale a l'equazione

$$\frac{x}{x+1} = a e^{x/2}$$

ammette esattamente due soluzioni.

SOLUZIONE. Riscrivo l'equazione nella forma

$$\frac{x\, e^{-x/2}}{x+1} = a\,,$$

e procedo al solito modo per determinarne il numero di soluzioni al variare del parametro a, cioè disegno il grafico della funzione

$$f(x) := \frac{x\, e^{-x/2}}{x+1}\,.$$

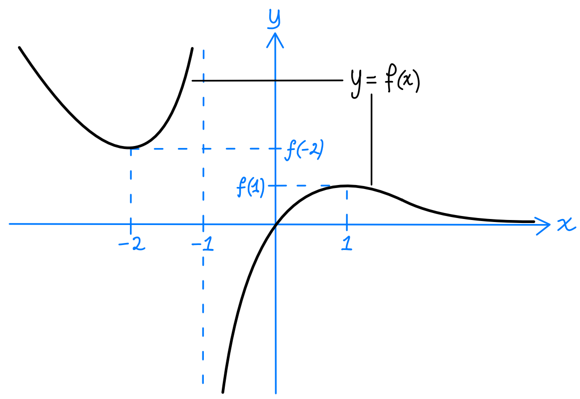
Per farlo, osservo innanzitutto che questa funzione è definita per $x \neq -1$, si annulla per $x = 0$, è positiva per $x < -1$ e $x > 0$ e negativa per $-1 < x < 0$, e valgono i seguenti limiti:

$$f(-\infty) = +\infty\,, \quad f(-1^-) = +\infty\,, \quad f(-1^+) = -\infty\,, \quad f(+\infty) = 0\,.$$

Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{(-x^2 - x + 2)\, e^{-x/2}}{2(x+1)^2}\,,$$

0 ottengo che $f(x)$ decresce per $x \leq -2]$ e $x \geq 1$, e cresce per $-2 \leq x < -1$ e per $-1 < x \leq 1$. In particolare $x = -2$ è un punto di minimo locale, e $f(-2) = 2e \simeq 5{,}44$, mentre $x = 1$ è un punto di massimo locale, e $f(1) = \frac{1}{2\sqrt{e}} \simeq 0{,}30$.
Utilizzando queste informazioni traccio il disegno sotto:



Da questo grafico risulta chiaro che l'equazione $f(x) = a$, e quindi anche l'equazione di partenza, ammette due soluzioni solamente per $a > f(-2) = 2e$ e per $0 < a < f(1) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$.

2 Consideriamo le funzioni

$$f(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\,, \quad g(x) := 1 - \frac{1}{x+2}$$

e l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > -1$ e $f(x) \leq y \leq g(x)$.

a) Disegnare i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, e l'insieme A.

b) Dire se l'area di A è finita oppure no.

SOLUZIONE. a) Il grafico della funzione $g(x)$ viene ottenuto traslando quello della funzione $1/x$ in alto di 1 e verso sinistra di 2.

Per disegnare il grafico di $f(x)$ osservo che questa funzione è definita per $x \neq -1$, è positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -1$, e valgono i seguenti limiti:

$$f(-\infty) = -1\,, \quad f(-1^-) = -\infty\,, \quad f(-1^+) = +\infty\,, \quad f(+\infty) = 1\,.$$

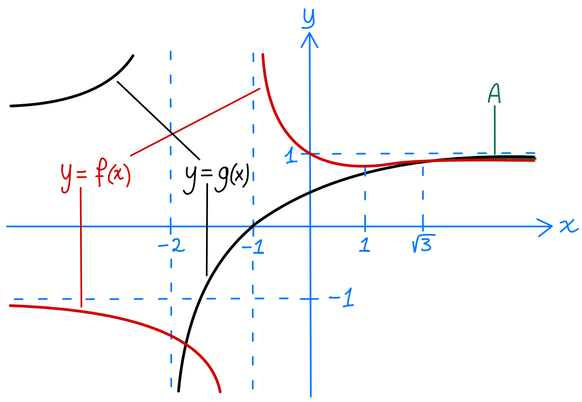
Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}\,,$$

ottengo che $f(x)$ decresce per $x < -1$ e per $-1 < x \leq 1$, e cresce per $x \geq 1$.
Per disegnare l'insieme A mi serve inoltre risolvere la disequazione $f(x) \leq g(x)$ per $x > -1$: moltiplicando entrambi i termini della disequazione per $(x+1)(x+2)$ (quantità sempre positiva perché $x > -1$) ottengo

$$(x+2)\sqrt{x^2+1} \leq (x+1)^2\,,$$

ed elevando al quadrato, dopo le dovute semplificazioni ottengo $3 \leq x^2$, ovvero $x \geq \sqrt{3}$.
Utilizzando queste informazioni traccio il disegno sotto (le proporzioni non sono completamente rispettate):



b) Per quanto visto al punto a), l'area di A è data dall'integrale

$$\text{area}(A) = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} g(x) - f(x)\, dx\,, \tag{1}$$

che è improprio semplice in $+\infty$.
Per determinare il comportamento di questo integrale cerco la parte principale di $g(x) - f(x)$ per $x \to +\infty$. Sapere che entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 1 per $x \to +\infty$ (ovvero hanno la stessa parte principale–vale a dire 1) non è basta; cerco quindi di sviluppi più precisi:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} &= \big(1+\tfrac{1}{x}\big)^{-1}\big(1+\tfrac{1}{x^2}\big)^{1/2} \\ &= \big(1-\tfrac{1}{x}+O\big(\tfrac{1}{x^2}\big)\big)\big(1+O\big(\tfrac{1}{x^2}\big)\big) \\ &= 1-\tfrac{1}{x}+O\big(\tfrac{1}{x^2}\big) \end{aligned} \tag{2}$$

(nel secondo passaggio ho raccolto x sia al numeratore che al denominatore, nel terzo ho riscritto l'espressione in modo diverso, nel quarto ho usato lo sviluppo $(1+t)^{-1} = 1-t+O(t^2)$ con $t = \frac{1}{x}$ per il primo fattore e lo sviluppo $(1+t)^{1/2} = 1+O(t)$ con $t = \frac{1}{x^2}$ per il secondo).
Analogamente

$$\begin{aligned} g(x) = 1-\frac{1}{x+2} = 1-\frac{1}{x\big(1+\frac{2}{x}\big)} &= 1-\tfrac{1}{x}\big(1+\tfrac{2}{x}\big)^{-1} \\ &= 1-\tfrac{1}{x}\big(1+O\big(\tfrac{1}{x}\big)\big) = 1+O\big(\tfrac{1}{x^2}\big) \end{aligned} \tag{3}$$

(nel secondo passaggio ho raccolto x al denominatore, nel terzo ho riscritto l'espressione in modo diverso, nel quarto ho usato lo sviluppo $(1+t)^{-1} = 1-t+O(t^2)$ con $t = \frac{2}{x}$).
Utilizzando (2) e (3) ottengo

$$g(x) - f(x) = \tfrac{1}{x} + O\big(\tfrac{1}{x^2}\big) \sim \tfrac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

quindi l'integrale improprio in (1) diverge a $+\infty$ per il criterio del confronto asintotitco, e dunque l'area di A è infinita.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Consideriamo la funzione $f(x) := \log(2e^x + 1)$, e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

a) Trovare $g(x)$.

b) Calcolare il limite di $f(x) - g(x)$ per $x \to +\infty$.

c) Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = ax + b + ce^{-x} + O\big(e^{-2x}\big)$ per $x \to +\infty$.

<u>SOLUZIONE</u>. Rispondo direttamente al punto c): osservo che

$$f(x) = \log(2e^x + 1) = \log\Big(2e^x\big(1 + \tfrac{1}{2}e^{-x}\big)\Big) = \log(e^x) + \log 2 + \log\big(1 + \tfrac{1}{2}e^{-x}\big)$$

(nel secondo passaggio ho raccolto $2e^x$ nell'argomento del logaritmo, nel terzo ho usato una nota proprietà del logaritmo).
Usando poi che $\log(e^x) = x$ e lo sviluppo di Taylor $\log(1 + t) = t + O(t^2)$ con $t = \frac{1}{2}e^{-x}$ (posso farlo perché $t \to 0$ quando $x \to +\infty$), ottengo infine

$$f(x) = x + \log 2 + \tfrac{1}{2}e^{-x} + O\big(e^{-2x}\big) \quad \text{per } x \to +\infty. \tag{4}$$

a) Da (4) segue immediatamente che la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ è x.

b) Da (4) segue anche che

$$f(x) - g(x) = f(x) - x = \log 2 + \tfrac{1}{2}e^{-x} + O\big(e^{-2x}\big) \to \log 2 \quad \text{per } x \to +\infty.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Risolvere la disequazione $2\cos(\pi x) \geq \sqrt{2}$ per $-2 \leq x \leq -1$.
   SOLUZIONE. $-2 \leq x \leq -\frac{7}{4}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, facendo le dovute semplificazioni:
   a) $\arcsin\left(\sqrt{1-x}\right)$; b) $\dfrac{3^{3x-1}}{9^{x-2}}$; c) $\log\left(\dfrac{x^2}{1-x^3}\right)$.
   SOLUZIONE. a) $\dfrac{-1}{2\sqrt{x(1-x)}}$; b) $\log 3 \cdot 3^{x+3}$; c) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3x^2}{1-x^3} = \dfrac{2+x^3}{x(1-x^3)}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel corretto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to 0^+$:
$$\underbrace{\frac{1}{x^2+x^3}}_{a} , \quad \underbrace{xe^x}_{b} , \quad \underbrace{x\sin x}_{c} , \quad \underbrace{\frac{1+\log x}{x^2}}_{d} .$$
   SOLUZIONE. $c \ll b \ll a \ll d$.

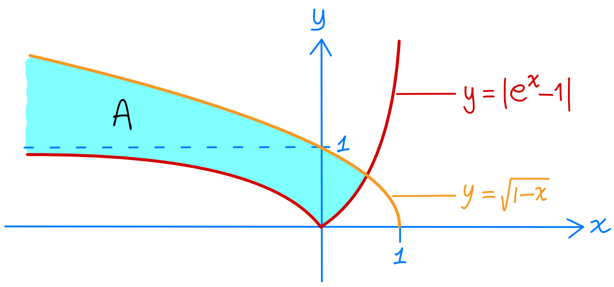
4. Dire se esistono i valori massimi e minimi della funzione $f(x) := x^2 e^{-x}$ per $x \leq 2$, e in caso affermativo dire quanto valgono.
   SOLUZIONE. Il valore massimo non esiste; il valore minimo è $f(0) = 0$.

5. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\cos(x^2)\log(1+x^3)}{e^{x^2}-1}$.
   SOLUZIONE. x.

6. Dire per quali $a > 0$ è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^{-2a})}{1+x^a}\,dx$.
   SOLUZIONE. L'integrale si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3a}}$ e quindi è finito per $a > \frac{1}{3}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{x}{\sqrt[3]{t+2}}$ tale che $x(-1) = 1$.
   SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \exp\left(\frac{3}{2}(t+2)^{2/3} - \frac{3}{2}\right)$

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|e^x - 1| \leq y \leq \sqrt{1-x}$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

1 Dato il parametro $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = 2e^t \,. \qquad (*)$$

a) Risolvere (*) per $a \neq 1;\, 5$.

b) Risolvere (*) per $a = 5$.

c) Risolvere (*) per $a = 1$.

<u>SOLUZIONE</u>. L'equazione (*) è lineare, a coefficienti costanti, e non omogenea. Com'è noto, la soluzione generale di tale equazione è della forma

$$x(t) = x_{\mathrm{om}}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = 0$, mentre $\tilde{x}$ è una particolare soluzione dell'equazione (*).

Per prima cosa trovo x_{om}. Le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2a\lambda + (a-2)^2 = 0$ sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm 2\sqrt{a-1}\,,$$

e quindi la formula per x_{om} dipende dal segno di $a-1$ (che è poi il segno del discriminante):

$$x_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 1, \\ (c_1 + c_2 t)e^t & \text{se } a = 1, \\ e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) & \text{se } a < 1, \end{cases}$$

dove c_1, c_2 sono numeri reali arbitrari, e $\omega := \sqrt{1-a}$ (per $a < 1$).

Passo ora al calcolo di $\tilde{x}$. Per farlo devo prima capire per quali a la funzione e^t risolve l'equazione omogenea, vale a dire per quali a il numero 1 risolve l'equazione caratteristica: sostituendo 1 a λ in detta equazione ottengo $a^2 - 6a + 5 = 0$, equazione che è soddisfatta per $a = 1$ e $a = 5$. Considero quindi tre casi, come suggerito dal testo stesso dell'esercizio.

a) $a \neq 1;\, 5$. In questo caso cerco una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = ce^t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo l'identità $c(a^2 - 6a + 5)e^t = 2e^t$, che è verificata per ogni t se $c(a^2 - 6a + 5) = 2$, ovvero se $c = \frac{2}{a^2-6a+5}$, e la soluzione particolare cercata è

$$\tilde{x}(t) = \tfrac{2}{a^2-6a+5} e^t \quad \text{per } a \neq 1\ 5.$$

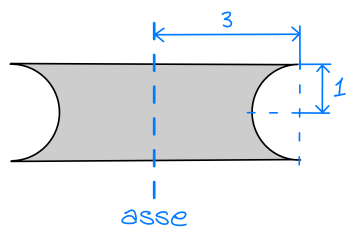
b) $a = 5$. In questo caso cerco una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = cte^t$, Procedendo come prima ottengo $c = -\frac{1}{4}$, e quindi

$$\tilde{x}(t) = -\tfrac{1}{4} te^t \quad \text{per } a = 5.$$

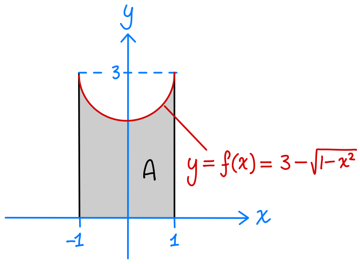
c) $a = 1$. In questo caso cerco una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = ct^2 e^t$, Procedendo come prima ottengo $c = 1$, e quindi

$$\tilde{x}(t) = t^2 e^t \quad \text{per } a = 1.$$

2 Calcolare il volume della ruota R la cui sezione (rispetto ad un piano passante per l'asse) è riportata nel disegno sotto.



<u>SOLUZIONE</u>. Ridisegnando la sezione di R come nella figura sotto, si vede che il solido R è dato dalla rotazione della figura piana A attorno all'asse delle x.



In particolare la semicirconferenza inferiore di centro $(0,3)$ e raggio 1 coincide con il grafico della funzione $f(x) = 3 - \sqrt{1-x^2}$. Pertanto il volume di R è dato da

$$\begin{aligned}\text{volume}(R) &= \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2\,dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left(3 - \sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} 10 - x^2 - 6\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \pi \left| 10\,x - \tfrac{1}{3}x^3 \right|_{-1}^{1} - 6\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{58}{3}\pi - 3\pi^2\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato che l'integrale $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ rappresenta l'area del semicerchio di raggio 1 e vale quindi $\pi/2$).

3 Consideriamo la funzione $f(x) := \dfrac{1}{1+4x^2}$.

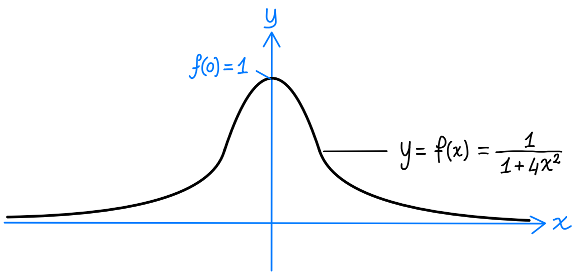
a) Tracciare un disegno approssimativo del grafico di f.

b) Trovare i punti del grafico di f che sono più vicini all'origine.

<u>SOLUZIONE</u>. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, sempre positiva, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{-8x}{(1+4x^2)^2}$$

ottengo che $f(x)$ cresce per $x \leq 0$ e decresce per $x \geq 0$; in particolare 0 è il punto di massimo assoluto. Usando queste informazioni traccio il grafico riportato qui sotto.



b) Dato $x \in \mathbb{R}$, il punto del grafico di f di ascissa x è $P_x = (x, f(x))$ e la distanza di P_x dall'origine è

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}\,.$$

Devo quindi trovare i punti di minimo assoluto della funzione $d(x)$ tra tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Per farlo utilizzo la solita procedura vista a lezione. Osservo per cominciare che

$$d(\pm\infty) = +\infty\,,$$

e che la derivata

$$d'(x) = \frac{2x + 2f(x)\,f'(x)}{\sqrt{x^2 + (f(x))^2}} = \frac{2x\left(1 - \frac{8}{(1+4x^2)^3}\right)}{\sqrt{x^2 + (f(x))^2}}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e si annulla per $x = 0$ e per

$$1 - \frac{8}{(1+4x^2)^3} \;\Leftrightarrow\; (1+4x^2)^3 = 8 \;\Leftrightarrow\; 1+4x^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\tfrac{1}{2}\,.$$

Osservo quindi che

$$f(0) = 1\,, \quad f\big(\pm\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

e ne deduco che i punti di minimo assoluto di d sono $x = \pm\frac{1}{2}$. Di conseguenza i punti del grafico di f più vicini all'origine sono

$$P_{\pm\frac{1}{2}} = \big(\pm\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big)\,.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \dfrac{1}{1-\sqrt{e^x-1}}$.

   SOLUZIONE. Deve valere $e^x - 1 \geq 0$ e $1 - \sqrt{e^x - 1} \neq 0$, vale a dire $x \geq 0$ e $x \neq \log 2$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+3x)}{\exp(x^2)-1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x+1}{\sin(\pi x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log x)}{\log x}$.

   SOLUZIONE. a) 3; b) $-\infty$; c) 0.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione $f(x) := 2\sin(3x^2)\sqrt{1+2x^4}$.

   SOLUZIONE. $P(x) = 6x^2 - 3x^6$.

4. Calcolare la velocità vettore e la velocità scalare di un punto nel piano che si muove con legge oraria: $x(t) = 1 + e^t \cos t$; $y(t) = -2 + e^t \sin t$.

   SOLUZIONE. $\vec{v}(y) = \big(e^t(\cos t - \sin t),\, e^t(\cos t + \sin t)\big)$; $\big|\vec{v}(y)\big| = \sqrt{2}\, e^t$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt[3]{1-3x}\, dx$.

   SOLUZIONE. Usando il cambio di variabile $t = 1 - 3x$ ottengo
   $$\int_0^{1/3} \sqrt[3]{1-3x}\, dx = \int_1^0 t^{1/3}\left(-\tfrac{1}{3}\right) dt = \Big|\, \tfrac{1}{4} t^{4/3} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4x = 8$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

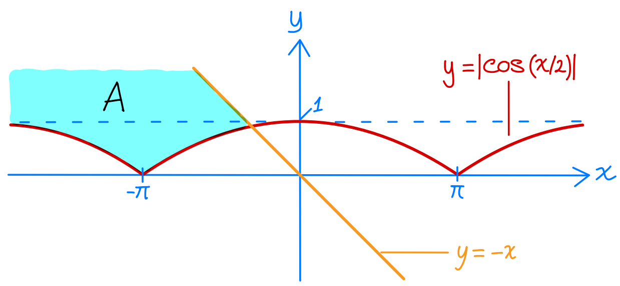
   SOLUZIONE. Equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea: la soluzione generale è $x(t) = -2 + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$; la soluzione cercata è $x(t) = -2 + e^{2t} + e^{-2t}$.

7. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a^x+1}{3^x+2}\, dx$ converge.

   SOLUZIONE. L'integrale si comporta come $\int_1^{+\infty} (a/3)^x\, dx$ e converge per $a < 3$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|\cos(x/2)| \leq y \leq -x$.

   SOLUZIONE.



Seconda parte

1 a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp\bigl(1 - \sqrt{1+3x^2}\bigr) - 1$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^2$.

c) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + g(x)$ con $g(x) := \exp\bigl(\frac{3}{2}x^2\bigr) - 1$

Soluzione. Affronto direttamente il punto b) da cui poi ottengo la risposta al punto a).

b) Per rispondere devo sviluppare la funzione $f(x)$ ad un'ordine superiore al 2.
Usando lo sviluppo $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$ con $t = 3x^2$ ottengo

$$\sqrt{1+3x^2} = 1 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{8}x^4 + O(x^6)\,,$$

e quindi

$$\exp\bigl(1 - \sqrt{1+3x^2}\bigr) = \exp\bigl(-\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{8}x^4 + O(x^6)\bigr)\,.$$

Usando ora lo sviluppo $\exp(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{8}x^4 + O(x^6)$ ottengo

$$\begin{aligned}\exp\bigl(1 - \sqrt{1+3x^2}\bigr) &= 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3)\\ &= 1 + \bigl(-\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{8}x^4 + O(x^6)\bigr) + \tfrac{1}{2}\bigl(-\tfrac{3}{2}x^2 + O(x^4)\bigr)^2 + O(x^6)\\ &= 1 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{4}x^4 + O(x^6)\,,\end{aligned}$$

e infine

$$f(x) + ax^2 = \exp\bigl(1 - \sqrt{1+3x^2}\bigr) - 1 + ax^2 = \bigl(a - \tfrac{3}{2}\bigr)x^2 + \tfrac{9}{4}x^4 + O(x^6)\,, \tag{1}$$

da cui segue che

$$\text{p.p.}\bigl(f(x) + ax^2\bigr) = \begin{cases}\bigl(a - \frac{3}{2}\bigr)x^2 & \text{se } a \neq \frac{3}{2},\\ \frac{9}{4}x^4 & \text{se } a = \frac{3}{2}.\end{cases}$$

a) In particolare per $a = 0$ ottengo $\text{p.p.}(f(x)) = -\frac{3}{2}x^2$.

c) Siccome $\text{p.p.}(\exp(t) - 1) = t$, allora la parte principale di $g(x)$ è $\frac{3}{2}x^2$, che sommata alla parte principale di $f(x)$ dà 0. Per trovare la parte principale di $f(x) + g(x)$ devo quindi sviluppare $g(x)$ a un'ordine maggiore di 2.
Usando lo sviluppo $\exp(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con $t = \frac{3}{2}x^2$ ottengo

$$g(x) = \exp\bigl(\tfrac{3}{2}x^2\bigr) - 1 = \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{8}x^4 + O(x^6)\,,$$

e quindi, usando la formula (1) con $a = 0$,

$$f(x) + g(x) = \tfrac{27}{8}x^4 + O(x^6)\,,$$

da cui segue infine che $\text{p.p.}\bigl(f(x) + g(x)\bigr) = \frac{27}{8}x^4$.

2 Consideriamo l'insieme A dato dai punti (x, y) tali $f(x) \le y \le g(x)$, dove

$$f(x) := \sqrt[5]{x^4 + 4}\,, \quad g(x) := \sqrt[5]{x^4 + x^2}\,.$$

Disegnare l'insieme A e dire se ha area finita o meno.

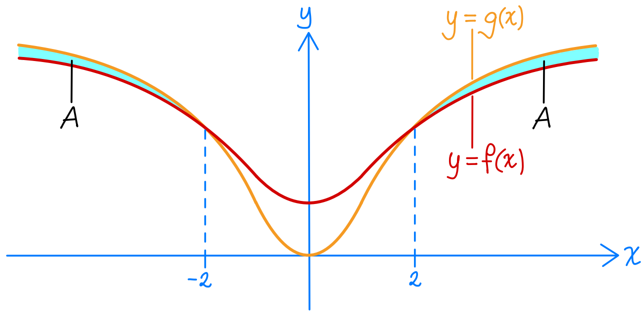
Soluzione. Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe definite per ogni $x \in \mathbb{R}$, pari, e tendono a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$, e per la precisione sono asintoticamente equivalenti a $|x|^{4/5}$.
Studiando inoltre il segno della delle derivate

$$f'(x) = \tfrac{4}{5}(x^4 + 4)^{-4/5}x^3\,, \quad g'(x) = \tfrac{2}{5}(x^4 + 4)^{-4/5}(2x^2 + 1)x\,,$$

si vede infine che sia $f(x)$ che $g(x)$ sono crescenti per $x \ge 0$ e decrescenti per $x \le 0$.

Per disegnare A ho inoltre bisogno di vedere per quali x vale che $f(x) \ge g(x)$. Elevando alla potenza quinta questa disequazione ottengo $x^4 + 4 \le x^4 + x^2$, ovvero $2 \le x^2$, che è soddisfatta per $x \ge 2$ e per $x \le -2$.

Sulla base di quanto detto ottengo il disegno sottostante:



Usando il fatto che A è simmetrico rispetto all'asse delle y ottengo

$$\text{area}(A) = 2 \int_2^{+\infty} g(x) - f(x)\, dx \,. \tag{2}$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e la funzione integranda è positiva.
Per determinarne il comportamento cerco la parte principale di $f(x)$ e di $g(x)$ per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) = \big(x^4+4\big)^{1/5} &= x^{4/5}\big(1+4x^{-4}\big)^{1/5} \\ &= x^{4/5}\big(1+\tfrac{4}{5}x^{-4}+O(x^{-8})\big) = x^{4/5}+\tfrac{4}{5}x^{-16/5}+O(x^{-36/5}) \end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato lo sviluppo di Taylor $(1+t)^{1/5} = 1+\frac{1}{5}t+O(t^2)$ con $t = 4x^{-4}$; posso farlo perché $t \to 0$ quando $x \to +\infty$).
Analogamente

$$\begin{aligned} g(x) = \big(x^4+x^2\big)^{1/5} &= x^{4/5}\big(1+x^{-2}\big)^{1/5} \\ &= x^{4/5}\big(1+\tfrac{1}{5}x^{-2}+O(x^{-4})\big) = x^{4/5}+\tfrac{1}{5}x^{-6/5}+O(x^{-16/5})\,, \end{aligned}$$

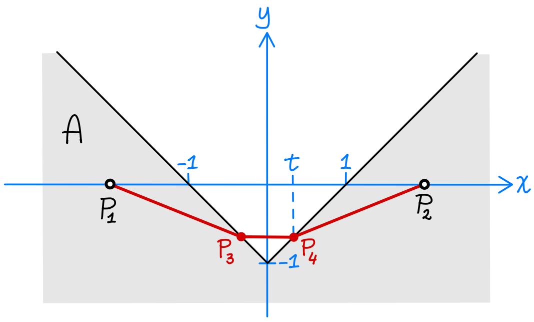
e mettendo insieme le ultime due formule ottengo infine

$$g(x) - f(x) \sim \tfrac{1}{5}x^{-6/5} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Pertanto l'integrale improprio in (2) si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{6/5}}\, dx$, che è finito perché $\frac{6}{5} > 1$.
In particolare l'area di A è finita.

$\boxed{3}$ Si vuole costruire una strada che congiunge due paesi rappresentati dai punti $P_1 := (-2,0)$ e $P_2 := (2,0)$ del piano cartesiano. Nel farlo, bisogna tenere conto che all'interno della zona A rappresentata dai punti del piano (x,y) tali che $y \leq |x| - 1$, il costo unitario della strada è la metà che all'esterno. Trovare il percorso meno costoso che congiunge i due paesi (si può dare per buono che tale percorso è simmetrico rispetto all'asse delle y).

<u>SOLUZIONE</u>. Siccome il percorso più breve che collega due punti del piano è un segmento, i percorsi che collegano P_1 e P_2 da considerare sono solo le spezzate con vertici sul bordo della zona A.
Tra questi, quelli simmetrici rispetto all'asse delle y sono fatti come il percorso in rosso nella figura sotto, ed in particolare sono parametrizzati dall'ascissa t del punto P_4.



Calcolo ora il costo di tale percorso, presupponendo che il costo unitario all'interno di A sia 1 e quello all'esterno sia 2 (nulla cambia se invece considero i costi c e $2c$). Chiaramente la

lunghezza del segmento che congiunge P_3 e P_4 è

$$\overline{P_3P_4} = 2t\,,$$

mentre tenendo conto che $P_4 = (t, t-1)$ ottengo

$$\overline{P_1P_3} = \overline{P_4P_2} = \sqrt{(2-t)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 6t + 5}$$

Pertanto il costo del percorso è

$$f(t) := 4t + 2\sqrt{2t^2 - 6t + 5}\,.$$

Si tratta ora di trovare il punto di minimo assoluto di $f(t)$ al variare di $t \geq 0$.
Per farlo, come prima cosa risolvo l'equazione $f'(t) = 0$: partendo dalla formula

$$f'(t) = 4 + \frac{4t - 6}{\sqrt{2t^2 - 6t + 5}}\,,$$

dopo alcuni passaggi ottengo l'equazione di secondo grado $4t^2 - 12\,t + 11 = 0$, che non ha soluzioni perché il discriminante è negativo; quindi l'equazione $f'(t) = 0$ non ha soluzioni.
Tenendo conto che $f(+\infty) = +\infty$, ne deduco che il valore minimo di $f(t)$ viene raggiunto per $t = 0$. Dunque il percorso meno costoso è la spezzata di vertici P_1, P_2 e $P_3 = P_4 = (0, -1)$, ed è tutto contenuto all'interno di A.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \dfrac{1}{\log(4-x^2)}$.

   SOLUZIONE. Deve essere $4 - x^2 > 0$ e $\log(4-x^2) \neq 0$, cioè $-2 < x < 2$ e $x \neq \pm\sqrt{3}$.

2. Trovare i valori massimi e minimi di $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ relativamente all'intervallo $1 < x \leq 4$. In caso non esistano, specificare gli estremi superiori e inferiori dei valori.

   SOLUZIONE. Il valore massimo non esiste e l'estremo superiore dei valori è $+\infty$; il valore minimo è $f(3) = 6$,

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 di $f(x) := (1 + 3x^4)\exp(2x^2)$.

   SOLUZIONE. $P(x) = 1 + 2x^2 + 5x^4$.

4. Dire per quali $a > 0$ vale che $xe^{2x} + 2^x = O(e^{ax})$ per $x \to +\infty$.

   SOLUZIONE. $a > 2$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} 2^{2x}\,dx$.

   SOLUZIONE. $\dfrac{8}{\log 2}$.

6. Dire dove è improprio il seguente integrale, e per quali $a > 0$ risulta finito: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+x^4)^a}$.

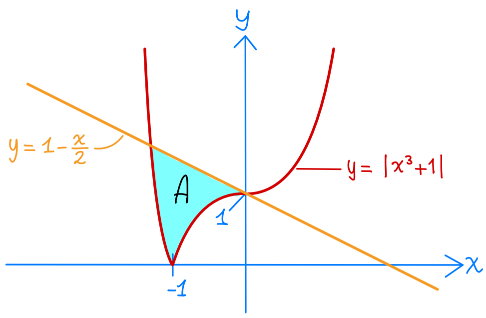
   SOLUZIONE. L'integrale è improprio in 0 e usando il fatto che è pari si ottiene
   $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+x^4)^a} = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^2+x^4)^a} \approx \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{2a}}\,,$$
   e dunque è finito per $a < \frac{1}{2}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = 6t$.

   SOLUZIONE. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x(t) = 3 + ce^{-t^2}$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x^3 + 1| \leq y \leq 1 - \dfrac{x}{2}$.

   SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

1 Dato $a > 0$ consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8t^2 \,. \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione generale di (*) per ogni $a > 0$.

b) Per quali $a > 0$ esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \gg e^{4t}$ per $t \to +\infty$?

Soluzione. a) Al solito, uso il fatto che la soluzione di (*) si scrive come

$$x(t) = x_{\mathrm{om}}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 0$ mentre $\tilde{x}$ è una soluzione particolare di (*).

Risoluzione dell'equazione omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0$, ed ha come discriminante $\Delta := a^2 - 4$ e come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4} \,.$$

Distinguo dunque tre casi, corrispondenti al segno del discriminante Δ:

- per $0 < a < 2$ si ha $\Delta < 0$ e $\lambda_{1,2} = a \pm \omega i$ con $\omega := \sqrt{-\Delta} = \sqrt{4 - a^2}$;
- per $a = 2$ si ha $\Delta = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;
- per $a > 2$ si ha $\Delta > 0$ e quindi $\lambda_{1,2}$ sono reali e distinte.

Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è

$$x_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} e^{at}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) & \text{per } 0 < a < 2, \\ e^{2t}(c_1 + c_2 t) & \text{per } a = 2, \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{per } a > 2, \end{cases} \tag{1}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Calcolo della soluzione particolare. Siccome il termine noto $8t^2$ è un polinomio di secondo grado, cerco la soluzione particolare tra i polinomi di secondo grado, cioè tra le funzioni della forma

$$\tilde{x}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \,.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (*) ottengo la seguente identità di polinomi

$$(2b_2 - 2ab_1 + 4b_0) + (-4ab_2 + 4b_1)t + 4b_2 t^2 = 8t^2 \tag{2}$$

che è verificata se i coefficienti b_0, b_1, b_2 soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 4b_2 = 8 \\ -4ab_2 + 4b_1 = 0 \\ 2b_2 - 2ab_1 + 4b_0 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} b_2 = 2 \\ b_1 = 2a \\ b_0 = a^2 - 1 \end{cases} \tag{3}$$

e dunque la soluzione particolare $\tilde{x}$ è data

$$\tilde{x}(t) = 2t^2 + 2at + a^2 - 1 \,. \tag{4}$$

b) Per $a \le 2$ non ci sono soluzioni $x(t)$ di (*) tali che $x(t) \gg e^{4t}$. Questo segue dal fatto che per ogni soluzione vale

$$x(t) = o(e^{4t}) \,. \tag{5}$$

(Infatti la formula (1) implica $x_{\mathrm{om}}(t) = O(e^{at}) = o(e^{4t})$ per $a < 2$, e $x_{\mathrm{om}}(t) = O(te^{2t}) = o(e^{4t})$ per $a = 2$, mentre la formula (4) implica $\tilde{x}(t) = O(t^2) = o(e^{4t})$ per ogni a.)

Resta da vedere se per $a > 2$ esiste $x(t)$ tale che $x(t) \gg e^{4t}$.

Indico con λ_1 la più grande delle due soluzioni dell'equazione caratteristica.

Se $\lambda_1 \le 4$ allora per ogni soluzione $x(t)$ vale

$$x(t) = O(e^{4t})$$

(la dimostrazione è la stessa di sopra) e quindi la risposta è negativa.
Se invece $\lambda_1 > 4$ allora la soluzione ottenuta ponendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ nella formula per x_{om}, vale a dire

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} + \tilde{x}(t)\,,$$

soddisfa $x(t) \gg e^{4t}$ (e in effetti lo stesso vale per ogni soluzione con $c_1 \neq 0$).
Resta da determinare per quali $a > 2$ vale che $\lambda_1 > 4$, cioè

$$a + \sqrt{a^2 - 4} > 4\,.$$

Risolvendo questa disequazione si ottiene $a > \frac{5}{2}$.

$\boxed{2}$ Discutere al variare di $a > 0$ il comportamento dell'integrale improprio

$$I := \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+\cos(\pi x))^a}\,.$$

Soluzione. L'integrale è pari e improprio in ± 1, e quindi

$$I = 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+\cos(\pi x))^a}\,.$$

L'integrale a destra dell'uguale è improprio semplice in 1, e usando il cambio di variabile $x = 1-t$ mi riconduco ad un integrale improprio semplice in 0:

$$I = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+\cos(\pi - \pi t))^a} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1-\cos(\pi t))^a}\,.$$

Usando il fatto che

$$1 - \cos(\pi t) = 1 - \left[1 - \tfrac{1}{2}(\pi t)^2 + O\big((\pi t)^4\big)\right] \sim \tfrac{\pi^2}{2} t^2\,,$$

ottengo infine che

$$I \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{2a}}\,,$$

ed in particolare I è finito se e solo se $a < \frac{1}{2}$.

$\boxed{3}$ Consideriamo la funzione $f(x)$ data da

$$f(x) := \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3t^2(1-t^4)}{t^4+1}\,dt\,.$$

a) Calcolare la derivata di $f(x)$.

b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.

b) Disegnare il grafico di $f(x)$.

[*L'integrale che definisce $f(x)$ non può essere calcolato esplicitamente (o perlomeno non è facile farlo); l'esercizio va quindi affrontato senza un'espressione esplicita per $f(x)$.*]

Soluzione. a) Per una formula vista a lezione, $f'(x) = \frac{3t^2(1-t^4)}{t^4+1}(\sqrt{x})'$ con $t := \sqrt{x}$, ovvero

$$f'(x) := \frac{3\sqrt{x}(1-x^2)}{2(x^2+1)}\,. \tag{6}$$

b) Dire che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ è mx^a equivale a dire che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{mx^a} = 1\,,$$

ovvero che il limite

$$m = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^a}$$

esiste ed è diverso da zero.
Siccome $f(x)$ tende a 0 per $x \to 0^+$, posso calcolare questo limite usando il teorema di de L'Hôpital e il fatto che $f'(x) \sim \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ per $x \to 0^+$:

$$m = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2a} x^{\frac{3}{2}-a} = \begin{cases} 0 & \text{se } a < \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2a} = 1 & \text{se } a = \frac{3}{2}, \\ +\infty & \text{se } a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Dunque il limite è finito solo se $a = \frac{3}{2}$, e in tal caso vale 1. Ne deduco che

$$\text{p.p.}(f(x)) = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Analogamente, per trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ considero il seguente limite (che ho calcolato usando il teorema di de L'Hôpital e il fatto che $f'(x) \sim -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$):

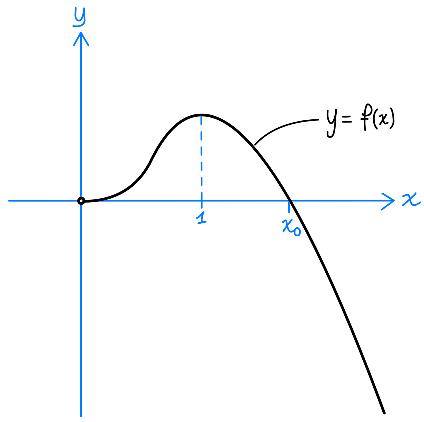
$$m = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^a} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{3}{2a} x^{\frac{3}{2}-a} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a < \frac{3}{2}, \\ -\frac{3}{2a} = -1 & \text{se } a = \frac{3}{2}, \\ 0 & \text{se } a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ne deduco che

$$\text{p.p.}(f(x)) = -x^{\frac{3}{2}} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

c) La funzione $f(x)$ è definita per $x \geq 0$ (deve infatti essere definito l'estremo di integrazione $\sqrt{x}$ nella formula che definisce $f(x)$).
Studiando il segno della derivata data in (6) ottengo che $f(x)$ è crescente per $0 \leq x \leq 1$ e decrescente per $x \geq 1$ (in particolare $x = 1$ è il punto di massimo assoluto).

Usando queste informazioni e le parti principali ottenute al punto b) traccio il disegno qui sotto.



OSSERVAZIONI. (i) Senza calcolare l'integrale che definisce f non è possibile determinare il valore di $f(1)$, e tantomeno il punto x_0 in cui f si annulla.

(ii) La parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ può essere ottenuta anche sostituendo alla funzione integranda la sua parte principale per $t \to 0$:

$$f(x) := \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3t^2(1-t^4)}{t^4+1}\, dt \sim \int_0^{\sqrt{x}} 3t^2\, dt = \Big|\, t^3 \,\Big|_0^{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}\,.$$

Questa sostituzione è corretta, ma andrebbe giustificata, e il modo più semplice per farlo è usare il Teorema di de L'Hôpital come fatto sopra.

Allo stesso modo si può ottenere la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$. In questo caso la sostituzione è legittima solo se $f(x)$ ha limite *infinito* per $x \to +\infty$ (il fatto che non sia sempre vera rende a maggior ragione necessaria una giustificazione).

Versione: 25 febbraio 2024

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica 1 (561AA), a.a. 2022-23

Testi e soluzioni

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per il corso di laurea in Matematica si compongono di due parti: una prima parte con nove domande relativamente semplici di cui dare solo la risposta, ed una seconda con 4 o 5 problemi di cui dare invece una soluzione articolata. Il tempo a disposizione è di 70 minuti per la prima parte e di due ore per la seconda. Per ottenere la sufficienza sono solitamente richieste almeno sei risposte corrette nella prima parte, ed due problemi completamente risolti nella seconda.
Questa raccolta contiene i testi e le soluzioni degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2022-23, incluse le prove in itinere. Per facilitare chi vuole esercitarsi, la raccolta è divisa in due sezioni: la prima contiene solo i testi, mentre la seconda contiene i testi e le soluzioni. Degli scritti di cui sono state preparate più varianti qui viene riportata solo la prima.

Programma del corso [versione: 1 giugno 2023].
Gli argomenti non fondamentali sono riportati in corsivo.

Prima parte: Calcolo.

1. Richiamo di alcune nozioni di base
   - Trigonometria, coordinate polari di un punto nel piano.
   - Grafici delle funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmo (in base e), funzioni trigonometriche, funzioni trigonometriche inverse.
   - Funzioni: dominio, codominio, immagine, grafico; funzione inversa; funzioni pari e dispari.
   - Operazioni sui grafici di funzioni. Risoluzione "grafica" di equazioni e disequazioni.

2. Limiti di funzioni e continuità
   - Limiti di funzioni: definizione e significato; proprietà di base.
   - Funzioni continue. Continuità delle funzioni elementari (senza dimostrazione).

3. Derivate
   - Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcuni significati fisici della derivata: velocità (scalare e vettoriale) e accelerazione di un punto in movimento.
   - Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato); trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra; notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero. Principio di sostituzione nel calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - Teorema di de l'Hôpital (senza dimostrazione). Confronto tra i comportamenti delle funzioni elementari all'infinito e in zero.
   - Sviluppo di Taylor di una funzione e Teorema di Taylor (rappresentazione del resto come "o piccolo" e "o grande", con dimostrazione). Sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo di limiti e di parti principali.
   - Valore massimo e minimo di una funzione; punti di massimo e di minimo (assoluti e locali). Estremo superiore ed inferiore di un insieme (semplice) di numeri reali, Estremo superiore ed inferiore dei valori di una funzione. Individuazione del valore massimo e minimo (oppure degli estremi superiore ed inferiore dei valori) di una funzione definita su un'unione finita di intervalli (aperti o chiusi, limitati e non).
   - Funzioni crescenti e decrescenti: definizione e caratterizzazione in termini di segno della derivata. Funzioni convesse e concave: definizione e caratterizzazioni in termini di segno della derivata seconda. Disegno del grafico di una funzione.

4. Integrali
   - Definizione (provvisoria) di integrale di una funzione su un intervallo in termini di area. Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione parziale).
   - Calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali.

- Approssimazione dell'integrale tramite somme finite.
- La distanza percorsa da un punto in movimento come integrale del modulo della velocità. Parametrizzazione di una curva e calcolo della lunghezza. Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.

5. Equazioni differenziali
   - Equazioni differenziali del primo ordine: definizione e fatti generali.
   - Risoluzione delle equazioni lineari e delle equazioni a variabili separabili.
   - Equazioni differenziali del secondo ordine: definizione e fatti generali. Struttura dell'insieme delle soluzioni delle equazioni lineari.
   - Risoluzione delle equazioni lineari del secondo ordine: soluzioni delle equazioni omogenee a coefficienti costanti; ricerca della soluzione particolare di delle equazioni a coefficienti costanti e non omogenee per alcune classi di termini noti.
   - *Esempi di equazioni differenziali tratti dalla fisica: equazione di decadimento, equazione dell'oscillatore armonico e dell'oscillatore armonico smorzato.*

Seconda parte: Analisi.

6. Basi di teoria degli insiemi.
   - Prodotto di due insiemi. Le funzioni $f : A \to B$ intese come grafici; caratterizzazione dei sottoinsiemi di $A \times B$ che sono grafici. L'insieme A^B delle funzioni da B ad A; l'insieme delle parti (sottoinsiemi) di un dato insieme.
   - Numeri naturali, interi e razionali. Numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite. *I numeri razionali corrispondono ai numeri reali con espansione decimale finita o periodica.*
   - Insiemi finiti e insiemi infiniti; insiemi numerabili e più che numerabili; insiemi con uguale cardinalità.
   - L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è un insieme numerabile; il prodotto di una famiglia finita di insiemi numerabili è un insieme numerabile. I numeri interi, razionali e algebrici sono numerabili. I numeri reali sono più che numerabili. *Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein (senza dimostrazione).*

7. Completezza dei numeri reali
   - I numeri reali estesi.
   - Definizione di estremo superiore e inferiore per un insieme qualunque di numeri reali (o di numeri reali estesi). Completezza dei numeri reali, intesi come i numeri con espansioni decimali finite o infinite.
   - *Insiemi (totalmente) ordinati, definizione di massimo e minimo di un insieme, definizione di estremo superiore ed inferiore, definizione di completezza. Caratterizzazione dei numeri reali come campo ordinato e completo (senza dimostrazione).*

8. Successioni di numeri reali
   - Definizione di successione di numeri reali e di sottosuccessione. Definizione di limite di una successione; possibili comportamenti di una successione.
   - Le successioni monotone hanno limite.
   - Una successione converge ad un limite finito se e solo se è una successione di Cauchy.
   - Teorema di Bolzano-Weierstrass (ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente).
   - Successioni definite per ricorrenza. Risoluzione esplicita nel caso di ricorrenze lineari.

9. Funzioni continue
   - Rivisitazione della definizione continuità e di limite in termini di intorni.
   - Caratterizzazione della continuità e del limite in termini di successioni.

- Teorema di esistenza degli zeri (teorema dei valori intermedi). Calcolo approssimato degli zeri.
- Teorema di Weierstrass (esistenza dei punti di massimo e minimo). Giustificazione dell'algoritmo per la ricerca di massimi e minimi visto nella prima parte del corso.

10. Derivate
    - Rivisitazione della definizione di derivata. Caratterizzazione della derivabilità in termini di sviluppo di Taylor al primo ordine. Dimostrazione dei teoremi chiave sul calcolo delle derivate: derivata della somma, del prodotto, della funzione composta e della funzione inversa.
    - La derivata si annulla nei punti di massimo/minimo locale interni al dominio. Teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange.
    - Uso dei teoremi di Cauchy e Lagrange per dimostrare alcuni risultati enunciati in precedenza: caratterizzazione delle funzioni monotone in termini segno della derivata; caratterizzazione delle funzioni convesse/concave in termini di monotonia della derivata (e di segno della derivata seconda); teorema di de L'Hôpital.
    - Teorema dello sviluppo di Taylor: rappresentazione del resto in forma di Lagrange e in forma integrale.

11. Integrale secondo Riemann
    - Funzioni uniformemente continue. Le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono uniformemente continue.
    - Definizione di integrale secondo Riemann. Le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann; stima dell'errore nell'approssimazione dell'integrale con somme di Riemann.
    - *Altre classi di funzioni integrabili secondo Riemann (senza dimostrazioni). Esempi di funzioni non integrabili secondo Riemann.*
    - Definizione di primitiva di una funzione continua; esistenza di una primitiva e teorema fondamentale del calcolo integrale.

12. Integrali impropri
    - Integrali impropri semplici: definizione e possibili comportamenti.
    - Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
    - Integrali impropri non semplici.

13. Serie numeriche
    - Serie numeriche: definizione e possibili comportamenti. Esempio: la serie geometrica.
    - Criterio del confronto serie-integrale; serie armonica generalizzata; stima integrale della coda di una serie.
    - Criteri per determinare il comportamento di una serie: confronto e confronto asintotico (per serie a termini positivi), convergenza assoluta (per serie a segno variabile), radice, rapporto.
    - Teorema di Leibniz per serie a segni alterni.
    - *Formula di Stirling (con dimostrazione parziale).*

14. Serie di potenze
    - Serie di potenze: raggio di convergenza e comportamento. Formula alternativa per il calcolo del raggio di convergenza. *Derivata di una serie di potenze (senza dimostrazione).*
    - Convergenza della serie di Taylor di alcune funzioni elementari: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\log(1+x)$. Rappresentazione del numero e come serie. Definizione di e^z con z numero complesso e dimostrazione della formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. *Rappresentazione di* $\pi/4$ *come serie.*

15. Equazioni differenziali lineari

- ◦ Equazioni differenziali lineari di ordine qualunque. Teorema di esistenza e unicità (senza dimostrazione) e struttura dell'insieme delle soluzioni.
- ◦ Risoluzione delle equazioni omogenee a coefficienti costanti. Calcolo della soluzione particolare di un'equazione a coefficienti costanti non omogenea con il metodo degli annichilatori.

T E S T I

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $\log(x^2/2^x)$ nel punto di ascissa $x = 1$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $(\sin x - x)(1 + \log x) = O(x^a)$ quando $x \to 0^+$.

3. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x + x^2) - 1}{x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log^2 x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \cos(\exp(x^2 + x^3))$.

4. Trovare il valore massimo/minimo di $\exp(x^3 - 3x + 1)$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$ (se non esistono specificarlo e calcolare invece l'estremo superiore/inferiore dei valori).

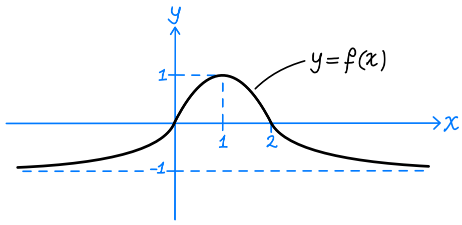
5. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in $x = 0$ della funzione $\dfrac{1}{1 - x^3 + x^6}$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 2x \exp(2x^2)\, dx$.

7. Calcolare la distanza percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria $P(t) := \big(e^t \cos(2t), e^t \sin(2t)\big)$.

8. Determinare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^t x^3$ tale che $x(0) = -1$.

9. Detta $f(x)$ la funzione il cui grafico è disegnato sotto, disegnare il grafico di $2f(1-x)$ e risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \leq 2f(1-x)$.



SECONDA PARTE (prima variante)

1. a) Dato $a > 0$, risolvere l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8 - 4e^{2t}\,. \tag{*}$$
b) Per quali $a > 0$ vale che *ogni* soluzione $x(t)$ di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{3t})$ per $t \to +\infty$?

2. a) Per ogni $a \geq 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$x^6 = a(x-1)^2 \tag{*}$$
b) Per ogni $a \geq 0$ indico con $x(a)$ la più grande soluzione di (*). Disegnare il grafico della funzione $x(a)$, specificando l'insieme di definizione, i punti di discontinuità e i limiti significativi.

   c) Trovare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

3. Dato $a > 1$, indichiamo con E_a l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che
$$|x|^a + |y|^a \leq 1\,.$$
a) Fare un disegno approssimativo di E_4, discutendone anche la convessità.

   b) Trovare la più piccola circonferenza centrata nell'origine che contiene E_4, e la più grande che è contenuta in E_4.

   c) Dimostrare che E_a "cresce" al crescere di a.

   d) Disegnare il "limite" di E_a per $a \to +\infty$.

4. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con parte principale ax^b per $x \to +\infty$ (con $b > 0$ e $a \neq 0$), consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$g(x) := \int_{x^2}^{x^2+x} f(t)\,dt\,.$$
Trovare la parte principale di $g(x)$ per $x \to +\infty$. [*Suggerimento: iniziare dal caso* $f(x) := x^b$.]

5. Consideriamo due cilindri infiniti C_1 e C_2 di raggio 1 con assi che si intersecano ortogonalmente. Calcolare il volume dell'intersezione $V := C_1 \cap C_2$.
[*Può essere utile scegliere degli assi concreti e descrivere* V *in termini di disequazioni.*]

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare le soluzioni x con $0 \leq x \leq \pi$ della disequazione $2\cos(2x) \geq \sqrt{3}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^{\log x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2\, 2^x}{(x+1)^3}\right)$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{2^x} + \frac{1}{x^2}}_{a}\ , \quad \underbrace{x^4 + \log x}_{b}\ , \quad \underbrace{\frac{2x^4}{1 - \log x}}_{c}\ , \quad \underbrace{\frac{x+1}{x^4+1}}_{d}\ .$$

4. Scrivere il polinomio di Taylor all'ordine 6 di $f(x) := \log(1 + 2x^3 + x^6)$.

5. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := \exp(1 - ax^2)$ è concava nell'intervallo $-1 \leq x \leq 2$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int (9x^2 - 1) \log x \, dx$.

7. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = \exp(at^2)$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} - (1 + t^2)x = 0$?

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 4t^3 x = 2t^3 \exp(2t^4)$ tale che $x(0) = 0$.

9. a) Disegnare i grafici delle funzioni $f_1(x) := (x+1)^{-2}$ e $f_2(x) := \sqrt{2 - x}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$.

Seconda parte (prima variante)

1. Consideriamo i triangoli delimitati dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} in un punto di ascissa positiva. Dire se tra questi triangoli ne esistono uno di area massima ed uno di area minima, e in caso affermativo determinarli.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1}{\cos(-2x^2 + ax^4)} - 1$$
a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, indicata con $g(x)$.
b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0$.

3. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $y^2 \leq x^2 - x^4$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.
a) Tracciare un disegno approssimativo di A e calcolarne l'area.
b) Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

Prima parte (prima variante)

1. Calcolare a) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^2)}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{x^2 - x^6}$; c) $\lim_{x\to 1^+} \exp(-1/\log x)$.

2. Calcolare il polinomio di Taylor all'ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := \cos(2x - x^2)$.

3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 8t$.

4. Trovare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ per $n = 0, 1, 2, \dots$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-ax}\, dx$ è finito.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^a + n^{2a}}$ è finita.

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n \log n} + 1}$.

8. Consideriamo un punto P che si muove con legge oraria $P(t) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t)$. Scrivere il modulo della velocità e dire se la distanza L percorsa dall'istante $t = 1$ all'istante $t = +\infty$ è finita o infinita.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano tali che $\dfrac{1}{(|x| - 1)^2} \le y \le x^2 + 2$.

SECONDA PARTE

1. Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x|^{4a} \leq y \leq (x^4 + 1)^a$, ed indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.

   a) Dire per quali a l'area di A è finita.

   b) Dire per quali a il volume di V è finito.

2. Consideriamo una successione (x_n) che soddisfa l'equazione ricorsiva $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n}$. Discutere il comportamento di (x_n) al variare di $x_0 \in [0, 1]$.

3. Consideriamo la serie di potenze

$$f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(n^2 - n)} \,. \tag{*}$$

   a) Determinare il raggio di convergenza R e discutere il comportamento per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   b) Calcolare il valore $f(x)$ per $-R < x < R$. [*Suggerimento: calcolare* $f''(x)$.]

4. Consideriamo una funzione iniettiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e una successione di numeri reali (x_m).

   a) Dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$.

   b) Dimostrare che se $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = L$ per qualche $L \in \mathbb{R}$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\sigma(n)} = L$.

   c) Caratterizzare le funzioni σ per cui vale anche l'implicazione opposta in b).

5. Consideriamo un insieme X ed una successione di funzioni $f_n : X \to [0, 1]$ con $n = 1, 2, \dots$.

   a) Dimostrare che se X è finito esiste una sottosuccessione (n_k) tale che la successione di numeri reali $\big(f_{n_k}(x)\big)$ converge per ogni $x \in X$.

   b) Dimostrare che questo risultato vale anche se X è numerabile.

   c) Far vedere che questo risultato non vale per X qualunque.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{4 + x^2 - x^4}$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^2) + ax^2$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\log\left(2^x x^{-2}\right)}_{a}\ , \quad \underbrace{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{1+2^x}}_{b}\ , \quad \underbrace{\frac{4x}{(\log x)^2 + 1}}_{c}\ , \quad \underbrace{\frac{1}{\log x - x^3}}_{d}\ .$$

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x^2 + x^a}{(\cos x)^{2a}}\, dx$ è finito.

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 - n^2}{2^n - 1} x^{2n}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + 4x^2)\sin t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. In quale classe di funzioni conviene cercare una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare $D^4 x - x = te^{-t}$?

9. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x| + 2} \leq (1 - x)^3$.

SECONDA PARTE

1. Siano dati $X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Come visto a lezione, f è continua in $\bar{x}$ se
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| \le \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \le \varepsilon. \tag{C1}$$
Consideriamo adesso la seguente variante dell'affermazione (C1):
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon. \tag{C2}$$
Dimostrare che (C1) e (C2) sono equivalenti.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ con $a \ne 0$, consideriamo l'equazione differenziale
$$D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t + 1\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale dell'equazione (*).
b) determinare gli a tali che tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

3. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := (\cos x)^{2x} - 1$.
b) Dato $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^3$.

4. Indichiamo con S_N le somme parziali della serie
$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}\,.$$
a) Trovare N affinché S_N approssimi S con errore inferiore a 10^{-3}.
b) Calcolare il valore esatto di S.
[*Suggerimento per b): considerare la serie di potenze* $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.]

5. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che
$$\int_1^{+\infty} |f'(x)|\, dx < +\infty\,. \tag{1}$$
Dimostrare che:
a) l'integrale improprio $I := \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste se e solo se esiste $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\, dx$.[1]
b) Dimostrare che la serie $S := \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ si comporta come l'integrale improprio I.[2]
[*Suggerimento per b): porre* $a_n := \int_n^{n+1} f(x)\, dx - f(n)$ *e dimostrare che* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.]

[1] Si intende che in questo limite la variabile n è *intero*.
[2] Questa è una variante del teorema di confronto serie–integrale che si applica anche a funzioni f non decrescenti.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare $r > 0$ ed $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\sin x + \cos x = r \sin(x + \alpha)$.

2. Determinare l'inversa della funzione $f(x) := x^2 - x$ ristretta alla semiretta $x \leq \frac{1}{2}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{1 - 2x^2 - x^4}$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{x^3 + 1}{\log(x^4 + 1)} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$

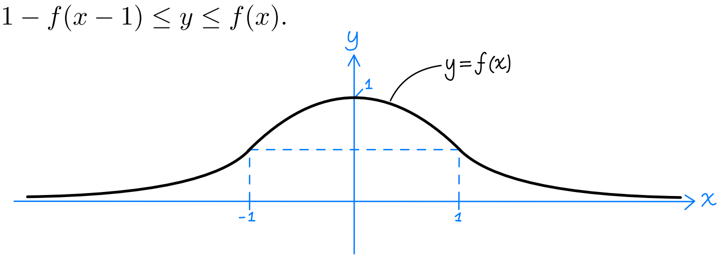
5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_2^{3^x} \frac{dt}{1 + t^8}$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 \leq x \leq 2$ e $(x + 1)^{-1/2} \leq y \leq x^{-1/2}$. Calcolare l'area di A.

7. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2x = 2t$.

8. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n^2 + 1)^a - n^{2a}\right]$ converge ad un numero finito.

9. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è riportato nella figura sotto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(x - 1) \leq y \leq f(x)$.



SECONDA PARTE

1. Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $|x|^{4a} \leq y \leq (x^4 + 1)^a$, e indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse y.

   a) Dire per quali a l'area di A è finita.

   b) Dire per quali a il volume di V è finito.

2. Dire se esistono il massimo e il minimo di $\dfrac{n^2 - 6n + 8}{e^n}$ al variare di $n = 1, 2, \ldots$ e in caso affermativo calcolarli.

3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$2 \arctan x + \frac{1}{x} = a \,, \tag{1}$$
   e indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni (se ne esiste almeno una).

   a) Discutere il numero di soluzioni dell'equazione (1) al variare di $a \in \mathbb{R}$.

   b) Specificare il dominio, i punti di discontinuità e i limiti significativi della funzione $a \mapsto x(a)$, e disegnarne il grafico.

   c) Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to +\infty$.

4. a) Dimostrare che l'integrale superiore è subadditivo, cioè che date due funzioni limitate f, g sull'intervallo $[a, b]$, allora
$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx \geq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx \,. \tag{2}$$
   b) Far vedere con un esempio che la disuguaglianza in (5) può essere stretta.

   c) Dimostrare che la disuguaglianza in (5) è un'uguaglianza se f è continua.

5. Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}$, caratterizzare le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni successione $(x_n) \subset \mathbb{R}$ con $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$ vale $\limsup\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Aggiungere l'ipotesi mancante nel seguente enunciato: *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora f ammette un valore minimo.*

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+x)}{\log x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\log(1+x^2) - \log(1+4x^2)}{x^4}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x+\sin x}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^3 + ax^2 + x$ è crescente su $\mathbb{R}$.

4. Determinare l'immagine della funzione $f(x) := x^4 e^{-x^2}$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{2x^3+4}{x^2-1}\,dx$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $|y| \le \dfrac{4}{1+4x^2}$. Calcolare l'area di A.

7. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n\, x^{n^2+1}$.

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \tan x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -\frac{\pi}{6}$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $|x^3+1| \le \sqrt{2-x}$.

SECONDA PARTE

1. a) Consideriamo un cono C con altezza h, base B e raggio di base r. Tra tutti i cilindri contenuti in C, e con base contenuta in B, trovare quello di volume massimo. (Sia il cono C che i cilindri sono circolari e retti.)

   b) Rispondere alla stessa domanda quando C è cono circolare ma non necessariamente retto. [*Detto P il piano che contiene la base B e detta p la proiezione ortogonale del vertice del cono su P , conviene distinguere il caso in cui p appartiene a B e il caso in cui non.*]

2. Dati $a < b < c$ ed una funzione $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ limitata, dimostrare che
$$\int^{*c}_a f(x)\,dx = \int^{*b}_a f(x)\,dx + \int^{*c}_b f(x)\,dx$$
   dove ${}^*\!\!\int$ indica come al solito l'integrale di Riemann superiore.[1]

3. Dati $a, b \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale:
$$t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0\,. \qquad (*)$$
   Trovare la soluzione generale di (*) nei seguenti casi: a) $a = 2$, $b = -6$; b) $a = b = 5$.
   [*Suggerimento: cercare soluzioni della forma t^λ.*]

4. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \int_x^{2x^2} \exp(t^2)\,dt\,.$$
   a) Trovare l'insieme di definizione di f, il segno , ed i limiti significativi.

   b) Scrivere f' e lo sviluppo di Taylor all'ordine 5 di f in 0.

   c) Scrivere f'' e dimostrare che f è una funzione convessa.

   d) Trovare una funzione g della forma $g(x) = ax^b \exp(cx^d)$ tale che $g(x) \sim f(x)$ per $x \to +\infty$.

5. Data una successione (a_n) di numeri strettamente positivi, consideriamo la serie a segni alterni
$$S := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n\,.$$
   a) Dimostrare che se la successione (a_n) è crescente allora la serie S non esiste.

   b) Far vedere che la conclusione al punto a) non vale se si sostituisce l'ipotesi che (a_n) è crescente con l'ipotesi che (a_n) converge ad un numero strettamente positivo.

[1] Ovviamente vale anche l'analoga uguaglianza per gli integrali inferiori.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Sia $f(x) := xe^{-x/2}$. Determinare l'immagine secondo f della semiretta $[1, +\infty)$.

2. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := (x - 1)\, e^{ax}$ risulta crescente sulla semiretta $x \geq 0$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 di $f(x) := (1 + x^2) \log(1 - 2x^2 + x^4)$.

4. Determinare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_{n+2} = 8\, x_{n+1} - 15\, x_n$ per $n = 0, 1, \dots$

5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = 4t^3$ tale che $x(0) = 0$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

7. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^a)^{2a}}$ è finito.

8. Trovare un'equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti (reali) ed omogenea che abbia come soluzione la funzione $x(t) = t(\cos t + e^{2t})$.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{1 + |x|} \leq y \leq \log(1 - x)$.

SECONDA PARTE (prima variante)

1. Sia (a_n) una successione di numeri reali e $L \in \mathbb{R}$. Dimostrare che sono fatti equivalenti:
   (i) (a_n) converge a L per $n \to +\infty$;
   (ii) esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che a) $g(x) \to 0$ per $x \to 0$ e b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $|a_n - L| \leq g(\varepsilon)$ per $n \geq n_\varepsilon$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, poniamo $x_n := \exp(n^a) - \exp(\sin(n^a))$ per $n = 1, 2, \dots$
   a) Discutere il limite della successione (x_n) per $n \to +\infty$;
   b) Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3. Sia T la traiettoria di un punto nel piano che si muove con legge oraria $P(t) = (\cos t, 2 \sin t \cos t)$ per $t \in \mathbb{R}$, sia A la parte di piano delimitata dalla curva T e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.
   a) Disegnare la curva T e l'insieme A.
   b) Determinare la circonferenza circoscritta ad A.
   c) Calcolare l'area di A e il volume di V.

4. Per ogni $a > 0$, sia T_a il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, e^{-a})$, e sia A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a > 0$.
   a) A è delimitato dagli assi e dal grafico di un'opportuna funzione f; determinare tale f.
   b) Dire se l'area di A è finita oppure no.

5. Siano X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, e sia $f : X \to Y$ una funzione continua e strettamente crescente con inversa $g : Y \to X$.
   a) Dimostrare che se X è un intervallo allora g è continua.
   b) Dare un esempio di X (non intervallo), Y e f tali che g non è continua.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Convertire le coordinate cartesiane (x, y) in coordinate polari (ρ, α) e viceversa, scegliendo l'angolo α nell'intervallo $[0, 2\pi)$: a) $x = -1$, $y = 1$; b) $x = 0$, $y = -3$; c) $\rho = 4$, $\alpha = \frac{11}{6}\pi$.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $(1 + 2x)^a + x^{2a} \log\log x = O(x^2)$ per $x \to +\infty$.

3. Dare un esempio di successione (x_n) tale che $x_n \to +\infty$ e $x_{n+1} - x_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp\big(ax^2 + (a^2 - 3)x\big)$ ha un punto di minimo assoluto in $x = -1$.

5. Il punto P si muovo con legge oraria $P = \big((9t^2 - 1)\cos(3t); (9t^2 - 1)\sin(3t)\big)$. Calcolare il modulo della velocità di P e le distanza d percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$.

6. Dire per quale $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + x^2)^a - x^{2a}\, dx$ è finito.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = \sin t$.

8. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n + 1}$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $(x - 1)^{-2} \leq |e^{-x} - 1|$

SECONDA PARTE

1. Sono dati X sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, e $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ funzioni tali che (i) $f_1(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$; (ii) f_2 è limitata in un intorno di $\bar{x}$.
   a) Dimostrare che $f_1(x) \cdot f_2(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$.
   b) Far vedere che l'enunciato a) non vale se si rimuove l'ipotesi (ii).
   c) Cosa succede se invece di (ii) si assume solo che (ii') $|f_2(x)|$ non tende a $+\infty$ per $x \to \bar{x}$?

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^{-t} + e^t \,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*).
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = o(e^{4t})$ per $t \to +\infty$.

3. Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $f(x) \leq y \leq 1$, dove
$$f(x) := \big(\cos(x^{-a})\big)^x \,.$$
   a) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.
   b) Dire per quali $a > 0$ l'insieme A ha area finita.
   c) Dire per quali $a > 0$ il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse delle x ha volume finito.

4. a) Trovare la più grande costante m tale che $\dfrac{mx}{1+x^2} \leq \arctan x$ per ogni $x \geq 0$.[1]
   b) Stimare la più piccola costante r tale che $\arctan x \leq \dfrac{rx}{1+x}$ per ogni $x \geq 0$.[2]

5. Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^a)}{n}$ al variare di $a \in (-\infty, 1)$.

[1] L'esistenza di questa costante ottimale può essere data per buona; lo stesso vale per la costante nel punto b).
[2] "Stimare" significa dare una maggiorazione ed una minorazione della costante ottimale (possibilmente vicine). Credo che determinare il valore esatto della costante non sia possibile.

TESTI E SOLUZIONI

Prima parte (prima variante)

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $\log(x^2/2^x)$ nel punto di ascissa $x = 1$.
   Soluzione. $y = (2 - \log 2)x - 2$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $(\sin x - x)(1 + \log x) = O(x^a)$ quando $x \to 0^+$.
   Soluzione. $a < 3$.

3. Calcolare a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x + x^2) - 1}{x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{\log(\log x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(\exp(x^2 + x^3))$.
   Soluzione. a) non esiste; b) $+\infty$; c) non esiste.

4. Trovare il valore massimo/minimo di $\exp(x^3 - 3x + 1)$ relativamente alla semiretta $x \geq 0$ (se non esistono specificarlo e calcolare invece l'estremo superiore/inferiore dei valori).
   Soluzione. Il valore minimo è e^{-1}. Il valore massimo non esiste e l'estremo superiore è $+\infty$.

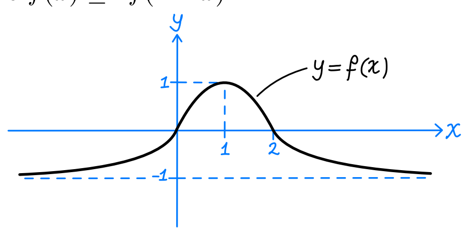
5. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 6 in $x = 0$ della funzione $\dfrac{1}{1 - x^3 + x^6}$.
   Soluzione. $P(x) = 1 + x^3$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int 2x \exp(2x^2)\, dx$.
   Soluzione. Usando il cambio di variabili $y = 2x^2$ ottengo
   $$\int 2x \exp(2x^2)\, dx = \int \tfrac{1}{2} e^y\, dy = \tfrac{1}{2} e^y + c = \tfrac{1}{2} \exp(2x^2) + c\,.$$

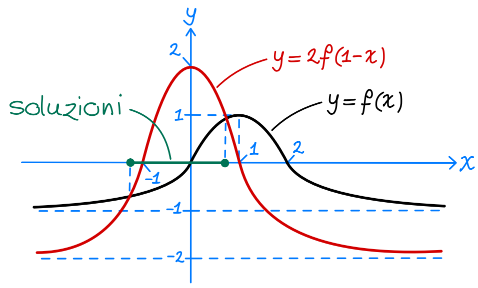
7. Calcolare la distanza percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$ da un punto P che si muove con legge oraria $P(t) := \big(e^t \cos(2t), e^t \sin(2t)\big)$.
   Soluzione. La velocità scalare è $v(t) = \sqrt{5}\, e^t$; la distanza percorsa è $d = \sqrt{5}(e - 1)$.

8. Determinare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^t x^3$ tale che $x(0) = -1$.
   Soluzione. Equazione a variabili separabili $x(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{3 - 2e^t}}$.

9. Detta $f(x)$ la funzione il cui grafico è disegnato sotto, disegnare il grafico di $2f(1-x)$ e risolvere (graficamente) la disequazione $f(x) \leq 2f(1 - x)$.



   Soluzione.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 a) Dato $a > 0$, risolvere l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8 - 4e^{2t}\,. \tag{*}$$

b) Per quali $a > 0$ vale che *ogni* soluzione $x(t)$ di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{3t})$ per $t \to +\infty$?

SOLUZIONE. a) Per quanto visto a lezione, la soluzione generale dell'equazione (*) si scrive come

$$x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

dove

- x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 0$;
- $\tilde{x}_1$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8$;
- $\tilde{x}_2$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = -4e^{2t}$.

Calcolo di x_{om}. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 2a\lambda + 4 = 0$, ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4}\,.$$

Pertanto, distinguendo diversi casi a seconda che tali soluzioni siano reali o complesse, cioè a seconda del segno di $a^2 - 4$:

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} (c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t))e^{at} & \text{se } 0 < a < 2, \\ (c_1 + c_2 t)e^{2t} & \text{se } a = 2, \\ c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 2, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\omega := \sqrt{4 - a^2}$ e c_1, c_2 sono costanti reali arbitrarie.

Calcolo di $\tilde{x}_1$. Poiché il termine noto dell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = 8$ è una costante, la soluzione $\tilde{x}_1$ va cercata tra le costanti. Si vede facilmente (anche a occhio) che la soluzione cercata è

$$\tilde{x}_1(t) = 2\,. \tag{2}$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$, prima parte. Per cominciare cerco una soluzione della forma $\tilde{x}_2 = ce^{2t}$. Sostituendo questa espressione al posto di x nell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = -4e^{2t}$ arrivo all'identità $c(8-4a)e^{2t} = -4e^{2t}$, che è soddisfatta per ogni t se $c = \frac{1}{a-2}$ (e necessariamente $a \neq 2$). Dunque

$$\tilde{x}_2(t) = \tfrac{1}{a-2} e^{2t} \quad \text{per } a \neq 2. \tag{3}$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$, seconda parte. La formula precedente non ha senso per $a = 2$, e in effetti in questo caso il coefficiente 2 che appare nel termine noto $-4e^{2t}$ coincide con λ_1 e λ_2, e quindi la soluzione particolare va cercata tra le funzioni della forma $\tilde{x}_2 = ct^2 e^{2t}$. Sostituendo questa espressione al posto di x nell'equazione $\ddot{x} - 2a\dot{x} + 4x = -4e^{2t}$ arrivo all'identità $2ce^{2t} = -4e^{2t}$, che è soddisfatta per ogni t se $c = -2$. Dunque

$$\tilde{x}_2(t) = -2t^2 e^{2t} \quad \text{per } a = 2. \tag{4}$$

b) Tenendo conto che la soluzione dell'equazione (*) si scrive come $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$, e che $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ sono trascurabili rispetto a e^{3t} per $t \to +\infty$ (vedere le formule (2), (3) e (4)), posso riformulare la domanda come segue: dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che

$$x_{\text{om}} = o(e^{3t}) \text{ per } t \to +\infty \text{ e per ogni } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

dove c_1, c_2 sono le costanti che appaiono nella formula (1) per x_{om}.
Usando questa formula si vede subito che l'affermazione (5) è sempre vera per $0 < a \le 2$, mentre nel caso $a > 2$ è vera se (e solo se) $\lambda_1, \lambda_2 < 3$, vale a dire se

$$a + \sqrt{a^2 - 4} < 3 \quad \text{cioè} \quad a < \tfrac{13}{6}\,.$$

Riassumendo, i valori di a cercati sono $0 < a < \frac{13}{6}$.

2 a) Per ogni $a \ge 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^6 = a(x-1)^2 \tag{*}$$

b) Per ogni $a \geq 0$ indico con $x(a)$ la più grande soluzione di (*). Disegnare il grafico della funzione $x(a)$, specificando l'insieme di definizione, i punti di discontinuità e i limiti significativi.

c) Trovare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

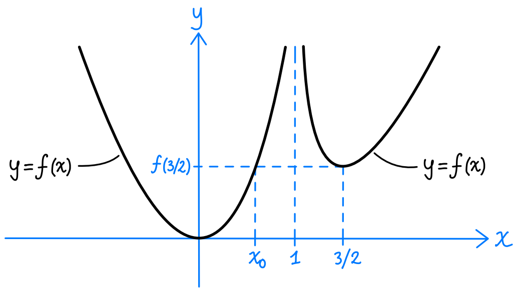
<u>SOLUZIONE</u>. a) Osservo che $x = 1$ non è mai una soluzione dell'equazione (*), e quindi posso moltiplicare l'equazione per $(x-1)^{-2}$ ottenendo

$$\underbrace{x^6(x-1)^{-2}}_{f(x)} = a\,.$$

Per determinare il numero di soluzioni (di questa equazione o di quella originale) disegno il grafico di f.
Osservo per cominciare che $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 1$, è strettamente positiva per $x \neq 0$ e si annulla per $x = 0$, e tende a $+\infty$ sia per $x \to 1$ che per $x \to \pm\infty$.
Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = x^5(x-1)^{-3}(4x-6)$$

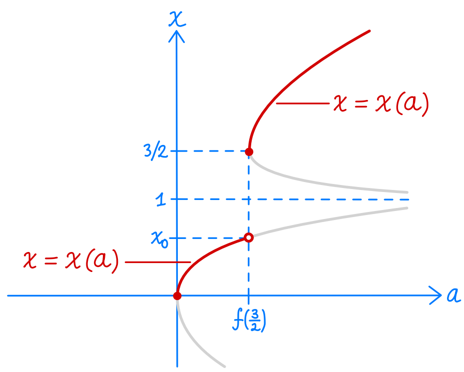
ottengo che la funzione è strettamente decrescente negli intervalli $x \leq 0$ e $1 < x < \frac{3}{2}$, ed è strettamente crescente negli intervalli $0 \leq x < 1$ e $x \geq \frac{3}{2}$.
Usando queste informazioni ottengo il grafico riportato sotto (le proporzioni non sono rispettate):



da cui si vede che l'equazione (*) ha

- 1 soluzione per $a = 0$,
- 2 soluzioni per $0 < a < a_0 := f\big(\frac{3}{2}\big) = \frac{3^6}{2^4} \simeq 45{,}56$;
- 3 soluzioni per $a = a_0$ (indico con x_0 quella in $(0,1)$);
- 4 soluzioni per $a > a_0$.

b) Per quanto visto al punto precedente l'equazione (*) ha almeno una soluzione per ogni $a \geq 0$, e quindi la soluzione $x(a)$ è ben definita per ogni $a \geq 0$. Partendo dal grafico di $f(x)$ disegnato sopra ottengo il grafico di $x(a)$ riportato qui sotto:



Da questo grafico si vede chiaramente che

- $x(a)$ è discontinua a sinistra in $a_0 := f\big(\frac{3}{2}\big)$ (ma è continua a destra);
- $x(a)$ tende a x_0 per $a \to a_0^-$, dove x_0 è definita nello schema alla fine del punto b);
- $x(a)$ tende a $+\infty$ per $a \to +\infty$.

c) Il fatto che $x(a)$ risolve l'equazione (*) significa che $f(x(a)) = a$, e usando il fatto che $f(x) \sim x^6$ per $x \to 0$ e che $x(a) \to 0$ per $a \to 0$ ottengo

$$a = f(x(a)) \sim (x(a))^6 \quad \text{per } a \to 0^+,$$

ed elevando alla potenza 1/6 ottengo infine

$$a^{1/6} \sim x(a) \quad \text{per } a \to 0^+.$$

(In quest'ultimo passaggio ho usato che $(x^6)^{1/6} = x$ se $x \geq 0$, e che $x(a) \geq 0$ per ogni $a \geq 0$.)

3 Dato $a > 1$, indichiamo con E_a l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che

$$|x|^a + |y|^a \leq 1\,.$$

a) Fare un disegno approssimativo di E_4, discutendone anche la convessità.

b) Trovare la più piccola circonferenza centrata nell'origine che contiene E_4, e la più grande che è contenuta in E_4.

c) Dimostrare che E_a "cresce" al crescere di a.

d) Disegnare il "limite" di E_a per $a \to +\infty$.

SOLUZIONE. Scrivo E_a come l'insieme dei punti (x, y) tali che $-1 \leq x \leq 1$ e $-g_a(x) \leq y \leq g_a(x)$ dove ho posto

$$g_a(x) := (1 - |x|^a)^{1/a} \quad \text{per ogni } x \in [-1, 1].$$

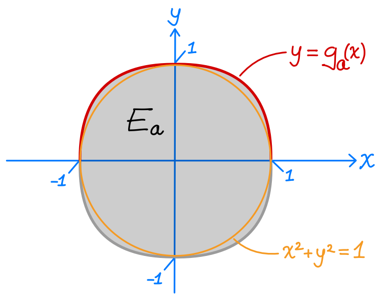
a) Per disegnare l'insieme E_a devo disegnare il grafico della funzione g_a. Osservo che questa funzione è continua, sempre positiva, e si annulla solo per $x = \pm 1$; inoltre è pari, e quindi mi limito a studiarla per $0 \leq x \leq 1$. In questo intervallo la derivata è

$$g_a'(x) = -x^{a-1}(1 - x^a)^{1/a-1}\,,$$

in particolare vale 0 in 0, vale $-\infty$ in 1, ed infine è sempre negativa, e quindi g_a è decrescente. Inoltre la derivata seconda

$$g_a''(x) = -(a-1)\, x^{a-2}(1 - x^a)^{1/a-2}$$

è sempre negativa, e quindi g_a è concava. Usando queste informazioni ottengo il disegno qui riportato:



In particolare E_a è convesso.

b) Devo trovare il raggio R della più piccola circonferenza centrata nell'origine che contiene E_a (la circonferenza circoscritta) e il raggio r della più grande circonferenza centrata nell'origine e contenuta in E_a (la circonferenza inscritta).

Dato $x \in [0, 1]$ indico con $d(x)$ la distanza del punto del grafico di g_a di ascissa x dall'origine, vale a dire

$$d(x) := \sqrt{x^2 + g_a^2(x)} = \sqrt{x^2 + (1 - x^a)^{2/a}}\,,$$

ed osservo che r e R sono rispettivamente il valore minimo e il valore massimo di $d(x)$ relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 1$, e li posso trovare applicando la solita procedura per la ricerca dei valori massimi e minimi di una funzione.
Per semplificare i calcoli conviene tuttavia calcolare il valore minimo e il valore massimo del *quadrato* di $d(x)$ relativamente all'intervallo $0 \leq x \leq 1$. La derivata

$$\big(d^2(x)\big)' = \big(x^2 + (1 - x^a)^{2/a}\big)' = 2x - 2(1 - x^a)^{2/a-1}x^{a-1}$$

si annulla se e solo se $x = (1 - x^a)^{2/a-1} x^{a-1}$; moltiplicando entrambi i termini di questa equazione per x^{1-a} ed elevandoli poi alla potenza $a/(2-a)$ ottengo $x^a = 1 - x^a$, vale a dire $x = 2^{-1/a}$.
Confrontando infine i valori di $d^2(x)$ nei punti 0, 1 e $2^{-1/a}$ ottengo che per $a > 2$ (ed in particolare per $a = 4$) il punto di massimo è $2^{-1/a}$, mentre 0 e 1 sono i punti di minimo, e quindi

$$r = d(0) = 1\,, \quad R = d\big(2^{-1/a}\big) = 2^{1/2-1/a}\,.$$

In particolare per $a = 4$ si ha $r = 1$ e $R = \sqrt[4]{2}$.

c) Osservo per iniziare che i punti (x, y) appartenenti ad E_a per qualche a soddisfano $|x| \le 1$ e $|y| \le 1$. Tenendo conto di questa osservazione e del fatto che b^a è decrescente nella variabile a se $0 \le b \le 1$, ottengo che la quantità $|x|^a + |y|^a$ è decrescente in a.
In particolare, se $|x|^a + |y|^a \le 1$ per un certo a, allora $|x|^{\tilde a} + |y|^{\tilde a} \le 1$ per ogni $\tilde a \ge a$.
Questo significa che E_a è contenuto in $E_{\tilde a}$ per $\tilde a \ge a$, e cioè che E_a è crescente in a.

d) Poiché non è stato precisato cosa si debba intendere come limite di insiemi, questa domanda non ammette una risposta univoca (ma le differenze tra le risposte plausibili sono minimali).
Una possibilità consiste nel dire che il limite E_∞ è dato dai punti (x, y) tali che $-1 \le x \le 1$ e $-g_\infty(x) \le y \le g_\infty(x)$, dove $g_\infty(x)$ è il limite per $a \to +\infty$ di $g_a(x)$. Si vede che

$$g_\infty(x) := \lim_{a\to+\infty} g_a(x) = \lim_{a\to+\infty} \exp\big(\tfrac{1}{a}\log(1 - x^a)\big) = \exp(0) = 1 \quad \text{per } -1 < x < 1,$$

mentre $g_\infty(\pm 1) = 0$, e quindi E_∞ è il quadrato formato dai punti (x, y) tali che $-1 < x < 1$ e $-1 \le y \le 1$, più i punti $(\pm 1, 0)$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. (i) Nella soluzione del punto a) scritta sopra ho dato per scontato che la concavità della funzione g_a implica la convessità dell'insieme E_a. Volendolo argomentare, osservo che la concavità di g_a implica (per definizione) la convessità del sottografico di g_a (che indico con S_a) e la convessità di $-g_a$, che a sua volta implica la convessità del sopragrafico di $-g_a$ (che indico con S'_a). Siccome E_a coincide con l'intersezione degli insiemi convessi S_a ed S'_a, è anch'esso convesso (si vede facilmente che l'intersezione di due insiemi convessi è convessa).

(ii) Riguardo al punto a), si può dimostrare che E_a è convesso direttamente: dati dunque $p_0 = (x_0, y_0)$ e $p_1 = (x_1, y_1)$ punti di E_a e $\lambda \in [0, 1]$, devo far vedere che il punto

$$p_\lambda := (1-\lambda)p_0 + \lambda p_1 = \big(\underbrace{(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1}_{x_\lambda}, \underbrace{(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1}_{y_\lambda}\big)$$

appartiene a E_a, e cioè che $|x_\lambda|^a + |y_\lambda|^a \le 1$. In effetti

$$\begin{aligned} |x_\lambda|^a + |y_\lambda|^a &= |(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1|^a + |(1-\lambda)y_0 + \lambda y_1|^a \\ &\le (1-\lambda)|x_0|^a + \lambda|x_1|^a + (1-\lambda)|y_0|^a + \lambda|y_1|^a \\ &= (1-\lambda)\big(|x_0|^a + |y_0|^a\big) + \lambda\big(|x_1|^a + |y_1|^a\big) \le (1-\lambda) + \lambda = 1 \end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato per due volte che la funzione $|t|^a$ è convessa in t; nel penultimo ho usato il fatto che $p_0, p_1 \in E_a$ e quindi $|x_0|^a + |y_0|^a \le 1$ e $|x_1|^a + |y_1|^a \le 1$).

(iii) Per dimostrare il punto c) si può anche far vedere che $g_a(x)$ è crescente in a per ogni $x \in [0, 1]$, cosa che segue dal fatto che la derivata di $g_a(x)$ rispetto alla variabile a è positiva. Infatti, indicando con D_a la derivazione rispetto ad a, si ha che

$$\begin{aligned} D_a\big[g_a(x)\big] = D_a\big[(1-x^a)^{1/a}\big] &= D_a\big[\exp\big(\tfrac{1}{a}\log(1-x^a)\big)\big] \\ &= \exp(\dots)\, D_a\big[\tfrac{1}{a}\log(1-x^a)\big] \\ &= \exp(\dots)\,\big[-\tfrac{1}{a^2}\log(1-x^a) + \tfrac{1}{a}\tfrac{-x^a\log x}{1-x^a}\big] \end{aligned}$$

ed è facile vedere che entrambi gli addendi tra le parentesi quadre nell'ultima riga sono positivi.

(iv) Come già detto, la domanda d) ammette risposte diverse a seconda di cosa si intende per limite di E_a per $a \to +\infty$.
Una possibilità è prendere la disequazione $|x|^a + |y|^a \le 1$ che definisce E_a, e passare al limite

per $a \to +\infty$ nel termine di sinistra. Siccome

$$h(x,y) := \lim_{a\to+\infty} |x|^a + |y|^a = \begin{cases} 0 & \text{se } |x|<1 \text{ e } |y|<1, \\ 1 & \text{se } |x|<1 \text{ e } |y|=1 \text{ oppure } |x|=1 \text{ e } |y|<1, \\ 2 & \text{se } |x|=|y|=1, \\ +\infty & \text{se } |x|>1 \text{ oppure } |y|>1, \end{cases}$$

l'insieme dei punti che soddisfano $h(x,y) \le 1$ è dato dal quadrato dei punti (x,y) tali che $-1 \le x, y \le 1$ meno i vertici.

(v) Un'altra possibile risposta a il punto d) è questa: siccome gli insiemi E_a crescono con a, si prende come limite l'unione di tutti gli insiemi E_a con $a \ge 1$, e si mostra che quest'unione consiste dei punti (x,y) tali che $-1 < x, y < 1$ più i punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.

$\boxed{4}$ Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con parte principale ax^b per $x \to +\infty$ (con $b > 0$ e $a \ne 0$), consideriamo la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) := \int_{x^2}^{x^2+x} f(t)\, dt\,.$$

Trovare la parte principale di $g(x)$ per $x \to +\infty$. [*Suggerimento: iniziare dal caso* $f(x) := x^b$.]

<u>SOLUZIONE</u>. Considero per cominciare la funzione

$$\bar g(x) := \int_{x^2}^{x^2+x} at^b\, dt = \frac{a}{b+1}\big[(x^2+x)^{b+1} - x^{2b+2}\big]\,,$$

ed osservo che, per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \bar g(x) &= \frac{ax^{2b+2}}{b+1}\bigg[\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{b+1} - 1\bigg] \\ &= \frac{ax^{2b+2}}{b+1}\bigg[\frac{b+1}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\bigg] = ax^{2b+1} + O(x^{2b}) \sim ax^{2b+1}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

(Nel terzo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + O(y^2)$ con $\alpha := b+1$ e $y := \frac{1}{x}$.)

Dimostro ora che per una qualunque funzione f tale che $f(x) \sim ax^b$ per $x \to +\infty$ vale che

$$g(x) \sim \bar g(x) \quad \text{per } x \to +\infty. \tag{7}$$

quindi, grazie a (6), posso concludere che $g(x) \sim ax^{2b+1}$.

Osservo che l'ipotesi $f(t) \sim at^b$ significa che $f(t)/(at^b) \to 1$ per $t \to +\infty$, ovvero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $m_\varepsilon \ge 0$ tale che $t \ge m_\varepsilon$ implica $|f(t)/(at^b) - 1| \le \varepsilon$.

Riscrivo quest'ultima disuguaglianza come

$$(1-\varepsilon)at^b \le f(t) \le (1+\varepsilon)at^b\,, \tag{8}$$

ed osservo che, preso $x \ge \sqrt{m_\varepsilon}$, le disuguaglianze in (8) valgono per ogni $t \ge x^2$, e integrandole da x^2 a $x^2 + x$ ottengo le disuguaglianze

$$(1-\varepsilon)\int_{x^2}^{x^2+x} at^b\, dt \le \int_{x^2}^{x^2+x} f(t)\, dt \le (1+\varepsilon)\int_{x^2}^{x^2+x} at^b\, dt\,,$$

che posso riscrivere come $(1-\varepsilon)\,\bar g(x) \le g(x) \le (1+\varepsilon)\,\bar g(x)$, ovvero come

$$\Big|\frac{g(x)}{\bar g(x)} - 1\Big| \le \varepsilon$$

Ho dunque dimostrato che il rapporto $g(x)/\bar g(x)$ tende ad 1 per $x \to +\infty$, vale a dire la (7).

<u>OSSERVAZIONI</u>. Un altro modo di dimostrare che $g(x) \sim ax^{2b+1}$ è questo: dall'ipotesi $f(t) \sim at^b$ per $t \to +\infty$ si ottiene la scomposizione $f(t) = at^b + o(t^b)$, da cui segue la scomposizione

$$g(x) = \bar g(x) + \int_{x^2}^{x^2+x} o(t^b)\, dt\,;$$

quindi si usa che $\bar{g}(x) \sim ax^{2b+1}$ (formula (6)) e che l'integrale è $o(x^{2b+1})$. Per dimostrare quest'ultima affermazione si parte dal fatto che, per la definizione di "o piccolo", per ogni $\varepsilon > 0$ vale $-\varepsilon t^b \le o(t^b) \le \varepsilon t^b$ per t sufficientemente grande.

5 Consideriamo due cilindri infiniti C_1 e C_2 di raggio 1 con assi che si intersecano ortogonalmente. Calcolare il volume dell'intersezione $V := C_1 \cap C_2$.
[*Può essere utile scegliere degli assi concreti e descrivere V in termini di disequazioni.*]

Soluzione. Posso supporre che l'asse del cilindro C_1 coincida con l'asse delle x e quello di C_2 con l'asse delle y, e dunque

$$C_1 = \{(x,y,z) \colon y^2 + z^2 \le 1\} = \Big\{(x,y,z) \colon |z| \le 1\,,\ |y| \le \sqrt{1-z^2}\Big\}\,,$$
$$C_2 = \{(x,y,z) \colon x^2 + z^2 \le 1\} = \Big\{(x,y,z) \colon |z| \le 1\,,\ |x| \le \sqrt{1-z^2}\Big\}\,.$$

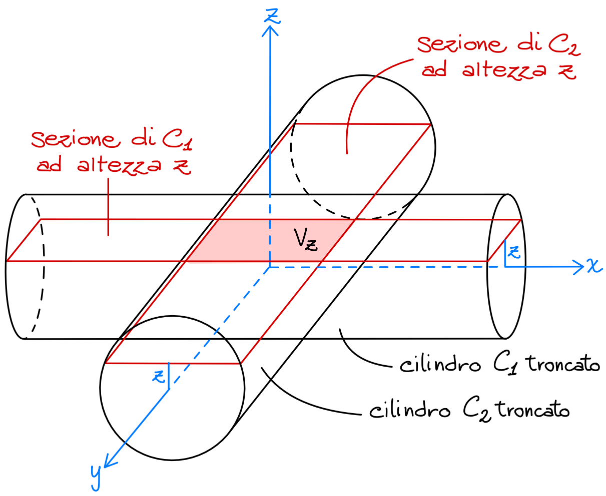
Quindi

$$V := C_1 \cap C_2 = \Big\{(x,y,z) \colon |z| \le 1\,,\ |x|, |y| \le \sqrt{1-z^2}\Big\}\,,$$

e dunque la sezione di V ad altezza z è vuota se $|z| > 1$, mentre per $|z| \le 1$ è data da

$$V_z = \Big\{(x,y) \colon |x|, |y| \le \sqrt{1-z^2}\Big\}\,.$$

Da questa formula risulta chiaramente che V_z è un quadrato con centro nell'origine e lato uguale a $2\sqrt{1-z^2}$.



Pertanto l'area di V_z è $4(1-z^2)$ e di conseguenza il volume di V è

$$\text{volume}(V) = \int_{-1}^{1} \text{area}(V_z)\, dz = \int_{-1}^{1} 4(1-z^2)\, dz = \Big| 4z - \frac{4}{3}z^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}\,.$$

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare le soluzioni x con $0 \le x \le \pi$ della disequazione $2\cos(2x) \ge \sqrt{3}$.
   SOLUZIONE. $0 \le x \le \frac{\pi}{12}$ e $\frac{11\,\pi}{12} \le x \le \pi$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^{\log x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2\, 2^x}{(x+1)^3}\right)$.
   SOLUZIONE. a) $\dfrac{2}{x}\log x \cdot x^{\log x}$; b) $\log 2 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x+1}$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\frac{1}{2^x} + \frac{1}{x^2}}_{a}\,, \quad \underbrace{x^4 + \log x}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{2x^4}{1-\log x}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{x+1}{x^4+1}}_{d}\,.$$
   SOLUZIONE. $d \ll a \ll c \ll b$.

4. Scrivere il polinomio di Taylor all'ordine 6 di $f(x) := \log(1 + 2x^3 + x^6)$.
   SOLUZIONE. $P_6(x) = 2x^3 - x^6$.

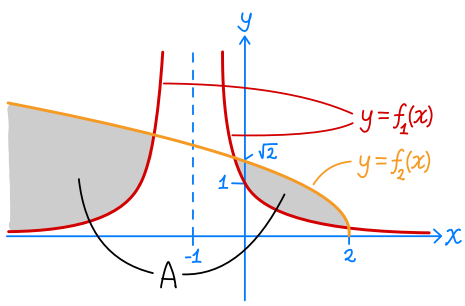
5. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := \exp(1 - ax^2)$ è concava nell'intervallo $-1 \le x \le 2$.
   SOLUZIONE. Nell'intervallo in questione deve essere $f''(x) \le 0$, vale a dire $4a^2x^2 \le 2a$; tenendo conto che il valore massimo di x^2 nell'intervallo è 4 si ottiene $a \le \frac{1}{8}$.

6. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int (9x^2 - 1)\log x\, dx$.
   SOLUZIONE. Integro per parti:
$$\int (9x^2-1)\log x\,dx = (3x^3 - x)\log x - \int 3x^2 - 1\,dx = (3x^3-x)\log x - x^3 + x + c\,.$$

7. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = \exp(at^2)$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} - (1+t^2)x = 0$?
   SOLUZIONE. Sostituendo questa $x(t)$ nell'equazione si ottiene l'identità $(4a^2-1)t^2 + 2a - 1 = 0$, che è soddisfatta per $a = \frac{1}{2}$.

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 4t^3 x = 2t^3 \exp(2t^4)$ tale che $x(0) = 0$.
   SOLUZIONE. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = \frac{1}{6}\exp(2t^4) - \frac{1}{6}\exp(-t^4)$.

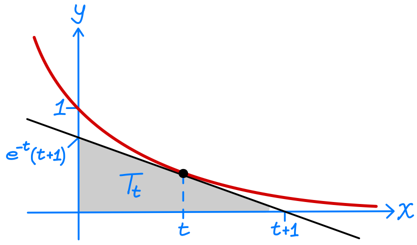
9. a) Disegnare i grafici delle funzioni $f_1(x) := (x+1)^{-2}$ e $f_2(x) := \sqrt{2-x}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f_1(x) \le y \le f_2(x)$.
   SOLUZIONE.



Seconda parte (prima variante)

$\boxed{1}$ Consideriamo i triangoli delimitati dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} in un punto di ascissa positiva. Dire se tra questi triangoli ne esistono uno di area massima ed uno di area minima, e in caso affermativo determinarli.

Soluzione. Per ogni $t \geq 0$, indico con T_t il triangolo delimitato dagli assi e dalla retta tangente al grafico della funzione e^{-x} nel punti di ascissa t.
Poiché questa retta ha equazione $y = e^{-t}(t+1-x)$, l'intersezione con l'asse delle x ha ascissa $t+1$, mentre quella con l'asse delle y ha ordinata $e^{-t}(t+1)$.



Di conseguenza l'area di T_t, che indico con $a(t)$, è data da

$$a(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t}(t+1)^2 \, .$$

Devo quindi trovare i valori (e i punti) di massimo e minimo di questa funzione per $t \geq 0$.
Per farlo uso la procedura vista nel primo semestre. Siccome nella semiretta $t \geq 0$ la derivata

$$a'(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t}(1-t^2)$$

si annulla solo per $t = 1$, devo confrontare i valori di $a(t)$ in $t = 1$ e negli estremi $t = 0$ e $t = +\infty$:

$$a(0) = \frac{1}{2}\, , \quad a(1) = \frac{2}{e}\, , \quad a(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} a(t) = 0 \, .$$

Ne deduco che il valore massimo di $a(t)$ è $\frac{2}{e}$, raggiunto in $t = 1$, mentre il valore minimo non esiste e l'estremo inferiore dei valori è 0, raggiunto per $t \to +\infty$.
In altre parole il triangolo di area massima è T_1, ed ha vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0, \frac{2}{e})$, mentre non esiste il triangolo di area minima (per la precisione l'estremo inferiore delle aree dei triangoli T_t è 0, raggiunto per $t \to +\infty$).

$\boxed{2}$ Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{1}{\cos(-2x^2 + ax^4)} - 1$$

a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$, indicata con $g(x)$.
b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0$.

Soluzione. a) Scrivo la funzione come

$$f(x) = \frac{1 - \cos(-2x^2 + ax^4)}{\cos(-2x^2 + ax^4)} \, .$$

Siccome la parte principale del denominatore è 1, la parte principale di $f(x)$ coincide con quella del numeratore.

Sostituendo $t = -2x^2 + ax^4$ nello sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ e usando che $t = O(x^2)$ ottengo

$$\cos(-2x^2 + ax^4) = 1 - \frac{1}{2}(-2x^2 + ax^4)^2 + O(x^8) = 1 - 2x^4 + 2ax^6 + O(x^8)\, , \tag{1}$$

da cui segue che $1 - \cos(-2x^2 + ax^4) \sim 2x^4$ e quindi $f(x) \sim 2x^4$, ovvero

$$g(x) := \text{p.p.}(f(x)) = 2x^4 \, .$$

b) Scrivo $f(x) - g(x)$ come segue:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\cos(-2x^2 + ax^4)} - (1 + 2x^4) = \frac{1 - (1 + 2x^4)\cos(-2x^2 + ax^4)}{\cos(-2x^2 + ax^4)},$$

ed osservo che di nuovo la parte principale di $f(x) - g(x)$ coincide con quella del numeratore della seconda frazione. Usando lo sviluppo in (1) ottengo

$$\begin{aligned} 1 - (1 + 2x^4)\cos(-2x^2 + ax^4) &= 1 - (1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 2ax^6 + O(x^8)) \\ &= -2ax^6 + O(x^8); \end{aligned}$$

se $a \neq 0$ ottengo $1 - (1 + 2x^4)\cos(-2x^2 + ax^4) \sim -2ax^6$ e quindi

$$\text{p.p.}(f(x) - g(x)) = -2ax^6.$$

Resta da fare il caso $a = 0$, per cui basta usare lo sviluppo del coseno all'ordine 4:

$$\begin{aligned} 1 - (1 + 2x^4)\cos(-2x^2) &= 1 - (1 + 2x^4)\big(1 - 2x^4 + \tfrac{2}{3}x^8 + O(x^{12})\big) \\ &= \tfrac{10}{3}x^8 + O(x^{12})) \sim \tfrac{10}{3}x^8, \end{aligned}$$

e quindi $\text{p.p.}(f(x) - g(x)) = \frac{10}{3}x^8$. Riassumendo

$$\text{p.p.}(f(x) - g(x)) = \begin{cases} -2ax^6 & \text{if } a \neq 0, \\ \frac{10}{3}x^8 & \text{if } a = 0. \end{cases}$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. Approccio alternativo: si parte dallo sviluppo di $\cos(-2x^2 + ax^4)$ in (1) e si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{\cos(-2x^2 + ax^4)} - 1 = \frac{1}{1 - 2x^4 + 2ax^6 + O(x^8)} - 1;$$

usando quindi lo sviluppo $\frac{1}{1+y} = 1 - y + O(y^2)$ con $y = -2x^4 + 2ax^6 + O(x^8)$ si ottiene

$$f(x) = -2x^4 + 2ax^6 + O(x^8).$$

Da questa formula segue immediatamente la risposta alla domanda a) e la risposta alla domanda b) per $a \neq 0$. La domanda b) nel caso $a = 0$ si risolve in modo analogo: si parte dallo sviluppo $\cos(-2x^2) = 1 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^8 + O(x^{12})$ e poi is usa lo sviluppo $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + O(y^3)$ con $y = -2x^4 + \frac{2}{3}x^8 + O(x^{12})$.

3 Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $y^2 \leq x^2 - x^4$, e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.

a) Tracciare un disegno approssimativo di A e calcolarne l'area.

b) Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Esplicitando la disequazione $y^2 \leq x^2 - x^4$ rispetto alla variabile y ottengo

$$A := \big\{(x, y) \colon -1 \leq x \leq 1,\ -g(x) \leq y \leq g(x)\big\}$$

dove $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è la funzione continua data da

$$g(x) := \sqrt{x^2 - x^4} = |x|\sqrt{1 - x^2}.$$

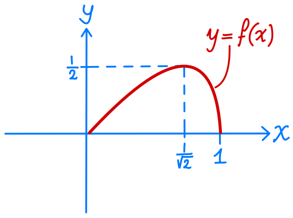
Per disegnare l'insieme A devo quindi disegnare il grafico della funzione g, e siccome g è pari, mi basta disegnarlo per $0 \leq x \leq 1$.
Osservo che g è sempre positiva e si annulla solo per $x = 0$ e $x = 1$.
Usando la formula $g(x) = x(1 - x^2)^{1/2}$ ottengo che la derivata è

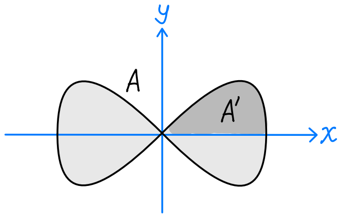
$$g'(x) = (1 - 2x^2)(1 - x^2)^{-1/2}$$

(e in particolare $g'(0) = 1$ e $g'(1) = +\infty$). Ne segue che $g(x)$ cresce per $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, e decresce per $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$. Infine la derivata seconda

$$g''(x) = x(2x^2 - 3)(1 - x^2)^{-3/2}$$

è sempre negativa, e quindi g è concava.
Sulla base di queste informazioni ottengo il grafico di g riportato sotto, da cui ricavo il disegno di A.



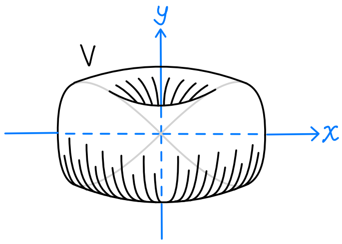


Preso infine A' come in figura, vale che

$$\operatorname{area}(A) = 4\operatorname{area}(A') = 4\int_0^1 x\,(1-x^2)^{1/2}dx = -2\int_1^0 y^{1/2}dy = -2\Big|\tfrac{2}{3}\,y^{3/2}\Big|_1^0 = \frac{4}{3}\,.$$

(Nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = 1 - x^2$.)

b) Partendo dal disegno di A nella figura sopra ottengo il seguente disegno di V:



Sia V' il solido ottenuto ruotando l'insieme A' attorno all'asse delle y. Allora V' è metà di V e quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{volume}(V) = 2\operatorname{volume}(V') &= 4\pi\int_0^1 x^2\,(1-x^2)^{1/2}dx\\ &= 4\pi\int_0^{\pi/2}(\sin y\,\cos y)^2\,dy\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} 1-\cos(4y)\,dy = \frac{\pi}{2}\Big|y - \frac{1}{4}\sin(4y)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}\,.\end{aligned}$$

(Nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $x = \sin y$; nel quarto ho usato l'identità $(\sin y\cos y)^2 = \frac{1}{8}(1-\cos(4y))$, ottenuta combinando le identità note $\sin y\cos y = \frac{1}{2}\sin(2y)$, e $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$.)

<u>Osservazioni</u>. Versione alternativa del calcolo del volume di V. Posso descrivere la *metà destra* dell'insieme A in modo differente, esplicitando la variabile x in funzione della variabile y:

$$A := \big\{(x,y):\ -\tfrac{1}{2}\le y\le\tfrac{1}{2}\,,\quad f^-(y)\le x\le f^+(y)\big\}\,,$$

dove le funzioni $f^\pm : \big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big]\to\mathbb{R}$ sono date da

$$f^\pm(y) := \sqrt{\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4y^2})}\,.$$

Questa rappresentazione non è utile in pratica per il calcolo dell'area di A ma lo è per il calcolo del volume di V, usando la prima formula per il volume dei solidi di rotazione vista a lezione:

$$\begin{aligned}\operatorname{volume}(V) &= \int_{-1/2}^{1/2}\pi\,\big(f^+(y)\big)^2 - \pi\,\big(f^-(y)\big)^2\,dy\\ &= \pi\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{1-4y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = 2y$; nel quarto ho usato che l'integrale tra -1 e 1 di $\sqrt{1-t^2}$ rappresenta l'area di un semicerchio di raggio 1 e vale quindi $\frac{\pi}{2}$).

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Calcolare a) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^2)}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2^x}{x^2 - x^6}$; c) $\lim_{x\to 1^+} \exp(-1/\log x)$.
   <u>SOLUZIONE</u>. a) 1; b) $-\infty$; c) 0.

2. Calcolare il polinomio di Taylor all'ordine 4 (in 0) della funzione $f(x) := \cos(2x - x^2)$.
   <u>SOLUZIONE</u>. $P(x) = 1 - 2x^2 + 2x^3 + \frac{1}{6}x^4$.

3. Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 8t$.
   <u>SOLUZIONE</u>. $x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + 2t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. Trovare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, e $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ per $n = 0, 1, 2, \dots$.
   <u>SOLUZIONE</u>. Le successioni che soddisfano la formula ricorsiva sono della forma $x_n = c_1 3^n + c_2 2^n$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; aggiungendo le condizioni $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ si ottiene $x_n = 3^n - 2^n$.

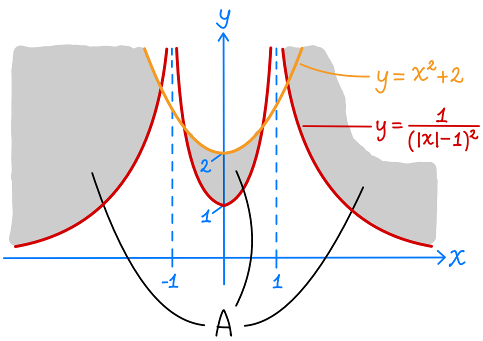
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4 e^{-ax} dx$ è finito.
   <u>SOLUZIONE</u>. $a > 0$ (per confronto asintotico con $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$).

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^a + n^{2a}}$ è finita.
   <u>SOLUZIONE</u>. $a > \frac{1}{2}$ (per confronto asintotico con $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2a}}$).

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n \log n} + 1}$.
   <u>SOLUZIONE</u>. $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{n\log n} + 1} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\log n} = +\infty$.

8. Consideriamo un punto P che si muove con legge oraria $P(t) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t)$. Scrivere il modulo della velocità e dire se la distanza L percorsa dall'istante $t = 1$ all'istante $t = +\infty$ è finita o infinita.
   <u>SOLUZIONE</u>. $|\dot{v}| = \sqrt{\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{t^4}} \sim \dfrac{1}{t}$ e quindi $L = \displaystyle\int_1^\infty |\dot{v}(t)|\, dt \approx \int_1^\infty \frac{dt}{t}\, dt = +\infty$.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) del piano tali che $\dfrac{1}{(|x| - 1)^2} \le y \le x^2 + 2$.
   <u>SOLUZIONE</u>.



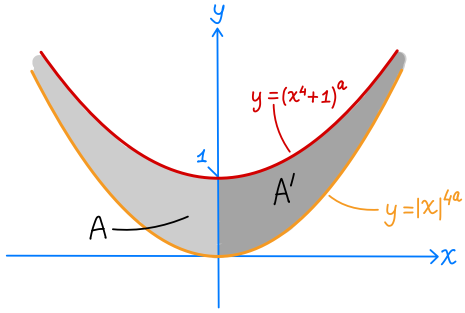
Seconda parte

1 Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) tali che $|x|^{4a} \leq y \leq (x^4 + 1)^a$, ed indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.

a) Dire per quali a l'area di A è finita.

b) Dire per quali a il volume di V è finito.

Soluzione. a) Anche se non è strettamente necessario, è utile disegnare l'insieme A per qualche valore del parametro a. Per esempio, per $a = \frac{1}{2}$ si ottiene facilmente il seguente disegno:



Osservo per cominciare che le funzioni $|x|^{4a}$ e $(x^4 + 1)^a$ sono pari, e quindi l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse delle y. Detta dunque A' l'intersezione di A con il semipiano a destra dell'asse delle y, vale

$$\text{area}(A) = 2\,\text{area}(A')\,,$$

e mi basta calcolare area(A').
Osservo poi che $x^{4a} < (x^4 + 1)^a$ per ogni $x \geq 0$, e quindi per tali x la sezione verticale A_x dell'insieme A' non è vuota. Pertanto l'area di A' è data da

$$\text{area}(A') = \int_0^{+\infty} \underbrace{(x^4 + 1)^a - x^{4a}}_{f(x)}\, dx \tag{1}$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e la funzione integranda $f(x)$ è sempre positiva; per studiare il comportamento dell'integrale determino il comportamento di $f(x)$ per $x \to +\infty$:

$$f(x) = (x^4 + 1)^a - x^{4a} = x^{4a} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^a - 1 \right] \sim a x^{4a-4} \tag{2}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato la formula $(1 + t)^a - 1 \sim at$ per $t \to 0$, che segue dallo sviluppo di Taylor $(1 + t)^a = 1 + at + O(t^2)$).
Usando infine il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri semplici, ottengo

$$\text{area}(A) = 2\,\text{area}(A') = 2 \int_0^{+\infty} f(x)\, dx \approx \int_1^{+\infty} x^{4a-4} dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } 4a - 4 \geq -1, \\ \text{finito} & \text{se } 4a - 4 < -1. \end{cases}$$

In particolare l'area di A è finita se e solo se $a < \frac{3}{4}$.
b) Il solido V può essere ottenuto ruotando solo A' attorno all'asse delle y, e siccome A' sta a destra di questo asse, vale la seguente formula:

$$\text{volume}(V) = \int_0^{+\infty} 2\pi x\, f(x)\, dx\,. \tag{3}$$

Come prima, l'integrale è improprio semplice in $+\infty$ e la funzione integranda è positiva; usando quindi lo sviluppo (2) ottengo

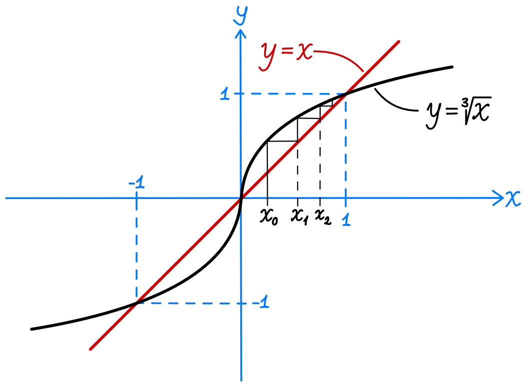
$$\text{volume}(V) = \int_0^{+\infty} 2\pi x\, f(x)\, dx \approx \int_1^{+\infty} x^{4a-3} dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } 4a - 3 \geq -1, \\ \text{finito} & \text{se } 4a - 3 < -1. \end{cases}$$

In particolare il volume di V è finito se e solo se $a < \frac{1}{2}$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Le formule (1) e (3) sono varianti delle formule base viste a lezione, che si riferiscono al caso in cui l'insieme A è delimitato superiormente dal grafico di una funzione ed inferiormente dall'asse delle x. Queste varianti sono state viste in più occasioni durante il corso, e si ottengono facilmente a partire dalle formule più generali da cui sono state ottenute le formule base.

2 Consideriamo una successione (x_n) che soddisfa l'equazione ricorsiva $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n}$. Discutere il comportamento di (x_n) al variare di $x_0 \in [0,1]$.

<u>SOLUZIONE</u>. Si vede subito che se $x_0 = 0$ allora $x_n = 0$ per ogni n, e se $x_0 = 1$ allora $x_n = 1$ per ogni n.
Resta da considerare il caso $0 < x_0 < 1$. Visualizzando graficamente la successione (x_n) (vedere la figura sotto) ci si convince subito che è (strettamente) crescente e tende a 1 per $n \to +\infty$.



La dimostrazione di questa affermazione è divisa in tre passi.

Passo 1: $0 \le x_n \le 1$ *per ogni* $n = 0, 1, 2, \dots$ Dimostro questa affermazione per induzione su n: il caso $n = 0$ è vero per ipotesi, e supponendo vero il caso n ottengo il caso $n+1$ usando la formula ricorsiva $x_{n+1} = f(x_n)$ e il fatto che

$$0 \le x \le 1 \ \Rightarrow\ 0 \le f(x) \le 1$$

(questa implicazione segue da calcoli algebrici elementari che non riporto).

Passo 2: la successione (x_n) *è crescente.* Devo dimostrare che $x_n \le x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni n: questa affermazione segue dal fatto che $0 \le x_n \le 1$ (passo 1) e che

$$0 \le x \le 1 \ \Rightarrow\ x \le f(x)$$

(anche questa implicazione segue da calcoli algebrici elementari).

Passo 3: la successione (x_n) *converge a* 1. Siccome (x_n) è crescente (passo 2), ha limite L con $-\infty < L \le +\infty$. Siccome $0 < x_0 \le x_n \le 1$ per ogni n (passo 1 e passo 2), allora $0 < x_0 \le L \le 1$.
Inoltre, passando al limite nell'equazione $x_{n+1} = f(x_n)$, grazie alla continuità di f ottengo $L = f(L)$. Quest'ultima equazione ha soluzioni $L = 0, \pm 1$ (ometto la verifica), e tenendo conto che $0 < L \le 1$ ottengo infine $L = 1$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Una soluzione alternativa, e nettamente più semplice della precedente, consiste nell'osservare che

$$x_n = x_0^{1/3^n} \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

Questa formula si dimostra per induzione su n: è infatti ovviamente valida per $n = 0$, e se vale per un certo n, vale anche per $n+1$:

$$x_n = x_0^{1/3^n} \ \Rightarrow\ x_{n+1} = f(x_n) = \sqrt[3]{x_0^{1/3^n}} = x_0^{1/3^{n+1}}\,.$$

Dalla formula (4) segue immediatamente che per $0 < x_0 < 1$ la successione (x_n) è strettamente crescente e tende a 1.

3 Consideriamo la serie di potenze

$$f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(n^2-n)} \,. \tag{*}$$

a) Determinare il raggio di convergenza R e discutere il comportamento per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare il valore $f(x)$ per $-R < x < R$. [*Suggerimento: calcolare* $f''(x)$.]

<u>Soluzione</u>. a) Il raggio di convergenza della serie di potenze (*) è dato da

$$\begin{aligned} R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^n(n^2-n)} &= \lim_{n\to+\infty} 4\,(n^2-n)^{1/n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} 4\,\exp\big(\tfrac{1}{n}\log(n^2-n)\big) = 4 \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato che $\frac{1}{n}\log(n^2-n) \sim \frac{2\log n}{n}$ tende a 0 per $n \to +\infty$).
Dal fatto che $R = 4$ segue che

- la serie (*) converge per $|x| < 4$;
- la serie (*) non converge per $|x| > 4$.

Un'ulteriore analisi mi permette di fare affermazioni più precise:

- per $x > 4$ vale che $f(x) = +\infty$; questo segue dal fatto che la serie (*) è a termini positivi e quindi ammette solo due comportamenti: converge a un numero finito oppure diverge a $+\infty$: escluso il primo grazie al fatto che $R = 4$, resta solo il secondo;
- per $x = 4$ la serie (*) è a termini positivi e converge per confronto asintotico con $\sum \frac{1}{n^2}$; si può inoltre osservare che questa serie è di tipo telescopico e converge a 1:

$$\begin{aligned} f(4) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) \\ &= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\Big) + \cdots = 1\,; \end{aligned}$$

- per $x = -4$ la serie (*) ha termini di segno variabile e converge assolutamente (ed in particolare converge); infatti, usando il criterio del confronto asintotico,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{x^n}{4^n(n^2-n)} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty\,.$$

b) Come spiegato (ma non dimostrato) a lezione, data una serie di potenze con raggio di convergenza R, per x nell'intervallo $(-R, R)$ la funzione $f(x)$ corrispondente al valore della serie in x è ben definita e derivabile infinite volte, e la derivata k-esima coincide con la serie delle derivate k-esime.
Nel nostro caso questo significa che per $-4 < x < 4$ si ha

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^n)''}{4^n(n^2-n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{4^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{4^{m+2}} = \frac{1}{16} \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{x}{4}\Big)^m = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{4}}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di "variabile" $n = m+2$, nel quinto ho usato la formula per il valore della serie geometrica).
Tenendo conto che f' è la primitiva di f'' ottengo

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \tfrac{1}{16} \int \frac{dx}{1-\frac{x}{4}} = -\tfrac{1}{4} \int \frac{dy}{y} = -\tfrac{1}{4}\log y + c = -\tfrac{1}{4}\log\big(1 - \tfrac{x}{4}\big) + c\,, \tag{5}$$

con $c \in \mathbb{R}$ (nel terzo e quinto passaggio ho usato il cambio di variabile $y = 1 - \frac{x}{4}$).
Per trovare il valore della costante c in (5) mi basta calcolare esplicitamente il valore di $f'(x)$ in un qualche punto x, e questo calcolo risulta particolarmente semplice per $x = 0$:

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^n)'}{4^n(n^2-n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{4^n(n^2-n)} \;\Rightarrow\; f'(0) = 0\,.$$

Dal fatto che $f'(0) = 0$ segue che la costante c in (5) vale 0.

Ora, tenendo conto che f è la primitiva di f', ottengo

$$\begin{aligned} f(x) = \int f'(x)\,dx = -\tfrac{1}{4}\int \log\left(1-\tfrac{x}{4}\right)dx = \int \log y\,dy \\ = y\log y - y + c \\ = \left(1-\tfrac{x}{4}\right)\log\left(1-\tfrac{x}{4}\right) + \tfrac{x}{4} - 1 + c\,, \end{aligned} \tag{6}$$

con $c \in \mathbb{R}$ (nel terzo e quinto passaggio ho usato il cambio di variabile $y = 1 - \frac{x}{4}$).
Usando infine che $f(0) = 0$ ottengo che la costante c in (6) vale 1, e quindi

$$f(x) = \left(1-\tfrac{x}{4}\right)\log\left(1-\tfrac{x}{4}\right) + \tfrac{x}{4} \quad \text{per } -4 < x < 4. \tag{7}$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. (i) Per $x < -4$ si può dimostrare che la serie non solo non converge, ma non esiste. Per farlo si può usare questa "variante" del criterio di Leibniz: *data una successione crescente* (a_n) *di numeri strettamente positivi, allora la serie a segni alterni* $\sum(-1)^n a_n$ *non esiste.*

(ii) Abbiamo visto sopra che la funzione $f(x)$ è ben definita e finita per $-4 \le x \le 4$. Usando uno strumento teorico elementare che verrà sviluppato nel corso di Analisi 2 si può facilmente dimostrare che $f(x)$ è anche continua per $-4 \le x \le 4$.
Dalla continuità di f in $x = -4$ e dalla formula (7) segue che

$$f(-4) = \lim_{x\to(-4)^+}\left[\left(1-\tfrac{x}{4}\right)\log\left(1-\tfrac{x}{4}\right) + \tfrac{x}{4}\right] = 2\log 2 + 1\,,$$

mentre dalla continuità in $x = 4$ e dalla formula (7) segue che

$$f(4) = \lim_{x\to 4^-}\left[\left(1-\tfrac{x}{4}\right)\log\left(1-\tfrac{x}{4}\right) + \tfrac{x}{4}\right] = \lim_{y\to 0^+}(y\log y + 1 - y) = 1\,.$$

(L'uguaglianza $f(4) = 1$ è già stata dimostrata sopra per altra via.)

$\boxed{4}$ Consideriamo una funzione iniettiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e una successione di numeri reali (x_m).

a) Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = \infty$.

b) Dimostrare che se $\lim_{m\to\infty} x_m = L$ per qualche $L \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n\to\infty} x_{\sigma(n)} = L$.

c) Caratterizzare le funzioni σ per cui vale anche l'implicazione opposta in b).

<u>SOLUZIONE</u>. a) Devo far vedere che per ogni $M \in \mathbb{R}$ vale che $\sigma(n) \ge M$ definitivamente in n, ovvero che l'insieme $E := \{n \in \mathbb{N} \colon \sigma(n) < M\}$ è finito. Tenendo conto che σ è iniettiva e porta E in $F := \{0, 1, \dots, \lfloor M \rfloor\}$, il numero di elementi di E è minore o uguale al numero di elementi di F, che è finito.

b) Siccome $x_m \to L$ per $m \to \infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m_ε tale che $|x_m - L| \le \varepsilon$ per $m \ge m_\varepsilon$. Inoltre, siccome $\sigma(n) \to \infty$ per $n \to \infty$ (punto a)) esiste n_ε tale che $\sigma(n) \ge m_\varepsilon$ per $n \ge n_\varepsilon$. Mettendo insieme queste due affermazioni ottengo che $|x_{\sigma(n)} - L| \le \varepsilon$ per $n \ge n_\varepsilon$.
Riassumendo, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $|x_{\sigma(n)} - L| \le \varepsilon$ per $n \ge n_\varepsilon$, e questo significa che $x_{\sigma(n)} \to L$ per $n \to \infty$.

c) Voglio caratterizzare le funzioni σ tali che, per ogni successione (x_m), vale la seguente implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_{\sigma(n)} = L \text{ con } L \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \lim_{m\to\infty} x_m = L\,. \tag{8}$$

Affermo che tali σ sono tutte e sole quelle per cui vale la seguente proprietà:

$$\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N}) \text{ è finito,} \tag{P}$$

ovvero l'immagine di σ contiene tutti i numeri interi tranne al più un numero finito.

L'enunciato è diviso in due parti.

Parte 1. Se non vale (P) allora esiste (x_m) *per cui non vale l'implicazione* (8).
Considero per la precisione la seguente successione:

$$x_m := \begin{cases} 1 & \text{se } m \in \sigma(\mathbb{N}), \\ 0 & \text{se } m \in \mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N}). \end{cases}$$

Chiaramente $x_{\sigma(n)} = 1$ per ogni n e quindi la successione $(x_{\sigma(n)})$ tende a 1. D'altra parte la successione (x_m) non tende a 1, perché esistono infiniti indici m tali che $x_m = 0$, e dunque non è vero che $|x_m - 1| \leq \frac{1}{2}$ definitivamente in m.

Parte 2. Se vale (P) allora per ogni (x_m) vale l'implicazione (8).
Dimostro che la negazione della tesi in (8) implica la negazione dell'ipotesi, vale a dire, che data una successione (x_m) ed un numero L tali che (x_m) non tende a L, allora anche $(x_{\sigma(n)})$ non tende a L.
Siccome (x_m) non tende a L, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|x_m - L| > \varepsilon$ per infiniti indici m. Detto E tale insieme di indici, ho che

$$E \subset (E \cap \sigma(\mathbb{N})) \cup (\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N}))$$

e quindi, siccome E è infinito e $\mathbb{N} \setminus \sigma(\mathbb{N})$ è finito, $E \cap \sigma(\mathbb{N})$ deve necessariamente essere infinito. Questo implica che ci sono infiniti indici n tali che $\sigma(n) \in E$, vale a dire $|x_{\sigma(n)} - L| > \varepsilon$. Dunque $(x_{\sigma(n)})$ non tende a L.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Il punto b) può anche essere ottenuto dal teorema di cambio di variabile per i limiti di funzioni visto a lezione, che ricordo:

- *Dati X, Y sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$;*
- *data $\sigma : X \to Y$ e $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione di X tale che $\sigma(x)$ tende ad un certo $\bar{y} \in \overline{\mathbb{R}} \setminus Y$ per $x \to \bar{x}$;*
- *data $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\sigma(y)$ tende ad un certo $L \in \overline{\mathbb{R}}$ per $y \to \bar{y}$;*

allora $f(\sigma(x))$ tende a L per $x \to \bar{x}$.[1]

Applico ora questo risultato con $X = Y = \mathbb{N}$, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come nel testo, e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da $f(m) := x_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$: per il punto a) so che $\sigma(n)$ tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$, e per ipotesi so che $f(m) = x_m$ tende a L per $m \to +\infty$; ne deduco che $f(\sigma(n)) = x_{\sigma(m)}$ tende a L per $n \to +\infty$.

5 Consideriamo un insieme X ed una successione di funzioni $f_n : X \to [0, 1]$ con $n = 1, 2, \ldots$.

a) Dimostrare che se X è finito esiste una sottosuccessione (n_k) tale che la successione di numeri reali $\big(f_{n_k}(x)\big)$ converge per ogni $x \in X$.

b) Dimostrare che questo risultato vale anche se X è numerabile.

c) Far vedere che questo risultato non vale per X qualunque.

<u>SOLUZIONE</u>. Comincio con un'osservazione che serve a semplificare il resto della spiegazione: conviene identificare le sottosuccessioni (n_k) dei numeri naturali con i sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$. Dato infatti $E \subset \mathbb{N}$ infinito, esiste uno ed un solo modo di scrivere gli elementi di E come $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$
In particolare, date due sottosuccessioni (n'_k) ed (n_k), dire che la prima è una sottosuccessione della seconda significa semplicemente che la prima è contenuta nella seconda (intendendole entrambe come sottoinsiemi di $\mathbb{N}$). E quindi scrivo $(n'_k) \subset (n_k)$.

a) Indico gli elementi di X con $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Osservo che $(f_n(x_1))$ è una successione di numeri in $[0, 1]$ e quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione (n^1_k) di (n) tale che $(f_{n^1_k}(x_1))$ converge per $k \to \infty$.
Osservo poi che anche $(f_{n^1_k}(x_2))$ è una successione di numeri in $[0, 1]$, e quindi, sempre per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione (n^2_k) di (n^1_k) tale che $(f_{n^2_k}(x_2))$ converge per $k \to \infty$. Allo stesso modo esiste una sottosuccessione (n^3_k) di (n^2_k) tale che $(f_{n^3_k}(x_3))$ converge per $k \to \infty$, etc. etc.
Riassumendo, ho trovato delle sottosuccessioni $(n^1_k) \supset (n^2_k) \supset \cdots \supset (n^N_k)$ tali che $(f_{n^i_k}(x_i))$ converge per ogni $i = 1, 2, \ldots, N$. In particolare la sottosuccessione (n^N_k) è una sottosuccessione di tutte le altre e quindi $(f_{n^N_k}(x_i))$ converge per ogni $i = 1, \ldots, N$.

b) Posso supporre X numerabile e infinito, e indico gli elementi di X con $x_1, x_2, x_3, \ldots$
Come prima, costruisco (per induzione) una successione di sottosuccessioni $(n^1_k) \supset (n^2_k) \supset \ldots$

[1] Ho messo come ipotesi che $\bar{y} \notin Y$; se invece $\bar{y} \in Y$ bisogna anche assumere che f sia continua in $\bar{y}$.

tali che $(f_{n_k^i}(x_i))$ converge per ogni $i = 1, 2, \dots$
Attenzione: se esistesse una sottosuccessione (n_k) contenuta in (n_k^i) per $i = 1, 2, \dots$ avrei finito. Il problema è che non è detto che tale sottosuccessione esista, e anzi può succedere che l'intersezione delle sottosuccessioni (x_n^i) è vuota. Procedo quindi diversamente, ponendo

$$n_k := n_k^k \quad \text{per } k = 1, 2, \dots$$

Si verifica facilmente che (n_k) è effettivamente una sottosuccessione di (n). Inoltre, preso $i = 1, 2, \dots$, la sottosuccessione (n_k) privata dei primi $i-1$ termini è contenuta in (n_k^i). Questa inclusione "parziale" e il fatto che $(f_{n_k^i}(x_i))$ converge implicano che anche $(f_{n_k}(x_i))$ converge.
c) Prendo $X = [0, 1]$ e considero le funzioni $f_n : [0, 1] \to \{0, 1\}$ definite come segue:

$$f_n(x) := n\text{-esima cifra dopo la virgola nell'espansione di } x \text{ in base 2.}$$

Presa ora una qualunque sottosuccessione (n_k), voglio trovare $x \in [0, 1]$ tale che la successione $(f_n(x))$ non converge. Prendo il numero x scritto in base 2 come $0, x_1x_2x_3 \dots$ dove le cifre x_n sono date da

$$x_n := \begin{cases} 1 & \text{se } n = n_k \text{ per qualche } k \text{ pari,} \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi.} \end{cases}$$

Dalla scelta di x e dalla definizione delle funzioni f_n segue che

$$f_{n_k}(x) = x_{n_k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } k \text{ è dispari,} \end{cases}$$

e quindi la successione $(f_n(x))$ non converge.

<u>OSSERVAZIONI</u>. (i) L'enunciato contenuto nel punto b) è un caso particolare di un enunciato di notevole importanza in Analisi e non solo, che verrà spiegato al secondo anno ("un prodotto numerabile di spazi metrici compatti è compatto").

(ii) La procedura utilizzata per costruire la sottosuccessione (n_k) a partire dalle sottosuccessioni $(n_k^1) \supset (n_k^2) \supset (n_k^3) \supset \dots$ ha pure un ruolo importante in matematica, ed è nota come "procedura diagonale" o anche "argomento diagonale".

(iii) Le funzioni f_n nel punto c) possono essere scritte come $f_n(x) := f(2^n x)$ dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione definita come segue:

$$f(x) := \text{prima cifra prima della virgola nell'espansione di } x \text{ in base 2.}$$

L'esempio funziona anche se si sostituisce questa specifica f con una qualunque funzione da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con periodo 1, continua, e non costante, per esempio $f(x) = \sin(\pi x)$. La dimostrazione del fatto che anche in questo caso per ogni sottosuccessione (n_k) esiste $x \in [0, 1]$ tale che la successione $(f_{n_k}(x))$ non converge è leggermente più complicata.

Prima parte (prima variante)

1. Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{4 + x^2 - x^4}$.

   Soluzione. Scrivo $f(x) = 2\bigl(1+\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^4\bigr)^{1/2}$ e uso lo sviluppo $(1+t)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+O(t^3)$, ottenendo $f(x) = 2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{17}{64}x^4 + O(x^6)$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp(x^2) + ax^2$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.

   Soluzione. Deve essere $\min_{x\in\mathbb{R}} f''(x) \geq 0$, vale a dire $2 + 2a \geq 0$, cioè $a \geq -1$.

3. Mettere le seguenti funzioni nel giusto ordine rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$:
$$\underbrace{\log\left(2^x x^{-2}\right)}_{a}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{1+2^x}}_{b}\,, \quad \underbrace{\frac{4x}{(\log x)^2 + 1}}_{c}\,, \quad \underbrace{\frac{1}{\log x - x^3}}_{d}\,.$$

   Soluzione. $b \ll d \ll c \ll a$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\, dx$.

   Soluzione. $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx = \int \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}\, dx = 2\log|x-2| - \log|x-1| + c$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x^2 + x^a}{(\cos x)^{2a}}\, dx$ è finito.

   Soluzione. Integrale improprio in $\frac{\pi}{2}$ che converge per $a < \frac{1}{2}$, infatti:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2 + x^a}{(\cos x)^{2a}}\, dx \approx \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x)^{2a}}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin y)^{2a}}\, dy \approx \int_0^{1} \frac{1}{y^{2a}}\, dy\,.$$

6. Calcolare il raggio di convergenza R della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2-n^2}{2^n - 1} x^{2n}$.

   Soluzione. $R = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\left|\frac{2^n - 1}{2 - n^2}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt{2}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + 4x^2)\sin t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

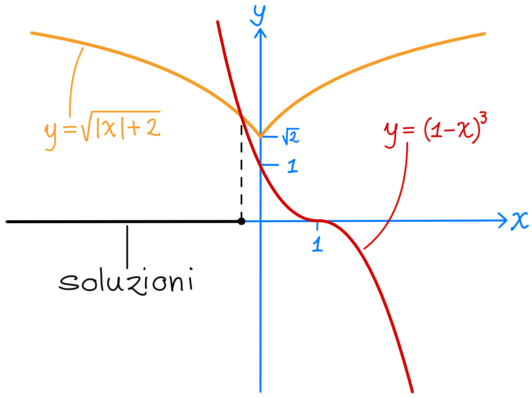
   Soluzione. Equazione a variabili separabili; la soluzione è $x(t) = \frac{1}{2}\tan(2 - 2\cos t)$.

8. In quale classe di funzioni conviene cercare una soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare $D^4 x - x = te^{-t}$?

   Soluzione. Tra le funzioni della forma $\tilde{x}(t) = (a_1 t + a_2 t^2)\, e^{-t}$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x| + 2} \leq (1 - x)^3$.

   Soluzione.



SECONDA PARTE

1 Siano dati $X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Come visto a lezione, f è continua in $\bar{x}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon. \tag{C1}$$

Consideriamo adesso la seguente variante dell'affermazione (C1):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon. \tag{C2}$$

Dimostrare che (C1) e (C2) sono equivalenti.

SOLUZIONE. Per la dimostrazione conviene distinguere il valore di δ_ε nei due enunciati. Chiamo pertanto δ^1_ε quello nell'enunciato (C1) e δ^2_ε quello nell'enunciato (C2).

Per dimostrare l'implicazione (C1) $\Rightarrow$ (C2) devo trovare (per ogni $\varepsilon > 0$) un numero positivo δ^2_ε per cui vale l'affermazione (C2), sapendo che esiste δ^1_ε per cui vale (C1). Per farlo mi basta porre

$$\delta^2_\varepsilon := \delta^1_{\varepsilon/2}\,.$$

Infatti

$$|x - \bar{x}| < \delta^2_\varepsilon = \delta^1_{\varepsilon/2} \Rightarrow |x - \bar{x}| \leq \delta^1_{\varepsilon/2} \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon\,.$$

Invece per dimostrare l'implicazione (C2) $\Rightarrow$ (C1) devo trovare δ^1_ε per cui vale (C1), sapendo che esiste δ^2_ε per cui vale (C2). Per farlo mi basta porre

$$\delta^1_\varepsilon := \tfrac{1}{2}\delta^2_\varepsilon\,.$$

Infatti

$$|x - \bar{x}| \leq \delta^1_\varepsilon = \tfrac{1}{2}\delta^2_\varepsilon \Rightarrow |x - \bar{x}| < \delta^2_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon\,.$$

2 Dato $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, consideriamo l'equazione differenziale

$$D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t + 1\,. \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione generale dell'equazione (*).

b) determinare gli a tali che tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

SOLUZIONE. a) Ricordo che la soluzione generale dell'equazione si scrive come

$$x = x_{\text{om}} + x_1 + x_2\,,$$

dove

- x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea $D^3x - D^2x + aDx - ax = 0$,
- x_1 è una soluzione particolare dell'equazione $D^3x - D^2x + aDx - ax = 1$,
- x_2 è una soluzione particolare dell'equazione $D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t$.

Calcolo di x_{om}. Il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ associato all'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + a\lambda - a = (\lambda^2 + a)(\lambda - 1) = 0$$

e quindi le tre radici (complesse) di $P(\lambda)$ sono

$$\lambda = 1\,, \quad \lambda = \pm\sqrt{-a}\,.$$

Devo quindi distinguere tre casi:

$$x_{\text{om}}(t) = \begin{cases} c_1e^t + c_2\sin(\sqrt{a}t) + c_3\cos(\sqrt{a}t) & \text{se } a > 0, \\ c_1e^t + c_2e^{\sqrt{-a}t} + c_3e^{-\sqrt{-a}t} & \text{se } a < 0 \text{ e } a \neq -1, \\ (c_1 + c_2t)\,e^t + c_3e^{-t} & \text{se } a = -1, \end{cases}$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Calcolo di x_1. Essendo il termine noto 1 una costante, cerco la soluzione particolare x_1 tra le costanti, e trovo subito

$$x_1(t) = -\tfrac{1}{a}\,.$$

Calcolo di x_2 per $a \neq -1$. Il termine noto e^t risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti $\dot{x} - x = 0$, il cui polinomio caratteristico ha come radice $\lambda = 1$. Siccome $a \neq -1$,

$\lambda = 1$ è anche una radice con *molteplicità uno* del polinomio $P(\lambda)$ e quindi cerco x_2 della forma $x_2(t) = bte^t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione

$$D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t$$

ottengo $b(a+1)e^t = e^t$, identità che è soddisfatta per $b = \frac{1}{a+1}$. Pertanto

$$x_2(t) = \tfrac{1}{a+1} te^t \quad \text{per } a \neq -1.$$

Calcolo di x_2 per $a = -1$. In questo caso $\lambda = 1$ è una radice con *molteplicità due* del polinomio $P(\lambda)$ e quindi cerco x_2 della forma $x_2(t) = bt^2e^t$. Sostituendo questa espressione nell'equazione

$$D^3x - D^2x + aDx - ax = e^t$$

ottengo $4be^t = e^t$, identità che è soddisfatta per $b = \frac{1}{4}$. Pertanto

$$x_2(t) = \tfrac{1}{4} t^2 e^t \quad \text{per } a = -1.$$

b) Dalle formule date sopra si vede che per ogni a vale

$$x_1(t) = O(e^{2t}), \quad x_2(t) = O(e^{2t}) \quad \text{per } t \to +\infty.$$

Quindi il problema si riduce a trovare i valori di a per cui

$$x_{\rm om}(t) = O(e^{2t}) \quad \text{per } t \to +\infty. \tag{1}$$

Dalla formula per $x_{\rm om}$ data sopra si vede subito che la condizione (1) è verificata per $a > 0$ e per $a = -1$. Inoltre è verificata per $a < 0$ e $a \neq -1$ se e solo se $\sqrt{-a} \leq 2$, vale a dire $a \geq -4$. Pertanto gli a cercati sono $a \geq -4$.

3 a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := (\cos x)^{2x} - 1$.
b) Dato $a \in \mathbb{R}$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) + ax^3$.

<u>Soluzione</u>. a) Scrivo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \exp\big(2x \log(\cos x)\big) - 1.$$

Osservo ora che $2x\log(\cos x) \to 0$ per $x \to 0$ e quindi posso usare lo sviluppo $e^t - 1 \sim t$ (per $t \to 0$) con $t := 2x\log(\cos x)$:

$$f(x) = \exp(2x\log(\cos x)) - 1 \sim 2x\log(\cos x).$$

Poiché $\cos x - 1 \to 0$ per $x \to 0$, posso usare lo sviluppo $\log(1+t) \sim t$ con $t := \cos x - 1$:

$$f(x) \sim 2x\log(\cos x) = 2x\log(1 + (\cos x - 1)) \sim 2x(\cos x - 1).$$

Usando infine lo sviluppo $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ ottengo

$$f(x) \sim 2x(\cos x - 1) \sim -x^3,$$

cioè $\text{p.p.}(f(x)) = -x^3$.
b) Usando quanto fatto al punto a) ottengo che per $a \neq 1$

$$f(x) + ax^3 \sim (a-1)\, x^3,$$

cioè $\text{p.p.}(f(x) + ax^3) = (a-1)x^3$.
Il caso $a = 1$ richiede invece uno sviluppo più preciso di $f(x)$, e per ottenerlo procedo diversamente da come fatto sopra.
Parto dallo sviluppo di $\log(\cos x)$: usando lo sviluppo $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$ ottengo

$$\log(\cos x) = \log\big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big),$$

e usando lo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ con

$$t := -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6) = -\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4) = O(x^2)$$

ottengo

$$\begin{aligned}\log(\cos x) &= \log(1+t)\\ &= t - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3)\\ &= \big[-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + O(x^6)\big] - \tfrac{1}{2}\big[-\tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\big]^2 + O\big([O(x^2)]^3\big)\\ &= -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{12}x^4 + O(x^6)\,,\end{aligned}$$

e quindi

$$2x\log(\cos x) = -x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + O(x^7)\,.$$

Usando ora lo sviluppo $e^t = 1 + t + O(t^2)$ con $t := -x^3 - \frac{1}{6}x^5 + O(x^7) = O(x^3)$ ottengo

$$\begin{aligned}\exp\big(2x\log(\cos x)\big) = e^t &= 1 + t + O(t^2)\\ &= 1 + \big[-x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + O(x^7)\big] + O\big([O(x^3)]^2\big)\\ &= 1 - x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + O(x^6)\,,\end{aligned}$$

da cui segue che $f(x) + x^3 = -\frac{1}{6}x^5 + O(x^6)$ e quindi

$$\text{p.p.}(f(x) + x^3) = -\tfrac{1}{6}x^5\,.$$

4 Indichiamo con S_N le somme parziali della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}\,.$$

a) Trovare N affinché S_N approssimi S con errore inferiore a 10^{-3}.
b) Calcolare il valore esatto di S.
[*Suggerimento per b): considerare la serie di potenze* $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.]

<u>SOLUZIONE</u>. a) Si chiede di trovare N tale che

$$|S - S_N| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} n\,4^{-n} \le 10^{-3}\,.$$

Osservo ora che la funzione $g(x) := x\,4^{-x}$ è decrescente per $x \ge \frac{1}{\log 4} \simeq 0{,}72$, e quindi vale la stima

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} n\,4^{-n} \le \int_N^{+\infty} x\,4^{-x}\,dx\,. \tag{2}$$

Integrando per parti ottengo

$$\int_N^{+\infty} x\,4^{-x}\,dx = \Big(\frac{N}{\log 4} + \frac{1}{(\log 4)^2}\Big)\frac{1}{4^N}\,,$$

che messo insieme alla disuguaglianze precedenti dà

$$|S - S_N| \le \Big(\frac{N}{\log 4} + \frac{1}{(\log 4)^2}\Big)\frac{1}{4^N}\,.$$

Infine calcolo il termine di destra di questa disuguaglianza per i primi valori di N, e per $N = 7$ ottengo circa $3{,}4 \cdot 10^{-4}$, che è minore di 10^{-3}. Quindi $N = 7$ soddisfa quanto richiesto, e per la precisione

$$|S - S_7| \le 3{,}4 \cdot 10^{-4}\,.$$

b) La serie di potenze

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$$

ha raggio di convergenza 1, e raccogliendo x ottengo la derivata della serie geometrica di base x, di cui conosco il valore esatto; per la precisione, per $x \in (-1,1)$ vale che

$$f(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\Big)' = x\Big(\frac{1}{1-x}-1\Big)' = \frac{x}{(1-x)^2}\,.$$

In particolare $S = f\big(\frac{1}{4}\big) = \frac{4}{9}$.

Osservazioni. Una soluzione alternativa del punto a) è la seguente: si dimostra per induzione su n che

$$\frac{n}{4^n} \leq \frac{1}{3^n} \quad \text{per } n \geq 3,$$

e si usa questa disuguaglianza per stimare la coda della serie originale con quella della serie geometrica di base $\frac{1}{3}$, che può essere calcolata esplicitamente: per $N \geq 2$ vale infatti che

$$|S - S_N| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n}{4^n} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{N+1}}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{3^m} = \frac{2}{3^N}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $n = N+1+m$).
Calcolo $\frac{2}{3^N}$ per i primi valori di N, e per $N = 6$ ottengo circa $6{,}9 \cdot 10^{-4}$, che è minore di 10^{-3}; quindi anche $N = 6$ soddisfa la richiesta, e per la precisione

$$|S - S_6| \leq 6{,}9 \cdot 10^{-4}\,.$$

5 Sia $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$\int_1^{+\infty} |f'(x)|\,dx < +\infty\,. \tag{3}$$

Dimostrare che:
a) l'integrale improprio $I := \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste se e solo se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,dx$.[1]
b) Dimostrare che la serie $S := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ si comporta come l'integrale improprio I.[2]
[*Suggerimento per b): porre* $a_n := \int_n^{n+1} f(x)\,dx - f(n)$ *e dimostrare che* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.]

Soluzione. In questa soluzione la lettera n indica sempre una variabile *intera*.
Dall'ipotesi (3) segue che l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} f'(x)\,dx = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} f(x)}_{L} - f(1)$$

esiste ed è finito, ed in particolare il limite L esiste ed è finito. Ci sono quindi tre possibili casi:
Se $L > 0$ allora $I = S = +\infty$ e gli enunciati a) e b) sono ovviamente veri.
Se $L < 0$ allora $I = S = -\infty$ e di nuovo gli enunciati a) e b) sono veri.
L'unico caso che resta da considerare è $L = 0$.
a) Indico con $F : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ la primitiva di f data da

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt\,.$$

Siccome l'integrale improprio I è dato dal limite di $F9x)$ per $x \to +\infty$, l'enunciato da dimostrare diventa quindi il seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \text{ esiste} \iff \lim_{n\to+\infty} F(n) \text{ esiste.}$$

[1] Si intende che in questo limite la variabile n è *intero*.
[2] Questa è una variante del teorema di confronto serie–integrale che si applica anche a funzioni f non decrescenti.

L'implicazione "⇒" è ovviamente vera mentre l'implicazione "⇐" segue dal fatto che

$$\lim_{x\to+\infty} \big(F(x) - F(\lfloor x\rfloor)\big) = 0\,.$$[3]

Infatti per il teorema di Lagrange esiste $\tilde{x} \in [x, \lfloor x\rfloor]$ tale che

$$F(x) - F(\lfloor x\rfloor) = F'(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$$

e ora basta osservare che $\tilde{x}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi $f(\tilde{x})$ tende a $L = 0$.

b) Ho già osservato che il comportamento dell'integrale improprio I coincide con quello del limite di $F(x)$ per $x \to +\infty$, che per il punto a) coincide con quello del limite di $F(n)$ per $n \to +\infty$, che infine coincide con il comportamento della serie la cui somma parziale n-esima vale $F(n)$, cioè

$$S' := \sum_{n=1}^{+\infty} F(n+1) - F(n)\,.$$

Mi basta dunque dimostrare che le serie S ed S' hanno lo stesso comportamento.

Per farlo chiamo a_n la differenza tra gli addendi di S' e quelli di S, vale a dire

$$a_n := \big(F(n+1) - F(n)\big) - f(n)\,,$$[4]

e dimostro che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \tag{4}$$

Da questa affermazione segue che la serie

$$S'' := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge ad un numero finito e quindi

$$\lim_{N\to+\infty} S'_N = \lim_{N\to+\infty} (S_N + a_n) = \lim_{N\to+\infty} S_N + S''\,.$$[5]

Pertanto il limite di S'_N ha lo stesso comportamento di quello di S_N, ovvero la serie S' ha lo stesso comportamento di S.

Non mi resta che dimostrare (4). Esprimo $F(n+1)$ usando lo sviluppo di Taylor di F nel punto n con resto integrale:

$$\begin{aligned} F(n+1) &= F(n) + F'(n) + \int_0^1 (1-t)\,F''(n+t)\,dt \\ &= F(n) + f(n) + \int_0^1 (1-t)\,f'(n+t)\,dt\,, \end{aligned}$$

da cui segue che

$$a_n = F(n+1) - F(n) - f(n) = \int_0^1 (1-t)\,f'(n+t)\,dt\,,$$

quindi

$$|a_n| \le \int_0^1 (1-t)\big|f'(n+t)\big|\,dt \le \int_0^1 \big|f'(n+t)\big|\,dt = \int_n^{n+1} \big|f'(x)\big|\,dx\,,$$

e infine

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \big|f'(x)\big|\,dx = \int_1^{+\infty} \big|f'(x)\big|\,dx < +\infty\,.$$

Osservazioni. Si può far vedere che sotto l'ipotesi (3) l'integrale improprio I e la serie S possono avere tutti i possibili comportamenti.

[3] $\lfloor x\rfloor$ indica come al solito la parte intera di x, cioè il più grande intero minore o uguale a x.
[4] Questa scelta di a_n coincide con il suggerimento dato nel testo.
[5] S_N ed S'_N indicano le somme parziali delle serie S ed S' rispettivcamente.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Trovare $r > 0$ ed $\alpha \in [-\pi, \pi]$ per cui vale l'identità $\sin x + \cos x = r \sin(x + \alpha)$.
   SOLUZIONE. Deve valere $r \cos \alpha = 1$ e $r \sin \alpha = 1$, cioè r e α sono le coordinate polari del punto $(1, 1)$, e quindi $r = \sqrt{2}$ e $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. Determinare l'inversa della funzione $f(x) := x^2 - x$ ristretta alla semiretta $x \leq \frac{1}{2}$.
   SOLUZIONE. $f^{-1}(y) = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4y}}{2}$.

3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 4 in 0 della funzione $f(x) := \sqrt{1 - 2x^2 - x^4}$.
   SOLUZIONE. $P_4(x) = 1 - x^2 - x^4$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ vale che $\dfrac{x^3 + 1}{\log(x^4 + 1)} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$
   SOLUZIONE. $a \geq 3$.

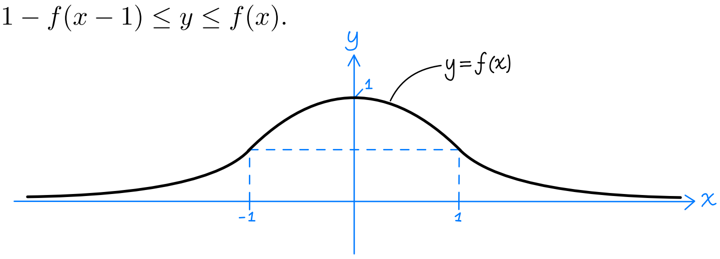
5. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_2^{3^x} \frac{dt}{1 + t^8}$.
   SOLUZIONE. $f'(x) := \dfrac{\log 3 \cdot 3^x}{1 + 3^{8x}}$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 \leq x \leq 2$ e $(x + 1)^{-1/2} \leq y \leq x^{-1/2}$. Calcolare l'area di A.
   SOLUZIONE. $\text{area}(A) = \displaystyle\int_1^2 x^{-1/2} - (x+1)^{-1/2}\, dx = \Big| 2x^{1/2} - 2(x+1)^{1/2} \Big|_1^2 = 2\big(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1\big)$.

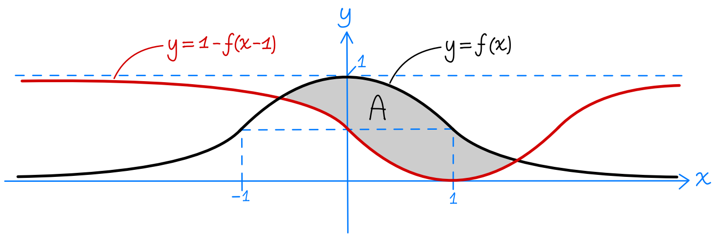
7. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2x = 2t$.
   SOLUZIONE. $x(t) = ce^{-2t} + t - \frac{1}{2}$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big[(n^2 + 1)^a - n^{2a}\big]$ converge ad un numero finito.
   SOLUZIONE. La serie si comporta come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2a-2}$ e quindi converge per $a < \frac{1}{2}$.

9. Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è riportato nella figura sotto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $1 - f(x - 1) \leq y \leq f(x)$.



   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

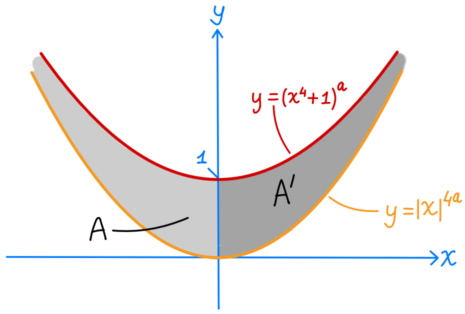
1 Dato $a > 0$, consideriamo l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $|x|^{4a} \leq y \leq (x^4 + 1)^a$, e indichiamo con V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse y.

a) Dire per quali a l'area di A è finita.

b) Dire per quali a il volume di V è finito.

SOLUZIONE. a) Osservo per cominciare che le funzioni $|x|^{4a}$ e $(x^4 + 1)^a$ sono pari, e quindi l'insieme A è simmetrico rispetto all'asse delle y. Detta dunque A' la parte di A a destra dell'asse delle y, l'area di A è il doppio di quella di A' ed in particolare è finita se e solo se lo è quella di A'.
Infine $|x|^{4a} < (x^4 + 1)^a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi la proiezione ortogonale di A sull'asse delle x coincide con l'asse stesso, mentre la proiezione di A' coincide con la semiretta $[0, +\infty)$.

A titolo illustrativo riporto il grafico delle due funzioni per un generico $a > \frac{1}{4}$; notare che questo disegno non ha alcun ruolo nella risoluzione dell'esercizio:



Per una variante della formula viosta a lezione, l'area di A' è data da

$$\text{area}(A') = \int_0^{+\infty} \underbrace{(x^4 + 1)^a - x^{4a}}_{f(x)} \, dx \,. \tag{1}$$

Questo integrale è improprio semplice in $+\infty$, e la funzione integranda $f(x)$ è sempre positiva; per studiare il comportamento dell'integrale trovo la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e poi uso il criterio del confronto asintotico:

$$f(x) = (x^4 + 1)^a - x^{4a} = x^{4a}\big[\big(1 + x^{-4}\big)^a - 1\big] \sim x^{4a-4} \tag{2}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato la formula $(1 + t)^a - 1 \sim at$ per $t \to 0$, che segue dallo sviluppo di Taylor $(1 + t)^a = 1 + at + O(t^2)$).
Dalla (2) segue che l'integrale improprio in (1) si comporta come $\int_1^\infty x^{4a-4} dx$, ed in particolare è finito se e solo se $4a - 4 < -1$, vale a dire $a < \frac{3}{4}$.

In conclusione, l'area di A è finita se e solo se $a < \frac{3}{4}$.

b) Il solido V può essere ottenuto ruotando A' attorno all'asse delle y, e siccome A' sta a destra di questo asse, vale che

$$\text{volume}(V) = \int_0^{+\infty} 2\pi x \, f(x) \, dx \,. \tag{3}$$

Come prima, l'integrale è improprio semplice in $+\infty$, e usando lo sviluppo (2) ottengo che si comporta come $\int_1^\infty x^{4a-3} dx$, che è finito se e solo se $4a - 3 < -1$, vale a dire $a < \frac{1}{2}$.

In conclusione, il volume di V è finito se e solo se $a < \frac{1}{2}$.

2 Dire se esistono il massimo e il minimo di $\dfrac{n^2 - 6n + 8}{e^n}$ al variare di $n = 1, 2, \ldots$ e in caso affermativo calcolarli.

SOLUZIONE. Nella soluzione di questo esercizio uso la lettera n per indicare una variabile intera, e la lettera x per indicare una variabile reale.

Osservo che $\frac{n^2-6n+8}{e^n} = f(n)$ dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x) := (x^2 - 6x + 8)\, e^{-x}\,.$$

Questa funzione tende a 0 per $x \to +\infty$ e tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$. Inoltre, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = (-x^2 + 8x - 14)\, e^{-x}\,,$$

ottengo che $f(x)$ è decrescente per $x \le 4 - \sqrt{2} \simeq 2{,}58$ e per $x \ge 4 + \sqrt{2} \simeq 5{,}41$ (ed è crescente per $4 - \sqrt{2} \le x \le 4 + \sqrt{2}$).

Da quanto detto segue che la successione $f(n)$ è decrescente per $n \ge 6$, e di conseguenza

- il valore massimo di $f(n)$ per $n = 6, 7, \dots$ è $f(6) = 8e^{-6} \simeq 0{,}019$;
- il valore minimo di $f(n)$ per $n = 6, 7, \dots$ non esiste e l'estremo inferiore dei valori è 0, ottenuto per $n \to +\infty$.

Calcolando esplicitamente i valori di $f(n)$ per gli n rimanenti, cioè $n = 1, \dots, 5$, ottengo che

- il valore massimo di $f(n)$ per $n = 1, \dots, 5$ è $f(1) = 3e^{-1} \simeq 1{,}104$;
- il valore minimo di $f(n)$ per $n = 1, \dots, 5$ è $f(3) = -e^{-3} \simeq -0{,}050$.

Mettendo insieme quanto detto sopra ottengo infine che

- il valore massimo di $f(n)$ per $n = 1, 2, \dots$ è $f(1) = 3e^{-1} \simeq 1{,}104$;
- il valore minimo di $f(n)$ per $n = 1, 2, \dots$ è $f(3) = -e^{-3} \simeq -0{,}050$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Il problema consiste nel trovare il valore massimo e minimo di f relativamente all'insieme $\mathbb{Z} \cap [1, +\infty)$, e per farlo si può applicare una variante dell'algoritmo visto a lezione per la ricerca del valori massimo e minimo di f relativamente alla semiretta $[1, +\infty)$: si osserva per cominciare che la funzione f è derivabile in ogni $x \in [1, +\infty)$, e che la derivata si annulla per $x = 4 \pm \sqrt{2}$; quindi si confrontano i valori di f agli estremi della semiretta, cioè in 1 e $+\infty$, e *negli interi subito prima e subito dopo i punti* $x = 4 \pm \sqrt{2}$, vale a dire $n = 2, 3$ per $x = 4 - \sqrt{2} \simeq 2{,}58$ e $n = 5, 6$ per $x = 4 + \sqrt{2} \simeq 5{,}41$. Così facendo si ottiene di nuovo che il valore minimo di $f(n)$ è $f(3)$ mentre il valore massimo è $f(1)$.

Osservo tuttavia che questa variante dell'algoritmo per la ricerca del valore massimo e minimo non è stata giustificata a lezione.

$\boxed{3}$ Per ogni $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione

$$2 \arctan x + \frac{1}{x} = a\,, \tag{4}$$

e indichiamo con $x(a)$ la più grande delle soluzioni (se ne esiste almeno una).

a) Discutere il numero di soluzioni dell'equazione (1) al variare di $a \in \mathbb{R}$.

b) Specificare il dominio, i punti di discontinuità e i limiti significativi della funzione $a \mapsto x(a)$, e disegnarne il grafico.

c) Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to +\infty$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Posso riscrivere l'equazione (4) come $f(x) = a$ dove

$$f(x) := 2 \arctan x + \frac{1}{x}\,.$$

Si vede facilmente che la funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \ne 0$, ed è dispari, strettamente positiva per $x > 0$, strettamente negativa per $x < 0$; inoltre

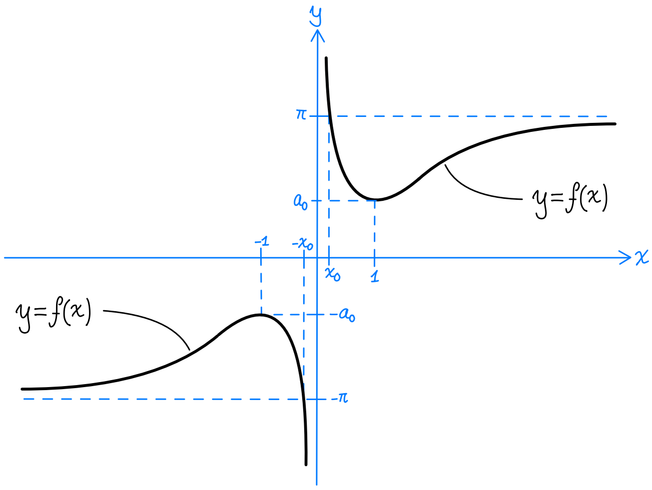
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\pi\,, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \pi\,.$$

Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(1+x^2)}$$

ottengo che f è strettamente crescente nelle semirette $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente negli intervalli $[-1, 0)$ e per $(0, 1]$.

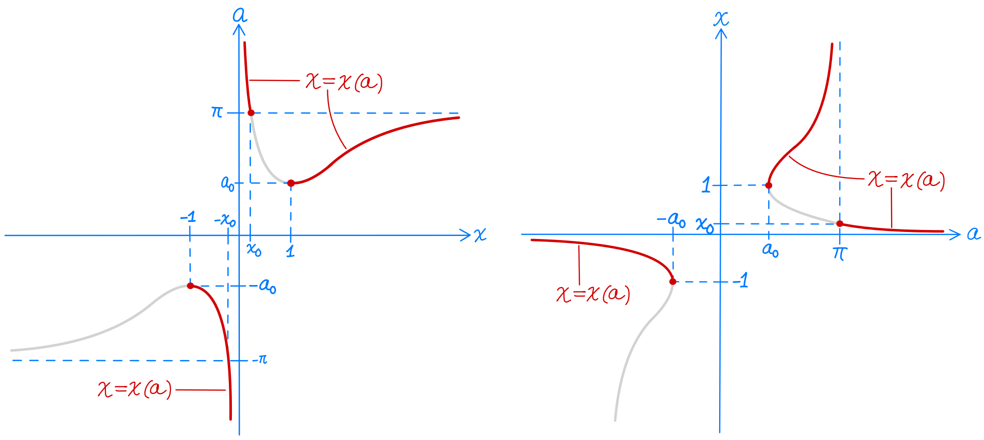
Sulla base di queste informazioni[1] traccio il grafico riportato sotto, dove $a_0 := f(1) = \frac{\pi}{4} + 1$ (le proporzioni non sono rispettate).



Da questo grafico risulta chiaro che l'equazione (4), vale a dire $f(x) = a$ ha

- 1 soluzione per $a \leq -\pi$;
- 2 soluzioni per $-\pi < a < -a_0$;
- 1 soluzione uguale a -1 per $a = -a_0$;
- 0 soluzioni per $-a_0 < a < a_0$;
- 1 soluzione uguale a 1 per $a = a_0$;
- 2 soluzioni per $a_0 < a < \pi$;
- 1 soluzione per $a \geq \pi$.

b) La figura sotto a sinistra contiene il grafico della funzione $a \mapsto x(a)$, visto come sottoinsieme del grafico di f; la figura a destra contiene lo stesso grafico con gli assi scambiati.



Dal grafico risulta chiaro che la funzione $x(a)$ è definita per $a \leq -a_0$ e per $a \geq a_0$, ed è sempre continua tranne che per $a = \pi$, dove è discontinua da sinistra e continua da destra; inoltre i limiti significativi (cioè quelli che non seguono dalla continuità) sono

$$\lim_{a \to -\infty} x(a) = 0^- \,, \qquad \lim_{a \to \pi^-} x(a) = +\infty \,, \qquad \lim_{a \to +\infty} x(a) = 0^+ \,.$$

[1] Volendo potrei anche studiare il segno della derivata seconda $f''(x) = \frac{-2x^4+4x^2+2}{(1+x^2)^2 x^3}$, ottenendo che f è strettamente convessa in $(-\infty, -x_0]$ e in $(0, x_0]$ dove $x_0 := \sqrt{1+\sqrt{2}}$, ed è strettamente concava in $[-x_0, 0)$ e in $[x_0, +\infty)$. Questa informazione è utile a disegnare un grafico più preciso, ma non ha alcun ruolo nella discussione del numero di soluzioni dell'equazione (4).

c) Utilizzando il fatto che $x(a)$ tende a 0 per $a \to +\infty$ ed il fatto che $f(x) \sim \frac{1}{x}$ per $x \to 0$ ottengo che, per $a \to +\infty$,

$$a = f(x(a)) \sim \frac{1}{x(a)} \quad \text{cioè} \quad \text{p.p.}(x(a)) = \frac{1}{a}\,.$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. Una dimostrazione rigorosa delle conclusioni riportate in fondo al punto a) può essere ottenuta usando il seguente enunciato ed alcune ovvie varianti (tutti corollari immediati del teorema dei valori intermedi): *sia $f; [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente crescente, allora l'equazione $f(x) = a$ non ha soluzioni per $a < f(x_0)$ e per $a > f(x_1)$, ed ha una ed una sola soluzione per $f(x_0) < a < f(x_1)$.*

Una dimostrazione rigorosa delle conclusioni riportate in fondo al punto b) richiede il seguente enunciato, che però non è stato dimostrato durante il corso: *sia I un intervallo, sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua strettamente crescente (oppure strettamente decrescente), e sia $J := f(I)$ l'immagine di f; allora la funzione inversa $f^{-1} : J \to I$ è continua.*

$\boxed{4}$ a) Dimostrare che l'integrale superiore è subadditivo, cioè che date due funzioni limitate f, g sull'intervallo $[a, b]$, allora

$$\int_a^{b\,*} f(x)\,dx + \int_a^{b\,*} g(x)\,dx \geq \int_a^{b\,*} f(x) + g(x)\,dx\,. \tag{5}$$

b) Far vedere con un esempio che la disuguaglianza in (5) può essere stretta.

c) Dimostrare che la disuguaglianza in (5) è un'uguaglianza se f è continua.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Sia $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ una partizione di $[a, b]$; per le somme di Riemann superiori corrispondenti a σ delle funzioni f, g ed $f + g$ vale che

$$S''(f, \sigma) + S''(g, \sigma) \geq S''(f + g, \sigma)\,. \tag{6}$$

Infatti

$$\begin{aligned} S''(f,\sigma) + S''(g,\sigma) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \Big[\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) + \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \Big] \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x) + g(x)) = S''(f + g, \sigma)\,. \end{aligned}$$

(Nel primo passaggio ho usato definizione di somma superiore; nel terzo ho usato il seguente fatto elementare (che non dimostro): *dato un insieme X e due funzioni $f, g : X \to \mathbb{R}$ allora*

$$\sup_{x \in X} f(x) + \sup_{x \in X} g(x) \geq \sup_{x \in X} (f(x) + g(x))\,; \tag{7}$$

nel quarto ho usato di nuovo la definizione di somma superiore.)

Posso ora concludere la dimostrazione: dato $\varepsilon > 0$ uso la definizione di integrale superiore per scegliere due partizioni σ'_ε e σ''_ε tali che

$$\int^* f(x)\,dx + \varepsilon \geq S''(f, \sigma'_\varepsilon)\,, \quad \int^* g(x)\,dx + \varepsilon \geq S''(g, \sigma''_\varepsilon)\,,$$

e prendo una partizione σ più fine di entrambe; quindi, grazie alla disuguaglianza (6), ottengo

$$\begin{aligned} \int^* f(x)\,dx + \int^* g(x)\,dx + 2\varepsilon &\geq S''(f, \sigma'_\varepsilon) + S''(g, \sigma''_\varepsilon) \\ &\geq S''(f, \sigma) + S''(g, \sigma) \\ &\geq S''(f + g, \sigma) \geq \int_a^{b\,*} f(x) + g(x)\,dx\,, \end{aligned}$$

e cioè

$$\int^{*} f(x)\,dx + \int^{*} g(x)\,dx + 2\varepsilon \geq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx\,;$$

siccome ε è un numero positivo arbitrario, ho dimostrato la (5).

b) Sia f la funzione di Dirichlet, vale a dire la funzione indicatrice dei numeri razionali, e sia $g := -f$. Abbiamo visto a lezione che

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx = b - a\,,$$

e ragionando allo stesso modo si ottiene che

$$\int_a^{*b} g(x)\,dx = 0\,;$$

quindi

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx = b - a > 0\,.$$

D'altra parte $f + g = 0$ e quindi

$$\int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0\,.$$

c) Noto che f è uniformemente continua, e per ogni $\varepsilon > 0$ prendo $\delta_\varepsilon > 0$ come nella definizione di uniforme continuità. Preso allora un intervallo $X \subset [a,b]$ con lunghezza inferiore a δ_ε, per ogni $x, x' \in X$ vale $f(x') \leq f(x) + \varepsilon$, e quindi anche

$$f(x') + g(x) \leq f(x) + g(x) + \varepsilon \leq \sup_{x\in X}(f(x) + g(x)) + \varepsilon\,,$$

da cui segue che (ometto i dettagli)

$$\sup_{x\in X} f(x) + \sup_{x\in X} g(x) \leq \sup_{x\in X}(f(x) + g(x)) + \varepsilon\,, \tag{8}$$

che è in un certo senso l'opposto della disuguaglianza in (7).

Usando la disuguaglianza (8) ottengo che per ogni partizione $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ di $[a,b]$ con parametro di finezza $\delta(\sigma) \leq \delta_\varepsilon$ vale

$$S''(f,\sigma) + S''(g,\sigma) \leq S''(f+g,\sigma) + (b-a)\varepsilon\,,$$

che a sua volta è l'opposto (in un certo senso) della disuguaglianza (6).
Ricordando la definizione di integrale superiore ottengo quindi che

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx \leq S''(f+g,\sigma) + (b-a)\varepsilon$$

e poi

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx \leq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx + (b-a)\varepsilon\,;$$

siccome ε è un numero positivo arbitrario ottengo infine

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_a^{*b} g(x)\,dx \leq \int_a^{*b} f(x) + g(x)\,dx\,.$$

Da questa disuguaglianza segue l'uguaglianza in (5).

5 Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}$, caratterizzare le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni successione $(x_n) \subset \mathbb{R}$ con $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$ vale $\limsup\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

<u>SOLUZIONE</u>. Dati $\bar{x} \in \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dimostro che i seguenti enunciati sono equivalenti:

(i) per ogni successione $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tale che $\limsup x_n = \bar{x}$ vale $\limsup f(x_n) = f(\bar{x})$;

(ii) f è continua in $\bar{x}$ e $f(x) \leq f(\bar{x})$ per ogni $x < \bar{x}$.

Per la dimostrazione userò le seguenti proprietà del limsup: *data una successione* $(y_n) \subset \mathbb{R}$ *e* $L \in \mathbb{R}$, *allora*

- $\limsup y_n \leq L \Leftrightarrow$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ *vale che* $y_n \leq L + \varepsilon$ *definitivamente;*

- $\limsup y_n \geq L \Leftrightarrow$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ *vale che* $y_n \geq L - \varepsilon$ *frequentemente;*

Dimostro prima l'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii).
Suppongo per assurdo che esista $x < \bar{x}$ tale che $f(x) > f(\bar{x})$, e prendo la seguente successione:

$$x_n := \begin{cases} \bar{x} & \text{per } n \text{ pari,} \\ x & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Tenendo conto che $x < \bar{x}$ e $f(\bar{x}) < f(x)$ ottengo

$$\limsup_{n \to +\infty} x_n = \bar{x} \quad \text{e} \quad \limsup_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$$

e dunque $\limsup f(x_n) \neq f(\bar{x})$, in contraddizione con (i).

Adesso suppongo per assurdo che f non sia continua in $\bar{x}$. Abbiamo visto a lezione che in tal caso posso trovare $\varepsilon > 0$ ed una successione (x_n) che tende a $\bar{x}$ tale che $|f(x_n) - f(\bar{x})| > \varepsilon$ per ogni n. Abbiamo allora due possibilità:

- $f(x_n) > f(\bar{x}) + \varepsilon$ frequentemente, e quindi $\limsup f(x_n) \geq f(\bar{x}) + \varepsilon$,
- $f(x_n) < f(\bar{x}) - \varepsilon$ definitivamente e quindi $\limsup f(x_n) \leq f(\bar{x}) - \varepsilon$;

in entrambi i casi $\limsup f(x_n) \neq f(\bar{x})$, in contraddizione con (i).

Dimostro ora l'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (i). Dati $\varepsilon > 0$ e (x_n) tale che $\limsup x_n = \bar{x}$, devo far vedere che

$$f(x_n) \geq f(\bar{x}) - \varepsilon \text{ frequentemente e } f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

Prendo $\delta_\varepsilon > 0$ come nella definizione di continuità di f in $\bar{x}$.
Siccome $\limsup x_n = \bar{x}$ allora $x_n \leq \bar{x} + \delta_\varepsilon$ definitivamente e $x_n \geq \bar{x} - \delta_\varepsilon$ frequentemente, da cui segue che $|x_n - \bar{x}| \leq \delta_\varepsilon$ frequentemente, e quindi $|f(x_n) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$ frequentemente per la continuità di f in $\bar{x}$; in particolare $f(x_n) \geq f(\bar{x}) - \varepsilon$ frequentemente.

Definitivamente vale che $x_n \leq \bar{x} + \delta_\varepsilon$, e questo disuguaglianza implica una delle seguenti possibilià:

- $x_n \leq \bar{x}$, e quindi $f(x_n) \leq f(\bar{x}_n)$;
- $\bar{x} < x_n \leq \bar{x} + \delta_\varepsilon$, quindi $|f(x_n) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$;

In entrambi i casi vale che $f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \varepsilon$; ho quindi dimostrato che quest'ultima disuguaglianza vale definitivamente.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Aggiungere l'ipotesi mancante nel seguente enunciato: *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua; allora f ammette un valore minimo.*
SOLUZIONE. Serve che l'intervallo I sia chiuso (e limitato).

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+x)}{\log x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4\log(1+x^2) - \log(1+4x^2)}{x^4}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x+\sin x}$.
SOLUZIONE. a) non esiste, b) 6, c) 0.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := x^3 + ax^2 + x$ è crescente su $\mathbb{R}$.
SOLUZIONE. La derivata $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$ deve essere positiva o nulla; il valore minimo della derivata è $-\frac{1}{3}a^2 + 1$ ed imponendo che sia positivo o nullo si ottiene $-\sqrt{3} \le a \le \sqrt{3}$.

4. Determinare l'immagine della funzione $f(x) := x^4 e^{-x^2}$.
SOLUZIONE. La funzione è definita su $\mathbb{R}$ e l'immagine $f(\mathbb{R})$ è l'intervallo delimitato dal valore massimo e minimo di f;[1] quindi $f(\mathbb{R}) = \big[0, 4e^{-2}\big]$.

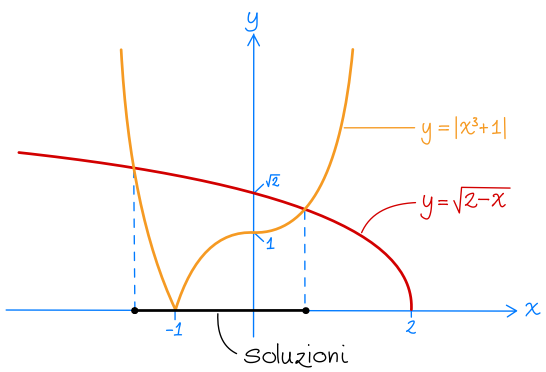
5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \frac{2x^3+4}{x^2-1}\,dx$.
SOLUZIONE. $\displaystyle\int \frac{2x^3+4}{x^2-1}\,dx = \int 2x + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx = x^2 + 3\log|x-1| - \log|x+1| + c$.

6. Sia A l'insieme dei punti (x,y) tali che $|y| \le \dfrac{4}{1+4x^2}$. Calcolare l'area di A.
SOLUZIONE. $\displaystyle \text{area}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1+4x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+y^2}\,dy = \Big|2\arctan y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi$.[2]

7. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n\, x^{n^2+1}$.
SOLUZIONE. $\displaystyle R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2+1]{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{n}{n^2+1}} = \exp\Big(\lim_{n\to+\infty} -\tfrac{n}{n^2+1}\log n\Big) = \exp(0) = 1$.

8. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = \tan x$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = -\frac{\pi}{6}$.
SOLUZIONE. Equazione a variabili separabili che si riduce a $\log(|\sin x|) = t + c$; dalla condizione iniziale si ricava $c = -\log 2$, e quindi $x(t) = -\arcsin\big(\frac{1}{2}e^t\big)$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $|x^3+1| \le \sqrt{2-x}$.
SOLUZIONE.



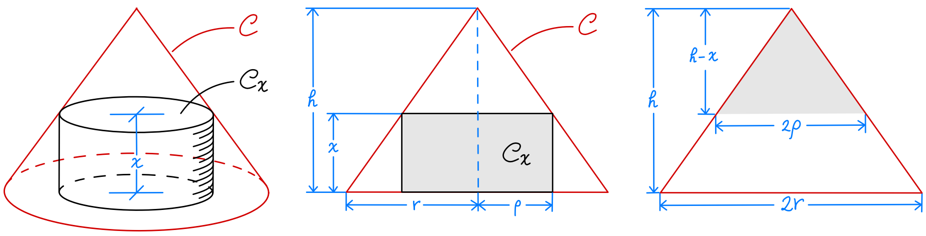
[1] Se il valore massimo/minimo non esiste, va sostituito dall'estremo superiore/inferiore dei valori.
[2] Nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $y = 2x$.

Seconda parte

1 a) Consideriamo un cono C con altezza h, base B e raggio di base r. Tra tutti i cilindri contenuti in C, e con base contenuta in B, trovare quello di volume massimo. (Sia il cono C che i cilindri sono circolari e retti.)

b) Rispondere alla stessa domanda quando C è cono circolare ma non necessariamente retto. [*Detto P il piano che contiene la base B e detta p la proiezione ortogonale del vertice del cono su P, conviene distinguere il caso in cui p appartiene a B e il caso in cui non.*]

Soluzione. Dato $x \in [0, h]$, tra tutti i cilindri ammissibili di altezza x, quello di volume massimo è quello con area di base massima, ovvero quello la cui faccia superiore coincide con la sezione del cono ad altezza x.[3] Indico con C_x questo cilindro, e con ρ il suo raggio di base.



Guardando il triangolo a destra nella figura sopra si vede che vale la seguente proporzione:

$$\frac{2\rho}{2r} = \frac{h-x}{h},$$

da cui riceva che $\rho = r\big(1 - \frac{x}{h}\big)$; da questo segue che

$$v(x) := \text{volume}(C_x) = \pi\rho^2 x = \pi r^2 \Big(1 - \frac{x}{h}\Big)^2 x.$$

Devo quindi trovare il valore massimo della funzione $v(x)$ relativamente all'insieme delle altezza x ammissibili, vale a dire per $x \in [0, h]$. Per farlo applico il solito algoritmo: la derivata

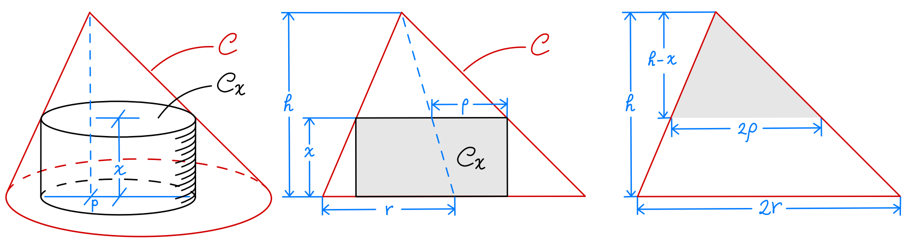
$$v'(x) = \pi r^2 \Big(1 - \frac{x}{h}\Big)\Big(1 - \frac{3x}{h}\Big)$$

si annulla all'interno dell'intervallo $[0, h]$ solo in $\bar{x} := \frac{1}{3}h$, e confrontando i valori di v in questo punto e agli estremi dell'intervallo, vale a dire

$$v(0) = v(h) = 0, \quad v(\bar{x}) = \frac{4\pi}{27} r^2 h,$$

ottengo che il cilindro ammissibile di volume massimo è il cilindro $C_{\bar{x}}$.

b) Comincio dal caso in cui p appartiene alla base B del cono.
Dato $x \in [0, h]$, anche in questo caso tra tutti i cilindri ammissibili di altezza x quello di volume massimo è il cilindro C_x la cui base superiore coincide con la sezione del cono ad altezza x.



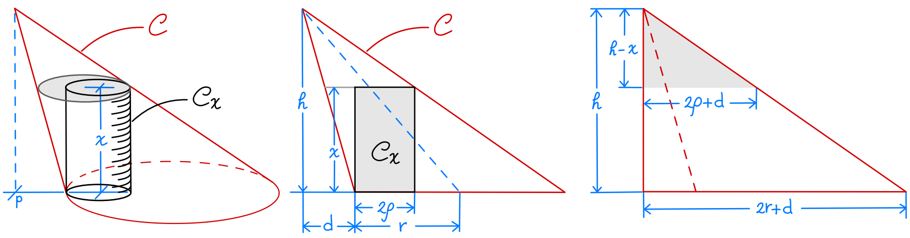
Guardando il triangolo a destra nella figura sopra si vede che vale la stessa proporzione che nel caso del cono retto, vale a dire

$$\frac{2\rho}{2r} = \frac{h-x}{h},$$

[3] Tra i cilindri ammissibili ammetto anche quelli degeneri; in particolare il cilindro C_x è degenere per $x = 0$ (coincide con la base B del cono) e per $x = h$ (è un segmento verticale). Tuttavia i cilindri di volume massimo che trovo non sono degeneri.

Dunque il raggio di base ρ del cilindro C_x è lo stesso che nel caso del cono retto, da cui segue che il volume di C_x è lo stesso che nel caso del cono retto, e in particolare il cilindro di volume massimo è $C_{\bar{x}}$ con $\bar{x} = \frac{1}{3}h$.

Passo ora al caso in cui p non appartiene a B, ed indico con d la distanza di p da B.
In questo caso il cilindro di altezza x la cui base superiore coincide con la sezione del cono ad altezza x non è contenuto nel cono, e quindi non è un cilindro ammissibile.



Dalla figura sopra si ricava che non ci sono cilindri ammissibili se $x > h_0$ dove

$$h_0 := \frac{d}{2r+d}\,.$$

Per $x \in [0, h_0]$, si vede che tra tutti i cilindri ammissibili di altezza x quello di volume massimo è quello la cui faccia superiore è il più grande cerchio contenuto nella sezione del cono ad altezza x la cui proiezione sul piano P è contenuta nella base B; come prima chiamo C_x tale cilindro. Dal triangolo a destra nella figura sopra si ottiene la seguente proporzione,

$$\frac{2\rho+d}{2r+d} = \frac{h-x}{h}\,,$$

da cui si ricava che $\rho = r - \big(r + \frac{d}{2}\big)\frac{x}{h}$, e da questo segue che

$$v(x) := \text{volume}(C_x) = \pi\rho^2 x = \pi\left[r - \left(r+\frac{d}{2}\right)\frac{x}{h}\right]^2 x\,.$$

La derivata

$$v'(x) = \pi\left[r - \left(r+\frac{d}{2}\right)\frac{x}{h}\right]\cdot\left[r - \left(r+\frac{d}{2}\right)\frac{3x}{h}\right]$$

si annulla all'interno dell'intervallo $[0, h_0]$ solo in

$$\bar{x} := \frac{2rh}{6r+d}\,,$$

e confrontando i valori di v in questo punto e agli estremi dell'intervallo, vale a dire

$$v(0) = v(h_0) = 0\,, \quad v(\bar{x}) = \frac{8\pi}{27}\cdot\frac{r^3 h}{2r+d}\,.$$

Pertanto il cilindro di volume massimo tra quelli ammissibili è $C_{\bar{x}}$.

$\boxed{2}$ Dati $a < b < c$ ed una funzione $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ limitata, dimostrare che

$$\int^{*c}_{a} f(x)\,dx = \int^{*b}_{a} f(x)\,dx + \int^{*c}_{b} f(x)\,dx$$

dove $^*\!\int$ indica come al solito l'integrale di Riemann superiore.[4]

<u>Soluzione</u>. L'osservazione chiave è la seguente: sia σ' una qualunque partizione di $[a, b]$ e sia σ'' una qualunque partizione di $[b, c]$; allora $\sigma := \sigma' \cup \sigma''$ è una partizione di $[a, c]$ e le somme di Riemann superiori relative a questa partizioni soddisfano

$$S''(f,\sigma) = S''(f,\sigma') + S''(f,\sigma'') \tag{1}$$

[4] Ovviamente vale anche l'analoga uguaglianza per gli integrali inferiori.

(la dimostrazione è immediata a partire dalla definizione di somma superiore).
Da questa uguaglianza e dalla definizione dell'integrale superiore come estremo inferiore delle somme superiori ottengo

$$\int_a^{*c} f(x)\,dx \le S''(f,\sigma') + S''(f,\sigma'')\,;$$

prendendo quindi l'estremo inferiore del termine di destra tra tutte le possibili partizioni σ' di $[a,b]$ ottengo

$$\int_a^{*c} f(x)\,dx \le \int_a^{*b} f(x)\,dx + S''(f,\sigma'')\,;$$

prendendo ora l'estremo inferiore del termine di destra tra tutte le possibili partizioni σ'' di $[b,c]$ ottengo infine

$$\int_a^{*c} f(x)\,dx \le \int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_b^{*c} f(x)\,dx\,.$$

Mi resta da dimostrare la disuguaglianza opposta.
Data una qualunque partizione σ di $[a,b]$, considero la partizione $\widehat{\sigma}$ ottenuta aggiungendo b a σ ed osservo che posso scrivere $\widehat{\sigma} = \sigma' \cup \sigma''$ con σ' partizione di $[a,b]$ e σ'' partizione di $[b,c]$.
Siccome $\widehat{\sigma}$ è più fine di σ, vale che $S''(f,\sigma) \ge S''(f,\widehat{\sigma})$, ed usando la formula (1) e la definizione di integrale superiore ottengo

$$S''(f,\sigma) \ge S''(f,\widehat{\sigma}) = S''(f,\sigma') + S''(f,\sigma'') \ge \int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_b^{*c} f(x)\,dx\,,$$

e quindi

$$S''(f,\sigma) \ge \int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_b^{*c} f(x)\,dx\,;$$

prendendo ora l'estremo inferiore del termine di sinistra su tutte le partizioni σ di $[a,b]$ ottengo

$$\int_a^{*c} f(x)\,dx \ge \int_a^{*b} f(x)\,dx + \int_b^{*c} f(x)\,dx\,,$$

e questo conclude la dimostrazione.

3 Dati $a,b \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale:

$$t^2\ddot{x} + at\dot{x} + bx = 0\,. \tag{*}$$

Trovare la soluzione generale di (*) nei seguenti casi: a) $a=2$, $b=-6$; b) $a=b=5$.
[*Suggerimento: cercare soluzioni della forma* t^λ.]

<u>Soluzione</u>. Per una funzione x della forma $x = t^\lambda$ vale $\dot{x} = \lambda t^{\lambda-1}$ e $\ddot{x} = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$, e quindi l'equazione (*) diventa

$$(\lambda^2 + (a-1)\lambda + b)\,t^\lambda = 0\,,$$

che è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0\,. \tag{2}$$

a) Per $a=2$ e $b=-6$ l'equazione (2) diventa

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

e le soluzioni sono $\lambda = 2, -3$. Pertanto t^2 e t^{-3} sono soluzioni dell'equazione (*) e sono linearmente indipendenti nel senso che non sono una il multiplo dell'altra (infatti il rapporto non è costante in t).

Siccome l'equazione differenziale (*) è lineare, del secondo ordine, ed omogenea, so dalla teoria che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di dimensione 2, e quindi le soluzioni t^2 e t^{-3} ne formano una base. In altre parole la soluzione generale è

$$x(t) = c_1 t^2 + c_2 t^{-3} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

b) Per $a=b=5$ l'equazione (2) diventa

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

e non ha soluzioni reali, mentre le soluzioni complesse sono $\lambda = -2 \pm i$. Il problema è che non è chiaro che senso abbia alle espressioni t^{-2+i} e t^{-2-i}. Procedendo in modo puramente formale ottengo

$$t^{-2+i} = t^{-2}\, t^i = t^{-2}\left(e^{\log t}\right)^i = t^{-2}\, e^{i\log t} = t^{-2}(\cos(\log t) + i\sin(\log t))\,.$$

Questo calcolo *suggerisce* che

$$z_1 := t^{-2}(\cos(\log t) + i\sin(\log t))$$

sia una soluzione di (*) a *valori complessi*; partendo invece da t^{-2-i} ottengo come possibile soluzione

$$z_2 := t^{-2}(\cos(\log t) - i\sin(\log t))\,.$$

Delle possibili soluzioni a *valori reali* sono date dalle seguenti combinazioni lineari di z_1 e z_2:

$$x_1 := \tfrac{1}{2}z_1 + \tfrac{1}{2}z_2 = t^{-2}\cos(\log t)\,, \quad x_2 := \tfrac{1}{2i}z_1 - \tfrac{1}{2i}z_2 = t^{-2}\sin(\log t)\,. \tag{4}$$

Sostituendo queste espressioni in (*) verifico che x_1 e x_2 sono effettivamente soluzioni. Pertanto la soluzione generale di (*) è

$$x(t) = t^{-2}\big(c_1\sin(\log t) + c_2\cos(\log t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

<u>Osservazioni</u>. L'equazione (*) è del secondo ordine e lineare, e scritta in forma standard (cioè con coefficiente 1 davanti a $\ddot{x}$) diventa

$$\ddot{x} + \frac{a}{t}\dot{x} + \frac{b}{t^2}x = 0\,.$$

In particolare i coefficienti sono definiti e continui per $t \neq 0$, e dunque le soluzioni sono definite (almeno) sulla semiretta $t > 0$ e sulla semiretta $t < 0$.
Faccio ora notare che le soluzioni in (3) sono definite su entrambe le semirette, mentre le soluzioni in (5) sono definite solo per $t > 0$, e quindi sono in un certo senso "incomplete". Tuttavia si può verificare che le funzioni

$$t^{-2}\cos(\log|t|)\,, \quad t^{-2}\sin(\log|t|) \tag{6}$$

sono soluzioni di (*) per $a = b = 5$ e quindi la soluzione generale "completa" di (*) è

$$x(t) = t^{-2}\big(c_1\sin(\log|t|) + c_2\cos(\log|t|)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per $t > 0$ le soluzioni in (6) coincidono con quelle ottenute in precedenza in (4), e quindi ci si può chiedere se la stessa procedura formale che ha permesso di ottenere le soluzioni in (4) permette anche di ottenere quelle in (6) per $t < 0$. La risposta è affermativa: basta scrivere $t < 0$ nella forma $t = e^{\log|t| + \pi i}$.

$\boxed{4}$ Consideriamo la funzione

$$f(x) := \int_x^{2x^2} \exp(t^2)\, dt\,.$$

a) Trovare l'insieme di definizione di f, il segno , ed i limiti significativi.

b) Scrivere f' e lo sviluppo di Taylor all'ordine 5 di f in 0.

c) Scrivere f'' e dimostrare che f è una funzione convessa.

d) Trovare una funzione g della forma $g(x) = ax^b\exp(cx^d)$ tale che $g(x) \sim f(x)$ per $x \to +\infty$.

<u>Soluzione</u>. a) L'integrale che definisce $f(x)$ è ben definito (come integrale proprio) per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi l'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$.
Poiché inoltre la funzione integranda $\exp(t^2)$ è sempre strettamente positiva si ha che

- $f(x) = 0$ se e solo se gli estremi di integrazione x e $2x^2$ coincidono, cioè $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$;
- $f(x) > 0$ se e solo se $x < 2x^2$, cioè $x < 0$ e $x > \frac{1}{2}$;
- $f(x) < 0$ nei casi rimanenti, cioè $0 < x < \frac{1}{2}$.

Infine $f(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Un modo veloce per dimostrarlo è usare la stima $\exp(t^2) \geq 1$, che quando $x \leq 2x^2$, cioè quando $x \leq 0$ oppure $x \geq \frac{1}{2}$, dà

$$f(x) := \int_x^{2x^2} \exp(t^2)\, dt \geq \int_x^{2x^2} dt = 2x^2 - x \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

b) Una ben nota formula dà

$$f'(x) = 4x\, \exp(4x^4) - \exp(x^2)\,.$$

Sappiamo che la derivata del polinomio di Taylor di grado 5 di f coincide con il polinomio di Taylor di grado 4 della derivata f', vale a dire

$$P_5 f(x))' = P_4 f'(x)\,, \tag{7}$$

e il secondo polinomio può essere facilmente ottenuto dallo sviluppo di Taylor dell'esponenziale. Infatti

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x\, \exp(4x^4) - \exp(x^2) \\ &= 4x(1 + O(x^4)) - \big(1 + x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + O(x^6)\big) \\ &= -1 + 4x - x^2 - \tfrac{1}{2}x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

e questo implica che

$$P_4 f'(x) = -1 + 4x - x^2 - \tfrac{1}{2}x^4\,.$$

Tenendo conto della formula (7) e del fatto che $f(0) = 0$ ottengo infine

$$P_5 f(x) = -x + 2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{10}x^5\,.$$

c) La derivata seconda di f è

$$f''(x) = (4 + 64\, x^4)\, \exp(4x^4) - 2x\, \exp(x^2)\,, \tag{8}$$

e devo dimostrare che è strettamente positiva per ogni x.
Divido questa dimostrazione in tre casi:

- se $x \leq 0$ allora $f''(x)$ è strettamente positivo in quanto somma di due addenti entrambi positivi (di cui il primo strettamente positivo);
- se $x \geq \frac{1}{2}$, vale che $4x^4 \geq x^2$ e $64\, x^4 \geq 8x$, quindi il primo addendo nella formula (8) soddisfa $(4 + 64\, x^4)\, \exp(4x^4) \geq (4 + 8x)\, \exp(x^2)$, e dunque $f''(x) \geq (4 + 6x) \exp(x^2) > 0$;
- se $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ allora valgono le stime $\exp(4x^4) \geq 1$ e $\exp(x^2) \leq \exp(1/4) \leq e$, e quindi $f''(x) \geq (4 + 64\, x^4) - 2xe \geq 4 - e > 0$.

d) Devo trovare g della forma $g(x) = ax^b \exp(cx^d)$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

Osservo che per $x \to +\infty$ la funzione f tende ad infinito, e la funzione g tende a $+\infty$ se $a, c, d > 0$. In questo caso posso applicare il teorema di de L'Hôpital, ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x\, \exp(4x^4) - \exp(x^2)}{(acd\, x^{b+d-1} + ab\, x^{b-1})\exp(cx^d)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x\, \exp(4x^4)}{acd\, x^{b+d-1} \exp(cx^d)} \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato il principio di sostituzione degli infiniti). Osservo infine che l'ultimo limite vale 1 se il numeratore e il denominatore coincidono, cioè se $acd = 4$, $b+d-1 = 1$, $c = 4$ e $d = 4$, ovvero se $a = \frac{1}{4}$, $b = -2$ e $c = d = 4$.[5]
In conclusione

$$f(x) \sim \tfrac{1}{4}x^{-2} \exp(4x^4) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

[5] Noto che la condizione $a, c, d > 0$, che ci ha permesso di usare il teorema di de L'Hôpital, è soddisfatta.

5 Data una successione (a_n) di numeri strettamente positivi, consideriamo la serie a segni alterni

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \, .$$

a) Dimostrare che se la successione (a_n) è crescente allora la serie S non esiste.

b) Far vedere che la conclusione al punto a) non vale se si sostituisce l'ipotesi che (a_n) è crescente con l'ipotesi che (a_n) converge ad un numero strettamente positivo.

SOLUZIONE. a) La dimostrazione è simile a quella del criterio di convergenza di Leibniz. Per ogni $N = 0, 1, 2, \dots$ indico con S_N la somma parziale N-esima di S, vale a dire

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n \, .$$

Osservo quindi che per N pari vale

$$S_{N+2} = S_N - a_{N+1} + a_{N+2} \geq S_N$$

(nel secondo passaggio ho usato l'ipotesi che (a_n) sia crescente); questo significa che la sottosuccessione (S_{2m}) è crescente, e allo stesso modo si dimostra che la sottosuccessione di (S_{2m+1}) è decrescente. Inoltre $S_1 = a_0 - a_1 < a_0 = S_0$.
Riassumendo

$$\dots S_7 \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1 < S_0 \leq S_2 \leq S_4 \leq S_6 \dots$$

Quindi

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m+1} \leq S_1 < S_0 \leq \lim_{m\to+\infty} S_{2m} \, ,$$ [6]

in particolare i due limiti sono diversi e questo significa che $S := \lim_{N\to+\infty} S_N$ non esiste.

b) Do un esempio di successione (a_n) a termini positivi e con limite strettamente positivo tale che la serie a segni alterni S diverge a $+\infty$ (ed in particolare esiste).
Pongo

$$a_n := 2 + (-1)^n \frac{1}{n+1} \, .$$

È chiaro che $a_n > 0$ per ogni n e che $a_n \to 2$ per $n \to +\infty$. Inoltre, tenendo conto che

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{per } N \text{ pari,} \\ 0 & \text{per } N \text{ dispari,} \end{cases}$$

ottengo che le somme parziali della serie S soddisfano

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} \, .$$

Osservo ora che l'ultimo termine in questa catena di disuguaglianze è la somma parziale della serie armonica e quindi tende a $+\infty$ per $N \to +\infty$; per confronto lo stesso vale per S_N, e questo significa che la serie S esiste e vale $+\infty$.

[6] I due limiti esistono per le proprietà di monotonia appena enunciate.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Sia $f(x) := xe^{-x/2}$. Determinare l'immagine secondo f della semiretta $[1, +\infty)$.
   SOLUZIONE. Il valore massimo di $f(x)$ per $x \geq 1$ è $f(2) = \frac{2}{e}$, il valore minimo non esiste e l'estremo inferiore è 0. Pertanto $f\big([1, +\infty)\big) = \big(0, \frac{2}{e}\big]$.

2. Dire per quali $a > 0$ la funzione $f(x) := (x-1)\, e^{ax}$ risulta crescente sulla semiretta $x \geq 0$.
   SOLUZIONE. La derivata $f'(x) = (ax - a + 1)\, e^{ax}$ soddisfa $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1 - \frac{1}{a}$; quindi f è crescente su $[0, +\infty)$ se e solo se $1 - \frac{1}{a} \leq 0$, vale a dire $a \leq 1$.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in 0 di $f(x) := (1 + x^2) \log(1 - 2x^2 + x^4)$.
   SOLUZIONE. $P_4(x) = -2x^2 - 3x^4$.

4. Determinare la successione (x_n) tale che $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_{n+2} = 8\, x_{n+1} - 15\, x_n$ per $n = 0, 1, \dots$

   SOLUZIONE. La soluzione generale dell'equazione ricorsiva è $x_n = c_1 3^n + c_2 5^n$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,]; quella che soddisfa $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ è $x_n = 2(5^n - 3^n)$.

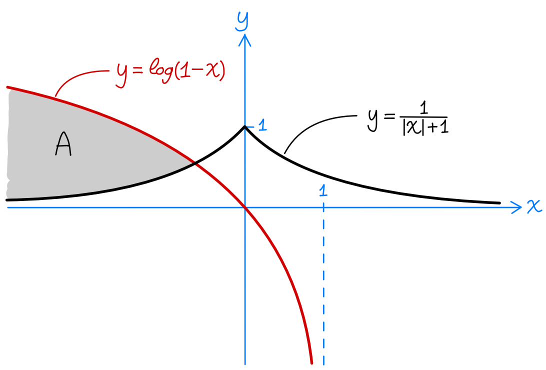
5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 2tx = 4t^3$ tale che $x(0) = 0$.
   SOLUZIONE. Equazione lineare del primo ordine: la soluzione generale è $x(t) = e^{-t^2} \int 4t^3\, e^{t^2} dt = 2t^2 - 2 + ce^{-t^2}$; la condizione $x(0) = 0$ è soddisfatta per $c = 2$; quindi $x(t) = 2t^2 - 2 + 2e^{-t^2}$.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$.
   SOLUZIONE. La serie coincide con l'opposto della serie di Taylor di $\log(1+x)$ calcolata per $x = -\frac{1}{2}$, e quindi vale $-\log\big(1 - \frac{1}{2}\big) = \log 2$.

7. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^a)^{2a}}$ è finito.
   SOLUZIONE. L'integrale è improprio in 1; usando il cambio di variabile $x = 1 - y$ l'integrale diventa improprio in 0, e usando lo sviluppo $(1-y)^a = 1 - ay + o(y)$ ottengo:
$$\int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^a)^{2a}} = \int_0^1 \frac{dy}{(1 - (1-y)^a)^{2a}} = \int_0^1 \frac{dy}{(ay + o(y^2))^{2a}} \approx \int_0^1 \frac{dy}{y^{2a}} \quad \text{finito per } a < \tfrac{1}{2}.$$

8. Trovare un'equazione differenziale lineare, a coefficienti costanti (reali) ed omogenea che abbia come soluzione la funzione $x(t) = t(\cos t + e^{2t})$.
   SOLUZIONE. Il polinomio caratteristico $P(\lambda)$ dell'equazione deve avere soluzioni i e 2 con molteplicità 2. Il più semplice polinomio con questa proprietà è $P(\lambda) := (\lambda^2 + 1)^2 (\lambda - 2)^2$. L'equazione è $D^6 x - 4D^5 x + 6D^4 x - 8D^3 x + 9D^2 x - 4Dx + 4x = 0$.

9. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\dfrac{1}{1 + |x|} \leq y \leq \log(1 - x)$.
   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE (prima variante)

1 Sia (a_n) una successione di numeri reali e $L \in \mathbb{R}$. Dimostrare che sono fatti equivalenti:

(i) (a_n) converge a L per $n \to +\infty$;

(ii) esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che a) $g(x) \to 0$ per $x \to 0$ e b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $|a_n - L| \le g(\varepsilon)$ per $n \ge n_\varepsilon$.

SOLUZIONE. Per dimostrare che (i) implica (ii), basta prendere $g(x) = x$.

Dimostro ora che (ii) implica (i). Sia $\varepsilon > 0$: per l'ipotesi a) esiste $\varepsilon' > 0$ tale che $g(\varepsilon') \le \varepsilon$, e per l'ipotesi b) esiste $n_{\varepsilon'}$ tale che $|a_n - L| \le g(\varepsilon')$ per $n \ge n_{\varepsilon'}$. Mettendo insieme le due disuguaglianze ottengo che $|a_n - L| \le \varepsilon$ per $n \ge n_{\varepsilon'}$; ho quindi dimostrato che $a_n \to L$.

2 Dato $a \in \mathbb{R}$, poniamo $x_n := \exp(n^a) - \exp(\sin(n^a))$ per $n = 1, 2, \dots$

a) Discutere il limite della successione (x_n) per $n \to +\infty$;

b) Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

SOLUZIONE. a) Scrivo $x_n = f(n^a)$ dove ho posto

$$f(x) := e^x - e^{\sin x}\,.$$

Distinguo ora tre casi:

Caso $a > 0$. Siccome $n^a \to +\infty$ per $n \to +\infty$, ho che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f(n^a) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

(l'ultimo limite segue dal fatto che e^x tende a $+\infty$ mentre la funzione $e^{\sin x}$ è limitata.)

Caso $a = 0$. In questo caso $x_n = f(1)$ per ogni n e quindi il limite è $f(1)$.

Caso $a < 0$. Siccome $n^a \to 0$ per $n \to +\infty$, ho che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f(n^a) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

(la penultima uguaglianza segue dal fatto che f è continua in 0).

b) Per $a \ge 0$ il limite di x_n per $n \to +\infty$ è strettamente positivo (infatti $f(1) > 0$) e quindi la serie diverge a $+\infty$.

Per $a < 0$ vale che $x_n \to 0$ e quindi servono informazioni più precise per determinare il comportamento della serie. Cerco la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$:

$$f(x) = e^x - e^{\sin x} = e^x(1 - e^{-x+\sin x}) \sim 1 - e^{-x+\sin x} \sim x - \sin x \sim \tfrac{1}{6}x^3$$

(nel terzo passaggio ho usato che $e^x \sim 1$ per $x \to 0$, e che $1 - e^y \sim -y$ per $y \to 0$; nel quarto passaggio ho usato che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$).

Pertanto $x_n = f(n^a) \sim \frac{1}{6}n^{3a}$, da cui segue che la successione x_n è definitivamente positiva, e per il criterio del confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \approx \sum_{n=1}^{+\infty} n^{3a} = \begin{cases} +\infty & \text{per } a \ge -\frac{1}{3}; \\ \text{numero finito} & \text{per } a < -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Riassumendo: la serie converge ad un numero finito per $a < -\frac{1}{3}$ e diverge a $+\infty$ altrimenti.

3 Sia T la traiettoria di un punto nel piano che si muove con legge oraria $P(t) = (\cos t, 2\sin t\cos t)$ per $t \in \mathbb{R}$, sia A la parte di piano delimitata dalla curva T e sia V il solido ottenuto ruotando A attorno all'asse delle y.

a) Disegnare la curva T e l'insieme A.

b) Determinare la circonferenza circoscritta ad A.

c) Calcolare l'area di A e il volume di V.

<u>Soluzione</u>. a) Per ogni punto $P(t)$ della traiettoria esplicito la coordinata $y = 2\sin t \cos t$ in funzione della coordinata $x = \cos t$: siccome $\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t}$ ho che

$$y = \pm 2x\sqrt{1-x^2}\,.$$

In particolare, posto

$$f(x) := 2x\sqrt{1-x^2} \quad \text{per } -1 \leq x \leq 1,$$

ho che la traiettoria T è contenuta nell'unione del grafico della funzione f e del grafico della funzione $-f$.

Dimostro ora che T coincide con l'unione di questi due grafici: dato $x \in [-1,1]$ devo far vedere che entrambi i punti $(x, \pm f(x))$ appartengono a T. Prendo per cominciare $t \in [0,\pi]$ tale che $x = \cos t$: per tale t si ha $\sin t \geq 0$, quindi $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-x^2}$, e dunque $2\sin t\cos t = f(x)$, ovvero $P(t) = (x, f(x))$.
Analogamente esiste $t \in [-\pi, 0]$ tale che $x = \cos t$; in questo caso $\sin t \leq 0$, da cui segue che $\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\sqrt{1-x^2}$, quindi $2\sin t\cos t = -f(x)$, ovvero $P(t) = (x, -f(x))$.

Per disegnare il grafico della funzione $f(x)$ osservo innanzitutto che si tratta di una funzione dispari, e quindi mi basta disegnarne il grafico per $0 \leq x \leq 1$.
Nell'intervallo $0 < x < 1$ la funzione è strettamente positiva, e si annulla per $x = 0$ e $x = 1$.
Inoltre la derivata vale

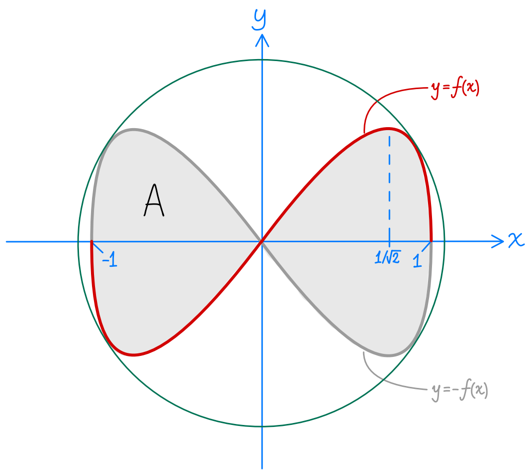
$$f'(x) = 2(1-2x^2)(1-x^2)^{-1/2}$$

(per $x < 1$, calcolandone il limite per $x \to 1$ ottengo $f'(1) = -\infty$) e studiandone il segno si ottiene che la funzione è strettamente crescente per $0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}$ e strettamente decrescente per $1/\sqrt{2} \leq x \leq 1$. Infine la derivata seconda

$$f''(x) = -2x(3+2x^2)(1-x^2)^{-3/2}$$

è strettamente negativa per $0 \leq x < 1$ e quindi la funzione è strettamente concava.

Utilizzando queste informazioni traccio il disegno riportato sotto:



b) Siccome l'insieme A è simmetrico rispetto all'origine, la circonferenza circoscritta ad A (in verde nel disegno sopra) è centrata nell'origine (questa affermazione richiede una dimostrazione, che però ometto). Il raggio R è dato quindi dalla massima distanza dall'origine di un punto di T. Per via della simmetria di T rispetto a entrambi gli assi, R è uguale alla massima distanza dall'origine di un punto $(x, f(x))$ al variare di $0 \leq x \leq 1$.
Invece del massimo di tale distanza, calcolo il massimo del *quadrato* della distanza, vale a dire il massimo per $0 \leq x \leq 1$ della funzione

$$d(x) = x^2 + f(x)^2 = 5x^2 - 4x^4\,.$$

Osservo che per $0 < x < 1$ la derivata $d(x)' = 10\,x - 16\,x^3$ si annulla solo in $x_0 := \sqrt{5/8}$; inoltre i valori di d in x_0 e in 0 e 1 (gli estremi dell'intervallo) sono

$$d(x_0) = \frac{25}{16}\,, \quad d(0) = 0\,, \quad d(1) = 1\,,$$

ottengo che il valore massimo è $d(x_0) = \frac{25}{16}$. Pertanto il raggio cercato è $R = \frac{5}{4}$.

c) Usando le simmetrie dell'insieme A e le formule viste a lezione ottengo

$$\text{area}(A) = 4\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 8x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 4\sqrt{t}\,dt = \Big|\tfrac{8}{3}t^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = 1 - x^2$);

$$\begin{aligned}\text{volume}(V) &= 2\int_0^1 2\pi x\, f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 8\pi x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 8\pi(\sin t\cos t)^2 dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\pi(\sin(2t))^2 dt = \int_0^{\pi/2} \pi - \pi\cos(4t)dt = \Big|\pi t - \tfrac{\pi}{4}\sin(4t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato il cambio di variabile $x = \sin t$, nel quarto e quinto ho usato rispettivamente le identità $\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin(2t)$ e $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$ con $\alpha = 2t$).

4 Per ogni $a > 0$, sia T_a il triangolo di vertici $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,e^{-a})$, e sia A l'unione di tutti i triangoli T_a con $a > 0$.

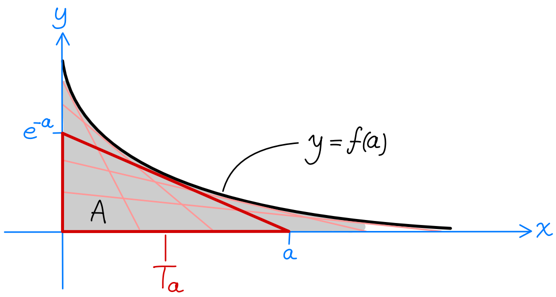
a) A è delimitato dagli assi e dal grafico di un'opportuna funzione f; determinare tale f.

b) Dire se l'area di A è finita oppure no.

<u>SOLUZIONE</u>. a) L'ipotenusa del triangolo T_a è data dai punti della retta di equazione

$$y = \underbrace{e^{-a}\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)}_{g_x(a)}$$

con $0 \le x \le a$.



Fissato $x > 0$, l'insieme degli y tali che (x,y) appartiene a T_a è dato dall'intervallo $[0, g_x(a)]$ se $a \ge x$ (ed è vuoto se $a < x$); quindi l'insieme degli y tali che (x,y) appartiene ad A è dato dall'unione degli intervalli $[0, g_x(a)]$ al variare di $a \ge x$, ovvero è l'intervallo $[0, f(x)]$ dove

$$f(x) := \max_{a \ge x} g_x(a)\,.$$

Studiando il segno della derivata

$$g_x'(a) = \frac{e^{-a}}{a^2}(x + xa - a^2)$$

ottengo che la funzione $g_x(a)$ è crescente per $x \le a \le a(x)$ dove

$$a(x) := \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{2}\,,$$

ed è decrescente per $a \ge a(x)$; pertanto $a(x)$ è il punto di massimo e quindi

$$f(x) = g_x(a(x)) = e^{-a(x)}\Big(1 - \frac{x}{a(x)}\Big)\,.$$

b) Dimostro che A ha area finita. Osservo per cominciare che $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$ e quindi

$$\text{area}(A) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx\,;$$

osservo inoltre che

$$0 \leq f(x) \leq e^{-a(x)} \leq e^{-x}$$

(nel secondo passaggio ho usato che $a_x \geq x$) e quindi, per il criterio del confronto,

$$\text{area}(A) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1\,.$$

$\boxed{5}$ Siano X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, e sia $f : X \to Y$ una funzione continua e strettamente crescente con inversa $g : Y \to X$.

a) Dimostrare che se X è un intervallo allora g è continua.

b) Dare un esempio di X (non intervallo), Y e f tali che g non è continua.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Dato $\bar{y} \in Y$, dimostro che g è continua in $\bar{y}$. Osservo innanzitutto che Y è un intervallo (perché X è un intervallo ed f è continua) e suppongo $\bar{y}$ non sia un estremo di Y; nel caso che Y sia un estremo di Y la dimostrazione va leggermente modificata.
Usando il fatto che f è strettamente crescente, si vede che anche g è strettamente crescente; quindi esistono il limite destro e sinistro di $g(y)$ per $y \to \bar{y}$, e vale che

$$\lim_{y\to\bar{y}^-} g(y) \leq g(\bar{y}) \leq \lim_{y\to\bar{y}^+} g(y)\,.$$

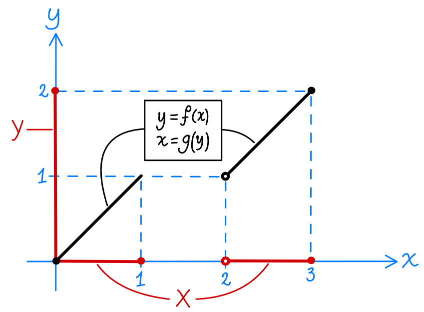
Per dimostrare che g è continua in $\bar{y}$ mi basta quindi far vedere i due limiti sono uguali.
Se per assurdo non lo fossero, potrei trovare x_0 compreso strettamente tra i due limiti e diverso da $g(\bar{y})$. Essendo x_0 compreso tra valori di g, ed essendo l'immagine g un intervallo (cioè X) ho che x_0 appartiene all'immagine di g; d'altra parte, usando che

$$\lim_{y\to\bar{y}^-} g(y) = \sup_{y<\bar{y}} g(y) \quad \text{e} \quad \lim_{y\to\bar{y}^+} g(y) = \inf_{y>\bar{y}} g(y)\,,$$

risulta chiaramente che x_0 non appartiene all'immagine di g; ho quindi ottenuto un assurdo.

b) Considero $X := [0,1] \cup (2,3]$, $Y := [0,2]$, e $f : X \to Y$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ x-1 & \text{se } 2 < x \leq 3. \end{cases}$$



Si verifica facilmente che f è bigettiva e strettamente crescente, e che

$$g(y) := \begin{cases} y & \text{se } 0 \leq y \leq 1, \\ y+1 & \text{se } 1 < y \leq 2. \end{cases}$$

In particolare g è discontinua (a destra) in $y = 1$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Una dimostrazione alternativa del punto a) è la seguente. Sia $\bar{y} \in Y$ e sia $\varepsilon > 0$. Preso $\bar{x}$ tale che $\bar{y} = f(\bar{x})$, suppongo per cominciare che $\bar{x}$ non sia un estremo di X (in caso contrario la dimostrazione va leggermente modificata) e quindi posso trovare ε' con $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ tale che $\bar{x} \pm \varepsilon' \in X$. Siccome f è strettamente crescente ho che

$$f(\bar{x} - \varepsilon') < \bar{y} = f(\bar{x}) < f(\bar{x} + \varepsilon')$$

e quindi posso trovare $\delta > 0$ tale che
$$f(\bar{x} - \varepsilon') \leq \bar{y} - \delta < \bar{y} + \delta \leq f(\bar{x} + \varepsilon') \,.$$
Usando il fatto che g è crescente, per ogni y tale che $\bar{y} - \delta \leq y \leq \bar{y} + \delta$ vale
$$g(f(\bar{x} - \varepsilon')) \leq g(\bar{y} - \delta) \leq g(y) \leq g(\bar{y} + \delta) \leq g(f(\bar{x} + \varepsilon')) \,,$$
e tenendo conto che $\bar{x} - \varepsilon \leq \bar{x} - \varepsilon' = g(f(\bar{x} - \varepsilon'))$ e che $g(f(\bar{x} + \varepsilon')) = \bar{x} + \varepsilon' \leq \bar{x} + \varepsilon$, vale anche
$$\bar{x} - \varepsilon \leq g(y) \leq \bar{x} + \varepsilon \,.$$
In altre parole ho trovato $\delta > 0$ tale che $|y - \bar{y}| \leq \delta$ implica $|g(y) - g(\bar{y})| \leq \varepsilon$, e quindi g è continua in $\bar{y}$.

PRIMA PARTE (prima variante)

1. Convertire le coordinate cartesiane (x, y) in coordinate polari (ρ, α) e viceversa, scegliendo l'angolo α nell'intervallo $[0, 2\pi)$: a) $x = -1$, $y = 1$; b) $x = 0$, $y = -3$; c) $\rho = 4$, $\alpha = \frac{11}{6}\pi$.

   SOLUZIONE. a) $\rho = \sqrt{2}$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; b) $\rho = 3$, $\alpha = \frac{3\pi}{2}$; c) $x = 2\sqrt{3}$, $y = -2$.

2. Dire per quali $a > 0$ vale che $(1 + 2x)^a + x^{2a} \log\log x = O(x^2)$ per $x \to +\infty$.

   SOLUZIONE. $a < 1$.

3. Dare un esempio di successione (x_n) tale che $x_n \to +\infty$ e $x_{n+1} - x_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

   SOLUZIONE. $x_n := \log n$ oppure $x_n = n^a$ con $0 < a < 1$.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := \exp\big(ax^2 + (a^2 - 3)x\big)$ ha un punto di minimo assoluto in $x = -1$.

   SOLUZIONE. Imponendo $f'(-1) = 0$ ottengo $a = -1$ e $a = 3$; studiando il segno di $f'(x)$ nei due casi si vede che -1 è un punto di minimo assoluto se $a = 3$.

5. Il punto P si muovo con legge oraria $P = \big((9t^2 - 1)\cos(3t); (9t^2 - 1)\sin(3t)\big)$. Calcolare il modulo della velocità di P e le distanza d percorsa tra gli istanti $t = 0$ e $t = 1$.

   SOLUZIONE. $|\vec{v}(t)| = 27\,t^2 + 3$; $d = \displaystyle\int_0^1 |\vec{v}(t)|\,dt = \int_0^1 27\,t^2 + 3\,dt = 12.$

6. Dire per quale $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 + x^2)^a - x^{2a}\,dx$ è finito.

   SOLUZIONE. L'integrale è improprio semplice a $+\infty$ e la parte principale della funzione integranda per $x \to +\infty$ è ax^{2a-2}; pertanto l'integrale si comporta come l'integrale di x^{2a-2} e dunque converge per $0 < a < \frac{1}{2}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = \sin t$.

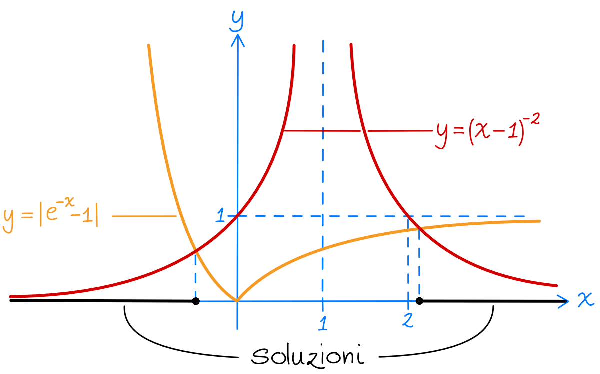
   SOLUZIONE. $x(t) = e^t(a_1 \sin(2t) + a_2 \cos(2t)) + \frac{1}{5}\sin t + \frac{1}{10}\cos t$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

8. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n + 1}$.

   SOLUZIONE. $R = 2$.

9. Risolvere graficamente la disequazione $(x - 1)^{-2} \le |e^{-x} - 1|$

   SOLUZIONE.



SECONDA PARTE

1 Sono dati X sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, e $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ funzioni tali che (i) $f_1(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$; (ii) f_2 è limitata in un intorno di $\bar{x}$.

a) Dimostrare che $f_1(x) \cdot f_2(x) \to 0$ per $x \to \bar{x}$.

b) Far vedere che l'enunciato a) non vale se si rimuove l'ipotesi (ii).

c) Cosa succede se invece di (ii) si assume solo che (ii') $|f_2(x)|$ non tende a $+\infty$ per $x \to \bar{x}$?

SOLUZIONE. a) L'ipotesi (ii) significa che esiste I intorno di $\bar{x}$ ed $m \geq 0$ tale che

$$|f_2(x)| \leq m \quad \text{per ogni } x \in I \cap X.$$

Invece l'ipotesi (i) significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste I_ε intorno di $\bar{x}$ tale che

$$|f_1(x)| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I_\varepsilon \cap X \text{ con } x \neq \bar{x}.$$

Mettendo insieme queste due stime ottengo che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$|f_1(x) \cdot f_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{m} \cdot m = \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in (I_{\varepsilon/m} \cap I) \cap X \text{ con } x \neq \bar{x}.$$

Siccome $I_{\varepsilon/m} \cap I$ è un intorno di $\bar{x}$, ho dimostrato la tesi.

b) e c) Faccio vedere che per ogni insieme X ed ogni $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, esistono $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ tali che, per $x \to \bar{x}$,

(i) $f_1(x)$ tende a 0;

(ii') $|f_2(x)|$ non tende a $+\infty$;

(iii) $f_1(x) \cdot f_2(x)$ non tende a 0.

Questo esempio dimostra il punto b) e risponde alla domanda c), facendo vedere che non è detto che $f_1 f_2$ tenda a 0.

Per costruire f_1 ed f_2 osservo che, poiché $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di X, esiste una successione $(x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\}$ che converge a $\bar{x}$; definisco quindi $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ come segue:

$$f_1(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x = x_n \text{ con } n \text{ pari,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_2(x) := \begin{cases} n & \text{se } x = x_n \text{ con } n \text{ pari,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È facile vedere che vale (i). Per dimostrare la (ii') mi basta osservare che $|f_2(x_n)| = 0$ per ogni n dispari, quindi il limite di questa successione è 0, e di conseguenza il limite di $|f_2(x)|$ non può essere $+\infty$. Per dimostrare la (iii) mi basta osservare che $f_1(x_n) \cdot f_2(x_n) = 1$ per ogni n pari, quindi il limite di questa successione è 1, e di conseguenza il limite di $f_1(x) \cdot f_2(x)$ non può essere 0.

OSSERVAZIONI. Per rispondere ai punti b) e c) ho costruito un esempio per ogni insieme X ed ogni punto di accumulazione $\bar{x}$. Può andar bene anche costruire un esempio per una specifica scelta di X e di $\bar{x}$, anche se l'enunciato così ottenuto è meno forte di quello dimostrato sopra.

2 Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^{-t} + e^t\,. \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione generale di (*).

b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni di (*) soddisfano $x(t) = o(e^{4t})$ per $t \to +\infty$.

SOLUZIONE. a) Dalla teoria so che la soluzione generale di (*) è data da

$$x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$

dove x_{om} è la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = 0\,, \tag{1}$$

$\tilde{x}_1$ è una particolare soluzione dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^{-t}\,, \tag{2}$$

e $\tilde{x}_2$ è una particolare soluzione dell'equazione non omogenea

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^{t}\,. \tag{3}$$

Calcolo di x_{om}. Gli zeri del polinomio caratteristico

$$P_a(\lambda) := \lambda^2 - 2a\lambda + (a-2)^2$$

associato all'equazione (1) sono

$$\lambda_{1,2} = a \pm 2\sqrt{a-1}\,.$$

La soluzione x_{om} è quindi data da tra formule diverse, a seconda del segno dell'argomento della radice:

$$x_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_1 e^{\lambda_1 t} & \text{se } a > 1; \\ (c_1 + c_2 t)e^t & \text{se } a = 1; \\ e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) & \text{se } a < 1; \end{cases} \tag{4}$$

dove $\omega := \sqrt{|a-1|}$ e c_1, c_2 sono costanti arbitrarie.

Calcolo di $\tilde{x}_1$. Il termine noto e^{-t} nell'equazione (2) risolve l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti $\dot{x}+x=0$, con polinomio caratteristico $Q_1(\lambda) := \lambda+1$. Osservo che lo zero $\lambda = -1$ di $Q_1(\lambda)$ non è mai uno zero di $P_a(\lambda)$, infatti $P_a(-1) = a^2 - 2a + 5 \neq 0$ per ogni a reale; pertanto

$$\mathscr{B}_{P_a Q_1} \setminus \mathscr{B}_{P_a} = \mathscr{B}_{Q_1} = \{e^{-t}\}\,,$$

e dunque esiste una soluzione particolare di (2) nello span di $\{e^{-t}\}$, cioè della forma

$$\tilde{x}_1(t) = \alpha e^{-t} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione in (2) ottengo l'identità

$$\alpha(a^2 - 2a + 5)e^{-t} = e^{-t}$$

che è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $\alpha = \frac{1}{a^2-2a+5}$. Pertanto

$$\tilde{x}_1(t) = \tfrac{1}{a^2-2a+5} e^{-t}\,. \tag{5}$$

Calcolo di $\tilde{x}_2$. Il termine noto e^t nell'equazione (3) risolve l'equazione omogenea $\dot{x} - x = 0$, con polinomio caratteristico $Q_2(\lambda) := \lambda - 1$. Osservo che lo zero $\lambda = 1$ di questo polinomio è anche uno zero di $P_a(\lambda)$ se $a = 1, 5$ (infatti $P_a(1) = a^2 - 6a + 5$ si annulla per $a = 1, 5$). In particolare $\lambda = 1$ è uno zero di molteplicità 2 di $P_1(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$, ed è uno zero di molteplicità 1 di $P_5(\lambda) = \lambda^2 - 10\,\lambda + 9$. Per calcolare $\tilde{x}_2$ devo quindi distinguere tre casi.

Calcolo di $\tilde{x}_2$ *per* $a \neq 1, 5$. In questo caso

$$\mathscr{B}_{P_a Q_2} \setminus \mathscr{B}_{P_a} = \mathscr{B}_{Q_2} = \{e^t\}$$

e dunque esiste una soluzione particolare di (3) della forma

$$\tilde{x}_2(t) = \alpha e^t \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione in (3) ottengo l'identità

$$\alpha(a^2 - 6a + 5)e^t = e^t$$

che è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $\alpha = \frac{1}{a^2-6a+5}$.[1]

Calcolo di $\tilde{x}_2$ *per* $a = 5$. Siccome $\lambda = 1$ è uno zero con molteplicità uno di $P_5(\lambda)$,

$$\mathscr{B}_{P_5 Q_2} \setminus \mathscr{B}_{P_5} = \{te^t\}\,,$$

e quindi esiste una soluzione particolare di (3) della forma

$$\tilde{x}_2(t) = \alpha t e^t \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione in (3) ottengo l'identità

$$-8\alpha e^t = e^t$$

che è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $\alpha = -\frac{1}{8}$.

[1] Noto che la formula per α ha senso se $a^2 - 6a + 5 \neq 0$, vale a dire per $a \neq 1, 5$ (come previsto dalla teoria).

Calcolo di $\tilde{x}_2$ per $a = 1$. Siccome $\lambda = 1$ è uno zero con molteplicità due di $P_1(\lambda)$,

$$\mathscr{B}_{P_1 Q_2} \setminus \mathscr{B}_{P_1} = \{t^2 e^t\},$$

e quindi esiste una soluzione particolare di (3) della forma

$$\tilde{x}_2(t) = \alpha t^2 e^t \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo questa espressione in (3) ottengo l'identità

$$2\alpha e^t = e^t$$

che è soddisfatta per ogni t se (e solo se) $\alpha = \frac{1}{2}$.
Riassumendo

$$\tilde{x}_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{a^2-6a+5} e^t & \text{per } a \neq 1, 5; \\ -\frac{1}{8} t e^t & \text{per } a = 5; \\ \frac{1}{2} t^2 e^t & \text{per } a = 1. \end{cases} \tag{6}$$

b) Dalle formule (5) e (6) si vede subito che $\tilde{x}_1(t) = o(e^{4t})$ e $\tilde{x}_2(t) = o(e^{4t})$ per ogni valore di a.[2]
Ricordando che $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$, ne deduco che

$$x(t) = o(e^{4t}) \text{ se e solo se } x_{\text{om}}(t) = o(e^{4t}).$$

Dalla formula (4) si vede anche che $x_{\text{om}}(t) = o(e^{4t})$ per $a \leq 1$, e resta quindi da capire cosa succede nel caso $a > 1$. Sempre dalla formula (4) si vede che in questo caso vale $x_{\text{om}}(t) = o(e^{4t})$ se e solo se $\lambda_{1,2} < 4$, ovvero se e solo se

$$a + 2\sqrt{a-1} < 4\,, \tag{7}$$

e risolvendo questa disequazione ottengo $a < 2$.
In conclusione, $x(t) = o(e^{4t})$ se e solo se $a < 2$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Dato $a > 0$, sia A l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \geq 1$ e $f(x) \leq y \leq 1$, dove

$$f(x) := \big(\cos(x^{-a})\big)^x.$$

a) Calcolare il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

b) Dire per quali $a > 0$ l'insieme A ha area finita.

c) Dire per quali $a > 0$ il solido V ottenuto ruotando A attorno all'asse delle x ha volume finito.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Scrivo $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \exp\big(\underbrace{x \log\big(\cos(x^{-a})\big)}_{g(x)}\big)$$

e noto che per $x \to +\infty$ il limite dell'argomento dell'esponenziale è della forma $\infty \cdot 0$. Per calcolarlo determino la parte principale del logaritmo, che a sua volta ottengo a partire dalla parte principale di $\log(\cos t)$ per $t \to 0$:

$$\log(\cos t) = \log\big(1 - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^4)\big) \sim -\tfrac{1}{2}t^2 + O(t^4) \sim -\tfrac{1}{2}t^2$$

(nel primo passaggio ho usato lo sviluppo $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$ per $t \to 0$; nel secondo ho usato che $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0$, con $y = -\frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$). Sostituendo $t = x^{-a}$ in questa formula ottengo che, per $x \to +\infty$,

$$g(x) = x \log\big(\cos(x^{-a})\big) \sim -\tfrac{1}{2} x^{1-2a}\,, \tag{8}$$

quindi

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a > \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} & \text{se } a = \frac{1}{2}, \\ -\infty & \text{se } 0 < a < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

[2] Nel resto della soluzione do per scontato che t tende a $+\infty$, e non lo scrivo esplicitamente.

e infine

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(g(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } a > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\sqrt{e}} & \text{se } a = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } 0 < a < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{9}$$

b) Osservo che per $x \geq 1$ vale $0 < x^{-a} \leq 1$ e quindi $\cos(1) \leq \cos(x^{-a}) < 1$, da cui segue che $f(x)$ è ben definita per ogni $x \geq 1$ e soddisfa $f(x) < 1$. Di conseguenza l'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_1^{+\infty} 1 - f(x)\, dx\,.$$

Se $a \leq \frac{1}{2}$, dalla formula (9) segue che la funzione integranda $1 - f(x)$ ha limite strettamente positivo per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale vale $+\infty$.
Se invece $a > \frac{1}{2}$ vale che, per $x \to +\infty$,

$$1 - f(x) = 1 - \exp(g(x)) \sim -g(x) \sim \tfrac{1}{2} x^{1-2a} \tag{10}$$

(nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo $1 - e^y \sim -y$ per $y \to 0$ con $y := g(x)$, nel terzo ho usato la formula (8)), e quindi

$$\text{area}(A) = \int_1^{+\infty} 1 - f(x)\, dx \approx \int_1^{+\infty} x^{1-2a}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1, \\ \text{finito} & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

In conclusione l'area di A è finita se e solo se $a > 1$.

c) Per ogni $x \geq 1$ indico con V_x la sezione di V per il piano ortogonale all'asse delle x e passante per x. Chiaramente V_x è una corona circolare di raggio esterno 1 e raggio interno $f(x)$, e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_1^{+\infty} \pi\big(1 - (f(x))^2\big)\, dx\,.$$

Come prima, dalla formula (9) segue che per $a \leq \frac{1}{2}$ la funzione integranda ha limite strettamente positivo e quindi l'integrale vale $+\infty$. Invece per $a \leq \frac{1}{2}$ vale che, per $x \to +\infty$,

$$1 - (f(x))^2 = \big(1 + f(x)\big)\big(1 - f(x)\big) \sim 1 - f(x) \sim \tfrac{1}{2} x^{1-2a}$$

(nel secondo passaggio ho usato il fatto che $1 + f(x) \sim 1$ perché $f(x) \to 0$, nel terzo ho usato la formula (10)), e quindi

$$\text{volume}(V) = \int_1^{+\infty} \pi\big(1 - (f(x))^2\big)\, dx \approx \int_1^{+\infty} x^{1-2a}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1, \\ \text{finito} & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

In conclusione il volume di V è finito se e solo se $a > 1$.

4 a) Trovare la più grande costante m tale che $\dfrac{mx}{1+x^2} \leq \arctan x$ per ogni $x \geq 0$.[3]

b) Stimare la più piccola costante r tale che $\arctan x \leq \dfrac{rx}{1+x}$ per ogni $x \geq 0$.[4]

Soluzione. a) Riscrivo la disequazione in oggetto nella forma

$$0 \leq \underbrace{\arctan x - \frac{mx}{1+x^2}}_{f_m(x)} \quad \text{per ogni } x \geq 0. \tag{11}$$

Osservo adesso che $f_m(0) = 0$, e quindi condizione *necessaria* affinché valga la (11) è che $f'_m(0) \geq 0$ (se infatti fosse $f'_m(0) < 0$, la funzione f_m sarebbe strettamente negativa in un intorno destro di 0). Siccome

$$f'_m(x) = \frac{(3-m)x^2 + (1-m)}{(1+x^2)^2}\,,$$

la condizione $f'_m(0) \geq 0$ diventa $1 - m \geq 0$ ovvero $m \leq 1$.

[3] L'esistenza di questa costante ottimale può essere data per buona; lo stesso vale per la costante nel punto b).
[4] "Stimare" significa dare una maggiorazione ed una minorazione della costante ottimale (possibilmente vicine). Credo che determinare il valore esatto della costante non sia possibile.

Faccio ora vedere che questa condizione, oltre che necessaria, è anche *sufficiente*, cioè implica la (11). Infatti per $m \leq 1$ si vede subito che la derivata f'_m è sempre positiva (e si annulla la più in 0) e quindi la funzione f_m è crescente su $[0, +\infty)$; siccome $f_m(0) = 0$ ne segue che $f_m(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$.
Concludendo, la disuguaglianza (11) vale se e solo se $m \leq 1$, e in particolare la più grande costante m per cui vale è $m = 1$.

b) Indico con I l'insieme delle costanti r per cui la disuguaglianza in oggetto è soddisfatta e indico con r_0 la più piccola di tali costanti, cioè il minimo di I. Osservo per cominciare che I è una semiretta della forma $[r_0, +\infty)$ (si vede subito che ogni $r \geq r_0$ appartiene a I) e che I non contiene 0, cioè $r_0 > 0$.
Per caratterizzare ulteriormente gli $r > 0$ che appartengono a I riscrivo la disequazione in oggetto nella forma

$$\underbrace{\arctan x - \frac{rx}{1+x}}_{g_r(x)} \leq 0 \quad \text{per ogni } x \geq 0. \tag{12}$$

Siccome $g_r(0) = 0$, condizione *necessaria* affinché valga la (12) è che $g'_r(0) \leq 0$ (se infatti fosse $g'_r(0) > 0$ allora g_r sarebbe strettamente positiva in intorno destro di 0). La derivata di g_r è

$$g'_r(x) = \frac{(1-r)x^2 + 2x + (1-r)}{(1+x^2)(1+x)^2}\,, \tag{13}$$

quindi $g'_r(0) = 1 - r$ e la condizione $g'_r(0) \leq 0$ diventa $r \geq 1$; in particolare $r_0 \geq 1$.

Considero ora $r \geq 1$. Tenendo conto che $g_r(0) = 0$, condizione *sufficiente* affinché valga la (12) è che g_r sia crescente, ovvero che $g'_r(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$, ovvero che il discriminante del numeratore della frazione in (13) sia negativo o nullo, ovvero che $r \geq 2$. Quindi I contiene ogni $r \geq 2$, ovvero $r_0 \leq 2$.

Riassumendo, ho dimostrato che $1 \leq r_0 \leq 2$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. È possibile stimare r_0 in modo più preciso: studiando il segno della derivata di $g_r(x)$ per $1 \leq r \leq 2$ si vede che si vede che il punto di massimo è $x = 0$ oppure

$$x(r) := \frac{1 + \sqrt{2r - r^2}}{r - 1}\,.$$

Si hanno allora due possibilità:

(i) se $g_r(x(r)) \leq 0$ allora il valore massimo di g_r è $g_r(0) = 0$, quindi (12) vale e r appartiene a I, ovvero $r_0 \leq r$;

(ii) se invece $g_r(x(r)) > 0$ allora (12) non vale e r non appartiene a I, ovvero $r \leq r_0$.

Dato quindi $r \in [1, 2]$, calcolando il valore

$$h(r) := g_r(x(r)) = \arctan\left(\frac{1 + \sqrt{2r - r^2}}{r - 1}\right) - r + \frac{r^2 - r}{r + \sqrt{2r - r^2}}$$

posso decidere se r stima r_0 dall'alto o dal basso. In particolare:

- $h(1{,}5) \simeq 0{,}126 > 0$ e quindi $1{,}5 < r_0$;
- $h(1{,}7) \simeq -0{,}024 < 0$ e quindi $r_0 \leq 1{,}7$;
- $h(1{,}6) \simeq 0{,}049 > 0$ e quindi $1{,}6 < r_0$.

Concludo quindi che $1{,}6 < r_0 \leq 1{,}7$ (ma procedendo allo stesso modo potrei ottenere anche stime più precise).

5 Discutere il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^a)}{n}$ al variare di $a \in (-\infty, 1)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Indico con a_n l'addendo n-esimo della serie, vale a dire

$$a_n = (-1)^n \frac{\sin(n^a)}{n}\,.$$

Caso $a < 0$. In questo caso n^a tende a 0 per $n \to +\infty$, quindi $\sin(n^a) \sim n^a$ e $|a_n| \sim n^{a-1}$. Siccome $a - 1 < -1$ la serie converge assolutamente (per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata), e in particolare converge ad un numero finito.

Caso $a = 0$. In questo caso $\sin(n^a) = \sin(1)$ per ogni n, e la serie coincide a meno del fattore $\sin(1)$ con la nota serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} ,$$

che converge per il criterio di Leibniz (ma non converge assolutamente).

Caso $0 < a < 1$. Dimostro che la serie converge.[5] L'osservazione su cui si basa la dimostrazione è questa: poiché $a < 1$, la differenza tra $(n-1)^a$ e n^a tende a 0 quando $n \to +\infty$, quindi $\sin((n-1)^a)$ è sempre più vicino a $\sin(n^a)$, e analogamente a_{n-1} e a_n sono sempre più vicini in valore assoluto *ma di segno opposto*, per cui la somma $a_{n-1} + a_n$ è trascurabile rispetto ad entrambi. L'idea è quindi di sommare i termini della serie di partenza a due a due, per ottenere una nuova serie con termini significativamente più piccoli della precedente, sperando che sia più facile dimostrarne la convergenza.

Per ogni $n = 2, 3, \dots$ pongo

$$b_n := -\frac{\sin((n-1)^a)}{n-1} + \frac{\sin(n^a)}{n} ; \tag{14}$$

in particolare $b_n = a_{n-1} + a_n$ per n pari. Pertanto, detta S_N la somma parziale N-esima della serie di partenza, vale che

$$S_{2N} = \sum_{m=1}^{2N} a_m = \sum_{n=1}^{N} \big(a_{2n-1} + a_{2n}\big) = \sum_{n=1}^{N} b_{2n} ,$$

e quindi la convergenza di S_{2N} per $N \to +\infty$ equivale alla convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} . \tag{15}$$

Osservo inoltre che la convergenza delle somme parziali con indice pari S_{2N} implica la convergenza allo stesso limite delle somme parziali con indice dispari S_{2N+1}, perché $S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1}$ e il termine a_{2N+1} tende a zero quando $N \to +\infty$.

In altre parole, la convergenza della serie di partenza equivale a quella della serie in (15).

Per dimostrare la convergenza della serie in (15) studio il comportamento asintotico di b_n per $n \to +\infty$. Osservo per cominciare che

$$\begin{aligned} \sin((n-1)^a) &= \sin\big(n^a \big(1 - \tfrac{1}{n}\big)^a\big) \\ &= \sin\big(n^a + O(n^{a-1})\big) = \sin(n^a) + O(n^{a-1}) , \end{aligned} \tag{16}$$

dove nel secondo passaggio ho usato lo sviluppo $(1+y)^a = 1 + O(y)$ per $y \to 0$ con $y = \frac{1}{n}$, e nel terzo ho usato lo sviluppo di Taylor $\sin(\alpha + y) = \sin(\alpha) + O(y)$ con $y = O(n^{a-1})$.[6]

Usando la definizione di b_n in (14) e la formula (16) ottengo infine

$$\begin{aligned} b_n &= -\tfrac{1}{n-1}\big(\sin(n^a) + O(n^{a-1})\big) + \tfrac{1}{n}\sin(n^a) \\ &= -\tfrac{1}{n(n-1)}\sin(n^a) + \tfrac{1}{n-1} \cdot O(n^{a-1}) \\ &= O(n^{-2}) \cdot O(1) + O(n^{-1}) \cdot O(n^{a-1}) \\ &= O(n^{-2}) + O(n^{a-2}) = O(n^{a-2}) . \end{aligned}$$

[5] Notare che in questo caso la serie non converge assolutamente (volendo lo si può anche dimostrare) e non si può applicare il criterio di Leibniz perché gli addendi non sono decrescenti in valore assoluto.

[6] Per la precisione, ho usato lo sviluppo di Taylor di ordine 0 della funzione seno nel punto α. Attenzione: per la dimostrazione è importante che il resto in questo sviluppo sia stimato in modo indipendente da α, cosa che risulta chiara se si usa la formula del resto di Lagrange (ma non se si usa la formula di Peano). In alternativa si può ottenere questo sviluppo a partire dalla disuguaglianza $|\sin\beta - \sin\alpha| \le |\beta - \alpha|$, che a sua volta si dimostra usando il teorema di Lagrange.

Da questo segue che $|b_{2n}| = O(n^{a-2})$; quindi la serie a termini positivi $\sum |b_{2n}|$ converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata $\sum n^{a-2}$ (che converge perché $a < 1$) e ho dunque dimostrato che la serie (15) converge assolutamente.

<u>OSSERVAZIONI</u>. È possibile dimostrare che la serie converge anche per $a = 1$. Un modo è vedere la serie di partenza come la parte immaginaria della serie a termini complessi $\sum \frac{1}{n} e^{i(1+\pi)n}$, di cui si può dimostrare la convergenza usando il lemma di sommazione per parti (che però non fa parte degli argomenti del corso).
Non so cosa succeda per $a > 1$.