

Esercizi di Elettromagnetismo



Alessandro Strumia

Ultimo aggiornamento: 19 settembre 2023

Indice

I Elettrostatica 7

1 Campi e potenziali elettrici	8
1.1 Gravità vs elettromagnetismo	8
1.2 Atomi	8
1.3 Materia: spezzare una bacchetta	9
1.4 Materia: reazione chimica	9
1.5 Materia: temperatura ‘antropica’	9
1.6 Materia: altezza animali	10
1.7 Materia: dimensione di una goccia	10
1.8 Materia: altezza monte Everest	10
1.9 Materia: raggio dei pianeti sferici	10
1.10 Materia: massima pressione sopportabile	11
1.11 Materia: profondità massima raggiungibile	11
1.12 Materia: pianeti da cui è possibile uscire	11
1.13 Materia: pianeti abitabili	12
1.14 Sistemi stabili?	12
1.15 Campo elettrico di un filo	14
1.16 Campo elettrico di un piano	16
1.17 Campo elettrico di un guscio sferico	16
1.18 Campo elettrico di sfera	17
1.19 Terrapiattismo vs terrasferismo	17
1.20 Campo elettrico di un cilindro	17
1.21 Anello circolare	18
1.22 Esplosione Coulombiana ©	19
1.23 Scattering a piccolo angolo	20
1.24 Scattering Rutherford	20
2 Energia elettrostatica	23
2.1 Energia del sale	23
2.2 Forza su cariche superficiali	23
2.3 Energia di un guscio sferico	24
2.4 Modelli dell’atomo di idrogeno	25
2.5 Modelli di atomi multi-elettronici	26
2.6 Energia di una sfera carica	27
2.7 Energia di due cariche	28
2.8 Raggio classico dell’elettrone	28
2.9 Masse dei nuclei	29
2.10 Fusione nucleare	30
2.11 Fissione nucleare	30

2.12 Differenza di massa protone-neutrone	31
2.13 Energia di due superfici sferiche	31
2.14 Piano con carica ondulata	32
2.15 Piano con carica cilindrica	33
2.16 Potenziale di Yukawa	33

3 Dipoli elettrici 34

3.1 Momenti di dipolo	34
3.2 Forno a microonde	35
3.3 Allineamento di dipoli elettrici	35
3.4 Sfera bucata	36
3.5 Sfera polarizzata	36
3.6 Cilindro polarizzato	38
3.7 Paradosso sui dipoli I	38
3.8 Paradosso sui dipoli II	38
3.9 Paradosso sui dipoli III	39
3.10 Paradosso sui dipoli IV	39

4 Conduttori 40

4.1 1 lastra conduttrice carica	40
4.2 2 lastre conduttrici cariche	40
4.3 Sfera conduttrice con cavità	41
4.4 Tetraedro conduttore	41
4.5 Effetto delle punte	42
4.6 Sfera conduttrice in guscio carico ©	42
4.7 Guscio conduttore ©	43
4.8 Coefficiente di capacità	44
4.9 Coefficienti di capacità	44
4.10 Tre sfere ©	44
4.11 Piano ondulato fra conduttori ©	45
4.12 Semi-piano conduttore	46
4.13 Bordo di condensatore	46

5 Metodo delle cariche immagine 48

5.1 Semi-spazio conduttore	48
5.2 Lastra conduttrice	49
5.3 Due semi-piani conduttori	50
5.4 Piano conduttore: dipolo immagine ©	51
5.5 Due semi-piani conduttori a 60° ©	51
5.6 Carica in angolo ©	52
5.7 Piano carico fra 2 piani conduttori	53
5.8 Carica fra 2 piani conduttori	53
5.9 Sfera conduttrice a terra	54
5.10 Sfera conduttrice isolata a carica zero	55
5.11 Sfera conduttrice in E costante	56
5.12 Sfera conduttrice isolata ©	56
5.13 Dipolo ortogonale a sfera ©	57
5.14 Dipolo parallelo a sfera ©	58
5.15 Dipolo davanti a sfera ©	59
5.16 Carica dentro sfera ©	60
5.17 Cariche e guscio conduttore ©	61
5.18 Carica davanti a piano con sfera ©	62
5.19 Carica in semi-sfera ©	62
5.20 Biglie conduttrici ©	63

6	Condensatori	65	9	Circuiti	101
6.1	Capacitatore cilindrico	65	9.1	Resistenze in parallelo	101
6.2	Capacitatore di dimensioni variabili	65	9.2	Massima potenza	101
6.3	Conduttore in capacitatore	66	9.3	Carica di RC	101
6.4	Conduttore carico in condensatore \odot	67	9.4	Resistenze su quadrato	102
6.5	Condensatore sferico	68	9.5	Resistenze su cubo	102
6.6	Condensatori in serie	68	9.6	Pile	103
6.7	Condensatore piano grosso \odot	68	9.7	Potenza dissipata	103
6.8	Condensatore cilindrico grosso \odot	69	9.8	Circuito passa-basso	103
7	Dielettrici	71	9.9	Circuito passa-alto	104
7.1	Transistor veloce	71	9.10	Filtro passa banda RLC	104
7.2	2 dielettrici in condensatore piano	71	9.11	Filtro passa banda $(RC)^2$	105
7.3	N dielettrici in condensatore piano	72	9.12	Ponte di Wheatstone	105
7.4	Dielettrico cilindrico \odot	72	9.13	Pendolo accoppiato	106
7.5	Sfera conduttrice in acqua \odot	73	9.14	Attenuatore	107
7.6	Sfera su cono dielettrico \odot	74	9.15	Catena LC	107
7.7	Cubo appeso \odot	75	II	Magnetostatica	109
7.8	Forza di conduttore su dielettrico	75	10	Generazione di campi magnetici	110
7.9	Dielettrico storto in campo esterno \odot	76	10.1	Disco di Rowland	110
7.10	Dielettrico in condensatore	77	10.2	Filo rettilineo	110
7.11	Acqua in condensatore	77	10.3	Cavo coassiale	110
7.12	Carica davanti a semipiano dielettrico	78	10.4	Forza tra due fili carichi	111
7.13	Dielettrico in campo elettrico esterno	79	10.5	Due spire circolari	111
7.14	Uva in microonde	80	10.6	Filo ad U	112
7.15	Attrazione fra dielettrici	81	10.7	Solenoido rettilineo infinito	112
8	Correnti	82	10.8	Solenoido rettilineo finito	112
8.1	Capacitatore piano imperfetto	82	10.9	Solenoido toroidale	113
8.2	Capacitatore piano imperfetto con batteria	82	10.10	Cilindro carico ruotante	114
8.3	Scarica di sfera carica	83	10.11	Sfera carica ruotante	114
8.4	Resistenza fra sfere concentriche	84	11	Moto in campo magnetico esterno	115
8.5	Sonda marina	84	11.1	Ago magnetico	115
8.6	Fulmine	84	11.2	Cilindro su piano inclinato	115
8.7	Dumbo	85	11.3	Levitazione magnetica	115
8.8	Piastre circolari	85	11.4	Carica in B costante	116
8.9	Piastre piane \odot	86	11.5	Campo magnetico galattico	117
8.10	Atmosfera terrestre \odot	87	11.6	Ottica geometrica matriciale	118
8.11	Sfera su cono conduttore \odot	88	11.7	Carica in quadrupolo magnetico	118
8.12	Sfera conduttrice \odot	89	11.8	Carica in quadrupoli magnetici	119
8.13	Tre gusci sferici \odot	90	11.9	Paradosso paramagnetico	120
8.14	Tre gusci cilindrici \odot	91	11.10	Carica in solenoide	121
8.15	Cilindro \odot	92	11.11	Spettrometro	121
8.16	Piastra dielettrica in condensatore \odot	94	11.12	Carica in B ed E costanti	122
8.17	Carica davanti a conduttore	95	11.13	Fotomoltiplicatore in B, E	123
8.18	Conduttore in campo gravitazionale \odot	96	11.14	Accelerazione di raggi cosmici?	124
8.19	Semipiano dielettrico conduttore	97	11.15	Ciclotrone	125
8.20	Piatto dielettrico	98	11.16	Ciclotrone a raggio costante (betatrone)	126
8.21	Sfera conduttrice in E ruotante	99	11.17	Carica in B con direzione non uniforme	127
8.22	Contatore proporzionale Geyger	100	11.18	Carica in B con modulo non uniforme	127
			11.19	Carica in $B(t)$ uniforme	127
			11.20	Atomo in $B(t)$ uniforme	128
			11.21	Carica in B non uniforme	128
			11.22	Intrappolamento magnetico	129

12 Induzione magnetica	131	III Elettrodinamica	167
12.1 Circuito allungato	131	15 Corrente di spostamento	168
12.2 Circuito in moto	131	15.1 Scarica di un filo	168
12.3 Auto-induttanza in campo magnetico ©	132	15.2 Scarica di sfera	168
12.4 Circuito RC in campo magnetico © . .	133	15.3 Sfera radioattiva	169
12.5 Circuito con resistenza e due maglie ©	134	15.4 Piano con carica ondulata	169
12.6 Ingresso laterale ©	135	15.5 Campo magnetico di carica in moto . .	170
12.7 Circuito oscillante	135	15.6 Forza fra 2 cariche	171
12.8 Circuito ruotante	136	15.7 Condensatore lentamente alternato . .	171
12.9 Circuito ruotante con distacco	136	15.8 Scarica di un condensatore	172
12.10 Motore elettrico a corrente continua ©	137	15.9 Condensatore rapidamente alternato . .	173
12.11 Motore elettrico a corrente alternata ©	138	15.10 Effetto pelle in filo'	174
12.12 Scintilla	139	15.11 Filo conduttore interrotto ©	175
12.13 Circuito e filo ©	140	15.12 Cavo coassiale ©	176
12.14 Solenoide in solenoide ©	140	15.13 Verso le onde	176
12.15 Solenoide conico ©	141	16 Vettore di Poynting	178
12.16 Generatore in orbita	142	16.1 Teorema di Poynting in condensatore . .	178
12.17 Induttanze in serie e parallelo	143	16.2 Teorema di Poynting in filo resistivo . .	178
12.18 Campo magnetico auto-sostenuto © . .	143	16.3 Teorema di Poynting in solenoide	179
12.19 Cilindro ruotante	144	16.4 Teorema di Poynting in cavo coassiale .	179
13 Forze magnetiche fra circuiti	147	16.5 Riscaldamento di conduttore	180
13.1 Due circuiti lunghi	147	16.6 Scarica di sfera ©	180
13.2 Rotazione di due spire circolari © . . .	148	16.7 Azione e reazione fra due cariche	181
13.3 Pulsar	149	16.8 Impulso del campo di una carica in moto	182
13.4 Una spira ed un dipolo ©	149	16.9 Paradosso di Feynman	182
13.5 Un dipolo ed N spire ©	150	16.10 Momento angolare dell'idrogeno	183
13.6 Monopolo magnetico	151	17 Onde nel vuoto	185
13.7 Induzione su circuito RL ©	152	17.1 Campi elettrici illegali	185
13.8 Molla magnetica ©	154	17.2 Campi elettrici bestiali	185
13.9 Forza magnetica dall'energia	154	17.3 Luce solare	185
14 Campi magnetici nella materia	156	17.4 Efficienza energetica di lampadina . . .	186
14.1 Ferromagnete in campo esterno	156	17.5 Doppler	187
14.2 Circuiti magnetici	156	17.6 Luce delle stelle	187
14.3 Circuiti magnetici con traferri	157	17.7 Interferenza fra onde	188
14.4 Riluttanze	157	17.8 Ricevitore di onde	188
14.5 Campo magnetico di calamita corta . .	158	17.9 Onda ricevuta da circuito rettangolare ©	189
14.6 Campo magnetico di calamita lunga . .	158	17.10 Ricevitore di onde con sintonizzazione .	189
14.7 Due bacchette	159	17.11 Antenna lineare vs circolare ©	190
14.8 Tre bacchette	159	17.12 Riflessione e polarizzazione	191
14.9 Ferromagnete con calamita	159	17.13 Riflessione e ricezione ©	192
14.10 Ferromagnete con calamita e protoni . .	159	17.14 Forza su superficie	192
14.11 Trasformatore ideale	160	17.15 Pressione di radiazione solare	193
14.12 Solenoide	160	17.16 Navigazione stellare	194
14.13 Effetto Hall alternato ©	161	17.17 Riflessione da conduttore sottile	194
14.14 Correnti parassite ©	162	17.18 Guida d'onda	195
14.15 Correnti parassite in toro ©	163	17.19 Parametri di Stokes	196
14.16 Effetto pelle per calore	164	17.20 Polarizzazione di onda non polarizzata ©	198
14.17 Effetto pelle per campo magnetico . . .	165		
14.18 Effetto pelle in filo	165		

18 Onde nella materia	200	20.14 Ionosfera ☺	228
18.1 Onda in materiale birifrangente	200	20.15 Irraggiamento da condensatore	228
18.2 Riflessione di onde in una corda	200	20.16 Irraggiamento da antenna	228
18.3 Rifrazione con E parallelo al piano	201	20.17 Irraggiamento da corrente sinusoidale	229
18.4 Bolla di sapone	203	20.18 Due antenne	230
18.5 Alone a 22°	203	20.19 Tre antenne ☺	231
18.6 Onda in conduttore	203	20.20 Quattro antenne	232
18.7 Sommergibile ☺	206	20.21 Interferenza fra due sorgenti	232
18.8 Temperature di pianeti ☺	207	20.22 Nube di elettroni	233
18.9 Forno a micro-onde ☺	208	20.23 Da atomo a materiale ☺	234
18.10 Pulsar	209	20.24 Irraggiamento da dipolo magnetico	235
18.11 Onde adiabatiche	209		
18.12 Onde in plasma di densità variabile	210	21 Relatività	237
18.13 Miraggi	210	21.1 Contrazione di Lorentz	237
18.14 Cavità risonante	211	21.2 Forza fra 2 cariche bis	238
		21.3 Verifica conservazione impulso	238
19 Interferenza e diffrazione	212	21.4 Carica in E e B ortogonali bis	238
19.1 Interferenza alla Young	212	21.5 Filo in moto	239
19.2 Interferenza alla Young ☺	212	21.6 Forza prodotta da filo in moto	239
19.3 Fascio di luce di spessore finito ☺	213	21.7 Effetto Joule in moto	240
19.4 CD	214	21.8 Trascinamento di onda in materiale	240
19.5 Diffrazione da buco tondo	214	21.9 Onda vista da sistema in moto	241
19.6 Ombra di una sfera	215	21.10 Raffreddamento laser	241
19.7 Luce bi-cromatica in interferometro di Michelson	216	21.11 Riflessione da specchio in moto	242
19.8 Grande fratello	216	21.12 Riflessione da specchio in moto'	244
19.9 Foto di buco nero	217	21.13 Riflessione da specchio in moto parallelo a se stesso	244
19.10 Minima distanza visibile	217	21.14 Riflessione da specchi in moto ☺	244
		21.15 Rifrazione da materiale in moto parallelo a se stesso	245
20 Irraggiamento	218	21.16 Onda in nuvola ☺	246
20.1 Antenna	218	21.17 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$	247
20.2 Elettrone libero in campo elettrico	218	21.18 GPS	248
20.3 Elettrone libero in campo magnetico ☺	218	21.19 Effetto Compton	248
20.4 Atomo di idrogeno	219	21.20 Irraggiamento relativistico	248
20.5 Forza di una carica su se stessa	221	21.21 Collider circolare	250
20.6 Atomo di Thomson	222	21.22 Irraggiamento da elettroni relativistici	250
20.7 Decadimento del positronio ☺	223	21.23 Radiazione di sincrotrone	251
20.8 Scattering protone/nucleo	223		
20.9 Scattering protone/protone	224	22 Oltre l'elettromagnetismo	252
20.10 Onde gravitazionali	225	22.1 Heisenberg-Euler	252
20.11 Carica e sfera conduttrice ☺	225	22.2 Assione	252
20.12 Scattering elettrone/fotone	226		
20.13 Radiazione cosmica	227		

Introduzione

Ciascun capitolo inizia riassumendo le formule di base utilizzate negli esercizi, e presenta esercizi focalizzati sullo specifico argomento nuovo. Gli esercizi usati a fine valutativo in compiti di esame sono denotati con il simbolo ©: spesso hanno minore interesse e mescolano anche argomenti precedenti. Indicativamente, gli esercizi più facili hanno il titolo in verde, quelli con conti più pesanti o concetti più difficili in rosso.

Parte I

Elettrostatica

Campi e potenziali elettrici

La *forza di Coulomb* fra due cariche q_1, q_2 a distanza \mathbf{r} vale $\mathbf{F} = q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}} / 4\pi\epsilon_0 r^2 = k \hat{\mathbf{r}} q_1 q_2 / r^2$ dove $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 / \text{Nm}^2$ è la ‘costante dielettrica del vuoto’ e $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.9875 \cdot 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$. Unità di misura alternative usano $k = 1$ o $k = 1/4\pi$. È utile introdurre il *campo elettrico* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ed il *potenziale elettrico* $\varphi(\mathbf{r})$ e riscrivere la forza di Coulomb come le prime due equazioni di Maxwell per l’elettrostatica:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0 \\ \mathbf{E} = -\nabla \varphi \end{cases}$$

Vale il *teorema di Gauss* $\Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$. Un Coulomb sono $6.24 \cdot 10^{18}$ elettroni. L’elettron-volt $\text{eV} = e \times V = J(e/C) = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{J}$ è l’energia che un elettrone di carica $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{C}$ acquista attraversando una differenza di potenziale di un Volt.

Esercizio 1.1: Gravità vs elettromagnetismo

Un atomo di idrogeno è composto da un elettrone con massa $m_e = 0.911 \cdot 10^{-30} \text{kg}$ e da un protone di massa $m_p \approx 1836m_e$. Mostrare che la forza gravitazionale è trascurabile rispetto a quella di Coulomb.

➤Soluzione: Ricordando che la costante di Newton vale $G_N = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$, entrambe le forze sono proporzionali al quadrato della distanza, che pertanto si semplifica nel rapporto che vale

$$\frac{F_N}{F_C} = \frac{G_N m_e m_p / r^2}{e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2} = 4.4 \cdot 10^{-40}.$$

Non si sa da dove un numero adimensionale così grosso esca fuori: esistono solo teorie più o meno plausibili.

Esercizio 1.2: Atomi

Assumendo che la dimensione di un atomo sia circa $\text{\AA} = 10^{-8} \text{cm}$, stimare che la forza di Coulomb fornisce stime corrette.

➤Soluzione: Sapendo che una mole di materia solida contiene un numero di Avogadro $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ di molecole o atomi, che occupa un volume di circa 1cm^3 e che pesa circa 1 grammo, si deduce che una molecola o atomo ha dimensioni di circa $r \sim \text{cm}/N_A^{1/3} \sim \text{\AA}$ e massa di circa $m_p \sim \text{g}/N_A \sim 10^{-27} \text{kg}$. Il valore preciso per lo stato base dell’atomo di idrogeno è $r = a_0 = 0.53 \text{\AA}$, ma solo la meccanica quantistica può spiegare questo valore come $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2$. Le teorie classica è sbagliata, per cui è inutile mettere fattori 2. Viceversa ha senso fare stime assumendo r dato.

- La *forza elettrica* ha un valore quasi macroscopico $F_C \approx e^2 / 4\pi\epsilon_0 \text{\AA}^2 \approx 10^{-8} \text{N}$. Le particelle si combinano formando materia neutra in modo da cancellare, in media, l’enorme forza elettrica.
- Il *potenziale elettrico* di un atomo di idrogeno *ep* vale

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27 \text{V} \quad \text{per } r = a_0.$$

Una tipica pila ha voltaggio di circa 1 Volt, appunto perchè questa è la tipica differenza di potenziale in un atomo.

- L'elettrone ha *velocità* $m_e v_e^2 / r = e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2$ cioè $v_e = e\sqrt{1/4\pi\epsilon_0 m_e r} \approx c/137.036$ e quindi è non-relativistico. In meccanica quantistica la combinazione adimensionale $\alpha \equiv e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c \approx 1/137.036$ è nota come costante di struttura fine.
- La *velocità angolare* vale $\omega = v_e/r = e/\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3} \approx 4.1 \cdot 10^{16}$ Hz simile alla pulsazione delle righe spettrali che vengono osservate (e che non sono comprensibili classicamente).
- L'*energia di legame* vale

$$E = \frac{m_e}{2} v_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -13.6 \text{ eV} = -1 \text{ Rydberg}.$$

L'elettronVolt è definito come

$$\text{eV} \equiv e \times \text{Volt} = e \times \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}.$$

Esercizio 1.3: Materia: spezzare una bacchetta

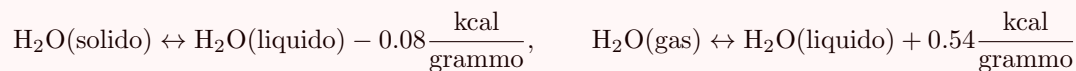
Una bacchetta ha sezione di 1 cm^2 . Stimare la forza necessaria per spezzarla in due, assumendo che il lavoro consista nel separare gli atomi sulla superficie di rottura.

⚡Soluzione: Se la materia è costituita da atomi di dimensione $a_0 \sim \text{\AA}$ legati dalla forza di Coulomb, rompere una bacchetta equivale a rompere $N = (\text{cm}/\text{\AA})^2 = 10^{16}$ legami fra coppie di atomi: quindi serve una forza $F \sim N F_C \sim 10^8 \text{ N}$ dove $F_C \approx e^2/4\pi\epsilon_0 \text{\AA}^2 \approx 10^{-8} \text{ N}$. Tenendo conto che non distinguiamo idrogeno da gesso da acciaio, la stima non è male; combinando quantità come a_0, e, n , che sono fuori scala rispetto all'esperienza ordinaria, avrebbe potuto venire una stima sbagliata di decine di ordini di grandezza. Si potrebbe essere più precisi: il legame fra molecole o atomi è dovuto alle interazioni fra i loro elettroni più esterni, soggetti a forze più deboli di quelle che tengono legati gli elettroni interni.

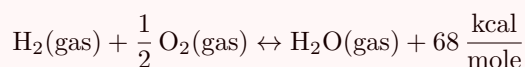
Esercizio 1.4: Materia: reazione chimica

Stimare l'energia liberata in una reazione chimica o in un cambiamento di stato, assumendo che essa abbia origine elettromagnetica.

⚡Soluzione: Come discusso sopra, un cm^3 di materia corrisponde circa ad una mole e contiene circa $N_A = (\text{cm}/\text{\AA})^3 = 6 \cdot 10^{23}$ atomi, ciascuno dei quali possiede energia di legame di circa 1 eV. Quindi ricombinare una mole di materia fornisce o richiede una energia $U \sim N_A \cdot \text{eV} \sim 10^5 \text{ Joule} \sim 100 \text{ kcal}$ (si ricordi $\text{cal} = 4.2 \text{ J}$). Il risultato è ragionevolmente simile a quello di tipiche reazioni fisiche come



e chimiche come



o anche, in sistemi biologici

$$1 \text{ cm}^3 \text{ di cioccolato} \sim 1 \text{ gianduotto} \sim 0.1 \text{ kcal}.$$

Nuovamente la stima è una sovrastima, in quanto solo gli elettroni esterni vengono ritoccati in una reazione chimica o fisica.

Esercizio 1.5: Materia: temperatura ‘antropica’

Stimare la temperatura alla quale avvengono i cambiamenti di stato.

✚Soluzione: I cambiamenti di stato fra solido/liquido/gas/plasma avvengono alla temperatura tale che l’energia media degli atomi è simile all’energia di legame:

$$k_B T \sim |E| = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \sim 13.6 \text{ eV} \quad \text{per} \quad T \sim 1.57 \cdot 10^5 \text{ Kelvin.}$$

A temperature molto maggiori tutti i materiali sono fusi e ionizzati dando plasmi. A temperature molto minori sono tutti ‘ghiacciati’. Solo alla temperatura intermedia tale che l’energia cinetica media degli atomi è simile all’energia potenziale media esiste una chimica complessa capace di dare luogo a materiali ‘molli’ ed alla vita.

Esercizio 1.6: Materia: altezza animali

Stimare la massima altezza di un animale in un campo gravitazionale g , tenendo conto che l’altezza è limitata dalla necessità di poter scendere senza spezzarsi.

✚Soluzione: Andiamo oltre l’approssimazione di mucca sferica assumendo che l’animale abbia altezza h e spessore S . L’energia della caduta $U_{\text{grav}} \sim Mgh$ (dove la massa dell’animale è $M \sim m_p N_V$ con $N_V \sim Sh/\text{\AA}^3$ il numero dei suoi atomi) deve essere minore dell’energia elettrica necessaria per rompere gli $N_S \sim S/\text{\AA}^2$ legami sulla superficie S di rottura, $U_{\text{el}} \sim N_S e^2 / 4\pi\epsilon_0 \text{\AA}$. Il risultato della stima,

$$h \lesssim e / \sqrt{gm_p\epsilon_0} \sim m, \quad (1.1)$$

non dipende dalla dimensione degli atomi \AA né dalla forma S/h^2 dell’animale. Le giraffe hanno una più complicata forma adeguata per essere alte e mangiare le foglie degli alberi (che, non dovendo muoversi, non rischiano di cadere e possono raggiungere altezze maggiori degli animali).

Considerazioni simili permettono di stimare la massima altezza dalla quale possono cadere animali, spiegando come mai animali più piccoli possono cadere da maggiori altezze.

Esercizio 1.7: Materia: dimensione di una goccia

Stimare la dimensione massima di una goccia, ad esempio di acqua.

✚Soluzione: La generalità dell’argomento precedente mostra che h è anche la massima dimensione di una goccia. Chi ha studiato fisica 1 avanzata potrebbe riottenere il risultato stimando la tensione superficiale di un liquido $\gamma = dF/d\ell \sim F/\text{\AA} \sim 100 \text{ N/m}$. Come al solito è una ragionevole sovrastima: ad esempio l’acqua a temperatura ambiente ha tensione superficiale $\gamma = 0.07 \text{ N/m}$. Minimizzando $U \sim Mgh - \gamma S \sim gph^4 - \gamma h^2$ rispetto ad h porta al risultato.

Esercizio 1.8: Materia: altezza monte Everest

Stimare la massima altezza h di una montagna in un pianeta di dimensione R .

✚Soluzione: Il terreno non riesce a sostenere il peso di una montagna quando la forza gravitazionale degli $N = h/\text{\AA}$ atomi sopra due atomi nella base è maggiore della loro forza di Coulomb $F_C \approx e^2 / 4\pi\epsilon_0 \text{\AA}^2$. La forza gravitazionale vale $F_N = Mg$ dove $M = Nm_p$ e $g \approx G_N M_P / R^2 \approx G_N \rho_P R \approx G_N m_p R / \text{\AA}^3$. Imponendo $F_N \lesssim F_C$ si trova

$$\sqrt{hR} \lesssim R_{\text{cr}} \equiv \text{\AA} \sqrt{\frac{e^2 / 4\pi\epsilon_0}{G_N m_p^2}} \approx 10^{18} \text{\AA} \approx 10^5 \text{ km.}$$

Il secondo fattore è il rapporto $\sqrt{F_C/F_N}$ fra le forze di Coulomb e di Newton fra due protoni. Calcoli più precisi (una montagna di terra regge meno di una di acciaio, nella stima non le abbiamo distinte) riducono R_{cr} a circa 300 km. Quindi, nel caso della Terra, $h \sim 15 \text{ km}$.

Esercizio 1.9: Materia: raggio dei pianeti sferici

Stimare il raggio critico R_{cr} oltre il quale i pianeti sono sferici.

✚Soluzione: Il risultato $hR \lesssim R_{\text{cr}}^2$ dell'esercizio precedente implica che pianeti con raggio $R \gg R_{\text{cr}}$ sono circa sferici in quanto hanno montagne di altezza $h \ll R_{\text{cr}}$. Solo i pianeti più piccoli di R_{cr} possono avere montagne di altezza $h \sim R_{\text{cr}}$ e quindi forme varie come le patate. Un pianeta di raggio R_{cr} contiene circa $N_{\text{cr}} \sim (R_{\text{cr}}/\text{\AA})^3 \sim (F_{\text{C}}/F_{\text{N}})^{3/2} \sim 10^{61}$ atomi.

Esercizio 1.10: Materia: massima pressione sopportabile

Stimare la massima pressione sopportabile dalla materia. Mostrare che in un pianeta sferico la pressione raggiunge valori tali da modificare la materia.

✚Soluzione: Essendo gli atomi a distanza \AA e legati con forza $F_{\text{C}} \sim e^2/4\pi\epsilon_0\text{\AA}^2$, un piano di atomi cede sotto una pressione maggiore di $\wp_{\text{max}} \sim F_{\text{C}}/\text{\AA}^2 \sim e^2/4\pi\epsilon_0\text{\AA}^4 \sim 10^{12}$ Pascal. Come al solito questa è una sovrastima: il valore misurato è 10^9 Pascal per l'acciaio e la tela di ragno, e fino quasi a 10^{11} Pascal per speciali materiali in carbonio. Usare molti strati di atomi non cambia in maniera significativa la stima: ad esempio un tubo di diametro esterno D e spessore s regge una pressione $2\wp s/D < \wp$ (formula di Barlow/Mariotte).

Esercizio 1.11: Materia: profondità massima raggiungibile

Stimare la profondità h massima raggiungibile in acqua o scavando un buco nel terreno.

✚Soluzione: La pressione sotto-terra o sott'acqua vale circa $\wp = \rho gh$, raggiungendo $\sim 10^8$ Pascal a $h \sim 10$ km. Scrivendo la profondità massima h in termini di costanti fondamentali si trova che h è dato dalla stessa formula della montagna più alta. Abbiamo quindi unificato l'Everest con la fossa delle Marianne e l'alpinismo con l'immersione.

La pressione attorno al centro di un pianeta di raggio R vale $\wp \sim \rho\phi \sim G_{\text{N}}m_p^2R^2/\text{\AA}^6$ essendo $\phi \sim GM/R$ il potenziale di Newton, $M \sim R^3\rho$ e $\rho \sim m_p/\text{\AA}^3$ la densità della materia. La pressione raggiunge valori tali da modificare la materia se $\wp \gtrsim \wp_{\text{max}}$: risolvendo si trova che questo accade per $R \gtrsim R_{\text{cr}}$ dove R_{cr} risulta essere lo stesso raggio oltre il quale un pianeta è sferico.

Esercizio 1.12: Materia: pianeti da cui è possibile uscire

Stimare il massimo raggio R di un pianeta da cui è possibile uscire tramite un razzo che usa la materia normale come combustibile.

✚Soluzione: L'energia elettrica U_{el} ricavabile dal combustibile deve essere maggiore della differenza di energia potenziale U_{grav} fra il pianeta e lo spazio esterno. Possiamo considerare il bilancio per un singolo atomo. Come visto in precedenza un atomo contiene energia $U_{\text{el}} \sim e^2/4\pi\epsilon_0\text{\AA} \sim m_e v_e^2$ dove $v_e \approx c/137$. L'energia gravitazionale è $U_{\text{grav}} \sim G_{\text{N}}m_p M/R \sim m_p v_{\text{esc}}^2$, spesso espressa in termini della velocità di fuga v_{esc} .

- Usando le espressioni delle energie in termini delle velocità si ricava che la massima velocità di fuga di un pianeta dal quale è possibile uscire è

$$v_{\text{esc}} \lesssim v_e \sqrt{m_e/m_p} \sim 50 \text{ km/s}$$

comparabile alla velocità di fuga dalla Terra, circa 10 km/s.

- Usando le espressioni delle energie in termini dei raggi e $M \sim \rho_P R^3$ con densità $\rho_P \sim m_p/r^3$ si ottiene nuovamente il raggio R_{cr} visto nell'esercizio precedente

$$R \lesssim R_{\text{cr}} \sim \text{\AA} \times \sqrt{\frac{e^2/4\pi\epsilon_0}{m_p^2 G_{\text{N}}}} \sim 10^{-10} \text{ m} \times 10^{18} \sim 10^5 \text{ km}$$

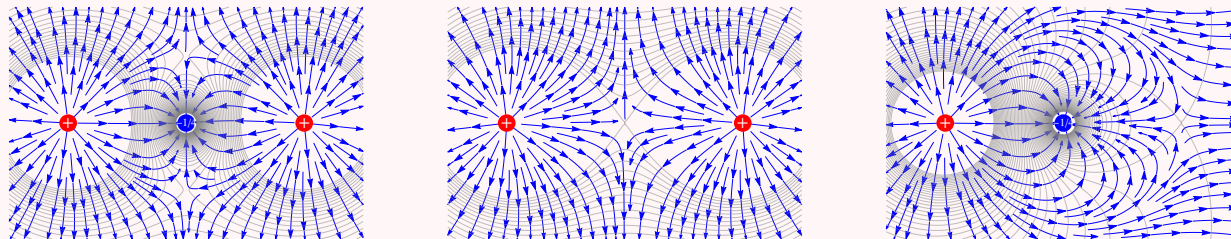


Figura 1.1: Tentativo di costruire un sistema stabile di 3 cariche. A sinistra le linee del campo totale in blu e le linee equipotenziali in grigio; nel centro quelle ottenute omettendo la carica di centro; a destra quelle ottenute omettendo la carica di destra.

Come in esercizi precedenti, trascurare dettagli di fisica atomica porta a sovra-stime e $R \sim 10000 \text{ km}$ è un valore più realistico: nessuno sarebbe andato nello spazio se il raggio della Terra fosse circa 1.5 volte maggiore. Entrando nei dettagli, il combustibile che produce più energia per unità di massa è la reazione chimica idrogeno-ossigeno discussa prima, sfruttando anche che l'ossigeno pesante è disponibile nell'aria. Anche così i razzi riescono a trasportare poco peso: utilizzando stadi multipli e ridotti margini di sicurezza il 95% della loro massa è combustibile (frazione simile a quella di una lattina, mentre in un'automobile la frazione è del 4%).

Più in generale, questo esercizio significa che corpi celesti fatti di materia ordinaria e più grandi di R_{cr} (ad esempio il Sole e Giove) hanno energia gravitazionale maggiore della loro energia chimica.

Esercizio 1.13: Materia: pianeti abitabili

Stimare che i pianeti ‘abitabili’ che trattengono l’atmosfera a temperatura simile all’energia di legame atomica sono sferici.

✎Soluzione: Imponiamo che l’energia potenziale gravitazionale di un atomo di massa $\sim m_p$ nell’atmosfera di un pianeta, $U_{\text{grav}} = G_N M m_p / R$ sia abbastanza grossa da impedire l’evaporazione dell’atmosfera. Questo significa $U_{\text{grav}} \gtrsim k_B T$ dove $k_B T$ è l’energia termica degli atomi. Valutandola alla temperatura ‘antropica’ tale che $k_B T$ è simile all’energia potenziale elettrica $U_{\text{el}} \sim e^2 / 4\pi\epsilon_0 \text{\AA}$ degli atomi si arriva nuovamente al solito valore del raggio critico R_{cr} .

Esercizio 1.14: Sistemi stabili?

È possibile assemblare un sistema a piacere di cariche elettriche tali che ogni carica sia in equilibrio stabile? È possibile che almeno una carica sia in equilibrio stabile?

✎Soluzione: Si dimostrerà che è impossibile. In questo esercizio presentiamo tentativi fallimentari: la cosa interessante è capire perché non funzionano. Altro scopo nascosto dell’esercizio è esercitarsi a sommare vettori.

2) Usando solo due cariche non è possibile assemblare un sistema stabile.

3) Alcuni solidi sono fatti da reticoli cristallini di tante cariche. Consideriamo qui un prototipo con tre cariche, provando a disporle come disegnato in figura 1.1a: due cariche uguali q nei punti $P_1 = L(-1, 0, 0)$ e $P_2 = L(1, 0, 0)$ ed una terza carica q' nel punto di mezzo $P_3 = (0, 0, 0)$, dove il campo generato dalle prime due cariche vale zero. Scegliendo $q' = -q/4$ si ha $E = 0$ anche sulle cariche q . Quindi abbiamo realizzato un sistema in equilibrio, e rimane da vedere se si tratta di equilibrio stabile o instabile. Le linee del campo in figura 1.1a ovviamente divergono attorno a ciascuna carica: per calcolare la forza sentita da q' occorre omettere il suo campo elettrico, come mostrato in fig. 1.1b. La figura indica che q' è in

equilibrio instabile: verifichiamolo mediante un conto analitico. Il campo elettrico per $X = (x, y, z) \approx 0$ è

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^2 \frac{\mathbf{X} - \mathbf{P}_i}{|\mathbf{X} - \mathbf{P}_i|^3} \stackrel{X \rightarrow 0}{\simeq} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^3} (-4x, 2y, 2z) + \mathcal{O}(x, y, z)^2.$$

L'espansione in serie di Taylor al primo ordine in X è immediato per le componenti E_y ed E_z ; solo per la componente E_x è necessario espandere il denominatore, utilizzando $1/(L-x)^2 \simeq 1/L^2 + 2x/L^3 + \mathcal{O}(x^2)$. Come intuitivamente atteso l'equilibrio è instabile lungo x (la carica più vicina attrae più forte) e stabile lungo y e z (entrambe le cariche attraggono). Come vedremo in seguito, il fatto che $-4 + 2 + 2 = 0$ è il teorema di Gauss secondo cui il flusso di \mathbf{E} calcolato su di un cubetto attorno a 0 vale zero.

La fig. 1.1c indica che anche la carica di destra è in equilibrio instabile: verifichiamolo mediante un conto analitico. Attorno a P_2 il campo elettrico generato dalle altre due cariche vale, al primo ordine in $X - P_2$

$$\mathbf{E}(x, y, z) \stackrel{X \rightarrow P_2}{\simeq} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^3} \left(\frac{x-L}{4}, -\frac{y}{8}, -\frac{z}{8} \right)$$

chè è stabile lungo z ed y ma instabile lungo x . Nuovamente il flusso di \mathbf{E} calcolato su di un cubetto attorno a P_2 vale zero: $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$.

4) Proviamo a disporre quattro cariche: tre q ai vertici di un triangolo equilatero di lato L :

$$P_1 = L(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0), \quad P_2 = L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, 0), \quad P_3 = L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, 0),$$

Ciascuna risente una forza $F = 2 \cdot (kq^2/L^2)(\sqrt{3}/2)$ diretta verso l'esterno. In mezzo al triangolo (a distanza $d = L/\sqrt{3}$ dalle altre) il campo elettrico vale zero, quindi provo ad aggiungere una carica $q' = -q/\sqrt{3}$ in modo che le altre cariche risentano forza zero.

Da capo, abbiamo realizzato una situazione di equilibrio, ma si tratta di equilibrio instabile. Ad esempio il campo elettrico nel punto $X = (x, y, z) \approx 0$ vicino all'origine è

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\mathbf{X} - \mathbf{P}_i}{|\mathbf{X} - \mathbf{P}_i|^{3/2}} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{9\sqrt{3}}{L^3} \left(-\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}, z \right) + \mathcal{O}(x, y, z)^2$$

che è instabile nel piano (x, y) e stabile lungo la direzione z . In pratica uno può calcolare le componenti meno laboriose E_z ed E_y , ed ottenere E_x sapendo che il flusso vale zero: infatti si ha $-1/2 - 1/2 + 1 = 0$.

Il campo elettrico attorno alla carica 1 è

$$\mathbf{E} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L^3} \left(-\frac{5}{2}x, \frac{7}{2}(y - P_1^y), -z \right)$$

che è stabile lungo z e lungo x ma non lungo y . Di nuovo il flusso su di un cubetto attorno alla carica 1 vale zero.

È importante notare che per altri potenziali $\varphi \propto 1/r^p$ con $p \neq 1$ sarebbe possibile costruire sistemi stabili. Nel caso speciale di interesse fisico, $\varphi \propto 1/r$, *il problema non ha soluzione*, in quanto il fenomeno che abbiamo verificato è del tutto generale: il flusso del campo elettrico generato dalle cariche esterne ad una superficie chiusa è zero. Seguirà dal teorema di Gauss, ma per ora lo si può dimostrare in generale espandendo il campo generato da una singola carica q — il campo di tante cariche è la sovrapposizione dei campi delle singole cariche, ciascuna delle quali dà flusso zero. Mettendo la carica q in $(0, 0, 0)$, nella regione attorno a $\mathbf{r} = (r, 0, 0) + (x, y, z)$ si ha

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^p} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^{p-1}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} (1-p)x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^2, y^2, z^2) \right]$$

che per il valore fisico $p = 3$ ha flusso zero. Quindi il campo elettrico non può essere solo entrante o solo uscente, come sarebbe necessario per avere una forza attrattiva in qualunque direzione.

Visto il problema generale all'ordine lineare si può cercare di bypassarlo cercando equilibri stabili basati su termini di ordini più alti.

- 5) Come tentativo in questa direzione, limitiamoci a provare a stabilizzare una sola carica assumendo che altre cariche siano magicamente stabilizzate. Ad esempio, mettiamo una carica q al centro di un cubo di lato L ai cui vertici ci sono cariche q . La speranza è che ad ogni spostamento dal centro la forza repulsiva delle altre cariche la respinga verso il centro. Questo è vero per spostamenti in direzione delle cariche, ma per spostamenti ad esempio verso una faccia l'equilibrio risulta invece essere instabile:

$$V(x, y=0, z=0) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{\sqrt{L^2/2 + (x+L/2)^2}} + \frac{4}{\sqrt{L^2/2 + (x-L/2)^2}} \right), \quad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \underset{x \rightarrow 0}{\simeq} \frac{896q^2x^3}{81\sqrt{3}L^5\pi\epsilon_0}.$$

All'ordine lineare non c'è problema (viene zero); ma espandendo ad ordini alti (o più semplicemente plottando V) si nota il problema.

Il teorema di Gauss mostrerà in generale che non esistono sistemi statici stabili. Sistemi dinamici stabili (analoghi a sistemi di pianeti) verranno esclusi alla fine del corso dall'irraggiamento, e comunque con più di due corpi avrebbero problemi di meta-stabilità. Quindi *l'elettromagnetismo da solo non può spiegare la stabilità degli atomi e della materia*. Tuttavia, gli esercizi precedenti mostrano che la forza di Coulomb spiega qualitativamente le caratteristiche degli atomi e della materia, se uno fissa a mano il valore misurato della dimensione a degli atomi. Tuttavia, la forza di Coulomb predice anche che la materia dovrebbe collassare verso $a \rightarrow 0$. Il mistero sarà risolto dalla meccanica quantistica, che spiegherà la stabilità della materia rimpiazzando le particelle puntiformi con onde. Questo eviterà anche il rabberciamento di dover calcolare la forza su di una carica come $q\mathbf{E}$ con \mathbf{E} calcolato escludendo la carica q stessa, per evitare un infinito.

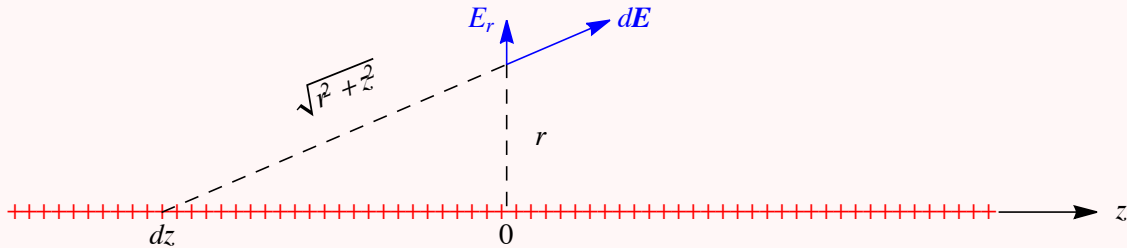
Esercizio 1.15: Campo elettrico di un filo

Calcolare il campo elettrico ed il potenziale elettrico di un filo rettilineo infinito con densità lineare di carica λ costante.

✚Soluzione: Mettendo il filo lungo l'asse z , la simmetria per rotazioni (attorno all'asse z), per traslazioni (lungo l'asse z) e per riflessione (attorno al piano xy) implica che il campo elettrico ha solo una componente radiale $E_r(r)$ dove $r^2 = x^2 + y^2$.

- 1) Un primo modo di calcolare $E_r(r)$ è integrare in $dq = \lambda dz$ i contributi dei singoli tratti di filo. La distanza vale $d^2 = r^2 + z^2$ ed il fattore angolare vale $\cos \theta = r/d$, ottenendo

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dz \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$



- 2) Un secondo modo è calcolare il potenziale elettrico φ e poi farne il gradiente per ottenere $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Il potenziale elettrico è scalare, per cui il conto è più facile, ma il risultato è infinito:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\lambda}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \infty.$$

L'infinito è evitato considerando un più realistico filo di lunghezza finita 2ℓ compreso fra $-\ell < z < +\ell$. Ma questo complica la geometria: si è persa la simmetria per traslazioni lungo z , e ora φ dipende anche da z

$$\varphi(z, r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\ell-z}^{+\ell-z} dz' \frac{\lambda}{\sqrt{r^2 + z'^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(z' + \sqrt{z'^2 + r^2}) \Big|_{-\ell-z}^{+\ell-z}.$$

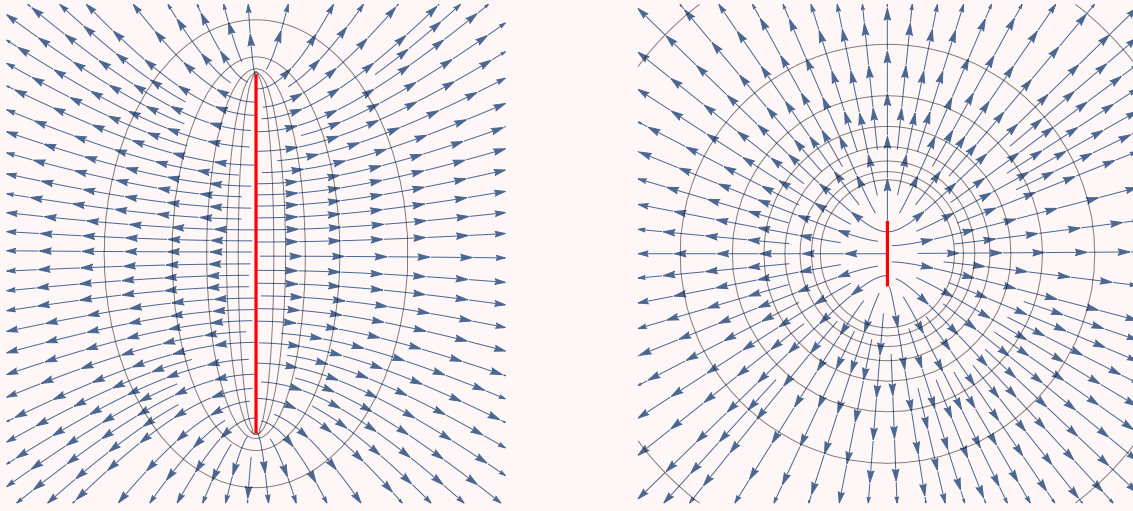


Figura 1.2: Linee di campo elettrico e superfici equipotenziali generate da un filo finito uniformemente carico di lunghezza ℓ . A distanze molto maggiori di ℓ si riduce ad una carica puntiforme.

È istruttivo considerare il limite $\ell \ll r, z$, per cui

$$\varphi(z, r) \stackrel{\ell \ll z, r}{\simeq} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + z^2}} \left(1 + 0 \frac{\ell}{d} - \frac{\ell^2}{6} \frac{r^2 - 2z^2}{(r^2 + z^2)^2} + \mathcal{O}(\ell^4) \right)$$

dove $Q = 2\ell\lambda$ è la carica totale del filo; il primo termine corrisponde alla carica totale ed il termine successivo sarà detto ‘di quadrupolo’ (il dipolo vale zero).

Tornando al campo elettrico, la componente lungo z

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + (z - \ell)^2}} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + (z + \ell)^2}}$$

si cancella nel limite $\ell \rightarrow \infty$. La componente radiale

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\lambda r/4\pi\epsilon_0}{\sqrt{r^2 + (z - \ell)^2} \left(\sqrt{r^2 + (z - \ell)^2} - z + \ell \right)} - \frac{\lambda r/4\pi\epsilon_0}{\sqrt{r^2 + (z + \ell)^2} \left(-\sqrt{r^2 + (z + \ell)^2} + z + \ell \right)} \stackrel{\ell \gg r}{\simeq} \frac{\ell}{2\pi\epsilon_0 r}$$

può essere calcolata facendo il limite $\ell \rightarrow \infty$. Ma il conto, fatto in questo modo, è inutilmente complicato.

- 2') Visto che abbiamo inavvertitamente calpestato un ostacolo interessante, è utile ripartire dal filo infinito e cercare di capire perché per $\ell = \infty$ viene $\varphi = \infty$. Il motivo è semplice: avendo cariche all'infinito non è possibile mettere $\varphi(\infty) = 0$. Ma questa è solo una convenzione: il potenziale è definito a meno di una costante additiva, e ci siamo complicati la vita inutilmente a sceglierla infinita. L'integrale divergente non è un problema, in quanto può essere ‘rinormalizzato’ ottenendo risultati finiti per quantità fisiche. Scegliendo un punto di riferimento arbitrario r_0 , la differenza di potenziale ha significato fisico e viene finita:

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \right] = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{costante}.$$

Per motivi dimensionali, l'integrale adimensionale doveva venire proporzionale ad una funzione $f(r/r_0)$ tale che una variazione di r_0 corrisponde a variare $\varphi(r)$ di una costante: ed infatti è venuto il logaritmo. Volendo è possibile fissare $\varphi(r_0) = 0$. Il potenziale coincide con l'integrale del campo elettrico calcolato al punto 1).

- 3) Infine, il campo elettrico può essere calcolato applicando il teorema di Gauss $\Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$ ad un cilindro immaginario di raggio r ed altezza h centrato sull'asse z :

$$\Phi_E = 2\pi r h E_r, \quad Q_{\text{in}} = \lambda h \quad \Rightarrow \quad E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Un commento off-topic: se il mondo avesse 2 dimensioni invece di 3, questi sarebbero il campo ed il potenziale di Coulomb. Verificherebbero ancora $\nabla^2\varphi = 0$. Siccome φ cresce per $r \rightarrow \infty$, in 2 dimensioni non esisterebbero cariche libere.

Esercizio 1.16: Campo elettrico di un piano

Calcolare il campo elettrico di un piano infinito con densità superficiale di carica σ costante.

▲Soluzione: Come nell'esercizio precedente il calcolo può essere effettuato in diversi modi, e può convenire considerare un piano circolare di raggio R finito, da far poi tendere ad infinito. Utilizziamo coordinate cilindriche con nomi inusuali r, ρ, θ : r è la coordinata perpendicolare al piano (con $r > 0$ sopra e $r < 0$ sotto), e ρ è la distanza rispetto all'asse. Quindi la superficie infinitesima vale $dS = \rho d\theta d\rho$.

- 1) **Integrazione diretta.** Passiamo attraverso il campo generato da un cerchio di raggio R , e calcoliamo \mathbf{E} lungo l'asse. Per motivi di simmetria \mathbf{E} ha solo la componente ortogonale al piano, che chiameremo $E_r(r)$.

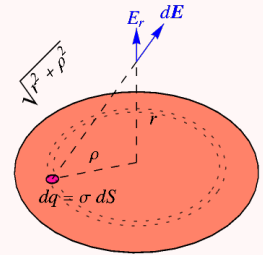
$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R 2\pi\rho d\rho \frac{\sigma r}{(r^2 + \rho^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\text{sign } r - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right) \stackrel{R \rightarrow \infty}{=} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign } r.$$

Nel limite $R \gg r$ si ottiene il piano carico infinito: $|E_r(r)| = \sigma/2\epsilon_0$.

È interessante anche considerare il limite opposto, $r \ll R$, in cui si ottiene

$$E_r \stackrel{R \ll r}{\simeq} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 - \frac{3R^2}{4r^2} + \mathcal{O}(R^4) \right].$$

Questa espansione è un caso particolare della teoria generale dell'espansione in multipoli: il termine dominante è il monopolo ($\mathbf{E} \simeq Q\hat{\mathbf{r}}/r^3$ dove $Q = \pi R^2\sigma$ è la carica totale), il termine successivo è il dipolo (che vale zero in questo caso), e poi il quadrupolo, etc.



La figura fig. 1.3a mostra il risultato numerico per il campo fuori dall'asse.

- 2) Il **potenziale** lungo l'asse di un disco uniformemente carico di raggio R a distanza r dal disco vale

$$\varphi(r, 0) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + r^2} - \sqrt{r^2}) \simeq \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{R^2}{4r^2} + \mathcal{O}(R^4) \right) & R \ll r \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (R - |r| + \mathcal{O}(r^2/R)) & R \gg r. \end{cases}$$

Analogamente all'esercizio precedente, la costante infinita che compare per $R \rightarrow \infty$ non ha significato fisico. Quindi, per un piano infinito si ha $\varphi(r) - \varphi(0) = -|r|\sigma/2\epsilon_0$, da cui si riottiene $E_r(r) = (\sigma/2\epsilon_0) \times \text{sign } r$.

- 3) Il **Teorema di Gauss** dice che $\Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$. Consideriamo un problema più generale: una superficie di forma arbitraria con densità di carica variabile σ . Scegliendo come superficie un cilindretto 'schiacciato' di area infinitesima S e di altezza h tale che la superficie laterale è molto minore di S , che attraversa la superficie ed è ad essa ortogonale si ottiene

$$\Phi_E = S(E_{\perp}^1 - E_{\perp}^2) = S\sigma/\epsilon_0$$

dove $E_{\perp}^{1,2}$ sono la componente del campo elettrico ortogonale alla superficie, sopra e sotto ad essa. Tornando al piano infinito, considerazioni di simmetria implicano che il campo elettrico è solo perpendicolare, e $E_{\perp}^1 = E_r(r) = -E_{\perp}^2$: si riottiene il risultato precedente.

Esercizio 1.17: Campo elettrico di un guscio sferico

Calcolare il campo elettrico generato da una densità superficiale di carica $\sigma = Q/4\pi R^2$ distribuita su di un guscio sferico di raggio R .

✚Soluzione: Il teorema di Gauss $\Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$ fornisce immediatamente il risultato, applicandolo ad una superficie sferica di raggio r centrata sulla sfera

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E_r(r), \quad Q_{\text{in}} = \begin{cases} 0 & r < R \\ Q & r > R \end{cases}.$$

È possibile ottenere lo stesso risultato tramite un calcolo a testa bassa. Mettiamo la sfera nell'origine e calcoliamo \mathbf{E} in $\mathbf{X} = (r, 0, 0)$, scrivendo un punto sulla sfera come $P = R(\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi)$.

Per motivi di simmetria \mathbf{E} ha solo la componente radiale:

$$\begin{aligned} E_r &= E_x = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int dS \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{X}}}{|\mathbf{X} - \mathbf{P}|^{3/2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi R d\theta \, 2\pi R \sin \theta \frac{r - R \cos \theta}{(R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= \begin{cases} 0 & r < R \\ Q/4\pi\epsilon_0 r^2 & r > R \end{cases}. \end{aligned}$$

Newton, che non conosceva il teorema di Gauss, ritardò di 20 anni la pubblicazione dei Principia per inventare il calcolo integrale e riuscire a calcolare mediante integrazione diretta il campo gravitazionale sulla superficie della terra sferica, e verificare che è lo stesso campo che fa girare la Luna: entrambi i fenomeni dipendono solo da $G_N M_{\text{terra}}$ indipendentemente dalla distribuzione di densità della Terra. Grazie a questo risultato, due osservabili diverse (g ed il periodo di rotazione della luna) sono predette in termini di un parametro, testando sperimentalmente la teoria che unifica gravità terrestre con gravità celeste.

Esercizio 1.18: Campo elettrico di sfera

Calcolare il campo elettrico generato da una densità volumetrica di carica $\rho = Q/\frac{4}{3}\pi R^3$ distribuita in una sfera di raggio R .

✚Soluzione: Il teorema di Gauss $\Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$, applicato ad una superficie sferica di raggio r centrata sulla sfera

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E_r(r), \quad Q_{\text{in}} = \begin{cases} Q(r/R)^3 & r < R \\ Q & r > R \end{cases}$$

fornisce

$$E_r(r) = \begin{cases} Qr/4\pi\epsilon_0 R^3 & r < R \\ Q/4\pi\epsilon_0 r^2 & r > R \end{cases}.$$

Il campo elettrico è continuo sulla superficie della sfera, in quanto non la densità superficiale di carica è zero. Inoltre, il campo elettrico esterno è uguale a quello che sarebbe generato da una carica puntiforme Q nel centro della sfera.

Esercizio 1.19: Terrapiattismo vs terrasferismo

Calcolare lo spessore h della terra piatta o il raggio R della terra sferica, assumendo che abbia densità $\rho = 5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, campo gravitazionale $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

✚Soluzione: Nei due casi

$$g = \begin{cases} 4\pi\rho GR/3 & \text{ipotesi di Terra sferica} \\ 2\pi G\rho h & \text{ipotesi di Terra piatta} \end{cases}$$

Quindi la Terra piatta dovrebbe avere spessore $h = 2R/3 = 4200 \text{ km}$.

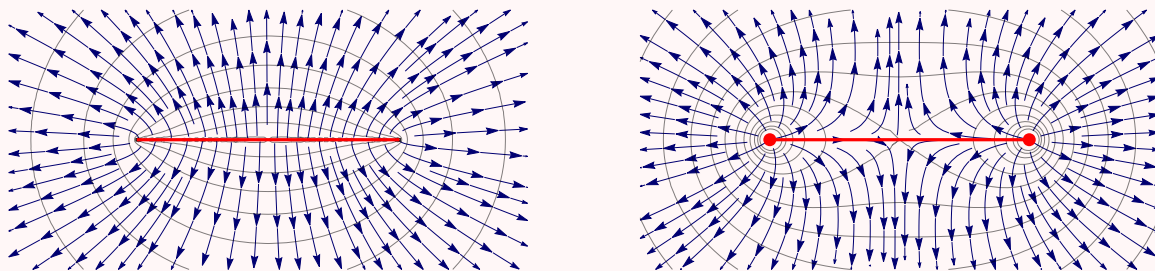


Figura 1.3: Linee di campo elettrico e superfici equipotenziali generate da un piatto piano circolare con densità di carica superficiale σ costante (a sinistra) e da un anello circolare con densità di carica lineare λ costante (a destra). Entrambi sono visti di taglio (linea rossa) e sono perpendicolari all'asse verticale.

Esercizio 1.20: Campo elettrico di un cilindro

Calcolare il campo elettrico generato da un cilindro di raggio R e lunghezza infinita contenente una densità volumetrica di carica ρ costante.

▲Soluzione: Utilizziamo il teorema di Gauss $\Phi_E = Q_{\text{tot}}/\epsilon_0$ considerando come superficie un cilindro di raggio r ed altezza arbitraria, trovando

$$E_r(r) = \begin{cases} r\rho/2\epsilon_0 & \text{per } r < R \\ R^2\rho/2r\epsilon_0 & \text{per } r > R \end{cases}.$$

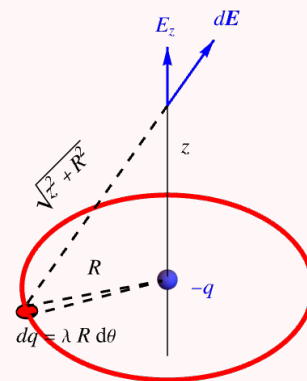
Il potenziale è definito da $E_r = -\partial\varphi/\partial r$. Essendo la sorgente di carica infinita, non è possibile mettere $\varphi = 0$ ad infinito. Come scelta alternativa, imponiamo $\varphi = 0$ lungo l'asse del cilindro. Quindi

$$\varphi(r) = -\begin{cases} r^2\rho/4\epsilon_0 & \text{per } r < R \\ R^2\rho(2\ln(r/R) + 1)/4\epsilon_0 & \text{per } r > R \end{cases}.$$

Esercizio 1.21: Anello circolare

Si consideri un anello sottile e circolare di raggio R , recante una densità lineare uniforme di carica positiva λ . Sull'asse passante per il centro dell'anello e ortogonale al piano di quest'ultimo, è vincolata a muoversi una particella di massa m e carica negativa $-q$. La particella è inizialmente ferma al centro dell'anello.

- Che velocità minima (velocità di fuga) bisogna dare alla particella affinché questa si allontani dall'anello senza più tornare indietro?
- Il centro dell'anello è un punto di equilibrio stabile per la particella? In caso affermativo, quale è la frequenza delle piccole oscillazioni?
- Il centro dell'anello è un punto di equilibrio anche in assenza del vincolo? Stabile?



▲Soluzione: Utilizzando la formula integrale per il campo elettrico, si trova che lungo l'asse z il campo elettrico ha solo una componente parallela all'asse, da cui è possibile calcolare il potenziale integrando:

$$E_z(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R z \lambda}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R \lambda}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Allo stesso potenziale si arriva immediatamente utilizzando la formula integrale per il potenziale.

a) Imponendo la conservazione dell'energia, $E(0) = E(\infty)$

$$E(z) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - q\varphi(z), \quad E(0) = \frac{m}{2} v_{\text{esc}}^2 - \frac{\lambda q}{2\epsilon_0}, \quad E(\infty) = 0$$

si trova la velocità di fuga $v_{\text{esc}} = \sqrt{\lambda q / m\epsilon_0}$.

b) Si ha $E_z = 0$ nel centro, che quindi è punto di equilibrio vincolato. L'equilibrio vincolato è stabile, con pulsazione ω delle piccole oscillazioni ottenuta espandendo l'equazione del moto $m\ddot{z} = qE_z$ per piccolo z :

$$\ddot{z} \simeq -\frac{q\lambda}{2mR^2\epsilon_0} z \equiv -\omega^2 z.$$

c) Per simmetria si ha $\mathbf{E} = 0$ nel centro, che quindi è punto di equilibrio. Il conto diretto del potenziale fuori dall'asse produce integrali troppo complicati; la figura fig. 1.3b mostra il risultato numerico. È possibile calcolare φ in un punto $X = (x, y, z)$ vicino all'origine, espandendo perturbativamente la distanza fra X ed i punti dell'anello $P = R(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ in serie di potenze di $x, y, z \ll R$:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{|P - X|} \simeq \frac{1}{R} + \frac{x \cos\theta + y \sin\theta}{R^2} + \frac{3 \cos(2\theta) (x^2 - y^2) + 6xy \sin(2\theta) + x^2 + y^2 - 2z^2}{4R^3} + \dots$$

Questo consente di fare l'integrale in $d\theta$ sull'anello: i termini con funzioni trigonometriche si mediano a zero, lasciando

$$\varphi(x, y, z) \simeq \frac{\lambda}{2\epsilon_0 R} \left[1 + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{4R^2} + \dots \right].$$

Il termine quadratico ha segni diversi: questo significa che l'equilibrio non è stabile lungo il piano orizzontale.

c') Allo stesso risultato si arriva con un trucco che diventerà standard e che utilizza il teorema di Gauss. Imponendo che il flusso del campo elettrico \mathbf{E} sia zero lungo un cilindretto infinitesimale di raggio r che va da z a $z + dz$ si trova una relazione fra $E_z(z)$ (già calcolato in precedenza) e la componente radiale $E_r(r)$ per piccolo r :

$$\Phi_E = \pi r^2 [E_z(z + dz) - E_z(z)] + 2\pi r dz E_r(r) = 0$$

e quindi

$$E_r(r) = -\frac{r}{2} \frac{dE_z}{dz} = -\frac{r\lambda}{4R^2\epsilon_0}.$$

Ciò significa che l'equilibrio non è stabile: un flusso entrante deve sempre essere compensato da un flusso uscente in altra direzione.

Esercizio 1.22: Esplosione Coulombiana ©

Una nuvola sferica di raggio R e carica totale Q è costituita da $N \gg 1$ particelle di carica $q = Q/N$ e massa m , inizialmente distribuite con densità uniforme.

a) Calcolare l'energia potenziale di una carica posta a distanza r dal centro della nuvola.

Per effetto della repulsione Coulombiana la nuvola inizia ad espandersi radialmente, mantenendo la simmetria sferica. Nel corso del moto radiale le particelle non si scavalcano, cioè se inizialmente due strati di particelle si trovano a distanze $r_1(0)$ e $r_2(0) > r_1(0)$ dal centro, ad ogni istante successivo $r_2(t) > r_1(t)$.

b) Sia $r = r(t)$ la posizione al tempo t delle particelle che all'istante iniziale $t = 0$ sono a distanza $r_0 = r(0) < R$ dal centro. Calcolare l'equazione del moto per $r = r(t)$.

c) Si dica a che distanza dal centro si trovano inizialmente le particelle che acquistano la massima energia cinetica durante l'espansione, e si dia il valore di tale energia massima.

d) Si mostri che ogni strato di particelle si muove secondo la legge oraria $r(t) = r_0 \lambda(t)$ dove $\lambda(t)$ non dipende da r_0 , e che di conseguenza la densità di carica rimane uniforme durante l'espansione della nuvola.

➤ **Soluzione:**

a) Il potenziale elettrico vale

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{r^2}{2R^3} + \frac{3}{2R} \right) & \text{per } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{per } r > R \end{cases}.$$

b) Poichè le particelle non si scavalcano, la carica contenuta entro una sfera di raggio $r(t)$ rimane costante, uguale a $Q_{\text{in}} = Q(r_0/R)^3$. Quindi la forza elettrica che appare nell'equazione del moto è la stessa generata da una carica Q_{in} a distanza $r(t)$:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{r_0}{R} \right)^3.$$

La soluzione analitica non è illuminante.

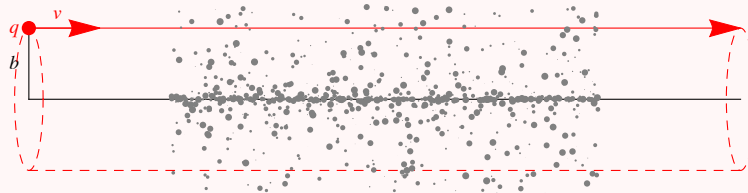
c) L'energia potenziale corrispondente all'equazione del moto è $U_{r_0} = (Q/4\pi\epsilon_0)(r_0/R)^3/r$. L'energia cinetica massima viene acquistata a distanza infinita ed è uguale a U_{r_0} , che è massima per le particelle sul bordo della sfera, ad $r_0 = R$.

d) Inserendo l'ansatz nell'equazione del moto si trova $d^2\lambda/dt^2 = qQ/4\pi\epsilon_0\lambda^2 R^2$ nella quale r_0 non compare più. Quindi la nuvola si dilata in modo omogeneo.

Esercizio 1.23: Scattering a piccolo angolo

Una carica q di massa m e velocità iniziale v attraversa con parametro di impatto b un sistema di cariche elettriche. Calcolare l'angolo di deflessione θ assumendo che sia piccolo (ovvero che la particella proceda quasi a velocità costante sulla traiettoria iniziale, cosa solitamente vera se ha alta energia) ed assumendo simmetria cilindrica (o che sia possibile osservare soltanto uno scattering medio, come capita in esperimenti che utilizzano un fascio di molte particelle) e che le cariche urtate vengano perturbate poco dal passaggio di q .

4Soluzione: L'angolo di deflessione è misurabile macroscopicamente, e contiene informazioni sulla forma microscopica delle cariche che hanno generato la deflessione. Una formula generica è ottenuta notando che l'integrale lungo la traiettoria rettilinea che dà la variazione totale dell'impulso della carica ortogonale alla sua direzione iniziale del moto può essere trasformato in un integrale del flusso di E attraverso il cilindro immaginario disegnato in figura



calcolabile in generale mediante il teorema di Gauss:

$$\theta(b) = \frac{\Delta p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{\int F_{\perp} dx/v}{mv} = \frac{1}{mv^2} \frac{q}{2\pi b} \int E_{\perp} dS = \frac{qQ(r < b)}{4\pi\epsilon_0 b K} \ll 1 \quad K \equiv \frac{m}{2} v^2$$

Quindi misurando $\theta(b)$ si fa una tomografia della distribuzione di cariche. Ad esempio, se Q è puntiforme si ha $Q(r < b) = Q$ e quindi $\theta \propto 1/b$: in tal caso la cosa più spettacolare è che esistono urti a grande angolo: come calcolato nell'esercizio successivo la formula completa è ottenuta rimpiazzando $\theta \rightarrow 2 \tan \theta/2$. Il che significa che (lo studente di) Rutherford si beccò delle particelle α addosso.¹

¹ Questa scoperta uccise Rutherford, ma in modo indiretto. Infatti fu prima nominato barone. Pertanto, quando molti anni dopo si ammalò di ernia, non potendo venire operato da un plebeo, dovette aspettare l'arrivo un medico dotato di titolo nobiliare e morì nell'attesa, ricevendo l'onore di venire sepolto a Westminster.

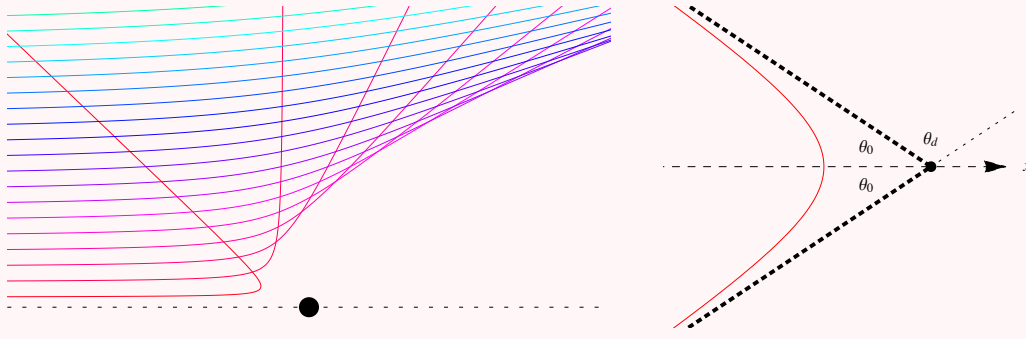


Figura 1.4: **Sinistra:** traiettorie per urti fra particelle α su nucleo pesante con diversi parametri di impatto. **Destra:** geometria per il conto esplicito.

Esercizio 1.24: Scattering Rutherford

Una particella α di massa $m \gg m_e$, carica $+2e$, ed energia $E = 4 \text{ MeV}$ viene fatta collidere su atomi contenenti nuclei di carica Ze e massa $m_N \gg m$. Calcolare l'angolo di deflessione in funzione del parametro d'impatto $b \ll \text{\AA}$ e la sezione d'urto.

▲Soluzione: Siccome $m \gg m_e$ ed $E \gg$ (energia di ionizzazione) gli Z elettroni hanno effetto trascurabile, se la particella α entra nella zona $b \ll \text{\AA}$ dove gli elettroni non schermano il nucleo. Conta solo il nucleo, che approssimativamente rimane fermo. Facciamo il conto in 3 modi.

1. Usando le note formule per le orbite dei pianeti. Tenendo conto che in questo caso la forza è repulsiva e può essere scritta come $F = \alpha/r^2$ con $\alpha = 2Ze^2/4\pi\epsilon_0$ si ha l'orbita

$$r = -\frac{\ell}{1 + \mathcal{E} \cos \theta} \quad \text{con eccentricità} \quad \mathcal{E}^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2 m} = 1 + \frac{m^2 v^4 b^2}{\alpha^2}.$$

La regione fisica $r > 0$ corrisponde a $\cos \theta < -1/\mathcal{E}$ (il segno non è importante). In termini dell'angolo limite θ_0 tale che $\cos \theta_0 = -1/\mathcal{E}$, l'angolo di deflessione $\theta_d = \pi - 2\theta_0$ vale

$$\sin \frac{\theta_d}{2} = \cos \theta_0 = -\frac{1}{\mathcal{E}} \quad \text{o anche} \quad \tan \frac{\theta_d}{2} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - 1}} = \frac{\alpha}{bmv^2}.$$

Il parametro d'impatto che produce un dato angolo di deflessione θ_d è

$$b = \frac{\tilde{b}}{\tan(\theta_d/2)} \quad \text{dove} \quad \tilde{b} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} = 10^{-13} \text{ m} \frac{Z}{70} \frac{\text{MeV}}{E}.$$

2. Integrando direttamente l'equazione della traiettoria. Usiamo coordinate polari (r, θ) e mettiamo l'asse x lungo l'asse di simmetria, come in fig. 1.4b. L'equazione del moto è

$$m\dot{v}_x = \frac{\alpha}{r^2} \cos \theta = m \frac{\alpha}{L} \dot{\theta} \cos \theta$$

dove $L = mr^2\dot{\theta}$ è il momento angolare rispetto al nucleo. È una costante del moto, con valore iniziale $L = mv_0 b$. Avendo assunto una forza $F \propto 1/r^2$ è sparita la dipendenza da r nell'equazione del moto, che può essere integrata ottenendo $v_x(\theta) = (\alpha/L) \sin \theta$ e quindi $v = v_x / \cos \theta = (\alpha/L) \tan \theta$. Valutando questa soluzione all'istante finale, in cui $v = v_0$ e $\theta = \theta_0$, si ottiene il valore dell'angolo di uscita: $\tan \theta_0 = mv_0^2 b / \alpha$. Si ri-ottiene quindi $b = \alpha / mv_0^2 \tan(\theta_d/2)$, tenendo conto che l'angolo di deflessione è $\theta_d = \pi - 2\theta_0$, e quindi $\tan \theta_0 = 1 / \tan(\theta_d/2)$.

3. Approssimazione perturbativa. La si ottiene mettendo $Q(r < b) = Ze$ nell'esercizio precedente. O ripetendo il calcolo per una carica puntiforme:

$$\frac{dp_\perp}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dp_\perp}{dt} \simeq \frac{1}{v_0} F_\perp = \frac{1}{v_0} \frac{\alpha}{r^2} \frac{b}{r} = \frac{\alpha/v_0}{(x^2 + b^2)^{3/2}}$$

da cui

$$\theta_d = \frac{\Delta p_\perp}{p_\parallel} = \frac{\alpha b}{mv_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{2\alpha}{bm v_0^2}$$

che riproduce il risultato completo nel limite $\theta_d \ll 1$.

Il parametro d'impatto in un singolo urto non è misurabile sperimentalmente. In pratica, è possibile misurare la distribuzione statistica degli angoli di deflessione in un grande numero di urti con parametri di impatto casuali. La meccanica quantistica fornisce predizioni intrinsecamente probabilistiche che, per la forza di Coulomb, sono uguali a quelle classiche. Il confronto fra teoria ed esperimento viene fatto definendo e misurando la *sezione d'urto* su singolo nucleo

$$\sigma \equiv \frac{\text{numero di particelle deflesse}}{\text{flusso di particelle incidenti}}.$$

σ caratterizza gli effetti misurabili prodotti da un nucleo; spetta allo sperimentale tenere conto che i nuclei sono tanti, che ci possono essere scattering multipli, etc. σ ha la dimensione di un'area, e dice quanto è grosso un nucleo, quando viene misurato tramite interazioni elettromagnetiche. La sezione d'urto totale per eventi con angolo di deflessione maggiore di un qualunque valore θ è

$$\sigma(\theta_d > \theta) = \pi b^2(\theta) = \pi \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\tan^2 \theta/2}.$$

Ad esempio $\sigma(\theta_d > \pi/2)$ dice quante particelle rimbalzano all'indietro. Di solito si descrive lo scattering usando la *sezione d'urto differenziale*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{numero di particelle deflesse in } d\Omega}{\text{flusso di particelle incidenti}} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{4} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

avendo scritto l'angolo solido in coordinate polari $d\Omega = d\varphi d\cos\theta = 2\pi d\cos\theta$ e tenuto conto che lo scattering non dipende dall'angolo polare φ .

La sezione d'urto totale è $\sigma = \int d\sigma = \infty$ in quanto l'integrale diverge a $\theta \rightarrow 0$. Questo accade in quanto l'elettromagnetismo è una interazione a lungo raggio,² che deflette tutte le particelle, anche quelle con grande parametro di impatto b .

²Per confronto, una particella massiva medierebbe una forza a corto raggio, detta 'di Yukawa' $F \propto \alpha e^{-r/r_0}/r^2$ (dove $m \propto 1/r_0$). Essa darebbe, in approssimazione perturbativa $\theta_d \sim \theta_d^{\text{Coulomb}} e^{-b/r_0}$ e quindi sezione d'urto totale finita, $\sigma(\theta > 0) \propto r_0^2$.

Energia elettrostatica

L'energia elettrostatica U e la sua densità u valgono

$$U = \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \int dV_1 dV_2 \frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} = \frac{1}{2} \int dV \rho \varphi = \int dV u \quad u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2.$$

Esercizio 2.1: Energia del sale

Un cristallo di cloruro di sodio (NaCl o sale) può essere visto, come illustrato in fig. 2.1, come un reticolato cubico di lato $2a$ ripetuto avente ioni Na^+ e ioni Cl^- alternati, in quanto il Cl tende ad attrarre un elettrone dal Na. In maniera più pedante, Na^+ stanno nel centro di ogni lato e di ogni cubo, ed i Cl^- su ogni spigolo e nel centro di ogni faccia. Ogni ione è approssimativamente sferico e quindi può essere approssimato come puntiforme. Calcolare l'energia elettrostatica.

➤Soluzione: Con un po'di pazienza uno vede che ogni ione ha la stessa energia: nessuno ha una posizione privilegiata. Infatti il segno della carica in un punto (x, y, z) è dato dalla parità di $x + y + z$ in unità di a . Lo stesso sistema può anche essere descritto come un cubo di lato a , ripetuto a meno di una riflessione.

Quindi possiamo calcolare l'energia totale come N per l'energia di un singolo ione, ad esempio quello positivo messo al centro del cubo:

$$U = \frac{N}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{(+e)q_i}{r_i} = \frac{N}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\overbrace{-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots}^{-2.13e^2/a} \right] = -1.748 \frac{Ne^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

dove il primo pezzo è dato dai 6 ioni Cl^- a distanza a (nel centro di ogni faccia); il secondo dai 12 Na^+ a distanza $\sqrt{2}a$ (nel centro di ogni lato); il terzo dagli 8 Cl^- a distanza $\sqrt{3}a$ (sugli spigoli); e gli altri termini (che diventano progressivamente più piccoli) possono essere dati in pasto ad un computer:

$$\sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m \sum_{z=-m}^m \frac{\text{If}[\text{EvenQ}[x+y+z], 1, -1]}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \begin{cases} -1.51 & \text{per } m = 2 \text{ cubi} \\ -1.61 & \text{per } m = 4 \text{ cubi} \\ -1.69 & \text{per } m = 10 \text{ cubi} \\ -1.74 & \text{per } m = 50 \text{ cubi} \end{cases}$$

Notare che viene $U \propto N$ (due litri di benzina costano il doppio di un litro in quanto hanno il doppio di energia di un litro, non il quadruplo) perchè abbiamo assunto carica totale zero, altrimenti sarebbe venuta una energia enorme $U \propto N^2$. Inoltre, come atteso per motivi dimensionali, viene $U \propto -1/a$: il potenziale classico non è stabile. Per via del segno negativo il minimo è a $a \rightarrow 0$: la meccanica quantistica interviene a piccole distanze. Se il segno fosse stato $U \propto +1/a$, il sale si sarebbe dissolto ad $a \rightarrow \infty$, come accade nell'acqua.

Esercizio 2.2: Forza su cariche superficiali

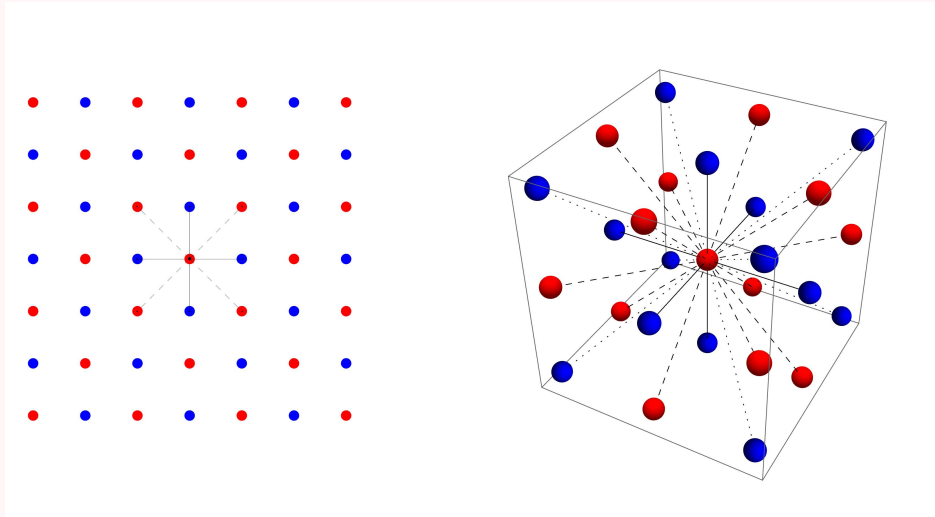


Figura 2.1: Reticolo Na^+Cl^- : sezione bidimensionale e cella tridimensionale.

Dimostrare che una generica densità di carica superficiale σ induce una variazione $E_{\perp 1} - E_{\perp 2} = \sigma/\epsilon_0$ nella componente del campo elettrico ortogonale alla superficie, e subisce una forza $\mathbf{F} = \sigma(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)/2$.

✚Soluzione: Applicando il teorema di Gauss ad un cilindretto schiacciato infinitesimo che attraversa perpendicolarmente la superficie si ottiene la variazione di E_{\perp} . E_{\parallel} è continuo.

Per ricavare la formula secondo cui la forza è data dal campo elettrico medio sui due lati occorre abbandonare l'idealizzazione di superficie di spessore zero, e studiare cosa accade dentro un piccolo spessore finito. Chiamando z l'asse \perp alla superficie si ha $dE_z/dz = \rho/\epsilon_0$: questa relazione si ottiene applicando il teorema di Gauss ad un cilindretto ortogonale alla superficie, o anche notando che è la prima equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ nel caso in cui \mathbf{E} ha solo una componente lungo z e dipende solo da z . Integrando in dz si riottiene $E_{z2} - E_{z1} = \sigma/\epsilon_0$ con $\sigma = \int \rho dz$: la densità superficiale è vista come integrale di una densità volumetrica. La pressione, ovvero la forza per unità di superficie, vale:

$$p_z = \frac{dF_z}{dS} = \int E_z \rho dz = \epsilon_0 \int E_z \frac{dE_z}{dz} dz = \epsilon_0 \frac{E_{z2}^2 - E_{z1}^2}{2} = u_2 - u_1 = \sigma \frac{E_{z2} + E_{z1}}{2} = \sigma E_z^{\text{ext}}$$

La media geometrica viene per un motivo fisico semplice: in base al principio di azione e reazione la forza *deve* essere generata solo dal campo elettrico 'esterno', non da quello generato dalla densità superficiale σ stessa.

Esercizio 2.3: Energia di un guscio sferico

Calcolare l'energia elettrostatica di un palloncino sferico di raggio R contenente una carica Q uniformemente distribuita sulla superficie usando a) $U = \int dV u = \frac{1}{2} \int dV \epsilon_0 E^2$; b) $U = \frac{1}{2} \int dq \varphi$. c) Calcolare il lavoro necessario per comprimere il palloncino da un raggio R_1 ad R_2 , verificando che è uguale alla variazione di energia elettrostatica.

✚Soluzione:

a) Inserendo il campo elettrico radiale

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{dentro, } r < R, \\ Q/4\pi\epsilon_0 r^2 & \text{fuori, } r > R \end{cases}$$

(notare che $E_r(R^+) - E_r(R^-) = \sigma/\epsilon_0$, in accordo con Gauss) si ottiene

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty 4\pi r^2 E^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

b) Tutte le cariche sono sulla superficie allo stesso potenziale $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 R$, quindi

$$U = \frac{\varphi}{2} \int dq = \frac{\varphi Q}{2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

- c) La conservazione dell'energia impone che il lavoro compiuto è uguale alla variazione di energia elettrostatica. Le cariche si respingono: in generale una densità di superficie risente una pressione $\wp = \sigma \mathbf{E}_{\text{medio}}$ dove $\mathbf{E}_{\text{medio}} = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)/2$. In questo caso il campo interno è zero e $\sigma = Q/4\pi R^2$. Per comprimere da R_1 ad R_2 occorre esercitare un lavoro

$$\mathcal{L} = \int_{R_1}^{R_2} dR \int dS \wp = \int_{R_1}^{R_2} \pi R^2 \sigma(R) \frac{E_r(R)}{2} dR = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.1)$$

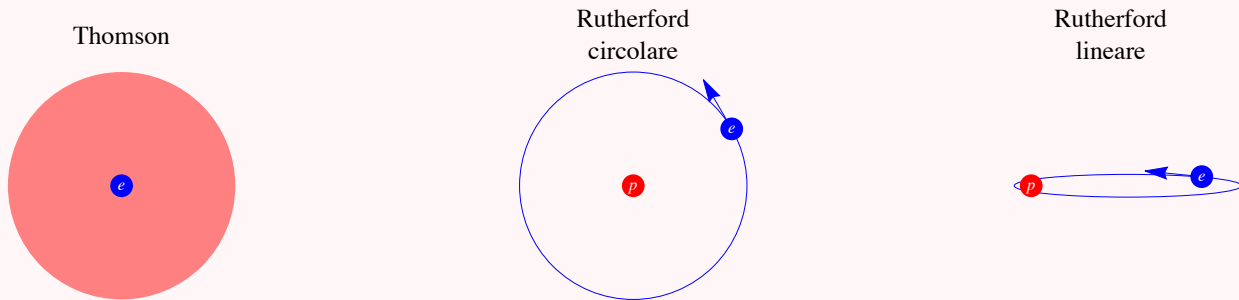
Allo stesso risultato si arriva senza fare conti notando che $\wp = \epsilon_0 E_r^2/2 = u$, arrivando quindi allo stesso integrale sul volume che compare in U :

$$\mathcal{L} = \int_{R_1}^{R_2} dR \int dS \wp = \int_{R_1}^{R_2} dV u.$$

Esercizio 2.4: Modelli dell'atomo di idrogeno

Nel modello di Thomson per l'atomo di idrogeno, la carica positiva e è distribuita uniformemente in una sfera di raggio a_0 . L'elettrone di carica $-e$ e massa $m_e \ll m_p$ è considerato puntiforme e si muove all'interno della sfera.

Nel modello di Rutherford per l'atomo di idrogeno la carica positiva (protone) è concentrata nel centro. L'elettrone di carica $-e$ e massa $m_e \ll m_p$ gli orbita attorno su di una circonferenza di raggio a_0 . Si consideri anche il limite opposto con momento angolare zero.



In ciascun modello calcolare:

- Il campo elettrico ed il potenziale generati dalla carica positiva e la posizione d'equilibrio per l'elettrone (assunto in uno stato di momento angolare nullo).
- L'energia di ionizzazione U_I (ovvero l'energia necessaria ad estrarre l'elettrone dall'atomo). Trovare il valore di a_0 consistente col valore sperimentale $U_I = 2.18 \times 10^{-18}$ Joule = 13.6 eV.
- Il periodo di oscillazione dell'elettrone intorno alla posizione d'equilibrio e confrontarlo col valore sperimentale $T = 3.04 \times 10^{-16}$ sec⁻¹.
- La polarizzabilità α dell'atomo, definita da $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{ext}}$, dove \mathbf{E}_{ext} è un campo elettrico esterno e \mathbf{p} il momento di dipolo elettrico indotto.

➤ Soluzione: Nel modello di Thomson:

- a) Il campo elettrico è radiale e l'elettrone ha una posizione di equilibrio stabile in $r = 0$:

$$E_r(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} r/a_0^3 & r < a_0 \\ 1/r^2 & r > a_0 \end{cases}, \quad \varphi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} (3/2 - r^2/2a_0^2)/a_0 & r < a_0 \\ 1/r & r > a_0 \end{cases}.$$

- b) L'energia di ionizzazione vale $U_I = -e\varphi(0) = 3e^2/8\pi\epsilon_0 a_0$.

- c) Risolvendo l'equazione del moto $\ddot{r} = -\frac{e}{m_e} \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a_0^3} = -\omega^2 r$ si trova $\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0^3}$ da cui $T = 2\pi/\omega$.
- d) In presenza del campo esterno, l'elettrone ha una nuova posizione d'equilibrio nel punto $r = r_{\text{eq}}$ in cui $\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$. Quindi $\mathbf{r}_{\text{eq}} = -4\pi\epsilon_0 a_0^3 \mathbf{E}_0/e$; $\mathbf{p} = e\mathbf{r}_{\text{eq}} = \alpha \mathbf{E}_0$ con $\alpha = 4\pi\epsilon_0 a_0^3$.

Nel modello di Rutherford con orbita circolare:

- a) Il campo elettrico è quello di una carica puntiforme $E_r(r) = e/4\pi\epsilon_0 r^2$, $\varphi(r) = e/4\pi\epsilon_0 r$.
- b) L'energia di ionizzazione vale

$$U_I = -\frac{m_e v^2}{2} - \varphi(a_0) = \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}.$$

- c) Si ha

$$\omega^2 = \frac{v^2}{a_0^2} = \frac{F/m_e}{a_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0^3}.$$

- d) Assumendo che il campo esterno sia lungo z , ortogonale al piano dell'orbita nel piano xy , l'elettrone può fare un'orbita circolare ad un valore di $z \ll a_0$ tale che $0 = F_z = -e(E_{\text{ext}} + ez/4\pi\epsilon_0 a_0^3)$ da cui $\alpha = p/E_{\text{ext}} = -ez/E_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 a_0^3$.

L'atomo di idrogeno è descritto dalla versione quantistica dell'atomo di Rutherford, in cui il raggio di Bohr vale $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2/m_e e^2 = 0.53 \text{ \AA}$. Lo stato base è sferico, con momento angolare zero: per cui un'orbita lineare sarebbe una migliore approssimazione classica. Nel modello di Rutherford con orbita lineare:

- b) L'energia di ionizzazione è uguale al potenziale nel punto di massima distanza, che chiamiamo a_0 : $U_I = e^2/4\pi\epsilon_0 a_0$.
- c) Calcoliamo il periodo usando la conservazione dell'energia, $\frac{1}{2}m_e v^2 = e^2(1/r - 1/a_0)/4\pi\epsilon_0$:

$$T = \int dt = 2 \int_0^{a_0} \frac{dr}{v}, \quad \omega^2 = \frac{2\pi}{T} = \frac{8e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e a_0^3}.$$

- d) La media temporale di r vale $\langle r \rangle = \frac{3}{4}a_0$. Aggiungendo un campo elettrico esterno (assunto essere parallelo alla direzione dell'orbita lineare), e mediando sulle due possibili orientazioni, dopo un conto con integrali non istruttivi, si ottiene la polarizzabilità $\alpha = 4\pi\epsilon_0 \frac{25}{32} a_0^3$.

Riassumendo:

Modello	Energia di legame U_I	Pulsazione ω^2	Polarizzabilità α
Thomson	$3e^2/8\pi\epsilon_0 a_0$	$e^2/4\pi\epsilon_0 m_e a_0^3 = \frac{8}{27}\omega_0^2$	$4\pi\epsilon_0 a_0^3 = \frac{27}{2}\alpha_0$
Rutherford circolare	$e^2/8\pi\epsilon_0 a_0$	$e^2/4\pi\epsilon_0 m_e a_0^3 = 8\omega_0^2$	$4\pi\epsilon_0 a_0^3 = \frac{1}{2}\alpha_0$
Rutherford lineare	$e^2/4\pi\epsilon_0 a_0$	$8e^2/4\pi\epsilon_0 m_e a_0^3 = 8\omega_0^2$	$4\pi\epsilon_0 \frac{25}{32} a_0^3 = \frac{25}{8}\alpha_0$
Quantistico	$e^2/8\pi\epsilon_0 a_0$	$e^2/4\pi\epsilon_0 m_e a_0^3 = 8\omega_0^2$	$4\pi\epsilon_0 \frac{9}{2} a_0^3 = \frac{9}{4}\alpha_0$

dove, per brevità, si è definito $\omega_0^2 \equiv U_I^3(4\pi\epsilon_0)^2/m_e e^4$ e $\alpha_0 = \pi\epsilon_0 e^6/U_I^2(4\pi\epsilon_0)^3$.

Altri modelli dell'atomo cercavano di spiegare le righe spettrali come modi di oscillazioni degli elettroni, mettendone tanti per spiegare le tante righe. Andando oltre la fisica classica, Bohr capì che le tante righe spettrali sono invece differenze fra pochi livelli energetici.

Esercizio 2.5: Modelli di atomi multi-elettronici

Generalizzare i modelli dell'atomo di idrogeno ad un numero generico Z di elettroni.

➤Soluzione: L'atomo di Rutherford consiste di Z elettroni che ruotano attorno ad un nucleo pesante che contiene Z protoni. Il sistema è complicato: è però intuitivo capire che l'elettrone più esterno sente circa il campo elettrico di $1 = Z - (Z - 1)$ cariche interne. Essendo poco legato è quello che determina le proprietà chimiche. Però per capire perché un elettrone rimane più esterno occorre la meccanica quantistica, che per sistemi a più gradi di libertà si allontana ancora di più dall'intuizione classica: l'atomo è descritto non nello

spazio ma da una ‘funzione d’onda’ anti-simmetrica nello spazio delle configurazioni $\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z)$, con ulteriori complicazioni dovuti ad “effetti di spin”. Seguendo la logica inusuale si predice tutto. In particolare la tavola periodica (atomi diversi che si comportano in maniera simile) esce come conseguenza delle rappresentazioni del gruppo delle rotazioni.

L’atomo di Thomson consiste di una sfera di carica Ze e densità di carica uniforme che contiene Z elettroni di carica $-e$. Sotto queste assunzioni, è possibile calcolare molte predizioni non banali. Minimizzando l’energia elettrica si trova che per $Z = 1$ l’elettrone sta nel centro; mentre per $Z > 1$ stanno sul bordo della sfera (assumendo misteriosamente che non possano uscirne). Calcoli numerici mostrano che per $Z = 2$ gli elettroni si mettono a due poli opposti; per $Z = 3$ formano un triangolo equilatero; per $Z = 4$ un tetraedro; per $Z = 5$ un doppio tetraedro (e per la prima volta le distanze fra gli elettroni non sono tutte eguali); per $Z = 8$ il minimo locale non è il cubo ma una figura più complicata; nel limite $Z \gg 1$ si riduce ad una superficie con densità di carica uniforme. È possibile calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno all’equilibrio, magari legate alle righe spettrali. Il problema è che sono tutte sbagliate; specialmente manca un elettrone più esterno, e la struttura non assomiglia alla tavola periodica.

Esercizio 2.6: Energia di una sfera carica

Calcolare l’energia potenziale elettrica di una sfera di raggio R contenente una carica Q distribuita uniformemente.

◀**Soluzione:** Otteniamo l’energia seguendo diversi procedimenti.

- 1) **Integrando la densità di energia elettrica.** Il campo elettrico, calcolato nell’esercizio 1.18, vale

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} r/R^3 & r < R \\ 1/r^2 & r > R \end{cases}.$$

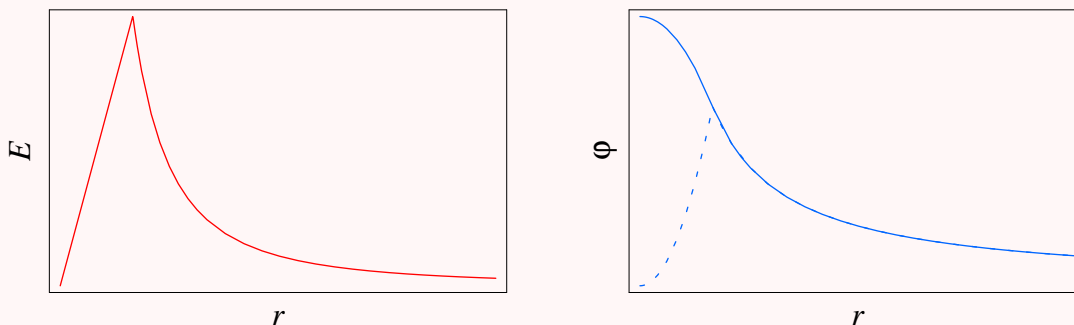
Quindi:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_0^R 4\pi r^2 dr \left(\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)^2 + \int_R^\infty 4\pi r^2 dr \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q^2}{10R} + \frac{Q^2}{2R} \right].$$

- 2) **Utilizzando il potenziale elettrico** $\varphi(r) = -\int_\infty^r E_r(r') dr'$, con $\varphi(\infty) = 0$. Fuori dalla sfera vale $\varphi(r) = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Dentro la sfera vale $\varphi(r) = -\frac{1}{2} q_{\text{in}}(r)/(4\pi\epsilon_0 r) + \text{cte}$. Imponendo la continuità ad $r = R$ si trova:

$$\varphi(r) = \begin{cases} Q(3R^2 - r^2)/8\pi\epsilon_0 R^3 & \text{per } r < R \\ Q/4\pi\epsilon_0 r & \text{per } r > R \end{cases}.$$

Le funzioni $E_r(r)$ e $\varphi(r)$ hanno la seguente forma:



L’energia elettrostatica vale:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr \frac{3Q^2 r^2 (3R^2 - r^2)}{4R^6} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

- 3) **Utilizzando il lavoro:** posso costruire la sfera di carica Q e raggio R aggiungendo mano a mano carica dq facendo crescere il raggio r da 0 a R a densità costante ρ . Ogni volta che aggiungo una carica extra dq devo vincere la repulsione elettrostatica per portare la carica da ∞ a r , compiendo lavoro

$$d\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)dq}{r} \quad q(r) = \rho \frac{4\pi r^3}{3} Q \left(\frac{r}{R} \right)^3 \quad dq = \rho 4\pi r^2 dr$$

quindi

$$d\mathcal{L} = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr \quad U = \int_0^r d\mathcal{L} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{5R}$$

.....

Formule analoghe valgono per la gravità. L'energia potenziale gravitazionale del sole vale $U_\odot \sim -GM^2/R \sim 10^{41}$ J ($G = 6.6 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg², $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ m, e la densità non è costante, per cui ci limitiamo ad una stima di U_\odot). Nel 19° secolo fisici come lord Kelvin pensavano che la sorgente di energia del sole fosse l'energia cinetica delle masse cascate una sopra l'altra nel collasso gravitazionale che produsse il sole, e quindi uguale a $-U_\odot$ per conservazione dell'energia.

Il sole emette in luce una potenza $K_\odot = 1366$ J m⁻² s⁻¹ alla distanza $r = 1.5 \cdot 10^{11}$ m a cui si trova la terra. Quindi i fisici pensavano che l'età del sole fosse minore di $T_\odot = |U_\odot|/(K_\odot 4\pi r^2) \approx 30$ Myr (“fidatevi di me sono uno scienziato”).¹ Teologi come don Lightfoot sostenevano che la terra era stata creata il 23 ottobre -4004, alle nove del mattino (“fidatevi di me sono un prete”). Le due teorie erano consistenti. Tuttavia biologi e geologi (come Darwin) sostenevano che almeno 300 Myr erano necessari per l'erosione e l'evoluzione delle specie (“fidatevi di me discendo da una scimmia”). Avevano ragione biologi e geologi. I fisici successivamente scoprirono che il sole ha una altra sorgente di energia: l'energia di fissione nucleare che produce $U_{\text{nuc}} \sim Mc^2/1000 \sim 10^{44}$ J, che permette al sole di emettere energia per un tempo simile all'età dell'universo, oggi nota essere circa 13.7 Gyr.

Esercizio 2.7: Energia di due cariche

Verificare che la formula $u = \epsilon_0 E^2/2$ fornisce, in maniera complicata, l'energia elettrostatica di due cariche q_1 e q_2 a distanza d , $U = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 d$.

⚡Soluzione: La formula $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2$ produce integrali complicati, e per di più non vale per cariche puntiformi, in quanto l'integrale diverge nelle posizioni delle cariche. Comunque, visto che stiamo facendo fisica e non matematica, è istruttivo verificare come è possibile ottenere il giusto risultato sottraendo in maniera intuitiva gli infiniti (procedura chiamata rinormalizzazione in teoria dei campi quantistici). Il campo viene scritto come $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ e l'integrale divergente viene rimpiazzato sottraendo i contributi infiniti delle cariche puntiformi isolate, in quanto questo equivale alla solita prescrizione di omettere a mano i termini con $i = j$ nella somma sulle cariche tale che $U = \sum_{i>j} q_i q_j / 4\pi\epsilon_0 d_{ij}$. Mettendo le cariche in $\mathbf{x} = (\pm x_0, 0, 0)$ si ottiene:

$$U_{\text{ren}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV [(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 - \mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2] = \epsilon_0 \int dV \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0} \int \frac{dx dy dz (r^2 - x_0^2)}{(r^2 - 2xx_0 + x_0^2)^{3/2} (r^2 + 2xx_0 + x_0^2)^{3/2}}$$

dove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. L'integrale su $dy dz$ dà $4\pi/x^2$ se $x^2 > x_0^2$ e 0 altrimenti. Il rimanente integrale in dx è facile, e fornisce l'espressione attesa:

$$U(d) = U_{\text{ren}}(d) + (\text{costante divergente}), \quad U_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d}.$$

Esercizio 2.8: Raggio classico dell'elettrone

Approssimando l'elettrone come una sferetta di raggio R , calcolare il valore di R tale che l'energia elettrostatica è uguale all'energia totale relativistica, $U = m_e c^2$.

⚡Soluzione: Approssimare le particelle come puntiformi è un limite singolare: l'energia elettromagnetica U diverge per $R \rightarrow 0$. Per questo motivo, quando si calcola la forza elettrica su di una carica puntiforme non si include nel campo elettrico quello infinito generato dalla carica puntiforme, visto che per una qualunque forma finita tale forza fa zero in elettrostatica (in elettrodinamica ci saranno sorprese).

¹Gli antichi greci ipotizzavano che il sole fosse qualcosa come un campo di petrolio in fiamme. Ma l'energia prodotta da possibili reazioni chimiche o fisiche nel sole, $U_{\text{chem}} \sim (M/m_p) \times \text{eV} \sim 10^{39}$ J, è così piccola che il sole si sarebbe spento nel corso della storia umana.

Nel secolo scorso ci sono stati tentativi di proporre teorie dell'elettrone in cui l'elettrone veniva approssimato come una sferetta di raggio R finito. L'energia elettromagnetica U allora è finita: $U = ce^2/4\pi\epsilon_0 R$ dove c dipende da quale distribuzione di carica viene assunta. Come abbiamo visto negli esercizi precedenti si ha $c = 3/5$ per una densità ρ uniforme e $c = 1/2$ per una densità superficiale σ uniforme. Per semplicità assumiamo $c = 1$.

L'energia elettromagnetica contribuisce alla massa dell'elettrone, secondo $m = U/c^2$. Assumendo che tutta la massa sia di origine elettromagnetica si trova il raggio

$$R = r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

chiamato 'raggio classico dell'elettrone'. In realtà c'entra poco con il 'raggio dell'elettrone'. Numericamente, r_e è simile alla dimensione di un protone, ma si tratta solo di un accidente fuorviante.

Più in generale, considerazioni di naturalezza suggeriscono che $R \gtrsim r_e$, in quanto altrimenti il contributo elettro-magnetico alla massa dell'elettrone sarebbe maggiore della massa stessa, e dovrebbe cancellarsi con una massa non-elettromagnetica negativa. Questo secondo argomento è vero: in meccanica quantistica l'elettrone è un oggetto esteso (non una sferetta ma un'onda) con lunghezza d'onda circa 137 volte maggiore di r_e . Nel conto quantistico completo la divergenza di U per $R \rightarrow 0$ viene cancellata dall'effetto del positrone: una particella con la stessa massa dell'elettrone ma di carica opposta. Alla fine, solo una piccola parte dell'energia dell'elettrone, circa $1/137$, è di origine elettromagnetica.

Esercizio 2.9: Masse dei nuclei

Si può approssimare un nucleo di numero atomico A come una sfera contenente $Z \approx A/2$ protoni e $A - Z \approx A/2$ neutroni e con densità di massa e di carica costante. Ciascun nucleone (protone o neutrone) ha raggio $r_N = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, quindi il nucleo ha raggio $R = A^{1/3} r_N$. Calcolare l'energia di legame elettromagnetica U_{em} e discutere la stabilità dei nuclei.

➤ Soluzione: L'energia di legame U è misurabile dalle masse dei nuclei con Z protoni ed $A - Z$ neutroni

$$m_{\text{nucleo}}(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{U}{c^2}$$

dove $m_p \approx 0.9382 \text{ GeV}/c^2$, $m_n = 0.9395 \text{ GeV}/c^2$. I dati mostrano che l'energia totale è data da un contributo elettrico più uno dovuto ad interazioni ignote dette 'forti': $U = U_{\text{em}} + U_{\text{strong}}$.

- L'energia di (s)legame elettromagnetica è circa quella di una sfera carica

$$U_{\text{em}} \approx \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \approx 0.0006 \text{ GeV} \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Essendo R circa 10^{-5} volte minore del raggio atomico, questa energia elettrica 'nucleare' è circa 10^5 volte maggiore dell'energia elettrica 'chimica'.

- L'energia di legame dovuta alle interazioni forti può essere approssimata come somma di tre termini:

$$U_{\text{strong}} \approx E_{\text{legame}}(-A + A^{2/3}) + 0.1 \text{ GeV} \frac{(Z - A/2)^2}{A}.$$

Il primo termine, essendo lineare in A , indica che le interazioni forti sono a corto raggio, cioè si esercitano soltanto fra i nucleoni che stanno uno accanto all'altro. La costante di proporzionalità $E_{\text{legame}} \approx 0.01 \text{ GeV}$ è detta 'energia di legame forte'. Il secondo termine, proporzionale all'area $A^{2/3}$, nasce in quanto i nuclei sul bordo della sfera sono meno legati non avendo nuclei vicini da entrambi i lati: si ha quindi un termine di 'tensione superficiale' importante solo per nuclei a piccolo A . Il termine finale è grosso e spiegabile solo in meccanica quantistica: le interazioni forti favoriscono nuclei con un ugual numero di protoni e di neutroni, cioè $Z \sim A/2$.

Per via di questo termine il nucleo di dato A che ha energia minore è circa quello con circa metà protoni e metà neutroni (con un poco più neutroni, per via dell'elettromagnetismo che penalizza i protoni che si respingono): nel piano (A, Z) esiste una "valle di stabilità". La figura 2.2 mostra che la formula approssimata per l'energia di legame per nucleone U/A si avvicina ai valori misurati.

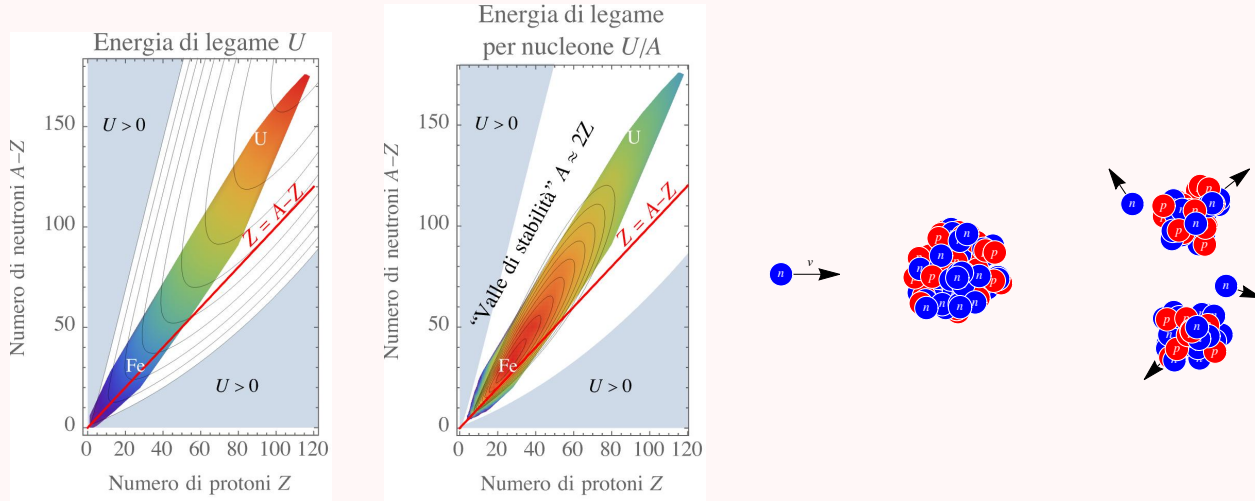


Figura 2.2: **Sinistra:** linee di contorno dell'energia di legame U e dell'energia di legame per nucleone U/A (in nero) confrontate con il valore sperimentale (a colori). **Destra:** urto nucleo/neutrone che produce fissione nucleare.

Limitandoci a $Z \sim A/2$ possiamo capire l'effetto dell'energia elettrica U_{em} : a grandi Z la repulsione Coulombiana diventa l'effetto principale ed impedisce di formare nuclei grossi. Si osserva che esistono nuclei stabili fino a $Z \lesssim 100$, in quanto sopra tale valore il contributo elettrico all'energia di legame per nucleone:

$$E_{\text{legame}}^{\text{em}} = \frac{dU_{\text{em}}}{dZ} \approx -\left(\frac{Z}{4}\right)^{2/3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_N} \approx -0.01 \text{ GeV} \quad \text{per } Z = 100$$

diventa maggiore del contributo forte E_{legame} .

Esercizio 2.10: Fusione nucleare

Stimare la temperatura minima necessaria per innescare la fusione di due nuclei piccoli in uno più grosso.

◀Soluzione: L'energia di legame nucleare U discussa all'esercizio precedente mostra che nuclei piccoli 1 e 2 preferiscono legarsi in uno più grosso $1 + 2$ per ridurre il termine di superficie $\propto A^{2/3}$. Nel processo viene liberata la differenza di energia $U_1 + U_2 - U_{1+2}$, dominantemente dovuta alle interazioni forti. La repulsione elettromagnetica diventa importante a grosso Z , e quindi esiste uno Z critico oltre il quale la fusione smette di essere energeticamente favorevole. L'energia di legame per nucleone $|U/A|$ è massima per il $^{56}_{26}\text{Fe}$, che è quindi lo stato più legato. Gli altri nuclei contengono una enorme riserva di energia elettrica e nucleare.

Come mai la natura non ha raggiunto il fondo del potenziale, e oggi sediamo tranquilli su di una potenziale bomba nucleare? In quanto due nuclei piccoli carichi, per unirsi, devono prima vincere la repulsione Coulombiana.

Ad esempio da mezzo secolo si prova ad usare deuterio $D = pn$ per formare trizio $T = pnn$, o meglio entrambi per formare elio $^4_2\text{He} = ppnn$,

$$D + D = T + p + 4.0 \text{ MeV}, \quad D + T = \text{He} + n + 18 \text{ MeV}$$

ma la tecnologia è complicata, in quanto per unirsi i nuclei devono prima vincere la repulsione Coulombiana. Se non fosse una barriera grossa, in natura esisterebbe solo ferro. Per superarla, un'urto classico frontale deve avere energia

$$K = \mu \frac{v^2}{2} > \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \approx \text{MeV} \approx 10^{10} \text{ Kelvin} \quad \text{per } Z_1 = Z_2 = 1, R = r_N.$$

Le stelle si accendono già a temperatura un po' inferiore (ad esempio il sole raggiunge $T \sim 2 \text{ keV}$) in quanto, in meccanica quantistica, esiste l'effetto tunnel che consente di 'attraversare' una barriera di potenziale anche con energia minore di quella classicamente necessaria. L'effetto tunnel è esponenzialmente lento, e questo consente alle stelle di bruciare per miliardi di anni, invece di esplodere in un colpo.

Esercizio 2.11: Fissione nucleare

Si può approssimare un nucleo come una sfera a densità costante. Un grosso nucleo si spezza in due nuclei, per semplicità di carica $Q' = Q/2$ e quindi raggio $R' = R/2^{1/3}$. Quanto vale l'energia elettrica liberata?

✚Soluzione: I due frammenti di carica Q' si respingono raggiungendo, nello stato finale, distanza molto maggiore di R , e quindi acquisendo energia cinetica che può essere calcolata imponendo che l'energia iniziale (elettromagnetica con $U = (3/5)(Q^2/4\pi\epsilon_0 R)$) è uguale all'energia finale (elettromagnetica dei frammenti, più la loro energia cinetica):

$$\Delta E_{\text{em}} = E_{\text{em}} - 2E'_{\text{em}} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} [1 - 2^{-2/3}] = 0.22 \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Per $Q = 100e$ e $R = r_N N^{1/3} \sim 10^{-14} \text{ m}$ viene $\Delta U \sim 250 \text{ MeV}$: l'ordine di grandezza è giusto. L'effetto elettromagnetico è proporzionale a Z^2 , ed a grande Z diventa più importante dell'effetto dovuto alla differenza di massa protone/neutrone ed alla loro energia di legame, proporzionale a Z .

Per ottenere la stessa potenza di un cavallo servono 20 mila miliardi di fissioni al secondo. Ma gli atomi sono molti di più: un kg di uranio contiene circa 4 moli: quindi fissionandolo si libera un'energia $4N_A \cdot 250 \text{ MeV} = N_A \text{ GeV} \approx 10^{14} \text{ J} \approx 20 \text{ kton} \approx (\text{kg}/1000)c^2$ (dove $\text{kton} = 4.2 \cdot 10^{12} \text{ J}$ è un'unità di energia usata per bombe e corrisponde all'energia rilasciata nell'esplosione di 1000 tonnellate di TNT). L'Uranio $^{235}_{92}\text{U}$ contiene 92 protoni carichi e 143 neutroni neutri, che fanno da colla nucleare aiutando a compensare la repulsione elettrica fra i protoni. Quando viene colpito da un neutrone (che, essendo neutro, riesce ad avvicinarsi senza venire respinto dalla forza di Coulomb) può spezzarsi: i prodotti di fissione, avendo carica minore, hanno bisogno di meno neutroni come colla: quindi qualche neutrone viene liberato, e può andare a fissionare altri nuclei innescando una reazione a catena. Siccome i nuclei hanno raggio molto minore degli atomi, $R_{\text{nucleo}} \sim 10^{-5} R_{\text{atomo}}$, il neutrone evita di sfuggire ed urta un altro nucleo solo se trova una fila di $N \sim (R_{\text{atomo}}/R_{\text{nucleo}})^3 \sim 10^{10}$ atomi. Per innescare una reazione a catena serve quindi un oggetto con $\sim N^3$ atomi, ovvero con massa maggiore della massa critica $m_{\text{cr}} \sim N^3 m_p \sim \text{ton}$. La massa critica risulta essere di circa 52 kg per il puro $^{235}_{92}\text{U}$, ovvero una sfera di 17 cm.

Esercizio 2.12: Differenza di massa protone-neutrone

Stimare la differenza di massa protone-neutrone approssimandoli come 3 quarks fermi ai vertici di un triangolo equilatero come $p = uud$ e $n = udd$ ($q_u = 2e/3$, $q_d = -e/3$).

✚Soluzione: L'energia elettrostatica vale

$$E_p = \frac{q_u^2 + 2q_u q_d}{4\pi\epsilon_0 r} = 0, \quad E_n = \frac{q_d^2 + 2q_u q_d}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3r}.$$

Convertendo energia in massa tramite $E = mc^2$ l'elettromagnetismo tende a rendere il protone (carico) più pesante del neutrone (neutro): $m_p - m_n \sim e^3/12\pi\epsilon_0 r c^2 = (\text{MeV}/c^2) \cdot 0.5 \cdot 10^{-15} \text{ m}/r$. L'ordine di grandezza è giusto ($m_n - m_p = 1.3 \text{ MeV}/c^2$, $r_N = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$) ma il segno è sbagliato. Tenendo conto effetti più complicati (i quark sono relativistici e quindi hanno anche una energia magnetica), il segno non cambia. La stima elettrostatica fornisce il segno giusto. In natura il neutrone $n \simeq ddu$ pesa più del protone $p \simeq uud$ perchè i quark d hanno massa maggiore dei quark u :

$$\underbrace{m_n - m_p}_{1.3 \text{ MeV}/c^2} = \underbrace{m_d - m_u}_{3 \text{ MeV}/c^2} + \underbrace{\mathcal{O}(e^2/4\pi\epsilon_0 r)}_{-1.7 \text{ MeV}/c^2}.$$

Il fatto che il neutrone sia poco più pesante del protone è essenziale per avere una chimica complessa. In natura è importante che la particella stabile più leggera sia il protone carico e non il neutrone neutro, altrimenti non esisterebbero atomi. Se fosse $m_p < m_n$ il protone (e quindi l'atomo di idrogeno) decadrebbe. Se $m_n - m_p$ fosse un poco più grande, supererebbe l'energia di legame dei nuclei, e i neutroni decadrebbero anche dentro i nuclei.

Esercizio 2.13: Energia di due superfici sferiche

Su due superfici sferiche concentriche, di raggio R_1 ed R_2 , sono distribuite uniformemente cariche Q e $-Q$. Calcolare l'energia elettrostatica di tale distribuzione.

♣**Soluzione:** Usando il teorema di Gauss su di una superficie cilindrica di raggio r si trova che il campo elettrico è diverso da zero solamente per $R_1 < r < R_2$ e vale $E_r(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Siccome le cariche sono messe solo a due valori diversi del potenziale, conviene calcolarla usando il potenziale. Integrando rispetto ad r si trova il potenziale $\varphi = \text{cte} + Q/4\pi\epsilon_0 r$, da cui

$$U = \frac{1}{2}Q[\varphi(R_1) - \varphi(R_2)] = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right].$$

Alternativamente, è possibile calcolarla integrando il campo elettrico quadro sul volume:

$$U = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right].$$

Esercizio 2.14: Piano con carica ondulata

Sul piano xy a $z = 0$ è presente la densità superficiale di carica elettrica $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos kx$. a) Calcolare il potenziale elettrico in tutto lo spazio. b) Calcolare l'energia elettrostatica media per unità di superficie, $\langle dU/dS \rangle$.

♣**Soluzione:**

- a) Invece di usare la formula integrale per φ , conviene risolvere $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ provando a cercare, nel vuoto a $z \neq 0$, una soluzione con variabili separate:

$$\varphi(x, z) = F(z) \cos kx, \quad \nabla^2 \varphi = [F'' - k^2 F] \cos kx.$$

L'equazione per F è risolta da $F(z) = c_+ e^{kz} + c_- e^{-kz}$, Tornando al problema, la soluzione sarà quindi della forma

$$\varphi(x, z) = \cos kx \begin{cases} c_+^{\text{sopra}} e^{kz} + c_-^{\text{sopra}} e^{-kz} & z > 0 \\ c_+^{\text{sotto}} e^{kz} + c_-^{\text{sotto}} e^{-kz} & z < 0 \end{cases}$$

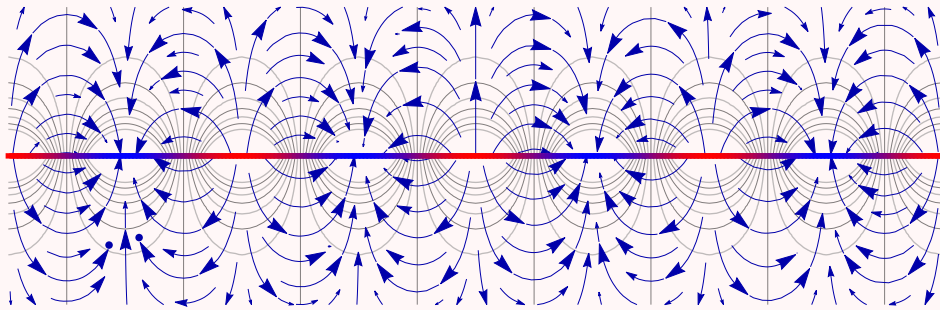
Imponiamo $c_+^{\text{sopra}} = c_-^{\text{sotto}} = 0$ in maniera da avere $\varphi \rightarrow 0$ nel limite $|z| \rightarrow \infty$. Per motivi di simmetria si ha $\varphi(z) = \varphi(-z)$. Otteniamo quindi

$$\varphi(x, z) = c e^{-k|z|} \cos kx.$$

Per finire, la costante c viene determinata imponendo che $E_z = -\partial\varphi/\partial z$ abbia a $z = 0$ la discontinuità corrispondente alla carica superficiale, $E_z^{\text{sopra}} - E_z^{\text{sotto}} = \sigma_0 \cos(kx)/\epsilon_0$. Si ottiene

$$\varphi = -\frac{e^{-k|z|}}{2k\epsilon_0} \sigma_0 \cos kx.$$

Graficamente, le curve equipotenziali e le linee di campo sono:



Nel limite di piano uniformemente carico $k \rightarrow 0$ la soluzione si riduce a quella ottenuta nell'esercizio 1.16:

$$\varphi \simeq (\text{costante divergente}) - \sigma_0 |z| / 2\epsilon_0.$$

- b) L'energia elettrostatica vale $dU/dS = \sigma\varphi/2 = \sigma_0^2 \cos^2(kx)/4k\epsilon_0$. La sua media vale $\langle dU/dS \rangle_x = \sigma_0^2/8k\epsilon_0$.

b') Allo stesso risultato si arriva usando $U = \int dV \epsilon_0 E^2/2$:

$$\left\langle \frac{dU}{dS} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\epsilon_0}{2} (E_x^2 + E_z^2) = \frac{\sigma_0^2}{8\epsilon_0} \int_0^{\infty} dz e^{-2kz} = \frac{\sigma_0^2}{8k\epsilon_0}.$$

Il presente esercizio è più importante di quanto sembra, in quanto una qualunque distribuzione di cariche può essere decomposta come somma di coseni con diversi \mathbf{k} (trasformata di Fourier). Usando il principio di sovrapposizione, abbiamo una soluzione per il problema generico. Ad esempio una griglia di fili a distanza a avrà una trasformata di Fourier diversa da zero per $k \sim 1/a$. Ad una distanza $|z| \gg a$ i termini esponenziali diventano piccoli, e si ottiene il campo elettrico uniforme generato dal modo con $k = 0$, cioè dalla carica totale della griglia.

Esercizio 2.15: Piano con carica cilindrica

Ripetere l'esercizio precedente per un piano con densità di carica $\sigma(r)$ in coordinate cilindriche dove $r^2 = x^2 + y^2$, trovando una base di funzioni che consenta di risolvere il problema alla Fourier.

✚**Soluzione:** Nel vuoto a $z \neq 0$ l'equazione è ora

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Si cerca una soluzione a variabili separate $\varphi(r, z) = F(z)G(r)$. L'equazione diventa

$$\frac{(rG')'}{rG} + \frac{F''}{F} = 0 \quad \text{risolta da} \quad F(z) = e^{-k|z|}, \quad G(r) = J_0(rk)$$

dove J_0 è la funzione di Bessel, ed abbiamo già scelto le soluzioni con buon comportamento a grande z e grande r . Abbiamo quindi la soluzione nel caso speciale in cui $\sigma(r) \propto J_0(kr)$. Una generica $\sigma(r)$ può essere decomposta come $\sigma(r) = \int dk J_0(kr) \tilde{\sigma}(k)$ dando per linearità la soluzione generica.

Nell'analogo caso gravitazionale, queste tecniche sono usate per calcolare il campo gravitazionale delle galassie a disco, in cui la massa è distribuita sul piano galattico con densità superficiale $\sigma(r)$.

Esercizio 2.16: Potenziale di Yukawa

Risolvere l'equazione $\nabla^2 \varphi - \lambda^2 \varphi = 0$, che estende l'equazione di Poisson $\nabla^2 \varphi = 0$ a particelle con massa diversa da zero.

✚**Soluzione:** La soluzione a simmetria sferica $\varphi(r)$ è

$$\frac{1}{r} (r\varphi)'' = \lambda^2 \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r}.$$

Per $r \ll \lambda$ si ritrova il potenziale di Coulomb, che vale per il fotone che ha massa zero. Per $r \gg \lambda$ si ha una soppressione esponenziale, che spiega come mai è più facile vedere gli effetti di particelle a massa zero. In natura esiste una particella simile al fotone, detta Z , che ha $\lambda \sim 10^{-16}$ cm.

Dipoli elettrici

Il caso più semplice di dipolo elettrico $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ è dato da due cariche $q_1 = +q$ e $q_2 = -q$ a distanza $\mathbf{d} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (\mathbf{d} è diretto verso la carica positiva, e \mathbf{r}_i esce dalla carica i). Riassumiamo le formule di base:

- **Momento di dipolo:** $\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$ (non dipende dalla scelta dell'origine se $\sum_i q_i = 0$).
- **Campo elettrico generato da un dipolo.** Espandendo $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{d}/2$ e $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{d}/2$ al primo ordine in \mathbf{d} il potenziale ed il campo elettrico generato da un dipolo valgono

$$\varphi \stackrel{r \gg d}{\simeq} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} + \frac{\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{r^5} \right].$$

In coordinate polari (r, θ, φ) il potenziale elettrico diventa $\varphi(r, \theta) = p \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2$ ed il campo elettrico ha componenti

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\varphi = 0$$

e modulo diverso da zero per ogni θ , proporzionale a $1/r^3$: $E = (p/4\pi\epsilon_0 r^3) \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}$.

- **Forza su un dipolo in un campo elettrico esterno:**

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = -\nabla U \quad \text{dove} \quad U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta.$$

La formula in termini di U vale solo se \mathbf{E} ha rotore zero. L'energia U è minima quando \mathbf{p} si allinea ad \mathbf{E} .

Il momento delle forze vale $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ ed ha modulo $M = -\partial_\theta U = qdE \sin \theta$.

Esercizio 3.1: Momenti di dipolo

Quattro cariche sono disposte sui vertici di coordinate $(\pm 1, \pm 1)L/2$ di un quadrato di lato L : q_1 sul vertice in alto a destra; q_2 in basso a destra; q_3 in alto a sinistra; q_4 in basso a sinistra.

- Calcolare il momento di dipolo per $q_i = \{1, -2, 2, -1\}Q$.
- Calcolare il momento di dipolo per $q_i = \{1, 1, 2, -4\}Q$.

♣ **Soluzione:** Il momento di dipolo è dato dalla formula generale $\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$.

2

1

2

1

-1

-2

-4

1

a) Si può calcolare in diversi modi.

- Applicando la formula generale si ottiene

$$\mathbf{p} = \frac{QL}{2} \left[1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = QL \begin{pmatrix} -1 \\ +3 \end{pmatrix}.$$

- Siccome $\sum_i q_i = 0$ il dipolo non dipende dalla scelta dell'origine. È possibile applicare la formula generale scegliendo come origine una delle cariche, ad esempio la 4:

$$\mathbf{p} = QL \left[1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = QL \begin{pmatrix} -1 \\ +3 \end{pmatrix}.$$

- È possibile raggruppare termini per fare la stessa somma in maniera più intuitiva. Ad esempio uno può immaginare di sommare il dipolo formato dalle cariche ± 1 con quello formato dalle cariche ± 2 : $\mathbf{p} = QL(1, 1) - 2QL(-1, 1) = QL(-1, 3)$.

- Oppure si possono raggruppare le cariche di segno uguale, calcolando il 'baricentro' delle cariche positive $\mathbf{r}_+ = (-1/3, 1)L/2$ e di quelle negative $\mathbf{r}_- = (1/3, -1)L = -\mathbf{r}_+$, riducendosi ad un dipolo di due cariche $\pm 3Q$, che vale $\mathbf{p} = 3Q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)L/2 = QL(-1, 3)$.

b) La formula generale fornisce $\mathbf{p} = QL(2, 3)$. Nuovamente la somma delle cariche vale 0, quindi è possibile applicarla scegliendo come origine la carica -4 , ed intuitivamente vedere il sistema come somma di 3 dipoli.

Esercizio 3.2: Forno a microonde

Nella molecola di acqua H_2O l'ossigeno attira gli elettroni più dell'idrogeno, formando un dipolo elettrico $p = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m} = 0.39 e \cdot \text{\AA}$. a) Quale campo elettrico è necessario per allineare tutte le molecole d'acqua a temperatura ambiente? b) Come funziona un forno a microonde?

♣Soluzione:

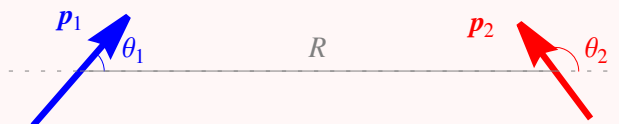
1. Il campo elettrico deve essere abbastanza intenso in maniera che l'energia potenziale del dipolo, $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ sia maggiore dell'energia cinetica media per agitazione termica, kT , dove k è la costante di Boltzmann. A temperatura ambiente si ha $kT \approx \text{eV}/40 = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$. Occorre quindi $E \gtrsim 6 \cdot 10^8 \text{ V/m}$, che è un valore irrealisticamente elevato. Un grosso campo elettrico fattibile in pratica ha intensità $E \sim \text{kV/m}$: l'agitazione termica vince, e solo una piccola frazione $Ep/kT \ll 1$ delle molecole si allineano.
2. Un realistico campo elettrico basta comunque a produrre utili forni a microonde, che funzionano in questa maniera. Le molecole fanno un complicato moto rotatorio che le porta ad acquistare energia allineandosi parzialmente al campo elettrico, ed a cederla urtando altre molecole a cui trasmettono l'energia acquistata. Siccome il forno a microonde produce un campo elettrico che oscilla nel tempo, il processo si ripete ad ogni ciclo, e l'acqua si riscalda.

Un forno a microonde riscalda l'acqua (che ha un grosso momento di dipolo), ma non riscalda scodelle di plastica fatte in materiali con piccolo o zero dipolo, e non è buono per scongelare: le molecole di acqua ghiacciata non sono libere di ruotare, per cui le zone sul bordo scongelate si riscaldano molto, lasciando le zone vicine ghiacciate.

Il riscaldamento qui descritto è simile ma diverso dal riscaldamento Joule discusso in seguito. La differenza è che l'effetto Joule userà la conduzione ed il moto delle cariche, mentre l'effetto qui descritto usa la rotazione dei dipoli. La similitudine è che entrambi usano campi elettrici per indurre un qualche moto di particelle che poi termalizza in calore.

Esercizio 3.3: Allineamento di dipoli elettrici

Come si dispongono due dipoli a distanza R fissata, liberi di ruotare su loro stessi?



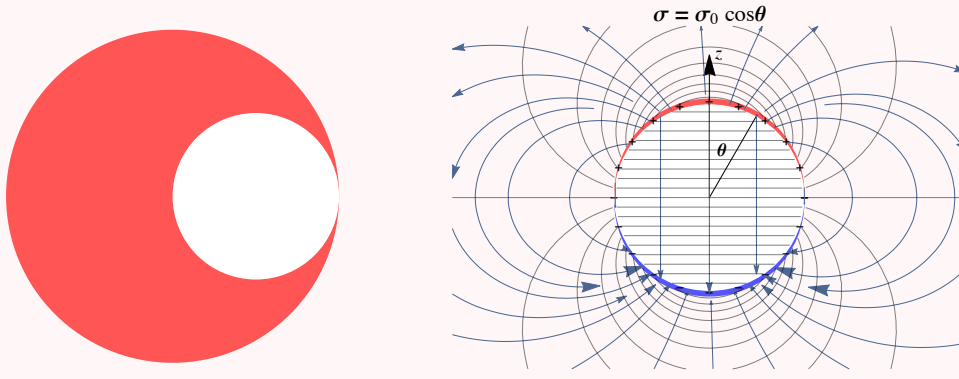


Figura 3.1: **Sinistra:** sfera bucata. **Destra:** sfera polarizzata. Linee di campo (curve con frecce) e superfici equipotenziati generate da una 'sfera polarizzata'.

✚Soluzione: La distanza è assunta essere fissata da una forza esterna in quanto, altrimenti, non esistono configurazioni di equilibrio stabile. L'energia fra due dipoli $\mathbf{p}_i = q_i \mathbf{d}_i$ a distanza r vale

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} [\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})] = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 R^3} [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2]$$

dove θ_i è l'angolo fra \mathbf{p}_i e la separazione fra i due dipoli. L'energia sembra complicata, ma siccome $3 > 1$ il minimo è determinato dal solo secondo termine. Esistono quindi due configurazioni di minimo con la stessa energia, con i dipoli orientati parallelamente al loro vettore distanza: 1) $\theta_1 = \theta_2 = 0$, dipoli orientati verso destra; 2) $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, dipoli orientati verso sinistra. Tenerli contrapposti e/o storti richiede energia maggiore.

Una situazione del genere si verifica in natura: alcune molecole hanno dipoli intrinseci e in materiali stanno a distanze costanti per motivi quantistici. L'esercizio mostra che l'energia è minima quando i dipoli sono allineati in una direzione.

Tuttavia, come mostrato nell'esercizio 3.1, l'energia di interazione fra due dipoli atomici è piccola rispetto all'energia termica media, per cui a temperatura ambiente predomina l'agitazione termica ed i dipoli sono orientati a caso. In un materiale costituito da un numero abbastanza grande di dipoli, la loro tendenza collettiva ad allinearsi può battere l'agitazione termica.

Ad esempio, se uno butta una manciata di dipoli in un campo elettrico, i dipoli tendono ad allinearsi lungo il campo elettrico: il fatto che tendano ad attirarsi se messi in fila ed a respingersi se messi di fianco significa che formano file lungo le linee di campo: Maxwell introdusse i campi vettoriali ispirandosi a questo tipo di osservazioni fatte da Faraday.

Questo fenomeno viene usato per costruire memorie per computer, che interpretano un oggetto con N dipoli collettivamente orientati in su come bit 1, e dipoli collettivamente orientati in giù come bit 0. Un campo elettrico esterno viene usato per 'scrivere'. Per evitare che le fluttuazioni termiche distorcano la memoria serve un numero di dipoli abbastanza grande tale che $NU \gg kT$, in quanto le fluttuazioni termiche non possono sommarsi coerentemente. Il numero di dipoli necessario venne più precisamente calcolato dal matematico von Neumann.

Esercizio 3.4: Sfera bucata

In una sfera con densità uniforme di carica elettrica ρ e raggio $2R$, viene praticato un foro sferico di raggio R , dal quale viene tolta la carica. La superficie della sfera di raggio R passa per il centro della prima sfera. Determinare il campo elettrico all'interno del foro.

✚Soluzione: Conviene usare il principio di sovrapposizione, e vedere il sistema, disegnato in fig. 3.1a, come un formaggio svizzero con i buchi (Emmenthal) prodotto inserendo in un formaggio omogeneo una sfera di anti-formaggio centrata a distanza $\mathbf{d} = (R, 0, 0)$. Vedendo il sistema come una sovrapposizione di due densità di carica $\pm\rho$, e ricordando che dentro una sfera con densità di carica ρ si ha $\mathbf{E} = \mathbf{r}\rho/3\epsilon_0$, il campo elettrico richiesto è la somma dei due:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{r} - (\mathbf{r} - \mathbf{d})]\rho/3\epsilon_0 = \mathbf{d}\rho/3\epsilon_0.$$

Esercizio 3.5: Sfera polarizzata

Una densità superficiale di carica $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ è distribuita su di una sfera di raggio R , dove θ è l'usuale angolo polare rispetto all'asse del sistema ($\theta = 0, \pi$ ai poli) e $\sigma_0 = P$ è una costante (denotarla come P sarà utile in esercizi futuri).

Calcolare: a) il campo elettrico generato; b) il potenziale elettrico; c) il campo elettrico sulla superficie; d) l'energia elettrostatica; e) la pressione elettrica sulla superficie.

▲Soluzione: Il sistema è disegnato in figura 3.1b. Usando il principio di sovrapposizione è possibile vederlo come la distribuzione di carica generata da tanti piccoli dipoli allineati. Separando le cariche positive da quelle negative, lo si può anche vedere come sovrapposizione di due sfere con densità uniformi $+\rho$ e $-\rho$ con i centri a distanza d tale che $d\rho = \sigma_0$. La corrispondenza diventa esatta nel limite $d \rightarrow 0$ e quindi $\rho \rightarrow \infty$.

a) Come calcolato precedentemente, una singola sfera genera al suo interno un campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{r}\rho/3\epsilon_0$. Quindi due sfere di carica $\pm\rho$ sovrapposte a distanza d generano al loro interno $\mathbf{E} = -\rho\mathbf{d}/3\epsilon_0$. Come verifica, possiamo ricalcolare il campo elettrico nel solo centro della sfera integrando i singoli contributi, tutti a distanza R : definendo $c = \cos \theta$ si ha $dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = -2\pi R^2 dc$, ovvero $\int dS = 2\pi R^2 \int_{-1}^{+1} dc$, e quindi

$$E_z^{\text{centro}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int dS \sigma c = -\frac{1}{2\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} dc \sigma c = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} dc c^2 = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

Vedendo il sistema come sovrapposizione di due sfere, all'esterno si ha il campo di un dipolo $\mathbf{p} = Q\mathbf{d} = 4\pi R^3 \sigma_0/3$. Come verifica, possiamo ricalcolare il momento di dipolo elettrico della sfera utilizzando la formula generale con $dq = dS \sigma$ e $z = Rc$:

$$p_z = \int dq z = \int dS \sigma Rc = 2\pi R^3 \sigma_0 \int_{-1}^{+1} dc c^2 = \frac{4\pi}{3} R^3 \sigma_0.$$

Allo stesso risultato si arriva accoppiando coppie di cariche infinitesime $dq = dS \sigma$ e $-dq$ simmetriche rispetto al centro e quindi poste a distanza $2R$. Il loro contributo al dipolo vale $dp_z = dq 2Rc$, e quindi $p_z = 2R \int dS \sigma c$.

b) Il potenziale in tutto lo spazio, in coordinate sferiche è

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} p \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2 & \text{per } r > R \\ Er \cos \theta & \text{per } r < R \end{cases} = \frac{\sigma_0 \cos \theta}{3\epsilon_0} \begin{cases} R^3 / r^2 & \text{per } r > R \\ r & \text{per } r < R \end{cases}.$$

La seconda espressione permette di verificare che φ è continuo a $r = R$.

c) Le componenti del campo elettrico a $r = R$ perpendicolari alla superficie della sfera perpendicolari alla superficie sono date da $E_r = -\partial\varphi/\partial r|_{r=R}$ e valgono

$$E_{\perp}^{\text{in}} = -\frac{p}{3\epsilon_0} \cos \theta, \quad E_{\perp}^{\text{out}} = \frac{2p}{3\epsilon_0} \cos \theta = E_{\perp}^{\text{in}} + \frac{\sigma_0 \cos \theta}{\epsilon_0}. \quad (3.1)$$

Come verifica, la formula finale (in cui il campo esterno è calcolato aggiungendo al campo interno la discontinuità generata dalla densità superficiale in base al teorema di Gauss) riproduce quella del campo elettrico generato da un dipolo, $E_{\perp}^{\text{out}} = p_{\perp}/2\pi\epsilon_0 R^3$. Le componenti del campo elettrico parallele alla superficie sono date da $E_{\theta} = -\nabla_{\theta}\varphi = -(1/r)\partial\varphi/\partial\theta|_{r=R}$ e valgono

$$E_{\parallel}^{\text{in}} = E_{\parallel}^{\text{out}} = \frac{p}{3\epsilon_0} \sin \theta. \quad (3.2)$$

d) Per calcolare l'energia elettrostatica conviene utilizzare la formula in termini del potenziale:

$$U = \frac{1}{2} \int dS \sigma \varphi = \pi R^2 \int_{-1}^{+1} dc \sigma_0 c \times \frac{\sigma_0 c R}{3\epsilon_0} = \frac{2\pi R^3 \sigma_0^2}{9\epsilon_0}.$$

A scopo puramente anti-pedagogico verifichiamo che si ottiene lo stesso risultato utilizzando la formula $U = \int dV \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = U_{\text{in}} + U_{\text{out}}$ in termini del (complicato) campo elettrico:

$$U_{\text{in}} = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{\epsilon_0 E_{\text{in}}^2}{2} = \frac{1}{3} \frac{2\pi R^3 \sigma_0^2}{9\epsilon_0}, \quad U_{\text{out}} = \int_R^{\infty} 2\pi r^2 dr \int_{-1}^{+1} dc \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{p\sqrt{1+3c^2}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{2\pi R^3 \sigma_0^2}{9\epsilon_0}.$$

e) La pressione sulla superficie vale

$$\wp = \sigma \frac{E_{\perp}^{\text{in}} + E_{\perp}^{\text{out}}}{2} = \frac{\sigma^2}{6\epsilon_0}$$

Questo esercizio sarà utile in seguito in quanto, per linearità, si ottengono nuove soluzioni sommando un campo elettrico ‘esterno’ costante in tutto lo spazio. Ad esempio è possibile avere $\mathbf{E} = 0$ dentro la sfera: questo sarà il comportamento di una sfera conduttrice all’equilibrio, esercizio 5.10. Oppure è possibile ridurre solo parzialmente \mathbf{E} dentro la sfera: q questo sarà il comportamento di una sfera dielettrica, esercizio 7.13. Una sfera conduttrice non all’equilibrio sarà calcolata nell’esercizio 8.21.

Esercizio 3.6: Cilindro polarizzato

Calcolare il campo elettrico generato da una cilindro polarizzato trasversalmente con carica superficiale $\sigma(\theta) = \sigma \cos \theta$.

✚Soluzione: Si procede in modo analogo all’esercizio precedente con la sfera, sovrapponendo due cilindri con densità uniformi ρ e $-\rho$.

Esercizio 3.7: Paradosso sui dipoli I

Un dipolo p è orientato lungo l’asse z e libero di muoversi lungo l’asse x . È presente un campo elettrico esterno $E_z = \alpha x$. Calcolare la forza sul dipolo.

✚Soluzione: Secondo le formule sui dipoli si avrebbe energia potenziale $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -p\alpha x$, e quindi una forza $\mathbf{F} = -\nabla U = p\alpha \mathbf{x}$. Tuttavia, pensando il dipolo come due cariche $\pm q$ poste una sopra l’altra lungo l’asse z , è geometricamente ovvio che la forza totale è zero.

La soluzione del paradosso è che la formula semplificata per la forza su di un dipolo è stata ricavata assumendo un campo elettrico irrotazionale, e non è applicabile a questo esercizio in cui il campo elettrico proposto è rotazionale, come si può vedere calcolando il suo rotore $\nabla \times \mathbf{E} = -\alpha \hat{\mathbf{y}}$, o il suo integrale di linea lungo un circuitino rettangolare nel piano xz . Vedremo in seguito che campi magnetici variabili nel tempo generano campi elettrici rotazionali.

Volendo confondere ancora di più le idee, si può complicare il paradosso considerando un campo elettrico $E_\theta(r, \theta, z) = \alpha/r$ in coordinate cilindriche. Questo campo elettrico ha rotore zero in tutti i punti eccetto che sull’asse z , e potrà essere generato da un campo magnetico variabile localizzato lungo l’asse z .

Esercizio 3.8: Paradosso sui dipoli II

Calcolare l’energia di un dipolo prodotto da un campo elettrico esterno.

✚Soluzione: Secondo le formule generali, l’energia di un dipolo permanente in un campo elettrico esterno è $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$. Se invece il dipolo si forma per effetto del campo stesso come $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$, il lavoro necessario per spostare le sue cariche $\pm q$ da distanza relativa iniziale $s = 0$ fino a $\mathbf{s} = \mathbf{p}/q$ vale

$$\mathcal{L} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}{2}.$$

Lo stesso risultato si ottiene assumendo una più generale relazione $\mathbf{p} = \alpha(E)\mathbf{E}$.

La conservazione dell’energia $\mathcal{L} + U + U'$ implica quindi che deve esistere una ulteriore energia potenziale $U' = +\frac{1}{2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, dovuta al fatto che l’esistenza stessa del dipolo è dovuta alla forza esterna. Se il dipolo non ha modulo costante, questa energia non rimane costante, e può essere ignorata nel bilancio energetico.

Per verificare questo risultato generale consideriamo il sistema particolare più semplice possibile: due cariche $\pm q$ a distanza x tenute assieme da una forza elastica. Il valore della costante k dovrebbe essere irrilevante. Il dipolo vale $p = qx = qE/k$. L’energia di legame meccanica vale

$$U' = \frac{k}{2}x^2 = \frac{pE}{2}.$$

Questo sistema è realizzato dall'atomo di Thomson, nel quale avevamo visto che $\alpha = 4\pi\epsilon_0 a_0^3$. L'energia U' è fornita dall'energia elettrica che, con la geometria assunta da Thomson, fornisce una energia di tipo elastico:

$$U'(r) - U'(0) = -e[\varphi(r) - \varphi(0)] = \frac{e^2}{2\alpha} r^2 = \frac{pE}{2}.$$

Esercizio 3.9: Paradosso sui dipoli III

Calcolare la forza fra due dipoli p e p' a distanza x , orientati parallelamente alla loro separazione. Come cambia la risposta se p' è indotto da p come $p' = \alpha x$?

➤Soluzione: Abbiamo due formule che danno la forza fra dipoli. Vediamo come applicarle.

1. La formula più generale è $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$. Con la geometria del problema si semplifica a $\mathbf{F} = p \partial_x \mathbf{E}$ dove

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}'}{r^3} \right] = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p'}{x^3} \hat{\mathbf{x}} \quad \mathbf{r} = (x, y, z)$$

è il campo elettrico generato da \mathbf{p}' . Quindi la forza fra i dipoli è parallela alla loro separazione e vale $F_x = -3pp'/2\pi\epsilon_0 x^4$, che non dipende dall'origine di p' : dipolo intrinseco o indotto da p .

2. La formula meno generale ma più semplice è $\mathbf{F} = -\nabla U$ con

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{pp'}{x^3}.$$

Se il dipolo p' è intrinseco e quindi costante, si ottiene una forza uguale a quella calcolata precedente. Se invece il dipolo è indotto come $p' = \alpha x$, viene una forza sbagliata che differisce di un fattore $2/3$. Come nell'esercizio precedente, ci sono altre forze in gioco e quindi non è corretto calcolare la forza considerando solo l'energia U .

La formula meno generale ma più semplice può essere usata immaginando di considerare un dipolo costante, e poi sfruttando il fatto che la forza non dipende da come il dipolo può variare.

Esercizio 3.10: Paradosso sui dipoli IV

Due dipoli sono orientati rispettivamente lungo gli assi z ed x . Verificare che le forze sono uguali ed opposte (ma non radiali). Verificare che i momenti delle forze non lo sono.

➤Soluzione: Il risultato può apparire strano, ma il momento totale è zero se calcolato rispetto ad un polo fisso e non sommando i momenti agenti su due oggetti diversi calcolati rispetto alle loro posizioni. Il momento angolare totale, conservato, contiene il contributo dovuto alla rotazione dei due oggetti, più quello dovuto al loro moto.

Siccome i conti sono noiosi, è utile sottolineare che la stessa situazione si verifica in un sistema più semplice: un dipolo nel campo elettrico di una carica. Il dipolo sente un momento delle forze (che tende a farlo girare per allinearsi con il campo elettrico della carica), ed una forza che tende a farlo muovere.

Capitolo 4

Conduttori

Un conduttore è un materiale che contiene cariche elettriche (di solito elettroni) libere di muoversi; continuano a muoversi finché un campo elettrico $\mathbf{E} \neq 0$ esercita una forza. In questo capitolo studiamo conduttori in condizioni statiche: le cariche si riaggiustano (dissipando energia termicamente) fino a raggiungere l'unico possibile stato stabile, tale che $\mathbf{E} = 0$ dentro il conduttore ed $E_{\parallel} = 0$ lungo la sua superficie. Ovvero il potenziale φ è costante nel conduttore. Quindi il campo elettrico subito fuori da un conduttore vale $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$ dove σ è la densità di carica superficiale. La pressione elettrica sulla superficie è $\sigma E_{\perp}/2$.

Esercizio 4.1: 1 lastra conduttrice carica

Una lastra di superficie S ha carica totale q . Calcolare il campo elettrico indotto in condizioni di equilibrio ed in assenza di campo elettrico esterno.

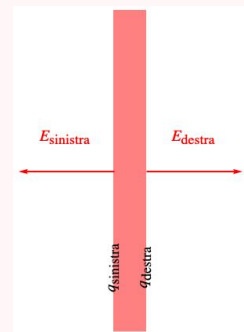
➤Soluzione: Una lastra è un parallelepipedo sottile, con due facce di superficie S , e bordi trascurabili. Chiamiamo x l'asse ortogonale alla lastra. La carica totale q potrebbe distribuirsi in maniera uniforme, con q_{destra} sulla faccia di destra, e quindi $q_{\text{sinistra}} = q - q_{\text{destra}}$ sulla faccia di sinistra. I campi elettrici vicini alla lastra sono quindi

$$E_x^{\text{sinistra}} = -\frac{q_{\text{sinistra}}}{\epsilon_0 S}, \quad E_x^{\text{destra}} = \frac{q_{\text{destra}}}{\epsilon_0 S}.$$

Le cariche si respingono, e quindi avranno convenienza energetica a ripartirsi come

$$q_{\text{destra}} = q_{\text{sinistra}} = q/2.$$

Infatti, la configurazione simmetrica genera un campo elettrico esterno $E = q/2S\epsilon_0$ ortogonale alla lastra ed uguale sui due lati. Questa è la configurazione che minimizza l'energia elettrostatica $U = \int dV \epsilon_0 E^2/2 \approx S\Delta x \epsilon_0 (E_{\text{sinistra}}^2 + E_{\text{destra}}^2)/2$, dove il campo rimane circa costante fino ad una lunghezza Δx di ordine \sqrt{S} . Anche una configurazione non simmetrica è soluzione, ma corrisponde ad avere un campo elettrico esterno $E_x^{\text{ext}} = (E_x^{\text{destra}} + E_x^{\text{sinistra}})/2 \neq 0$, che infatti produce una forza sul conduttore.



Esercizio 4.2: 2 lastre conduttrici cariche

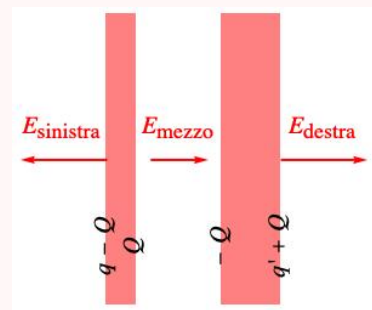
Due lastre parallele di superficie S a piccola distanza $d \ll \sqrt{S}$ hanno cariche totali q e q' . Calcolare i campi elettrici indotti, in assenza di campo elettrico esterno.

➤Soluzione: La difficoltà del problema consiste nel trovare come le cariche si ripartiscono fra le superfici destra e sinistra delle lastre. Imponendo $E = 0$ dentro i conduttori, si trova che le cariche sulle 4 superfici (da sinistra a destra) devono essere

$$q - Q, \quad Q, \quad -Q, \quad q' + Q$$

dove Q è incognito. I campi elettrici sono, in modulo

$$E_{\text{sinistra}} = \frac{q - Q}{\epsilon_0 S}, \quad E_{\text{mezzo}} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}, \quad E_{\text{destra}} = \frac{q' + Q}{\epsilon_0 S}.$$



Nuovamente l'assenza di campo elettrico esterno significa $E_{\text{sinistra}} = E_{\text{destra}}$. Infatti l'energia totale è data da $\int dV \epsilon_0 E^2/2$, con l'integrale dominato dal grande spazio a sinistra ed a destra. Quindi le cariche minimizzano $E_{\text{sinistra}}^2 + E_{\text{destra}}^2$. Questo accade nella configurazione simmetrica, $Q = (q - q')/2$:

$$E_{\text{sinistra}} = E_{\text{destra}} = \frac{q + q'}{2\epsilon_0 S}, \quad E_{\text{mezzo}} = \frac{q - q'}{2\epsilon_0 S}.$$

I campi sono gli stessi di quelli generati da due superfici con cariche q e q' ; conseguentemente anche la forza sui conduttori è la stessa:

$$F = S \frac{\epsilon_0}{2} (E_{\text{destra}}^2 - E_{\text{mezzo}}^2) = \frac{qq'}{2\epsilon_0 S}$$

ed è attrattiva se hanno cariche di segno opposto, e repulsiva altrimenti. Per $q' = -q$ il sistema diventa un condensatore.

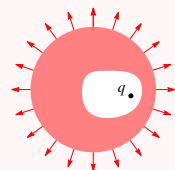
Esercizio 4.3: Sfera conduttrice con cavità

Una sfera conduttrice scarica di raggio R contiene al suo interno un buco di forma e posizione generici. Dentro il buco è situata una carica elettrica q . Calcolare il campo elettrico al di fuori della sfera.

➤Soluzione: Il conduttore non può schermare completamente la carica interna (effetto ‘gabbia di Faraday’): il campo esterno non può essere zero, in quanto il flusso soddisfa a $\Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$, ed esiste la carica q . A livello matematico, questo problema con la carica ‘dentro’ non è equivalente al problema con la carica ‘fuori’ (che darebbe campo zero nella zona interna) in quanto per motivi fisici cerchiamo soluzioni dell'equazione $\nabla^2 \varphi = 0$ con i campi che vanno a zero all'infinito (di solito nella convenzione $\varphi = 0$ all'infinito). Si ha quindi una condizione al bordo implicita all'infinito che distingue il problema con la carica ‘dentro’ dal problema con la carica ‘fuori’.

Nonostante l'assenza di simmetria sferica, il campo elettrico esterno è uguale a quello generato da una carica q al centro del conduttore. Infatti, l'unica soluzione dell'equazione di Poisson con potenziale costante sulla sfera e flusso $\Phi_E = q/\epsilon_0$ è

$$\varphi = q/4\pi\epsilon_0 r \quad \text{per } r > R.$$



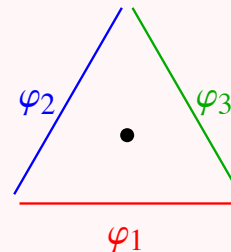
Non esiste una soluzione semplice per il campo elettrico nel buco.

Esercizio 4.4: Tetraedro conduttore

Quattro triangoli equilateri conduttori, mantenuti a potenziali $\varphi_{1,2,3,4}$ vengono disposti in modo da formare la superficie di un tetraedro. Quanto vale il potenziale nel centro?

➤Soluzione: La geometria è troppo complicata per essere risolta direttamente, ma si può arrivare alla risposta mediante considerazioni generali.

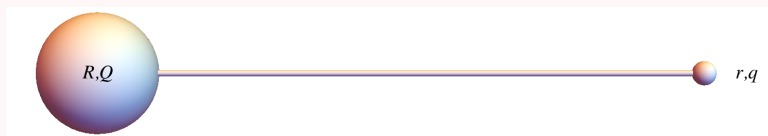
1. Il potenziale è una combinazione *lineare* dei 4 contributi: $\varphi = \sum_i c_i \varphi_i$. Infatti se so risolvere il problema in cui solo 1 è ‘acceso’ (ovvero $\varphi_1 \neq 0$ e $\varphi_{2,3,4} = 0$), e poi so risolvere il caso con solo 2 ‘acceso’, sommando le due soluzioni ho risolto anche il caso con 1 e 2 accesi.
2. Poi, per motivi di simmetria, il potenziale nel centro deve essere simmetrico in 1, 2, 3, 4. Quindi $\varphi_{\text{centro}} = c \sum_i \varphi_i$.
3. Per finire la costante c deve valere $c = 1/4$ (per cui la soluzione è $\varphi_{\text{centro}} = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4)/4$) in quanto nel caso $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4$ il potenziale deve avere il valore comune costante, siccome le 4 facce formano un tetraedro chiuso.



Esercizio 4.5: Effetto delle punte

Due sfere conduttrici cariche di raggi r ed R lontane sono connesse da un filo. Mostrare che il campo elettrico attorno alla sfera piccola è più grosso che attorno alla sfera grossa.

➤Soluzione: Le cariche in un conduttore carico si respingono, e quindi cercano di andare il più possibile lontane le une dalle altre, generando una forte concentrazione di cariche sulle punte. La sfera piccola schematizza una punta e consente di fare un calcolo esplicito.



Le cariche q e Q sulle due sfere si determinano imponendo che i potenziali sulle superfici delle due sfere siano uguali:

$$\frac{Q}{R} = \frac{q}{r}$$

Questo corrisponde a quanto visto nell'esercizio precedente: $Q_i \propto C_i \propto r_i$. Quindi il campo elettrico è grosso attorno alla sfera piccola

$$\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{q/r^2}{Q/R^2} = \frac{R}{r}.$$

Il massimo campo elettrico che l'aria asciutta può sopportare è qualche MV/m (campi elettrici più forti rendono l'aria conduttrice dando luogo a scariche).

Un parafulmine è un conduttore che collega una zona elevata ad una sotterranea. La punta aiuta a concentrare ulteriormente il campo elettrico, favorendo la scarica elettrica. Mettendo delle punte su di un parafulmine ci si assicura che una nuvola carica elettricamente si scarichi su di esse. Una norma di ‘sicurezza’ italiana imponeva anche di mettere materiali radioattivi sui parafulmini (ancora oggi ci sono!), in quanto i decadimenti ionizzano l'aria aumentando l'efficienza.

Nel passato accadeva un fenomeno teologicamente inspiegabile: i fulmini preferivano colpire le chiese. Il fenomeno è dovuto al fatto che il terreno è un conduttore equi-potenziale: essendo costante la differenza di potenziale fra la terra e la nuvola, il campo elettrico (e quindi la probabilità di una scarica) è maggiore vicino alla cima di edifici alti o costruiti su alture. Per lo stesso motivo è consigliabile non cercare rifugio sotto un albero alto durante un temporale.

Esercizio 4.6: Sfera conduttrice in guscio carico ©

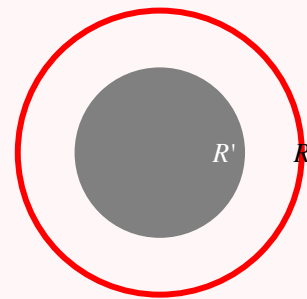
Una carica Q è distribuita con densità superficiale di carica σ costante su di un guscio sferico di raggio R . Al suo interno è contenuta una sfera conduttrice di raggio $R' < R$. Assumendo che le due sfere siano concentriche

e che la sfera conduttrice sia isolata con carica $Q' = 0$:

- Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio.
- Calcolare l'energia elettrostatica del sistema.

Assumendo ora che la sfera conduttrice sia a terra (ovvero a potenziale zero, eguale al potenziale all'infinito):

- Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio.
- Calcolare l'energia elettrostatica del sistema.
- Come cambiano le risposte alle domande a), c) se il centro della sfera conduttrice dista $d < R - R'$ dal centro della densità superficiale σ ?

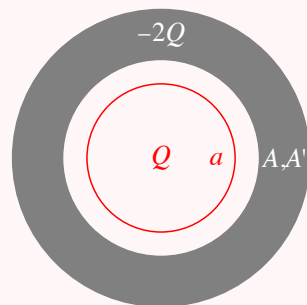


✎ Soluzione:

- $E = 0$ per $r < R$, ed $E_r = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ per $r > R$.
- Siccome $Q' = 0$ si ha $U = \frac{1}{2} Q \varphi_Q = Q^2/8\pi\epsilon_0 R$.
- Una carica Q' appare sulla sfera conduttrice tale che $\varphi = (Q/R + Q'/R')/4\pi\epsilon_0 = 0$, quindi $Q' = -QR'/R$.
- Allo stesso risultato si arriva utilizzando il metodo delle immagini (discusso nel capitolo seguente): l'immagine del guscio sferico Q è un guscio sferico di carica totale Q' interno alla sfera conduttrice, e quindi equivalente ad una carica puntiforme Q' .
- Siccome $\varphi_{Q'} = 0$ si ha $U = \frac{1}{2} Q \varphi_Q = Q(Q + Q')/8\pi\epsilon_0 R = Q^2(1 - R'/R)/8\pi\epsilon_0 R$. Si arriva allo stesso risultato, con più conti, usando $U = \int dV \epsilon_0 E^2/2$.
- Siccome il guscio non genera campo elettrico al suo interno, l'espressione per il potenziale della sfera interna rimane la stessa, e quindi la carica Q' rimane la stessa, e distribuita uniformemente sulla sfera conduttrice. Il campo elettrico è la somma di quello generato dalle due sorgenti.

Esercizio 4.7: Guscio conduttore ©

Una carica Q è distribuita uniformemente sulla superficie di un palloncino sferico di raggio a . Il palloncino si trova all'interno di un guscio conduttore sferico di raggio interno $A > a$ ed esterno $A' > A$. I centri delle due sfere coincidono. Il conduttore è isolato, con carica totale $-2Q$.



- Calcolare la differenza di potenziale fra il centro del palloncino e l'infinito e dire per quale valore di a essa vale zero.
- Calcolare la pressione elettrostatica sul palloncino e sulla superficie interna ed esterna del guscio conduttore.

Il palloncino viene contratto fino a raggiungere un raggio $a' = a/2$.

- Calcolare il lavoro compiuto dalle forze elettriche durante la contrazione del palloncino.
- Una carica Q' viene messa a distanza $2A$ dal centro del palloncino. Calcolare la forza totale a cui è soggetto il palloncino.

✎ Soluzione:

- Una carica $-Q$ si dispone su ciascuna delle superfici del conduttore. Il campo elettrico è radiale e vale $E = 0$ per $r < a$ e per $A < r < A'$; $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ per $a < r < A$; $E = -Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ per $r > A'$. Quindi $\Delta\varphi = Q/4\pi\epsilon_0(1/A' + 1/A - 1/a)$ vale zero per $a = AA'/(A + A')$.

b) $p = \epsilon_0 E^2/2 = Q^2/32\pi^2\epsilon_0 r^4$ per $r = \{a, A, A'\}$.

c) $\mathcal{L} = \int_a^{a/2} 4\pi r^2 p \, dr = (Q^2/8\pi\epsilon_0) \int_a^{a/2} dr/r^2 = -Q^2/8\pi\epsilon_0 a$. La si poteva anche calcolare come variazione dell'energia elettrostatica $U = \frac{1}{2}Q\Delta\varphi$.

d) Il guscio conduttore agisce da schermo: al suo interno il campo elettrico mantiene la simmetria sferica, e quindi la forza totale sul palloncino vale zero.

Esercizio 4.8: Coefficiente di capacità

Calcolare il coefficiente di capacità C di un conduttore sferico isolato di raggio R .

✎Soluzione: Assumendo che abbia carica Q , il campo elettrico vale $E_r = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$, il potenziale vale $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 R$ e quindi $C \equiv Q/\varphi = 4\pi\epsilon_0 R$.

Esercizio 4.9: Coefficienti di capacità

Calcolare i coefficienti di potenziale e di capacità per due conduttori: una sfera di raggio R_1 , concentrica ad una sfera cava di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 .

✎Soluzione: Assumiamo che il primo abbia carica Q_1 , ed il secondo carica Q_2 . La sfera cava ha carica $-Q_1$ sulla superficie interna in quanto il teorema di Gauss, applicato ad una superficie interna dove il campo elettrico vale zero, implica che la carica totale vale zero. Ha quindi carica $Q_1 + Q_2$ sulla superficie esterna. Il campo ed il potenziale elettrico valgono

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } r < R_1 \\ Q_1/4\pi\epsilon_0 r^2 & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{per } R_2 < r < R_3 \\ (Q_1 + Q_2)/4\pi\epsilon_0 r^2 & \text{per } r > R_3 \end{cases} \quad \varphi(r) = \begin{cases} \varphi_1 & \text{per } r < R_1 \\ \varphi_2 + Q_1/4\pi\epsilon_0(1/r - 1/R_1) & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \varphi_2 & \text{per } R_2 < r < R_3 \\ (Q_1 + Q_2)/4\pi\epsilon_0 r & \text{per } r > R_3 \end{cases}.$$

dove

$$\varphi_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3}, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

La matrice dei potenziali tale che $\varphi_i = \sum_j P_{ij} Q_j$ e la matrice delle capacità tale che $Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j$ valgono quindi

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} 1/R_1 - 1/R_2 + 1/R_3 & 1/R_3 \\ 1/R_3 & 1/R_3 \end{pmatrix}, \quad C = P^{-1} = 4\pi\epsilon_0 \begin{pmatrix} \tilde{R} & -\tilde{R} \\ -\tilde{R} & \tilde{R} + R_3 \end{pmatrix}$$

con $\tilde{R} = R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$. Utilizzando i due conduttori come condensatore, mettendo $Q_1 = Q$ e $Q_2 = -Q$, si ottiene la capacità $C = 1/(P_{11} + P_{22} - 2P_{12}) = 4\pi\epsilon_0 / (1/R_1 - 1/R_2)$.

Esercizio 4.10: Tre sfere ©

Tre sfere conduttrici isolate hanno raggio a e sono inizialmente scariche e disposte sui 3 vertici di un triangolo equilatero di lato b . La sfera 1 viene caricata fino a raggiungere potenziale elettrico V (nella convenzione in cui il potenziale elettrico vale zero all'infinito); a questo punto essa contiene una carica Q_1 .

a) Calcolare l'energia elettrostatica del sistema.

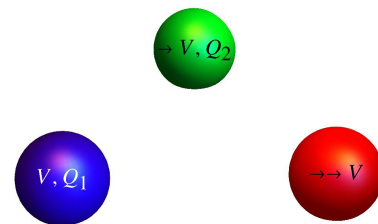
La sfera 1 viene lasciata isolata con carica Q_1 ; la sfera 2 viene poi caricata fino a raggiungere anche essa potenziale V ; a questo punto la sfera 2 contiene una carica Q_2 .

b) Calcolare l'energia elettrostatica del sistema.

Lasciando le sfere 1 e 2 isolate con cariche Q_1 e Q_2 , la sfera 3 viene poi caricata fino a raggiungere il potenziale V .

c) Calcolare la carica Q_3 sulla terza sfera.

d) Calcolare V assumendo solo ora che la distanza b fra le sfere sia molto maggiore del loro raggio a .



➤Soluzione: Occorre ricordare le formule $U = \sum P_{ij}Q_iQ_j/2$ e $V_i = p_{ij}Q_j$, dove P_{ij} sono costanti (date dall'inverso della matrice capacità C_{ij}). Per via della geometria simmetrica del sistema si ha $P_{11} = P_{22} = P_{33} = p$ e $P_{12} = P_{13} = P_{23} = p'$.

a) Una carica Q_1 a potenziale V ha energia elettrostatica $U = \frac{1}{2}Q_1V$. I dati del problema forniscono il valore di $p = V/Q_1$.

b) Caricando la sfera 2 cambia il potenziale sulla sfera 1, ma Q_1 rimane costante in quanto la sfera 1 è isolata. Il potenziale sulla sfera 2 vale $V = pQ_2 + p'Q_1$, quindi $p' = V(Q_1 - Q_2)/Q_1^2$. L'energia elettrostatica per dati Q_1 e Q_2 vale $U = (Q_1^2 + 2Q_1Q_2 - Q_2^2)V/2Q_1$.

c) Imponendo $V = pQ_3 + p'(Q_1 + Q_2)$ si trova $Q_3 = Q_2^2/Q_1$.

d) In tale limite si tratta di tre sfere isolate. Per ciascuna di esse si ha $E = Q/4\pi\epsilon_0r^2$ e quindi $V = Q/4\pi\epsilon_0a = pQ$.

Esercizio 4.11: Piano ondulato fra conduttori ©

Un piano orizzontale viene posto nel piano xy a $z = 0$ ed ha densità superficiale di carica elettrica $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos kx$.

a) Trovare il potenziale elettrico in tutto lo spazio, assumendo che abbia la forma $\varphi(x, y, z) = f(x)F(z)$.

Vengono aggiunti due piani conduttori a terra, situati a $z = \pm h$ con $h = 1/2k$.

b) Trovare il potenziale elettrico in tutto lo spazio, disegnando le linee equipotenziiali.

c) Trovare la carica superficiale indotta sui piani e la pressione elettrostatica.

➤Soluzione:

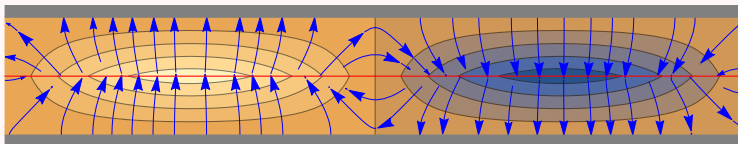
a) Come visto nell'esercizio 2.14 si ha

$$\varphi = -\frac{e^{-k|z|}}{2k\epsilon_0}\sigma_0 \cos kx.$$

b) La soluzione più generale è sempre quella discussa nell'esercizio 2.14, ma ora occorre imporre $\varphi = 0$ a $z = \pm 1/2k$ e non a $z = \infty$. Si trova

$$\varphi = \frac{e^{1-k|z|} - e^{k|z|}}{2(1+e)k\epsilon_0}\sigma_0 \cos kx.$$

Su di un periodo in x le linee di campo ed equipotenziali sono:



La dipendenza di $\varphi(z)$ da z è circa lineare, $1 - |z|/h$, in quanto il problema assume un valore abbastanza piccolo di h : ad una risposta approssimata si poteva arrivare mettendo 2 piani immagine.

c) La carica indotta sui piani conduttori vale

$$\sigma_{\text{ind}} = -\epsilon_0 E_z(z = h) = -\frac{\sqrt{e}}{1 + e} \sigma$$

La pressione vale $p = \sigma_{\text{ind}} E_z / 2 = \epsilon_0 E_z^2 / 2 = \sigma_{\text{ind}}^2 / 2\epsilon_0$.

Esercizio 4.12: Semi-piano conduttore

Calcolare potenziale e campo elettrico di un semipiano conduttore che si trova a $x < 0$, $y = 0$ e z generico.

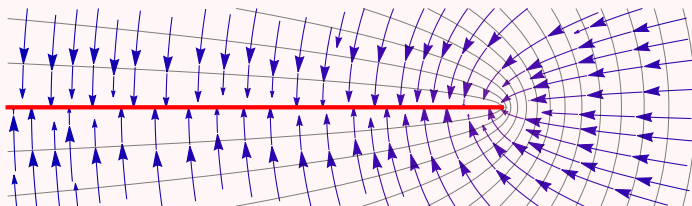
▲Soluzione: Siccome la sorgente non dipende dalla coordinata z , si utilizza l'analisi complessa nel piano x, y : l'equazione $\nabla^2 \varphi = 0$ in due dimensioni è risolta da $\varphi = \text{Re } f(z)$ dove f è una generica funzione di $z = x + iy$ (variabile complessa, da non confondere con la coordinata z). Il risultato desiderato è fornito scegliendo la funzione $f = \sqrt{z}$, in quanto il piano è equipoteniale (la parte reale di f è zero per $y = 0$ e $x < 0$) in maniera non ovvia (la derivata di f ha una discontinuità sul piano, che quindi è carico). Esplicitamente

$$\varphi = \text{Re } \sqrt{z} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}$$

calcolabile elevando al quadrato $u + iv = \sqrt{x + iy}$, eliminando v e risolvendo l'equazione quadratica per u . Facendo le derivate si verifica che $\nabla^2 \varphi = 0$. Vicino al piano, per $y \rightarrow 0$, il campo elettrico vale

$$\mathbf{E}(x, 0) = \begin{cases} (0, \pm 1/\sqrt{x}) & \text{per } x < 0 \\ (-1/\sqrt{x}, 0) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

mostrando l'effetto delle punte: il campo (e quindi la densità superficiale di carica) è intenso sul bordo. Questo è anche visibile disegnando le curve equi-potenziali e le linee di campo:



Sia le linee di campo che quelle equipotenziali sono parabole. Il motivo è il seguente: entrambe le linee sono disegnabili invertendo $f = \sqrt{z}$ in $z = f^2$ ed espandendo $f = \varphi + iv$, ottenendo

$$x = \varphi^2 - v^2, \quad y = 2\varphi v.$$

Variando il parametro v a φ fissato si ottengono le linee equipotenziali. Variando φ a valori fissati di v si ottengono le linee di campo. Questo trucco sarà utile nell'esercizio seguente.

Esercizio 4.13: Bordo di condensatore

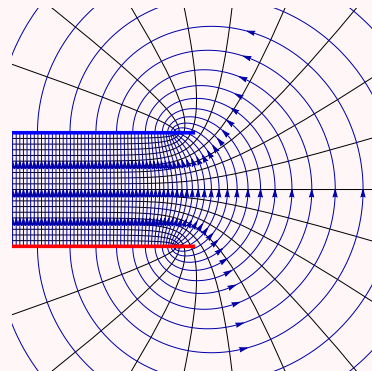
Calcolare potenziale e campo elettrico di un condensatore che si trova a $x < 0$ e z generico.

➤Soluzione: Anche questo problema è risolubile tramite l'analisi complessa.

Si sceglie una funzione $f(z)$ implicitamente definita da $z = f + e^f$. Scrivendo $z = x + iy$, $f = u + iv$ e separando parti reali da parti immaginarie si ottiene

$$x = u + e^u \cos v, \quad y = v + e^u \sin v.$$

Interpretando la parte immaginaria $v = \varphi$ come il potenziale elettrico, questa espressione consente di disegnare le linee equipotenziali mettendo v fissato e variando il parametro u (la formula mostra che $u \ll -1$ descrive la regione molto interna ai piatti, e quindi $u \gtrsim 0$ descrive la regione fuori dai piatti). Inoltre, le linee del campo elettrico sono ottenute fissando u e variando il potenziale $v = \varphi$. Variando v si ottengono cicloidi sovrapposte: per coprire il piano una volta sola occorre restringere $-\pi < v < \pi$, in cui gli estremi corrispondono ai potenziali sui due piatti a $y = \pm\pi$.



La funzione f è esplicitamente data da $f = z - \text{plog } e^z$ dove plog è la funzione $g(x)$ che risolve $x = ge^g$, detta 'productlog'. Tuttavia plog ha soluzioni multiple nel piano complesso, che vanno scelte in maniera appropriata.

Modificando la funzione in $z = c_1 f + e^{c_2 f}$ è possibile variare la distanza fra i piatti e la loro differenza di potenziale.

Metodo delle cariche immagine

In presenza di cariche elettriche o campi elettrici esterni, le cariche dentro un conduttore si spostano fino a renderlo equipotenziale. La regola generale per trovare la configurazione finale è che non esiste nessuna regola, come nel wrestling. Se uno trova una soluzione, allora quella è l'unica soluzione, e non importa come uno la abbia trovata. In alcuni casi simmetrici il sistema si comporta come se ci fossero cariche fittizie, dette 'cariche immagini'.

Esercizio 5.1: Semi-spazio conduttore

Una carica puntiforme q è posta a distanza d da un semi-spazio conduttore infinito posto a potenziale zero. Calcolare: a) il potenziale elettrico; b) il campo elettrico; c) la densità superficiale di carica sul piano; d) la carica totale indotta sul conduttore; e) la forza sulla carica q ; f) la forza sul conduttore; g) il lavoro necessario per spostare la carica q fino a distanza infinita. h) l'energia elettrostatica del sistema. i) Come cambiano le risposte se il piano conduttore è isolato?

➤Soluzione: Possiamo scegliere le coordinate $\mathbf{r} = (x, y, z)$ in modo che il piano sia a $x = 0$ e la carica a $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$.

- a) Tramite il metodo delle immagini si indovina che il potenziale è quello dato dalla carica q e da una carica $-q$ situata nel punto immagine $-\mathbf{d}$: infatti in questa maniera il piano è a potenziale zero.

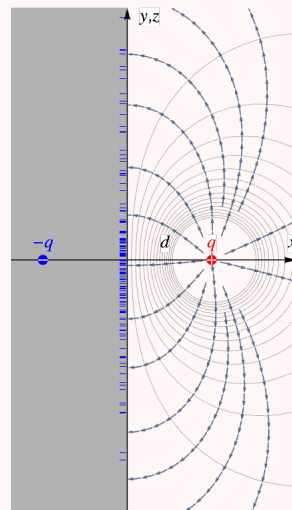
$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \right) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

- b) Quindi il campo elettrico vale $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. La figura mostra le linee equipotenziali e le linee del campo.
- c) Sul piano si ha una distribuzione superficiale di carica di dimensione d centrata davanti alla carica q :

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_{\perp} = -\epsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1+1}{4\pi} \frac{q d}{(y^2 + z^2 + d^2)^{3/2}}$$

- d) La carica totale indotta è $Q_{\text{ind}} = \int \sigma dy dz = -q$, come si può verificare o facendo esplicitamente l'integrale, o applicando il teorema di Gauss ad una superficie chiusa che ha come bordo il piano e che racchiude il conduttore a $x < 0$, e facendo il doppio gioco fra problema fisico e sistema immaginario:

$$Q_{\text{ind}} \stackrel{\text{fis}}{=} \epsilon_0 \Phi_E \stackrel{\text{imm}}{=} -q.$$



- e) La carica q è attratta dalle cariche di segno opposto indotte sul piano. La forza è meglio calcolabile usando il sistema immaginario: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{-q} = -q^2\hat{\mathbf{r}}/4\pi\epsilon_0(2d)^2$.
- f) Per il principio di azione e reazione la forza sul piano è uguale ed opposta alla forza sulla carica calcolata al punto precedente. È possibile verificarlo esplicitamente integrando la pressione sul piano

$$F = \int p dS = \int \sigma \frac{E_{\perp}}{2} dy dz = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2}.$$

(Come discusso nell'esercizio 2.1, la pressione su di un piano è data dal campo elettrico medio sui due lati: $E_{\perp}/2$ è la media del campo elettrico 'subito fuori' e 'subito dentro' il conduttore).

- g) Per portare la carica da $x = d$ ad $x = \infty$ occorre compiere un lavoro $\mathcal{L} = \int_d^{\infty} F dx = q^2/16\pi\epsilon_0 d$, uguale a metà della variazione dell'energia potenziale fra carica e carica-immagine $V(\infty) - V(d) = q^2/8\pi\epsilon_0 d$, in quanto non serve lavoro per spostare la carica immagine.

- h) L'energia elettrostatica è calcolabile come:

h1) Dalla conservazione dell'energia, $\mathcal{L} + U = 0$.

h2) Usando $U = \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{1}{2} [q\varphi_{-q} + Q_{\text{ind}}0] = -q^2/16\pi\epsilon_0 d$: il fattore $1/2$ nasce in quanto la carica immagine non esiste, e quindi non contribuisce all'energia.

h3) Usando $U = \int dV \epsilon_0 E^2/2 + \text{cte}$, notando che il fattore $1/2$ nasce in quanto il campo elettrico è diverso da zero solo su metà del volume. La costante infinita è la auto-energia della carica puntiforme q .

- i) Se il piano conduttore non è posto a $\varphi = 0$ ma è isolato non cambia niente. Infatti, se è finito ma grosso (dimensioni $D \gg d$) ed ha carica totale zero, la carica q induce una carica $-q$ nella zona 'vicina', e quindi una carica $+q$ concentrata ai bordi lontani, che è irrilevante nel limite $D \rightarrow \infty$.

È possibile ora risolvere problemi con sorgenti generiche davanti ad un piano conduttore sfruttando la linearità: se ci sono due cariche q_1 e q_2 basta sommare le soluzioni. Se c'è un dipolo, si introduce un dipolo immagine. Se si vuole studiare un filo carico sospeso sopra il terreno, si considera un filo immagine sottoterra.

Esercizio 5.2: Lastra conduttrice

Si calcoli il campo elettrico in presenza di una carica puntiforme q situata a distanza d da una lastra conduttrice piana di spessore finito s .

➤Soluzione: Mettendo la carica a $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$ e le due facce della lastra nei piani $x = 0$ e $x = -s$, è immediato verificare che

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \right) & \text{nel lato dove c'è } q, \text{ i.e. } x > 0 \\ 0 & \text{dentro il conduttore, i.e. } -s < x < 0 \\ 0 & \text{dal lato opposto, i.e. } x < -s \end{cases}$$

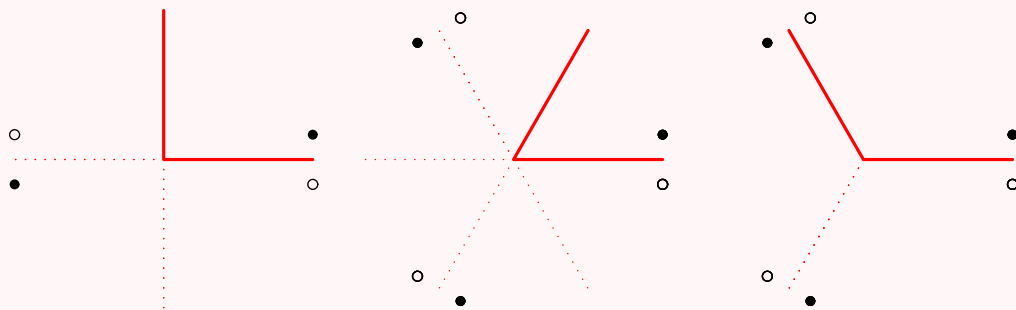


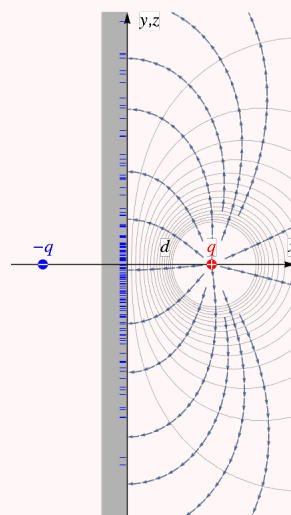
Figura 5.1: Il metodo delle immagini consente di risolvere problemi con due semi-piani conduttori che si intersecano con angoli di 90° , 60° , ma non per 120° .

è una soluzione, e quindi è la soluzione.

Se $d > s$ la carica immagine $-q$ è situata fuori dalla lastra, ma questo è irrilevante in quanto la soluzione è data in termini della carica immagine situata a $-d$ solo sul lato $x > 0$ dove c'è la carica q . Dal lato opposto dove non c'è la carica, la soluzione è invece $\varphi = 0$, e quindi $\mathbf{E} = 0$. Se il conduttore dal lato opposto non fosse piano ma avesse una forma artistica, rimarrebbe sempre $\mathbf{E} = 0$.

Questo è un esempio di un fenomeno più generale: una regione di spazio circondata da un conduttore viene schermata da cariche esterne e campi elettrici esterni. Se un conduttore contiene un buco, dentro si ha $\mathbf{E} = 0$. Infatti la ovvia unica soluzione dell'equazione di Poisson con condizioni al bordo $\varphi(\text{bordo del buco}) = \varphi_0$ è $\varphi(\text{dentro al buco}) = \varphi_0$. Questo risultato semplice e generale è dovuto al fatto che la forza di Coulomb ha un esponente speciale $F \propto 1/r^n$ con $n = 2$, che consente di descriverla mediante l'equazione di Poisson: quindi verificare che davvero $\mathbf{E} = 0$ in un buco in un conduttore è un modo di testare sperimentalmente che l'esponente n è davvero molto vicino a 2.

Per schermare un campo elettrico (stazionario) non serve racchiudere tutto con un conduttore: una griglia conduttrice a maglie piccole costa e pesa di meno, e a fare un buon lavoro di schermaggio su scale maggiori delle dimensioni delle maglie, come calcolato nell'analogo esercizio 2.14.



Esercizio 5.3: Due semi-piani conduttori

Due semi-piani conduttori a terra si intersecano formando un angolo θ . Una carica q si trova nella regione di spazio vuota. Per quali valori di θ è possibile risolvere il problema mediante cariche immagine?

➤Soluzione: Aggiungendo 2 cariche simmetriche rispetto ai 2 piani, e poi cariche immagini delle cariche immagini (in maniera da mantenere la simmetria rispetto ad entrambi i piani) si trova che, per un angolo generico il metodo fallisce, producendo infinite cariche immagine nella zona fisica. Per angoli speciali $\theta = 2\pi/n$, dove n è un intero le operazioni di riflessione formano un gruppo di simmetria, e si ottiene un numero finito di cariche immagine. Come mostrato in fig. 5.1, per $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 60^\circ$ non ci sono cariche immagine nella zona fisica; mentre per $\theta = 120^\circ$ si ha una carica immagine nella zona fisica (per cui è possibile solo risolvere un problema con entrambe le cariche come fisiche).

L'unica complicazione non ovvia dovuta all'avere tante cariche immagini è nel calcolo dell'energia elettrostatica. La formula generale per l'energia elettrostatica è:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^{\text{fisiche}} q_i \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_{i < j}^{\text{fisiche}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_i^{\text{immagini}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right] \quad \text{in quanto} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j^{\text{tutte}} \frac{q_j}{r} \quad (5.1)$$

avendo ignorato le cariche sui conduttori in quanto assunti essere a terra.

Come verifica consideriamo ad esempio il caso $\theta = 90^\circ$, per cui servono 3 cariche immagini, come mostrato in fig. 5.1a. Iniziamo a calcolare l'energia come il lavoro \mathcal{L} necessario a spostare la carica. Per semplicità

mettiamo la carica lungo l'asse di simmetria a distanza d dai piani: la carica risente una forza F attrattiva diretta lungo l'asse con modulo

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{-1}{(2d)^2} + \frac{1}{(2\sqrt{2}d)^2} \right], \quad \text{per cui} \quad \mathcal{L} = \int_{\sqrt{2}d}^{\infty} F ds = \frac{(-4 + \sqrt{2})q^2}{8d \cdot 4\pi\epsilon_0}$$

Il lavoro è uguale all'energia potenziale della sola carica fisica

$$U(1) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq 1} \frac{q_1 q_i}{r_{1i}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2}{2d} + \frac{1}{2\sqrt{2}d} \right] = \mathcal{L}$$

e quindi ad 1/4 dell'energia potenziale ottenuta sostituendo tutte le cariche immagini con cariche vere

$$U(1) + U(2) + U(3) + U(4) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = 4U(1).$$

Esercizio 5.4: Piano conduttore: dipolo immagine ©

Un dipolo elettrico \mathbf{p} è situato nel punto di coordinate cartesiane $(x, y, z) = (0, 0, h)$. La regione di spazio $-h/2 < z < 0$ contiene un conduttore. Calcolare:

- Il campo elettrico \mathbf{E} nel punto di coordinate $(0, 0, -h)$.
- L'energia elettrostatica del sistema.
- La forza da applicare sul dipolo per impedirne il moto traslatorio.
- Assumendo che il dipolo sia libero di ruotare ma non di traslare, calcolare il momento delle forze elettrostatiche agente sul dipolo e l'orientazione del dipolo per cui si ha la posizione di equilibrio stabile.



✎ Soluzione:

- $\mathbf{E} = 0$: il conduttore scherma le cariche elettriche. Il campo elettrico nel semipiano $z > 0$ è invece dato da un dipolo immagine $\mathbf{p}' = (-p_x, -p_y, p_z)$ e vale, nella posizione del dipolo \mathbf{p} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}'}{r^3} \right], \quad \mathbf{r} = (0, 0, 2h).$$

- L'energia potenziale vale

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2h)^3} (-p^2 - p_z^2)$$

nella quale non viene aggiunta l'energia potenziale del dipolo immagine.

- È opposta alla forza elettrica sentita dal dipolo, e quindi eguale a $\mathbf{F} = \nabla U$, la cui unica componente non nulla è $F_z = +\partial U / \partial h$.
- Il momento delle forze vale

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 (2h)^3} (p_y, -p_x, 0)$$

ed è uguale a zero se $p_x = p_y = 0$ (equilibrio stabile che minimizza U) e se $p_z = 0$ (equilibrio instabile che massimizza U).

Esercizio 5.5: Due semi-piani conduttori a 60° ©

Una carica puntiforme q è situata a distanza L da due semi-piani conduttori messi a terra e che formano un angolo di 60° fra di loro. Si calcoli

- Il potenziale elettrico in tutto lo spazio, descrivendolo mediante un sistema di cariche immagini.
- L'energia elettrostatica del sistema.
- La carica totale indotta su ciascun semi-piano conduttore.
- La forza elettrica agente sulla carica q .

➤Soluzione:

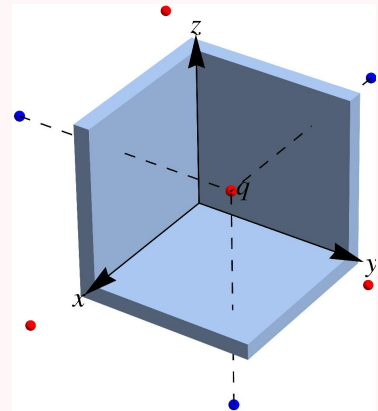
- Servono 5 cariche immagine situate a $\vec{x}_n = 2L(\cos \theta_n, \sin \theta_n)$ con $\theta_n = n \times 60^\circ$, alternate di segno. Insieme alla carica vera, situata ad x_0 , le 6 cariche sono sui vertici di un esagono, come disegnato in fig. 5.1b.
- $U = \frac{1}{2}q\varphi(q) = (-15 + 4\sqrt{3})q^2/96\pi\epsilon_0 L$.
- La carica totale indotta deve essere $-q$, e quindi, per motivi di simmetria, è $-q/2$ su ciascuno dei due semi-piani conduttori.
- Si ha $F_y = 0$ e, usando $x = 2L$,

$$F_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial L} = \frac{(15 - 4\sqrt{3})q_0^2}{192\pi\epsilon L^2}.$$

Esercizio 5.6: Carica in angolo ©

Una carica puntiforme q è situata nel punto di coordinate $x = y = z = d$. Un conduttore riempie la regione dove $x < 0$ e/o $y < 0$ e/o $z < 0$. Calcolare:

- L'energia potenziale del sistema;
- La forza che agisce sulla carica q ;
- La densità superficiale di carica σ nel punto di coordinate $x = 0, z = y = d$ e la carica totale presente sul quarto-di-piano che contiene tale punto;
- Il potenziale elettrico nella regione di spazio a distanza $r \gg d$ al primo ordine non nullo in $1/r$, specificando in particolare la dipendenza da r e da x, y, z .



➤Soluzione: Il problema è risolto con il metodo delle immagini, aggiungendo 7 cariche immagini $q_i = q \operatorname{sign}(x_i y_i z_i)$ ai vertici $x_i, y_i, z_i = \pm d$ di un cubo.

- L'energia elettrostatica vale

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \frac{q^2}{96\pi\epsilon_0 d} (-18 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$$

- Si può calcolare la forza che agisce sulla carica sommando le forze di Coulomb prodotte dalle cariche immagini

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^7 \frac{qq_i(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} \left[-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

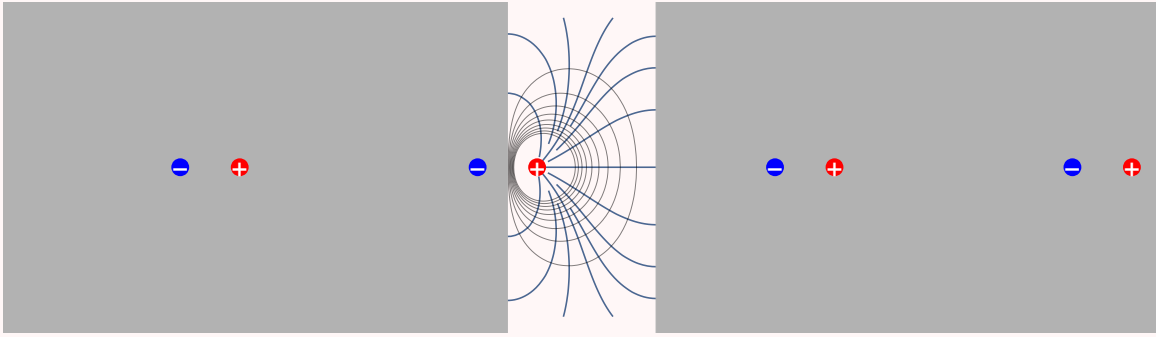


Figura 5.2: Carica fra due piani conduttori, sistema di cariche immagine, curve di livello del potenziale elettrico e linee di campo.

avendo separato il contributo delle 3 cariche a distanza $2d$, delle 3 a distanza $2\sqrt{2}d$ e di quella a distanza $2\sqrt{3}d$. Con meno conti, si arriva allo stesso risultato notando che per motivi di simmetria la forza è diretta lungo il versore $\mathbf{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ e la sua proiezione lungo tale versore vale

$$F = -\mathbf{n} \cdot \nabla U = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial U}{\partial d} = \frac{q^2}{96\pi\epsilon_0 d^2 \sqrt{3}} (-18 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{6\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 2}{12d^2}.$$

c) Per motivi di simmetria la carica totale deve essere $-q/3$. La densità di carica vale:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0, y=z=d} = \frac{q}{\pi} \frac{-350 + 27\sqrt{5}}{675d^2}.$$

d) Il potenziale deve avere la forma di un ottupolo: $\varphi \simeq cq d^3 xyz / \pi \epsilon_0 r^7$ in maniera da valere zero sul conduttore. Il conto esplicito mostra che la costante vale $c = 30$.

Esercizio 5.7: Piano carico fra 2 piani conduttori

Due piatti conduttori paralleli a distanza ℓ e con area $S \gg \ell^2$ (idealmente infiniti, in maniera da poter trascurare gli effetti ai bordi) sono tenuti allo stesso potenziale. Una carica Q è distribuita uniformemente su di una superficie piana di area S a distanza δ e $\delta' = \ell - \delta$ dai piatti conduttori. Calcolare le cariche totali indotte q e q' sui due piatti.

➤Soluzione: Essendoci due incognite occorrono due equazioni. Una prima equazione è $q + q' = -Q$, come si dimostra facilmente applicando il teorema di Gauss ad una superficie che racchiude il sistema, tenendo conto che il campo elettrico è zero al di fuori.

All'interno c'è un campo elettrico $E = \sigma/\epsilon_0$ vicino al conduttore con carica $q = S\sigma$ ed $E' = \sigma'/\epsilon_0$ vicino al conduttore con carica $q' = S\sigma'$. I campi elettrici sono costanti. Siccome i due conduttori sono allo stesso potenziale deve essere $E\delta = E'\delta'$. Quindi

$$\frac{q}{q'} = \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{E}{E'} = \frac{\ell - \delta}{\delta}.$$

Risolvendo le due equazioni si trova $q = -Q(1 - \delta/\ell) = -Q\delta'/\ell$ e $q' = -Q\delta/\ell$.

Esercizio 5.8: Carica fra 2 piani conduttori

Due piani conduttori paralleli a distanza ℓ sono tenuti allo stesso potenziale. Una carica puntiforme Q viene messa a distanze δ e $\delta' = \ell - \delta$ dai piani. a) Calcolare le cariche totali indotte q e q' . b) Calcolare il potenziale elettrico. c) Calcolare la forza sulla carica Q .

➤Soluzione: Per via del principio di sovrapposizione, la soluzione è la stessa che nell'esercizio precedente. Infatti possiamo sovrapporre infinite cariche dQ fino a formare un piano di carica Q ; e ciascun contributo dQ produce cariche indotte sui due conduttori in egual proporzione.

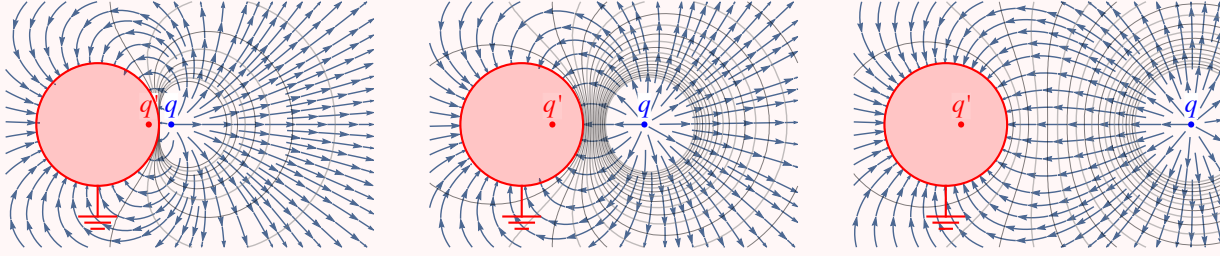


Figura 5.3: *Linee di campo e superfici equipotenziali in presenza di una carica q a distanze varie da una sfera conduttrice a terra.*

Questo esercizio può anche essere risolto come una difficile applicazione del metodo delle cariche immagini: una soluzione completa esplicita è ottenuta mediante infinite cariche immagini come mostrato in figura 5.2. Se i due piani sono situati a $x = 0$ ed $x = \ell$, e la carica Q è situata ad $x = \ell$, le cariche immagini $\pm q$ sono situate a $x_n = 2n\ell \pm \delta$ per $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$. In pratica è sufficiente prendere una decina di cariche per ottenere una buona approssimazione del potenziale.

La forza sulla carica Q è ottenuta sommando le forze fra le cariche immagini: contribuiscono solo le cariche immagini $-Q$ in quanto, come si vede dalla figura, le cariche immagini $+Q$ sono disposte simmetricamente attorno alla carica Q . Si ottiene

$$F_x = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0\ell^2} \left[\psi'\left(\frac{\delta}{\ell}\right) - \psi'\left(1 - \frac{\delta}{\ell}\right) \right]$$

dove ψ è la funzione digamma. Integrando la densità di carica indotta sui piani si può trovare la carica totale indotta; tuttavia occorre fare attenzione a calcolare $\int dS \sum_n$ e non $\sum_n \int dS$.

Esercizio 5.9: Sfera conduttrice a terra

Una carica q è situata a distanza R dal centro di una sfera conduttrice di raggio r messa a potenziale zero. Calcolare: a) il potenziale elettrico, il campo elettrico; b) la densità superficiale di carica sulla sfera e la carica totale indotta sul conduttore; c) la forza sulla carica q ; d) il lavoro necessario per spostare la carica q fino a distanza infinita.

◀Soluzione: Il problema può essere risolto tramite il metodo delle immagini aggiungendo

una carica immagine $q' = -qr/R$ situata a distanza r^2/R dal centro della sfera,

come illustrato in figura 5.3, e come mostrato in seguito. Il fatto che esista questa soluzione non ovvia è indice che la teoria finale dell'elettromagnetismo avrà una simmetria non ovvia, chiamata simmetria conforme.

Un giorno qualcuno notò che il potenziale generato da due cariche $\varphi = (q_1/r_1 + q_2/r_2)/4\pi\epsilon_0$ vale zero su di una sfera. Infatti $\varphi = 0$ a $r_1/r_2 = -q_1/q_2$ che può essere riscritto come $r_1^2 q_2^2 - r_2^2 q_1^2 = 0$ che è l'equazione della sfera, che quindi può anche essere vista come il luogo dei punti per i quali le distanze r_1 e r_2 da due punti sono in rapporto fisso.

Questo consente di risolvere il problema: usiamo un sistema di coordinate con origine nel centro del conduttore sferico, ed aggiungiamo una carica immagine $q_2 = q'$ a distanza r_2 dal centro. Essendoci due parametri liberi (q_2 ed r_2) per fissare il tutto basta imporre $\varphi = 0$ nei 2 punti del conduttore lungo l'asse che congiunge le due cariche ed il centro della sfera:

$$\frac{q_1}{R-r} + \frac{q_2}{r-r_2} = 0, \quad \frac{q_1}{R+r} + \frac{q_2}{r+r_2} = 0$$

Quindi $r_2 = r^2/R$ e $q_2 = -q_1 r/R$. Nel limite di carica vicina alla sfera, $r \rightarrow R$, si ritrova il risultato per un piano, $q_2 = -q_1$.

a) Usando coordinate polari ρ, θ il potenziale vale

$$\varphi(\rho, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{r}{R} \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \theta}} - \frac{r}{R} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (r^2/R)^2 - 2(r^2/R)\rho \cos \theta}} \right)$$

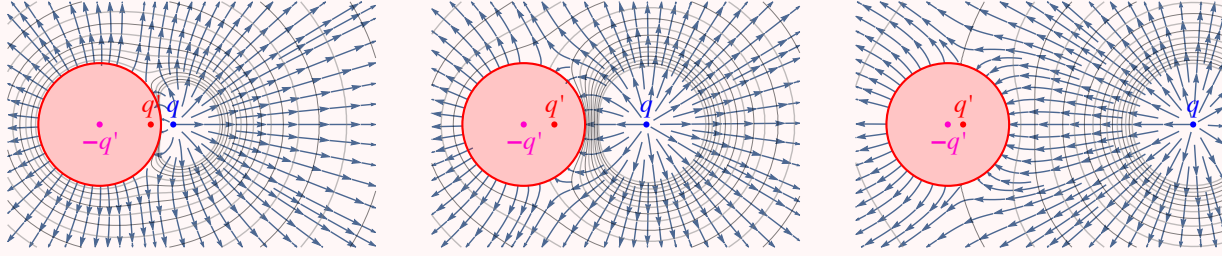


Figura 5.4: *Linee di campo e superfici equipotenziiali in presenza di una carica q a distanze varie da una sfera conduttrice isolata.*

avendo usato il teorema di Carnot $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_{bc}$ sui lati a, b, c di un triangolo.

b) La densità di carica superficiale vale

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r(\rho = r, \theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho=r} = \frac{q(R^2 - r^2)}{4\pi r(R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}}.$$

Il teorema di Gauss implica che la carica totale indotta sulla sfera conduttrice a terra è q' , come si può anche ottenere integrando la densità di carica superficiale.

c) La forza attrattiva fra la sfera e la carica q vale

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^2} = -\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{rR}{(R^2 - r^2)^2}$$

e decresce come $1/R^3$ per $R \gg r$.

d) Il lavoro necessario a spostare la carica q rispetto alla sfera da distanza R a distanza R' vale $\mathcal{L} = U(R) - U(R')$ dove, usando l'eq. (5.1)

$$U(R) = \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = \frac{q^2 r}{8\pi \epsilon_0 (r^2 - R^2)}.$$

Si può verificare che soddisfa in modo non ovvio a $F = -dU/dR$.

Esercizio 5.10: Sfera conduttrice isolata a carica zero

Risolvere nuovamente l'esercizio precedente, assumendo ora che la sfera conduttrice sia isolata, con carica totale zero.

▲Soluzione: Occorre aggiungere una ulteriore carica immagine $q'' = -q'$ in modo che la 'carica immagine totale' sia zero. Per fare in modo che la sfera rimanga a potenziale costante occorre mettere q'' nel centro della sfera, come illustrato in fig. 5.4.

a) Il potenziale è ottenuto similmente all'esercizio precedente aggiungendo il contributo, a simmetria sferica, della seconda carica immagine:

$$\varphi(\rho, \theta) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_q} - \frac{r}{R} \frac{1}{r_{q'}} + \frac{r}{R} \frac{1}{\rho} \right).$$

b) La densità superficiale è eguale a quella dell'esercizio precedente più un termine costante tale che la carica totale sulla superficie vale zero.

c) La forza fra sfera e carica q vale ora

$$F = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{qq'}{r_{qq'}^2} + \frac{qq''}{r_{qq''}^2} \right] = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{rR}{(R^2 - r^2)^2} + \frac{r}{R^3} \right]$$

e decresce come $1/R^4$ per $R \gg r$.

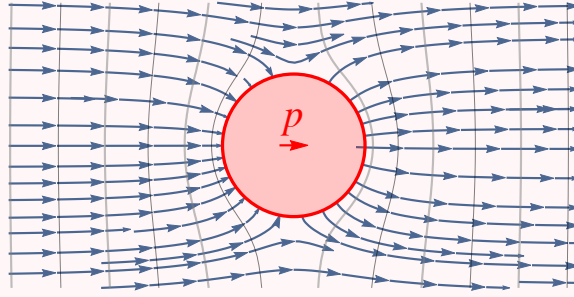


Figura 5.5: *Linee di campo e superfici equipotenziali in presenza di una sfera conduttrice isolata in un campo elettrico E esterno costante.*

d) Il lavoro necessario per spostare la carica q rispetto alla sfera è uguale a $\mathcal{L} = -\Delta U$ dove

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{qq'}{r_{qq'}} + \frac{qq''}{r_{qq''}} \right] = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{r}{r^2 - R^2} + \frac{r}{R^2} \right]$$

è calcolato, come spiegato in precedenza, senza includere in U l'energia potenziale fra le due cariche immagini. Si può verificare che soddisfa in modo non ovvio a $F = -dU/dR$.

Esercizio 5.11: Sfera conduttrice in E costante

Una sfera conduttrice isolata di raggio r viene messa in un campo elettrico E_0 esterno costante. Trovare il potenziale elettrico in tutto lo spazio e la carica superficiale indotta sulla sfera.

▲Soluzione: Si può trovare la soluzione in diversi modi, sviluppando ulteriormente esercizi precedenti.

- Partendo dal problema precedente, posso generare un campo elettrico costante usando una carica q a distanza R dalla sfera considerando il limite $q, R \rightarrow \infty$ con $E_0 = q/4\pi\epsilon_0 R^2$ costante. In questo limite la carica immagine $q' = -qr_0/R$ diverge e si avvicina al centro della sfera, dove si trova la seconda carica immagine $q'' = -q'$: le due cariche immagine generano un dipolo immagine finito $p = -q'd = 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3$.

In conclusione, il campo elettrico vale

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & \text{dentro la sfera} \\ \mathbf{E}_0 + (\text{campo generato da un dipolo } \mathbf{p} \text{ nel centro della sfera}) & \text{fuori} \end{cases}$$

Le linee di campo sono disegnate in figura 5.5. Il potenziale elettrico può essere esplicitamente scritto in coordinate polari

$$\varphi(\rho, \theta) = \begin{cases} 0 & \rho < r \\ \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 \rho^2} - E_0 \rho \right) \cos \theta & \rho > r \end{cases} = \begin{cases} 0 & \rho < r \\ \left(\frac{r^3}{\rho^2} - \rho \right) E_0 \cos \theta & \rho > r \end{cases}$$

ed è costante (nullo) sulla superficie della sfera a $\rho = r$. La densità superficiale di carica vale

$$\sigma(\theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho=r} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

- Abbiamo quindi ritrovato la situazione studiata nell'esercizio 3.5: una sfera con carica superficiale $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$. Avevamo visto che questa carica superficiale genera al suo interno un campo elettrico costante $E = \sigma_0/3\epsilon_0$, che per $\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0$ è esattamente opposto al campo esterno E_0 . In questo modo dentro la sfera si ha $\mathbf{E} = 0$.

Avevamo anche trovato che all'esterno genera il campo di un dipolo $p = V\sigma_0$, che per $\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0$ vale $p = 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3$ in accordo con il risultato precedente.

Esercizio 5.12: Sfera conduttrice isolata ©

Una carica puntiforme q è ferma a distanza R dal centro di una sfera di raggio $r = R/2$ sulla cui superficie è distribuita uniformemente una carica totale Q .

a) Calcolare la forza F_a agente sulla carica q e l'energia elettrostatica U_a del sistema.

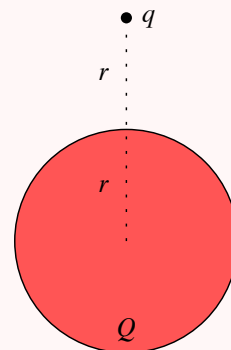
La sfera diventa ora conduttrice; essa è isolata e mantiene la carica totale Q . Si faccia quindi attenzione che la sfera conduttrice non è né a terra né scarica.

b) Utilizzando un appropriato sistema di due cariche immagini, calcolare il potenziale elettrico φ della sfera. Per quale valore di Q si avrebbe $\varphi = 0$?

c) Calcolare la forza F_b sulla carica q . Per quale valore di Q si avrebbe $F_b = 0$?

d) Calcolare l'energia elettrostatica U_b del sistema, presentando $U_b - U_a$ ed interpretando fisicamente il suo segno.

e) Assumendo ora $q = -Q$, calcolare il momento di dipolo elettrico del sistema p_b , confrontandolo con il dipolo p_a che si aveva nella situazione iniziale al punto a).

**➤ Soluzione:**

a) La sfera genera lo stesso campo elettrico di una carica Q nel suo centro, quindi $F_a = qQ/4\pi\epsilon_0 R^2$. Sommando all'energia di un guscio sferico $Q^2/8\pi\epsilon_0 r$ l'energia della carica q si ottiene $U_a = qQ/4\pi\epsilon_0 R + Q^2/8\pi\epsilon_0 r = Q(Q + q)/4\pi\epsilon_0 R$.

b) Il potenziale in tutto lo spazio è calcolabile mediante il metodo delle immagini, come il potenziale generato da:

- una carica immagine $q' = -qr/R = -q/2$ situata ad $r' = r^2/R = r/2$. Da sola questa darebbe $\varphi = 0$ sulla sfera, su cui si avrebbe una carica q' . Per cui occorre aggiungere:
- una carica immagine $q'' = Q - q'$ nel centro della sfera.

La sfera è quindi a potenziale $\varphi = q''/4\pi\epsilon_0 r = (Q + q/2)/4\pi\epsilon_0 r$, uguale a zero se $Q = -q/2$.

c) La forza sulla carica q vale

$$F_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q''}{R^2} + \frac{q'}{(R - r')^2} \right] = F_a \left(1 - \frac{7q}{18Q} \right)$$

vale zero per $Q = 7q/18$, quando la repulsione fra due cariche di segno uguale compensa l'attrazione dovuta allo spostamento delle cariche nel conduttore.

d) L'energia elettrostatica vale ora

$$U_b = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{Q\varphi_{\text{sfera}}}{2} + \frac{1}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q''}{R} + \frac{q'}{R - r'} \right] = -\frac{q^2 - 12qQ - 12Q^2}{48\pi\epsilon_0 R} = U_a - \frac{q^2}{48\pi\epsilon_0 R} < U_a.$$

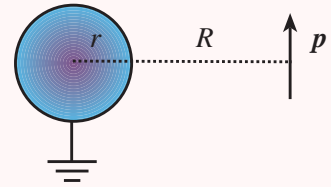
U_b è minore di U_a in quanto il conduttore, raggiungendo l'equilibrio, ha dissipato per effetto Joule parte dell'energia iniziale.

e) Essendo la carica totale zero, il momento di dipolo non dipende dall'origine del sistema di coordinate e vale $p_b = r'q' + RQ = \frac{7}{8}qR$, minore di $p_a = qR$.

Esercizio 5.13: Dipolo ortogonale a sfera ©

Un dipolo \mathbf{p} con orientazione fissa come da figura si trova a distanza R dal centro di una sfera conduttrice di raggio r messa a terra. Calcolare

- Il potenziale elettrico in tutto lo spazio.
- La carica totale indotta sulla sfera.
- La forza esercitata dalla sfera sul dipolo. In particolare si dica in che modo essa dipende da R per $R \gg r$.
- Il lavoro necessario per portare il dipolo da R a distanza infinita.
- Rispondere nuovamente alle domande precedenti nel caso di sfera isolata e scarica.



✎Soluzione: Negli esercizi precedenti abbiamo risolto una carica davanti ad una sfera conduttrice. Un dipolo può essere visto come due cariche di segno opposto, e risolto sfruttando la linearità.

- Il potenziale è quello dato da un dipolo immagine $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}(r/R)^3$ situato lungo l'asse che congiunge il dipolo fisico con il centro della sfera, e messo a distanza $R' = r^2/R$ dal centro della sfera. Il valore del dipolo è ottenuto dalla soluzione corrispondente per una carica $q' = -qr/R$ tenendo conto che la distanza fra le due cariche che formano il dipolo immagine è R'/R volte minore della distanza fra le cariche nel dipolo fisico, tenendo conto che sono entrambi ortogonali all'asse (altrimenti la geometria sarebbe ancora più complicata).
- Nella soluzione la superficie del conduttore racchiude un dipolo immagine, che ha carica totale zero. Per cui il teorema di Gauss implica che la carica totale sul conduttore è zero.
- La forza fra due dipoli \mathbf{p} e \mathbf{p}' a distanza \mathbf{X} , orientati perpendicolarmente a \mathbf{X} , è $\mathbf{F} = 3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')\hat{\mathbf{X}}/4\pi\epsilon_0 X^4$. Lo si può ricavare in due modi.
 - Dalla formula $\mathbf{F} = -\nabla U$ con $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')/4\pi\epsilon_0 X^3$. Come discusso nell'esercizio 3.8, la variazione di \mathbf{p}' con X (presente in questo esercizio) non va tenuta in conto.
 - Dalla formula più generale $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} = p \partial \mathbf{E} / \partial y$ dove

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{X})\mathbf{X}}{X^5} - \frac{\mathbf{p}'}{X^3} \right] \quad \mathbf{X} = \left(x - \frac{r^2}{R}, y, z \right)$$

è il campo elettrico generato da \mathbf{p}' . L'unico termine che contribuisce alla derivata calcolata a $y = 0$ è $E_x = 3p'y/4\pi\epsilon_0 X^4$.

Nel caso particolare di questo esercizio si ha $F_x = -3p^2 r^3 R / 4\pi\epsilon_0 (R^2 - r^2)^4$. Per grande R si ha $F \propto R^{-7}$.

- Il lavoro vale

$$\mathcal{L} = \int_R^\infty F dR = -\frac{p^2 r^3}{8\pi\epsilon_0 (R^2 - r^2)^3}$$

Essa è uguale ad 1/2 dell'energia di interazione fra due dipoli $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ come atteso perchè a) ragionando in termini di dipolo immagine, uno solo dei due dipoli è reale; b) ragionando in termini di polarizzazione della sfera conduttrice, essa è indotta dal primo dipolo.

- Siccome non veniva indotta nessuna carica sulla sfera le risposte non cambiano.

Esercizio 5.14: Dipolo parallelo a sfera ©

Un dipolo elettrico \mathbf{p} si trova a distanza R dal centro di una sfera conduttrice di raggio r messa a terra. Il dipolo è orientato parallelamente all'asse che lo congiunge con il centro della sfera, ed è diretto verso l'esterno.

- Descrivere un sistema di cariche immagini che consenta di calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio.
- Calcolare la carica elettrica totale indotta sulla sfera.
- Calcolare la forza elettrica F esercitata dalla sfera sul dipolo. In particolare si dia il valore approssimato di F al primo ordine non nullo nel limite $R \gg r$.

d) Rispondere nuovamente alle domande precedenti nel caso di sfera isolata e scarica.

✎ Soluzione:

a) Il dipolo p può essere visto come due cariche $q_1 = -q$ e $q_2 = q$ a piccola distanza $d = p/q$ situate ad $R_1 = R$ ed $R_2 = R + d$. A ciascuna carica corrisponde una carica immagine $q'_i = -q_i r/R_i$ situata a distanza $R'_i = r^2/R_i$. Nel limite $d \rightarrow 0$ questo corrisponde ad una carica $q' = -pr/R^2$ e ad un dipolo $p' = -pr^3/R^3$ situati ad $R' = r^2/R$. Per calcolare il dipolo occorre fare attenzione al fatto che la carica totale non è zero, per cui p' dipende dal punto scelto come origine. Per ottenere una espansione in potenze inverse della distanza dal sistema di cariche, il punto da scegliere non è il centro della sfera, ma la posizione delle cariche R'_1 o R'_2 , in maniera che $p' = q'_2(R'_2 - R'_1)$.

b) $q_{\text{in}} = q'$.

c) Definendo $E(\rho) = \sum_i q'_i/4\pi\epsilon_0(\rho - r_i)^2$ come il campo elettrico parallelo all'asse, la forza sul dipolo p vale

$$F = p \left. \frac{\partial E}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rR(2r^2 + R^2)}{(r^2 - R^2)^4} \stackrel{R \gg r}{\simeq} \frac{rp^2}{2\pi\epsilon_0 R^5}.$$

d) È ora presente nel centro della sfera la carica addizionale $-q'$, in maniera da assicurare la neutralità della sfera lasciandone la superficie equipotenziale. La forza sul dipolo p diventa

$$F = p \left. \frac{\partial E}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2rR(2r^2 + R^2)}{2(r^2 - R^2)^4} - \frac{2r}{R^5} \right] \stackrel{R \gg r}{\simeq} \frac{3p^2 r^3}{\pi\epsilon_0 R^7}$$

Per $R \gg r$ la carica indotta sulla sfera diventa un dipolo $p'' = p' + q'R'_1 = -3pr^3/R^3$.

Esercizio 5.15: Dipolo davanti a sfera ©

Un dipolo elettrico \mathbf{p} è mantenuto a distanza d dal centro di una sfera conduttrice scarica di raggio R . Il dipolo forma un angolo θ con la congiungente fra la sua posizione ed il centro della sfera.

a) Sostituendo il dipolo come un'appropriato sistema di due cariche $\pm q$ a piccola distanza ϵ , calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio in termini di un appropriato sistema di cariche immagini. (Suggerimento: fare attenzione alla carica totale).

b) Tornando al limite di dipolo, calcolare a cosa si riduce il sistema di cariche. (Suggerimento: fare attenzione alla carica totale).

c) Esprimere il potenziale elettrico di tutto il sistema a grande distanza $r \gg R, d$ in termini del suo dipolo elettrico totale \mathbf{P} .

d) Calcolare l'energia elettrostatica del sistema.

e) Calcolare quale valore di θ minimizza tale energia, dicendo come si orienta il dipolo se è libero di ruotare.

✎ Soluzione:

- a) Il dipolo p può essere rappresentato come due cariche $q_{\pm} = \pm q$ situate a $\mathbf{x}_{\pm} = (d, 0) \pm \epsilon(\cos \theta, \sin \theta)/2$ a distanza $\epsilon = p/q$ nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ cioè $q \rightarrow \infty$.
A ciascuna carica q_{\pm} corrisponde una carica immagine $q'_{\pm} = -q_{\pm}R/r_{\pm}$ situata nel punto \mathbf{x}'_{\pm} a distanza $d'_{\pm} = R^2/d_{\pm}$ dal centro della sfera e situata lungo l'asse che lo congiunge con \mathbf{x}_{\pm} . Infine, siccome la sfera conduttrice è scarica, occorre aggiungere una carica immagine $-q'_+ - q'_-$ nel suo centro.
- b) Nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ queste due cariche immagine diventano un dipolo immagine \mathbf{p}' ed una carica immagine

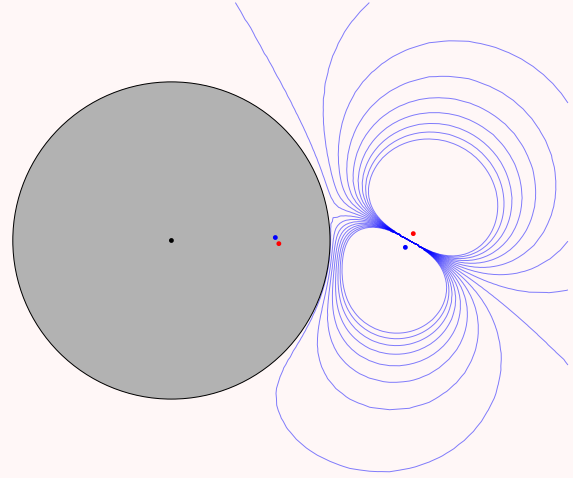
$$q' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\pm} q'_{\pm} = \frac{pR}{d^2} \cos \theta$$

situati ad $d' = R^2/d$.

Siccome la carica totale $q' \neq 0$, occorre fare attenzione che \mathbf{p}' dipende dal punto scelto come origine. Siccome d non è molto maggiore di R , il punto da scegliere non è il centro della sfera, ma la posizione del dipolo stesso $\mathbf{x}_{p'} = (R^2/d, 0)$ in maniera che

$$\mathbf{p}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\pm} q'_{\pm} (\mathbf{x}'_{\pm} - \mathbf{x}_{p'}) = p \left(\frac{R}{d} \right)^3 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

Infine, siccome la sfera conduttrice è scarica, occorre aggiungere una carica immagine $-q'$ nel suo centro. Il grafico illustra il sistema e le linee equipotenziali.



- c) Il sistema totale ha carica zero. A grande distanza esso può venire approssimato come un dipolo elettrico

$$\mathbf{P} = \sum q_i \mathbf{x}_i = p \begin{pmatrix} (1 + 2R^3/d^3) \cos \theta \\ (1 - R^3/d^3) \sin \theta \end{pmatrix}.$$

- d) L'energia potenziale può essere calcolata o come somma sulle cariche vere q_{\pm} e sulle 3 cariche immagine q'_i

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\pm} \sum_i \frac{q_{\pm} q'_i}{|\mathbf{x}_{\pm} - \mathbf{x}'_i|}$$

o equivalentemente come

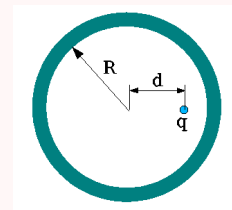
$$U = -\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}}{2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2 R^3 (d^4 \sin^2 \theta + (4d^4 - 3d^2 R^2 + R^4) \cos^2 \theta)}{2d^4 (d^2 - R^2)^3}$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico generato da \mathbf{p}' , q' e $-q'$. Per ogni $d > R$ il coefficiente del $\cos^2 \theta$ è maggiore del coefficiente di $\sin^2 \theta$, e questo significa che il minimo del potenziale è sempre a $\theta = 0$.

Esercizio 5.16: Carica dentro sfera ©

Una carica puntiforme q è posta all'interno di un guscio conduttore sferico di raggio interno R e raggio esterno R' , a distanza d dal centro. Il guscio conduttore è posto a terra, ovvero a potenziale eguale al potenziale all'infinito. Calcolare

- Il potenziale ed il campo elettrico in tutto lo spazio.
- La forza sulla carica q .
- Mostrare che la carica totale indotta sulla sfera è pari a $-q$.
- Come cambia la risposta a) se il guscio conduttore è isolato?



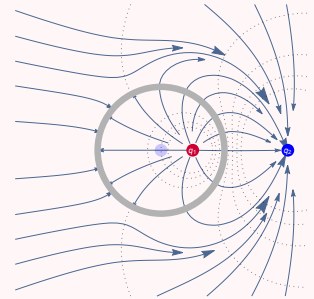
➤ Soluzione: Si ricorda che due cariche q e $q' = -qR/d$ a distanze $dd' = R^2$ dal centro di una sfera producono potenziale zero sulla sfera.

- a) Questo è il sistema di cariche immagini che consente di calcolare \mathbf{E} nella zona *interna*. Il fatto che il conduttore abbia spessore finito è irrilevante: dentro il conduttore e nella zona esterna si ha $\mathbf{E} = 0$, in quanto $\varphi = 0$ è l'unica soluzione dell'equazione $\nabla^2 \varphi = 0$ con condizione $\varphi = 0$ sul bordo esterno del guscio ed all'infinito.
- b) La forza è attrattiva e vale $F = qq'/4\pi\epsilon_0(d-d')^2$.
- c) Siccome fuori si ha $\mathbf{E} = 0$, la carica totale è zero, ovvero la carica indotta è $-q$, ed è distribuita sulla superficie interna in una maniera complicata che sarebbe possibile calcolare.
- d) La carica totale ora è q . Sulla superficie interna si dispone una carica totale $-q$ distribuita in modo da schermare, a $r > R$ l'effetto della carica puntiforme. Sulla superficie esterna si dispone uniformemente una carica totale q , generando un campo radiale $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. All'interno del guscio conduttore, il campo elettrico rimane invariato.

Esercizio 5.17: Cariche e guscio conduttore ©

Un guscio sferico conduttore scarico ed isolato ha raggio R e spessore trascurabile. Due cariche q_1 e q_2 sono poste lungo una retta uscente dal centro del guscio, a distanza $r_1 = R/2$ ed $r_2 = 2R$.

- a) Indicare un sistema di cariche immagini che consenta di calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio. (Suggerimento: il sistema di cariche immagini può essere diverso per la zona esterna e per la zona interna).
- b) Assumendo che il potenziale elettrostatico sia zero a distanza infinita, calcolare il potenziale elettrostatico della sfera conduttrice e nel suo centro.
- c) Calcolare l'energia elettrostatica del sistema.
- d) Calcolare la forza agente sulle cariche q_1 e q_2 .
- e) Calcolare la forza agente sul guscio.
- f) Tali forze cambierebbero se il guscio sferico venisse rimosso?



➤Soluzione: Il guscio conduttore separa lo spazio in due zone isolate: quella interna e quella esterna, che pertanto possono essere risolte separatamente, ottenendo poi la soluzione sovrapponendo le soluzioni.

- a) Come visto in altri esercizi, il campo nella zona esterna è ottenuto mettendo una carica immagine $q'_2 = -q_2 R/r_2 = -q_2/2$ a $r'_2 = R^2/r_2 = R/2$ ed una carica immagine $q'_1 = q_1 + q_2/2$ nel centro, in maniera da avere la corretta carica totale q_1 sul guscio conduttore.

Il campo nella zona interna è ottenuto mettendo una carica immagine $q'_1 = -q_1 R/r_1 = -2q_1$ a distanza $r'_1 = R^2/r_1 = 2R$ ed aggiungendo al potenziale una costante tale che il guscio sia allo stesso potenziale nei due casi.

La figura mostra i campi risultanti per $q_2 = -3q_1$. I valori di r_1 ed r_2 sono tali che le posizioni di alcune cariche immagine coincidono con cariche fisiche, ma questo non è un problema.

- b) Il potenziale elettrico sul conduttore è ottenuto sommando i potenziali delle tre cariche che esprimono il potenziale nella zona esterna

$$\varphi(r = R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_2}{R} + \frac{q_2 r_2}{R^2} + \frac{q_2 R}{r_2^2 - R^2} \right] = \frac{q_1 + q_2/2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Dovendo il potenziale essere continuo sul bordo, il potenziale all'interno vale

$$\varphi(r < R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{|r - R|} + \frac{q'_1}{|r - r'_1|} \right] + \varphi(R), \quad \text{quindi} \quad \varphi(r = 0) = \frac{q_2 + 4q_1}{8\pi R\epsilon_0}.$$

- c) L'energia elettrostatica vale

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i \varphi_i = \frac{-16q_1^2 + 6q_1 q_2 - q_2^2}{96\pi\epsilon_0 R}$$

dove i potenziali φ_i sono calcolati con il metodo delle cariche immagini.

- d) Le forze F_i sulle cariche q_i sono dirette lungo l'asse che le congiunge, e calcolate sommando le forze fra le cariche immagini:

$$F_1 = \frac{2q_1^2}{9\pi\epsilon_0 R^2}, \quad F_2 = -\frac{q_1 q_2 - 7q_2^2/18}{16\pi\epsilon_0 R^2}.$$

- e) La forza F_g agente sul guscio è determinata dal principio di azione e reazione: $F_g = -F_1 - F_2 = (2q_1 + q_2)(32q_1 - 7q_2)/288\pi\epsilon_0 R^2$. È facile verificare che in effetti la forza sul guscio vale zero per $q_2 = -2q_1$: i due sistemi di cariche immagini, interno ed esterno, coincidono.

- f) Se non ci fosse la sfera conduttrice si avrebbe invece, banalmente

$$F_1 = -F_2 = \frac{q_1 q_2}{9\pi\epsilon_0 R^2}.$$

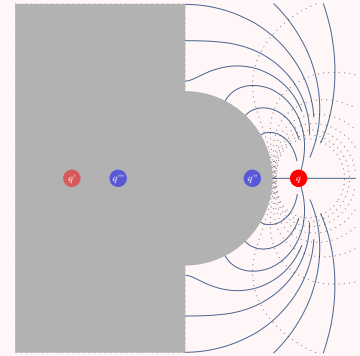
Esercizio 5.18: Carica davanti a piano con sfera ©

Un conduttore è costituito da un semipiano infinito con una sporgenza emisferica di raggio r . Una carica puntiforme q è situata lungo l'asse di simmetria a distanza R dal centro della semisfera. Assumendo che il conduttore sia messo a terra:

- a) Trovando un opportuno sistema di cariche immagini, scrivere il potenziale elettrico φ in tutto lo spazio.

Calcolare

- b) La forza \mathbf{F} esercitata sulla carica q ;
 c) Il lavoro \mathcal{L} necessario per portare q a distanza infinita;
 d) La densità di carica σ indotta sul conduttore.



➤Soluzione: Mettiamo l'asse x lungo l'asse di simmetria che congiunge la carica con il centro della semi-sfera.

- a) Il problema è risolto combinando i sistemi di cariche immagini (precedentemente discussi) per un piano conduttore e per una sfera conduttrice. Occorrono 3 cariche immagini: $q' = -q$ situata a $x = -R$, $q'' = -qr/R$ a $x = r^2/R$, $q''' = -q''$ a $x = -r^2/R$. Il potenziale fuori dal conduttore è quello generato dalle cariche q, q', q'', q''' , e disegnato nella figura; dentro il conduttore si ha $\varphi = 0$.
 b) La forza è data dalla somma delle forze esercitate dalle cariche immagini, e vale

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(2R)^2} - \frac{r/R}{(R - r^2/R)^2} + \frac{r/R}{(R + r^2/R)^2} \right].$$

- c) Il lavoro è calcolabile come variazione dell'energia potenziale elettrica, o integrando la forza lungo un percorso che conviene scegliere sull'asse x :

$$\mathcal{L} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2R} + \frac{r/R}{R - r^2/R} - \frac{r/R}{R + r^2/R} \right].$$

- d) La densità superficiale di carica vale

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r(\rho = r, \theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right|_{\rho=r} = \frac{q(R^2 - r^2)}{4\pi r(R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} - \frac{q(R^2 - r^2)}{4\pi r(R^2 + r^2 + 2rR \cos \theta)^{3/2}}$$

sulla sfera, e

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E_x = -\frac{1}{2\pi} \frac{Rq}{(\rho^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{rq}{(\rho^2 + (r^2/R)^2)^{3/2}}$$

sul piano a $\rho > r$.

Esercizio 5.19: Carica in semi-sfera ©

Una particella di carica elettrica q e massa m è situata nel punto di coordinate $\vec{r}_Q = d(\cos \theta, 0, \sin \theta)$ all'interno di un 'igloo' semi-sferico di raggio R (e centro $(0,0,0)$) con pareti conduttrici di spessore trascurabile messe a terra.

a) Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio, esprimendolo mediante un sistema di cariche immagine.

Assumendo ora che la carica si trovi lungo l'asse dell'igloo ($\theta = \pi/2$) a distanza d dal centro

b) Calcolare l'energia elettrostatica del sistema.

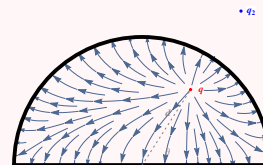
c) Calcolare la forza agente sulla carica q . Per quale valore di d la forza vale zero?

♣Soluzione:

a) Serve una carica immagine $q_2 = -qR/d$ a distanza $d_2 = R^2/d$ dal centro e le loro immagini $q_3 = -q$ e $q_4 = -q_2$ rispetto al piano. Il potenziale all'interno dell'igloo vale $\varphi = \sum_i q_i / 4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|$ e $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. All'esterno $\varphi = 0$.

b)

$$U = \frac{q_1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=\{2,3,4\}} \frac{q_i}{r_{i1}} = q^2 \frac{d^4 - 4d^3R - R^4}{8\pi\epsilon_0(R^2 - d^2)(R^2 + d^2)}.$$



c) La forza agente sulla carica q è data dalla forza esercitata dalle 3 cariche immagine ed ha solo componente verticale

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=\{2,3,4\}} q_i \frac{\vec{r}_{i1}}{r_{i1}^3}, \quad F_z = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4d^2} - 2dR \frac{d^4 + R^4}{(R^4 - d^4)^2} \right].$$

La forza vale zero (o, equivalentemente, l'energia potenziale ha un punto di flesso) per $d \approx 0.475R$.

Esercizio 5.20: Biglie conduttrici ©

Si ha una pallina 1 (sferica di massa m , raggio R con carica totale q distribuita uniformemente nel suo volume inchiodata con centro nel punto $\mathbf{x} = 0$) ed altre palline (sferiche conduttrici isolate di massa m , raggio R e carica totale 0; ad esempio sfere di metallo ricoperte da una sottile guaina di plastica isolante).

a) Usando il metodo delle cariche immagine, calcolare l'energia elettrostatica U_a necessaria a portare una pallina isolata a contatto con la pallina carica, formando il sistema (1)(0). Quanto vale la forza F_x sulla carica q ?

b) Descrivere un sistema (infinito) di cariche immagine che consente di risolvere il sistema (1)(0)(0), ed approssimare la sua energia elettrostatica U_b e la forza sulla carica q .

c) Descrivere un sistema (infinito) di cariche immagine che consente di risolvere il sistema (0)(1)(0), ed approssimare la sua energia elettrostatica U_c e la forza sulla carica q .

d) Viene formato il sistema del punto b) lungo l'asse x ; la pallina 1 viene tenuta ferma in $x = 0$; una pallina di carica 0 situata a $x \ll -R$ incide con velocità v_x sul sistema. Calcolare lo stato finale del sistema ed in particolare la velocità finale della pallina più a destra.



♣Soluzione:

- a) La sfera 0 genera, al suo esterno, lo stesso campo generato da una carica q nel suo centro. Come già visto, il sistema è risolto aggiungendo una carica immagine $q_2 = -q/2$ in $x = 3R/2$ ed una carica immagine $q_3 = q/2$ nel centro della sfera conduttrice ad $x = 2R$. Si ha quindi

$$U_a = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^3 \frac{q_i}{|x_i|} = -\frac{1}{24} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad F_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^3 \frac{q_i x_i}{|x_i|^3} = \frac{7q^2}{288\pi\epsilon_0 R^2}.$$

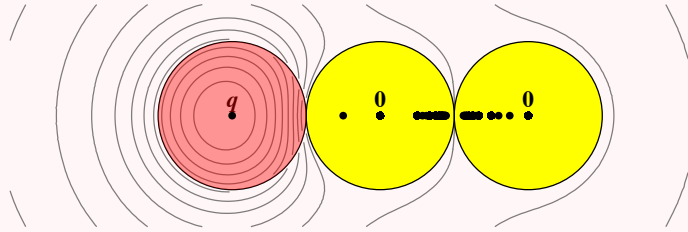
- b) Si aggiungono le immagini di q rispetto alla prima sfera, ottenendo lo stesso sistema del punto a). Poi le immagini di q rispetto alla seconda sfera, ottenendo $q_4 = -q/4$ in $x_4 = 15R/4$ e $q_5 = q/4$ nel centro della terza sfera ad $x_5 = 4R$. A questo punto si ha una prima approssimazione

$$U_b \approx \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^5 \frac{q_i}{|x_i|} = -\underbrace{\frac{7}{160}}_{0.044} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad F_x \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^5 \frac{q_i x_i}{|x_i|^3} = \underbrace{\frac{159}{1600}}_{0.10} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Occorre poi aggiungere le ‘immagini’ di $q_{2,3}$ rispetto alla terza sfera e le ‘immagini’ di $q_{4,5}$ rispetto alla seconda sfera. E poi le immagini delle immagini, etc. Alla fine si ottiene:

$$U_b = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{q_i}{|x_i|} = -0.053 \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 R}, \quad F_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{q_i x_i}{|x_i|^3} = 0.114 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

U_b è solo poco maggiore (in modulo) di U_a . Il disegno mostra le cariche immagine e le linee equipotenziali:



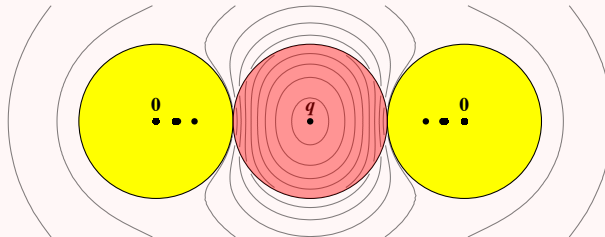
- c) Procedendo come al punto precedente si introduce $q_4 = q_2$ in $x_4 = -x_2$ e $q_5 = q_3$ in $x_5 = -x_3$. A questo punto si ha

$$U_c \approx \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^5 \frac{q_i}{|x_i|} = -\underbrace{\frac{1}{12}}_{0.083} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad F_x \approx 0.$$

Andando avanti ad aggiungere cariche immagine si ottiene

$$U_c = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{q_i}{|x_i|} = -\underbrace{\frac{1}{4}}_{0.0804} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad F_x = 0.$$

La forza vale zero per motivi di simmetria:



- d) Si ha un urto elastico con conservazione dell'energia ma non del momento. All'inizio si ha la configurazione del punto b); siccome $U_c < U_b$ alla fine si ha la configurazione del punto c): la pallina a destra schizza via ed a grande distanza ha velocità data da

$$\frac{m}{2} v_x^2 + U_b = \frac{m}{2} v_x'^2 + U_c.$$

Dopo questo compito è arrivato il covid-19.

Capitolo 6

Condensatori

Un condensatore (o capacitatore) è un sistema di due conduttori aventi cariche $+Q$ e $-Q$ mantenute a differenza di potenziale V , solitamente arrangiati in maniera da non produrre campi esterni. La capacità è definita come $Q = CV$ e l'energia del sistema vale $U = QV/2$.

Esercizio 6.1: Capacitatore cilindrico

Un cavo coassiale è fatto di un filo conduttore interno di diametro d circondato da un guscio metallico di diametro D . a) Calcolare la capacità. b) Sapendo che l'aria può sostenere un campo elettrico massimo $E_{\max} = 3\text{MV/m}$ (rigidità dell'aria) trovare quale valore di d/D consente di avere la massima differenza di potenziale elettrico. c) Calcolare quale valore di d/D consente di immagazzinare la massima energia elettrica.

✚Soluzione: Il teorema di Gauss consente di calcolare il campo elettrico nello spazio vuoto fra le due armature: $2\pi r \cdot E_r = \lambda/\epsilon_0$ da cui

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\lambda\sigma}{\pi\epsilon_0} \ln r.$$

- a) Quindi la differenza di potenziale fra le due armature vale $V = \Delta\varphi = 2k\lambda \ln(D/d)$ e la capacità per unità di lunghezza vale $2\pi\epsilon_0/\ln D/d$.
- b) Il campo elettrico ha intensità massima ad $r = d/2$ e vale $E = \lambda/\pi\epsilon_0 d$. Imponendo che sia uguale a E_{\max} si trova che la massima differenza di potenziale vale

$$V = E_{\max} \frac{d}{2} \ln \frac{D}{d}.$$

Per esempio si ha $V = 3.45\text{ kV}$ se $d = 1\text{ mm}$ e $D = 1\text{ cm}$. Fissata la dimensione esterna dell'oggetto D , V è massimizzato scegliendo dimensione interna eguale a $d = D/e$.

- c) L'energia immagazzinata in una lunghezza L vale

$$U = \frac{CV^2}{2} = L\pi\epsilon_0 E_{\max}^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \ln \frac{D}{d}$$

che può essere alternativamente calcolata come

$$U = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{\epsilon_0}{2} L 2\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 E_{\max}^2 \int_{d/2}^{D/2} \frac{r dr}{r^2}.$$

Fissato D , l'energia immagazzinata è massimizzata scegliendo $d = D/\sqrt{e}$.

Esercizio 6.2: Capacitore di dimensioni variabili

Si raddoppia la distanza fra i piatti di un condensatore di capacità C . Quanto lavoro meccanico occorre fare se (a) le cariche sui piatti sono tenute costanti? (b) una batteria mantiene costante la differenza di potenziale V ?

✚**Soluzione:** Ricordo che $Q = CV$. Per due piatti conduttori di area A a piccola distanza d

$$V = Ed = \sigma d / \epsilon_0 = Q \cdot d / A \epsilon_0 \quad \text{cioè} \quad C = \epsilon_0 A / d$$

Raddoppiare d dimezza C . All'inizio l'energia vale

$$U = Ad \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{A \epsilon_0}{d} \frac{V^2}{2} = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}.$$

- (a) Alla fine $U' = Q^2 / 2C' = 2U$ quindi $\mathcal{L} = U - U' = -U$. Infatti il campo elettrico rimane uguale, ma occupa un volume doppio. I due piatti si attraggono, quindi occorre una forza $F = \mathcal{L}/(-d)$ per allontanarli.

In generale, quando uno modifica un condensatore variando la capacità di dC tenendo la carica Q costante

$$F ds = d\mathcal{L} = -dU = -\frac{Q^2}{2} d\frac{1}{C} = \frac{Q^2}{2C^2} dC = \frac{V^2}{2} dC$$

- (b) Alla fine $U' = C'V^2/2 = U/2$ quindi $\mathcal{L}_{\text{totale}} = U - U' = U/2 > 0$. Questo sembra suggerire che i due piatti si respingano, mentre invece uno si aspetta che si attraggano esattamente come nel caso precedente (in quanto contengono cariche di segno opposto). Il punto è che $\mathcal{L}_{\text{totale}}$ è il lavoro totale, somma di due contributi: un contributo meccanico (legato alla forza necessaria per spostare le armature), ed un lavoro ricevuto dalla batteria mano a mano che le cariche sulle armature diminuiscono. La carica finale vale $Q' = C'V = Q/2$. Una carica $\Delta Q = -Q/2$ viene spinta dentro la batteria, che riceve un lavoro $\mathcal{L}_{\text{batteria}} = -QV/2 = U$. $\mathcal{L}_{\text{meccanico}} = \mathcal{L}_{\text{totale}} - \mathcal{L}_{\text{batteria}} = -U/2 < 0$.

In generale la batteria riceve un carica $-dQ$ e quindi un lavoro $\mathcal{L}_{\text{batteria}} = -V dQ = -V^2 dC$. L'energia nel condensatore varia di $V^2 dC/2$. Quindi il lavoro meccanico vale

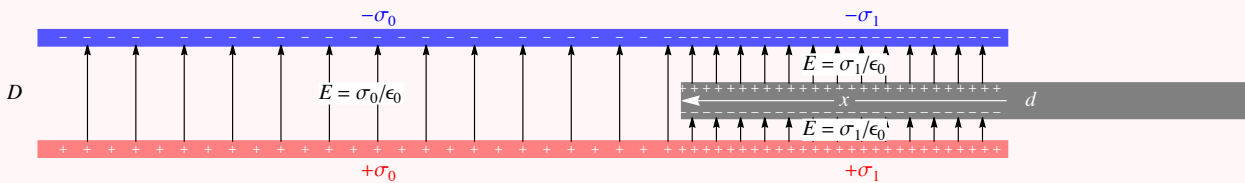
$$F ds = d\mathcal{L}_{\text{meccanico}} = d\mathcal{L}_{\text{totale}} - d\mathcal{L}_{\text{batteria}} = \frac{V^2}{2} dC$$

come nel caso (a).

Quindi in generale la forza è legata alla variazione della capacità C da $F = (V^2/2)(dC/ds)$, e tende ad aumentare la capacità. In questo esercizio abbiamo solo ottenuto un risultato atteso in modo complicato. Il prossimo è più interessante.

Esercizio 6.3: Conduttore in condensatore

Un conduttore mobile di spessore d viene parzialmente inserito in un condensatore quadrato di spessore D e lunghezza $L \gg D$ mantenuto ad una differenza di potenziale V . Calcolare la forza elettrica sul conduttore mobile.



✚**Soluzione:** Conviene calcolare la capacità del sistema in maniera indiretta, vedendolo come una capacità $C_0 = \epsilon_0 L(L-x)/D$ in parallelo con una capacità $C_1 = \epsilon_0 Lx/(D-d)$. C_1 a sua volta è ottenuta combinando 2 capacità in serie, per gli spessori d_{sopra} e d_{sotto} con spessore totale $d_{\text{sopra}} + d_{\text{sotto}} = D-d$. La capacità totale vale

$$C = C_0 + C_1 = \frac{\epsilon_0 L^2}{D} \left[1 + \frac{xd}{L(D-d)} \right].$$

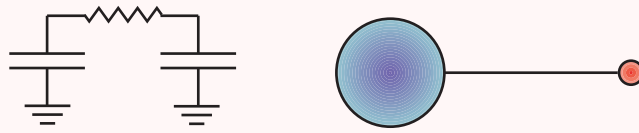


Figura 6.1: (a) Condensatori in serie. (b) Condensatori in serie.

Inserire un conduttore è un po' come ridurre la distanza fra i piatti: per questo la capacità aumenta. Come visto in precedenza la forza vale

$$F_x = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx} = \frac{V^2}{2} \frac{dL\epsilon_0}{D(D-d)}.$$

Fisicamente la zona dove agisce la forza è la punta del conduttore mobile: in quella zona le linee del campo elettrico sono curve, ed è difficile calcolare il campo che produce la forza orizzontale. La forza orizzontale totale, sebbene prodotta da effetti complicati, è stata calcolata in maniera semplice.

Per capire il segno della forza F_x affidiamoci al formalismo: la forza orizzontale tende ad attrarre il conduttore dentro il condensatore, in quanto questo aumenta la capacità (similmente a come due piatti piani si attraggono in quanto avvicinandosi aumenta la capacità; in questo caso più semplice il segno della forza è anche intuitivamente comprensibile sapendo che cariche di segno opposto si attraggono).

.....

La capacità C può essere alternativamente calcolata in maniera diretta. Chiamiamo σ_0 la densità di carica sulla superficie $L(L-x)$ non interessata dal conduttore interno, e σ_1 la densità di carica sulla superficie Lx interessata dal conduttore interno. Quindi $E_i = \sigma_i/\epsilon_0$. Data la carica totale, e dovendo essere la differenza di potenziale eguale nelle due zone deve essere

$$\sigma_0 L(L-x) + \sigma_1 Lx = Q, \quad \sigma_0 D = \sigma_1 (D-d),$$

da cui

$$\sigma_0 = \frac{D-d}{L(DL+d(x-L))} Q, \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 Q}{\sigma_0 D} = \frac{\epsilon_0 L}{D} \frac{DL+d(x-L)}{D-d}.$$

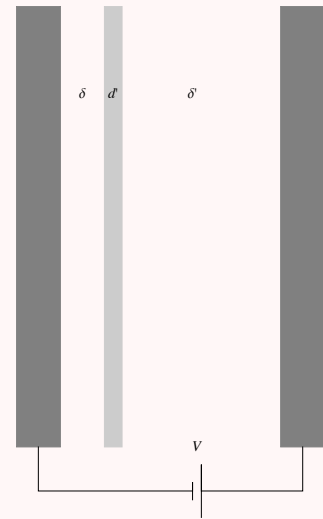
Esercizio 6.4: Conduttore carico in condensatore ©

Un condensatore piano con distanza d fra le piastre di area $S \gg d^2$ è mantenuto a differenza di potenziale V da un generatore. All'inizio non contiene niente; alla fine al suo interno è stato inserito completamente un piano conduttore di carica $Q = 0$ di eguale area e forma e spessore $d' < d$ a distanza δ e $\delta' = d - d' - \delta$ dai piani del condensatore.

- Calcolare la variazione $\Delta U = U_{\text{fin}} - U_{\text{in}}$ dell'energia elettrostatica del sistema ed il lavoro \mathcal{L}_{el} compiuto dal generatore di potenziale V .
- Discutere il bilancio energetico dell'inserimento del piano.

Una carica $Q \neq 0$ viene messa sul piano conduttore intermedio, isolato.

- Calcolare le cariche q e q' sulle due facce del piano conduttore.
- Calcolare la forza elettrica agente sul piano specificando se/per quale valore di δ può essere nulla.



☞ Soluzione:

- All'inizio $U_{\text{in}} = C_{\text{in}} V^2 / 2$ con $C_{\text{in}} = S\epsilon_0 / d$. Alla fine valgono le stesse espressioni con $d \rightarrow d - d'$, quindi $U_{\text{fin}} > U_{\text{in}}$ e $\Delta U_{\text{el}} = U_{\text{fin}} - U_{\text{in}} = d' S V^2 \epsilon_0 / 2d(d-d')$.

Il lavoro fatto dal generatore vale $\mathcal{L}_{\text{el}} = (Q_{\text{fin}} - Q_{\text{in}})V$. All'inizio $Q_{\text{in}} = C_{\text{in}}V$, alla fine $Q_{\text{fin}} = C_{\text{fin}}V > Q_{\text{in}}$. Quindi $\mathcal{L}_{\text{el}} = 2\Delta U_{\text{el}}$.

2. Il bilancio energetico $\mathcal{L} = -\Delta U_{\text{tot}}$ è rispettato in quanto il piano è attratto dentro il condensatore da una forza $F = \frac{1}{2}V^2 dC/dx$ e quindi o acquista un'energia cinetica o (in presenza di forza esterna $F_{\text{ext}} = -F$ che lo mantiene a velocità infinitesima) compie un lavoro meccanico $\mathcal{L}_{\text{mec}} = \int F_{\text{ext}} dx = -\frac{1}{2}V^2(C_{\text{fin}} - C_{\text{in}}) = -\Delta U_{\text{el}}$.

3. Deve essere $q + q' = Q$ e $E\delta + E'\delta' = V$ con $E = q/S\epsilon_0$ e $E' = -q'/S\epsilon_0$. Quindi

$$q = \frac{Q\delta' + SV\epsilon_0}{\delta + \delta'}, \quad q' = \frac{Q\delta - SV\epsilon_0}{\delta + \delta'}.$$

4. La forza vale

$$F = Sp = \epsilon_0 S \frac{E^2 - E'^2}{2} = \frac{q^2 - q'^2}{2S\epsilon_0} = Q \frac{Q(\delta' - \delta) + 2SV\epsilon_0}{2S\epsilon_0(\delta + \delta')}$$

La forza vale zero quando $|q| = |q'|$. Per $Q \neq 0$ l'unica possibilità è $q = q'$, risolta da $\delta - \delta' = 2SV\epsilon_0/Q$ cioè $\delta = (d - d')/2 + SV\epsilon_0/Q$. Deve essere $\delta < d - d'$.

Esercizio 6.5: Condensatore sferico

Un condensatore è costituito da una sfera di raggio R_1 con carica Q concentrica ad un guscio sferico di raggio interno R_2 con carica $-Q$. Calcolare la capacità e discutere il limite $R_2 \rightarrow \infty$.

➤Soluzione: Nella zona intermedia è presente il campo elettrico $E_r = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Quindi la differenza di potenziale vale $V = Q/4\pi\epsilon_0(1/R_1 - 1/R_2)$, ovvero

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Se $R_2 \gg R_1$ il valore di R_2 conta poco e si può pensare un'unica sfera come un condensatore di capacità $C = 4\pi\epsilon_0 R_1$ avente l'altro elemento ad infinito.

Esercizio 6.6: Condensatori in serie

Due condensatori di capacità C_1 e C_2 con cariche Q_1 e Q_2 vengono connessi come in fig. 6.1a. Come si redistribuiscono le cariche?

➤Soluzione: La corrente fluisce lungo la resistenza, dissipando energia, fino a che i due condensatori hanno eguali differenze di potenziali. Imponendo

$$V = \frac{Q'_1}{C_1} = \frac{Q'_2}{C_2} \quad \text{e} \quad Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$$

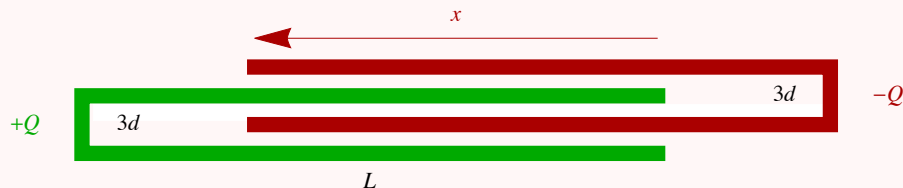
si trova $Q'_i = C_i(Q_1 + Q_2)/(C_1 + C_2)$.

Esercizio 6.7: Condensatore piano grosso ©

Un conduttore perfetto è costituito da due quadrati paralleli di lato L e spessore $d \ll L$ connessi ad un bordo da un conduttore perfetto terminale in maniera da lasciare, fra di loro, uno spazio vuoto di spessore $3d$.

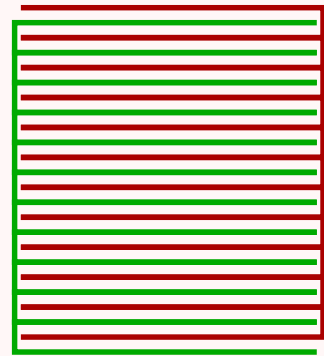
a) Assumendo che l'oggetto abbia carica totale Q e sia isolato, calcolare il campo elettrico in prossimità del conduttore.

Due di tali conduttori isolati vengono caricati con cariche $+Q$ e $-Q$, e poi inseriti per un tratto $x \gg d$ uno nell'altro formando un condensatore come in figura: la distanza fra ogni coppia di superfici vicine vale d .



- b) Calcolare il campo elettrico E e la distribuzione superficiale delle cariche $\pm Q$ sui conduttori.
- c) Calcolare la capacità del condensatore così ottenuto, e la sua energia elettrostatica.
- d) Calcolare la forza verticale F_y che agisce sul conduttore con carica $-Q$.
- e) Calcolare la forza orizzontale F_x che agisce sul conduttore con carica $-Q$.

Si assuma ora che le cariche $\pm Q$ siano su conduttori, ciascuno dei quali è formato non da 2 ma da $N \gg 1$ sbarre quadrate, nuovamente di spessore d e con sbarre consecutive distanziate di $3d$ come indicato nella figura a fianco.



- f) Calcolare la capacità del sistema per $x \rightarrow L$.

✚Soluzione:

- a) Una densità superficiale $\sigma = Q/2L^2$ appare sui due lati esterni, generando $E = \sigma/\epsilon_0$ all'esterno ed $E = 0$ nell'intercapedine interna e dentro i conduttori, in maniera che le due lastre siano equipotenziali.
- b) I campi elettrici nelle tre intercapedini vuote di area Lx e spessore d devono valere $+E$, $-E$ e $+E$, in quanto in questa maniera le zone superiori ed inferiore di ciascun conduttore sono allo stesso potenziale, $\Delta\varphi = d(E - E) = 0$. Per lo stesso motivo si ha $E = 0$ nel resto dello spazio, inclusa l'intercapedine vuota di spessore $3d$. Essendoci 3 di tali superfici sul conduttore di carica Q , si ha $\sigma = Q/3Lx$ su ciascuna superficie. E densità $-\sigma$ sulle analoghe 3 superfici del conduttore di carica $-Q$. Quindi $E = \sigma/\epsilon_0$.
- c) La differenza di potenziale vale $V = Ed$. La capacità è quindi $C = Q/V = 3Lx/\epsilon_0 d$, e può anche essere calcolata come quella di 3 capacità $C_i = \epsilon_0 Lx/d$ in parallelo, $C = 3C_i$. L'energia vale $U = CV^2/2 = \epsilon_0 d Q^2 / 6Lx$, anche uguale a $\int dV \epsilon_0 E^2 / 2$.
- d) Sommando le pressioni $p = \epsilon_0 E^2 / 2$ sulle 3 facce si ottiene la forza totale

$$F_y = (-1 + 1 - 1)Lxp = -\frac{Q^2}{18\epsilon_0 Lx}$$

che va nella direzione di aumentare lo spazio intermedio in grigio.

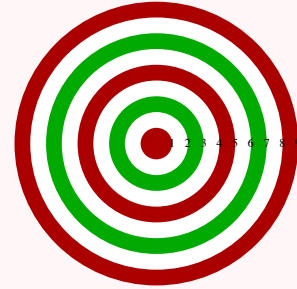
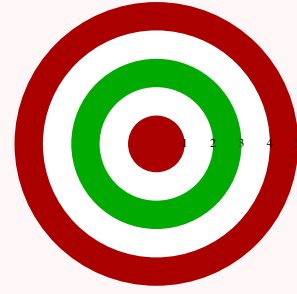
- e) Applicando la formula

$$F_x = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx} = \frac{dQ^2}{6\epsilon_0 Lx^2}$$

si ottiene una piccola forza (fisicamente prodotta da effetti ai bordi) che tende a far entrare i due conduttori uno nell'altro.

- f) Si hanno ora campi elettrici $+E$ alternati a $-E$, e quindi $\sigma = Q/(2N - 1)Lx \simeq Q/2NLx$. La capacità aumenta diventando $C \simeq (2N - 1)L^2\epsilon_0/d$. Può anche essere vista come $2N - 1$ capacità in parallelo $C = L^2\epsilon_0/d$. Le capacità reali con valori grossi più o meno sfruttano questa geometria.

Un condensatore cilindrico di altezza h e raggio $R \ll h$ è formato da due conduttori perfetti. Si utilizzino coordinate cilindriche (r, θ, z) con z l'asse comune dei cilindri. Il primo conduttore contiene carica totale Q ed è composto da due parti (in rosso nella figura), che riempiono lo spazio fra $0 < r < d$ e fra $4d < r < 5d$ con $d = R/5$; le sue due parti formano un unico conduttore in quanto connesse da un tappo conduttore circolare di raggio R situato su di un bordo. Il secondo conduttore (in verde nella figura) contiene carica totale $-Q$ e riempie lo spazio fra $2d < r < 3d$, assieme ad un tappo conduttore situato sull'altro bordo. I due conduttori vengono inseriti uno nell'altro per un tratto $R \ll s < h$.



- Calcolare le cariche q_n sulle superfici ad $r = nd$ e quindi il campo elettrico E .
- Calcolare la capacità del condensatore, e la sua energia elettrostatica.
- Calcolare la forza verticale F_z che agisce sul conduttore con carica Q .
- (Questa domanda riguarda la conducibilità, discussa al capitolo 8). Al tempo $t = 0$ un materiale di conducibilità σ viene inserito nello spessore d intermedio come indicato in grigio nella figura sopra. Calcolare l'evoluzione temporale della carica Q .
- Calcolare nuovamente la capacità del condensatore aggiungendo altre parti come in figura, fino ad averne $2N - 1 \gg 1$. Il primo conduttore occupa le zone $4kd < r < (4k + 1)d$ con $k = 0, \dots, N$. Il secondo occupa $(4k + 2)d < r < (4k + 3)d$, dove ora $d = R/(2N - 1)$.

✎ Soluzione:

- Le cariche sono presenti nel solo tratto di lunghezza s . Si deve avere $q_2 = -q_1$ e $q_4 = -q_3$ in maniera da avere $E = 0$ nel conduttore. Quindi il campo elettrico vale

$$E_r(r) = \begin{cases} q_1/2\pi\epsilon_0 sr & d < r < 2d \\ q_3/2\pi\epsilon_0 sr & 3d < r < 4d \\ 0 & \text{nei conduttori e all'esterno.} \end{cases}$$

Imponendo $q_1 + q_4 = Q$ e che $V = \varphi(r_2) - \varphi(r_1)$ sia uguale a $-V = \varphi(r_4) - \varphi(r_2)$ si ottiene $q_1 = Q \ln(4/3)/\ln(8/3)$ e $q_3 = -Q \ln(2)/\ln(8/3)$.

- La capacità vale

$$C = \frac{Q}{V} = 2\pi\epsilon_0 s c, \quad c = \frac{1}{\ln(2)} + \frac{1}{\ln(4/3)} \approx 4.9.$$

Può anche essere calcolata come quella di 2 capacità $C_{12} = 2\pi\epsilon_0 s/\ln 2$ e $C_{34} = 2\pi\epsilon_0 s/\ln(4/3)$ in parallelo, $C = C_{12} + C_{34}$. L'energia vale $U = CV^2/2$.

- La forza è prodotta da effetti ai bordi e può essere calcolata applicando la formula

$$F_z = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{ds} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 s^2 c}.$$

Tende a far entrare i due conduttori uno nell'altro.

- Nasce una densità di corrente $J = \sigma E$, ed una corrente $I = \Phi_J = \sigma \Phi_E = \sigma q_1/\epsilon_0$. Si ha quindi $\dot{Q} = -Q/\tau$ con $\tau = Q\epsilon_0/q_1\sigma = \ln(8/3)\epsilon_0/\sigma \ln(4/3)$.
- Il sistema può essere visto come N capacità in parallelo C_n . Per grande n queste sono approssimabili come capacità 'pianè, e dominano la capacità totale:

$$C_n = \frac{2\pi\epsilon_0 s}{\ln(2n/(2n-1))} \stackrel{n \gg 1}{\simeq} 4\pi\epsilon_0 ns, \quad C = \sum_{n=1}^N C_n \simeq 2\pi\epsilon_0 s N^2.$$

Capitolo 7

Dielettrici

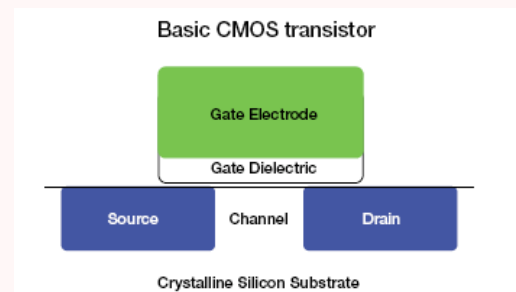
La densità di polarizzazione $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ indotta da un campo elettrico \mathbf{E} induce una densità di cariche di polarizzazione $\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_{\text{pol}}$ (e sui bordi una densità superficiale $\sigma_{\text{pol}} = \Delta P_{\perp}$). Separando la carica totale in $\rho_{\text{tot}} = \rho_{\text{free}} + \rho_{\text{pol}}$ e definendo $\mathbf{D} = \mathbf{P} + \epsilon_0 \mathbf{E} \equiv \epsilon \mathbf{E} = \kappa \mathbf{P} / (\kappa - 1)$ il campo \mathbf{D} soddisfa a $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}}$. Per χ costante nello spazio, un dielettrico è descritto dalle stesse equazioni del vuoto con $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \kappa \epsilon_0$ dove $\kappa = 1 + \chi$. Se χ varia bruscamente le condizioni di raccordo su bordi senza cariche libere sono: $\Delta E_{\parallel} = 0$ e $\Delta D_{\perp} = 0$ (cioè $\epsilon_1 E_{\perp 1} = \epsilon_2 E_{\perp 2}$). L'energia elettrica (inclusa quella nei dipoli polarizzati) vale $U = \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} / 2 = \frac{1}{2} \int dq_{\text{free}} \varphi$.

Esercizio 7.1: Transistor veloce

Calcolare la capacità di uno strato di spessore d ed area $S \gg d^2$ riempito di dielettrico.

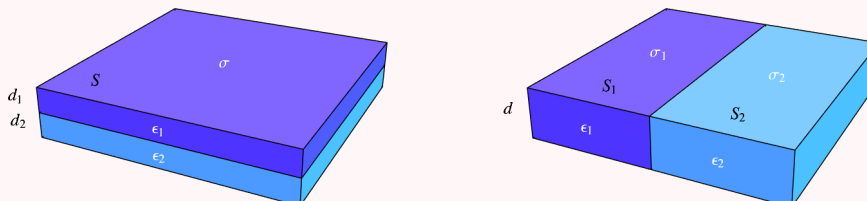
➤Soluzione: Basta sostituire $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ nella formula per la capacità: $C = \epsilon S / d$. Quindi la capacità aumenta se $\epsilon \gg \epsilon_0$. Un sistema con maggiore C consente di immagazzinare più carica $Q = CV$ a fissata differenza di potenziale V , in quanto il dielettrico scherma la carica libera.

Materiali ad alto ϵ sono usati nei transistor. Un transistor è un interruttore che si apre (NMOS) o si chiude (PMOS) quando il voltaggio sul 'gate' supera un certo valore critico. Il componente cruciale della porta è uno strato di SiO_2 . Per rendere il transistor veloce, si mette uno strato isolante il più sottile possibile (1 nm, pochi atomi), con il problema che l'isolamento non è perfetto, parte della corrente scappa e surriscalda. Per risolvere questo problema sono stati sviluppati materiali con alta costante dielettrica, anche $\epsilon \sim 100\epsilon_0$, che quindi hanno capacità maggiore e riescono a schermare e trattenere la carica. Appena il circuito si apre la carica libera parte, permettendo transistor veloci anche con uno spessore abbastanza grande da evitare perdite di corrente.



Esercizio 7.2: 2 dielettrici in condensatore piano

Calcolare la capacità di un condensatore piano di spessore d ed area S ottenuto mettendo due diversi dielettrici fra due piatti conduttori nelle due geometrie mostrate in figura.



✚**Soluzione:** La prima geometria ricorda due condensatori in serie; la seconda ricorda due condensatori in parallelo.

- a) Chiamo E_1 ed E_2 i campi elettrici nelle due zone di spessore d_1 e d_2 e costante dielettrica ϵ_1 ed ϵ_2 . Il campo D è costante, in quanto non c'è carica libera nella zona di separazione, e quindi fornisce una relazione fra E_1 ed E_2 :

$$D = \sigma = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2.$$

Quindi la differenza di potenziale V e la capacità $C = Q/V$ valgono

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{dove} \quad C_i = \frac{\epsilon_i S}{d_i}.$$

Si è ottenuta la formula generale per due capacità in serie.

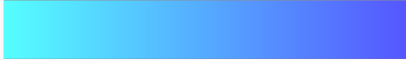
- b) La condizione sul bordo di separazione $\Delta E_{\parallel} = 0$ implica che i campi elettrici nelle due zone sono uguali, e che quindi la differenza di potenziale $V = E_i d$ è la stessa nelle due zone. Pertanto la densità di carica *totale* è la stessa nelle due zone. Ci interessa la capacità, definita in termini della carica *libera* come $C = Q_{\text{free}}/V$. Chiamiamo σ_1 e σ_2 le diverse densità di carica libera nelle due zone. Esse determinano il campo elettrico come $E_i = \sigma_i/\epsilon_i$. Imponendo $E_1 = E_2$ si determinano $\sigma_i = Q\epsilon_i/(S_1\epsilon_1 + S_2\epsilon_2)$ in termini della carica totale $Q = S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2$. Si ha quindi

$$V = E_i d = \frac{Qd}{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2} \quad \text{quindi} \quad C = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2.$$

Si è ottenuta la formula generale per due capacità in parallelo.

Esercizio 7.3: N dielettrici in condensatore piano

Il condensatore dell'esercizio precedente viene ora riempito con N dielettrici di egual spessore d/N e costanti dielettriche $\epsilon_i = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)i/N$. Calcolare la capacità nel limite $N \rightarrow \infty$, in cui la costante dielettrica varia in maniera continua.



✚**Soluzione:**

- 1) È possibile vederli come N condensatori in serie di spessore $\Delta z = d/N$: sommando gli inversi delle loro capacità nel limite continuo si ottiene

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta z}{\epsilon_i S} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^d \frac{dz}{\epsilon(z) S} = \frac{d}{S} \frac{\ln(\epsilon_1/\epsilon_2)}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$$

dove $\epsilon(z) = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)z/d$.

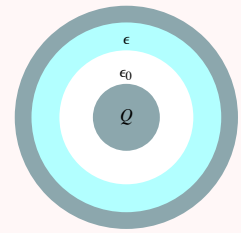
- 2) È possibile vederli come N condensatori in parallelo, ciascuno di area $\Delta S = S/N = L \Delta x$ dove $S = L^2$ è l'area totale. Combinando le loro capacità si ottiene

$$C = \sum_{i=1}^N C_i = \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon_i L \Delta x}{d} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{\epsilon(x) dx L}{d} = \frac{S}{d} \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$$

dove $\epsilon(x) = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)x/L$.

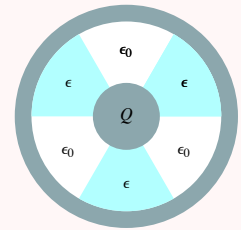
Esercizio 7.4: Dielettrico cilindrico ©

Lo spazio compreso fra la armature di un condensatore cilindrico di raggi interno r ed esterno $R > r$ ed altezza $h \gg R$ è parzialmente riempito da un materiale di costante dielettrica ϵ che riempie la corona circolare compresa fra $(R+r)/2$ ed R , come nella figura superiore. Le due armature, interna ed esterna, contengono rispettivamente cariche totali Q e $-Q$. Calcolare:



- Il campo \mathbf{D} ed il campo elettrico \mathbf{E} nelle regioni occupate dal vuoto e dal dielettrico.
- La capacità C e l'energia elettrostatica U del condensatore.

Si consideri ora il condensatore nella figura inferiore, dove il dielettrico riempie la regione colorata. Calcolare:



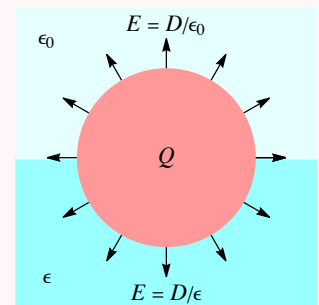
- Il campo elettrico \mathbf{E} ed il campo \mathbf{D} nelle regioni occupate dal vuoto e dal dielettrico.
- La capacità C e l'energia elettrostatica U del condensatore.

✎Soluzione:

- Per simmetria cilindrica \mathbf{D} ed \mathbf{E} hanno solo la componente radiale. In base al teorema di Gauss, $\Phi_D = Q_{\text{in}}$, essa vale $D_r = Q/2\pi rh$. Essendo $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ si ha $E_r = Q/2\pi\epsilon_0 rh$ nel vuoto e $E_r = Q/2\pi\epsilon rh$ nel dielettrico.
- Ricordiamo che la capacità di un condensatore cilindrico senza dielettrico vale $C = 2\pi h\epsilon_0 / \ln(R/r)$. È possibile vedere il sistema come due capacità cilindriche in serie, $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$, dove $C_1 = 2\pi h\epsilon_0 / \ln((R+r)/2r)$ e $C_2 = 2\pi h\epsilon / \ln(2R/(r+R))$. L'energia vale $U = Q^2/2C$.
- Il campo elettrico ha solo una componente radiale E_r , continua lungo le superfici di separazione: esso non vede quindi la rottura della simmetria per rotazione. Il campo \mathbf{D} non è simmetrico sotto rotazione, essendo dato da $\epsilon \mathbf{E}$ nel dielettrico e da $\epsilon_0 \mathbf{E}$ nel vuoto. Per calcolare E_r si impone che il flusso del campo \mathbf{D} valga $\Phi_D = Q_{\text{in}}$. Essendo $\Phi_D = (\epsilon + \epsilon_0)2\pi r^2 E_r$ e $Q_{\text{in}} = Q$ si ottiene $E_r = Q/\pi hr(\epsilon + \epsilon_0)$. Il flusso di \mathbf{E} è minore di Q , in quanto la carica libera viene parzialmente schermata dalle cariche di polarizzazione.
- È possibile vedere il sistema come capacità in parallelo, $C = C_0 + C_1$ dove $C_0 = \pi h\epsilon_0 / \ln(R/r)$ e $C_1 = \pi h\epsilon / \ln(R/r)$ sono le capacità di mezzo cilindro. Si ha poi $U = Q^2/2C$.

Esercizio 7.5: Sfera conduttrice in acqua ©

Una sfera conduttrice di raggio R contiene una carica Q . La sfera è per metà immersa in acqua (costante dielettrica $\epsilon > \epsilon_0$); l'altra metà si trova nel vuoto. Calcolare



- Il campo elettrico in tutto lo spazio.
- La densità di carica sulla superficie della sfera.
- La pressione sulla superficie e la forza totale da essa esercitata.
- Il lavoro necessario a portare la sfera molto sopra l'acqua. (Si calcoli solo il contributo dovuto alle forze elettrostatiche, trascurando quello dovuto alla forza di gravità).

✎Soluzione:

- Dentro il conduttore $E = 0$. Il campo elettrico ha lo stesso valore in acqua e nel vuoto, in quanto la componente parallela alla superficie di separazione è continua. Cerchiamo quindi una soluzione con campo elettrico radiale. Il vettore \mathbf{D} vale $D_{\text{vac}} = \epsilon_0 E$ nel vuoto e $D_{\text{acqua}} = \epsilon E$ nell'acqua. Applicando il teorema di

Gauss su di una superficie sferica concentrica alla sfera e di raggio $r > R$ si ottiene $2\pi r^2(D_{\text{vac}} + D_{\text{acqua}}) = Q$, da cui $E = Q/2\pi(\epsilon + \epsilon_0)r^2$.

- b) La densità superficiale di carica totale vale $\sigma = \epsilon_0 E$: in totale è minore di Q ed è distribuita uniformemente. Essa può essere decomposta come $\sigma = \sigma_{\text{free}} + \sigma_{\text{pol}}$. La carica libera vale $\sigma_{\text{free}} = D$: in totale vale Q ed è maggiore nell'acqua che nel vuoto. La carica di polarizzazione vale zero nel vuoto e $\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -P = -(\epsilon - \epsilon_0)E$ nell'acqua, in cui ha segno opposto rispetto alla carica libera.
- c) La pressione elettrostatica sulla superficie vale $p = DE/2 = \epsilon E^2/2$ ed è diretta verso l'esterno della sfera (infatti è dovuta alla repulsione fra le cariche). Siccome $\sigma_{\text{free}}^{\text{acqua}} > \sigma_{\text{free}}^{\text{vuoto}}$ la pressione è maggiore sulla parte della superficie immersa dentro l'acqua, producendo una forza totale verso il basso: il verso è confermato al punto d). La forza totale è verticale con modulo

$$F_z = \int dS p_z = \int_0^1 d\cos\theta 2\pi R^2 (p_{\text{acqua}} - p_{\text{vuoto}}) \cos\theta = (p_{\text{acqua}} - p_{\text{vuoto}}) \pi R^2 = \frac{E^2}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \pi R^2.$$

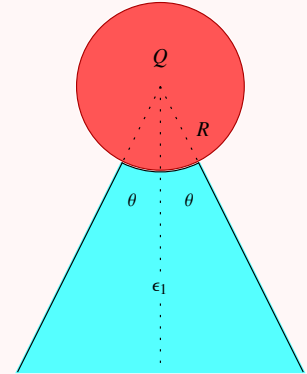
- d) Il lavoro è uguale alla differenza delle energie elettrostatiche. Alla fine $U_f = U_{\text{vuoto}}$, l'energia di una sfera conduttrice carica nel vuoto. All'inizio $U_i = \frac{1}{2}(U_{\text{vuoto}} + U_{\text{acqua}})$. Quindi

$$\mathcal{L} = U_i - U_f = \frac{U_{\text{acqua}} - U_{\text{vuoto}}}{2} = \frac{Q^2}{8\pi R} \left[\frac{2}{\epsilon + \epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \right] < 0.$$

Esercizio 7.6: Sfera su cono dielettrico ©

Una sfera conduttrice di raggio R contiene carica elettrica totale Q ed è appoggiata come in figura per una frazione $f = \int_0^\theta 2\pi R^2 \sin\theta d\theta / S = (1 - \cos\theta)/2$ della sua area su di un cono idealmente infinito di costante dielettrica ϵ_1 mancante del vertice (che coinciderebbe con il centro della sfera). Il resto dello spazio è vuoto. All'equilibrio elettrostatico:

- a) Calcolare il campo elettrico e la densità di carica superficiale σ_1 (σ_0) sulla parte della superficie della sfera a contatto (non a contatto) con il cono.
- b) Interpretare fisicamente la soluzione nel limite $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$.
- c) Tornando al caso generico, calcolare l'energia elettrostatica del sistema U , confrontandola con quella U_0 nella configurazione in cui il cono è assente.
- d) Assumendo che il cono abbia conducibilità elettrica σ , calcolare l'evoluzione temporale della carica Q sulla sfera.



➤ Soluzione:

- a) La condizione di continuità di E_{\parallel} sulla superficie di separazione impone che il campo elettrico è radiale. Il campo $D_i(r) = \epsilon_i E(r)$ è legato alla carica superficiale da $\sigma_i = D_i$. Quindi $\sigma_1/\epsilon_1 = \sigma_0/\epsilon_0$. Imponendo $4\pi R^2(f\sigma_1 + (1-f)\sigma_0) = Q$ si ottiene che la carica libera vale

$$\sigma_0 = \frac{Q}{4\pi R^2[(1-f) + f\epsilon_1/\epsilon_0]} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \sigma_1.$$

La carica di polarizzazione vale $\sigma_{\text{pol}} = \sigma_0 - \sigma_1$. Il campo elettrico vale $\mathbf{E} = 0$ nella sfera conduttrice e

$$E_r = \frac{Q}{4\pi r^2(f\epsilon_1 + (1-f)\epsilon_0)}$$

in tutto lo spazio fuori.

- b) Nel limite $\epsilon_1 \gg \epsilon_0$ il cono diventa come se fosse conduttore e si ha la soluzione intuitiva $\mathbf{E} = 0$ in cui scherma la carica sulla sfera: $\sigma_0 = 0$ e $\sigma_1 = Q/4\pi R^2 f = -\sigma_{\text{pol}}$.

c) Ricordando che $u = ED/2$, l'energia elettrostatica vale

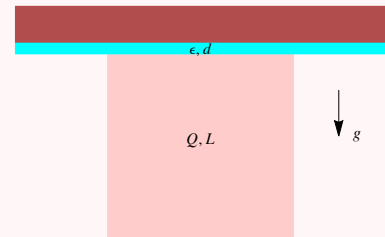
$$U = \int dV u = \frac{Q^2}{8\pi R(f\epsilon_1 + (1-f)\epsilon_0)} = \frac{U_0}{1 + f(\epsilon_1 - \epsilon_0)}, \quad \Delta U = \frac{Q^2 f(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{8\pi R\epsilon_0(f\epsilon_1 + (1-f)\epsilon_0)}.$$

d) Nel cono si ha $J = \sigma E$, quindi $Q(t) = Qe^{-t/\tau}$ con

$$\dot{Q} = -\Phi_J = -\frac{Q}{\tau}, \quad \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \left[\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} + \frac{1-f}{f} \right].$$

Esercizio 7.7: Cubo appeso ☺

Ad un soffitto piano conduttore, idealmente infinito, è attaccato meccanicamente tramite chiodi uno strato isolante di spessore d e costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_0$. Un cubo conduttore isolato di lato $L \gg d$, massa M , carica Q , viene messo a contatto con il dielettrico come in figura.



- Come si dispone la carica Q ?
- Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio.
- Calcolare la pressione elettrica sul cubo.
- Calcolare il valore critico di Q tale che il cubo rimane appeso al soffitto. Si dia il valore numerico per $M = 1$ kg, $L = 0.1$ m, $d = 1$ mm.
- Si discuta fisicamente come cambia la risposta alla domanda d) se $\epsilon \neq \epsilon_0$?

☞ Soluzione:

- Potendo trascurare gli effetti ai bordi in quanto $d \ll L$, una soluzione (e quindi la soluzione) è densità di carica superficiale uniforme sulla faccia vicina al conduttore, $\sigma = Q/L^2$, e zero altrove.
- Introducendo la carica immagine $-Q$ disposta simmetricamente rispetto alla superficie del piano conduttore, si ha $E = \sigma/\epsilon$ nel dielettrico fra il cubo ed il piano (ed ortogonale al piano) e $E = 0$ altrove.
- La pressione vale $p = E\sigma/2 = Q^2/2\epsilon_0 L^4$ ed è diretta verso l'alto.
- La forza elettrica vale $F = L^2 p = Q^2/2L^2\epsilon_0$ e non dipende da d . È più forte della gravità, $F > Mg$, per $Q > \sqrt{2L^2 Mg\epsilon_0} = 1.3 \cdot 10^{-6}$ C nell'esempio numerico.
- Avere $\epsilon > \epsilon_0$ riduce il campo elettrico nel dielettrico, ma non la forza su Q . Infatti per assunzione il dielettrico è attaccato al soffitto, per cui il cubo è sostenuto dalla forza elettrica fra le sue cariche e quelle su dielettrico e soffitto conduttore. La carica totale su dielettrico e conduttore (carica indotta più carica di polarizzazione) rimane $-Q$. Avendo messo $\epsilon \neq \epsilon_0$ è cambiata solo la loro distribuzione spaziale, ma la forza calcolata al punto precedente non dipende da d e quindi rimane uguale.

Esercizio 7.8: Forza di conduttore su dielettrico

Un dielettrico di base quadrata a ed altezza $h \gg a$ ha una densità di polarizzazione uniforme P parallela alla sua altezza. Viene appoggiato su di un piano conduttore. Calcolare la forza sul dielettrico.

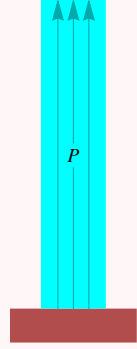
☞ Soluzione: La polarizzazione genera una densità di carica di polarizzazione uniforme $+\sigma = P$ sulla cima del dielettrico, e $-\sigma = -P$ sulla base del dielettrico.

Il problema è risolvibile esattamente ricorrendo ad un dielettrico immagine. Siccome $h \gg a$ la forza dominante è quella generata dalle cariche $-\sigma$ nella base che inducono una carica $+\sigma$ sul conduttore, ed un campo elettrico $E = \sigma/\epsilon_0$ e quindi una forza attrattiva $F = E\sigma a^2/2 = P^2 a^2/2\epsilon_0$.

Possiamo stimare il piccolo contributo aggiuntivo alla forza delle cariche ad altezza $h \gg a$ approssimandole come una carica puntiforme $q = \sigma a^2$, ed introducendo una carica immagine $-q$. Sommando le forze fra le 4 coppie di cariche, la forza totale vale

$$F \stackrel{h \gg a}{\simeq} \frac{P^2 a^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \left(1 + 1 - \frac{1}{4} \right) \frac{a^2}{2\pi h^2} \right)$$

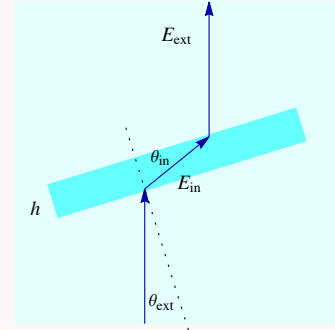
in cui il primo termine, dominante, è la forza calcolata in precedenza; il secondo termine è la repulsione $q^2/h^2 4\pi\epsilon_0$ fra le cariche $-\sigma$ sulla base e la carica immagine $-q$; il terzo termine è la eguale repulsione fra la carica $+\sigma$ sulla cima e la cariche immagine $+\sigma$ vicina alla base; il quarto termine è l'attrazione fra le cariche $\pm q$ a distanza $2h$.



Esercizio 7.9: Dielettrico storto in campo esterno ©

Una lastra dielettrica ha spessore h , area S e costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ con $\epsilon_r \gtrsim 1$. La lastra è immersa in un campo elettrico esterno costante \mathbf{E}_{ext} che forma un angolo θ_{ext} con la normale alla superficie. Si trascurino gli effetti al bordo, assumendo $S \gg h^2$.

- Calcolare il campo elettrico \mathbf{E}_{in} all'interno della lastra e l'angolo θ_{in} che esso forma con la normale alla superficie.
- Calcolare le densità di carica di polarizzazione σ_{pol} .
- Calcolare come l'energia elettrostatica del sistema dipende da θ_{ext} .
- Si dica se il campo elettrico esterno esercita un momento di rotazione sulla lastra e se ne dia il verso.



➤ Soluzione:

- Calcoliamo il campo elettrico nel dielettrico sfruttando la continuità della componente del campo elettrico parallela alla superficie e della componente di $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ortogonale alla superficie. Si ottiene $E_{\text{in}}^{\parallel} = E_{\text{ext}}^{\parallel} = E_{\text{ext}} \sin \theta_{\text{ext}}$ e $E_{\text{in}}^{\perp} = E_{\text{ext}}^{\perp} / \epsilon_r = E_{\text{ext}} \cos \theta_{\text{ext}} / \epsilon_r$ e quindi

$$\tan \theta_{\text{in}} = \frac{E_{\text{in}}^{\parallel}}{E_{\text{in}}^{\perp}} = \epsilon_r \tan \theta_{\text{ext}}.$$

Poichè $\epsilon_r > 1$ si ha $\theta_{\text{in}} > \theta_{\text{ext}}$.

- Per il teorema di Gauss si ha

$$\sigma_{\text{pol}} = \epsilon_0 (E_{\text{ext}}^{\perp} - E_{\text{in}}^{\perp}) = \epsilon_0 E_{\text{ext}} \cos \theta_{\text{ext}} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right).$$

- L'energia elettrostatica all'esterno della lastra non dipende da θ_{ext} , mentre l'energia all'interno della lastra di volume $V = Sh$ è

$$U_{\text{in}} = V \frac{\epsilon}{2} E_{\text{in}}^2 = V \frac{\epsilon}{2} E_{\text{ext}}^2 \left(\frac{\cos^2 \theta_{\text{ext}}}{\epsilon_r^2} + \sin^2 \theta_{\text{ext}} \right).$$

Un aspetto non ovvio di questa formula è che, sebbene $E_{\text{in}}^{\parallel} = E_{\text{ext}}^{\parallel}$ non varia, il suo contributo all'energia varia in quanto l'energia include anche quella necessaria a polarizzare il materiale.

- L'energia elettrostatica è minima per $\theta_{\text{ext}} = 0$, e quindi le forze elettrostatiche tendono a portare la lastra in tale posizione di energia minima. Il momento delle forze vale

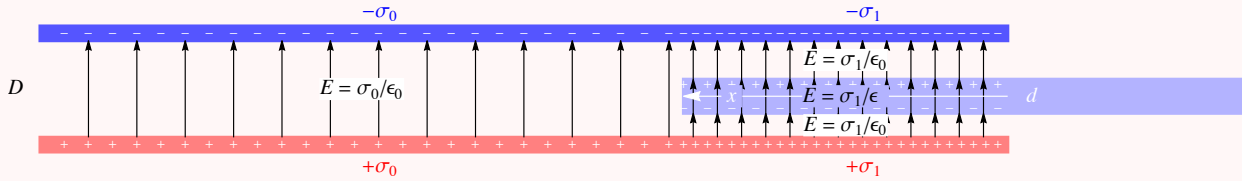
$$M = -\frac{\partial U}{\partial \theta_{\text{ext}}} = -\frac{\partial U_{\text{in}}}{\partial \theta_{\text{ext}}} = V \frac{\epsilon}{2} E_{\text{ext}}^2 \sin 2\theta_{\text{ext}} \left(\frac{1}{\epsilon_r^2} - 1 \right).$$

Calcolare M direttamente in termini del momento delle forze sulle cariche superficiali di polarizzazione è complicato in quanto contribuiscono in maniera comparabile non solo le cariche σ_{pol} sulla superficie S , ma anche quelle sui due bordi con densità $\sigma'_{\text{pol}} = P = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E^{\parallel}$, in quanto la superficie minore è compensata dal braccio maggiore.

Vale la pena di notare che l'approssimazione fallisce se ϵ_r è così grande che le cariche sui bordi contribuiscono in maniera significativa al campo elettrico; in particolare questo accade nel limite $\epsilon_r \rightarrow \infty$ in cui il dielettrico si riduce ad un conduttore con un effetto delle punte sui bordi.

Esercizio 7.10: Dielettrico in condensatore

Un materiale di costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ e spessore d viene inserito per una lunghezza x , come disegnato in figura, in un condensatore quadrato di spessore D e lunghezza L mantenuto ad una differenza di potenziale V . Calcolare la forza F_x sul dielettrico assumendo $L, x \gg D$.



➤Soluzione: Possiamo considerare il sistema come una capacità $C_0 = \epsilon_0 L(L - x)/D$ in parallelo con una capacità C_1 , costituita da 2 capacità in serie: $C'_1 = \epsilon_0 Lx/(D - d)$ e $C''_1 = \epsilon_r \epsilon_0 Lx/d$. Quindi la capacità totale vale

$$C = C_0 + C_1 = C_0 + \frac{1}{1/C'_1 + 1/C''_1} = \frac{\epsilon_0 L(L - x)}{D} + x \frac{L \epsilon_0 \epsilon_r}{d - d \epsilon_r + D \epsilon_r}.$$

Come visto in precedenza la forza elettrica vale

$$F = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx} = \frac{V^2}{2} \frac{dL \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{D(d - d \epsilon_r + D \epsilon_r)}.$$

Il dielettrico viene attratto dentro il condensatore. Nel limite $\epsilon_r \rightarrow \infty$ si ritrova il ‘conduttore in condensatore’ studiato nell’esercizio 6.3. Non serve calcolare i campi elettrici e la disposizione delle cariche, disegnati nella figura.

Esercizio 7.11: Acqua in condensatore

Un condensatore cilindrico di lunghezza L e diametri esterno ed interno D e d , mantenuto ad una differenza di potenziale V , viene immerso verticalmente in una bacinella d’acqua, di densità ρ . Calcolare di quanto si innalza il livello dell’acqua dentro al condensatore rispetto al livello esterno.

➤Soluzione: L’acqua ha costante dielettrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ con $\epsilon_r = 1 + \chi \approx 80$. Inserendo un tale dielettrico fra le armature di un condensatore se ne aumenta la capacità: la risultante forza elettrica $F_{\text{el}} = dU_{\text{el}}/dz$ tende a far salire l’acqua dentro il condensatore. Al contrario la forza gravitazionale F_{grav} tende a farla scendere. L’acqua salirà fino al livello z tale che queste due forze si bilanciano. Calcoliamo le due forze:

- Se l’acqua entra nel condensatore di un tratto z il sistema può essere visto come due capacità cilindriche in parallelo con capacità totale

$$C(z) = 2\pi \frac{z\epsilon + (L - z)\epsilon_0}{\ln(D/d)} = C(0) + 2\pi \frac{\epsilon_0 z \chi}{\ln(D/d)}.$$

La forza elettrica non dipende da z :

$$F_{\text{el}} = + \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dz} = \frac{\pi V^2 \epsilon_0 \chi}{\ln D/d}.$$

- La massa sollevata $m(z)$ risente della forza gravitazionale

$$F_{\text{grav}} = -m(z)g = -\pi \frac{D^2 - d^2}{4} z \rho \cdot g.$$

Imponendo $F_{\text{grav}} + F_{\text{el}} = 0$ si trova

$$z = \frac{4V^2 \epsilon_0 \chi}{(D^2 - d^2) g \rho \ln(D/d)}.$$

Quindi misurando z si può ricavare χ . A livello concettuale il sistema può fare da pompa, ma inserendo i valori numerici si trova che anche per piccolo $D \sim \text{mm}$ e grande $V \sim \text{kV}$ l'acqua viene sollevata solo di $z \sim \text{mm}$.

Esercizio 7.12: Carica davanti a semipiano dielettrico

Lo spazio è diviso in due zone separate dal piano $x = 0$: a sinistra ($x < 0$) c'è un materiale con costante dielettrica ϵ_2 , ed a destra ($x > 0$) un materiale con costante dielettrica ϵ_1 . Una carica q si trova a destra a distanza d dalla superficie di separazione. Calcolare i campi elettrici e la forza elettrica sulla carica q .

✚Soluzione: Il problema può essere risolto mediante una generalizzazione del metodo delle immagini: se uno trova la soluzione, questa è unica. Provo la seguente soluzione per il potenziale elettrico:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \begin{cases} q/r + q'/r' & \text{per } x > 0 \\ q''/r & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

dove r è la distanza dal punto $P = (d, 0, 0)$ dove si trova la carica q , e r' la distanza dal punto $(-d, 0, 0)$ dove si trova la carica immagine q' . Il problema con un piano conduttore è risolto da $q' = -q$ e $q'' = 0$. Qui lasciamo generiche le cariche ‘immagini’ q' e q'' . Siccome il potenziale nella zona di sinistra non è costante (non trattandosi di un conduttore) proviamo ad assumere che sia quello prodotto da una ulteriore carica immagine q'' situata in P . Questo sistema deve soddisfare alle condizioni di raccordo sul piano di separazione ad $x = 0$, lungo il quale $r = r'$:

$$\begin{cases} \Delta E_{\parallel} = 0 \\ \Delta D_{\perp} = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2} \\ \epsilon_1 E_{\perp 1} = \epsilon_2 E_{\perp 2} \end{cases}.$$

Calcolando $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ in base alla soluzione tentata, si ha sul piano

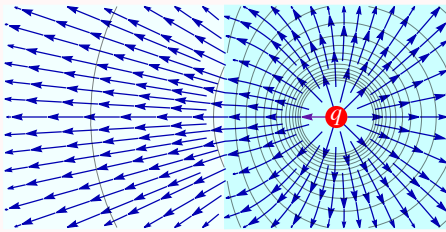
$$E_{\parallel 1} = \frac{(q + q') \cos \theta}{4\pi\epsilon_1 r^2}, \quad E_{\parallel 2} = \frac{q'' \cos \theta}{4\pi\epsilon_1 r^2}, \quad E_{\perp 1} = \frac{(-q + q') \sin \theta}{4\pi\epsilon_1 r^2}, \quad E_{\perp 2} = -\frac{q'' \sin \theta}{4\pi\epsilon_1 r^2}$$

e si ottengono quindi le condizioni

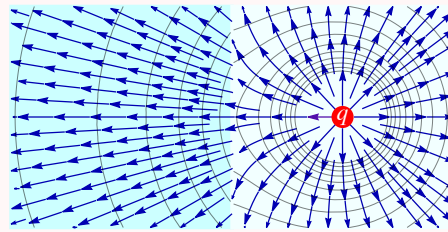
$$\begin{cases} q'' = q + q', \\ \epsilon_1(q - q') = \epsilon_2 q'' \end{cases} \quad \text{risolte da} \quad \begin{cases} q' = q \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \\ q'' = q \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \end{cases}$$

Il grafico mostra le linee equipotenziali e le linee di campo nei due casi $\epsilon_1 < \epsilon_2$ (sinistra) e $\epsilon_1 > \epsilon_2$ (destra):

$$\epsilon_1 = \epsilon_2/4$$



$$\epsilon_1 = 4\epsilon_2$$



A questo punto è facile calcolare le varie quantità fisiche di interesse. La forza sulla carica q dipende dal segno di $\epsilon_1 - \epsilon_2$ e vale:

$$F = qE_{q'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_1(2d)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_1 d^2} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

Ha interesse verificare i limiti:

- Nel limite $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$ (ad es. acqua a sinistra ed aria a destra) si ritrova il conduttore: $q' = -q$ e $q'' = 0$. La forza è attrattiva.
- Nel limite $\epsilon_2 = \epsilon_1$ si ritrova il caso banale. La forza sulla carica q è nulla.
- Nel limite $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$ le linee di campo tendono invece a rimanere confinate nella zona 1. La forza è repulsiva.

Nell'esercizio 8.17 risolveremo in maniera simile un esercizio con una carica in semi-piano conduttore.

Esercizio 7.13: Dielettrico in campo elettrico esterno

Un materiale con costante dielettrica ϵ_{in} è immerso in un materiale con costante dielettrica ϵ_{out} e campo elettrico esterno \mathbf{E}_{ext} . Calcolare il campo elettrico all'interno del dielettrico assumendo che esso abbia forma: a) lunga e sottile; b) corta e larga; c) sferica per $\epsilon_{\text{in}} \approx \epsilon_{\text{out}}$; d) sferica.

◀**Soluzione:** Conta solo il rapporto $\kappa \equiv \epsilon_{\text{in}}/\epsilon_{\text{out}}$, che può essere maggiore di 1 (ad esempio una goccia di acqua nell'aria) o minore di 1 (ad esempio una bolla di aria nell'acqua). Per semplificare il linguaggio possiamo quindi pensare di avere il vuoto all'esterno ed un dielettrico all'interno.

- a) Se il dielettrico è lungo e sottile, la condizione al bordo dominante è $\Delta E_{\parallel} = 0$, e quindi $E_{\text{in}} = E_{\text{ext}}$.



- b) Se il dielettrico è corto e largo, la condizione al bordo dominante è $\Delta D_{\perp} = 0$: dentro al dielettrico il campo elettrico vale $E_{\text{in}} = D_{\text{in}}/\kappa = D_{\text{out}}/\kappa = E_{\text{out}}/\kappa$.
- c) Se il dielettrico ha forma sferica, intermedia fra i due casi precedenti, ci aspettiamo che un conto più complicato fornisca un campo interno dal valore intermedio. Le equazioni da risolvere dentro al dielettrico sono complicate:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{pol}}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}_{\text{tot}} \quad (7.1)$$

cioè la polarizzazione è proporzionale al campo elettrico totale, che comprende un contributo generato dalla polarizzazione.

Per iniziare, consideriamo il caso limite di due materiali con costanti dielettriche simili, $\epsilon_{\text{in}} \approx \epsilon_{\text{out}}$ e quindi $\chi \equiv \kappa - 1 \ll 1$. In questo limite la polarizzazione \mathbf{P} è piccola e solo interna, e quindi il campo elettrico totale \mathbf{E}_{tot} è circa uguale al campo esterno, \mathbf{E}_{ext} . Questo consente di calcolare perturbativamente la piccola polarizzazione, che vale $\mathbf{P} \simeq \epsilon_0 \chi \mathbf{E}_{\text{ext}}$, ed è quindi costante. Come discusso nell'esercizio 3.5 una polarizzazione \mathbf{P} costante genera una densità di cariche superficiali $\sigma = P \cos \theta$ e quindi, all'interno della sfera, un campo elettrico $\mathbf{E}_{\text{pol}} = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$ uniforme. Al primo ordine perturbativo in $\chi \ll 1$ il campo elettrico totale dentro alla sfera, rimane uniforme e vale

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{pol}} \simeq \left(1 - \frac{\chi}{3}\right) \mathbf{E}_{\text{ext}}.$$

- d) \mathbf{E}_{ext} e \mathbf{E}_{tot} differiscono ora in modo significativo. La soluzione perturbativa suggerisce che la soluzione completa avrà polarizzazione \mathbf{P} uniforme nell'interno. Abbiamo calcolato nell'esercizio 3.5 che questa \mathbf{P} genera all'interno un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}_{\text{pol}} = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$ con $\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{tot}}$. Quindi, dentro la sfera si ha

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{pol}} = \mathbf{E}_{\text{ext}} - \frac{\chi}{3} \mathbf{E}_{\text{tot}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{\text{tot}} = \frac{\mathbf{E}_{\text{ext}}}{1 + \chi/3} = \frac{3\mathbf{E}_{\text{ext}}}{2 + \kappa}, \quad \mathbf{P} = 3\epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{ext}} \frac{\kappa - 1}{2 + \kappa}.$$

Per $\chi \ll 1$ si ritrova l'approssimazione del punto precedente. Per $\chi \gg 1$ il dielettrico diventa come un conduttore: $E_{\text{tot}} \rightarrow 0$.

Il campo elettrico totale esterno alla sfera è ora calcolabile, ricordando che una sfera con polarizzazione uniforme produce, al suo esterno, il campo elettrico di un dipolo.

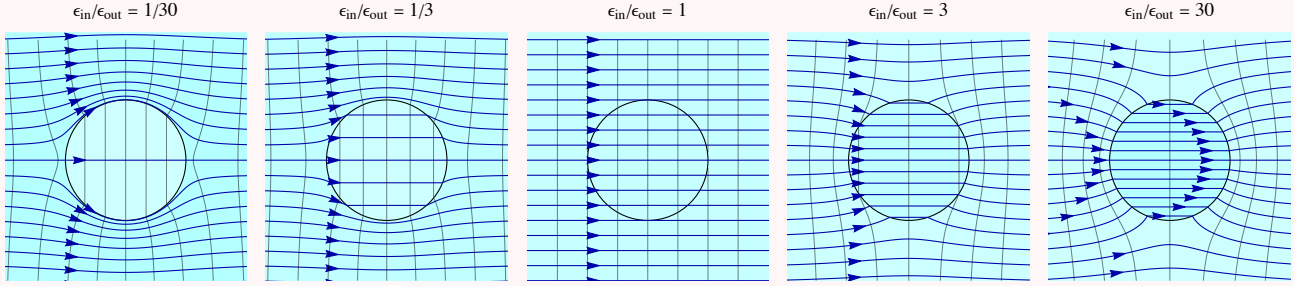


Figura 7.1: Linee di campo (curve con frecce) ed equipotenziali (curve grigie) per una sfera dielettrica in un campo elettrico esterno costante per diversi valori della costante dielettrica relativa $\kappa = \epsilon_{\text{in}}/\epsilon_{\text{out}}$.

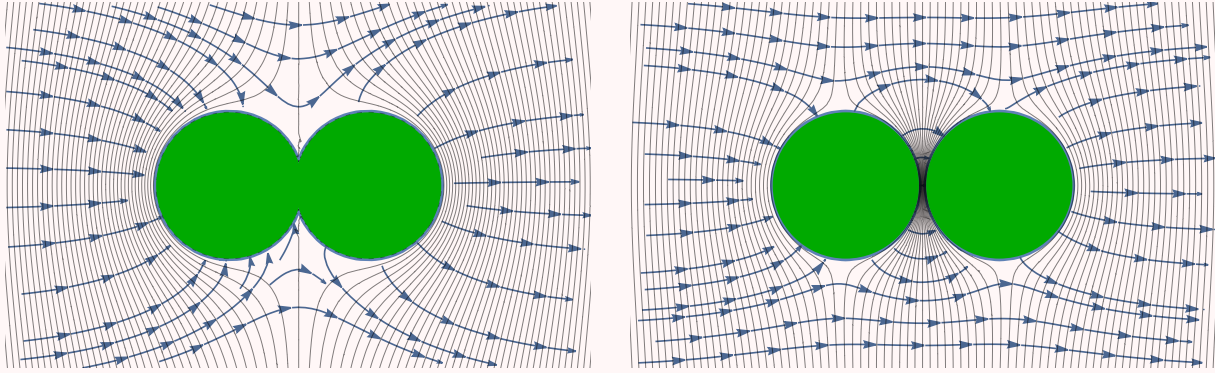


Figura 7.2: Soluzione numerica per le linee di campo e le curve equipotenziali per due acini di uva conduttori in campo elettrico esterno. Se si toccano (a sinistra) il campo è lievemente più intenso ai loro bordi. Se sono vicini ma non si toccano (a destra) il campo è molto più intenso nella zona intermedia.

- d') Avendo costruito la soluzione, osserviamo che è data da un campo costante E_{ext} più la soluzione dell'esercizio 3.5, re-interpretando le cariche sulla superficie come cariche di polarizzazione. Il potenziale vale:

$$\varphi(r, \theta) = -E_{\text{ext}}r \cos \theta - E_{\text{pol}} \cos \theta \begin{cases} R^3/r^2 & \text{per } r > R \\ r & \text{per } r < R \end{cases}.$$

Verifichiamo che soddisfa alle equazioni di Maxwell in un dielettrico. Nella zona interna ed esterna sono soddisfatte, ed occorre verificare le condizioni al bordo. La condizione al bordo $\Delta E_{\parallel} = 0$ è banalmente soddisfatta in quanto φ è continuo. La discontinuità in ΔE_{\perp} è dovuta alle cariche di polarizzazione; nel formalismo in cui viene introdotto il campo $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ generato dalle sole cariche libere occorre verificare che i campi

$$D_{\perp}^{\text{out}} = \epsilon_{\text{out}}(E_{\text{ext}} - 2E_{\text{pol}}) \cos \theta, \quad D_{\perp}^{\text{in}} = \epsilon_{\text{in}}(E_{\text{ext}} + E_{\text{pol}}) \cos \theta$$

soddisfano alla condizione al bordo $\Delta D_{\perp} = 0$, ovvero $D_{\perp}^{\text{out}} = D_{\perp}^{\text{in}}$. Imponendola si ottiene $E_{\text{pol}} = E_{\text{ext}}(\epsilon_{\text{out}} - \epsilon_{\text{in}})/(2\epsilon_{\text{out}} + \epsilon_{\text{in}})$ e nuovamente $E_{\text{tot}} = 3E_{\text{ext}}/(2 + \kappa)$, $P = 3\epsilon_0 E_{\text{ext}}(\kappa - 1)/(2 + \kappa)$.

I campi e le superfici equipotenziali sono disegnati in figura 7.1. Nell'esercizio 8.21 risolveremo un esercizio con una sfera conduttrice riducendolo al presente esercizio, in quanto un conduttore a regime è equivalente ad un dielettrico con costante dielettrica complessa.

Perchè mettendo due acini d'uva vicini in un forno a microonde possono venire piccoli fulmini?

✚**Soluzione:** Un acino d'uva è circa una sfera di acqua, che è un dielettrico con grande costante dielettrica relativa $\kappa \sim 80$. Quindi la fig. 7.1 a destra descrive qualitativamente il campo elettrico di un acino d'uva dentro un forno a microonde: il campo elettrico interno è molto ridotto (un dielettrico con $\kappa \gg 1$ è quasi un conduttore). Per mantenere fissa la differenza di potenziale, il campo elettrico è circa raddoppiato vicino al bordo, per una distanza dell'ordine del raggio della sfera.

Il campo elettrico viene drammaticamente innalzato mettendo *due* acini d'uva a distanza d molto minore del loro raggio r : la differenza di potenziale deve ora venire prodotta nel piccolo spessore d , e quindi il campo elettrico nel piccolo spessore vale $E \sim E_{\text{microonde}} \cdot r/d \gg E_{\text{microonde}}$. La figura 7.2b mostra la soluzione numerica per acini conduttori.

Questo campo elettrico $E \sim 3000 \text{ V/mm}$ può essere così intenso da raggiungere il massimo campo elettrico sopportato dall'aria, prima che gli atomi vengano ionizzati producendo una scarica. **Filmati in rete** mostrano come si può riuscire a formare un plasma ionizzato nella zona di congiunzione. (Il fenomeno si verifica anche grazie al fatto che la lunghezza d'onda di una microonda ($\lambda \sim 12 \text{ cm}$), ridotta a $\lambda \sim 1 \text{ cm}$ in acqua, è comparabile alla dimensione di un chicco d'uva).

Esercizio 7.15: Attrazione fra dielettrici

Perchè le punte di un pettine carico attraggono pezzettini di carta?

✚**Soluzione:** Il fatto che la carta attratta rimanga poi appiccicata indica che c'entrano i dielettrici: se fossero invece cariche libere si neutralizzerebbero appena il pettine tocca il pezzettino di carta. Un dielettrico è un po' come un conduttore: viene attratto verso cariche, ovvero verso campi elettrici grossi. È complicato calcolare in dettaglio la forza, ma qualitativamente è descritta da una formula del tipo

$$\mathbf{F} \propto \nabla E^2. \quad (7.2)$$

- Il gradiente deve essere presente in quanto un dielettrico in un campo uniforme non sente nessuna forza. Questo è ovvio per geometrie semplici (e.g. cubo o cilindro orientato lungo il campo), è stato verificato in precedenza nel caso di una sfera, ed in generale è dovuto al fatto che il dielettrico si polarizza lungo il campo. Nessuna forza agisce su di un dipolo in campo elettrico costante.
- Un dielettrico in un campo elettrico non uniforme viene attratto verso campi grossi: lo abbiamo visto nel caso particolare del condensatore piano, dove erano gli effetti ai bordi a generare la forza attrattiva $\propto E^2$. La potenza E^2 non è specifica di questa geometria semplice, e nasce in quanto $F = \sigma_{\text{pol}} E$, combinato con il fatto che la carica di polarizzazione è a sua volta $\propto E$.

Un pettine sfrutta l'effetto delle punte per generare un campo elettrico abbastanza grosso ed abbastanza dipendente dalla posizione in modo da generare una forza abbastanza grande da attrarre pezzetti di carta.

Capitolo 8

Correnti

Un campo elettrico \mathbf{E} nella materia genera approssimativamente una densità di corrente \mathbf{J} data da $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ dove σ è la *conducibilità* del materiale (da non confondere con σ densità superficiale di carica) e $\rho = 1/\sigma$ è detta *resistività*. Per effetto Joule viene dissipata una densità volumetrica di potenza $dW/dV = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$. In geometrie semplici è utile introdurre la corrente totale I e definire la *resistenza* R in modo che $V = IR$.

Esercizio 8.1: Capacitore piano imperfetto

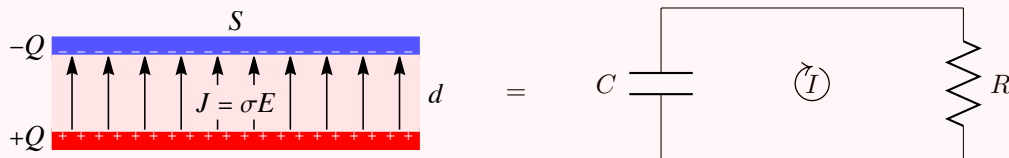
Un condensatore piano con carica iniziale $\pm Q_0$ contiene un materiale di conducibilità σ e costante dielettrica ϵ . I due piatti sono a distanza d ed hanno area $S \gg d^2$. Calcolare il tempo di scarica; la potenza dissipata per effetto Joule; l'energia dissipata per effetto Joule.

Soluzione: Si può ragionare in due modi:

- Usando le equazioni fondamentali. Il campo elettrico $E = Q/S\epsilon$ genera una corrente $J = \sigma E$ e quindi, assumendo tempo iniziale $t = 0$

$$\dot{Q} = -SJ = -\frac{\sigma}{\epsilon}Q \quad \text{risolta da} \quad Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}.$$

- Schematizzandolo come un circuito RC (con capacità $C = \epsilon S/d$, e resistenza $R = d/S\sigma$): l'equazione del circuito $0 = RI + Q/C$ con $I = \dot{Q}$ è risolta da $Q = Q(0)e^{-t/\tau}$ con $\tau = RC = \epsilon/\sigma$.



Notare che τ non dipende da S e d , cioè da quanto è grosso il condensatore. Questo rende più semplice il funzionamento delle cellule: il tempo di scarica non varia quando la membrana diventa più spessa o grossa.

La potenza dissipata per effetto Joule vale

- $W = V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = V \sigma E^2 = \frac{2}{\tau} U = \frac{2}{\tau} U_0 e^{-2t/\tau}$ dove $U = V \epsilon E^2 / 2$ è l'energia elettrostatica del sistema ed U_0 il suo valore iniziale a $t = 0$.
- $W = RI^2 = R \dot{Q}^2 = R \frac{Q^2}{\tau^2} = \frac{2}{\tau} U = \frac{2}{\tau} U_0 e^{-2t/\tau}$ dove $U = Q^2 / 2C$ è l'energia elettrostatica del sistema ed U_0 il suo valore iniziale a $t = 0$.

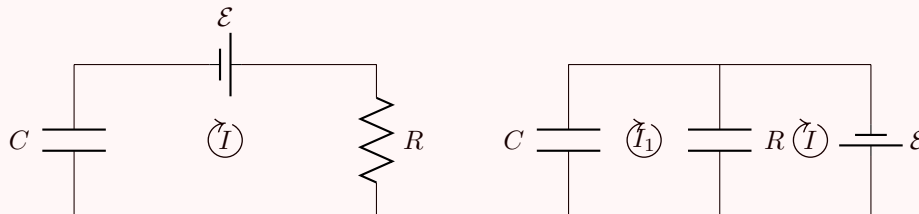
L'energia totale dissipata per effetto Joule è uguale a tutta l'energia iniziale U_0 :

$$U_{\text{Joule}} = \int_0^\infty W dt = U_0 \frac{2}{\tau} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = U_0.$$

Esercizio 8.2: Capacitore piano imperfetto con batteria

Si attacca una batteria con differenza di potenziale \mathcal{E} fra i due piani del condensatore precedente. Trovare il circuito equivalente e risolverlo.

✚**Soluzione:** Mentre nell'esercizio precedente c'era un unico modo possibile di attaccare una resistenza con una capacità, ora ci sono due modi possibili di aggiungere la batteria: con R, C in serie o in parallelo:



Il circuito a destra è quello che rappresenta il sistema: infatti la differenza di potenziale ai capi di R e C è la stessa, come nel problema vero. Inoltre i due circuiti hanno comportamenti qualitativamente diversi.

- Le equazioni di Kirchhoff del circuito di destra sono

$$\mathcal{E} = R(I - I_1), \quad \frac{Q_1}{C} = R(I - I_1)$$

con $I_1 = \dot{Q}_1$. La soluzione è

$$Q_1 = C\mathcal{E} \quad \text{costante, quindi} \quad \dot{Q}_1 = I_1 = 0, \quad \text{quindi} \quad I = \mathcal{E}/R$$

e si ha quindi una dissipazione continua di energia per effetto Joule, $W_J = RI^2 \neq 0$.

- L'equazione di Kirchhoff del circuito a sinistra è $\mathcal{E} = RI + Q/C$, la cui soluzione asintotica a tempi $t \gg RC$ è $Q = C\mathcal{E}$ costante con $I = 0$, senza più dissipazione per effetto Joule.

Esercizio 8.3: Scarica di sfera carica

Una sfera conduttrice di raggio a e carica iniziale Q_0 è immersa in un dielettrico di conducibilità σ e costante dielettrica ϵ . Calcolare: a) il tempo di scarica; b) la potenza dissipata per effetto Joule; c) l'energia totale dissipata per effetto Joule.

✚**Soluzione:** La carica $Q(t)$ sulla sfera produce un campo elettrico radiale $E_r(r) = Q/4\pi\epsilon r^2$ e pertanto una corrente radiale $J_r(r) = \sigma E_r(r)$ in *tutto* lo spazio. Una corrente non omogenea in generale produce addensamenti di cariche descritti dall'equazione di continuità $\dot{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$. Tuttavia, essendo σ costante si ha $\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$: le cariche fluiscono verso distanza infinita senza creare densità di carica a distanza finita.

- a) La variazione della carica Q può essere calcolata considerando il flusso della corrente su di una superficie sferica di raggio r arbitrario:

$$\frac{dQ}{dt} = - \overbrace{4\pi r^2 J_r}^{\text{flusso di } J} = -\sigma \cdot 4\pi r^2 E_r = -\frac{\sigma}{\epsilon} Q$$

o anche considerando una superficie arbitraria che circonda la sfera e procedendo in maniera più astratta:

$$\frac{dQ}{dt} = -\Phi_J = -\sigma \Phi_E = -\frac{\sigma}{\epsilon} Q.$$

Quindi $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ con tempo di scarica $\tau = \epsilon/\sigma$, indipendente da a . Per $t \rightarrow \infty$ il materiale si è comportato come un conduttore, per $t \ll \tau = \epsilon/\sigma$ come un dielettrico isolante.

- b) La potenza dissipata per effetto Joule vale

$$W = \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{2\sigma}{\epsilon} \int dV \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{2}{\tau} U_0 e^{-2t/\tau}$$

dove U_0 è l'energia elettrostatica iniziale del sistema.

c) L'energia totale dissipata per effetto Joule vale

$$U_{\text{Joule}} = \int_0^\infty W dt = U_0 \frac{2}{\tau} \int_0^\infty dt e^{-2t/\tau} = U_0.$$

È possibile schematizzare il sistema come un circuito RC connesso con l'infinito: la corrente totale $I = \dot{Q}$ è legata alla differenza di potenziale $V = Q/4\pi\epsilon a$ fra la sfera e l'infinito da $I = V/R$ dove la resistenza vale quindi $R = 1/4\pi a\sigma$. Allo stesso modo, avevamo visto che una sfera può essere schematizzata come una capacità $C = 4\pi\epsilon a$. Quindi si ritrova la costante tempo $\tau = RC = \epsilon/\sigma$. La potenza dissipata per effetto Joule vale $W = RI^2$.

Esercizio 8.4: Resistenza fra sfere concentriche

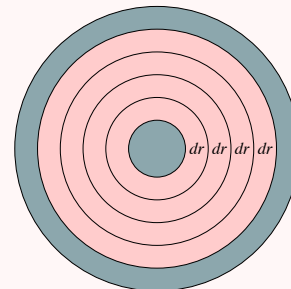
Calcolare la resistenza fra due sfere concentriche di raggi a e b in un materiale di resistività ρ .

➤Soluzione: Si può ragionare come nell'esercizio precedente, con l'unica differenza che la differenza di potenziale è ora calcolata fra due distanze finite e vale quindi $V = Q(1/a - 1/b)/4\pi\epsilon$. La corrente rimane uguale, e quindi la resistenza $R = V/I$ vale quindi $R = \rho(1/a - 1/b)/4\pi$.

La resistenza può anche essere calcolata immaginando di dividere il sistema in strati come una cipolla, e vedendolo come una serie infinita di resistenze infinitesime. La resistenza di un guscio di spessore dr vale $dR = \rho dr/4\pi r^2$, in base alla formula $R = \rho L/S$. Sommando le resistenze di tutti i gusci in serie viene

$$R = \int dR = \rho \int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Se $b \gg a$ conta solo il primo termine: l'integrale è dominato dalla zona vicino alla sfera piccola.



Esercizio 8.5: Sonda marina

Due sfere di egual raggio a vengono calate in mare a distanza $d \gg a$ e connesse da un filo conduttore. Calcolare la resistenza del circuito.

➤Soluzione: La geometria è complicata, ma come visto nell'esercizio precedente domina la zona vicino alle sfere (o attorno alla sfera più piccola, se avessero raggi diversi): Si può schematizzare il sistema come due resistenze $R = \rho/4\pi a$ in serie. Per $a = 25$ cm e $\rho = 25$ ohm cm viene $2R = 0.27$ ohm.

Calando questo sistema in mare ed attaccandolo ad una batteria e misurando la corrente e ricavando la resistenza è possibile misurare localmente la conducibilità del mare che dipende dalla salinità.

Esercizio 8.6: Fulmine

Un fulmine porta una corrente $I = 10$ kA che si disperde semi-sfericamente sul terreno, con resistività $\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$. A distanza $r = 50$ m si trovano un uomo (distanza tra i piedi $d_U = 0.5$ m) ed una mucca (distanza tra le zampe anteriori e quelle posteriori uguale a $d_\mu = 1.5$ m). Supponendo che sia uomo che mucca abbiano eguale resistenza $R = 4$ k Ω (visto che 'la resistenza sta nelle gambe non nella pancia': come nell'esercizio precedente è dominata dalla parte stretta del conduttore), calcolare: a) la densità di corrente nel terreno; b) il conseguente campo elettrico; c) la differenza di potenziale ai capi di mucca e uomo; d) la conseguente corrente; e) il suo effetto biologico. f) In quale punto l'esercizio ha assunto mucca sferica? (Suggerimento: non riguarda necessariamente la mucca, è un modo di dire che significa assunzione non realistica).



➤Soluzione:

a) La corrente I nel fulmine si scarica sul terreno producendo, per conservazione della carica, una uguale corrente semi-sferica: $J_r = I/2\pi r^2$ tale che $\Phi_J = 0$ attraverso una superficie chiusa.

- b) Quindi la carica elettrica portata dal fulmine genera un campo elettrico radiale $E_r = \rho J_r = \rho I / 2\pi r^2$, avendo applicato $\mathbf{J} = \mathbf{E} / \rho$ in direzione opposta a quella solita.
- c) Il relativo potenziale elettrico è $\varphi = -\rho I / 2\pi r$. La differenza di potenziale tra due punti situati a raggi r e $r + d$ vale

$$V = \varphi(r + d) - \varphi(r) \stackrel{d \ll r}{\simeq} -dE_r(r) = -\frac{\rho I d}{2\pi r^2}.$$

Numericamente si ha $V = 63 \text{ V} \cdot (d/\text{m})$ alla distanza r indicata.

- d) Quindi l'uomo è attraversato da una corrente $I_U = V/R = 0.008 \text{ Ampere}$, e la mucca da una corrente $I_M = 3I_U$.
- e) La potenza dissipata per effetto Joule vale $W = V^2/R = 1 \text{ W} \cdot (d/\text{m})^2$ che non cuoce nessuna bistecca (mentre la grossa corrente I incendierebbe un conduttore attraversato, come un albero, $RI^2 \sim 10^8 \text{ W}(R/\Omega)$). Una corrente come $I_{\mu,U}$ fa contrarre i muscoli; tipicamente la mucca stramazza e l'uomo se la cava.
- Mentre una mucca ha troppe zampe ed una minore conoscenza dell'elettromagnetismo, un essere umano può sopravvivere ad un fulmine adottando la posizione ottimale: sulle punte dei piedi (per ridurre il contatto con il terreno), con le caviglie in contatto (per offrire un circuito più breve), chinati più in basso possibile (per non attirare fulmini), con le mani sulle orecchie (per non rimanere assordati dal rumore), senza telefoni o altri conduttori.
- f) Foto mostrano che i fulmini ([link di esempio](#)), invece di disperdersi semi-sfericamente nel terreno, possono concentrarsi in traiettorie analoghe a quelle percorse nell'aria. Per cui anche nel terreno ci sono punti più o meno colpiti.

Esercizio 8.7: Dumbo

- a) Cosa rispondente se all'orale vi viene proposto: “metti un dito dentro un buco di una presa elettrica da 220 V e ti diamo 18, mettine due e ti diamo 30”? b) È realistico il cartone animato in cui Dumbo vola con le orecchie posandosi sui cavi dell'alta tensione senza rimanere folgorato?

➤Soluzione: Le due domande sono equivalenti.

- a) Conviene accettare il 18: mettere un dito nella presa a 220 V non fa niente di male purché uno abbia scarpe di gomma, o qualunque altro sistema che isoli dal terreno a potenziale zero. È così innocuo che lo facciamo senza saperlo: attorno alla terra è presente un campo elettrico $E \sim 100 \text{ V/m}$: non ci fa male perché siamo conduttori e pieghiamo le linee di campo per rimanere equi-potenziali.
- Viceversa fa male mettere due dita nei due buchi della corrente, perché sono e rimangono a potenziale diverso e le dita sono conduttrici. Le prese elettriche di tipo H (usate in Israele) consentono di fare la verifica, non avendo un isolante che le disconnette quando sono solo parzialmente inserite.
- b) Gli uccelli, sapendo di essere isolati da terra, si posano tranquillamente su di un filo dell'alta tensione ignorando i cartelli con scritto “pericolo di morte”. Viceversa non è realistico il cartone animato in cui Dumbo vola e come gli uccelli si posa sui fili dell'alta tensione: infatti la dimensione dell'elefante è maggiore della distanza fra i fili, e nel cartone animato si vede chiaramente Dumbo posarsi su fili multipli. A questo punto, entrando in contatto con fili a diverso potenziale, avrebbe dovuto venire attraversato da una corrente e rimanere folgorato.

Esercizio 8.8: Piastre circolari

Due piastre circolari di raggio a sono poste orizzontalmente una sopra l'altra ad altezza $z = \pm d/2 \ll a$. Ciascuna delle due piastre contiene una carica $-Q/2$ distribuita uniformemente lungo la superficie. Il volume V fra le due piastre è riempito con un materiale di conducibilità σ e densità iniziale di carica $\rho_0 = Q/V$, in maniera che il sistema ha carica totale zero.

- a) Calcolare la densità di corrente \mathbf{J} all'istante iniziale.
- b) Si mostri che ρ rimane uniforme e se ne calcoli l'evoluzione temporale.

c) Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule.

✚Soluzione:

- a) Vale $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Il campo elettrico è diretto lungo l'asse z e vale zero all'esterno del sistema e, per simmetria, per $z = 0$. La prima eq. di Maxwell $\partial E_z / \partial z = \rho / \epsilon_0$ implica quindi $E_z = z\rho / \epsilon_0$ per $|z| < d/2$.
- b) L'equazione di conservazione della carica è $\dot{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\rho\sigma / \epsilon_0$: quindi $\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$ dove $\tau = \epsilon_0 / \sigma$.
- c) Integrando la densità potenza $W = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ sul tempo si ottiene

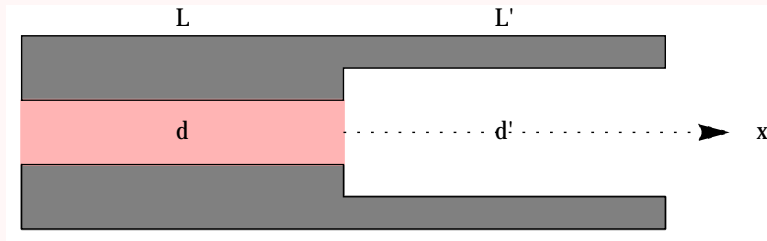
$$U_{\text{diss}} = \int dt dV \sigma E^2(z, t) = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \int_0^\infty dt e^{-2t/\tau} \times \int dV \frac{\epsilon_0}{2} E^2(z, 0) = U_0.$$

Alla fine il campo elettrico vale zero, quindi per conservazione dell'energia tutta l'energia iniziale U_0 è stata dissipata:

$$U_0 = \int dV \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{dQ^2}{24\pi a^2 \epsilon_0}.$$

Esercizio 8.9: Piastre piane ©

Un condensatore è costituito, come in figura, da due lastre piane conduttrici di lunghezza L a distanza d , ciascuna delle quali è attaccata ad una lastra piana conduttrice di lunghezza $L' = L$ a distanza $d' > d$, con $d, d' \ll L$. Entrambe le piastre hanno lunghezza L e contengono carica totale $+Q$ e $-Q$ rispettivamente.



- a) Si calcoli la capacità C e l'energia elettrostatica U .
- b) Si calcolino le densità superficiali di carica σ e σ' sulle facce delle due lastre.
- c) Si calcoli la componente verticale della forza elettrostatica esercitata sulla piastra superiore.

Al tempo $t = 0$ viene inserito un materiale con resistività ρ nello spazio di spessore d fra le armature, come in figura.

- d) Calcolare la costante tempo τ per la scarica del sistema.
- e) Calcolare la potenza dissipata per effetto Joule a $t = 0$.
- f) Calcolare l'energia totale dissipata per effetto Joule, confrontandola con l'energia iniziale U .
- g) Tornando alla domanda c), si calcoli ora anche la componente F_x della forza esercitata sulla piastra superiore in presenza delle cariche $\pm Q$ sulle piastre, immaginando di spostare la piastra orizzontalmente di una piccola quantità $x \ll L$, ma tale che $x \gg d$ in maniera da poter trascurare effetti ai bordi.

✚Soluzione:

- a) Può essere visto come due capacità in parallelo $C_i = \epsilon_0 L^2 / d_i$. Quindi $C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 L^2 \frac{d + d'}{dd'}$ e $U = Q^2 / 2C$.

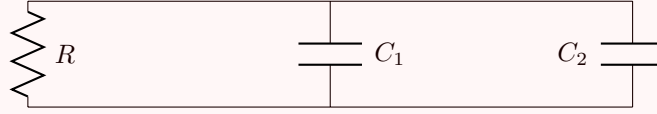
- b) $V = Ed = E'd'$ con $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$ e $(\sigma + \sigma')L^2 = Q$. Quindi $\sigma = \frac{d'}{d + d'} \frac{Q}{L^2}$.

c) La forza vale

$$F_z = \sum_i \frac{\sigma_i E_i}{2} L^2 = \frac{d^2 + d'^2}{(d + d')^2} \frac{Q^2}{2\epsilon_0 L^2}$$

La forza può anche essere calcolata come $F_z = -\partial U / \partial z$ se uno immagina di aumentare d e d' di z .

d) $I = JL^2 = EL^2/\rho = d'Q/(d + d')\epsilon_0\rho$. Quindi $\dot{Q} = -I = -Q/\tau$ con $\tau = \rho\epsilon_0 \frac{d + d'}{d'}$. Il sistema può anche essere visto come un circuito RC con $R = \rho d/L^2$ e quindi $\tau = RC$.



e) La potenza dissipata vale $W_0 = \int dV JE = \frac{dd'^2}{(d + d')^2} \frac{Q^2}{L^2\epsilon_0^2\rho}$. Alternativamente, pensando al sistema come un circuito si ha $W = RI^2$.

f) L'energia totale dissipata $\int_0^\infty dt W = W_0 \int_0^\infty dt e^{-2t/\tau} = W_0\tau/2$ viene uguale all'energia iniziale U , come negli esercizi precedenti. Infatti, schematizzando il sistema come un circuito, la novità di avere due capacità C_1 e C_2 è irrilevante in quanto sono equivalenti ad una sola capacità $C = C_1 + C_2$.

g) Se la piastra superiore si muove di una piccola quantità $d, d' \ll x \ll L$ la capacità del sistema può essere calcolata come quella di tre capacità in parallelo:

$$C(x) = C_1 + C_2 + C_3 = \epsilon_0 L \left[\frac{L - |x|}{d} + \frac{2|x|}{d + d'} + \frac{L - |x|}{d'} \right]$$

La forza vale quindi

$$F = - \frac{d}{dx} \frac{Q^2}{2C} \Big|_{x \ll L} = - \frac{dd'(d^2 + d'^2)Q^2}{2(d + d')^3 L^3 \epsilon_0} \text{sign } x$$

avendo fatto attenzione a calcolarla nel regime di validità dell'approssimazione e non per $x \gg d, d'$. La forza tende ad allineare le due piastre, cioè a favorire $x = 0$.

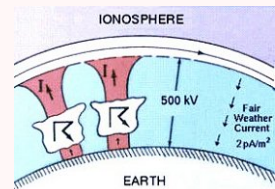
Esercizio 8.10: Atmosfera terrestre ©

Si misura che la Terra (una sfera conduttrice di raggio $R = 6350$ km) ha una densità superficiale di carica negativa e che al livello del suolo esiste un campo elettrico radiale diretto verso il centro della Terra di intensità $E_0 = 100$ V/m.

- Valutare la carica totale Q sulla crosta terrestre.
- Valutare la pressione elettrica sulla crosta terrestre.

Si osserva che il campo elettrico vale zero sopra l'atmosfera schematizzata come una distribuzione uniforme di carica ρ di altezza $h = 40$ km. Nel seguito si tenga conto dell'approssimazione $h \ll R$.

- Determinare la carica totale sul pianeta (terra più atmosfera) e ρ .
- Determinare il campo elettrico $E(z)$ al variare della quota z dal suolo.
- Determinare la differenza di potenziale ΔV tra l'infinito e la superficie terrestre.
- Determinare l'energia elettrostatica della Terra.

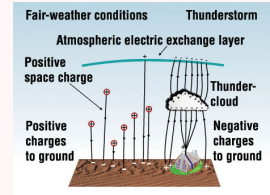


In realtà l'atmosfera può essere approssimata come un conduttore ohmico con conducibilità $\sigma = 10^{-14}/\Omega \cdot \text{m}$.

- determinare la potenza dissipata per effetto Joule;

Assumendo che non ci siano meccanismi compensatori (ad esempio temporali) a ripristinare l'osservato squilibrio di carica tra suolo e atmosfera

- h) calcolare come varierebbe nel tempo la carica Q della crosta terrestre;
- i) calcolare come varierebbe nel tempo la densità di carica dell'atmosfera ρ .
- j) Spiegare brevemente come mai gli esseri umani non si accorgono e non sono danneggiati da tale campo.



✎ Soluzione:

- a) Il campo elettrico vale zero dentro la Terra, quindi il teorema di Gauss fornisce la densità superficiale

$$\sigma = -\epsilon_0 E_0 = -8.86 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2.$$

La carica totale vale $Q = 4\pi R^2 \sigma = -4.6 \cdot 10^5 \text{ C}$.

- b) La pressione elettrica è data da $p = \sigma E_0 / 2 = 4.43 \cdot 10^{-8} \text{ N/m}^2$.
- c) Per il teorema di Gauss $Q_{\text{tot}} = 0$ e quindi la densità di carica dell'atmosfera vale $\rho = -Q / (4\pi R^2 h) = 2.2 \cdot 10^{-14} \text{ C/m}^3$.
- d) Essendo la densità ρ di carica costante il campo elettrico dipende linearmente da z e vale quindi

$$E(z) = -E_0(1 - z/h)$$

per $z < h$, e $E = 0$ per $z > h$. Volendo fare un conto inutilmente più preciso, data la simmetria sferica del campo il teorema di Gauss, applicato ad una sfera avente il centro coincidente con quello della Terra e raggio $R + z$, fornisce $4\pi(R + z)^2 E(z) = (Q + \rho 4\pi R^2 z) / \epsilon_0$ per $z < h$. Tenendo conto che $z \ll R$ la formula si semplifica a $E(z) = Q(1 - z/h) / (4\pi \epsilon_0 R^2)$ che coincide con quella precedente.

- e) La differenza di potenziale tra gli alti strati dell'atmosfera e la superficie terrestre vale

$$V = - \int_0^h E(z) dz = \frac{E_0 h}{2} = 2 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

- f) L'energia elettrostatica vale $U = \int dV \epsilon_0 E^2 / 2 = 4\pi R^2 \times h/3 \times \epsilon_0 E_0^2 / 2 = 3.0 \cdot 10^{11} \text{ J}$. Notare che non è applicabile la formula $U = QV/2$ che vale per i condensatori, in cui esiste un'unica differenza di potenziale.
- g) La potenza dissipata vale $W = \int dV E J = \sigma \int dV E^2 = 4\pi R^2 \times h/3 \times \sigma E_0^2 = 675 \text{ MW}$.
- h) Dalla densità di corrente ricaviamo la corrente totale che tende a scaricare la carica della crosta:

$$\dot{Q} = -SJ = 4\pi R^2 \sigma E_0 = -\frac{Q}{\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma} = 15 \text{ min}.$$

Quindi la scarica avverrebbe esponenzialmente, $Q = Q_0 e^{-t/\tau}$ se non ci fossero fenomeni compensatori, come i temporali.

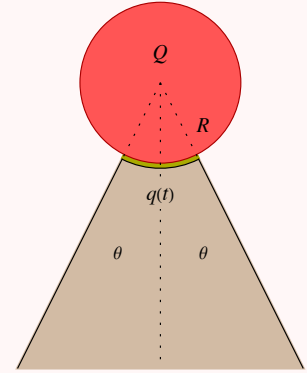
- i) La carica interna ad una superficie di altezza h è minore, e proporzionalmente è minore il campo elettrico e quindi la corrente. Quindi la densità di carica rimane uniforme e decresce esponenzialmente nel tempo, $\rho(t) = \rho(0) e^{-t/\tau}$, come può essere dimostrato nel seguente modo:

$$\dot{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\rho/\tau. \quad (8.1)$$

- j) Gli esseri umani non risentono degli effetti del campo elettrico terrestre E_0 in quanto sono buoni conduttori di elettricità e sono in grado di alterare le linee del campo elettrico. Il volume corporeo diviene sostanzialmente equipotenziale.

Esercizio 8.11: Sfera su cono conduttore ©

Una sfera perfettamente conduttrice di raggio R contiene carica elettrica totale Q ed è appoggiata come in figura per una frazione $f = \int_0^\theta 2\pi R^2 \sin \theta d\theta / S = (1 - \cos \theta)/2$ della sua area su di un materiale, inizialmente neutro, di conducibilità elettrica σ mancante del vertice (che coinciderebbe con il centro della sfera). Il resto dello spazio è vuoto, e i due materiali sono separati da un isolante sottile. Ad un generico istante t :



- Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio, assumendo che la conduzione abbia prodotto una carica totale $q(t)$ sulla superficie del cono a contatto con la sfera.
- Calcolare $q(t)$.
- Calcolare la potenza dissipata per effetto Joule, specificando anche l'energia totale dissipata per effetto Joule.
- Calcolare intensità e direzione della forza $F(t)$ agente sulla sfera. Per semplicità si assuma qui $f \ll 1$, ovvero la parte a contatto fra sfera e cono sia approssimabile come piana.

↳ Soluzione:

- La condizione di continuità di E_{\parallel} sulla superficie di separazione fra cono e vuoto impone che il campo elettrico è radiale. La carica q si distribuisce uniformemente e viene schermata da una carica $-q$ sulla sfera; la rimanente carica nella sfera $Q + q$ si distribuisce uniformemente sulla sua superficie. Si ha quindi $E_r = (Q + q)/4\pi\epsilon_0 r^2$ per $r > R$ e $E = 0$ dentro la sfera.

- Nel cono si ha $J_r = \sigma E_r$, quindi

$$\dot{q} = -\Phi_J = -\frac{q + Q}{\tau}, \quad \text{con} \quad \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma f}$$

risolta da $q(t) = Q[e^{-t/\tau} - 1]$.

- La potenza dissipata per effetto Joule vale

$$W_{\text{Joule}} = \int dV \sigma E_r^2 = \frac{\sigma f (q + Q)^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{e^{-2t/\tau}}{\tau}.$$

L'energia totale dissipata per effetto Joule è uguale all'energia elettrostatica iniziale U_0

$$U_{\text{Joule}} = \int_0^\infty dt W_{\text{Joule}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = U_0.$$

- Conviene decomporre la carica sulla sfera come $Q + q$ distribuita uniformemente sulla superficie (e quindi equivalente ad una carica $Q + q$ nel centro), e la carica $-q$ distribuita uniformemente sulla frazione f della superficie a contatto con il cono. Nel limite $f \ll 1$ la normale nella zona a contatto è approssimabile come verticale, e tutte le forze sono verticali. La forza fra q e $-q$ vale $F_q = qE_{\text{intra}}/2 = q^2/\pi\epsilon_0 f R^2$ essendo quella fra due superfici piane di area $S = 4\pi R^2 f$ fra cui $E_{\text{intra}} = \sigma/\epsilon_0$. La forza fra $Q + q$ e $-q$ vale $F_{Q+q} = -(Q + q)q/4\pi\epsilon_0 R^2$. Entrambe sono attrattive. La forza totale vale

$$F = F_q + F_{Q+q} \stackrel{f \ll 1}{\simeq} F_q = \frac{Q^2(1 - e^{-t/\tau})^2}{f\pi\epsilon_0 R^2}.$$

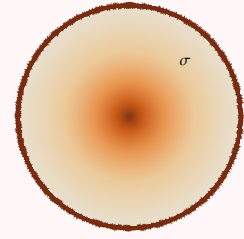
Esercizio 8.12: Sfera conduttrice ©

Una sfera isolata di raggio R contiene densità di carica $\rho(r) = Q/(2\pi r R^2)$, dove Q è la carica totale. Calcolare

- Il campo elettrico in tutto lo spazio.
- Il potenziale elettrico nel centro della sfera.
- L'energia elettrostatica del sistema.

All'istante $t = 0$ il materiale all'interno del guscio sferico acquista conducibilità σ . Calcolare

- La potenza dissipata per effetto Joule a $t = 0$.
- L'evoluzione temporale della densità di carica ρ e della carica che si deposita sulla superficie della sfera, descrivendo lo stato finale di equilibrio elettro-statico.
- L'energia totale dissipata per effetto Joule.



All'istante t_1 una carica puntiforme $-2Q$ viene messa a distanza $2R$ dal centro della sfera conduttrice in maniera talmente rapida che la sfera conduttrice inizia a raggiungere un nuovo equilibrio elettrostatico solo per $t > t_1$. Calcolare

- La forza sentita dalla carica puntiforme all'istante $t = t_1$.
- La forza sentita dalla carica puntiforme dopo il raggiungimento del nuovo equilibrio elettrostatico.
- Al tempo $t = t_2$ la carica puntiforme viene rimossa, nuovamente spostandola in un tempo molto minore del tempo con cui il conduttore si ri-aggiusta all'equilibrio elettrostatico. Calcolare la densità di corrente dentro la sfera conduttrice subito dopo la rimozione della carica puntiforme.

✎Soluzione:

- Usando il teorema di Gauss si ha $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ all'esterno ed $E = Q_{\text{in}}(r)/4\pi\epsilon_0 r^2$ all'interno con $Q_{\text{in}} = Qr^2/R^2$, quindi $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ costante in modulo.
- Il potenziale sulla superficie vale $\varphi(R) = Q/4\pi\epsilon_0 R$. Quindi $\varphi(r) = \varphi(R) + (R - r)E$ per $r < R$ ed in particolare $\varphi(0) = Q/2\pi\epsilon_0 R$.
- $U = \int dV \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = U_{\text{in}} + U_{\text{out}} = Q^2/24\pi\epsilon_0 R + Q^2/8\pi\epsilon_0 R = Q^2/6\pi\epsilon_0 R$. Alternativamente si può usare la formula $U = \frac{1}{2} \int 4\pi r^2 \rho \varphi$.
- $W = \int dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma \int_0^R 4\pi r^2 E^2 = 2\sigma U_{\text{in}}/\epsilon_0 = \sigma Q^2/12\pi\epsilon_0 R$
- $\dot{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\rho/\tau$ con $\tau = \epsilon_0/\sigma$. Quindi $\rho(t) = \rho(0)e^{-t/\tau}$ e quindi nasce una densità superficiale $\sigma(t) = (1 - e^{-t/\tau})Q/4\pi R^2$.
- $\int W dt = U_{\text{in}} = Q^2/24\pi\epsilon_0 R$.
- $F = -2Q^2/4\pi\epsilon_0 (2R)^2 = -Q^2/8\pi\epsilon_0 R^2$.
- Il problema è risolto con il metodo delle cariche immagini, aggiungendo una carica $q' = Q$ ad $r = R/2$. Siccome q' è uguale alla carica sulla sfera, non servono altre cariche immagini. La forza è quindi quella fra la carica $-2Q$ e la carica immagine: $F = -2Q^2/4\pi\epsilon_0 (2R - R/2)^2 = -2Q^2/9\pi\epsilon_0 R^2$.
- $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ dove \mathbf{E} è il campo elettrico generato dalla densità superficiale di carica che compensava il campo elettrico generato da $-2Q$. Quindi E è uguale al campo elettrico generato da una carica immagine $+2Q$ situata ad $r = 2R$.

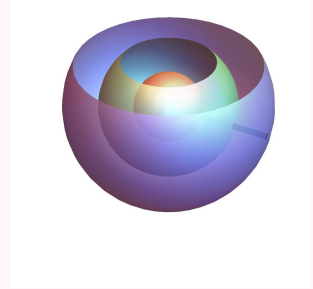
Esercizio 8.13: Tre gusci sferici ©

Un condensatore è costituito da tre gusci sferici di spessore trascurabile e raggi $r_1 < r_2 < r_3$. I gusci 1 e 3 sono connessi da un filo conduttore passante attraverso un foro di dimensione trascurabile, in maniera tale che il sistema può essere approssimato come avente simmetria sferica, ignorando la regione vicina al filo. Il guscio 2 contiene una carica Q_2 . Il condensatore è isolato. Calcolare:

- Le cariche Q_1 e Q_3 .
- La capacità del condensatore e la sua energia elettrostatica.
- La pressione elettrostatica p sul guscio 2 ed il valore di r_2 tale che $p = 0$.

La regione fra r_1 ed r_2 viene riempita con un materiale di conducibilità σ .

- Calcolare $Q_2(t)$.


✎Soluzione:

- Deve essere $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$. Fra r_1 ed r_2 si ha

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \Delta V_{12} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Fra r_2 ed r_3 si ha

$$E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \Delta V_{23} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Imponendo $V_1 = V_3$ cioè $\Delta V_{12} = -\Delta V_{23}$ si ottiene

$$Q_1 = -Q_2 \frac{r_1(r_3 - r_2)}{r_2(r_3 - r_1)} \equiv -fQ_2, \quad Q_3 = Q_2 \frac{r_3(r_2 - r_1)}{r_2(r_3 - r_1)} = -(1 - f)Q_2.$$

Un errore frequente è assumere $V_3 = (Q_1 + Q_2)/4\pi\epsilon_0 r_3$, quando invece $V_3 = 0$.

- $C = Q_2/|\Delta V_{12}| = 4\pi\epsilon_0 r_2^2(r_3 - r_1)/(r_3 - r_2)(r_2 - r_1)$ e $U = Q_2^2/2C$. Alternativamente, la capacità può anche essere calcolata come $C = C_{12} + C_{23}$ vedendo il sistema come due capacità in parallelo, $C_{ij} = 4\pi\epsilon_0/(1/r_i - 1/r_j)$.

- La pressione può essere calcolata come $p = \epsilon_0(E_{\text{in}}^2 - E_{\text{out}}^2)/2$ o come $p = \sigma_2(E_{\text{in}} + E_{\text{out}})/2$ o come $p = \frac{1}{4\pi r_2^2} \frac{\partial U}{\partial r_2}$, con il risultato

$$p = -\frac{Q_2(Q_2 + 2Q_1)}{32\pi^2 r_2^4 \epsilon_0} = -\frac{Q_2^2(1 - 2f)}{32\pi^2 r_2^4 \epsilon_0}.$$

La pressione vale zero se $2/r_2 = 1/r_1 + 1/r_3$, tale che $Q_1 = -Q_2/2$.

- La carica che esce da r_2 verso r_1 è uguale al flusso della corrente $J = \sigma E$:

$$\dot{Q}_2 = -4\pi r_2^2 \sigma E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} Q_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} f Q_2 \equiv -\frac{Q_2}{\tau}$$

in quanto essendo σ costante non si accumula carica nel volume (come già dimostrato in generale). Quindi $Q_2(t) = Q_2(0)e^{-t/\tau}$ con $\tau = \epsilon_0/\sigma f = r_2(r_3 - r_1)\epsilon_0/r_1(r_3 - r_2)\sigma$. Può anche essere calcolato come $\tau = RC$ con $R = (1/r_1 - 1/r_2)/4\pi\sigma$.

Esercizio 8.14: Tre gusci cilindrici ©

Tre superfici cilindriche conduttrici di spessore trascurabile, altezza h e raggi $r_1 < r_2 < r_3 \ll h$ sono allineate in maniera da avere gli assi coincidenti. Le superfici cilindriche 1 e 3 sono connesse da un conduttore ad una

estremità: il sistema totale forma un condensatore. La superficie 2 contiene una carica Q_2 ed il sistema ha carica totale zero. Dopo che il sistema ha raggiunto l'equilibrio elettrostatico, calcolare:

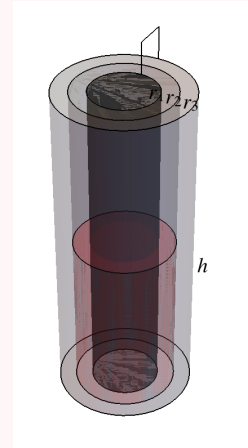
- La densità superficiale σ_2 sulla superficie 2, motivando la risposta.
- Le cariche Q_1 e Q_3 .
- La capacità C , ed il valore di r_2 tale che C è minima, specificando tale valore minimo.

Nel tratto fra r_1 ed r_2 viene inserito un materiale con costante dielettrica ϵ per un tratto $z = h/2$.

- Calcolare in funzione di Q_2 la forza che agisce sul dielettrico, assumendo in questo punto $r_2/r_1 = r_3/r_2 = e$.

Il materiale dielettrico ha ora anche conducibilità σ .

- Calcolare $Q_2(t)$.



✎ Soluzione:

- Il campo elettrico è radiale in coordinate cilindriche (r, θ, z) : la carica si distribuisce uniformemente, quindi $\sigma_2 = Q_2/2\pi r_2 h$.
- Deve essere $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$. Fra r_1 ed r_2 si ha

$$E_r = \frac{Q_1}{2\pi r h \epsilon_0}, \quad \Delta V_{12} = \frac{Q_1}{2\pi h \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Fra r_2 ed r_3 si ha

$$E_r = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi r h \epsilon_0}, \quad \Delta V_{23} = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi h \epsilon_0} \ln \frac{r_3}{r_2}$$

Imponendo $V_1 = V_3$ cioè $\Delta V_{12} = -\Delta V_{23}$ si ottiene

$$Q_1 = Q_2 \frac{\ln(r_2/r_3)}{\ln(r_3/r_1)}, \quad Q_3 = Q_2 \frac{\ln(r_1/r_2)}{\ln(r_3/r_1)}$$

- Due conduttori, arrangiati in maniera da contenere il campo elettrico al loro interno, formano un condensatore con capacità

$$C = \frac{Q_2}{\Delta V_{23}} = 2\pi h \epsilon_0 \left[\frac{1}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{1}{\ln(r_3/r_2)} \right] = \frac{2\pi h \epsilon_0 \ln(r_3/r_1)}{\ln(r_2/r_1) \ln(r_3/r_2)}.$$

La capacità è minima, $C = 8\pi h \epsilon_0 / \ln(r_3/r_1)$, per $r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$.

- Il sistema può essere visto come due capacità in parallelo, La capacità del tratto di lunghezza z contenente il dielettrico vale $C_2 = 2\pi z [\epsilon / \ln(r_2/r_1) + \epsilon_0 / \ln(r_3/r_2)]$. Quindi

$$C = C_1 + C_2 = 2\pi \left[\frac{z\epsilon + (h-z)\epsilon_0}{\ln(r_2/r_1)} + \frac{h\epsilon_0}{\ln(r_3/r_2)} \right] = 2\pi [z(\epsilon - \epsilon_0) + 2h\epsilon_0].$$

Si ha $F = (V^2/2)dC/dz$ con $V = \Delta V_{12} = Q_2/C$. Quindi $F = (Q_2^2/\pi h^2)(\epsilon - \epsilon_0)/(\epsilon + 3\epsilon_0)^2$.

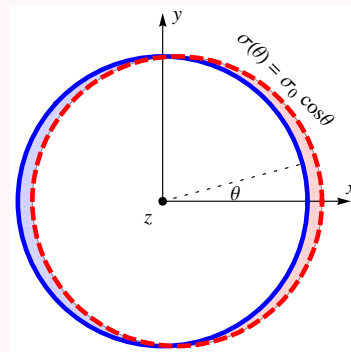
- Si ha $Q_2(t) = Q_2(0)e^{-t/\tau}$ con $\tau = RC$ dove la resistenza può essere calcolata come tante resistenze $dR = dr/A\sigma$ in serie: $R = \int_{r_1}^{r_2} dr/(2\pi r h \sigma/2) = \ln(r_2/r_1)/\pi h \sigma$. Quindi $\tau = |\epsilon + \epsilon_0 + 2x\epsilon_0|/\sigma$ dove $x = \ln(r_2/r_1)/\ln(r_3/r_2)$. Per $x = 1$ si riduce a $\tau = |\epsilon - \epsilon_0|/\sigma$

Esercizio 8.15: Cilindro ©

Un cilindro di raggio R ed altezza $h \gg R$ (in maniera da poter trascurare gli effetti ai bordi) contiene una densità volumetrica uniforme di carica, ρ . Calcolare:

- a) il campo elettrico sia all'interno che all'esterno del cilindro.

Due tali cilindri paralleli con densità di carica $+\rho$ e $-\rho$ rispettivamente vengono posti a distanza $d \ll R$ lungo l'asse x : sovrapponendosi formano nel limite $d \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ un cilindro con distribuzione superficiale di carica $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ con $\sigma_0 = \rho d$ tenuto costante nel limite. Si calcoli:



- b) il campo elettrico al suo interno, disegnando in maniera qualitativa le linee di forza in tutto lo spazio.
- c) Il potenziale elettrico all'interno del cilindro, dopo aver dimostrato che per simmetria il potenziale lungo l'asse del cilindro vale $\varphi(0) = \varphi(\infty)$ (per convenzione si fissa a zero il valore del potenziale all'infinito).
- d) L'energia elettrostatica totale U .
- e) La pressione $p(\theta)$ sulla superficie del cilindro.
- f) La densità di corrente \mathbf{J} ed il tempo di scarica se all'istante $t = 0$ viene inserito un materiale con conducibilità σ_c nel solo interno del cilindro.
- g) Il tempo di scarica se all'istante $t = 0$ viene inserito un materiale con conducibilità σ_c in tutto lo spazio.
- h) L'energia totale dissipata per effetto Joule nei due casi precedenti.

Soluzione:

- a) Il campo elettrico è radiale in coordinate cilindriche, e lo si calcola usando il teorema di Gauss $\Phi_E = Q_{\text{in}}/\epsilon_0$ applicato ad un cilindro immaginario di raggio r , trovando:

$$E_r(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \begin{cases} r & r < R \\ R^2/r & r > R \end{cases}$$

- b) Per il principio di sovrapposizione all'interno del cilindro si ha un campo elettrico costante

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}}$$

All'esterno le linee di campo “fanno il giro” rientrando dalla parte opposta, in maniera qualitativamente simile al campo di un dipolo.

- c) Siccome la sorgente σ cambia segno operando una riflessione $x \rightarrow -x$, anche il potenziale deve farlo e quindi la convenzione $\varphi(\infty) = 0$ implica $\varphi(0) = 0$ e quindi

$$\varphi = E_x x = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} r \cos \theta$$

all'interno del cilindro.

- d) L'energia elettrostatica vale

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi dq = \frac{1}{2} \int \varphi \sigma dS = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} R \cos \theta \times \sigma_0 \cos \theta \times h R d\theta = \frac{\pi R^2 h}{4} \frac{\sigma_0^2}{\epsilon_0}$$

in quanto $\int d\theta \cos^2 \theta = \int d\theta \sin^2 \theta = \pi$.

- e) Sulla superficie interna si ha $E_{\text{in}}^\perp = -\sigma/2\epsilon_0$; per il teorema di Gauss sulla superficie esterna deve valere $E_{\text{out}}^\perp = E_{\text{in}}^\perp + \sigma/\epsilon_0 = +\sigma/2\epsilon_0$. Quindi la pressione vale

$$p = \sigma \frac{E_{\text{in}}^\perp + E_{\text{out}}^\perp}{2} = 0.$$

f) All'interno nasce una corrente $J = \sigma_c E$, quindi la densità sulla superficie varia come

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma_0}{dt} = -\frac{\sigma_c}{2\epsilon_0} \sigma_0$$

ovvero si scarica con costante di tempo $\tau = 2\epsilon_0/\sigma_c$.

g) In generale, se la conducibilità σ_c è costante in tutto lo spazio il tempo di scarica diventa $\tau = \epsilon_0/\sigma_c$ in quanto

$$\frac{d\sigma}{dt} = (\mathbf{J}_{\text{out}} - \mathbf{J}_{\text{in}}) \cdot \mathbf{n} = -\sigma_c \Delta E_{\perp} = -\frac{\sigma_c}{\epsilon_0} \sigma$$

In questo esercizio, infatti, la densità superficiale ora defluisce anche verso l'esterno, con $|J_{\text{in}}| = |J_{\text{out}}|$.

h) Per conservazione dell'energia si ha $\int W_J dt = U$ in entrambi i casi.

Esercizio 8.16: Piastra dielettrica in condensatore ©

In un condensatore costituito da due armature conduttrici piane parallele circolari di raggio a poste a distanza $d_0 + d_1 \ll a$ viene inserita una piastra di un materiale di raggio a , spessore d_1 e costante dielettrica ϵ_1 , appoggiandola su una delle due armature.

a) Calcolare la capacità del sistema.

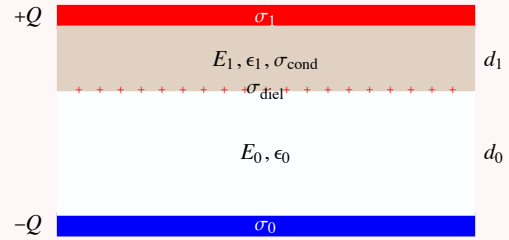
Una carica $+Q$ viene posta sull'armatura 1 a contatto con il dielettrico, ed una carica $-Q$ su quella libera.

b) Calcolare la carica di polarizzazione indotta sulla superficie del dielettrico.

Il dielettrico ha ora anche una conducibilità σ_{cond} .

c) Calcolare come si evolve nel tempo la capacità $C(t)$ del sistema, illustrando graficamente il risultato.

d) Calcolare l'energia finale e l'energia dissipata per effetto Joule



✚Soluzione:

a) Il sistema può essere schematizzato come due capacità in serie: $C_0 = \epsilon_0 \pi a^2 / d_0$ e $C_1 = \epsilon_1 \pi a^2 / d_1$. Quindi

$$C = \left(\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} \right)^{-1} = \frac{\pi a^2}{d_1/\epsilon_1 + d_0/\epsilon_0}.$$

b) Definendo $\sigma = Q/\pi a^2$ i campi elettrici sono dati da $D = \sigma = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_0 E_0$ e valgono $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ nel vuoto e $E_1 = \sigma/\epsilon_1$ nel dielettrico. Quindi $\sigma_{\text{pol}} = \epsilon_0(E_1 - E_0) = \sigma(\epsilon_0/\epsilon_1 - 1)$.

c) Per effetto della conducibilità parte della carica libera si sposta sulla superficie del dielettrico: chiamiamo $\sigma_0(t)$, $\sigma_{\text{diel}}(t)$ e $\sigma_1 = -\sigma_0 - \sigma_{\text{diel}}$ le densità di carica libera presenti sull'armatura superiore, sul bordo superiore del dielettrico, e sull'armatura inferiore. Abbiamo quindi

$$D_1 = \sigma_1 = \epsilon_1 E_1 \quad D_0 = -\sigma_0 = \epsilon_0 E_0$$

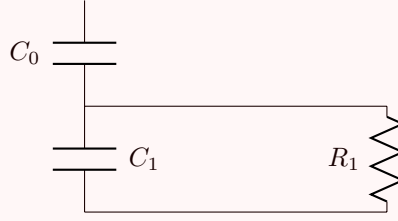
e una corrente $J_1 = \sigma_{\text{cond}} E_1 = \sigma_{\text{cond}} \sigma_1 / \epsilon_1$ che produce $\dot{\sigma}_1 = -J_1$. Risolvendo l'equazione differenziale con condizione iniziale $\sigma_{\text{diel}} = 0$ e $\sigma_1 = -\sigma_0 = Q/\pi a^2$ si trova

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(0) e^{-t/\tau}, \quad \tau = \epsilon_1 / \sigma_{\text{cond}}.$$

Quindi la capacità aumenta con il tempo:

$$C(t) = \frac{Q}{V(t)} = \frac{\pi a^2 \sigma_1(0)}{E_1 d_1 + E_0 d_0} = \frac{\pi a^2}{e^{-t/\tau} d_1/\epsilon_1 + d_0/\epsilon_0}.$$

Alla fine la carica Q è tutta andata sulla superficie del materiale con conducibilità, quindi $C(\infty) = C_0$. Il sistema può essere schematizzato come un circuito con resistenza $R_1 = d_1/\pi a^2 \sigma_{\text{cond}}$ e costante tempo $\tau = R_1 C_1$



d) L'energia elettrostatica $U(t) = Q^2/2C(t)$ diminuisce:

$$\Delta U = U(0) - U(\infty) = \frac{Q^2}{2C_1}.$$

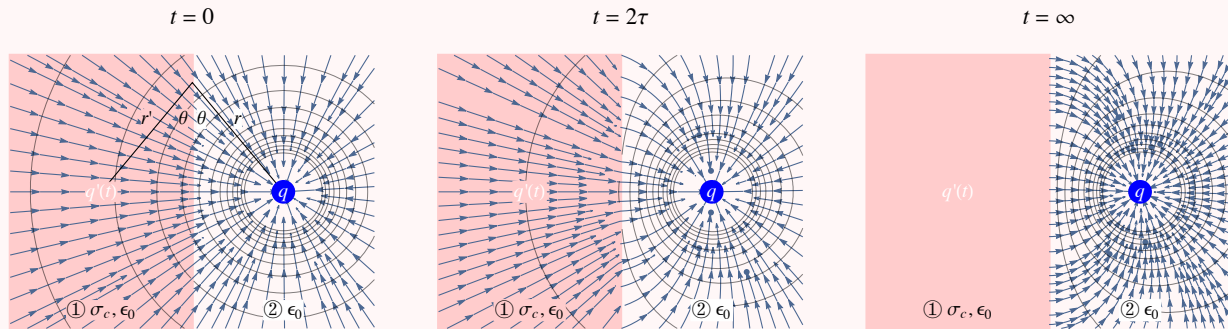
Tale differenza di energia viene dissipata per effetto Joule

$$U_{\text{Joule}} = \pi a^2 d_1 \int_0^\infty dt \sigma_{\text{cond}} E_1^2.$$

Esercizio 8.17: Carica davanti a conduttore

Lo spazio è diviso in due semi-spazi separati dal piano $x = 0$: nella zona 1 (a sinistra, $x < 0$) c'è un materiale con conducibilità σ_c , e nella zona 2 (a destra, $x > 0$) il vuoto. All'istante $t = 0$ una carica q viene improvvisamente messa a destra a distanza d dalla superficie di separazione. Trovare, in funzione del tempo: a) il potenziale ed il campo elettrico; b) la forza sulla carica q ; c) la pressione superficiale in un punto generico del piano conduttore. d) la potenza dissipata per effetto Joule; e) l'energia totale dissipata per effetto Joule, verificando la conservazione dell'energia.

➤Soluzione: Il problema può essere risolto mediante una generalizzazione del metodo delle immagini.



a) Proviamo ad assumere che il potenziale sia

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} q''(t)/r & \text{per } x < 0, \text{ zona 1} \\ q/r + q'(t)/r' & \text{per } x > 0, \text{ zona 2} \end{cases}$$

dove r è la distanza dal punto $P = (d, 0, 0)$ dove si trova la carica q , e r' la distanza dal punto $(-d, 0, 0)$ dove si trova la carica immagine q' . Al tempo $t = 0$ si ha $q' = 0$ e $q'' = q$. Al tempo $t = \infty$ si ha $q' = -q$ e $q'' = 0$ (metodo delle immagini). Per trovare l'evoluzione temporale imponiamo le condizioni di raccordo sul piano di separazione $x = 0$, lungo il quale $r = r'$:

$$\begin{cases} E_{\perp 1} = E_{\perp 2} \\ E_{\parallel 2} - E_{\parallel 1} = \sigma/\epsilon_0 \\ \dot{\sigma} = J_{\perp 1} = \sigma_c E_{\perp 1} \end{cases}.$$

Definendo $\cos \theta = \sqrt{y^2 + z^2}/r$, i campi elettrici sul piano sono

$$E_{-2} = \frac{(q + q') \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_{-1} = \frac{q'' \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_{\perp 2} = \frac{(-q + q') \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_{\perp 1} = -\frac{q'' \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

La 2a condizione di raccordo fornisce quindi la densità superficiale σ di carica sul piano:

$$\sigma(t, y, z) = \frac{q_\sigma \sin \theta}{4\pi r^2}, \quad q_\sigma \equiv -q + q' + q''.$$

Definendo $\tau \equiv \epsilon_0/\sigma_c$ le condizioni di raccordo diventano:

$$\begin{cases} q'' = q + q', \\ -q + q' + q'' = q_\sigma \\ \dot{q}_\sigma = -q''/\tau \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} q' = q_\sigma/2, \\ q'' = q + q_\sigma/2 \\ \dot{q}_\sigma = -(q + q_\sigma/2)/\tau \end{cases}.$$

L'equazione differenziale per q_σ è risolta da

$$\frac{q_\sigma}{2} = q' = -q(1 - e^{-t/2\tau}), \quad q'' = q e^{-t/2\tau}.$$

Al tempo $t = \infty$ si ritrova il conduttore, $q' = -q$, $q'' = 0$, $q_\sigma = -q$. La densità di carica superficiale σ appare gradualmente grazie alla corrente \mathbf{J}_1 che arriva da $-\infty$. La densità volumetrica di carica nel conduttore rimane $\rho = 0$. La soluzione è simile a quella del problema 7.12 con due dielettrici in quanto la conduzione (per sorgenti periodiche) equivale ad una costante dielettrica complessa.

- b) La forza sulla carica q vale $F = qq'/4\pi\epsilon_0(2d)^2$.
- c) La pressione vale $\wp = \sigma(E_{\perp 1} + E_{\perp 2})/2 = -2qq_\sigma \sin^2 \theta / (4\pi r^2)^2 / \epsilon_0$.
- d) La potenza dissipata per effetto Joule al tempo t vale

$$W_J = \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \int_{x < 0} dV \sigma_c E_{q''}^2 = \sigma_c \frac{q''^2}{16\pi\epsilon_0^2 d} = \sigma_c \frac{q^2 e^{-t/\tau}}{16\pi\epsilon_0^2 d}$$

in cui $E_{q''}$ è il campo elettrico presente nella zona 1, scritto in termini di q'' . L'integrale sul volume 1 è stato fatto mediante forza bruta: il risultato è semplice, $\int_{x < 0} dV/r^4 = \pi/d$.

- e) Integrando W_J sul tempo si ottiene l'energia totale dissipata per effetto Joule

$$U_J = \int_0^\infty dt W_J = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}.$$

La conservazione dell'energia è soddisfatta: $U_J = U_0 - U_\infty$ in quanto al tempo iniziale si ha $U_0 = 0$ (per convenzione non si include l'energia infinita della carica puntiforme q), ed al tempo finale si ha $U_\infty = q\varphi_{q'}/2 = -q^2/16\pi\epsilon_0 d$. Ad un tempo $t < \infty$ le cariche superficiali hanno un'energia potenziale non banale.

Esercizio 8.18: Conduttore in campo gravitazionale ©

Una sfera di carica totale $Q = 0$ e raggio $R = 100$ m è costituita da atomi di carica positiva $+e$ assunti formare una struttura rigida indeformabile e da un ugual numero di elettroni di carica $-e$ massa m_e liberi di muoversi all'interno della sfera con conducibilità σ .

- a) Calcolare, nella configurazione di equilibrio, il potenziale elettrico, il campo elettrico, l'energia elettrostatica, la carica superficiale, la pressione superficiale.

È ora presente un campo gravitazionale \mathbf{g} costante, di modulo $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Calcolare, nella nuova configurazione di equilibrio:

- b) Il campo elettrico all'interno della sfera, dando anche il valore numerico.
- c) La densità di carica nella configurazione di equilibrio, quantificando l'eccesso di carica nella semi-sfera inferiore in termini del numero N di elettroni, di cui si dia anche il valore numerico.

- d) Il potenziale elettrico in tutto lo spazio.
- e) L'energia elettrostatica, confrontandola con la variazione di energia gravitazionale rispetto alla situazione iniziale, interpretando meccanicamente il risultato.
- f) La potenza dissipata per effetto Joule.

La sfera viene ora fatta rotolare con velocità angolare $\omega \ll \sigma/\epsilon_0$.

- g) Calcolare, o almeno stimare, la potenza dissipata per effetto Joule, discutendo come dipende da σ , e specificando il suo effetto meccanico.

✚Soluzione:

- a) Vale tutto 0.
- b) Gli elettroni scendono sotto il loro peso, fino a produrre una forza elettrica che ferma la caduta. All'equilibrio la forza totale sugli elettroni $\mathbf{F} = m_e \mathbf{g} - e \mathbf{E}$ deve valere zero: si ha quindi un campo elettrico costante $\mathbf{E} = m_e \mathbf{g}/e \sim 10^{-10} \text{ V/m}$. Dal punto di vista degli elettroni è come se fosse presente un campo elettrico esterno $\mathbf{E}_{\text{ext}} = -m_e \mathbf{g}/e$: siccome gli elettroni sono le uniche particelle libere di muoversi, questo problema è indistinguibile da quello elettrico già risolto.
- c) Come visto in altri esercizi, il campo elettrico costante in una sfera è generato da una densità di carica superficiale $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ con $\sigma_0 = -3\epsilon_0 E$. Quindi

$$N = \frac{Q}{-e} = \frac{\int_0^1 \sigma dS}{-e} = \frac{\int_{-1}^0 2\pi R^2 \sigma_0 c dc}{e} = \frac{3\pi R^2 m_e g \epsilon_0}{e^2} \approx 290$$

abbastanza grosso da giustificare il limite continuo.

Notare che non è corretto vedere il problema come due sfere di carica q spostate di d , ed imporre $F = q^2/4\pi\epsilon_0 d^2 + m_e g = 0$, in quanto l'equivalenza è valida per il campo elettrico esterno, non per quello interno: si ha quindi una diversa forza elettrica.

- d) Per $r < R$ il campo elettrico è costante, quindi $\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$. Come visto in altri esercizi, il potenziale per $r > R$ è di tipo dipolare, con $p = 4\pi R^3 \sigma_0/3 = 4\pi R^3 m_e g \epsilon_0/e^2 \approx 0.6 \cdot 10^{-14} \text{ m}$.
- e) L'energia elettrostatica valeva $U_{\text{el}} = 2\pi R^3 \sigma_0^2/9\epsilon_0 = 2g^2 m_e^2 \pi R^3 \epsilon_0/e^2 \approx 1.5 \cdot 10^{-25} \text{ J}$. La variazione di energia gravitazionale vale

$$U_{\text{grav}} = \int dm gz = \int dS \frac{\sigma m_e}{-e} gz = -2U_{\text{el}}$$

Lo stesso fattore -2 si ottiene considerando una molla compressa dalla gravità, $U = mgz + kz^2/2$: significa che l'energia elettrica si comporta come una molla.

- f) $W = \int dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$ in quanto vale zero la corrente $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + m_e \mathbf{g}/e) = 0$. È essenziale tenere in conto dell'effetto della forza gravitazionale.
- g) La potenza dissipata per effetto Joule può essere stimata come $W_{\text{Joule}} \sim IV$ dove $V \sim ER$ è la differenza di potenziale all'interno della sfera e $I \sim Q\omega$ è la corrente che gira nella sfera per effetto della rotazione. Si ottiene quindi $W_{\text{Joule}} \sim \omega U_{\text{el}}$. L'effetto meccanico è attrito.

Un conto preciso può essere fatto notando che, essendo ω lenta, ad ogni istante la carica quasi raggiunge la densità di equilibrio discussa prima, ma ora rispetto alla verticale istantanea. Come visto in altri esercizi, a regime \mathbf{E} ruota con piccolo ritardo di fase $\delta = \omega\epsilon_0/\sigma \ll 1$ rispetto a \mathbf{g} . La potenza dissipata vale quindi

$$W_{\text{Joule}} = \int dV \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \int dV \sigma(\mathbf{E} + m_e \mathbf{g}/e) \cdot \mathbf{E} \simeq V \sigma \delta E^2 = \frac{2}{3} \omega U_{\text{el}}.$$

Esercizio 8.19: Semipiano dielettrico conduttore

Lo spazio è diviso in due semispazi: nella zona 1 corrispondente a $x < 0$ è presente un materiale di costante dielettrica ϵ e conducibilità σ_c . La zona 2, corrispondente ad $x > 0$, contiene solo un dipolo (lentamente oscillante o ruotante) $\mathbf{p} = \text{Re } \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}$ situato nel vuoto a $x = d$. Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio, in condizioni stazionarie.

✎Soluzione: ‘Lentamente’ significa che è possibile trascurare effetti magnetici. Un dipolo oscillante è descritto da \mathbf{p}_0 reale; un dipolo ruotante attorno all’asse z è descritto da $\mathbf{p}_0 = p_0(1, i, 0)$. L’esercizio è complicato, ma può essere risolto assumendo, in analogia con l’esercizio 7.12, una soluzione in termini di due ‘dipoli immaginari’: \mathbf{p}' situato a $x = -d$ e \mathbf{p}'' situato a $x = d$. La soluzione tentativa viene scritta schematicamente come

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \text{(campo generato da } \mathbf{p} \text{ a } x = d) + \text{(campo generato da } \mathbf{p}' \text{ a } x = -d) & \text{per } x > 0 \\ \text{(campo generato da } \mathbf{p}'' \text{ a } x = d) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Questo ansatz soddisfa alle equazioni

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\dot{\rho}_{\text{free}} \quad \mathbf{J} = \sigma_c \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

per $x < 0$ e $x > 0$, dove l’unica carica è il dipolo \mathbf{p} . Occorre verificare se soddisfa anche alle condizioni al bordo $x = 0$. Chiamando σ la densità di carica si deve avere:

$$E_{\parallel}^1 = E_{\parallel}^2, \quad E_{\perp}^2 - \kappa E_{\perp}^1 = \sigma / \epsilon_0 \quad \dot{\sigma} = -\sigma_c E_{\perp}^1 \quad \Rightarrow \quad \dot{E}_{\perp}^2 - \kappa \dot{E}_{\perp}^1 = -\sigma_c E_{\perp}^1 / \epsilon_0$$

cioè

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{p}'' \quad (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}}' - \kappa \dot{\mathbf{p}}'') = -\frac{\sigma_c}{\epsilon_0} \mathbf{p}''.$$

Eliminando \mathbf{p}'' trovo una equazione differenziale che determina \mathbf{p}'

$$\dot{\mathbf{p}}' = \frac{\sigma_c / \epsilon_0}{1 + \kappa} (\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \dot{\mathbf{p}}.$$

Trascurando il transiente iniziale, la soluzione è data da $\mathbf{p}'(t) = \text{Re } \mathbf{p}'_0 e^{i\omega t}$ e quindi

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} \frac{1 - i\omega\epsilon_0(1 - \kappa)/\sigma_c}{1 + i\omega\epsilon_0(1 + \kappa)/\sigma_c}, \quad \mathbf{p}'' = \mathbf{p} - \mathbf{p}'.$$

A basse frequenze, $\omega \rightarrow 0$ si ritrova il conduttore.

Esercizio 8.20: Piatto dielettrico

Un piatto piano sottile con costante dielettrica ϵ viene messo in un campo elettrico esterno E_{ext} .

a) Calcolare il campo elettrico interno E_{in} .



Il piatto ha ora anche resistività ρ .

b) Studiare cosa succede se il campo esterno viene improvvisamente rimosso.

c) Studiare cosa succede se il campo elettrico esterno è lentamente variabile, $E_{\text{ext}} = E_0 e^{i\omega t}$.

✎Soluzione:

a) La condizione di raccordo per D_{\perp} in assenza di carica libera fornisce

$$\epsilon_0 E_{\text{ext}} - \epsilon E_{\text{in}} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{\text{in}} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_{\text{ext}}.$$

b) Essendo ora il piatto conduttore, in presenza di E_{ext} si forma una densità di carica $\sigma = \epsilon_0 E_{\text{ext}}$ sul bordo destro e $-\sigma$ su quello sinistro, in maniera che $E_{\text{in}} = 0$. Quando il campo E_{ext} viene improvvisamente rimosso la σ rimasta che genera un campo $E_{\text{in}} = -E_{\text{ext}}$ all’interno del conduttore. Essendo il sistema anche dielettrico, la polarizzazione riduce il campo interno a $E_{\text{in}} = -\sigma/\epsilon$. Nasce quindi una densità di corrente $\mathbf{J} = E_{\text{in}}/\rho$ che inizia a riequilibrare le cariche, secondo $\dot{\sigma} = \mathbf{J} = -\sigma/\tau$ con $\tau = \epsilon\rho$, producendo una scarica esponenziale $\sigma(t) = \sigma(0)e^{-t/\tau}$. Siccome $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ non si generano cariche di volume.

- c) Consideriamo le cariche libere, che sono quelle che producono correnti. Come prima si ha densità di carica $\rho = 0$ dentro il conduttore, e si accumulano cariche libere superficiali $\pm\sigma$ ai due bordi. Chiamando E_{in} il campo elettrico interno, le condizioni di raccordo per D_{\perp} e la conservazione della carica forniscono

$$\begin{cases} \epsilon_0 E_{\text{ext}} - \epsilon E_{\text{in}} = \sigma \\ \dot{\sigma} = J = E_{\text{in}}/\rho \end{cases} \Rightarrow \sigma + \tau \dot{\sigma} = \epsilon_0 E_{\text{ext}}, \quad \tau = \epsilon \rho.$$

In condizioni stazionarie la soluzione a regime è (la parte reale di)

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad \text{con} \quad \sigma_0 = \frac{\epsilon_0 E_0}{1 + i\omega\tau} \quad \text{e quindi} \quad E_{\text{in}} = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon} \frac{1}{1 + 1/i\omega\tau} \equiv \frac{\epsilon_0 E_0}{\hat{\epsilon}}.$$

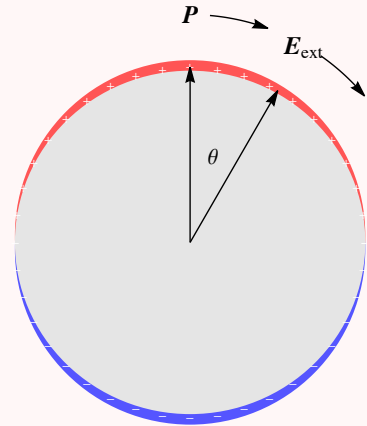
Nel limite $\omega \rightarrow 0$ si ottiene un conduttore, e quindi $E_{\text{in}} = 0$. Per valori intermedi si ha un campo con modulo intermedio che oscilla con ritardo di fase $\varphi = \arctan \omega\tau$. Nel limite $\omega\tau \gg 1$ l'effetto di conduzione diventa trascurabile e si ottiene $E_{\text{in}} = \epsilon_0 E_0/\epsilon$, che corrisponde ad un dielettrico non conduttore.

È interessante notare che il caso generale di un dielettrico conduttore si comporta (in condizioni stazionarie) come un dielettrico non conduttore con costante dielettrica complessa $\hat{\epsilon} = \epsilon + 1/i\omega\rho$. Questo trucco matematico troverà largo uso.

Esercizio 8.21: Sfera conduttrice in E ruotante

Un sfera di raggio R , composta da un dielettrico conduttore con costante dielettrica $\epsilon_{\text{in}} = \epsilon_r \epsilon_0$ e resistività ρ , è immersa nel vuoto in presenza di un campo elettrico esterno lentamente ruotante, descritto in notazione complessa da $E_{\text{ext}} = \hat{E}_{\text{ext}} \text{Re}(1, i, 0)e^{i\omega t}$.

- Mostrare che la carica libera sta solo sul bordo.
- Scrivere le condizioni di raccordo per il campo elettrico e la densità superficiale di carica libera sul bordo della sfera.
- Verificare che la sfera acquista a regime una carica superficiale totale (data dalla somma delle cariche superficiali di conduzione ed a quelle dovute ad una densità di polarizzazione $\mathbf{P}(t)$ uniforme) ruotante con ritardo di fase rispetto al campo elettrico.
- Trovare il momento delle forze \mathbf{M} , ed il valore di ω per il quale M è massimo.



☞ Soluzione:

- Come già visto, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ implica $\dot{\rho} = -\rho/\tau$, e quindi che una densità di carica iniziale $\rho = 0$ rimane zero: la carica fluisce senza accumularsi.
- Le condizioni di raccordo fra il dielettrico-conduttore ed il vuoto sono

$$E_{\parallel}^{\text{in}} = E_{\parallel}^{\text{out}}, \quad \epsilon_0 E_{\perp}^{\text{out}} = \epsilon_{\text{in}} E_{\perp}^{\text{in}} + \sigma, \quad \dot{\sigma} = E_{\perp}^{\text{in}}/\rho.$$

- Come visto tramite argomenti generali, la soluzione a regime è ottenuta assumendo $P = \text{Re} \hat{P}(1, i, 0)e^{i\omega t}$ ed è analoga a quella ottenuta nel caso statico, esercizio 7.13, sostituendo la costante dielettrica ϵ con una costante effettiva complessa $\hat{\epsilon}$,

$$\hat{P} = 3\epsilon_0 \hat{E}_{\text{ext}} \frac{\hat{\epsilon}_r - 1}{2 + \hat{\epsilon}_r}, \quad \hat{\epsilon}_r \equiv \epsilon_r + \frac{1}{i\omega\rho\epsilon_0}.$$

Questo significa che la polarizzazione \mathbf{P} ruota con un ritardo di fase rispetto a \mathbf{E}_{ext} .

- Ricaviamo comunque queste formule ripetendo il conto. La polarizzazione $\mathbf{P}(t)$ genera un campo \mathbf{E}_{in} interno costante, ed un campo \mathbf{E}_{out} fuori dalla sfera di tipo dipolare: le loro componenti sono calcolate nell'esercizio 7.13 in eq. (3.1) e (3.2). Le cariche di conduzione sulla superficie $\sigma = \sigma_0 \cos \theta(t)$ generano

un campo elettrico simile. È poi presente il campo esterno E_{ext} . Le componenti parallele soddisfano alla continuità sul bordo. Le altre condizioni al bordo diventano

$$\epsilon_0 E_{\text{ext}} + \frac{2}{3}(P + \sigma_0) = \epsilon_{\text{in}} \left[E_{\text{ext}} - \frac{1}{3\epsilon_0}(P + \sigma_0) \right] + \sigma_0, \quad \dot{\sigma}_0 = \frac{1}{\rho} \left[E_{\text{ext}} - \frac{1}{3\epsilon_0}(P + \sigma_0) \right].$$

Cerchiamo la soluzione a regime: sostituendo $\sigma_0 = \dot{\sigma}_0/i\omega$ nella prima equazione, ed usando la seconda equazione per $\dot{\sigma}_0$, si trova che ϵ_{in} viene sostituito da $\hat{\epsilon}_{\text{in}} = \epsilon_{\text{in}} + 1/i\omega\rho$, e quindi che

$$P + \sigma_0 = 3\epsilon_0 \hat{E}_{\text{ext}} \frac{\hat{\epsilon}_r - 1}{2 + \hat{\epsilon}_r}, \quad \sigma_0 = \frac{3\epsilon_0 E_{\text{ext}}}{1 + i\omega\rho\epsilon_0(2 + \epsilon_r)}, \quad P = \frac{3\epsilon_0 E_{\text{ext}}(\epsilon_r - 1)}{(2 + \epsilon_r) - i/\rho\omega\epsilon_0}.$$

La formula semplice si applica alla densità superficiale totale $P + \sigma_0$. Si può verificare che, nel limite $\omega\rho \rightarrow 0$ in cui la conduzione è rapidissima, la densità superficiale di conduzione si riduce a quella statica, $\sigma_0 \rightarrow 3\epsilon_0 E_{\text{ext}}$ e $P \rightarrow 0$. Nel limite opposto $\omega\rho \rightarrow \infty$ in cui la conduzione è lentissima si riottiene la sfera dielettrica con polarizzazione, $P \rightarrow 3\epsilon_0 E_{\text{ext}}(\epsilon_r - 1)/(2 + \epsilon_r)$. Nel limite $\epsilon_r \rightarrow 1$ la polarizzazione va a zero.

- d) Il momento delle forze vale $\mathbf{M} = \text{Re } \mathbf{P} \times \text{Re } \mathbf{E}$, che è massimo per $\omega\tau = \pm 1$ (a meno della riduzione nel modulo di P). Questo può descrivere l'azione di un forno a microonde su molecole senza dipoli permanenti.

Esercizio 8.22: Contatore proporzionale Geyger

Si consideri un condensatore cilindrico di raggi $a < b$ ed altezza h caricato a differenza di potenziale $V = Q/C$ e riempito con un gas (ad esempio argon) di costante dielettrica ϵ . a) Come varia la differenza di potenziale se una particella passante ionizza un atomo del gas, a distanza $a < r_0 < b$? b) Stimare quanto deve essere grande Q e rarefatto il gas affinché la ionizzazione generi una cascata macroscopica? c) Calcolare come varia la differenza di potenziale.

✚**Soluzione:** Ricordiamo che il potenziale elettrico vale $\varphi(r) = -Q \ln(r/b)/2\pi\epsilon h$ avendo fissato $\varphi(b) = 0$, e la capacità vale $C = 2\pi\epsilon h / \ln(b/a)$.

- a) Quando la molecola si separa in uno ione ed un elettrone, l'elettrone di carica $-e$ si muove verso l'anodo (il filo interno di raggio a con carica positiva), e lo ione di carica $+e$ verso il catodo (il cilindro esterno di raggio b con carica negativa). La loro energia potenziale varia di

$$\Delta U = -e[\varphi(a) - \varphi(r_0)] + e[\varphi(b) - \varphi(r_0)] = -eV.$$

Per conservazione dell'energia questa variazione viene compensata dalla variazione dell'energia del condensatore. Infatti la carica sulle armature varia da Q a $Q - e$, e quindi l'energia del condensatore diminuisce di $\Delta U = -eV$. Questa variazione sarebbe un effetto osservabile, se non fosse troppo piccolo.

- b) L'energia di ionizzazione tipicamente è attorno ad 1 eV (13.6 eV per l'idrogeno). Affinché si generi una scarica serve che l'energia acquistata fra due urti superi questa energia: $Ed \gtrsim \text{eV}$ dove d è il cammino libero medio. Ad esempio, se il condensatore ha differenza di potenziale $V \sim 10 \text{ kV}$ ed il filo centrale ha raggio $a \sim 0.1 \text{ mm}$, il campo elettrico in sua prossimità vale $E \sim V/a \sim 10^8 \text{ V/m}$. Il rivelatore funziona quindi nella sua zona centrale vicino al filo se il cammino libero medio è $d \gtrsim 10^{-8} \text{ m}$, che è circa la distanza fra gli atomi in un solido o liquido. In un gas rarefatto la distanza d è maggiore, e quindi il rivelatore funziona anche se la ionizzazione avviene a distanze maggiori dal filo centrale.

- c) Nel modello di Drude gli urti casuali sono equivalenti ad un termine di attrito nell'equazione del moto degli ioni, $m\ddot{r} + \gamma\dot{r} = F_r = eE_r$. A regime l'attrito provoca un moto a velocità adiabaticamente costante, $\gamma\dot{r} = eE_r = eQ/2\pi\epsilon rh$. Lo si risolve integrando $r dr = dt eQ/2\pi\epsilon h$, trovando $r(t) = r_0 \sqrt{1 + t/\tau}$ con $\tau = \pi r_0^2 \epsilon h / eQ$. Gli ioni arrivano quindi sul lato esterno $r = b$ dopo un tempo $\Delta t = \tau(b^2/r_0^2 - 1)$. Se prima che il processo sia completo arriva un'altra particella lo strumento le distingue male.

Capitolo 9

Circuiti

Risolvere le equazioni di Maxwell è complicato. In alcune situazioni di interesse pratico in cui le correnti sono confinate dentro fili sottili ('circuiti') è possibile dare descrizioni approssimate. Per una corrente oscillante $I = \text{Re } I_0 e^{i\omega t}$ ed in condizioni stazionarie resistenze R , capacità C ed (in futuro) induttanze L si unificano in impedenze $Z_R = R$, $Z_C = 1/i\omega C$, $Z_L = i\omega L$, in quanto le cadute di potenziale ai loro capi valgono rispettivamente

$$RI, \quad \frac{Q}{C} = \frac{I}{i\omega C}, \quad LI = i\omega LI.$$

Esercizio 9.1: Resistenze in parallelo

Una corrente I incontra due resistenze in parallelo R_1 ed R_2 . Verificare che la corrente si ripartisce (I_1 in R_1 e I_2 in R_2) minimizzando la dissipazione per effetto Joule.

♣**Soluzione:** L'energia dissipata vale $W = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$. Chiamando I la corrente totale sia ha $I_2 = I - I_1$. Quindi

$$\frac{dW}{dI_1} = 2R_1 I_1 + 2R_2 (I_1 - I) = 0 \quad \text{risolta da} \quad R_1 I_1 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_{\parallel} I.$$

Nel limite $R_2 \ll R_1$ tutta la corrente fluisce nella resistenza minore, minimizzando l'effetto Joule. Questo fenomeno è utilizzato per giustificare allacci abusivi alla rete elettrica: gli elettroni vanno spontaneamente da chi offre minor resistenza.

Esercizio 9.2: Massima potenza

Ogni batteria contiene inevitabilmente una resistenza interna. Un circuito contiene una resistenza R_1 ed una batteria che genera differenza di potenziale \mathcal{E} e contiene una resistenza interna R_2 . a) Quale valore di R_1 rende massima la potenza W_1 dissipata da R_1 ? b) Quanto vale il massimo valore W_1/W , dove $W = W_1 + W_2$ è la potenza totale generata dalla batteria?

♣**Soluzione:** a) La potenza vale $W_1 = R_1 I^2 = R_1 \mathcal{E}^2 / (R_1 + R_2)^2$, che è massima per $R_1 = R_2$, valore detto 'resistenza di carico'. b) Vale $1/2$.

Esercizio 9.3: Carica di RC

Un circuito contiene una capacità C , che viene caricata da batteria che genera differenza di potenziale \mathcal{E} e che contiene una resistenza interna R . a) Quale frazione dell'energia generata dalla batteria viene dissipata dalla resistenza? b) In quale istante è massima la frazione di potenza dissipata dalla resistenza?

♣**Soluzione:** a) Metà in quanto la batteria cede energia $U_{\mathcal{E}} = Q\mathcal{E}$ e la capacità acquista energia $U_C = Q^2/2C = Q\mathcal{E}/2$ in quanto alla fine $Q = C\mathcal{E}$. Quindi metà dell'energia va a caricare la capacità, metà viene dissipata dalla resistenza.

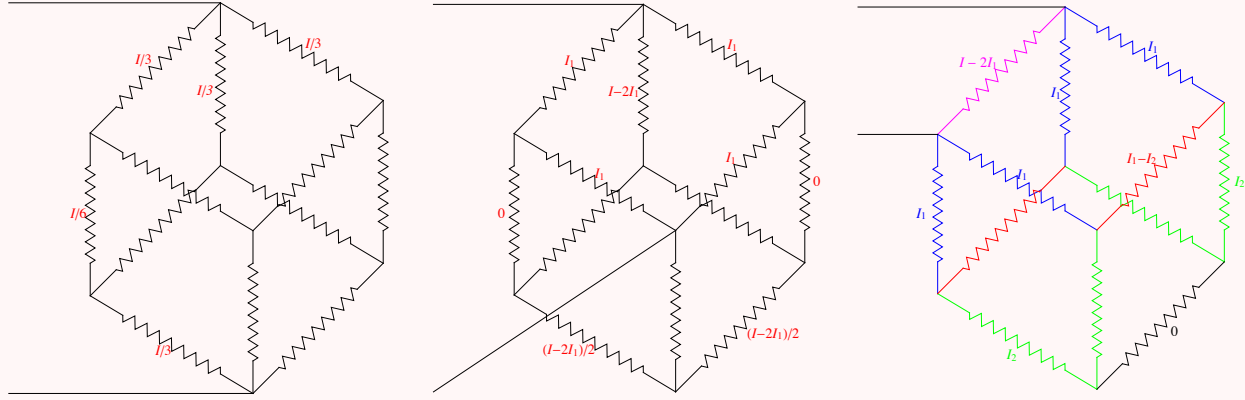


Figura 9.1: (a), (b), (c) : circuito a cubo..

b) All'istante iniziale $t = 0$. Infatti l'equazione del circuito $RI + Q/C = \mathcal{E}$ con condizione iniziale $Q(0) = 0$ è risolta da $I(t) = (\mathcal{E}/R)e^{-t/\tau}$ e quindi $Q(t) = C\mathcal{E}[1 - e^{-t/\tau}]$ con $\tau = RC$. Le potenze sono

$$W_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R}e^{-t/\tau}, \quad W_R = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R}e^{-2t/\tau}, \quad W_C = V_C I = \frac{Q}{C}\dot{Q}.$$

Integrando rispetto al tempo si verifica che le energie $U = \int_0^\infty W dt$ sono

$$U_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}Q = C\mathcal{E}^2, \quad U_R = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}, \quad U_C = \frac{Q^2}{2C} = U_R.$$

Esercizio 9.4: Resistenze su quadrato

Ciascun lato di un quadrato contiene una resistenza R . Calcolare la resistenza totale del circuito assumendo di connettere ad una differenza di potenziale V due capi opposti del quadrato.

✚**Soluzione:** Il sistema può essere decomposto come due coppie di resistenze in serie $R + R = 2R$ messe in parallelo fra di loro, per cui la resistenza totale vale R . Alternativamente, per ragioni di simmetria, la corrente si divide come $I = I/2 + I/2$, quindi la differenza di potenziale fra i due capi vale $V = (I/2)(R/2 + R/2) = IR$.

Esercizio 9.5: Resistenze su cubo

Ciascun lato di un cubo contiene una resistenza R . Calcolare la resistenza totale del circuito in fig. 9.1a, b, c).

✚**Soluzione:** È un esempio di circuito non decomponibile come combinazioni di resistenze in serie o parallelo. In generale, si ottiene la soluzione imponendo la conservazione della corrente ai vertici e $V = IR$ su ciascun filo (equazioni di Kirchoff), e risolvendo il sistema lineare.

- a) In questo caso si fa prima a dare la risposta ad occhio sfruttando la simmetria del problema. Per motivi di simmetria le correnti si dividono come in figura. Quindi la differenza di potenziale fra i due capi vale $V = IR(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}) = I \cdot \frac{5}{6}R$.
- b) Collegando invece due spigoli opposti sulla stessa faccia del cubo, per motivi di simmetria si otterrebbero le correnti in fig. 9.1b, in cui si è introdotta una corrente incognita I_1 , ed in termini di I_1 si sono determinate tutte le correnti (ad esempio la corrente che all'ingresso scorre verticale vale $I - 2I_1$). La differenza di potenziale vale

$$V = 2I_1R, \quad V = 2R(I - 2I_1) + 2R\frac{I - 2I_1}{2}$$

su due percorsi, uno che attraversa due resistenze R con corrente I_1 ; l'altro che scende e risale. Imponendo che V sia la stessa si ottiene $I = 4V/3R$ e $I_1 = V/2R$.

- c) Procedendo analogamente all'esercizio precedente, per motivi di simmetria si hanno le correnti disegnate in fig. 9.1c in termini di due correnti incognite I_1 e I_2 . Le differenze di potenziale su tre percorsi inequivalenti valgono

$$V = R(I - 2I_1), \quad V = 2RI_1 + R(I_1 - I_2), \quad V = 2RI_1 + 2RI_2$$

e sono uguali per $I_1 = 3I/14$, $I_2 = I/14$. Quindi $V = 4IR/7$.

Esercizio 9.6: Pile

Si acquista un pacchetto di 4 pile ricaricabili da $V = 1.5$ V. Si assuma che ciascuna pila riesca a mantenere, durante la scarica, la differenza di potenziale costante V tranne una trascurabile fase finale di rapida diminuzione. Su ciascuna pila è scritto '2800 mAh'.



- Che significa?
- Quanti Joule di energia contiene una pila carica?

Le quattro pile vengono montate in serie per tenere accesa una torcia, e si scaricano dopo 1 ora.

- Calcolare la potenza W impiegata dalla torcia.
- Da un punto di vista circuitale una lampadina è come una resistenza R . Calcolare il valore di R per la lampadina della torcia.
- Se le 4 pile fossero invece montate in parallelo, come cambierebbe l'intensità luminosa emessa dalla torcia e la sua durata?

✚Soluzione:

- $Q = 2800 \text{ mAh} = 10000 \text{ Coulomb}$ è la carica che ciascuna pila riesce a far passare prima di scaricarsi.
- L'energia di una pila è $E = QV = 1.5 \text{ kJ}$. Quattro pile hanno $E = 4QV = 60 \text{ kJ}$.
- Quindi $W = E/t = 16.8 \text{ Watt}$.
- Una lampadina è come una resistenza. Da $W = (4V)^2/R$ si ottiene $R = (4V)^2/W = 2.1 \Omega$.
- Riducendo la differenza di potenziale da 6 V a 1.5 V, la potenza (e quindi la luce emessa) scende di un fattore 16, e la durata aumenta di un fattore 16.

Esercizio 9.7: Potenza dissipata

Calcolare la potenza dissipata su di una generica impedenza Z .

✚Soluzione: La potenza dissipata vale $W = VI$ dove $V = ZI$. Il prodotto non è una operazione lineare: $\text{Re}(z_1 z_2) \neq \text{Re}(z_1)\text{Re}(z_2)$. Bisogna tornare ai numeri reali: scrivendo $Z = R + iY$

$$\langle W \rangle = \langle (I_0 R \cos \omega t - I_0 Y \sin \omega t) \cdot (I_0 \cos \omega t) \rangle = \frac{R}{2} I_0^2 = \frac{Z \cos \phi}{2} I_0^2$$

cioè solo la parte resistiva dissipa energia.

Esercizio 9.8: Circuito passa-basso

Costruire un filtro che taglia le alte frequenze, utilizzando: a) resistenze e capacità; b) resistenze e induttanze; c) capacità e induttanze.

✚ **Soluzione:**

a) Mettendo RC in serie, il voltaggio ai capi di C è basso ad alte frequenze in quanto $Z_C = 1/i\omega C$ è in modulo minore di $Z_R = R$ a grosso ω :

$$V_C = V_{\text{in}} \frac{Z_C}{R + Z_C} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{V_C}{V_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}.$$

b) Mettendo RL in serie, la tensione ai capi di R è piccola ad alte frequenze in quanto R è minore di $Z_L = i\omega L$:

$$V_R = V_{\text{in}} \frac{R}{R + Z_L} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{V_R}{V_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{1}{1 + (\omega L/R)^2}.$$

c) Mettendo LC in serie, la tensione ai capi di C è piccola ad alte frequenze in quanto $Z_C = 1/i\omega C$ è minore di Z_L

$$V_C = V_{\text{in}} \frac{Z_C}{Z_C + Z_L} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_C}{V_{\text{in}}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2}.$$

Come un'altalena, si ha una grossa oscillazione sulla risonanza a $\omega = 1/\sqrt{LC}$, fino a quando qualche piccola resistenza limita l'effetto.

Esercizio 9.9: Circuito passa-alto

Ripetere l'esercizio precedente, costruendo invece un filtro che taglia le basse frequenze.

✚ **Soluzione:** Una possibilità è mettere RC in serie e leggere il voltaggio ai capi di R :

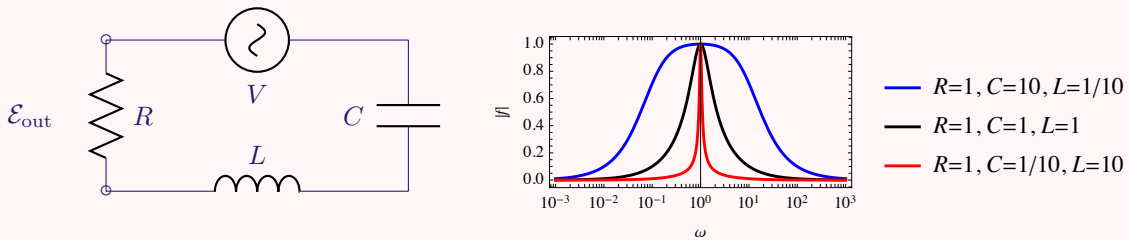
$$\left| \frac{V_R}{V_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Un'altra possibilità è mettere RL e leggere il voltaggio ai capi di L :

$$\left| \frac{V_L}{V_{\text{in}}} \right|^2 = \frac{(\omega L/R)^2}{1 + (\omega L/R)^2}.$$

Esercizio 9.10: Filtro passa banda RLC

Si consideri un circuito RLC in serie con una batteria alternata $V = V_0 \cos(\omega t)$. Mostrare che la differenza di potenziale ai capi della resistenza R è di tipo passa-banda, ossia piccate a pulsazioni attorno ad un certo valore ω_{max} .



✚ **Soluzione:** Scrivendo $V = \text{Re } V_0 e^{i\omega t}$, calcoliamo con il metodo delle impedenze la tensione ai capi di R :

$$V_R = f V_0, \quad \text{con} \quad f = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{R}{R + i\omega L + 1/i\omega C} \simeq \begin{cases} i\omega RC & \omega \rightarrow 0 \\ 1 & \omega = \omega_{\text{max}} = 1/\sqrt{LC} \\ R/i\omega L & \omega \rightarrow \infty \end{cases}.$$

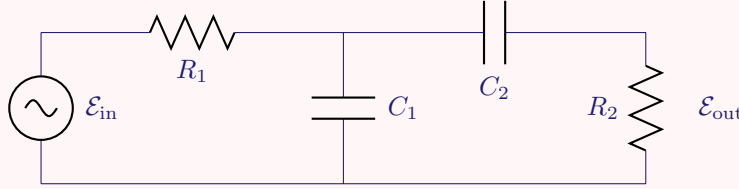
Il segnale

$$|f| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega L - 1/\omega C)^2/R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_{RL} - \omega_{RC}/\omega)^2}} \leq 1$$

è massimo a ω_{\max} ed attenuato a pulsazioni $\omega \ll \omega_{RC} \equiv 1/RC$ e $\omega \gg \omega_{RL} \equiv R/L$. Se $\omega_{RC} \ll \omega_{RL}$ la risonanza è larga. Se $\omega_{RC} \gg \omega_{RL}$ la risonanza è stretta.

Esercizio 9.11: Filtro passa banda $(RC)^2$

Si consideri il circuito in figura con $\omega_1 < \omega_2$ dove $\omega_i = 1/R_i C_i$. Si calcoli la relazione tra \mathcal{E}_{out} (tensione ai capi di R_2) e \mathcal{E}_{in} e indicare per quali valori delle impedenze si comporta come un filtro passa banda.



✚Soluzione: Intuitivamente, è un circuito 2 taglia-basso (RC ai capi di R_2), attaccato ad un circuito 1 taglia-alto (RC ai capi di C_1). Usando il metodo delle impedenze, non serve scrivere le equazioni di Kirchoff: l'impedenza totale del circuito vale

$$Z_{\text{tot}} = R_1 + Z, \quad \text{dove} \quad Z = Z_{C_1} \parallel (R_2 + Z_{C_2})$$

è l'impedenza del blocco C_1, C_2, R_2 , avendo definito $a \parallel b \equiv 1/(1/a + 1/b)$, ovvero $1/Z = 1/Z_{C_1} + 1/(R_2 + Z_{C_2})$. $Z_{C_i} = 1/i\omega C_i$ è l'impedenza della capacità C_i .

Troviamo la relazione tra \mathcal{E}_{out} e \mathcal{E}_{in} considerando come V_{C_1} (tensione ai capi di C_1) è legato alle due tensioni. \mathcal{E}_{out} è legata a V_{C_1} da un circuito che taglia le basse frequenze (vedi esercizi precedenti):

$$\mathcal{E}_{\text{out}} = \frac{R_2}{R_2 + Z_{C_2}} V_{C_1}.$$

Inoltre

$$V_{C_1} = \frac{Z}{Z_{\text{tot}}} \mathcal{E}_{\text{in}}.$$

Combinando le relazioni otteniamo

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{out}}}{\mathcal{E}_{\text{in}}} = \frac{R_2}{R_2 + Z_{C_2}} \frac{Z_{C_1}}{Z_{C_1} + R_1} \frac{R_2 + Z_{C_2}}{R_2 + Z_{C_2} + Z_{C_1} \parallel R_1} = \frac{R_2 Z_{C_1}}{R_1(R_2 + Z_{C_1} + Z_{C_2}) + Z_{C_1}(R_2 + Z_{C_2})}.$$

Il primo fattore taglia alte frequenze $\omega \gg \omega_1 = 1/R_1 C_1$. Il secondo fattore basse frequenze $\omega \ll \omega_2 = 1/R_2 C_2$. Essi danno quanto intuitivamente atteso all'inizio della soluzione. Tuttavia è presente anche il terzo fattore: affinché il circuito abbia le prestazioni di un buon filtro passa banda, occorre che il terzo fattore nel prodotto sia vicino all'unità, il che implica

$$Z_{C_1} \parallel R_1 \ll R_2 + Z_{C_2} \quad \Rightarrow \quad Z_{C_1} \ll R_2 + Z_{C_2} \quad \Rightarrow \quad Z \approx Z_{C_1}$$

in maniera tale che la corrente circola in maniera predominante attraverso R_2 e C_2 , piuttosto che attraverso C_1 .

Esercizio 9.12: Ponte di Wheatstone

a) Mostrare come il circuito in figura, dove le resistenze $R_{3,4}$ sono fisse e note, può essere usato per misurare la resistenza R_2 variando una la resistenza nota R_1 in maniera che il circuito sia 'bilanciato', ovvero che la differenza di potenziale V_{BD} valga 0, e che quindi non passi corrente attraverso R . b) Calcolare la sensibilità dello strumento.

✚Soluzione: È un esempio di circuito non decomponibile: cioè non si può evitare di applicare le leggi di Kirchoff vedendolo come combinazioni di serie e paralleli. Diventa decomponibile se $R = \infty$.

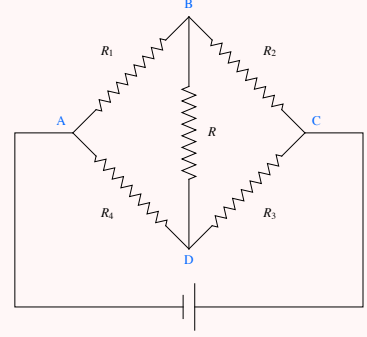
- a) Iniziamo dal caso $R = \infty$: $V_{BD} = 0$ se $R_2 R_4 = R_1 R_3$. In generale V_{DB} vale

$$V_{DB} = V \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) = V \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

In condizioni di bilanciamento $R_2/R_1 = R_3/R_4 = r$.

- b) Per studiare la sensitività dello strumento (e quindi calcolare l'incertezza sperimentale su R_2) consideriamo una variazione delle resistenze $R_i \rightarrow R_i + \delta R_i$: essa produce

$$\delta V_{DB} = \frac{r}{(1+r)^2} \left(\frac{\delta R_1}{R_1} - \frac{\delta R_2}{R_2} + \frac{\delta R_3}{R_3} - \frac{\delta R_4}{R_4} \right) V.$$



Passiamo al caso di R finito. In pratica R compare perchè un qualunque strumento che misura V_{DB} lo fa introducendo una resistenza $R < \infty$ fra i capi B e D . Risolviamo quindi il circuito completo utilizzando il metodo delle maglie: ci sono 7 incognite: V_A, V_B, V_C, V_D e le tre correnti di maglia I_1 (a sinistra, circolante in direzione $A \rightarrow B$), I_2 (a destra in direzione $C \rightarrow B$) ed I_0 (sotto, in direzione $A \rightarrow D \rightarrow C$). Siccome contano solo le differenze di potenziale si può scegliere $V_A = 0$, riducendo il numero di incognite a 6. Ci sono poi 6 equazioni, una per ogni tratto di circuito:

$$V_B - V_A = R_1 I_1, \quad V_B - V_C = R_2 I_1, \quad V_C - V_A = 0$$

$$V_D - V_A = R_4(I_0 - I_1) \quad V_D - V_C = -R_3(I_0 + I_2) \quad V_D - V_B = R(I_1 + I_2).$$

Dopo calcoli noiosi si ottiene

$$V_{DB} = \frac{(R_1 R_3 - R_2 R_4) V}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + (R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4)/R}.$$

Vediamo quindi che per calcolare il valore centrale di R_2 non serve tenere conto di R , che invece modifica la sensibilità dello strumento.

Esercizio 9.13: Pendolo accoppiato

Mostrare che due pendoli connessi da una molla k soddisfano alle stesse equazioni di due maglie LC con in comune una capacità C' .

➤ Soluzione: Usando le correnti di maglia I_1 e I_2 le equazioni sono

$$V_1 = L\ddot{Q}_1 + \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_1 - Q_2}{C'}, \quad 0 = L\ddot{Q}_2 + \frac{Q_2}{C} + \frac{Q_2 - Q_1}{C'}.$$

Usando le impedenze e risolvendo si trova

$$I_2 = \frac{i\omega V_1 C^2}{(CL\omega^2 - 1)(CC'L\omega^2 - 2C - C')} = i\omega \frac{V_1}{2L} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{C}{C + C' - CC'L\omega^2}$$

avendo definito $\omega_1^2 = 1/LC$ e $\omega_2^2 = 1/LC + 2/LC'$. Alla media delle frequenze $I_1 = 0$.

Le equazioni del moto del pendolo sono

$$m\ddot{x}_1 + mg\frac{x_1}{\ell} + k(x_1 - x_2) = F \quad m\ddot{x}_2 + mg\frac{x_2}{\ell} + k(x_2 - x_1) = 0$$

che hanno la stessa forma con $1/LC \leftrightarrow g/\ell$, $1/LC' = k/m$.

Per trovare i *modi normali* provo una soluzione $x_i = \hat{x}_i e^{i\omega t}$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + g/\ell + k/m & -k/m \\ -k/m & -\omega^2 + g/\ell + k/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Il determinante vale zero per

1. $\omega^2 = \omega_1^2 = g/\ell$, $x_1 = x_2$;
2. $\omega^2 = \omega_2^2 = g/\ell + 2k/m$, $x_1 = -x_2$.

Mettendo $F(t) = \hat{F}e^{i\omega t}$ viene

$$x_2 = \frac{F}{k - (k - m\omega^2 + gm/\ell)^2/k} = \frac{F}{2m(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{k\ell}{k\ell + mg - m\ell\omega^2} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2}$$

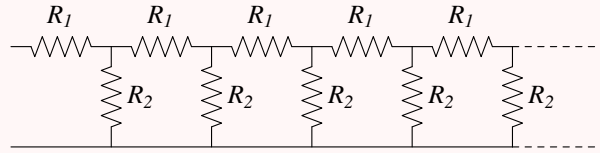
che corrispondono alle soluzioni per i modi normali

$$x_1 + x_2 = -\frac{F}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_1^2}, \quad x_1 - x_2 = -\frac{F}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_2^2}.$$

Nel caso del circuito, il modo normale $I_1 = I_2$ (niente corrente su C') vede un'impedenza $i\omega L + 1/i\omega C$ che vale zero per $\omega = \omega_1$; il modo $I_1 = -I_2$ vede un'impedenza $\frac{1}{2}(i\omega L + 1/i\omega C) + (1/i\omega C')$ che vale zero per $\omega = \omega_2$.

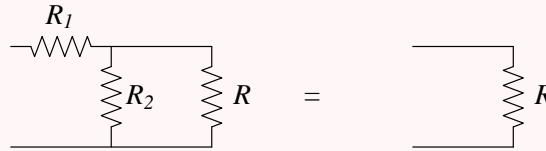
Esercizio 9.14: Attenuatore

Calcolare la resistenza totale R del circuito infinito in figura



ed il potenziale dopo n resistenze R_1 .

Soluzione: Siccome $\infty = \infty + 1$ per trovare la resistenza R equivalente al circuito si impone che R sia eguale ad un passo della catena seguito da R :



In equazioni:

$$R = R_1 + (R_2 \parallel R) = R_1 + \frac{1}{1/R_2 + 1/R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}. \quad (9.1)$$

Per trovare il potenziale dopo il primo passo, rimpiazziamo (come in figura) le infinite resistenze successive con la resistenza equivalente R , ottenendo un circuito con 3 resistenze R_1 , R_2 ed R , di resistenza totale R : circola una corrente totale $I = V/R$. La differenza di potenziale $V^{(1)}$ ai capi della prima R_2 vale

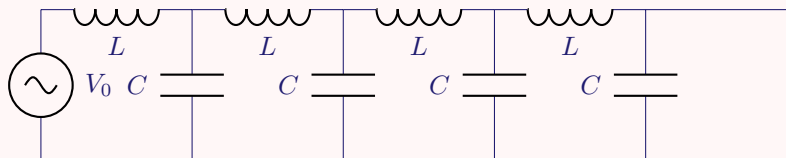
$$V^{(1)} = V_0 \frac{R_2 \parallel R}{R} = V\alpha, \quad \alpha = \frac{R_2}{R + R_2}.$$

Nei passi successivi la differenza di potenziale decresce in modo geometrico: $V^{(n)} = V_0\alpha^n = V_0/(1 + R/R_2)^n$. Ad esempio, per dimezzare la differenza di potenziale ad ogni passo serve $R = R_2$, cioè $R_2 = 2R_1$.

In pratica non si può costruire una catena con un numero infinito di resistenze: per terminare il circuito dopo un numero finito di resistenze senza scompensarlo, basta terminarlo con una resistenza R .

Esercizio 9.15: Catena LC

Si consideri un circuito simile a quello precedente, sostituendo R_1 con un'induttanza L di impedenza $Z_1 = i\omega L$ e R_2 con una capacità C di impedenza $Z_2 = 1/i\omega C$.



- a) Calcolare il potenziale dopo n passi. b) Studiarne il limite continuo, mostrando che il sistema trasmette onde. c) Mostrare che il sistema approssima un cavo coassiale.

▲Soluzione: L'induttanza equivalente Z è data da una formula analoga a quella di R

$$Z = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{(Z_1/2)^2 + Z_1 Z_2}.$$

Conviene scrivere la formula come

$$Z_{\text{eff}} \equiv Z - \frac{Z_1}{2} = \sqrt{(Z_1/2)^2 + Z_1 Z_2} = \begin{cases} \sqrt{(L/C) - (\omega L/2)^2} & \text{se } \omega < \omega_0 \\ i\sqrt{(\omega L/2)^2 - (L/C)} & \text{se } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

dove $\omega_0 = 2/\sqrt{LC}$. A livello circuitale questo equivale ad aver diviso ogni induttanza in due metà ($L = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L$), considerandole nei due lati diversi della catena. La formula per Z_{eff} rende esplicito un risultato sorprendente: a basse frequenze un circuito con solo L e C (elementi non dissipativi) si comporta come una resistenza (dissipativa). Il motivo fisico per cui l'energia sembra scomparire in quanto viene trasmessa attraverso la catena.

- a) Come nell'esercizio precedente, il potenziale varia lungo la catena come $V^{(n)} = \alpha^n V_0$ dove

$$\alpha = \frac{Z_2}{Z + Z_2} = \frac{Z - Z_1}{Z} = \frac{Z_{\text{eff}} - Z_1/2}{Z_{\text{eff}} + Z_1/2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{(L/C) - (\omega L/2)^2} - i(\omega L/2)}{\sqrt{(L/C) - (\omega L/2)^2} + i(\omega L/2)} = e^{i\delta} & \text{se } \omega < \omega_0 \\ \frac{\sqrt{(\omega L/2)^2 - (L/C)} - (\omega L/2)}{\sqrt{(\omega L/2)^2 - (L/C)} + (\omega L/2)} < 1 & \text{se } \omega > \omega_0 \end{cases}.$$

A bassa frequenza si può terminare la catena finita con $R = \sqrt{L/C}$. (Se si scambia $L \leftrightarrow C$ è come cambiare $\omega \rightarrow 1/\omega$: la catena risultante taglia le frequenze basse invece di quelle alte).

- b) La caduta di potenziale e di corrente fra due elementi successivi della catena valgono $\Delta V = Z_L I$, $\Delta I = V/Z_C$. Evitando di usare le impedenze, lo stesso risultato si scrive come

$$\Delta V = L \dot{I}, \quad \Delta I = \dot{Q} = C \dot{V}.$$

Nel limite continuo in cui $|\alpha| \simeq 1$ si ottiene un'equazione d'onda con velocità v :

$$\frac{dV}{dx} = \frac{L}{\Delta x} \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dI}{dx} = \frac{C}{\Delta x} \frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 V}{dx^2} = \underbrace{\frac{L}{\Delta x} \frac{C}{\Delta x}}_{1/v^2} \frac{d^2 V}{dt^2}.$$

- c) La rete circuitale LC fornisce una descrizione approssimata di un cavo coassiale di raggi $b > a$ e lunghezza Δx . Un condensatore cilindrico ha capacità per unità di lunghezza $C/\Delta x = 2\pi\epsilon_0 / \ln(b/a)$, e induttanza per unità di lunghezza $L/\Delta x = \mu_0 \Delta x \ln(b/a)/2\pi$ (esercizio 10.3). La velocità di trasmissione vale quindi:

$$v = \sqrt{\frac{\Delta x}{L} \frac{\Delta x}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c.$$

Per $\Delta x \rightarrow 0$ la frequenza di taglio vale $\omega_0 \rightarrow \infty$: una linea ideale trasmette tutto, ed il cavo coassiale equivale ad una resistenza

$$R = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{2\pi} = 59.95 \, \Omega, \quad \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \, \Omega = \text{'Impedenza del vuoto'}.$$

Parte II

Magnetostatica

Capitolo 10

Generazione di campi magnetici

Il campo magnetico è generato da densità di correnti come descritto dalle equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

in cui $\mu_0 = 4\pi k_m$, $k_m = 10^{-7}$ Tesla m/A. Le equazioni implicano $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Equivalente integrale:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \Phi(\mathbf{J}) = \mu_0 i \quad \Phi(\mathbf{B}) = 0$$

Soluzione integrale per il campo magnetico generato:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Esercizio 10.1: Disco di Rowland

Un disco di raggio $r = 20$ cm contiene sui due lati una carica superficiale $\sigma = 10^{-6}$ C/m². Stimare il campo magnetico generato assumendo che venga fatto ruotare a 200 giri al secondo.

✚**Soluzione:** Si ha quindi una carica $Q = 2\pi a^2 \sigma \sim 2.5 \cdot 10^{-7}$ C. La corrente vale quindi $I \sim 200 Q / \text{sec} \sim 5 \cdot 10^{-5}$ A. Ad una distanza di 1 cm, genera un campo magnetico

$$B \sim \frac{\mu_0 I}{4\pi \text{ cm}} \sim 10^{-10} \text{ T}$$

che è 10^5 volte minore del campo magnetico terrestre. Il disco genera anche un grosso campo elettrico $E \sim \sigma/\epsilon_0 \sim 10^5$ V/m, che esercita fra le cariche stesse una forza repulsiva tollerabile di circa 1 N. Uno sperimentale che misura al di fuori del disco può schermare il campo elettrico tramite un conduttore, e riuscire a rivelare il campo magnetico in quanto dipende dal tempo (accelerando il disco), mentre il grosso campo magnetico terrestre non dipende dal tempo.

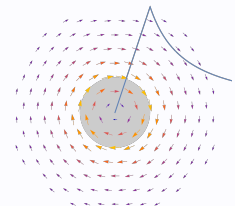
Esercizio 10.2: Filo rettilineo

Calcolare il campo magnetico B generato da un filo rettilineo infinito di raggio a percorso da una corrente I costituita da una densità di corrente costante $J = I/\pi a^2$.

✚**Soluzione:**

Applicando la legge di Ampere su di un circuito circolare immaginario di raggio r si ottiene $2\pi r B_\theta = \mu_0 I_{\text{conc}}$. La corrente concatenata vale $I_{\text{conc}} = I$ se $r > a$, e $I_{\text{conc}} = J\pi r^2 = Ir^2/a^2$ se $r < a$. Quindi:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} r/a^2 & r < a \\ 1/r & r > a \end{cases}.$$



Esercizio 10.3: Cavo coassiale

Calcolare il campo magnetico generato da un filo rettilineo di raggio a percorso da una corrente I , circondato da una corona cilindrica di raggi b e $b' > b$ lungo cui scorre una corrente opposta $I' = -I$. In entrambi i casi, le correnti scorrono come densità di correnti uniformi J e J' nei rispettivi volumi.

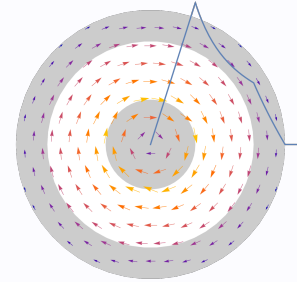
✎Soluzione:

Per $r < b$ si procede come nell'esercizio precedente, trovando lo stesso risultato. Per $r > b'$ la corrente concatenata vale $I + I' = 0$, e quindi $B = 0$: il cavo coassiale non genera campi magnetici al suo esterno. Per $b < r < b'$ si ha

$$I_{\text{conc}} = If(r), \quad f = 1 - \frac{r^2 - b^2}{b'^2 - b^2}.$$

Quindi

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{cases} r/a^2 & r < a \\ 1/r & a < r < b \\ f/r & b < r < b' \\ 0 & r > b' \end{cases}.$$



Assumendo che il cavo abbia lunghezza ℓ , il flusso del campo magnetico attraverso un circuito di lati ℓ e $b - a$ al suo interno vale

$$\Phi_B = \ell \int_a^b dr B_\theta = LI, \quad L = \frac{\mu_0 \ell \ln b/a}{2\pi}.$$

Esercizio 10.4: Forza tra due fili carichi

Due fili rettilinei posti a distanza r hanno densità di carica uniforme λ e sono in moto con velocità costante v lungo i propri assi. Calcolare la forza elettrica più magnetica per unità di lunghezza. Chi vince?

✎Soluzione: Nel seguito considereremo anche la più complicata forza fra due particelle con velocità v , trovando un risultato simile.

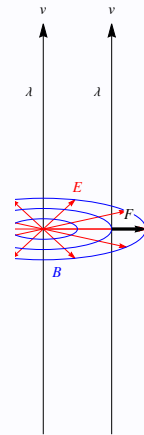
Il moto di ciascun filo produce una corrente $I = \lambda v$. Quindi ciascun filo produce:

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

La forza elettrica è repulsiva e quella magnetica attrattiva. La forza per unità di lunghezza è finita e vale

$$\frac{dF}{dz} = \lambda(E_r - vB_\theta) = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}.$$

Il sistema calcolato è equivalente a due fili fermi, visti da un sistema di riferimento in moto con velocità v . Questo risultato non è compatibile con la relatività Galileiana, secondo cui la forza non dipende dal sistema di riferimento. In relatività ci sono correzioni di ordine v^2/c^2 , che danno $F(v) = F(0)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Iniziamo quindi a capire che la forza magnetica è una correzione relativistica alla forza elettrica. La formula ottenuta è giusta a meno di altri effetti relativistici di ordine v^2/c^2 (quali la contrazione delle lunghezze).



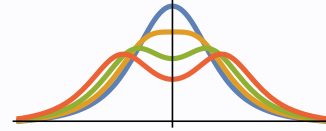
Esercizio 10.5: Due spire circolari

a) Calcolare il campo magnetico generato, lungo il loro asse z comune, da due spire circolari parallele di raggio a (una messa a $z = 0$, l'altra a $z = d$) percorse da una corrente I , ciascuna con N avvolgimenti. b) Per quale valore d il campo magnetico è quasi uniforme? c) Assumendo $I = 2\text{ A}$, stimare il numero N di avvolgimenti necessari affinché un elettrone con energia $K = 25\text{ keV}$ che entra lungo l'asse z venga deflesso di 45° .

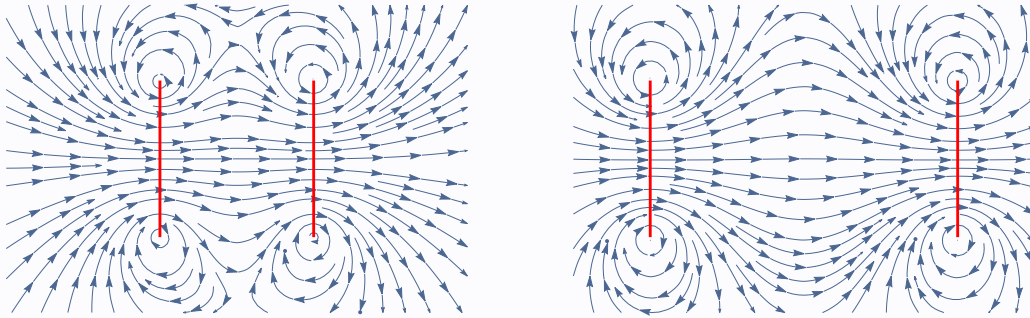
✎Soluzione:

a) Sommando i contributi di ciascuna spira si ottiene

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left[\frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (d - z)^2)^{3/2}} \right] =$$



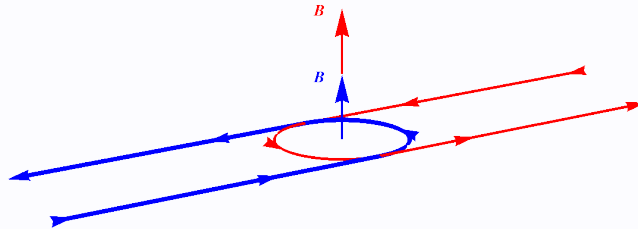
b) Il sistema è interessante in quanto produce un campo magnetico molto uniforme fra le due spire quando $d = a$, caso detto “spire di Helmholtz”. Infatti per tale valore si ha $d^2 B_z / dz^2 = 0$ nel centro a $z = d/2$. Il valore quasi costante è $B_z(z = d/2) = (4/5)^{3/2} \mu_0 N I / a$. È possibile confermarlo integrando numericamente il campo magnetico di Biot-Savart e disegnando le linee di campo:



c) Approssimiamo il campo magnetico come costante fra le spire, e zero fuori. L'elettrone percorre quindi un arco di circonferenza con raggio di curvatura $r = m_e v_e / eB$ e quindi viene deflesso di $\sin \theta = a/r$. Deve essere $\theta = 45^\circ$ per $v_e = \sqrt{2K/m_e}$ con $K = 25 \text{ keV}$. Servono quindi $N \approx 200$ avvolgimenti per spira.

Esercizio 10.6: Filo ad U

Calcolare il campo magnetico prodotto, nel centro del semicerchio, da un filo percorso da una corrente I che forma una U di raggio a .



✚Soluzione: Il campo magnetico prodotto da un mezzo filo o da un mezza circonferenza è più complicato del campo magnetico prodotto da un filo o da un cerchio. Tenendo conto che il campo magnetico è uno pseudo-vettore, è possibile aggiungere alla sorgente (il filo ad U) la sua immagine riflessa rispetto al punto in cui si calcola il campo magnetico: i campi magnetici si sommano, mentre le sorgenti formano due fili e una circonferenza. Il campo magnetico prodotto dal solo filo ad U è quindi la metà di quello prodotto dal sistema più semplice:

$$B_z = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I}{2a} \right].$$

Esercizio 10.7: Solenoide rettilineo infinito

Calcolare il campo magnetico generato dentro un solenoide rettilineo infinito con n spire per unità di lunghezza percorse da corrente I .

✚Soluzione: Nel limite ideale di solenoide lungo, il campo elettrico esterno è trascurabile. Dentro \mathbf{B} è costante ed orientato come il solenoide. La legge di Ampere, applicata ad un circuito immaginario rettangolare di altezza h arbitraria e che entra per una lunghezza arbitraria nel solenoide, fornisce $hB = \mu_0 I_{\text{conc}} = \mu_0 n I$ e quindi $B = \mu_0 n I$.

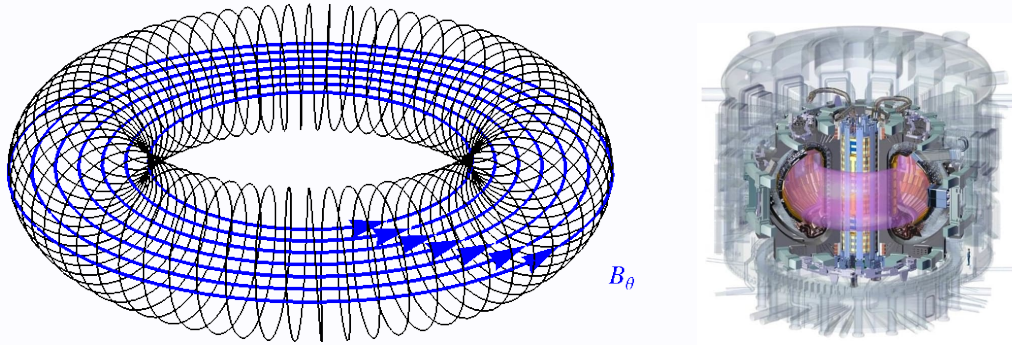


Figura 10.1: Solenoide toroidale, e sua realizzazione nell'esperimento ITER che prova a realizzare la fusione nucleare.

Esercizio 10.8: Solenoide rettilineo finito

Un solenoide rettilineo semi-infinito è costituito da n spire per unità di lunghezza percorse da corrente I , aventi come asse l'asse z e presenti per $z < 0$. a) Calcolare il campo magnetico $B_z(z)$ lungo l'asse z . Usando considerazioni di simmetria mostrare che: b) Il campo magnetico sull'imboccatura vale $B_z(0) = \frac{1}{2}\mu_0 nI$. c) La linea di campo di \mathbf{B} che sfiora il bordo esce perpendicolare al solenoide. d) La linea di campo di \mathbf{B} che sfiora il bordo, molto dentro il solenoide raggiunge una distanza limite $a/\sqrt{2}$ dal centro.

➤ Soluzione:

- a) Usando la forza bruta, si calcola il campo magnetico lungo l'asse z integrando i campi prodotti dalle singole spire a $z' < 0$:

$$B_z(z) = \int_{-\infty}^0 n dz' \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \mu_0 nI \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right).$$

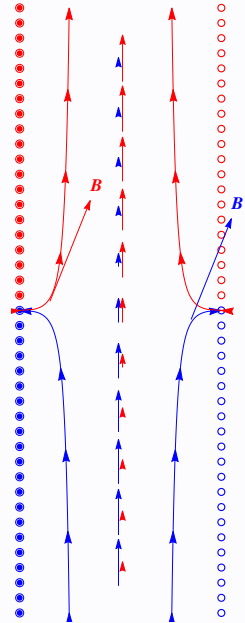
Quindi $B_z = \mu_0 nI$ nell'interno del solenoide per $z \ll -a$, $B_z = \frac{1}{2}\mu_0 nI$ sul bordo, e decresce gradualmente fuori.

- b) Vedendo un solenoide infinito come due solenoidi semi-infiniti, il principio di sovrapposizione ed il fatto che \mathbf{B} è un pseudo-vettore consente di dire che $B_z(z) + B_z(-z) = \mu_0 nI$ e quindi che $B_z(0) = \frac{1}{2}\mu_0 nI$.
- c) Il campo magnetico vale $B_z = 0$ fuori da un solenoide infinito: vedendolo come sovrapposizione di due mezzi solenoidi (uno sopra ed uno sotto), le due metà sono uno il coniugato di parità dell'altra, e il campo generato è la somma di quello generato dalle due metà. I due contributi sono legati da $\mathbf{B}^{\text{sopra}}(\mathbf{r}) = +\mathbf{B}^{\text{sotto}}(-\mathbf{r})$ in quanto le due metà sono una il coniugato di parità dell'altra, e sotto parità $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ il campo magnetico trasforma come un pseudo-vettore. In sostanza questo significa che sono uguali i due campi magnetici disegnati in figura. Combinando la parità con una rotazione di 180° attorno all'asse z (altra simmetria del problema) si ottiene la riflessione attorno al piano xy (quindi $x \rightarrow x$, $y \rightarrow y$, $z \rightarrow -z$) che implica

$$\mathbf{B}_z^{\text{sopra}}(x, y, z) = \mathbf{B}_z^{\text{sotto}}(x, y, -z), \quad \mathbf{B}_{x,y}^{\text{sopra}}(x, y, z) = -\mathbf{B}_{x,y}^{\text{sotto}}(x, y, -z).$$

Mettendo ora $z = 0$ si osserva che le componenti B_z si sommano, quindi valgono entrambe zero al bordo del solenoide dove il campo è nullo. Le componenti orizzontali $B_{x,y}$ si cancellano, quindi possono essere diverse da zero.

- d) Infatti è costante il flusso del campo magnetico compreso fra linee di flusso, e le linee che, nel mezzo solenoide, terminano sul bordo devono contenere metà del flusso. Quindi, nell'interno profondo in cui l'altro mezzo contribuisce in maniera trascurabile ed il campo magnetico è costante, devono arrivare a distanza $a/\sqrt{2}$ dall'asse.



Esercizio 10.9: Solenoide toroidale

Calcolare il campo magnetico generato dentro il solenoide toroidale con N spire di figura fig. 10.1.

✚Soluzione: Per motivi di simmetria \mathbf{B} ha solo componente B_θ . Quindi, per la legge di Ampere, fuori $\mathbf{B} = 0$ e dentro $2\pi r B_\theta = \mu_0 N I$ dove N è il numero totale di spire. Quindi $B_\theta(r) = \mu_0 N I / 2\pi r$ è più intenso nella zona interna.

Esercizio 10.10: Cilindro carico ruotante

Un cilindro omogeneo conduttrice di massa M e raggio R contiene una carica Q , distribuita uniformemente sulla superficie. Il cilindro ruota con velocità angolare ω . Calcolare il momento magnetico, il momento angolare ed il fattore giro-magnetico.

✚Soluzione: Ricordiamo che il momento magnetico è definito come

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n} \int \pi r^2 dI = \frac{\omega}{2\pi} \int \pi r^2 dq = \frac{\omega}{2} \int r^2 dq.$$

Il momento angolare dato da $\mathbf{L} = \mathcal{I}\boldsymbol{\omega}$ in termini del momento di inerzia $\mathcal{I} = \int r^2 dm$ (da non confondere con I corrente) attorno all'asse di rotazione. Il fattore giro-magnetico g è definito da

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{Q}{2M} \mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{\int r^2 dq / Q}{\int r^2 dm / M}.$$

Quindi il fattore giro-magnetico è il rapporto fra il “momento di inerzia della carica” ed il “momento di inerzia della massa”. Un oggetto con carica e massa distribuiti in maniera uguale ha $g = 1$.

Nel nostro caso $\mu = \pi R^2 I$ e $\mathcal{I} = \frac{1}{2} M R^2$, quindi $g = 2$. L'elettone ha $g_e \approx 2$.

Esercizio 10.11: Sfera carica ruotante

Una sfera omogenea conduttrice di massa M e raggio R contiene una carica Q , distribuita uniformemente sulla superficie. La sfera ruota con velocità angolare ω . Calcolare il momento magnetico, il momento angolare ed il fattore giro-magnetico.

✚Soluzione: Il “momento di inerzia della massa” vale $\frac{2}{5} M R^2$ per una sfera piena e $\frac{2}{3} M R^2$ per una sfera cava. Quindi il “momento di inerzia della carica” vale $\frac{2}{3} Q R^2$ per carica sulla superficie di una sfera. Il fattore giro-magnetico vale $g = 5/3$: esso è > 1 segnalando che la carica gira, in media, più esternamente della massa.

Calcoliamo il momento magnetico in maniera esplicita. Definiamo θ l'angolo rispetto al polo nord: quindi $0 \leq \theta \leq \pi$. Un anello compreso fra θ e $\theta + d\theta$ ha raggio $r = R \sin \theta$, superficie $dS = 2\pi r \cdot R d\theta$ e carica $dQ = Q dS/S$ e ruota con velocità $v = \omega r$. Quindi trasporta una corrente

$$dI = \frac{dQ v}{2\pi r} = \frac{Q\omega}{4\pi} \sin \theta d\theta.$$

Il momento magnetico vale

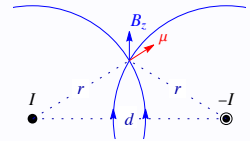
$$\boldsymbol{\mu} = \int \pi r^2 dI = \frac{Q\omega R^2}{4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{QR^2}{3} \omega.$$

Moto in campo magnetico esterno

Una carica q puntiforme in campi elettrici e magnetici è soggetta alla forza di Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Esercizio 11.1: Ago magnetico

Un ago di momento magnetico μ è situato sopra la congiungente due fili paralleli orizzontali a distanza d . I due fili sono percorsi da correnti I e $-I$. La distanza fra l'ago e ciascun filo è r . L'ago può ruotare nel un piano ortogonali ai fili, con momento di inerzia I . Calcolare la posizione di equilibrio ed il periodo delle piccole oscillazioni.



Soluzione: Il campo magnetico nella posizione dell'ago vale

$$B_z = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{d}{2r}.$$

Il momento delle forze $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ vale $M_z = \mu B_z \sin \theta$ dove θ è l'angolo fra $\boldsymbol{\mu}$ e \mathbf{B} . L'equazione del moto dell'ago è quindi $I\ddot{\theta} = M_z = \mu B_z \sin \theta$. Il punto di equilibrio stabile è $\theta = 0$, con dipolo allineato al campo magnetico. Il periodo delle piccole oscillazioni vale $T = 2\pi \sqrt{I/\mu|B_z|}$.

Esercizio 11.2: Cilindro su piano inclinato

Un cilindro di raggio r e lunghezza ℓ , appoggiato orizzontalmente su di un piano inclinato di angolo α , è percorso da una corrente I uniforme lungo la sua lunghezza. È presente un campo magnetico verticale. Per quale valore di I il cilindro rimane fermo se a) l'attrito tra piano e cilindro è trascurabile b) l'attrito è tale che il cilindro può rotolare senza strisciare.

Soluzione: Il campo magnetico produce una forza orizzontale di modulo $F_B = \ell BI$, diretta verso il piano inclinato per segno opportuno di I .

- Si ha equilibrio se la componente $F = F_g + F_B$ lungo il piano inclinato della forza totale vale zero. La forza magnetica produce $F_B = \ell BI \cos \alpha$. La gravità produce $F_g = -mg \cos \alpha$. Sono uguali ed opposte se $I = mg \tan \alpha / \ell B$.
- Si ha equilibrio se il momento $M = M_g + M_B$ delle forze rispetto all'asse di appoggio vale zero. La gravità produce $M_g = -mgr \sin \alpha$. La forza magnetica produce

$$M_B = \int \Delta y \cdot dF = \int_0^{2\pi} r(\cos \alpha + \sin \theta) \ell BI \frac{d\theta}{2\pi} = I \ell B r \cos \alpha.$$

Quindi serve la stessa I di prima.

Esercizio 11.3: Levitazione magnetica

Una spira circolare di raggio a percorsa da corrente I ha l'asse parallelo all'asse z . È presente un campo magnetico di cui è nota la componente $B_z(z)$. a) Calcolare la forza magnetica sulla spira approssimando la spira come dipolo magnetico. b) Ricalcolare la stessa forza come forza sulla spira. c) In che modo questa forza consente di sospendere un dipolo magnetico in aria?

✚ **Soluzione:**

- a) Il momento di dipolo magnetico vale $\boldsymbol{\mu} = \pi a^2 I \hat{\mathbf{z}}$. L'associata energia magnetica $U_{\text{mag}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B_z$ produce la forza magnetica $\mathbf{F}_{\text{mag}} = -\nabla U_{\text{mag}} = \mu \partial B_z / \partial z$.
- b) Pensando in termini di spira, sembra tuttavia non esserci nessuna forza, in quanto inserendo B_z in $\mathbf{F} = I \oint d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$ si ottiene solo una forza F_r radiale che si media a zero sulla circonferenza. Il punto non ovvio è che un campo magnetico $B_z(z)$ non soddisfa a $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e quindi è necessariamente accompagnato da altre componenti, calcolabili utilizzando la divergenza in coordinate cilindriche

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} = 0, \quad \Rightarrow \quad B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

o imponendo che il flusso valga zero lungo un cilindretto di raggio r ed altezza dz :

$$\Phi_B = \pi r^2 [B_z(z + dz) - B_z(z)] + 2\pi r dz B_r(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

A livello grafico, il campo magnetico deve 'incurvarsi' verso l'esterno. La componente B_r genera la forza magnetica

$$\mathbf{F} = I \oint d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = -I 2\pi a B_r(a) = I \pi a^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

- c) La forza magnetica è diretta verso B intensi se $\boldsymbol{\mu}$ è parallelo a \mathbf{B} (configurazione di minima energia rispetto alle rotazioni), o verso B deboli se $\boldsymbol{\mu}$ è anti-parallelo a \mathbf{B} (configurazione di massima energia rispetto alle rotazioni, quindi la spira tende a ribaltarsi). È difficile ottenere un equilibrio stabile in ogni direzione fra forza magnetica e gravitazionale ('teorema di Earnshaw'): nella configurazione parallela

Un modo possibile è dare alla spira un momento angolare la cui conservazione la mantiene anti-parallela al campo magnetico: in questo modo la spira è spinta verso l'altro quando è sopra una sorgente di campi magnetici (ad esempio un'altra spira).

Esercizio 11.4: Carica in B costante

Studiare il moto di una particella di carica elettrica q in un campo magnetico B costante.

✚ **Soluzione:** Risolvendo l'equazione del moto

$$m \dot{\mathbf{v}} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_B \quad \boldsymbol{\omega}_B = \frac{q \mathbf{B}}{m}$$

si trova che \mathbf{v} ha una componente costante \mathbf{v}_{\parallel} parallela a \mathbf{B} , ed una componente \mathbf{v}_{\perp} ortogonale a B che ruota con frequenza ω_B . Quindi fa una spirale. Chiamando a il raggio dell'orbita, si ha $v_{\perp} = a \omega_B$ i.e.

$$p_{\perp} = a q B = \frac{c}{\text{m/s}} \frac{\text{eV}}{c} \frac{a}{\text{m}} \frac{q}{e} \frac{B}{\text{Tesla}} = 300 \frac{\text{MeV}}{c} \frac{a}{\text{m}} \frac{q}{e} \frac{B}{\text{Tesla}}$$

Avendo scritto questa equazione in termini dell'impulso p (invece che della velocità v), essa rimane valida anche per particelle relativistiche, per le quali $p = mv\gamma = E/v$; nel limite ultra-relativistico si ha $p \simeq E/c$, cioè l'impulso diventa proporzionale all'energia della particella. In fisica delle particelle si usano unità naturali ($c = 1$) ed impulso, massa ed energia sono tutte misurate in eV o multipli (keV, MeV, GeV, TeV, ...).

Questa equazione dice la massima energia che un acceleratore circolare può raggiungere: tenendo conto che il massimo campo magnetico che si riesce a fare è circa $B \approx 10$ Tesla, e che per motivi economici il massimo raggio di un collider è $a \approx 5$ km, si ottiene $E \approx p_{\perp} \approx 15$ TeV. (Collider in cui vengono fatti girare elettroni, invece che protoni, sono più fortemente limitati dall'irraggiamento, come discusso nell'esercizio 21.20.)

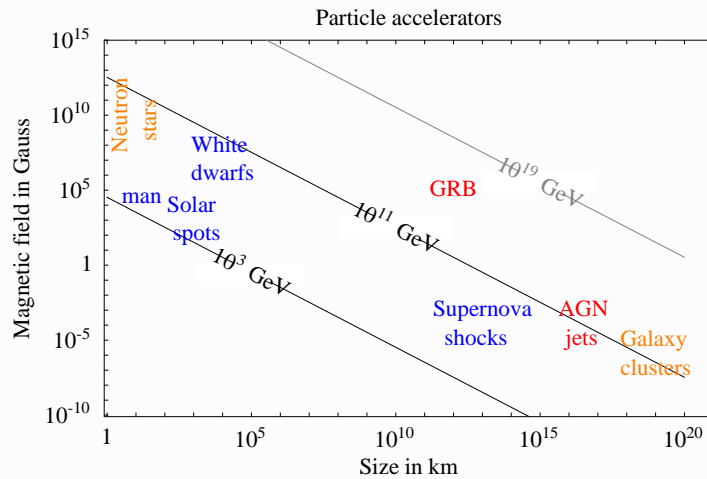


Figura 11.1: Massima energia raggiungibile da acceleratori di particelle in funzione della loro dimensione e del loro campo magnetico.

La figura 11.1 mostra la massima energia a cui vari oggetti (se fossero 100% efficienti) potrebbero accelerare particelle. Sono stati osservati raggi cosmici fino a circa 10^{11} GeV (probabilmente sono protoni, o forse nuclei) e gli unici candidati plausibili sono Gamma Ray Bursts oppure Active Galactic Nuclei.

.....

Un televisore ha dimensioni $a \sim 0.1\text{m}$ ed usa elettroni accelerati per una differenza di potenziale di 1000 V, che quindi acquistano energia cinetica $K \sim \text{keV}$ e impulso $p = \sqrt{2mK} = 0.03 \text{ MeV}/c$. Il campo magnetico usato per defletterli sul punto giusto dello schermo vale quindi

$$B = 1 \text{ Tesla} \frac{e}{q} \frac{m}{a} \frac{p}{300 \text{ MeV}/c} \approx 10^{-3} \text{ Tesla}$$

p è stato scelto abbastanza alto in modo che B sia abbastanza maggiore del campo magnetico terrestre ($B \sim 0.5 \cdot 10^{-4}$ Tesla), che altrimenti distorcerebbe le immagini.

.....

Nei problemi successivi studieremo moti in campi magnetici più generali, che tendono a dare moti complicati: le particelle spiraleggiano attorno a qualche traiettoria media. La cosa interessante da calcolare è la traiettoria media, cioè la ‘velocità di drift’. Da questo punto di vista il moto in un campo magnetico costante è quindi semplicemente un moto a velocità costante lungo le linee del campo, a meno di girellamenti.

Esercizio 11.5: Campo magnetico galattico

La Via Lattea ha dimensione $d \sim 10 \text{ kpc}$ e contiene un campo magnetico galattico in direzione casuale e materia: principalmente atomi di idrogeno, con densità $n \approx 1/\text{cm}^3$ con velocità $v \sim \text{km/sec}$. a) Stimare il campo magnetico galattico, sapendo che l’energia magnetica è simile all’energia cinetica delle particelle di materia. b) Che energia deve avere un protone affinché arrivi deflesso di poco? c) Che moto fanno i protoni di energia minore?

➤ Soluzione:

a) Essendo $nm_p v^2/2 \sim B^2/2\mu_0$ si ha $B \sim 10^{-10}$ Tesla.

b) Essendo B debole le particelle cariche compiono circonferenze con raggio $r = p/eB$ grosso, che ha comunque effetti importanti perchè anche la galassia ha una grossa dimensione $d \sim 10 \text{ kpc} = 3 \cdot 10^{17} \text{ km}$: un protone di impulso p viene deflesso di un angolo

$$\theta \approx \frac{d}{r} = \frac{deB}{p} \simeq \frac{d}{1 \text{ Mpc}} \frac{B}{10^{-9} \text{ G}} \frac{3 \cdot 10^{19} \text{ eV}}{E}$$

Quindi si può fare astronomia solo con i rarissimi protoni di enorme energia $E_p \gtrsim 10^{20}$ eV. Quelli con energia minore spiraleggiano nella galassia e la loro direzione di arrivo non dà nessuna informazione sulla sorgente che li ha generati.

- c) Ha interesse sapere quanto camminano raggi cosmici di velocità v in un tempo T (ad esempio un Myr). A grandi energie tali che B può essere trascurato si ha $D = vT$. A basse energie si ha un random walk con un passo di dimensione $R = p/qB$ ogni $\Delta t \sim R/v$. Dopo $N = t/\Delta t$ di questi passi si ha una distribuzione casuale di varianza

$$\sigma^2 \sim R^2 N \equiv 6Kt, \quad K = R^2/6\Delta t \sim vR$$

Questo moto può venire descritto tramite l'equazione di diffusione $\dot{n} = K\nabla^2 n$ dove K è detto coefficiente di diffusione (il fattore 6 nasce dalla soluzione in 3 dimensioni). Particelle relativistiche con $v = c$ si diffondono con $K = K_0(E/\text{GeV})^1$ con $K_0 = 0.0033 \text{ kpc}^2/\text{Myr}$ per un campo magnetico galattico $B = 10^{-10} \text{ G}$.

.....

Per motivi completamente diversi, anche l'astronomia con neutroni, come l'astronomia con protoni, è possibile solo a energie $E_n \gtrsim 10^{20}$ eV. Infatti il neutrone decade dopo una distanza $r = c\tau_n\gamma$ (la vita media a riposo vale $\tau_n = 886 \text{ sec}$), maggiore alla dimensione d della galassia se $\gamma \gtrsim 10^{11}$ e cioè a grosse energie $E = m_n\gamma c^2$.

Esercizio 11.6: Ottica geometrica matriciale

Come preparazione per i 2 esercizi successivi, viene riassunto l'utilizzo delle matrici come formalismo conveniente per problemi di ottica geometrica.

➤Soluzione: L'ottica geometrica studia come si propagano raggi di luce. Un raggio che si propaga lungo l'“asse ottico” z nel piano xz è descritto da due quantità: la sua posizione $x(z)$ e la sua inclinazione $x'(z)$. È utile comporre in $X \equiv (x, x')$.

- La matrice che descrive l'attraversamento di una distanza ℓ vuota è

$$\begin{pmatrix} x(\ell) \\ x'(\ell) \end{pmatrix} = M(\ell) \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \quad M(\ell) = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice che descrive l'attraversamento di una lente sottile di focale f è

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{dopo}} = M_{\text{lente}} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{prima}} \quad M_{\text{lente}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero una lente cambia solo l'inclinazione del raggio, che varia di una quantità costante, chiamata ‘distanza focale inversa’ $1/f$.

Per vedere che questo descrive davvero una lente, consideriamo ad esempio il sistema in fig. 11.2. Ricordando che occorre moltiplicare le matrici in ordine inverso (se $X_4 = M_{34}X_3$ e $X_3 = M_{23}X_2$ e $X_2 = M_{12}X_1$, allora $X_4 = M_{34}M_{23}M_{12}$, in cui la prima matrice M_{34} è quella che corrisponde all'ultimo passo), la matrice di propagazione da 1 a 4 è

$$M_{14} = M(b) \cdot M_{\text{lente}} \cdot M(a) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - b/f & a + b - ab/f \\ -1/f & 1 - a/f \end{pmatrix}.$$

I raggi disegnati convergono in un punto unico se l'elemento 12 della matrice M_{14} del sistema vale zero, cioè se $1/a + 1/b = 1/f$. Quando questa relazione è soddisfatta si ha $x_C = (1 - b/f)x_A$: quindi $1 - b/f$ è il fattore di ingrandimento della lente. Se esso è negativo, l'immagine viene rovesciata. Quindi l'ottica matriciale riproduce le formule noti per una lente. L'ottica matriciale è utile perchè consente di sistematicamente calcolare sistemi arbitrari di lenti: basta moltiplicare le matrici delle singole componenti.

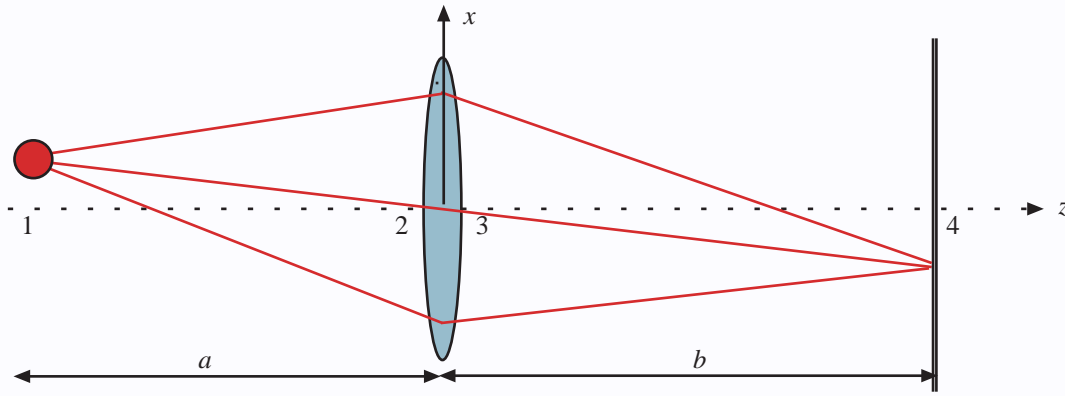


Figura 11.2: Lente convergente.

Esercizio 11.7: Carica in quadrupolo magnetico

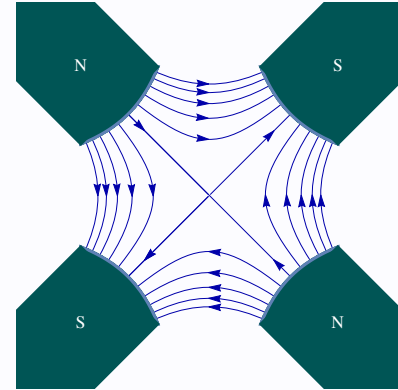
a) Come è possibile generare in pratica un campo magnetico ‘quadrupolare’, $\mathbf{B} = \nabla V_m$ con $V_m = bxy$? b) Studiare il moto di una carica q con velocità v quasi parallela all’asse z in questo campo magnetico, assunto essere presente per $0 < z < \ell$.

✚**Soluzione:** Innanzitutto vediamo che questo campo magnetico

$$B_x = by \quad B_y = bx, \quad B_z = 0$$

soddisfa alle equazioni di Maxwell nel vuoto. Avendo scritto \mathbf{B} come gradiente di un ‘potenziale magnetico’ V_m , la IV equazione $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ è automaticamente soddisfatta. La III equazione $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ è soddisfatta in quanto $\nabla^2 V_m = 0$.

a) In pratica, \mathbf{B} è ottenibile nel seguente modo. Il ferro ha $\mu_r \sim 1000 \gg 1$ e quindi le linee del campo \mathbf{B} escono circa perpendicolari al materiale. Occorre quindi sagomare il ferro in modo che la zona da cui esce \mathbf{B} segua la forma delle linee equipotenziali della funzione $V_m \propto xy$. Può essere visto come coppie di dipoli magnetici opposti, da cui il termine quadrupolare.



b) Siccome la carica q si muove con velocità v a piccolo angolo rispetto all’asse z , la sua equazione del moto è

$$m\ddot{x} = -qvbx, \quad m\ddot{y} = +qvby.$$

Possiamo approssimare $d/dt = v d/dz$ ottenendo

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -k^2x, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = +k^2y \quad \text{dove} \quad k^2 = \frac{qb}{mv}$$

la cui soluzione è

$$x(z) = x_0 \cos kz + x'_0 \frac{1}{k} \sin kz, \quad y(z) = y_0 \cosh kz + y'_0 \frac{1}{k} \sinh kz.$$

Quindi un fascio di particelle viene focalizzato lungo l’asse x e de-focalizzato lungo l’asse y .

Il termine ‘focalizzato’ è appropriato in quanto il sistema si comporta come una lente. I fasci che entrano ‘dritti’, ovvero con $x'_0 = 0$ e x_0 generico, escono dal campo magnetico a $z = \ell$ con

$$x(\ell) = x_0 \cos k\ell, \quad x'(\ell) = -x_0 k \sin k\ell \equiv -x_0/f$$

e proseguono dritti nel vuoto, raggiungendo quindi l’asse $x(z) = 0$ a $z = \ell + \tilde{f}$ con $\tilde{f} = \cot(k\ell)/k$. Il campo magnetico ha quindi agito come una lente di distanza focale $f = 1/k \sin k\ell$. (La piccola differenza fra f e \tilde{f} è questione di definizione dovuta all’includere il piccolo spessore finito $\ell \ll f$ della lente: il piano principale sta a distanza $-(1 - \cos k\ell)/k \sin k\ell$ dall’uscita del quadrupolo).

Esercizio 11.8: Carica in quadrupoli magnetici

Christofilos (1950) e Courant et al. (1952) osservarono che un fascio di particelle può venire focalizzato facendogli attraversare due quadrupoli magnetici, ruotati di 90° l'uno rispetto all'altro. Mostrare come questo è possibile.

▣**Soluzione:** Abbiamo visto che un quadrupolo magnetico focalizza un fascio lungo una direzione ma defocalizza lungo l'altra. Il segno diverso è sgradito ma inevitabile, perchè dovuto a come deve essere fatto un campo magnetico nel vuoto. In molti esperimenti è invece necessario focalizzare un fascio lungo entrambi gli assi, in modo da concentrarlo. Infatti, incrociando due fasci, il numero di urti fra particelle aumenta se i fasci sono stretti, analogamente a come il numero di incidenti aumenta quando una strada diventa più stretta. Inoltre, acceleratori circolari fanno fare tanti giri alle particelle tramite un campo magnetico costante ma non perfettamente costante, per cui è necessario mantenerle su di una traiettoria circolare compensando per le imperfezioni nel campo magnetico. Si riesce a focalizzare in entrambe le direzioni mettendo due quadrupoli magnetici ruotati di 90° uno dopo l'altro.

Per capirlo, conviene riscrivere l'effetto di un singolo quadrupolo usando la formulazione matriciale dell'ottica geometrica, riassunta nell'esercizio 11.6. In tale formulazione si studia l'evoluzione lungo l'“asse ottico” z di (x, x') e di (y, y') . Cioè x è la distanza dall'asse ottico, ed x' è l'inclinazione rispetto all'asse ottico di un raggio. Nel caso dell'ottica si studiando raggi di luce, qui fasci di particelle. Attraversando un magnete quadrupolare di lunghezza ℓ si ha

$$\begin{pmatrix} x(\ell) \\ x'(\ell) \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y(\ell) \\ y'(\ell) \end{pmatrix} = M_y \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$$

dove le matrici di trasferimento sono

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos k\ell & \sin(k\ell)/k \\ -k \sin k\ell & \cos k\ell \end{pmatrix} \stackrel{\ell \ll 1/k}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -k^2\ell & 1 \end{pmatrix}, \quad M_y = \begin{pmatrix} \cosh k\ell & \sinh(k\ell)/k \\ k \sinh k\ell & \cosh k\ell \end{pmatrix} \stackrel{\ell \ll 1/k}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ k^2\ell & 1 \end{pmatrix}$$

La formulazione matriciale dell'ottica è conveniente perchè per studiare l'effetto combinato di sistemi diversi basta moltiplicare le loro matrici. Assumendo per semplicità il limite di lente sottile $\ell \ll d, 1/k$, le matrici di trasferimento per raggi inclinati lungo x e lungo y attraverso due quadrupoli ruotati di 90° a distanza d fra loro sono rispettivamente date dai prodotti $M_x \cdot M(d) \cdot M_y$ e $M_y \cdot M(d) \cdot M_x$, che valgono

$$\begin{pmatrix} 1 & \ell \sim 0 \\ \pm k^2\ell & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \ell \sim 0 \\ \mp k^2\ell & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & d \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha focalizzazione in quanto

$$-\frac{1}{f} = \pm k^2\ell \mp k^2\ell + (\pm k^2\ell)(\mp k^2\ell)d = -\ell^2 k^4 d$$

è negativo. A livello intuitivo focalizza in quanto:

- una particella che trova prima il focusing viene avvicinata all'asse, e quindi il successivo defocusing è più debole;
- una particella che trova prima il defocusing viene allontanata all'asse, e quindi il successivo focusing è più forte.

Ripetendo il conto senza assumere $d \gg \ell$ si troverebbe

$$(M_x \cdot M(d) \cdot M_y)_{21} \simeq -k^4\ell^2(3d + 2\ell)/3 \quad \text{e} \quad (M_y \cdot M(d) \cdot M_x)_{21} \simeq -k^4\ell^2(\ell - 3d)/3$$

ovvero che serve $d > \ell/3$, e che la lente è astigmatica ($f_x \neq f_y$).

Vediamo a livello quantitativo. Il massimo campo magnetico che si riesce a fare vale $B \sim I\mu/L \sim 10$ Tesla. Quindi $1/k = \sqrt{p/eb} \sim 10$ m assumendo un ‘quadrupole field gradient’ $b \sim 250$ Tesla/m e per $p \sim 10$ TeV/c, che è circa l'energia delle particelle a LHC. La lunghezza focale vale $f = 1/(d\ell^2 k^4)$, cioè decine di metri: una cosa ragionevole.

Esercizio 11.9: Paradosso paramagnetico

La seguente considerazione sembra indicare che un gas di elettroni liberi è molto paramagnetico: “elettroni in un campo magnetico B iniziano a girare lungo circonferenze di raggio $r = m_e v_\perp / eB$ e quindi acquistano un dipolo magnetico $\mu = evr = m_e v^2 / B$ e quindi producono $\mathbf{M} = N_e \boldsymbol{\mu}$ i.e. $\chi_m = (N_e m_e v^2) / (\mu B^2)$.” Capire come mai è completamente sbagliato.

✚**Soluzione:** È chiaro che il risultato non ha senso: l’effetto non dipende dalla carica dell’elettrone (mentre se la carica fosse zero non ci dovrebbe essere nessun effetto) e diventa infinito quando $B \rightarrow 0$ (mentre senza campo magnetico esterno non ci dovrebbe essere nessun effetto).

È meno chiaro capire dove il ragionamento sballa. Il motivo è che abbiamo trascurato gli effetti al bordo; di solito lo si fa senza preoccuparsi troppo, ma in questo caso per $B \rightarrow 0$ o $e \rightarrow 0$ il raggio delle orbite diventa grosso, e quindi gli effetti al bordo diventano cruciali.

Fare il conto giusto è un po’ complicato: uno deve prendere un volume finito e verificare che le orbite completamente esterne non contano nulla, le orbite completamente interne generano l’effetto discusso sopra, le orbite che intersecano il bordo cancellano l’effetto. Questo non dovrebbe essere sorprendente, visto che ad ogni punto la media delle velocità \mathbf{v} degli elettroni che arrivano è zero.

Il libro di Peierls “Surprises in Theoretical Physics” mostra una spiegazione geometrica, come evitare di calcolare effetti che si cancellano, e l’estensione al caso quantistico.

Esercizio 11.10: Carica in solenoide

Un solenoide infinito di raggio $a = 10$ cm con n spire per unità di lunghezza è percorso da una corrente $I = 1$ A.

a) Quale valore di n è necessario affinché il campo magnetico valga $B = 0.1$ T?

Una sorgente puntiforme radioattiva posta sull’asse del solenoide emette isotropicamente protoni di carica e , massa m_p ed energia cinetica K .

b) Per quali valori di $K < K_{\text{crit}}$ nessun protone emesso dalla sorgente colpisce la superficie del solenoide? Si dia il valore numerico di K_{crit} in eV.

c) Sia ora $K = 2K_{\text{crit}}$ e sia θ l’angolo compreso fra la direzione di emissione di ciascuna particella e la direzione del campo magnetico all’interno del solenoide. Per quali valori dell’angolo di θ le particelle colpiscono la superficie del solenoide?

d) Si assuma ora che il solenoide sia immerso in un campo elettrico uniforme \mathbf{E} parallelo al suo asse e si risponda nuovamente ai punti a) e b).

✚**Soluzione:**

a) Essendo $B = \mu_0 n I$ serve $n \approx 800/\text{cm}$.

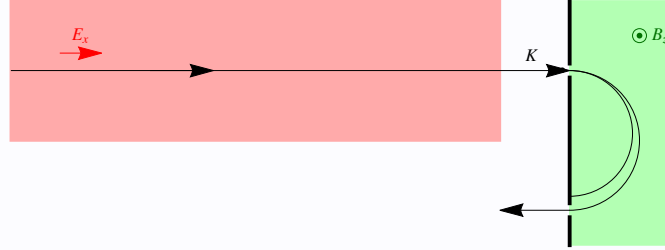
b) I protoni percorrono eliche, con asse parallelo o quello del solenoide, di passo uniforme e raggio $r = \sqrt{2K/m_p \omega^2} \sin \theta$, dove $\omega = eB/m_p \approx 10^7$ Hz. Poiché le eliche passano per l’asse del solenoide, i protoni non colpiscono la sua superficie se $r < a/2$, da cui $K < K_{\text{crit}} = m_p (\omega a)^2 / 8 \approx 1.2$ keV.

c) I raggi delle eliche sono ora $r = (a/\sqrt{2}) \sin \theta$: i protoni con $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ colpiscono la superficie del solenoide.

d) La presenza del campo elettrico modifica soltanto il moto lungo l’asse: il passo delle eliche non è più costante, ma il loro raggio in funzione di θ rimane invariato. Quindi le risposte alle domande precedenti rimangono invariate.

Esercizio 11.11: Spettrometro

Il seguente metodo consente di separare gli isotopi dell'Uranio ^{238}U (abbondanza del 99.3% in natura) da ^{235}U (abbondanza dello 0.7% e fissionabile). Atomi di uranio ionizzati una volta (carica $+e$) e con energia piccola attraversano una differenza di potenziale di 5 kV acquistando energia 5 keV. Il fascio monocromatico viene poi inviato perpendicolarmente in una regione in cui è presente un campo magnetico B costante perpendicolare al piano.



Ricordando che un nucleone pesa $m = 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg e che un atomo pesa circa $M_i = A_i m$, determinare:

- il valore del campo B tale che, dopo aver compiuto mezzo giro, i due isotopi sono separati di $d = 5$ mm;
- il tempo necessario a separare completamente 1 kg di uranio naturale se la corrente di ioni sulla fenditura è $I = 0.01$ A.

✚ **Soluzione:**

- Le velocità $v_{1,2}$ delle particelle sono $v_i = \sqrt{2K/M_i}$ ed i raggi di curvatura sono

$$r_i = \frac{M_i v_i}{eB} = \frac{\sqrt{2Km} A_i}{eB}.$$

La differenza tra i raggi di curvatura è:

$$\Delta r = r_2 - r_1 \simeq \sqrt{\frac{Km}{2A}} \frac{A_2 - A_1}{eB}$$

Per ottenere $d = 2\Delta r$ serve

$$B = \sqrt{\frac{2Km}{A}} \frac{A_2 - A_1}{de} = 0.4 \text{ T}.$$

- Un kg di ^{235}U contiene $N = N_A \cdot 1000/235 \approx 25 \cdot 10^{23}$ atomi. Il tempo necessario per separarli tutti è

$$\tau = \frac{Q}{I} = \frac{Ne}{0.01 \text{ A}} = 4 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 1 \text{ yr}.$$

Esercizio 11.12: Carica in B ed E costanti

Scrivere e risolvere le equazioni del moto di una particella di carica q e massa m in campi \mathbf{E} e \mathbf{B} costanti.

✚ **Soluzione:** Conviene lavorare in componenti. Senza perdita di generalità possiamo mettere l'asse z lungo \mathbf{B} e l'asse x ortogonale al piano \mathbf{E}, \mathbf{B} , ottenendo $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$ e $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$. Siccome i campi non dipendono da x, y, z è utile ottenere equazioni di 1o grado in termini delle velocità. Nel limite non relativistico si ha

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qv_y B_z \\ m\dot{v}_y = q(E_y - v_x B_z) \\ m\dot{v}_z = qE_z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x = +v_{\text{rot}} \cos(\omega_B t + \varphi) + E_y/B_z \\ v_y = -v_{\text{rot}} \sin(\omega_B t + \varphi) \\ v_z = v_z(0) + qE_z t/m \end{cases} \quad (11.1)$$

Le equazioni possono essere risolte in questo modo:

- Il moto lungo z (in generale, lungo \mathbf{B}) non si mescola con gli altri ed è uniformemente accelerato.

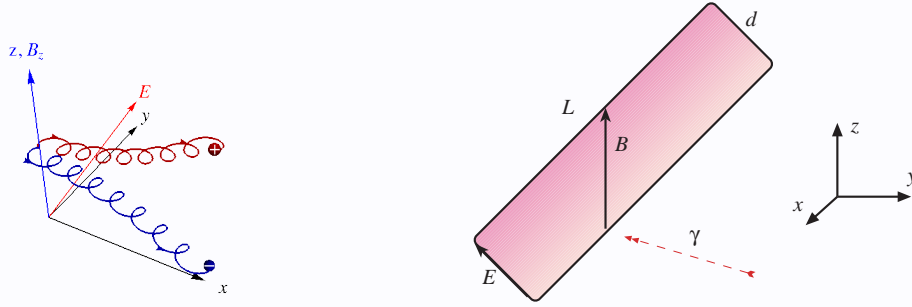


Figura 11.3: Fig. 11.3a: esempio di moto in E, B costanti di due particelle con carica opposta. Fig. 11.3b: fotomoltiplicatore in campo magnetico.

- Il moto lungo y può essere calcolato derivando rispetto al tempo l'equazione per v_y : $\ddot{v}_y = -q\dot{v}_x B_z/m = -\omega_B^2 v_y$ dove $\omega_B = qB_z/m$
- Derivando invece l'equazione per v_x si ottiene $\ddot{v}_x = q\dot{v}_y B_z/m = -\omega_B^2 (v_x - E_y/B_z)$ risolta aggiungendo un drift lungo x (in generale lungo $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$) con velocità costante E_y/B_z che non dipende da q .

La soluzione dipende dalla velocità iniziale, scritta in termini di tre costanti: $v_z(0)$, v_{rot} e la fase iniziale della rotazione φ . La carica compie l'usuale rotazione nel piano x, y ortogonale a \mathbf{B} con pulsazione ω_B che dipende da q .

Il moto combinato è illustrato in fig. 11.3a per cariche con segno opposto. Se particelle cariche entrano in una zona dove i campi elettromagnetici sono costanti ed hanno solo componenti E_y e B_z , quelle con $v_x = E_y/B_z$ viaggiano imperturbate. Sfruttando questo fenomeno si può ottenere un fascio mono-energetico (ad esempio utilizzabile nello spettrometro dell'esercizio precedente).

Il drift con velocità indipendente da q è dovuto ad un motivo interessante e generale. È possibile semplificare ulteriormente le equazioni e le soluzioni sfruttando, oltre alle rotazioni, una ulteriore simmetria: l'invarianza Galileiana. È possibile passare ad un nuovo sistema di riferimento S' dove \mathbf{E}' e \mathbf{B}' sono paralleli, avendo solo una componenti lungo z , tramite una trasformazione Galileiana $v_x = v'_x + E_y/B_z$ (in generale con un boost $\mathbf{B} \times \mathbf{E}/B^2$). In tale sistema S' la particella gira attorno al campo magnetico costante e accelera lungo E_z . Infatti l'equazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ rimane invariante sotto una trasformazione Galileiana ($\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ e $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, quindi $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$) se i campi elettromagnetici trasformano come

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} \quad (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}')$$

come segue immediatamente inserendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ in $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ e riscrivendola come $\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}')$.

Queste trasformazioni Galileiane sono corrette per $u \ll c$. In generale le equazioni di Maxwell sono Lorentz-invarianti mentre quella di Newton è Galileo-invariante. Einstein modificò $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ in modo da renderla relativisticamente invariante. Se $E/B \ll c$ questi termini mancanti relativistici sono numericamente trascurabili. Se $E/B > c$ vedremo che si può invece passare ad un sistema dove $B = 0$. Fisicamente, questo corrisponde ad avere un campo elettrico così forte che B non riesce ad incurvare l'orbita.

Esercizio 11.13: Fotomoltiplicatore in B, E

Studiare di quanto viene ridotta l'efficienza di un fotomoltiplicatore con $E = \text{kV/cm}$ se viene posto in un campo magnetico $B = \text{Tesla}$ a 45 gradi (figura 11.3).

➤Soluzione: Un fotomoltiplicatore è un aggeggio simile ad un televisore che accelera elettroni (generati da ionizzazioni γ, \dots) facendoli sbattere su di uno schermo in modo da renderli rilevabili. Nei rivelatori di particelle a volte si mettono campi magnetici, che incurvano le traiettorie di particelle ed anti-particelle in direzioni opposte e con raggi che dipendono dalla loro massa, in modo da poterle distinguere.

Il campo elettrico di un fotomoltiplicatore è orientato in modo da accelerare gli elettroni verso lo schermo. Ma se c'è un campo magnetico gli elettroni non vanno nella direzione desiderata. Capire dove vanno è un'applicazione dell'esercizio precedente. All'inizio gli elettroni hanno velocità zero, quindi nella (11.1) mettiamo

$v_{\text{rot}} = -E_y/B_z$. Una particella che parte da $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ segue il percorso

$$x = \frac{E_y}{B_z \omega_B} (t \omega_B - \sin t \omega_B), \quad y = \frac{E_y}{B_z \omega_B} (1 - \cos t \omega_B), \quad z = \frac{e E_z}{2 m_e} t^2.$$

Numericamente la frequenza ω_B ed il raggio di spiraleggiamento a valgono

$$\omega_B = \frac{eB}{m_e} = 1.7 \cdot 10^{11} \text{ Hz}, \quad v_{\text{rot}} = \frac{E_y}{B_z} = 7 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad a = \frac{v_{\text{rot}}}{\omega_B} = 4 \mu\text{m}$$

cioè a è microscopico. Quindi in pratica gli elettroni

- (A) ruotano su circonferenze di raggio trascurabile;
- (B) driftano lungo x con velocità $v_{\text{rot}} \sim 2 \cdot 10^{-4} c$: è un effetto trascurabile.
- (C) accelerano raggiungendo $v \sim 0.1c$ lungo \mathbf{B} e non più lungo \mathbf{E} . Questo è l'effetto importante.

A causa di (C) una frazione d/L degli elettroni (cioè quelli che vengono ionizzati nella zona in cima a destra del fotomoltiplicatore in fig. 11.3) vanno a sbattere sulle pareti laterali invece di venir rilevati sullo schermo. Ridurre il campo magnetico o aumentare quello elettrico non migliora la situazione, fino a quando $a \ll d$.

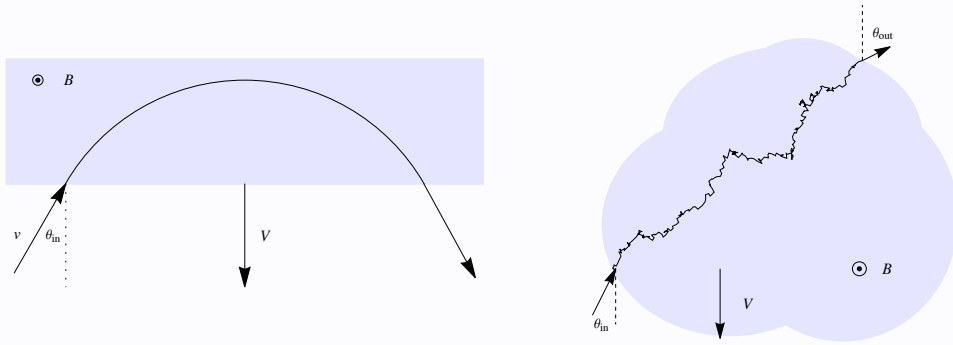
Esercizio 11.14: Accelerazione di raggi cosmici?

Un 'raggio cosmico' (cioè una particella di massa m e carica q) entra con velocità \mathbf{v} non relativistica in una 'nuvola magnetica', schematizzata come una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico \mathbf{B} . Si trascuri l'irraggiamento.

- a) Calcolare la differenza fra l'energia cinetica all'ingresso e quella all'uscita, $\Delta K = K_{\text{out}} - K_{\text{in}}$.

La nuvola contenente il campo magnetico \mathbf{B} è ora in moto con velocità \mathbf{V} molto minore di v .

- b) Calcolare ΔK assumendo che la particella attraversi una nuvola in cui \mathbf{B} è costante (e quindi compia un arco di circonferenza rispetto al sistema di riferimento S' nel quale la nuvola è in quiete, come nella figura a sinistra).
- c) In che maniera tante nuvole magnetiche in moto casuale tendono ad accelerare i raggi cosmici?



Più realisticamente, il campo magnetico dentro le nuvole magnetiche non è costante ma irregolare, e produce un moto caotico illustrato nella figura di destra. Volendo fare anche i seguenti calcoli più pesanti, si ottiene alla fine un valore più realistico di ΔK , che nuovamente spiega come nuvole magnetiche possono accelerare raggi cosmici.

- d) Calcolare nuovamente ΔK in funzione dell'angolo di uscita θ'_{out} (come misurato nel sistema S' rispetto al quale la nuvola è ferma) assumendo che la velocità di ingresso \mathbf{v} formi un angolo θ_{in} rispetto a \mathbf{V} .
- e) Si calcoli il valore medio del trasferimento di energia ΔK assumendo che il moto dentro la nuvola abbia completamente randomizzato θ'_{out} .

Soluzione: La pagina di quaderno mostra la soluzione che Fermi diede alla domanda b) di questo esercizio.

a) L'unica forza è di tipo magnetico, per cui $K_{\text{out}} = K_{\text{in}}$, come in un urto elastico.

b) Il processo è equivalente ad un urto elastico (come quello di una pallina su di una racchetta da tennis), nel sistema di riferimento S' rispetto a cui la nuvola è ferma. Si ha quindi

$$\Delta K = \frac{m}{2}(\mathbf{v} - 2\mathbf{V})^2 - \frac{m}{2}v^2 \simeq -2m\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} = -2mvV \cos \theta_{\text{in}}$$

dove θ_{in} è l'angolo 'di ingresso' fra \mathbf{v} e \mathbf{V} .

b') Si può nuovamente ricavare ΔK notando che, quando la nuvola magnetica è in moto, nel sistema S è presente anche un campo elettrico dato dalla trasformazione di Galileo dei campi $\mathbf{E} \simeq -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ e quindi orizzontale nella figura. Come visto nell'esercizio 11.12 questo sistema di campi produce un moto contro-intuitivo, ma l'energia trasferita può essere calcolata in modo semplice:

$$\Delta K = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F \int dy = q|\mathbf{E}|\Delta y = q \cdot (-VB)(2\frac{mv}{qB} \cos \theta_{\text{in}})$$

dove $\Delta y = 2R \cos \theta$ è la distanza fra il punto di ingresso e quello di uscita, $R = mv/qB$ è il raggio dell'orbita circolare. Inserendo i valori espliciti si ottiene nuovamente lo stesso ΔK .

c) Una pallina in un sistema contenente racchette in moto casuale viene, dopo tanti urti, in media accelerata, in quanto è più probabile che guadagni energia andando a sbattere su di una racchetta in moto verso la pallina ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} < 0$) che non perdere energia urtando su di una racchetta che si allontana dalla pallina ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} > 0$). Tante nuvole magnetiche in moto casuale producono lo stesso risultato. Questa è l'idea di base del meccanismo proposto da Fermi per spiegare come mai si osservano raggi cosmici di energia elevata. Volendo fare conti precisi l'angolo di ingresso θ_{in} segue una distribuzione di probabilità

$$\wp(\theta_{\text{in}}) \propto v - V \cos \theta_{\text{in}} \quad \text{tale che in media} \quad \langle \cos \theta_{\text{in}} \rangle = -V/3v$$

è diverso da zero perchè è più probabile andare a sbattere su di una nuvola che si avvicina, che su di una che si allontana. Si ha quindi in media un guadagno di energia $\langle \Delta K \rangle = 2mV^2/3$.

d) L'energia di ingresso vale $K_{\text{in}} = mv^2/2$. Rispetto al sistema in cui la nuvola è ferma si ha $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ e quindi $K'_{\text{in}} = m(v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta_{\text{in}})/2$. L'energia si conserva, per cui all'uscita si ha $K'_{\text{out}} = mv'^2_{\text{out}}/2 = K'_{\text{in}}$: il moto dentro la nuvola ha solo variato la direzione θ'_{out} di \mathbf{v}'_{out} . Tornando al sistema iniziale si ottiene

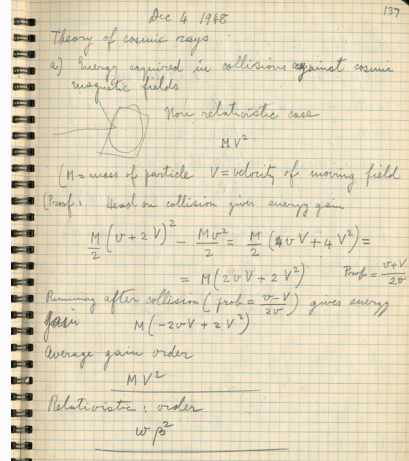
$$K_{\text{out}} = \frac{m}{2}(\mathbf{v}'_{\text{out}} + \mathbf{V})^2 = \frac{m}{2}(v'^2_{\text{out}} + V^2 + 2v'_{\text{out}}V \cos \theta'_{\text{out}}).$$

e) In media $\langle \cos \theta'_{\text{out}} \rangle = 0$ e quindi

$$\langle K_{\text{out}} \rangle = \frac{m}{2}(v'^2_{\text{out}} + V^2) = K'_{\text{out}} + \frac{m}{2}V^2 = K_{\text{in}} + m(V^2 - Vv \cos \theta_{\text{in}}).$$

Inserendo il valore medio di $\cos \theta_{\text{in}}$ calcolato al punto c) si ottiene il guadagno di energia mediato sull'angolo iniziale e su quello finale:

$$\langle \langle \Delta K \rangle \rangle = \frac{4m}{3}V^2.$$



Esercizio 11.15: Ciclotrone

Mostrare che una particella di carica q libera di muoversi in un campo magnetico costante B_z ed in un campo elettrico oscillante $\text{Re } E_x e^{-i\omega t} = E_x \cos \omega t$ viene accelerata lungo x .

➤Soluzione: Se $E = 0$ la carica gira nel piano xy : riottengo questa cosa nota usando un primo trucco matematico. Quando c'è roba che gira è utile introdurre la variabile complessa $z \equiv x + iy$ (che non ha niente a che fare con l'asse z) in quanto girare nel piano xy con frequenza ω e raggio r viene descritto in modo più compatto come $z = re^{-i\omega t}$.¹ In termini di z le equazioni del moto diventano

$$m\ddot{x} = q\dot{y}B_z \quad m\ddot{y} = -q\dot{x}B_z \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = -iq\dot{z}B_z$$

e quindi $\dot{z}(t) = \dot{z}(0)e^{-i\omega_B t}$ con $\omega_B = qB_z/m$. Aggiungendo il campo elettrico l'equazione del moto diventa

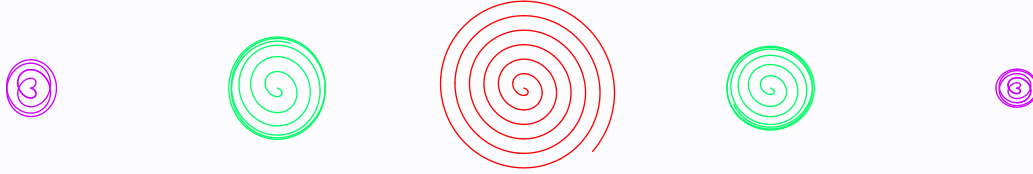
$$m\ddot{z} = -iq\dot{z}B_z + qE_x e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{iE_x q/m}{\omega - \omega_B} e^{-i\omega t}$$

dove abbiamo usato un secondo trucco matematico: abbiamo assunto $z(t) \propto e^{-i\omega t}$ il che, come noto, trascura il transiente e fornisce solo l'orbita limite.

Per $\omega = 0$ si ritrova il drift a velocità costante $v_y = E_x/B_z$ precedentemente discusso: grazie alla i esso è diretto lungo y .

Per $\omega \neq 0$ la carica q gira, acquistando una grossa velocità se $\omega = \omega_B$. Intuitivamente la particella gira nel campo magnetico, ed ad ogni mezzo giro il campo elettrico viene riorientato in modo da essere sempre lungo il moto della particella, che quindi viene accelerata lungo una spirale. Come al solito questa tecnica trascura il transiente. Si può verificare che i raggi limiti ottenuti dalle seguenti simulazioni numeriche sono in accordo con il valore atteso:

$$\omega/\omega_B = 0.8 \quad \omega/\omega_B = 0.9 \quad \omega/\omega_B = 1 \quad \omega/\omega_B = 1.1 \quad \omega/\omega_B = 1.2$$



Quindi il ciclotrone è un modo di accelerare particelle in uno spazio ridotto. Aggiungendo un termine di attrito (che può essere causato da vari effetti fisici e.g. l'irraggiamento) il denominatore diventa $\omega - \omega_B + i\gamma$, risonante ma finito per $\omega = \omega_B$.

La frequenza di rotazione ω_B non dipende dall'energia della particella; questa semplificazione non è più vera quando la particella acquista un'energia relativistica: in tale caso diventa necessario variare ω in modo appropriato per ogni bunch.

Siccome $\omega_B = qB_z/m$ dipende da m , variando m uno può selezionare ioni di diversa massa m , ottenendo spettrometri più precisi e complicati.

Uno potrebbe pensare che sia più complicato ma anche più conveniente mettere un campo elettrico che gira con la particella, in modo che \mathbf{E} sia sempre diretto lungo \mathbf{v} . In termini di numeri complessi un \mathbf{E} ruotante nel piano xy si scrive come $\mathbf{E} = Ee^{-i\omega t}(1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$. Il segno \pm specifica la direzione di rotazione. L'equazione del moto diventa

$$m\ddot{z} = -iq\dot{z}B_z + q\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} E e^{-i\omega t}.$$

Cioè se metto senso di rotazione sbagliato non accelero nulla, e se lo metto giusto non guadagno quasi nulla.

Infatti il campo elettrico oscillante può essere decomposto come sovrapposizione lineare di due campi che ruotano in direzioni diverse: $(1, 0, 0) = (1, i, 0)/\sqrt{2} + (1, -i, 0)/\sqrt{2}$: uno è in risonanza e l'altro non ha effetto.

Esercizio 11.16: Ciclotrone a raggio costante (betatrone)

Le particelle accelerate in un ciclotrone devono muoversi nel vuoto, per cui è tecnologicamente conveniente farle girare a raggio r costante, in maniera da fare il vuoto solo in un tubo, piuttosto che in tutto il volume. Mostrare che un opportuno $B_z(r, t)$ consente di ottenere un ciclotrone che fa ruotare le particelle su di una circonferenza di raggio costante r , ed accelera le particelle tramite il campo elettrico descritto dalla II equazione di Maxwell.

¹Questo trucco viene usato in calcoli più complicati (meccanica quantistica, ...), per cui è utile vederlo all'opera in questo problema più semplice, dove non dà una grande semplificazione. Quindi se confonde le idee, conviene rifare i conti ritornando ad x ed y .

▲Soluzione: Il campo magnetico deve dipendere dal tempo, in maniera da mantenere costante il raggio r su cui le particelle girano, mano a mano che aumenta il loro impulso $p_\theta(t) = erB_z(r, t)$. In base alla II equazione di Maxwell, un \dot{B}_z genera un campo elettrico E_θ che può essere usato per accelerare le particelle. L'equazione del moto

$$\dot{p}_\theta = F_\theta = eE_\theta = e \frac{\dot{\Phi}_B}{2\pi r}$$

fornisce il risultato desiderato $p_\theta(t) = erB_z(r, t)$ se $\dot{\Phi}_B = 2 \times \pi r^2 \dot{B}_z(r)$. Quindi occorre avere un campo magnetico $B_z(r, t)$ non uniforme e più intenso nella zona centrale a piccolo r (realizzato in pratica sagomando un ferromagnete) in quanto se il campo magnetico fosse uniforme si avrebbe invece $\dot{\Phi}_B = \pi r^2 \dot{B}_z$ ed il moto della particella non avverrebbe a raggio costante. Ad esempio nel limite adiabatico discusso all'esercizio 11.19 si ha $r(t) \propto 1/\sqrt{B(t)}$.

Esercizio 11.17: Carica in B con direzione non uniforme

Come esempio del moto in un campo magnetico \mathbf{B} la cui direzione varia lentamente: studiare il moto di una particella di carica q in un campo magnetico con B_θ costante.

▲Soluzione: Le equazioni del moto in coordinate cilindriche (ρ, θ, z) , dove B ha una componente B_θ costante, sono

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\omega_B \dot{z}, \quad a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0, \quad \ddot{z} = \omega_B \dot{\rho}$$

dove $\omega_B \equiv qB_\theta/m$. In prima approssimazione procede lungo le linee del campo facendo una spirale di raggio a . Quindi $\rho = R$ e $\dot{\theta} = v_{||}/R$. Scriviamo la soluzione al primo ordine perturbativo in a/R : la 1a equazione del moto fornisce $\dot{z} = v_{||}^2/\omega_B R$. Avendo assunto $R \gg a$ la velocità di drift è piccola: $\dot{z}/v_{||} \sim a/R$.

Lo si può capire in modo intuitivo notando che per far curvare la traiettoria media lungo le linee del campo serve una forza diretta lungo $\hat{\rho}$. Abbiamo visto all'esercizio precedente che il moto in \mathbf{B} ed \mathbf{E} ortogonali è un drift lungo $\mathbf{B} \times \mathbf{E}$. In questo caso $\hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{z}$.

Esercizio 11.18: Carica in B con modulo non uniforme

Moto in un \mathbf{B} il cui modulo varia lentamente in direzione ortogonale a \mathbf{B} . Studiare il moto di una particella di carica q in un campo magnetico $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(x))$.

▲Soluzione: Per semplicità assumiamo due valori costanti $B_1 < B_2 = B_1 + \Delta B$ nei due semispazi $x > 0$ e $x < 0$. La particella si muove lungo semicirconferenze di raggi $r_i = mv/qB_i$ con frequenza $\omega = qB/m$ (dove $B \sim (B_1 + B_2)/2$). Ad ogni giro si sposta di $\Delta y = 2(r_2 - r_1)$ e quindi drifta con velocità

$$v_y^{\text{drift}} \approx \frac{\omega}{2\pi} 2(r_2 - r_1) \approx \frac{v_\perp}{\pi} \frac{B_2 - B_1}{B} = \frac{v_\perp}{\pi} \frac{r}{B} \frac{B_2 - B_1}{r} \approx \frac{mv_\perp^2}{qB} \nabla B$$

In generale la direzione del drift è $\mathbf{B} \times \nabla B^2$; il verso dipende da q ma la velocità di drift no.

.....

In generale $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ implica che nè il modulo nè la direzione di \mathbf{B} sono costanti, per cui si ha l'effetto combinato dei due drift discussi in questo esercizio e nel precedente. Nel caso del campo magnetico di un filo, $B_\theta \propto 1/\rho$ entrambi gli effetti producono un drift lungo z , con velocità

$$\mathbf{v}_{\text{drift}} = \frac{v_\perp^2 + v_\parallel^2/2}{\omega_B \rho} \hat{\rho} \times \hat{\mathbf{B}}$$

dove il versore \hat{z} è stato scritto in modo complicato in modo che la formula sia valida in generale per il moto con $a \ll \rho$ in un B 2-dimensionale (i.e. nel problema concreto B non dipende da z).

Esercizio 11.19: Carica in $B(t)$ uniforme

Studiare il moto di una particella di carica q libera di ruotare nel piano xy in un campo magnetico $B_z(t)$ che viene lentamente variato da B_0 a B_1 .

➤Soluzione: Assumiamo che B vari di poco in un giro: quindi le orbite sono approssimabili come circonferenze. Il loro raggio a è determinato da $mv^2/a = qvB$. All'inizio la carica ha velocità v_0 e quindi gira con raggio $a_0 = mv_0/qB_0$. Alla fine avrà velocità v_1 (da calcolare) e quindi girerà con raggio $a_1 = mv_1/qB_1$.

La forza magnetica non accelera le particelle, ma un campo magnetico $B_z(t)$ induce un campo elettrico $E_\theta(t)$. Dall'equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ segue $2\pi r E_\theta = \dot{\Phi} = \pi r^2 \dot{B}$. Denotando con v il modulo della velocità, la particella viene accelerata secondo

$$m\dot{v} \simeq qE_\theta = \frac{qa(t)}{2} \dot{B}_z = m \frac{v}{2} \frac{\dot{B}_z}{B_z} \quad \text{cioè} \quad \frac{d}{dt} \frac{v^2}{B_z} \simeq 0. \quad (11.2)$$

Quindi v^2/B_z (o equivalentemente il flusso $\Phi \propto B_z a^2$, o equivalentemente il dipolo magnetico $\mu = qav/2$) sono invarianti adiabatici. La parola 'adiabatico' ed il \simeq ricordano che il tutto è vero solo nel limite di campo lentamente variabile.

Facciamo un esempio numerico: aumentiamo un campo magnetico da 0 a $B = 1$ Tesla in $\Delta t = 1$ ms. Assumiamo che alla fine $r = 1$ m. Quindi alla fine $p = eBr = 300$ MeV. Verifichiamo se il moto della particella è adiabatico: l'energia ceduta in un giro vale $e \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = e \cdot 2\pi r E_\theta = e \dot{\Phi} = \pi \text{ keV}$, che è molto minore dell'energia. Equivalentemente, il numero di giri è molto grosso: $N_{\text{giri}} = \text{ms}/2\pi r \approx 5 \cdot 10^4$. Quindi l'approssimazione adiabatica è buona, e dice che $r(t) \propto B^{-1/2}(t)$.

.....

Riotteniamo lo stesso risultato in modo alternativo, approssimando la carica ruotante come un dipolo magnetico. Questa approssimazione è possibile solo se la carica ruota veloce, cioè stiamo anche qui facendo l'approssimazione adiabatica. Una carica produce una corrente $i = q\omega/2\pi$ e quindi un momento magnetico

$$\mu = \pi a^2 i = \frac{q}{2} a^2 \omega = \frac{q}{2m} L \quad \text{dove} \quad L = mav = ma^2 \omega$$

è il momento angolare.

La forza su di un dipolo magnetico dipende solo dal campo magnetico, secondo

$$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \frac{e}{2m} \mathbf{L} \times \mathbf{B}.$$

Una particella libera in un campo magnetico ruota sempre attorno ad esso, quindi \mathbf{L} e \mathbf{B} sono sempre paralleli, quindi \mathbf{L} rimane costante in accordo con i nostri risultati precedenti.

.....

Nel limite opposto, in cui $\boldsymbol{\mu}$ non dipende da \mathbf{B} , l'equazione del moto dice che \mathbf{L} gira attorno a \mathbf{B} con frequenza $\omega_L = eB/2m$. In un linguaggio meno sofisticato, questo accade perchè il campo magnetico fa girare più veloce la carica, con frequenza $\omega + \omega_L$ (o più lenta: il segno sarà tale che la variazione di moto genera un campo magnetico che si oppone alla variazione del B esterno). Studiamo un caso particolare importante per la teoria del magnetismo nella materia.

Esercizio 11.20: Atomo in $B(t)$ uniforme

Studiare come reagisce un atomo di idrogeno quando viene acceso lentamente un piccolo campo magnetico esterno.

➤Soluzione: Il problema è analogo a quello precedente, con la differenza che l'elettrone gira risentendo anche della forza di Coulomb, non solo del campo magnetico esterno. Possiamo quindi utilizzare ancora l'eq. (11.2), tenendo conto che ora il legame fra $a(t)$ e $v(t)$ è dato da $mv^2/a = -evB + e^2/4\pi\epsilon_0 a^2$. Per semplicità, assumiamo che il campo magnetico dia una *piccola* correzione a v e quindi al raggio dell'orbita a , che in prima approssimazione rimane costante, al valore fissato dalla meccanica quantistica. Questa è l'unica differenza rispetto al caso precedente. Quindi

$$m\dot{v} = \frac{ea}{2} \dot{B} \quad \rightarrow \quad \omega(t) \equiv \frac{v(t)}{a} = \omega(0) + \omega_L(t)$$

dove $\omega_L = eB/2m$ è detta frequenza di Larmour, che stiamo assumendo essere una correzione piccola, $\omega_L \ll \omega$. E.g. per $B = 1$ Tesla viene $\omega_L = 0.9 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$, mentre gli atomi hanno frequenze tipiche $\omega \sim 10^{16} \text{ Hz}$. Quindi $\omega_L \ll \omega$: l'approssimazione che stiamo usando è buona.

Esercizio 11.21: Carica in B non uniforme

Mostrare che il moto lungo le linee di un campo magnetico nel vuoto quasi uniforme ha come costante del moto $v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ e come invariante adiabatico v_{\perp}^2/B , dove v_{\parallel} è la velocità di drift parallela alle linee del campo, mentre v_{\perp} è la velocità di ‘girellamento’ ortogonale alle linee del campo.

▲Soluzione: Come noto, una carica in un campo magnetico uniforme spiraleggia con v_{\parallel} e v_{\perp} costanti. Se il campo magnetico non è uniforme, è sicuramente costante l’energia cinetica, proporzionale a $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$. L’esistenza di un invariante adiabatico v_{\perp}^2/B può essere capito intuitivamente dai problemi precedenti, dove B dipendeva dal tempo (producendo un E), e v_{\perp}^2/B era invariante adiabatico. Ora B dipende dallo spazio: ma dal punto di vista di una particella che cammina è come se B dipendesse dal tempo. Avendo capito intuitivamente perchè v_{\perp}^2/B è invariante adiabatico, vogliamo dimostrarlo in modo rigoroso.

Mettendo l’asse z lungo la linea di \mathbf{B} si ha che una variazione di $B_z(z)$ è accompagnata da un $B_{\rho} = -\rho B'_z/2$. Questo segue o imponendo $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ in coordinate cilindriche, o imponendo che sia zero il flusso di \mathbf{B} su di un cilindretto lungo l’asse z . Flusso costante significa che le linee di campo di \mathbf{B} devono allargarsi dove il modulo B decresce, ad esempio lontano dalle due spire circolari nella figura.

Iniziamo a vedere la geometria in maniera intuitiva: le frecce nella figura indicano le forze magnetiche $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ su di una carica in moto perpendicolarmente al piano: essendo ortogonale a \mathbf{B} ed a \mathbf{v} la forza ha direzione tale da dare intrappolamento. Tale forza nasce in quanto \mathbf{B} non ha modulo costante, e quindi non si media a zero fra salita e discesa della carica. Traduciamo questa visione intuitiva in una formula precisa. La componente F_z della forza sulla carica q è generata dalla componente B_{ρ} del campo magnetico:

$$m\ddot{z} = F_z = qv_{\theta}B_{\rho} \simeq -qv_{\perp} \frac{\rho B'_z}{2} \simeq -\frac{mv_{\perp}^2}{2} \frac{B'_z}{B_z}$$

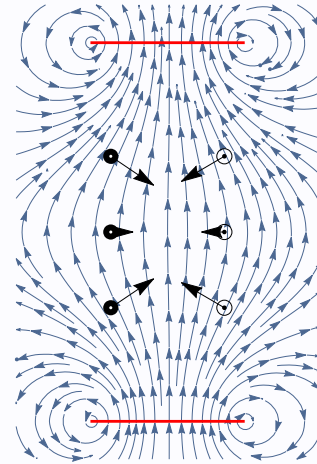
avendo usato $v_{\theta} \simeq v_{\perp}$ e raggio di girellamento $\rho \simeq mv_{\perp}/qB_z$ in approssimazione adiabatica in cui ρ è molto minore della scala di variazione di B_z .

Possiamo ora dimostrare che v_{\perp}^2/B_z è invariante adiabatico:

$$\frac{d}{dt} \frac{v_{\perp}^2}{B_z} = -\frac{\dot{B}_z}{B_z^2} v_{\perp}^2 + \frac{1}{B_z} \frac{d}{dt} (v^2 - v_{\parallel}^2) = -\frac{\dot{B}_z}{B_z^2} v_{\perp}^2 - \frac{2\dot{z}\ddot{z}}{B_z} \simeq 0$$

avendo usato al primo passaggio la conservazione dell’energia, ed al secondo inserito al posto di \ddot{z} la sua equazione del moto e semplificato usando $\dot{z}B'_z = \dot{B}_z$.

Ad esempio, particelle cariche sono intrappolate lungo le linee del campo magnetico terrestre, formando la “fascia di Van Allen”.



Esercizio 11.22: Intrappolamento magnetico

Due spire circolari hanno raggio $a = 0.1$ m e sono situate perpendicolarmente all’asse z a $z = \pm d/2$ con $d = 0.5$ m. Sono percorse da $N = 1000$ spire con corrente $I = 1$ A. a) Calcolare il campo magnetico, trovando dove è massimo e minimo. b) Fino a quali energie è valida l’approssimazione adiabatica? c) Sopra quale angolo minimo α un elettrone che parte dall’origine $z = 0$ rimane intrappolato? d) Cosa succede se, invece di un elettrone, è presente un gas di elettroni?

▲Soluzione: L’approssimazione adiabatica è discussa nell’esercizio precedente.

a) Il campo magnetico, disegnato numericamente nella figura a pagina 129, lungo l’asse z vale

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left[(a^2 + (z - d/2)^2)^{-3/2} + (a^2 + (z + d/2)^2)^{-3/2} \right].$$

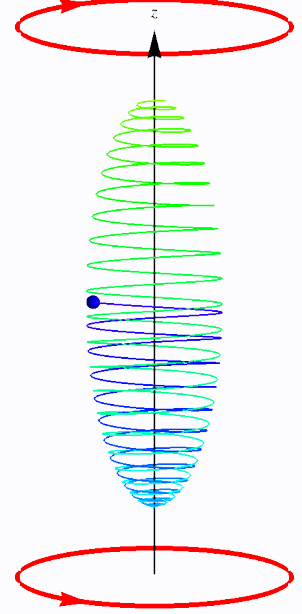
Il campo magnetico è minimo a $z = 0$ dove vale $B_{\min} = B_z(0) = 0.64 \cdot 10^{-3}$ Tesla. Il campo magnetico è massimo circa a $z = \pm d/2$, in prossimità dei centri delle spire, dove vale $B_{\max} = 6.3 \cdot 10^{-3}$ Tesla.

- b) In approssimazione adiabatica v_{\perp}^2/B_z è costante. Questa approssimazione è valida se l'elettrone gira su raggi molto minori della scala di lunghezza lungo cui B varia. Un elettrone di massa $m_e \approx 0.5 \text{ MeV}/c^2$ ed energia $E_{\perp} = m_e v_{\perp}^2/2$ compie circonferenze di raggio

$$\rho = \frac{m_e v_{\perp}}{eB} = \frac{\sqrt{2m_e E_{\perp}}}{eB} = \frac{\text{MeV}/c}{eB} \sqrt{\frac{E_{\perp}}{\text{MeV}}} = \frac{10^6 \text{ V}}{Bc} \sqrt{\frac{E_{\perp}}{\text{MeV}}} = 3.3 \text{ m} \frac{10^{-3} \text{ Tesla}}{B} \sqrt{\frac{E_{\perp}}{\text{MeV}}}$$

L'approssimazione adiabatica vale se $\rho \ll a, d$ quindi per $E \ll \text{keV}$.

- c) Assumiamo che l'elettrone parta da $z = 0$ dove $B = B_{\min}$ con angolo iniziale α rispetto all'asse z . Quindi $\sin \alpha = v_{\perp 0}/v$. Se $\alpha = 0$ (moto lungo l'asse z) la forza magnetica vale zero, e l'elettrone sfugge con velocità v_{\parallel} costante. Se α è abbastanza grosso rimane intrappolato ed oscilla avanti ed indietro girellando lungo la linea di campo, come disegnato in figura. È possibile calcolare il punto massimo raggiunto nel moto combinando la conservazione dell'energia v^2 con l'invariante adiabatico v_{\perp}^2/B . Detto $B = B_*$ nel punto in cui $v_{\parallel*} = 0$ torna indietro, si ha $v^2 = v_{\perp*}^2 = v_{\perp 0}^2 B_*/B_{\min}$ e quindi $\sin^2 \alpha = v_{\perp 0}^2/v^2 = B_{\min}/B_*$. Nel nostro caso $B_*/B_{\min} \leq B_{\max}/B_{\min} = 10$ e quindi la carica è intrappolata se parte con $\sin^2 \alpha > 0.1$ cioè $\alpha > 18^\circ$.



- d) Se uno vuole intrappolare tanti elettroni, quelli con $\alpha < 18^\circ$ scappano subito. Quelli con $\alpha > 18^\circ$ rimangono, ma le collisioni fra di loro tendono a rendere la distribuzione angolare isotropa (e la distribuzione in energia Maxwelliana), generando altri elettroni con $\alpha < 18^\circ$ che quindi mano a mano scappano. Per questo motivo questo tipo di 'bottiglia magnetica', inizialmente considerata come possibile tecnologia per fusione nucleare, è stata abbandonata.

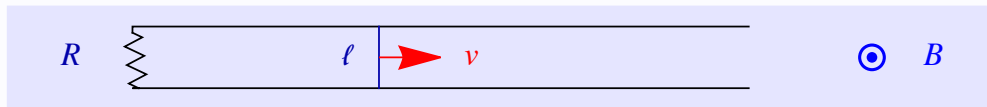
Capitolo 12

Induzione magnetica

Le equazioni fondamentali sono $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La prima implica che la f.e.m. ai capi di un circuito fermo in un campo \mathbf{B} dipendente dal tempo vale $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$. La seconda dice che la f.e.m. ai capi di un circuito in moto in un campo magnetico \mathbf{B} non uniforme vale $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$. Si ottiene una formula comune in quanto le due equazioni fondamentali sono legate dal principio di relatività.

Esercizio 12.1: Circuito allungato

Un circuito rettangolare di resistenza R e lati ℓ fisso ed x variabile è immerso in un campo magnetico B costante ortogonale al piano del circuito. Una forza esterna varia la lunghezza x come $x = vt$. Calcolare: a) la corrente indotta, b) la forza totale agente sul circuito; c) la forza magnetica che agisce sul lato in moto; d) la forza esterna sul lato in moto e la sua potenza; e) la potenza dissipata nella resistenza.

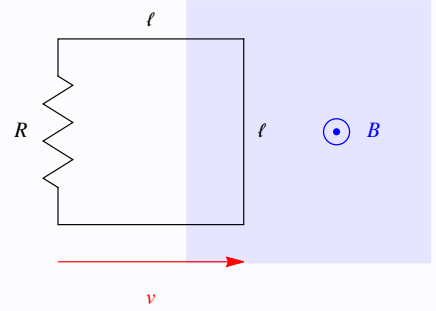


➤ Soluzione:

- a) Il flusso del campo magnetico vale $\Phi_B(t) = BS(t) = B\ell vt$. Quindi $I = \mathcal{E}/R = -B\ell v/R$.
- b) La forza totale vale zero.
- c) La forza magnetica agente sul lato in moto vale $F_{\text{mag}} = -BI\ell = -B^2\ell^2 v/R$ e si oppone al moto. Questo è ragionevole: siccome la resistenza può solo dissipare energia, per poter conservare l'energia totale è necessario fornire energia meccanica.
- d) Siccome il lato è in moto a velocità costante si ha $0 = ma = F_{\text{mag}} + F_{\text{ext}}$, quindi $F_{\text{ext}} = -F_{\text{mag}}$. La sua potenza vale $W_{\text{ext}} = F_{\text{ext}}v = (B\ell v)^2/R$.
- e) $W = \mathcal{E}^2/R = W_{\text{ext}}$. Il lavoro meccanico viene istantaneamente dissipato dalla resistenza.

Esercizio 12.2: Circuito in moto

Una spira rigida conduttrice di forma quadrata contenente una resistenza R e con i lati di lunghezza ℓ paralleli all'asse x ed all'asse y , si muove nel piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y, z) con velocità iniziale v_0 parallela all'asse x , nel suo verso positivo. All'istante $t = 0$ interseca la regione $x \geq 0$ in cui risiede un campo magnetico \mathbf{B} , uniforme e costante, diretto lungo l'asse z nel suo verso positivo.



- Calcolare la corrente I circolante nella spira mentre penetra nella regione sede del campo magnetico in funzione della velocità $v(t)$.
- Calcolare la forza F agente sulla spira.
- Calcolare la minima velocità iniziale v_0^{\min} necessaria perché la spira penetri totalmente nella regione sede del campo magnetico.
- Assumendo $v_0 > v_0^{\min}$ calcolare la carica totale circolata nella spira.
- Assumendo $v_0 < v_0^{\min}$ calcolare la carica totale circolata nella spira.

✚Soluzione:

- Nella spira si genera, per induzione, una f.e.m. $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -B\dot{S} = -B\ell\dot{x} = -B\ell v$. Quindi $I = \mathcal{E}/R = -B\ell v/R$. La forza sulla spira (mentre penetra la regione $x > 0$, ma non è ancora entrata totalmente) è diretta lungo l'asse x ed è generata dall'interazione della corrente sul lato entrato totalmente e il campo magnetico (i contributi sui lati paralleli al moto si compensano e quello esterno non interagisce con alcun campo).
- Si ha $F = B\ell I = -B^2\ell^2 v/R$; il segno $-$ indica che la forza è frenante, coerentemente con la legge di Lenz.
- L'equazione del moto per la spira, mentre penetra nella regione del campo magnetico, è $m\dot{v} = -B^2\ell^2 v/R$, ovvero $\dot{v} + v/\tau = 0$ con $\tau = mR/B^2\ell^2$. Quindi la velocità della spira varia nel tempo secondo $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$. La lunghezza del tratto di spira $x(t)$ entrato nella regione del campo magnetico all'istante $t > 0$ è quindi $x(t) = \int_0^t v(t)dt = v_0\tau(1 - e^{-t/\tau})$. Perché tutta la spira penetri (anche in un tempo infinito) deve perciò essere $v_0\tau \geq \ell$, da cui $v_0^{\min} = \ell/\tau = B^2\ell^3/mR$.
- La carica circolata si ottiene dalla 'legge di Felici'

$$Q = \int I dt = \int \frac{\mathcal{E}}{R} dt = -\frac{1}{R} \int d\Phi_B = -\frac{\Delta\Phi_B}{R}.$$

Se $v_0 > v_0^{\min}$ la variazione di di flusso è $B\ell^2$ e quindi $Q = B\ell^2/R$.

- Se $v_0 < v_0^{\min}$ la spira non penetra totalmente nella regione del campo magnetico, ma solo di un tratto $v_0\tau$, e quindi (procedendo come nel caso precedente) $Q = -B\ell v_0\tau/R = -mv_0/B\ell$. La carica Q può anche essere ottenuta dall'equazione del moto:

$$\Delta p = -mv_0 = \int F dt = \int B\ell I dt = B\ell \int I dt = B\ell Q.$$

Esercizio 12.3: Auto-induttanza in campo magnetico ©

Una spira rettangolare di lati $a \ll b$, massa m , auto-induttanza L e resistenza trascurabile, si muove con velocità iniziale costante v_0 lungo l'asse x parallelo al lato di lunghezza b . Inizialmente nella spira non sta circolando corrente elettrica. Al tempo $t = 0$ la spira entra nel semi-spazio $x \geq 0$ dove è presente un campo magnetico uniforme B diretto ortogonalmente al piano della spira.

- Se la spira segue una legge oraria $x(t)$ (ponendo x come la coordinata dei vertici che entrano per primi nella regione con campo magnetico), si calcoli la corrente circolante e la forza totale che si esercita sulla spira.
- Si determini la legge oraria $x(t)$ con cui si muove la spira al tempo $t \geq 0$.
- Assumendo che la spira si arresti al tempo $t = t_{\text{arr}}$ prima di essere interamente entrata nella regione $x \geq 0$, si determini la massima distanza percorsa dalla spira. In particolare, si dica se la spira resta ferma o torna indietro.
- Si assuma adesso che una seconda spira identica alla prima sia disposta con i lati lunghi paralleli ai lati lunghi della prima spira e che entri anche essa dentro al semi-spazio $x \geq 0$ al tempo $t = 0$ con velocità iniziale v_0 . Sia M il coefficiente di mutua induzione tra le due spire e si supponga che entrambe le spire siano vincolate a muoversi senza attrito lungo x . Come risulta la distanza percorsa dalle spire rispetto al caso precedente? Si verifichi il bilancio energetico al nuovo tempo di arresto.
- La seconda spira viene adesso sovrapposta alla prima mantenendo tra le due una piccola distanza $d \ll a$. Si ripetano i ragionamenti al punto d).

◀Soluzione:

- L'equazione del circuito $\dot{\Phi}_B = 0 = \dot{\Phi}_B^{\text{ext}} + L\dot{I} = 0$ determina la corrente $I = -\Delta\Phi_B^{\text{ext}}/L = -(Ba/L)x$ in quanto $\Delta\Phi_B^{\text{ext}} = axB$ e $I(0) = 0$. Le forze magnetiche che agiscono sui lati lunghi si compensano. La forza che agisce sul lato corto $\mathbf{F} = I\mathbf{a} \times \mathbf{B}$ è di tipo elastico, con componente $F_x = IaB = -(a^2B^2/L)x$.
- L'equazione del moto $\ddot{x} = -(a^2B^2/Lm)x \equiv -\omega^2x$ è risolta da $x(t) = (v_0/\omega)\sin(\omega t)$ dove v_0 è la velocità iniziale.
- Se la spira si arresta prima di essere interamente entrata nel semi-spazio $x \geq 0$, l'equazione del moto scritta sopra resta valida almeno fino a $t = t_{\text{arr}}$ e dunque si ha che $x_{\text{arr}} = v_0\sqrt{mL}/aB$. Siccome $\ddot{x}(t_{\text{arr}}) < 0$, il moto si inverte e la spira torna indietro. Allo stesso risultato si arriva usando la conservazione dell'energia $U = LI_{\text{arr}}^2/2 = mv_0^2/2$ da cui $I_{\text{arr}} = -v_0\sqrt{m/L}$. Essendo $I_{\text{arr}} = -(Ba/L)x_{\text{arr}}$ si ritrova x_{arr} .
- Se è presente una seconda spira, l'equazione del circuito diventa $-\dot{\Phi}_B^{\text{ext}} - L\dot{I}_1 - M\dot{I}_2 = 0$, dove I_2 è la corrente della seconda spira. Per simmetria, si vede che $I_2 = I_1$, quindi $I_1 = I_2 = -\Delta\Phi_B^{\text{ext}}/(L + M)$. Valgono le formule di sopra con la sostituzione $L \rightarrow L + M$. Si ha $M < 0$ in quanto le due spire sono "esterne", e $L + M > 0$ in quanto $|M| < L$: quindi la distanza percorsa x'_{arr} risulta minore, ed il segno delle correnti non cambia rispetto al primo punto. Intuitivamente: siccome i circuiti sono esterni, i flussi magnetici reciproci tendono ad ostacolare l'azione di bilanciamento che I esercita al cambiamento di flusso esterno, richiedendo correnti più intense e quindi forze frenanti maggiori. Il bilancio energetico al momento dell'arresto si scrive

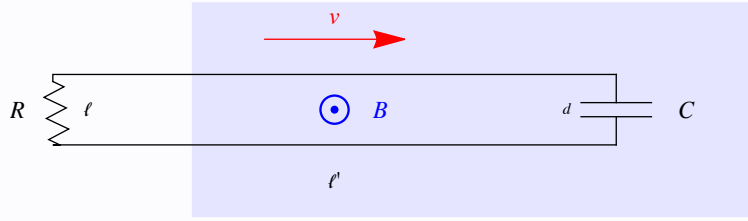
$$L_1 I_1^2/2 + L_2 I_2^2/2 + M I_1 I_2 = (L + M) I_{\text{arr}}^2 = mv_0^2.$$

- Questa volta si ha $M = L > 0$, quindi il punto di arresto vale $x''_{\text{arr}} = v_0\sqrt{2mL}/aB = \sqrt{2}L$.

Esercizio 12.4: Circuito RC in campo magnetico ©

Una spira rigida conduttrice di massa m e forma rettangolare con lati $\ell' \gg \ell$ (ℓ parallelo all'asse y , ℓ' parallelo all'asse x ed idealmente infinito) contiene una resistenza R ed un condensatore piano di capacità C . La spira si muove liberamente lungo l'asse x : al tempo $t = 0$ ha velocità iniziale $v_0 \ll c$, carica iniziale $Q_0 = 0$ sul

condensatore, ed inizia ad intersecare la regione $x \geq 0$ in cui risiede un campo magnetico B uniforme e costante, diretto lungo l'asse z .



- Scrivere le equazioni del circuito per $Q(t)$ e del moto in termini di $v(t)$.
- Risolverle, dando la soluzione per $I(t) = \dot{Q}$ in termini di $\tau \equiv RC$ e $\tau' \equiv mR/B^2\ell^2$.
- Dare la corrente I_∞ e la velocità v_∞ nel limite di tempo grande, $t \gg \tau, \tau'$, quando il lato sinistro del circuito è ancora fuori dalla regione in cui risiede il campo magnetico.
- Calcolare l'energia totale dissipata per effetto Joule, confrontandola con l'energia (meccanica) iniziale U_0 .

✚Soluzione:

- a) Le equazioni del circuito e del moto sono

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} = -Blv, \quad m\dot{v} = BL\dot{Q}.$$

- b) Siccome v e quindi \mathcal{E} dipende dal tempo, non è l'usuale carica di un circuito RC . Derivando la 1a equazione rispetto al tempo, ed eliminando \dot{v} con la 2a equazione, si ottiene $\dot{I} = -I(1/\tau + 1/\tau')$, risolta da $I = I_0 E$ con $I_0 = -mv_0/BL\tau'$ e $E = e^{-t(1/\tau + 1/\tau')}$.
- c) A grande tempo si ha moto a velocità costante in quanto nel circuito non scorre più corrente, $I_\infty = 0$, essendosi il condensatore caricato fino compensare l'induzione magnetica, $Q_\infty = -BC\ell v_\infty$. Si può ottenere $v_\infty = v_0\tau'/(\tau + \tau') < v_0$ dal valore di Q_∞ ottenuto dalla soluzione al punto precedente, oppure dalla soluzione completa del sistema di equazioni, nel limite $E \rightarrow 0$:

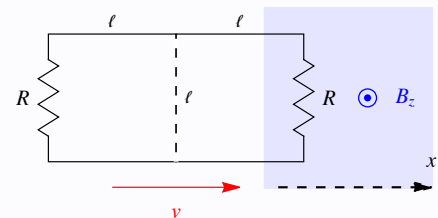
$$Q(t) = \frac{mv_0[E - 1]}{B\ell(1 + \tau'/\tau)}, \quad v = v_0 \frac{E\tau + \tau'}{\tau + \tau'}.$$

- d) Il calcolo diretto fornisce $U_{\text{Joule}} = \int dt RI^2 = U_0\tau/(\tau + \tau')$. Allo stesso risultato si arriva tramite la conservazione dell'energia:

$$U_0 = U_{\text{Joule}} + U_\infty, \quad U_0 = \frac{m}{2}v_0^2, \quad U_\infty = \frac{m}{2}v_\infty^2 + \frac{Q_\infty^2}{2C} = U_0 \frac{\tau'^2 + \tau\tau'}{(\tau + \tau')^2} = U_0 \frac{\tau'}{\tau + \tau'}.$$

Esercizio 12.5: Circuito con resistenza e due maglie ☺

Una spira rigida conduttrice rettangolare ha lati di lunghezza 2ℓ paralleli all'asse x e di lunghezza ℓ paralleli all'asse y . La spira contiene due resistenze R come in figura e viene inserita con velocità v costante in una regione in cui risiede un campo magnetico B , uniforme e costante, diretto lungo l'asse z .



- Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule nel tempo $T = 2\ell/v$ in cui la spira 'entra' nel campo magnetico.
- Il processo viene ripetuto dopo aver aggiunto alla spira un filo conduttore rigido intermedio (disegnato nella figura come la linea tratteggiata): calcolare nuovamente l'energia dissipata per effetto Joule.

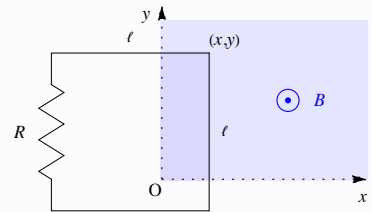
- c) Calcolare il momento di dipolo magnetico μ della spira mentre sta ‘entrando’ nel campo magnetico nei due casi considerati nelle domande precedenti.

✚Soluzione:

- a) $I_a = \mathcal{E}/2R$ con $\mathcal{E} = -vB_z\ell$. Quindi la potenza dissipata vale $W_a = 2RI_a^2 = (v\ell B_z)^2/2R$ e l’energia dissipata vale $E_a = TW_a = vB_z^2\ell^3/R$.
- b) Le due resistenze non sono in parallelo: la corrente $I_b = \mathcal{E}/R = -vB_z\ell/R$ scorre prima nella spira di destra, e poi in quella di sinistra. L’energia dissipata vale $E_b = TRI_b^2 = 2E_a$.
- c) Il momento di dipolo magnetico è dato da $\mu = SI$ dove S è la superficie totale del circuito (non quella entrata nel campo magnetico). Nel caso a) si ha $\mu_a = 2\ell^2 I_a = \ell^3 v B_z / R$. Nel caso b) si ha $\mu_b = \ell^2 I_b = \mu_a$.

Esercizio 12.6: Ingresso laterale ©

Una spira conduttrice di forma quadrata contenente una resistenza R è libera di traslare nel piano xy di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y, z) . I lati di lunghezza ℓ vengono mantenuti paralleli all’asse x ed all’asse y . La spira interseca la regione $x, y \geq 0$ in cui è presente un campo magnetico $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$. Lo spigolo superiore destro della spira raggiunge il punto di coordinate $(x, y, 0)$ con $0 < x, y < \ell$ (tale che nessun lato della spira è immerso totalmente nel campo magnetico) con velocità $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$. A tale istante:



- a) Calcolare la corrente I circolante nella spira.
- b) Specificando la forza che agisce su ciascun tratto, calcolare la forza magnetica totale $\mathbf{F}_B = (F_x, F_y, 0)$ agente sulla spira.
- c) Quale momento di forze esterne rispetto al punto (x, y) occorre applicare per impedire la rotazione della spira?
- d) Calcolare la potenza dissipata per effetto Joule, discutendo il bilancio energetico.
- e) Calcolare la carica totale circolata nella resistenza dal momento in cui la spira è entrata nel campo magnetico.
- f) Assumendo che la spira entri nel campo magnetico con velocità iniziale lungo l’asse x , descrivere qualitativamente il moto successivo. Cosa cambia se la spira è anche libera di ruotare?

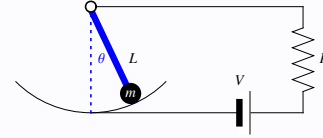
✚Soluzione:

- a) Il flusso del campo magnetico vale $\Phi_B(t) = B_z xy$. Quindi $I = -\dot{\Phi}_B/R = -B_z(x\dot{y} + \dot{x}y)/R$.
- b) Sul tratto immerso nel campo magnetico del lato orizzontale superiore agisce la forza magnetica $F_y = B_z x I$. Sul lato verticale agisce $F_x = B_z y I$. Le equazioni del moto traslatorio sono quindi $m\ddot{x} = B_z y I$ e $m\ddot{y} = B_z x I$. Non hanno soluzione analitica, eccetto che nel caso speciale $x = y$, in cui $\ddot{x} \propto -x^2 \dot{x}$ ha una soluzione complicata.
- c) Il momento totale delle forze deve essere 0. Tenendo conto che le forze magnetiche agiscono come se fossero applicate nel punto centrale dei due tratti di filo immersi nel campo magnetico, la coppia di forze esterne deve avere momento $M_z^{\text{ext}} = F_y x/2 + F_x y/2 = B_z xy I$. Siccome il campo magnetico varia all’interno del circuito, non è corretto approssimarlo come dipolo magnetico ed utilizzare le formule relative.
- d) Si ha $W = RI^2$, uguale ed opposta alla potenza meccanica data dalla sola componente traslatoria $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = B_z(\dot{x}y + \dot{y}x)I$.
- e) La carica circolata può essere calcolata senza risolvere il moto, come $Q = \int dt I = -\int dt \dot{\Phi}_B/R = -\Delta\Phi_B/R = -B_z xy/R$.
- f) La forza magnetica spinge la spira in fuori: verso sinistra e verso il basso. Se la spira è libera di ruotare, essa ruota in maniera che solo la punta, di piccola area, sia nel campo magnetico.

Esercizio 12.7: Circuito oscillante

Una massa m è libera di oscillare su di un pendolo conduttore di lunghezza L . Il circuito è chiuso da una resistenza R ed è presente un campo magnetico B ortogonale al circuito.

- Calcolare la corrente I che scorre nel circuito in funzione di θ .
- Assumendo che il resto del sistema sia tenuto fermo, quale effetto ha il campo magnetico sul moto della massa m , nel limite di piccole oscillazioni?
- Cosa succede aggiungendo una batteria V ?

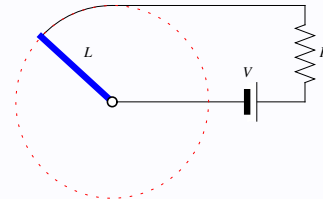
**➤Soluzione:**

- La corrente I è data dall'equazione del circuito $RI = \mathcal{E}$ dove $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -B\dot{S} = BL^2\dot{\theta}/2$.
- L'equazione del moto nel limite di piccole oscillazioni $x \simeq L\theta$ è $m\ddot{x} = F_B + F_g$ dove la forza gravitazionale vale $F_g \simeq -mg\theta$. La forza magnetica vale $F_B = -ILB = -(B^2L^3/2R)\dot{\theta}$ e produce quindi un termine di attrito. L'energia totale si conserva in quanto la potenza meccanica $F_B\dot{x}$ è uguale alla potenza RI^2 dissipata per effetto Joule.
- Si ha ora $I = (\mathcal{E} + V)/R$, quindi la forza magnetica contiene un ulteriore termine costante: le oscillazioni non avvengono più attorno a $\theta = 0$. Infatti la massa m può stare ferma ad angolo tale che $0 = F_B + F_g = -VLB/R - mg\theta$.

Esercizio 12.8: Circuito ruotante

Un motorino fa ruotare una sbarretta conduttrice di lunghezza L attorno ad una estremità, con velocità angolare ω costante, facendo una circonferenza nel piano ortogonale ad un campo magnetico B costante. Ai due estremi della sbarretta è collegato un circuito che contiene una fem costante V ed una resistenza R .

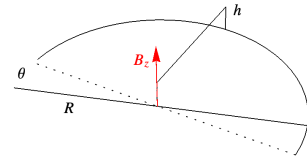
- Calcolare la corrente I che passa nel circuito.
- Che succede quando viene completato un giro?
- Per quale valore di ω è possibile levare il motorino e la sbarretta continua a girare?

**➤Soluzione:**

- L'effetto magnetico aggiunge al circuito una fem $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -B\dot{S}$ dove $\dot{S} = L^2\omega/2$ è la variazione di area. La corrente I è data dall'equazione del circuito $RI = V + \mathcal{E}$.
- Uno potrebbe pensare che l'area varia in maniera discontinua, producendo una grossa \mathcal{E} . Invece l'area effettiva del circuito $S = L^2\theta/2$ aumenta in maniera continua anche per $\theta > 2\pi$: fare N avvolgimenti multipli è uno dei modi usati in pratica nei solenoidi per ottenere grossi flussi del campo magnetico.
- Per il valore di ω tale che $\mathcal{E} = -V$: in questo modo $I = 0$ e quindi la forza di Lorentz vale zero.

Esercizio 12.9: Circuito ruotante con distacco

Una sbarra conduttrice di lunghezza $2r$ viene fatta ruotare a velocità angolare costante $\dot{\theta} = \omega$ lungo l'asse z come in figura, formando un circuito tramite un contatto strisciante senza attrito su di una semi-circonferenza conduttrice di raggio r . Un filo di lunghezza $r + 2h \approx r$ chiude il circuito come in figura; si assuma $h \ll r$ e si trascuri l'auto-induttanza del circuito. Ogni componente del sistema ha resistività ρ e sezione S . È presente un campo magnetico costante B_z ortogonale al piano del circuito.



- Calcolare la forza elettromotrice.
- Calcolare la corrente I che circola.
- Calcolare la potenza delle forze meccaniche che fanno girare la sbarra.
- Cosa succede nel momento in cui il circuito attraversa $\theta = 0$?

✎Soluzione:

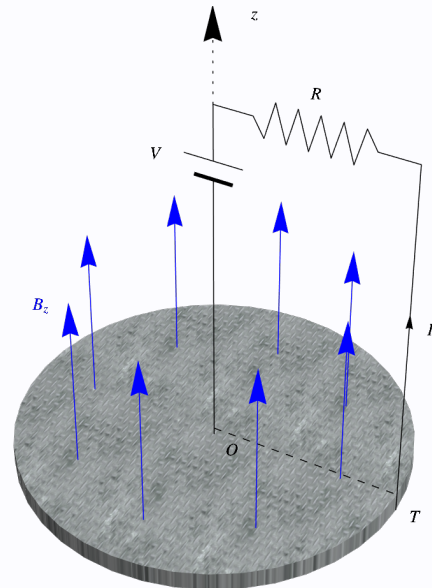
- In base alla legge di Lenz si produce una forza elettromotrice costante $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -B_z r^2 \omega / 2$.
- $I = \mathcal{E} / R$ con resistenza $R = \rho S r (2 + |\theta - \pi/2|)$.
- Siccome l'energia cinetica è mantenuta costante, la potenza delle forze meccaniche è uguale alla potenza dissipata per effetto Joule, $W = RI^2$.

La legge di Lenz $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}$ vale per circuiti, non per sistemi più generali, in particolare contatti striscianti e/o discontinui, come in questo esercizio. In queste situazioni occorre ripartire dalle equazioni di base, ricordare che la legge di Lenz è ricavata considerando la forza magnetica sui portatori di carica soggetti a moto meccanico.

- Non cambia niente: lo stesso effetto di forza magnetica che c'era su metà della sbarra continua sull'altra metà. Ad esempio, rimane la stessa la corrente I che circola nel lato di mezzo (quello che non si muove).

Esercizio 12.10: Motore elettrico a corrente continua ©

Un disco perfettamente conduttore di raggio a è libero di ruotare attorno al proprio asse z con momento di inerzia $\mathcal{I} = Ma^2/2$. Il disco è connesso a un circuito composto da una resistenza elettrica R e da una batteria con differenza di potenziale V . Tale connessione è ottenuta attraverso un contatto strisciante T sul bordo del disco e il suo centro O (vedi figura; il contatto strisciante è qui essenziale per permettere al disco di girare). È presente un campo magnetico B_z parallelo all'asse. Si trascuri l'irraggiamento ed il coefficiente di autoinduzione del circuito.



- Assumendo che il disco sia fermo all'istante iniziale $t = 0$ e che inizi a girare lentamente in maniera da poter approssimare $I = V/R$, determinare il momento delle forze \mathbf{M} agente sul disco, e quindi la piccola velocità angolare $\omega(t)$.
- Determinare l'effetto Hall indotto dalla rotazione, ovvero la differenza di potenziale effettiva $\mathcal{E}(\omega)$ fra il centro ed il bordo del disco.
- Rispondere nuovamente alla domanda iniziale, permettendo una velocità angolare $\omega(t)$ tale che \mathcal{E} non è più trascurabile. Calcolare la velocità angolare a regime ω_{lim} .
- Ad un certo istante t_1 il disco ha velocità angolare ω_1 . La batteria viene rimossa, lasciando il circuito con la sola resistenza R . Calcolare $\omega(t)$.

✎Soluzione:

- a) Una corrente radiale $I = V/R$ perpendicolare a B_z attraversa il disco dal centro O a T . Come conseguenza, su ogni corona circolare di raggio r e spessore dr agisce una forza magnetica tangenziale $dF_\theta = IB_z dr$, e quindi un momento delle forze $dM_z = dF_\theta r$. Integrando dM_z sul disco si ottiene il momento delle forze totale:

$$M_z = \int_0^a dM_z = \int_0^a r dF_\theta = \frac{a^2 B_z}{2} I.$$

L'equazione di Newton $\mathcal{I}\dot{\omega} = M_z$ fornisce la legge di moto della velocità angolare del disco. All'istante iniziale si ha $\omega(0) = 0$ e quindi

$$\omega(t) \stackrel{t \approx 0}{\simeq} \frac{B_z V}{MR} t.$$

- b) Per effetto della rotazione, tra il centro O del disco ed il suo bordo si genera una differenza di potenziale

$$\mathcal{E} = - \int_0^a E_r^{\text{eff}}(r) dr = - \frac{B_z \omega a^2}{2}$$

dove $E_r^{\text{eff}} = v_\theta B_z = \omega r B_z$ è il campo elettrico radiale equivalente alla forza magnetica sulle cariche in moto circolare sul disco.

- b') Allo stesso risultato si arriva anche applicando la legge di Lenz $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ in maniera semi-logica, vedendo la rotazione come una variazione di area $\dot{S} = \omega a^2/2$. Ma è più sicuro evitare di applicare Lenz quando ci sono contatti striscianti ed il circuito non è bene definito.
- c) Includendo la fem magnetica \mathcal{E} generata per effetto della rotazione ω , la corrente diventa $I = (V + \mathcal{E})/R$. L'equazione del moto completa è ora risolta da

$$\omega(t) = \omega_{\text{lim}}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \omega_{\text{lim}} = \frac{2V}{a^2 B_z}, \quad \tau = \frac{2MR}{a^2 B_z^2}.$$

Per piccoli $t \ll \tau$ si riduce alla ω del punto a). Per grandi $t \gg \tau$ tende alla velocità angolare limite ω_{lim} , che può essere più semplicemente calcolata imponendo $V + \mathcal{E} = 0$ e quindi $I = 0$.

- d) La sola differenza di potenziale \mathcal{E} produce una corrente $I(t) = -B_z \omega a^2/2R$. L'equazione di moto $\mathcal{I}\dot{\omega} = M_z$ è ora risolta da $\omega(t) = \omega_1 e^{-(t-t_1)/\tau}$. (Non essendoci la batteria, è possibile ricavare nuovamente l'equazione del moto in maniera indiretta, senza usare momenti delle forze che possono portare ad errori di segno, dalla conservazione dell'energia: $\dot{K} = -W_{\text{Joule}} = RI^2$ con $K = \mathcal{I}\omega^2/2$).

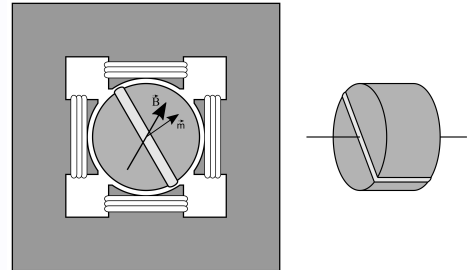
Questo motore a corrente continua ha il difetto di fare passare una corrente attraverso il disco che viene messo in moto. L'esercizio successivo mostra come un più complicato sistema basato sulla corrente alternata riesce a far girare oggetti tenendo separata la circolazione della corrente.

Esercizio 12.11: Motore elettrico a corrente alternata ©

Un motore elettrico a corrente alternata genera attraverso avvolgimenti fissi che compongono lo *statore* un campo magnetico ruotante secondo la legge

$$\mathbf{B} = B_0(\hat{x} \cos \omega_0 t + \hat{y} \sin \omega_0 t)$$

con $B_0 = 0.1$ T, $\omega_0 = 100\pi$ rad/s. Il *rotore* è costituito da un cilindro di raggio 5 cm, lunghezza 10 cm sul quale sono avvolte delle spire quadrate di resistenza $R = 10^{-4} \Omega$, induttanza $L = 2.5 \cdot 10^{-5}$ H ed area $S = 0.01$ m². La parte in moto, il rotore, non contiene nessuna batteria (a differenza del motore dell'esercizio 12.10). Iniziamo considerando, per semplicità, un singola spira assumendo che venga tenuta immobile. Si calcoli in funzione del tempo:



- a) Il flusso del campo magnetico attraverso la spira e la forza elettromotrice indotta nella spira.
- b) La corrente che attraversa la spira a regime.

c) Il momento delle forze medio $\langle M \rangle$ esercitato dal campo magnetico ruotante sulle N spire.

Il rotore viene ora lasciato libero di ruotare. Usando il motore per sollevare un carico si osserva che raggiunge una velocità angolare $\omega < \omega_0$.

d) Ricalcolare il momento delle forze medio $\langle M \rangle$ esercitato dal campo magnetico ruotante sulle N spire, dicendo a quale velocità angolare si ottiene la massima coppia media.

e) Quanto vale a tale massimo la quantità $s \equiv (\omega_0 - \omega)/\omega_0$, chiamata fattore di slittamento?

✚ Soluzione:

a) Anche quando la spira è immobile il campo magnetico ruotante genera un flusso che dipende dal tempo, $\Phi_B(t) = B_0 S \cos(\omega_0 t)$, che quindi induce la seguente f.e.m. nella spira:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega_0 B_0 S \sin(\omega_0 t) = 0.314 \text{ V} \sin(\omega_0 t).$$

b) La corrente I è data dall'equazione del circuito $\hat{\mathcal{E}} = R\hat{I} + Ld\hat{I}/dt$ dove, in notazione complessa, $\hat{\mathcal{E}} = \omega_0 B_0 S e^{i(\omega_0 t - \pi/2)}$. La soluzione a regime è quindi

$$\hat{I} = \frac{\omega_0 B_0 S e^{i(\omega_0 t - \pi/2)}}{R + i\omega_0 L} = \omega_0 B_0 S e^{i(\omega_0 t - \pi/2)} \frac{R - i\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2}.$$

La tangente della fase di I è $\tan \psi \equiv \omega_0 L/R \approx 79$. La corrente vale

$$I = \text{Re } \hat{I} = \frac{B_0 S}{L} \sin \psi \sin(\omega_0 t - \psi) \approx 40 \text{ A} \sin(\omega_0 t - \psi).$$

c) Il momento magnetico indotto è $\mu = SI$. Il momento delle forze vale

$$M = \mu B_0 \sin(\omega_0 t) = \frac{B_0^2 S^2}{L} \sin \psi \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t - \psi)$$

ed ha valore medio nel tempo diverso da zero,

$$\langle M \rangle = \frac{B_0^2 S^2}{2L} \sin \psi \cos \psi = \frac{B_0^2 S^2 R \omega_0}{2(R^2 + L^2 \omega_0^2)}.$$

Il momento delle forze medio sulle N spire vale $N\langle M \rangle$, e tende a far girare il rotore.

d) Con il rotore in rotazione con velocità angolare ω i conti precedenti continuano a valere, facendo questa unica modifica: la velocità angolare del campo magnetico rispetto al rotore diventa $\omega_0 - \omega$. Il momento magnetico indotto con il rotore in movimento è quindi

$$\mu = SI = \frac{B_0 S^2}{L} \sin \psi \sin[(\omega_0 - \omega)t - \psi]$$

dove ora $\tan \psi = (\omega_0 - \omega)L/R$. La coppia esercitata è

$$M = \mu B_0 \sin[(\omega_0 - \omega)t] = \frac{B_0^2 S^2}{L} \sin \psi \sin[(\omega_0 - \omega)t] \sin[(\omega_0 - \omega)t - \psi].$$

Il suo valore medio $\langle M \rangle$ rimane come al punto c), ed è massimo per $\tan \psi = 1$, ovvero per

$$\omega_0 - \omega = \frac{R}{L} = 5.63 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \langle M \rangle_{\text{max}} = \frac{B_0^2 S^2}{2L} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}.$$

e) Il fattore di slittamento è

$$s \equiv \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = 1.3 \cdot 10^{-4}.$$

Esercizio 12.12: Scintilla

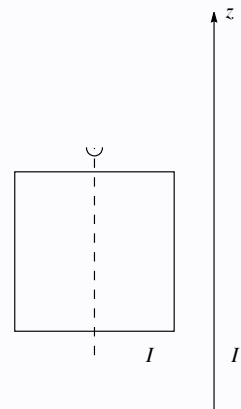
Come mai appare una scintilla accendendo o spegnendo una corrente elettrica I tramite un interruttore nell'aria?

➤Soluzione: La corrente nel filo varia da I a 0 (o il viceversa). Una corrente I produce un campo magnetico, uguale a $B_\theta = \mu_0 I / 2\pi r$ a distanza r da un filo rettilineo. C'è quindi una variazione di energia magnetica $U \sim \int dV B^2 / 2\mu_0 \sim \mu_0 I^2 L \ln(L/\rho) / 4\pi$ dove L è la lunghezza del filo, e $\rho \ll L$ il suo spessore. In base alla II equazione di Maxwell, una variazione rapida di campo magnetico produce per un breve istante un grosso campo elettrico E , circa parallelo al filo. Nell'aria un grosso E ionizza le molecole provocando una scintilla. (Nel vuoto questo non accade. Come discusso in seguito, l'energia magnetica fluisce nello spazio come descritto dal vettore di Poynting: spegnendo una corrente viene irradiata un'onda elettromagnetica).

Esercizio 12.13: Circuito e filo ©

Un circuito quadrato di lati ℓ (paralleli agli assi x e z), resistenza trascurabile e auto-induttanza $L = \mu_0 \ell c / 2\pi$ (dove c è un numero di ordine uno) si trova nel piano xz . A distanza d dal lato più vicino si trova un filo infinito percorso da una corrente I' ed orientato lungo l'asse z . Il circuito è percorso da una corrente I tale che il flusso del campo magnetico attraverso il circuito vale zero.

- Calcolare I .
- Calcolare la forza magnetica sul filo infinito.
- Il circuito quadrato viene ruotato di 180 gradi lungo il suo asse parallelo a z . Calcolare il valore finale di I ed il lavoro compiuto.
- Mostrare che per $d \gg \ell$ i risultati precedenti si riducono a quelli calcolabili approssimando il circuito come un dipolo magnetico.



➤Soluzione:

- Il campo magnetico generato dal filo vale $B_\theta(r) = \mu_0 I' / 2\pi r$. Integrando sulla superficie del circuito si trova il flusso del campo magnetico totale: $\Phi_B = LI + MI'$ con $M = \mu_0 \ell \ln(1 + \ell/d) / 2\pi$. Quindi il flusso vale zero $\Phi_B = 0$ per $I = -I' \ln(1 + \ell/d) / c$.
- La forza è uguale ed opposta alla forza sul circuito quadrato, data dalla forza sui lati lungo z a distanze d e $d + \ell$:

$$F_x = -F_x^{(d)} - F_x^{(d+\ell)} = \ell I' [B_\theta(d) - B_\theta(d + \ell)] = \frac{\mu_0 \ell I I'}{2\pi} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d + \ell} \right].$$

La forza è anche calcolabile dal gradiente dell'energia come $F_x = -\partial(MII') / \partial d$.

- Alla fine $M \rightarrow -M$. L'equazione del circuito implica che Φ_B rimane costante, quindi

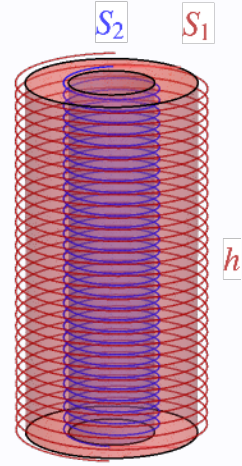
$$0 = \Phi_B = LI + MI' = LI_{\text{end}} - MI' \quad \Rightarrow \quad I_{\text{end}} = -I.$$

L'energia magnetica $U = \frac{1}{2} LI^2 + MII' + \frac{1}{2} L I'^2$ vale $U_{\text{end}} = U_{\text{in}}$, quindi il lavoro compiuto vale 0.

- Il coefficiente di mutua induzione dipolo/filo può ora essere approssimato come $M \simeq \ell^2 B_\theta / I' = \mu_0 \ell^2 / 2\pi d$, in accordo con il limite per $d \gg \ell$ dell' M calcolato sopra. In questo limite l'energia di interazione magnetica $U = MII' \simeq I \ell^2 B_\theta$ si riduce a quella $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ di un dipolo magnetico di momento $\boldsymbol{\mu} = I \ell^2$. Quindi anche la forza magnetica $F_x = -\nabla U$ si riduce, come atteso, a quella di un dipolo.

Esercizio 12.14: Solenoide in solenoide ©

Un solenoide circolare di altezza h e superficie trasversa $S_1 \ll h^2$ è composto da N_1 spire equi-spaziate percorse da una corrente elettrica I_1 . Al suo interno si trova un secondo solenoide di altezza h e superficie trasversa $S_2 < S_1$ composto da N_2 spire equi-spaziate percorse da una corrente elettrica I_2 .



- Calcolare i coefficienti di auto-induzione e di mutua induzione, L_1, L_2, M .
- Calcolare il valore di I_2 che minimizza l'energia magnetica U del sistema, ed il valore minimo di U .

Partendo da tale valore di I_2 , si inserisce una resistenza R_2 nel solenoide 2 e si lascia evolvere il sistema.

- Calcolare i valori finali I'_1 e I'_2 delle correnti al tempo $t \rightarrow \infty$.
- Calcolare la frazione di energia magnetica che viene dissipata per effetto Joule.

✚Soluzione:

- $L_i = \mu_0 S_i N_i^2 / h$ e $M = \mu_0 \min(S_1, S_2) N_1 N_2 / h = \mu_0 S_2 N_1 N_2 / h$.
- L'energia magnetica vale $U = L_1 I_1^2 / 2 + L_2 I_2^2 / 2 + M I_1 I_2$ o, equivalentemente, $U = (S_1 - S_2) h B_1^2 / 2 \mu_0 + S_2 h (B_1 + B_2)^2 / 2 \mu_0$ con $B_i = \mu_0 N_i I_i / h$. L'energia è minima per $I_2 = -I_1 N_1 / N_2$. Fisicamente questo corrisponde a campo magnetico zero, $B_1 + B_2 = 0$, all'interno del solenoide 2. Il valore minimo dell'energia magnetica è $U = \mu_0 I_1^2 N_1^2 (S_1 - S_2) / 2h$.
- Alla fine $I'_2 = 0$, e quindi il campo magnetico è uniforme. È possibile calcolare I'_1 imponendo che il flusso del campo magnetico attraverso il solenoide 1 rimane invariato, $\Phi_B = L_1 I_1 + M I_2 = L_1 I'_1$, quindi $I'_1 = I_1 + I_2 M / L_1 = I_1 + I_2 N_2 S_2 / N_1 S_1 = I_1 (1 - S_2 / S_1)$. Alternativamente, è possibile scrivere le equazioni dei circuiti 1 e 2

$$L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 = 0, \quad L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1 + R_2 I_2 = 0,$$

e risolverle:

$$I_2(t) = I_2(0) e^{-t/\tau}, \quad I_1(t) = I_1(0) + I_2(0) \frac{M}{L_1} (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 R_2}$$

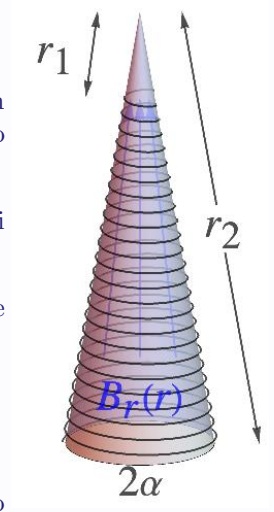
- Alla fine $U' = L_1 I_1'^2 / 2$; usando la conservazione dell'energia si deduce che l'energia dissipata vale $\Delta U = U - U' = \mu_0 I_1^2 N_1^2 (S_1 - S_2) S_2 / 2h S_1$. La frazione di energia dissipata vale $\Delta U / U = S_2 / S_1$. Alternativamente, è possibile calcolare l'energia dissipata come $\Delta U = \int_0^\infty R I_2^2 dt = R I_2^2(0) \tau / 2$.

Notare che $\tau > 0$ impone che, in generale, $M^2 < L_1 L_2$. Allo stesso risultato si arriva, più semplicemente, imponendo che l'energia dissipata per effetto Joule sia positiva: $U_i - U_f = I_2^2 (L_1 L_2 - M^2) / 2L_1$.

Un albero di Natale a forma di cono con piccolo angolo 2α viene decorato avvolgendo $N \gg 1$ volte come in figura un filo percorso da corrente elettrica I . Il numero di spire per unità di lunghezza non è costante:

$$n(r) = \frac{Nr_1r_2}{r^2(r_2 - r_1)} \quad \text{per } r_1 < r < r_2 \text{ con } r_1 \ll r_2.$$

Si utilizzi un sistema di coordinate sferiche (r, θ, φ) avente l'origine nella punta del cono, in maniera che il cono corrisponde $\theta < \alpha \ll 1$. La corrente I produce un campo magnetico radiale $B_r(r)$ all'interno del cono fra r_1 ed r_2 .



- Mostrare che, all'interno del cono, questo campo $B_r(r)$ soddisfa alla IV equazione di Maxwell nel vuoto, calcolando quanto vale il suo rotore.
- Assumendo $B_r(r) \propto 1/r^p$ si calcoli il valore di p tale da soddisfare alla III equazione di Maxwell (o al suo equivalente integrale).
- Calcolare $B_r(r)$ dato da $n(r)$.
- Calcolare l'auto-induttanza e l'energia magnetica del sistema.
- Assumendo che la corrente $I(t) = I_0 \cos \omega t$ sia lentamente variabile, calcolare il campo elettrico generato dentro il cono, assumendo che abbia componente $E_\varphi(r, \theta)$.
- Calcolare il momento di dipolo magnetico totale.

✚Soluzione:

- Un campo radiale ha rotore zero.
- Deve essere $B_r(r) = B_2(h/r)^2$ in maniera da mantenere costante il flusso di \mathbf{B} .
- Applicando Ampere ad un circuito di spessore infinitesimo sul bordo si trova $B_r(r) = \mu_0 n(r) I$.
- Approssimando una corona sferica come un cerchio in quanto $\alpha \ll 1$, l'auto-induttanza può essere calcolata integrando sulle spire come

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \int_{r_1}^{r_2} dr \pi (r\alpha)^2 n(r) B_r(r) = \frac{NSB_r}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi \alpha^2 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

L'integrale viene banale in quanto il flusso di \mathbf{B} è conservato, uguale su ogni spira. L'energia magnetica vale $U = LI^2/2$.

- Applicando la legge di Lenz $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\dot{\Phi}_B$ su di una circonferenza di raggio ρ attorno all'asse del cono a distanza r dalla sua punta si trova $2\pi\rho E_\varphi = -\pi\rho^2 \dot{B}_r$ e quindi $E_\varphi = -\rho \dot{B}_r(r)/2$. In coordinate sferiche $\rho \simeq r\theta$, quindi $E_\varphi(r, \theta) = -\theta \dot{B}_r r^2/2r$. In maniera alternativa si usa la forma differenziale $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ che in coordinate sferiche con componente E_φ diventa

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (E_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} = -\dot{B}_r, \quad \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} = 0$$

la cui soluzione regolare a piccolo angolo è $E_\varphi = -r_2^2 \dot{B}_r \tan(\theta/2)/r$ che, per $\theta \ll 1$, si riduce alla formula precedente.

- $\mu = \int_{r_1}^{r_2} dr \pi (r\alpha)^2 n(r) = INr_1r_2\alpha^2$.

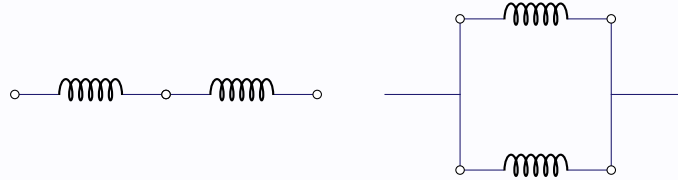
Esercizio 12.16: Generatore in orbita

Il campo magnetico terrestre all'equatore vale $B_0 = 0.5$ G. Un satellite ruota con $v = 7$ km/s su un'orbita di raggio $R = 8000$ km. Dal satellite pende un filo lungo $L = 200$ m. Calcolare la differenza di potenziale ai suoi capi.

✚**Soluzione:** Per effetto della rotazione, il satellite è soggetto ad un campo elettrico equivalente $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La differenza di potenziale vale $EL = LB_0v(R_0/R)^3 \approx 35 \text{ V}$, dove R_0 è il raggio della terra. Tuttavia, chiudendo il circuito la differenza di potenziale totale si annulla: per evitarlo si è provato a chiudere il circuito con un fascio di ioni.

Esercizio 12.17: Induttanze in serie e parallelo

Due induttanze L_1 ed L_2 percorse da correnti I_1 ed I_2 hanno mutua induttanza M . Studiare cosa si ottiene connettendole in serie o in parallelo, facendo attenzione al verso.



✚**Soluzione:** La differenza di potenziale ai capi delle induttanze vale

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \dot{I}_1 - M \dot{I}_2 \quad \mathcal{E}_2 = -L_2 \dot{I}_2 - M \dot{I}_1$$

dove $L_{1,2} > 0$ mentre M può essere positivo o negativo. Le due induttanze possono essere combinate nei modi seguenti:

- Attaccandoli in serie ‘dritti’ (la fine di 1 con l’inizio di 2, come in figura) si ha $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ e $I = I_1 = I_2$. Si ottiene quindi un’induttanza effettiva $L = L_1 + L_2 + 2M$. Deve essere $L > 0$ e quindi $M < -(L_1 + L_2)/2$.
- Attaccandoli in serie ‘a rovescio’ (ovvero invertendo 2, non disegnato) si ha $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ e $I = I_1 = -I_2$. Si ottiene quindi un’induttanza effettiva $L = L_1 + L_2 - 2M$. In effetti invertire il senso della seconda induttanza equivale ad invertire il segno di M . Deve essere $L > 0$ e quindi $M < (L_1 + L_2)/2$. Otterremo in seguito un limite più forte su $|M|$.
- Attaccandoli in parallelo ‘dritti’ (l’inizio di 1 con l’inizio di 2) si ha $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$: invertendo è possibile calcolare

$$\dot{I}_1 = -\mathcal{E} \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \dot{I}_2 = -\mathcal{E} \frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2}$$

e sommandole si ottiene che la corrente totale $I = I_1 + I_2$ è data da un’induttanza effettiva

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I} = -\mathcal{E} L \quad L = \frac{L_1 + L_2 - 2M}{L_1 L_2 - M^2}.$$

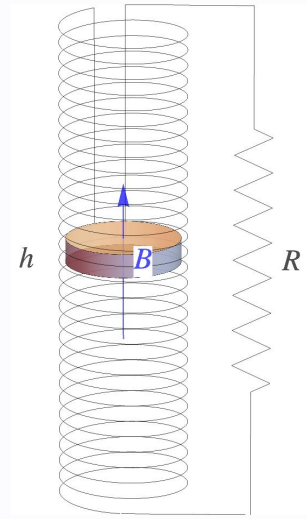
La positività di L implica $|M| < \sqrt{L_1 L_2}$, che è una condizione più stringente di quella ricavata ai punti sopra.

- Attaccandoli in parallelo ‘a rovescio’ si ottiene $L = (L_1 + L_2 + 2M)/(L_1 L_2 - M^2)$.

Notare che per $M = 0$ le induttanze si combinano come le resistenze.

Esercizio 12.18: Campo magnetico auto-sostenuto ©

La Terra è un conduttore sferico in rotazione che genera un campo magnetico. Per capire come questo sia possibile si considera un modello, costituito da un sistema analogo ma dalla geometria più semplice: un disco circolare omogeneo perfettamente conduttore di raggio a , massa M e spessore $h \ll a$, in rotazione con velocità angolare ω attorno al suo asse. Per tenere in conto la resistività della Terra e l'effetto delle correnti dentro la Terra, si aggiunge al modello Terra-piattista un circuito di resistenza totale R , che mediante un contatto strisciante connette il bordo del disco con il suo centro; la corrente I che circola nel circuito viene fatta passare in un solenoide cilindrico che circonda il disco, di altezza $H \gg a$ con n spire per unità di lunghezza.



- Calcolare, in funzione di I , il campo magnetico B in cui è immerso il disco.
- Calcolare, in funzione di B , la forza di Lorentz (si trascuri la forza centrifuga) a cui è soggetta una carica nel disco ruotante, e la risultante forza elettromotrice fra il centro del disco ed il suo bordo.
- Risolvendo l'equazione del circuito si calcoli la corrente I , deducendo poi il valore di ω tale che la corrente è auto-sostenuta.
- Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule e la conseguente decelerazione $\dot{\omega}$ della velocità angolare di rotazione, assumendo che l'energia meccanica sia molto maggiore dell'energia magnetica.

✎ Soluzione:

- $B = \mu_0 n I$.
- Le cariche in rotazione con velocità $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ sono soggette alla forza di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, ovvero ad un campo elettrico equivalente $\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ radiale, e quindi ad una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{E}_{\text{eff}} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^R a\omega r B dr = \omega B \frac{a^2}{2}.$$

- $I = \mathcal{E}/R = \omega \mu_0 n I a^2 / 2R$, che è auto-consistente per $\omega = 2R/(\mu_0 n a^2)$. Nel caso della Terra di raggio $a \sim 6000$ km si ha $n \sim 1/a$ e $R \sim 1/a\sigma$, per cui $\omega \sim 1/\sigma \mu_0 a^2$ è circa $2\pi/\text{day}$ per conducibilità $\sigma \sim 10^{-3}/\Omega \text{ m}$.
- Il sistema elettro-magnetico dissipa potenza $W = RI^2$ per effetto Joule, e questa potenza è estratta dall'energia cinetica di rotazione $K = \frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2$, dove il momento di inerzia vale $\mathcal{I} = \frac{1}{2}Ma^2$. Da $\dot{K} = W$ segue $\dot{\omega} = 2W/Ma^2\omega$.

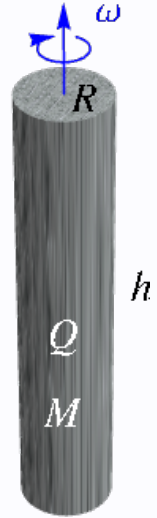
Il momento della forza magnetica può anche essere anche calcolato integrando sul volume la densità di forza di Lorentz $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ con $J_r = I/2\pi r h$

$$\mathcal{I}\dot{\omega} = M = \int dr r I B = I B \frac{a^2}{2}.$$

La consistenza fra i due risultati nuovamente fornisce la condizione in c).

(Nel complicato caso della Terra, un effetto diverso da zero nasce in quanto la corrente $J_r \sim \sigma E_r^{\text{eff}} \sim \sigma v B$ viene divisa in rotelline ('colonne di Taylor') dalla densità di forza di Coriolis $\sim \rho v \omega$. Imponendo che sia circa uguale alla densità di forza di Lorentz $\sim v J B$ fornisce una stima del valore assoluto del campo magnetico $B \sim \sqrt{\rho \omega / \sigma}$).

Una carica Q ed una massa M sono distribuite uniformemente nel volume di un cilindro di raggio R ed altezza $h \gg R$ in rotazione con velocità angolare ω costante attorno al suo asse. Si utilizzino coordinate cilindriche r, z, θ .



- Calcolare il campo elettrico $E_r(r)$ all'interno del cilindro.
- Calcolare il campo magnetico $B_z(r)$ all'interno del cilindro, essendo trascurabile il campo esterno.
- Calcolare la condizione su ω affinché, all'interno del cilindro, l'energia elettrica sia circa maggiore di quella magnetica. Per semplicità si confrontino le densità di energia elettrica e magnetica ad un valore tipico del raggio, trascurando fattori di ordine 1.
- Calcolare il fattore giro-magnetico, e poi il momento di dipolo magnetico.
- Si assuma ora che il cilindro abbia conducibilità σ . Calcolare, al primo ordine per ω piccolo, la densità di carica $\rho(r)$ nella configurazione di equilibrio statico in cui la corrente di conduzione $\mathbf{J}_{\text{cond}} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ vale zero.
- Estendere il punto precedente ad ω generico.

✚Soluzione:

- La densità di carica vale $\rho = Q/V$. Utilizzando il teorema di Gauss su di un cilindro di raggio r si trova $E_r = r\rho/2\epsilon_0 = QR/2\pi hR^2\epsilon_0$ per $r < R$.
- Risolvendo la IV equazione di Maxwell $-B'_z = \mu_0 J_\theta = \mu_0 \rho \omega r$ con $B_z(R) = 0$ si trova $B_z(r) = \mu_0(R^2 - r^2)\rho\omega/2$ all'interno del cilindro. Allo stesso risultato si arriva utilizzando il teorema di Ampere su di un circuito rettangolare di altezza h : $hB_z = \mu_0 I_{\text{conc}}$ con $I_{\text{conc}} = h\pi(R^2 - r^2)\rho(\omega/2\pi)$.
- Si ha $U_E = \int dV u_E = \int dV \epsilon_0 E^2/2 = Q^2/16\pi h\epsilon_0$ e $U_B = \int dV u_B = \int dV B^2/2\mu_0 = \mu_0(\omega QR)^2/24\pi h$. Quindi $U_E > U_B$ per $\omega < \sqrt{3/2}c/R$. Il fattore di ordine uno è poco significativo in quanto campi sono presenti anche al di fuori del cilindro. Imponendo più semplicemente $u_E \gtrsim u_B$ a $r \sim R/2$ si ottiene $\omega \lesssim c/R$.
- Si ha $g = 1$ in quanto massa e carica sono distribuite alla stessa maniera. Il dipolo magnetico vale quindi $\mu = QL/2M = QR^2\omega/4$ con $L = I\omega$ e momento di inerzia $I = MR^2/2$. Allo stesso risultato si arriva tramite il calcolo diretto

$$\mu = \frac{1}{2} \int dV (\mathbf{r} \times \mathbf{J})_z = \frac{1}{2} \int h 2\pi r dr r \rho \omega = \frac{QR^2\omega}{4}.$$

- Se $\omega = 0$ tutte le cariche si dispongono sul bordo, e $E_r^{(0)} = 0$ all'interno del conduttore. Per piccolo ω queste cariche sul bordo producono all'interno del cilindro il campo magnetico di un solenoide, $B_z^{(0)} = \mu_0 I/h = \mu_0 \omega Q/2\pi h$. Le cariche si dispongono in maniera tale che all'equilibrio valga zero la corrente di conduzione $J_r^{\text{cond}} = \sigma(E_r + \omega r B_z = 0)$. (Verifica del segno: la forza magnetica tra cariche che girano è repulsiva, come tra fili percorsi da correnti opposte). Se $\omega \neq 0$ occorre quindi un campo elettrico

$$E_r = -\omega r B_z \simeq -\omega r B_z^{(0)}$$

al primo ordine in piccolo ω . La densità di carica necessaria per generare questo campo magnetico è uniforme $\rho = \epsilon_0(rE_r)' / r = -Q\omega^2/\pi h c^2$ in base alla 1a equazione di Maxwell in coordinate cilindriche. La carica totale che si sposta dal bordo nel volume è $Q_{\text{vol}} = V\rho = -Q(\omega R/c)^2$.

- Per ω generico, calcoliamo i campo in funzione della ignota distribuzione di carica $\rho(r)$. La componente r della 1a equazione di Maxwell, e la componente θ della 4a equazione forniscono:

$$(rE_r)' / r = \rho/\epsilon_0, \quad -B'_z = \mu_0 J_\theta = \mu_0 \rho \omega r.$$

Assieme a $E_r + \omega r B_z = 0$ abbiamo 3 equazioni per le 3 incognite $E_r(r)$, $B_z(r)$ e $\rho(r)$. È possibile risolverle, ad esempio eliminando E_r e poi ρ , trovando $B'_z + (r^2 B_z)'\omega^2/c^2 = 0$, risolta da

$$B_z = \frac{k}{1 + r^2\omega^2/c^2}, \quad E_r = \frac{kr\omega}{1 + r^2\omega^2/c^2}, \quad \rho = \frac{2k\epsilon_0\omega}{(1 + r^2\omega^2/c^2)^2}$$

dove k è una costante arbitraria, che rimane fissata (similmente al punto precedente) imponendo che il campo magnetico a $r = R$ sia generato dalle cariche rimaste sulla superficie, $B_z(R) = \mu_0 \omega Q_{\text{sup}} / 2\pi h$, e che $Q_{\text{sup}} + Q_{\text{vol}} = 0$. Calcolando si trova

$$Q_{\text{sup}} = \frac{Q}{1 + (1 + \omega^2 R^2 / c^2) \ln(1 + \omega^2 R^2 / c^2)} \stackrel{\omega \ll c/R}{\simeq} Q \left(1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \right)$$

che si riduce al risultato precedente nel limite di piccolo ω .

Forze magnetiche fra circuiti

Esercizio 13.1: Due circuiti lunghi

Si considerino i due circuiti rigidi in figura, di lunghezza $L \gg d$. Due generatori di corrente mantengono le correnti I_1 ed I_2 costanti. Le resistenze elettriche sono trascurabili. a) Determinare le forze esterne necessarie a mantenere i circuiti fermi come in figura. b) Determinare il coefficiente di mutua induzione. c) Lasciando libero uno dei circuiti di muoversi, determinare la sua energia cinetica a distanza infinita.



➤ Soluzione:

- a) Dominano le forze fra i fili lunghi. Chiamandoli 1,2,3,4 dall'alto in basso e sommando i contributi si ottiene la forza totale, trovando che è repulsiva:

$$F = F_{14} + (F_{13} + F_{24}) + F_{23} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{2} + 1 \right] = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{3d}.$$

F_{23} e F_{14} sono repulsive in quanto forze fra fili con correnti che scorrono in versi opposti; $F_{13} = F_{24}$ sono attrattive.

- b) Il coefficiente di mutua induzione è negativo, $M < 0$, in quanto i due circuiti sono 'esterni': uno raccoglie il flusso del campo magnetico generato dall'altro nella regione in cui \mathbf{B} 'torna indietro'. Lungo il piano che contiene i due circuiti, a distanza x dal filo 2, il campo magnetico vale

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+d} \right] \quad \Rightarrow \quad \Phi_B = L \int_d^{2d} B dx = M I_1 \quad \Rightarrow \quad M = -\frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln \frac{4}{3}.$$

- c) Sfruttiamo la conservazione dell'energia

$$U_I + \mathcal{L} = U_F + K$$

dove K è l'energia cinetica che si vuole calcolare. U_F ed U_I sono le energie magnetiche finali ed iniziali, date da $U = \frac{1}{2} L_{ij} I_i I_j$. Le correnti non variano: varia solo $L_{12} = M$, uguale a zero alla fine, e calcolato all'inizio al punto b). \mathcal{L} è il lavoro fatto dai generatori che mantengono costanti le correnti dando differenza di potenziale V_i tale che $V_i + \mathcal{E}_i = 0$:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \int_{t_I}^{t_F} I_i V_i dt = \sum_{i=1}^2 \int_{t_I}^{t_F} I_i \frac{d\Phi_i}{dt} dt = \sum_{i=1}^2 I_i [\Phi_{iF} - \Phi_{iI}] = I_1 [0 - M I_2] + I_2 [0 - M I_1] = -2 M I_1 I_2$$

Quindi $K = (U_F - U_I) + \mathcal{L} = (1 - 2) M I_1 I_2 = -M I_1 I_2 > 0$, in accordo con il fatto che la forza è repulsiva.

c') Si può anche procedere in maniera calcolosa, scrivendo la forza magnetica a distanza $r > d$ generica

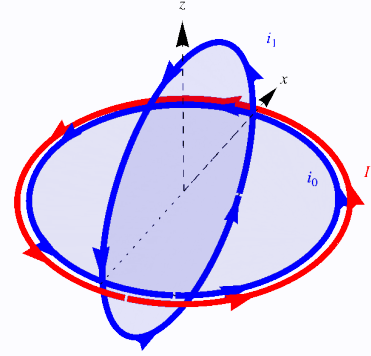
$$F(r) = F_{14} + (F_{13} + F_{24}) + F_{23} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} I_1 I_2 f(r), \quad f(r) = \frac{1}{2d+r} - \frac{2}{d+r} + \frac{1}{r}$$

ed integrandola sullo spostamento, ottenendo $K = \int_d^\infty F dr$. Il calcolo di $\int_d^\infty f dr = \ln(4/3)$ è complicato dal fatto che i singoli termini divergono. A grande distanza $r \gg d$ si ha $f \simeq 2d^2/r^3$ e la forza deve ridursi a quella fra due dipoli magnetici $\mu_i = LdI_i$.

Esercizio 13.2: Rotazione di due spire circolari ©

Due spire conduttrici circolari coplanari diposte nel piano xy hanno raggi diversi in modo trascurabile, sezione del filo trascurabile, resistenza R e coefficiente di autoinduzione L . La spira interna è libera di ruotare attorno all'asse x e inizialmente percorsa da una corrente i_0 , mentre la spira esterna è fissa e collegata ad un generatore ideale di corrente che eroga la corrente I . Le correnti scorrono nello stesso verso. All'istante $t = 0$ ed in un tempo trascurabile rispetto al tempo caratteristico del sistema, la spira interna viene ruotata di 90° e fermata.

- Si calcoli la relazione tra il coefficiente di autoinduzione L delle spire e quello di mutua induzione M sia al tempo $t < 0$ (quando le spire sono coplanari) sia a $t > 0$ (dopo aver effettuato la rotazione).
- Supponendo trascurabile la caduta ohmica nella spira interna durante la rotazione, si calcoli la corrente che circola in essa all'istante dell'arresto.
- Si calcoli il lavoro fornito dal generatore di corrente durante la rotazione.
- Sapendo che l'energia dissipata nella spira interna per effetto Joule durante il tempo transitorio di scarica successivo alla rotazione della spira è \mathcal{L}_J , si determini L .
- Si calcoli il lavoro meccanico $\mathcal{L}_{\text{mecc}}$ speso per far ruotare la spira.



◀Soluzione:

- All'inizio $M_0 = L$. Dopo la rotazione $M = M_1 = 0$, come si può vedere da considerazioni di simmetria.
- Durante la rotazione la f.e.m. ai capi della spira interna è $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt = Ri$. Siccome la rotazione avviene molto velocemente possiamo trascurare Ri , e quindi il flusso totale $\Phi_B = MI + Li$ rimane costante. Quindi $Li_1 = Li_0 + M_0I$ cioè $i_1 = i_0 + I$.
- Il lavoro fornito dal generatore di corrente è calcolabile integrando nel tempo la potenza $W = \mathcal{E}_{\text{gen}}I$, dove $\mathcal{E}_{\text{gen}} + \mathcal{E} = RI$. Si ha quindi $\mathcal{E}_{\text{gen}} = RI + \dot{\Phi}_B$ ed il lavoro

$$\mathcal{L}_{\text{gen}} = \int_0^{\Delta t} dt \left(RI + \dot{\Phi}_B \right) I \approx I \Delta \Phi_B = RI^2 \Delta t + I \Delta(Mi).$$

Nel passaggio finale abbiamo trascurato la dissipazione ohmica nel limite $\Delta t \rightarrow 0$ di rotazione rapida. Essendo $\Delta(Mi) = -M_0i_0 = -Li_0$, risulta che $\mathcal{L}_{\text{gen}} = -Li_0I$. Verifica del segno: il sistema da solo tenderebbe ad aumentare I per opporsi alla variazione di Φ_B , che decresce. Siccome invece I viene mantenuta costante, il generatore riceve energia.

- Dopo la rotazione, la resistenza ha tempo di dissipare per effetto Joule l'energia magnetica immagazzinata nella spira interna, che è diventata indipendente dalla spira esterna. Quindi l'energia dissipata per effetto Joule vale

$$\mathcal{L}_{\text{Joule}} = \frac{L}{2} i_1^2 = \frac{L}{2} (i_0 + I)^2.$$

- Trascurando la dissipazione Joule durante la veloce rotazione, dalla conservazione dell'energia $U_0 + \mathcal{L}_{\text{gen}} + \mathcal{L}_{\text{mecc}} = U_1$ segue che

$$\mathcal{L}_{\text{mecc}} = U_1 - U_0 - \mathcal{L}_{\text{gen}} = \frac{L}{2} (i_1^2 + I^2) - \frac{L}{2} (i_0^2 + I^2) - M_0Ii_0 + LIi_0 = \frac{L}{2} I(I + 2i_0).$$

Calcolare il lavoro meccanico come integrale $\mathcal{L}_{\text{mecc}} = \int \mathcal{M} d\theta$ del momento delle forze sarebbe più complicato, ma consente di vedere subito che vale zero per $I = 0$.

Esercizio 13.3: Pulsar

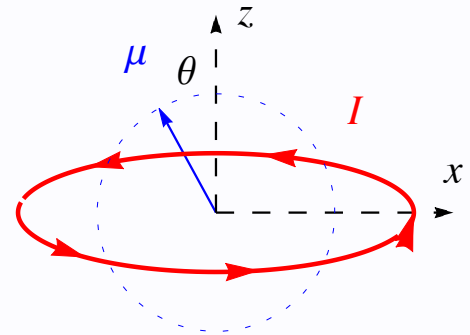
Una stella di massa M , raggio $R \sim 10^6$ km, periodo di rotazione $T \sim 10$ yr, campo magnetico $B \sim 10^{-2}$ T finisce il combustibile nucleare e collassa gravitazionalmente da densità atomica fino a densità nucleare, ovvero fino a $R' \sim R/10^5 \sim 10$ km. Calcolare, dopo il collasso: a) il periodo di rotazione T' ; b) il campo magnetico B' .

➤Soluzione:

- a) Come visto a fisica 1, è costante il momento angolare $L \sim MR^2\omega$: quindi $T' = T(R'/R)^2 \sim 0.01$ s.
- b) Come visto a fisica 2, all'esercizio precedente, rimane costante un qualche 'flusso del campo magnetico' in quanto il collasso è così rapido da non dare tempo alle resistenze di operare. Essendo un oggetto piuttosto che un circuito il flusso non è perfettamente definito, occorrerebbe risolvere le equazioni di Maxwell. Ma il grosso della fisica è catturato stimando il flusso come $\Phi_B \sim BR^2$ e quindi deducendo $B' \sim B(R'/R)^2 \sim 10^8$ T. Le stelle di neutroni con enormi campi magnetici sono dette pulsar, in quanto la rotazione rapida, combinata con il fatto che il campo magnetico non esce esattamente dal polo, produce un tipico segnale pulsante.

Esercizio 13.4: Una spira ed un dipolo ☺

Un dipolo con momento magnetico μ è posto al centro di una spira circolare di raggio a . Il sistema di assi cartesiani è fissato in modo che l'origine sia nel centro della spira e gli assi x e y nel suo piano. Il dipolo viene fatto ruotare con velocità angolare costante, $\theta = \omega t$, nel piano x, z (vedi figura).



- a) Si determini la corrente che scorre nella spira sapendo che essa ha resistenza elettrica R e coefficiente di autoinduzione trascurabile.
- b) Si determini il momento meccanico esterno necessario a mantenere il dipolo in rotazione.
- c) Si mostri che la potenza meccanica media fornita è eguale alla potenza dissipata per effetto Joule.

La spira sia connessa a un generatore di corrente costante I .

- d) Se il dipolo ha massa m e si può muovere lungo z , si determini l'orientamento relativo della corrente nella spira e del dipolo perchè la forza lungo z sia di richiamo attorno al punto $z = 0$ e la frequenza delle sue piccole oscillazioni.

➤Soluzione:

- a) Integrando sul cerchio nel piano xy si ha il flusso $\Phi_S = \int_0^a 2\pi r dr B_z$, dove la componente z del campo magnetico riceve contributo solo dal secondo termine nell'espressione seguente:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mu \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mu}{r^3} \right)_z = -\frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3} \cos \theta.$$

Tuttavia B_z ed il flusso divergono vicino al dipolo ad $r \rightarrow 0$. Questo segnala un problema più generale: l'approssimazione di dipolo lontano dal dipolo, non attorno al dipolo. Per evitare l'origine, si può integrare su di una superficie arbitraria che evita il centro. Tuttavia l'integrale diventa complicato. Per semplificare si può considerare il limite di una superficie infinita, che si espande lungo il piano (a testa in giù), e si chiude ad infinito. È possibile quindi ottenere il flusso interno alla circonferenza come meno il flusso esterno, integrando dove vale l'approssimazione di dipolo:

$$\Phi_S = - \int_a^\infty 2\pi r dr B_z = \frac{\mu_0\mu}{2a} \cos \theta.$$

Il ribaltamento del segno può anche essere capito tenendo conto che il flusso esatto (ignoto) vale zero se calcolato su tutto il piano, in quanto non esistono cariche magnetiche. La corrente I è data da

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_S}{\partial t} = \frac{1}{R} \frac{\mu_0 \mu \omega}{2a} \sin \omega t.$$

- a)' Allo stesso risultato si arriva senza fare conti, con il seguente trucco. Il dipolo magnetico è equivalente ad una spiretta di superficie s percorsa da corrente i tale che $\mu = si$. La corrente nella spira grossa dipende dalla variazione del flusso di mutua induzione della spiretta sulla spira. È complicato calcolarlo, mentre è facile calcolare il coefficiente di mutua induzione $M(\theta)$ dalla spira sulla spiretta. Per via di un teorema generale i due coefficienti sono uguali. Ricordando che il campo magnetico nel centro della spira vale $B_z = \mu_0 I / 2a$ abbiamo

$$M(\theta) = \frac{\Phi_s(\theta)}{I} = \frac{\mu_0 s}{2a} \cos \theta.$$

Quindi il flusso indotto dalla spiretta (dipolo) sulla spira è

$$\Phi_S = i \cdot M(\theta) = \frac{\mu_0 s \cdot \cos \theta}{2a} i = \frac{\mu_0 \mu}{2a} \cos \theta$$

e non dipende dalla superficie s arbitraria della spiretta.

- b) Il momento meccanico esterno \mathbf{M} deve essere opposto al momento delle forze dovuto all'interazione tra dipolo e campo della spira, $\mathbf{M} = -\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$, che ha solo componente

$$M_y = \mu_x B_z = \mu B_z \sin \omega t = \frac{\mu^2 \mu_0^2 \omega}{4Ra^2} \sin^2 \omega t$$

- c) La potenza W sviluppata dal momento delle forze esterne è

$$W = M_y \omega = \frac{\mu^2 \mu_0^2 \omega^2}{4Ra^2} \sin^2 \omega t$$

eguale alla dissipazione Joule $W_J = \mathcal{E}^2 / R$.

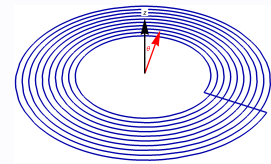
- d) Affinchè la forza sia di richiamo il potenziale $U(z) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ deve essere minimo a $z = 0$, quindi $\boldsymbol{\mu}$ e \mathbf{B} devono essere concordi. La forza è:

$$F_z = m\ddot{z} = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I a^2 z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \simeq -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I z}{a^3}$$

da cui la frequenza delle piccole oscillazioni, $\omega = \sqrt{3\mu_0 I / 2ma^3}$.

Esercizio 13.5: Un dipolo ed N spire ©

Un filo di resistività ρ e sezione S viene avvolto $N \gg 1$ volte a formare una spirale di passo costante, raggio interno r_1 , raggio esterno r_2 , e poi chiuso a formare un circuito come mostrato in figura.



- a) Assumendo che il circuito sia percorso da corrente I , calcolare il campo magnetico generato dal circuito nel suo centro.

Un dipolo magnetico μ si trova nel centro della spira, e viene fatto girare lentamente nel piano xz , formando un angolo $\theta = \omega t$ rispetto all'asse della spira.

- b) Calcolare il flusso Φ_B del campo magnetico generato dal dipolo attraverso la spira. Come dipende da N ?
- c) Calcolare la corrente I nella spira, trascurando l'auto-induttanza. Come dipende da N ?
- d) Calcolare la potenza meccanica W_{mecc} necessaria per far girare il dipolo.

♣Soluzione:

- a) Un circuito circolare di raggio r percorso da una corrente I genera, nel suo centro, $B_z = \mu_0 I / 2r$. Quindi

$$B_z = \sum_n \frac{\mu_0 I}{2r_n} \stackrel{N \gg 1}{\simeq} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{(r_2 - r_1)/N} \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{IN\mu_0}{2} \frac{\ln(r_2/r_1)}{r_2 - r_1}.$$

- b) Usando la simmetria dei coefficienti di mutua induzione, il flusso del dipolo magnetico sulla spira vale

$$\Phi_B = \frac{N\mu_0}{2} \frac{\ln(r_2/r_1)}{r_2 - r_1} \mu \cos \omega \propto N.$$

Qualora uno volesse calcolarlo integrando direttamente, la superficie conta n volte il cerchio di raggio r_n .

- c) $I = \mathcal{E}/R$ con $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$. La resistenza vale $R = \rho L/S$ dove $L = N\pi(r_1 + r_2)$ è la lunghezza del circuito. Quindi $I = S\mu\mu_0 \ln(r_2/r_1)\omega \sin(\omega t)/2\pi\rho(r_2^2 - r_1^2)$ non dipende da N .
- d) La potenza meccanica è uguale alla potenza dissipata per effetto Joule, $W_J = RI^2 \propto N$, ed è anche calcolabile direttamente come $W_{\text{mecc}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\mu}$ o come \dot{U} con $U = -\mu_z B_z$.

Esercizio 13.6: Monopolo magnetico

Una particella si muove a velocità v costante, $z = vt$, lungo l'asse z di una spira circolare di raggio a . Si calcoli la corrente I nella spira, assumendo che abbia: 1) auto-induttanza L e resistenza trascurabile; 2) resistenza R ed auto-induttanza trascurabile; Si considerino i due casi in cui la particella è: a) un dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}$; b) un monopolo magnetico q_M .

◀Soluzione: La particella induce un flusso del campo magnetico e quindi una fem $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$. Consideriamo prima i possibili circuiti:

- 1) Se il circuito ha solo un'auto-induttanza si ha $\mathcal{E} = L\dot{I}$ e quindi la corrente è $I(t) = I_0 - \Phi_B(t)/L$.
- 2) Se il circuito ha solo una resistenza si ha $\mathcal{E} = RI$, quindi la corrente è $I = -\dot{\Phi}_B/R$.
- 3) Se sia R che L non sono trascurabili, occorre risolvere l'equazione differenziale $\mathcal{E} = L\dot{I} + RI$.

Consideriamo ora le possibili particelle:

- a) **Dipolo magnetico.** Usiamo lo stesso trucco usato alla domanda a) dell'esercizio precedente, che diventa ancora più conveniente ora che il dipolo non è più nel centro. Il dipolo è visto come una spiretta, $\mu = si$. È facile calcolare il coefficiente di induzione della spira sulla spiretta, che è uguale al coefficiente di induzione della spiretta sulla spira, che permette di calcolare il flusso del campo magnetico del dipolo attraverso la spira

$$M = \frac{\Phi_B(s)}{I} = \frac{\mu_0 a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} s \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad \Phi_B(S) = iM = \frac{\mu_0 a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \mu \cos \theta$$

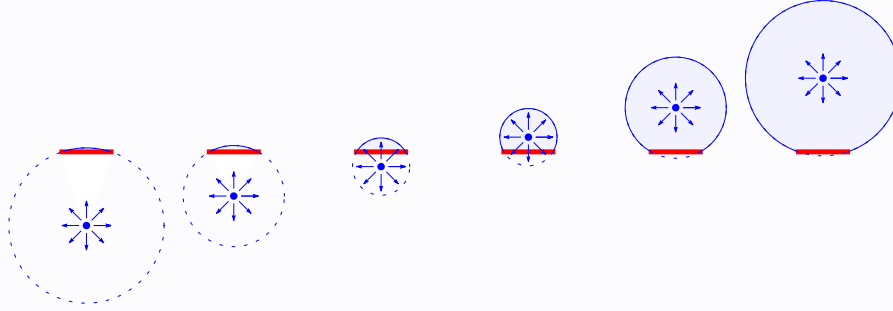
dove θ è l'angolo che fa il dipolo rispetto alla spira e $z = vt$.

- b) **Monopolo magnetico.** Un monopolo magnetico q_M è una particella ipotetica che produrrebbe un campo magnetico a simmetria sferica, $B_r = q_M/r^2$ (la definizione della normalizzazione di q_M è arbitraria). Il flusso attraverso la spira è calcolabile, senza fare nessun integrale, considerando come superficie non un cerchio ma una calotta sferica centrata sul dipolo, la cui area è $2\pi r^2[1 - \cos \theta_{\text{sotteso}}]$. Quindi

$$\Phi_B = 2\pi q_M [1 - \cos \theta_{\text{sotteso}}] = 2\pi q_M \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right].$$

Notare che la funzione ha carattere topologico: non è possibile avere $\Phi_B = 0$ sia per $z \rightarrow -\infty$ che per $z \rightarrow +\infty$ se $\Phi_B(z)$ è funzione continua. Il disegno spiega intuitivamente il motivo: la calotta sferica

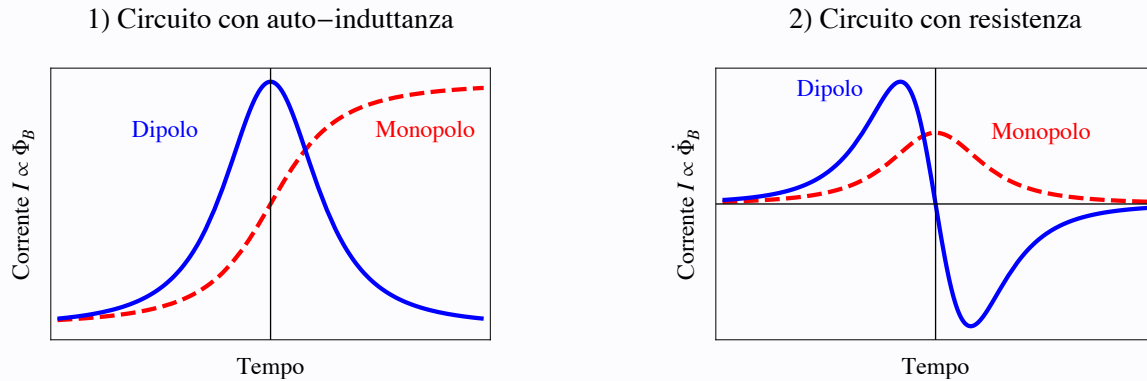
cambia lato, e per costruzione non si sovrappone mai al monopolo.



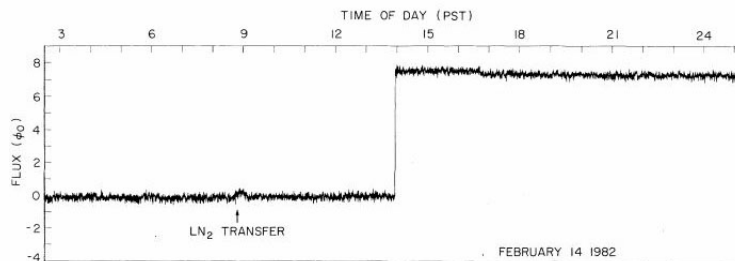
Evitando il trucco della calotta sfera, ed integrando sul cerchio nel piano della spira, definendo r la distanza dal centro si ha $B_z = q_M z / (r^2 + z^2)^{3/2}$ e $\Phi_B = \int_0^a 2\pi r dr B_z$ discontinuo a $z = 0$ quando l'integrando diverge. Si può aggirare la divergenza integrando sul piano complementare a $r > a$, riottenendo

$$\Phi_B = 2\pi q_M - \int_a^\infty 2\pi r dr B_z = 2\pi q_M \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right].$$

La figura mostra l'andamento temporale di $I = I_0 - \Phi_B/L$ e $I = -\dot{\Phi}_B/R$ nei due casi: non occorre monitorare in maniera continua un circuito con auto-induttanza.



Notare che i due risultati sono legati come $\Phi_B^{\text{dipolo}}/d = d\Phi_B^{\text{monopolo}}/dz$: infatti due monopoli magnetici q_M a distanza $d = \mu\mu_0 \cos\theta/4\pi q_M$ piccola formano un dipolo magnetico μ . Il monopolo magnetico produrrebbe un segnale caratteristico, che nessuno ha mai visto, eccetto forse Blas Cabrera:



Due spire conduttrici 1 e 2 hanno coefficienti di auto-induzione $L_{1,2}$. Sono situate lungo lo stesso asse z a distanza tale che il coefficiente di mutua induzione vale M . Inoltre la spira 2 ha resistenza R . Si invia nella spira 1 la corrente

$$I_1(t) = \begin{cases} It/\tau & \text{per } t < \tau \\ I & \text{per } t > \tau \end{cases}.$$

I_2, L_2, R, m

M

Si determini:

- La corrente $I_2(t)$ nella spira 2;
- L'energia totale dissipata nella resistenza R .
- La carica Q_2 che attraversa R .

$I_1(t), L_1$

Nell'ipotesi che la spira 2 di massa m sia situata a quota superiore e sia libera di muoversi verticalmente lungo il suo asse parallelo al campo gravitazionale g , che $R = 0$ e che τ sia abbastanza piccolo in modo che M resti costante per $0 < t < \tau$ si determini, ripetendo l'immissione della corrente I_1

- la quota massima raggiunta dalla spira superiore, sapendo che in questa posizione il suo coefficiente di mutua induzione è M' .

▲Soluzione:

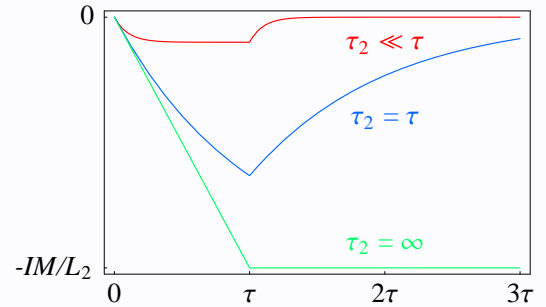
- I_2 è data dall'equazione del circuito 2

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} + RI_2 = 0, \quad I_2(0) = 0.$$

Per $t < \tau$ è come se il circuito RL_2 fosse caricato da una batteria costante $M\dot{I}_1 = MI/\tau$: la nota soluzione è

$$I_2(t) = \frac{MI}{R\tau} (e^{-t/\tau_2} - 1)$$

dove $\tau_2 = L_2/R$. Per $t > \tau$ si ha $dI_1/dt = 0$ e quindi la nota scarica di un circuito RL_2 : $I_2(t) = I_2(\tau)e^{-(t-\tau)/\tau_2}$. La figura mostra il risultato per diversi valori di τ/τ_2 .



- L'energia dissipata vale

$$W = \int_0^\infty dt R I_2^2(t) = \frac{I^2 M^2}{R\tau^2} [\tau - \tau_2 + e^{-\tau/\tau_2} \tau_2]$$

Per $\tau_2 \ll \tau$ si ha $I_2(\tau) \simeq -IM/R\tau$ e $W \simeq R\tau(MI/R\tau)^2 \rightarrow 0$ dominata da $0 < t < \tau$.

Per $\tau_2 \gg \tau$ si ha $I_2(\tau) \simeq -IM/R\tau_2 = -IM/L_2$ e $W \simeq L_2 I_2^2(\tau)/2$ dominata da $\tau < t \lesssim \tau_2$.

- La carica totale che attraversa la resistenza è calcolabile come

$$Q_2 = \int_0^\infty dt I_2 = -\frac{MI}{R}.$$

Il risultato è semplice: lo si può alternativamente ottenere senza nessun calcolo usando $I_2 = -\dot{\Phi}_B/R$ e quindi $Q_2 = (\Phi_{Bi} - \Phi_{Bf})/R$. Sia all'inizio che alla fine si ha $I_2 = 0$ e quindi il flusso è semplicemente dato da $\Phi_B(t) = M(t)I_1(t)$ (cioè $\Phi_{Bi} = 0$ e $\Phi_{Bf} = MI$).

- Per $R = 0$ si ha $\mathcal{E}_2 = 0 = \dot{\Phi}_{B2}$ quindi $\Phi_{B2} = MI_1 + LI_2$ è costante. Siccome all'inizio $\Phi_{B2} = 0$ e siccome I_1 raggiunge subito il valore costante $I_1(t > \tau) = I$, alla massima quota si ha $I_2 = -M'I/L_2$. Imponiamo adesso la conservazione dell'energia, $\Delta U_{\text{mag}} + \Delta U_{\text{grav}} = \mathcal{L}_{\text{gen}}$, tenendo conto del lavoro compiuto dal generatore di corrente I_1 . L'energia magnetica vale

$$U_{\text{mag}} = \frac{L_1}{2} I_1^2 + \frac{L_2}{2} I_2^2 + M(t) I_1 I_2 = \frac{L_1}{2} I^2 - \frac{M^2(t)}{2L_2} I^2, \quad \Delta U_{\text{mag}} = \frac{1}{2} (M^2 - M'^2) \frac{I^2}{L_2}.$$

L'energia fornita dal generatore con $V_1 = -\mathcal{E}_1$ vale

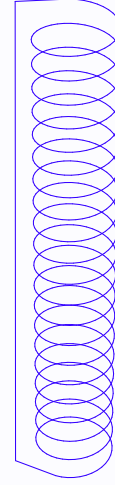
$$\mathcal{L}_{\text{gen}} = \int I_1 V_1 dt = I \int \frac{d}{dt} (M I_2 + L_1 I_1) = (M^2 - M'^2) \frac{I^2}{L_2} = -2\Delta U_{\text{mag}}.$$

L'energia gravitazionale vale $\Delta U_{\text{grav}} = mg \Delta z$. Imponendo la conservazione dell'energia si ottiene

$$\Delta z = \frac{M^2 - M'^2}{2} \frac{I^2}{mg L_2}.$$

Esercizio 13.8: Molla magnetica ©

Una molla di lunghezza a riposo d , lunghezza iniziale $\ell = d/2$, costante elastica k è costituita da $N \gg 1$ spire conduttrici di sezione circolare $S \ll d^2$ (in modo da poter essere approssimata come un solenoide fitto e lungo) e resistenza trascurabile percorse da una corrente iniziale I_0 .



- Determinare come varia la corrente I se ℓ viene variato.
- Determinare il valore di I_0 tale che $\ell = d/2$ sia posizione di equilibrio.

La corrente viene mantenuta costante al valore I_0 da un generatore esterno, e la molla viene lentamente allungata fino a raggiungere la lunghezza di riposo d .

- Calcolare il lavoro delle forze esterne.
- Calcolare la variazione di energia magnetica.
- Calcolare il lavoro compiuto dal generatore.

♣Soluzione:

- La corrente varia in modo da mantenere costante il flusso del campo magnetico $\Phi = LI$ con $L = \mu_0 S N^2 / \ell$. Quindi $I = I_0 L_0 / L = I_0 (2\ell / d)$.
- L'energia magnetica vale $U = LI^2 / 2 = \Phi_0^2 / 2L$. Essendo proporzionale ad ℓ possiamo scriverla come $U = -F_{\text{mag}} \ell$ dove $F_{\text{mag}} = -2\mu_0 I_0^2 S N^2 / d^2$ è la costante forza magnetica lungo l'asse. Per capire che il suo segno è attrattivo basta pensare che la forza magnetica tende ad attirare fili percorsi da correnti nello stesso verso. Non è facile calcolarla in maniera diretta come $\mathbf{F}_{\text{mag}} = I \oint d\mathbf{\ell} \times \mathbf{B}$, in quanto la forza sulle spire nella zona interna tende a cancellarsi (ciascuna spira ha altre spire sopra e sotto), e la forza risulta come effetto ai bordi (le spire esterne sono attratte verso l'interno). Imponendo $F_{\text{mag}} + F_{\text{el}} = 0$, dove $F_{\text{el}} = k(d/2)$ è la forza repulsiva elastica, si trova $I_0 = d^{3/2} k^{1/2} / 2 N S^{1/2} \mu_0^{1/2}$.
- La forza magnetica $F_{\text{mag}}(\ell) = -\mu_0 I_0^2 N^2 S / 2\ell^2 = -d^3 k / 8\ell^2$ e la forza elastica $F_{\text{el}}(\ell) = k(d - \ell)$ sono state calcolate al punto b), e rimangono le stesse anche ora che I_0 viene mantenuto costante. Compiono quindi lavoro

$$\mathcal{L}_{\text{mecc}} = \int_{d/2}^d d\ell (F_{\text{el}} + F_{\text{mag}}) = \left[-\frac{k}{2} (d - \ell)^2 + \frac{d^3 k}{8\ell} \right]_{d/2}^d = 0.$$

La cancellazione non è dovuta a nessun motivo di principio.

- L'energia magnetica dipende da ℓ come $U_{\text{mag}} = LI_0^2 / 2 \propto 1/\ell$. Quindi $\Delta U_{\text{mag}} = (I_0^2 / 2) \Delta L = -\mu_0 I_0^2 N^2 S / 2d$.
- Il bilancio energetico $\mathcal{L}_{\text{gen}} + \mathcal{L}_{\text{mecc}} = \Delta U_{\text{molla}} + \Delta U_{\text{mag}}$ consente di ricavare \mathcal{L}_{gen} . Alternativamente, il calcolo diretto fornisce

$$\mathcal{L}_{\text{gen}} = \int V I dt = I_0 \Delta \Phi = I_0^2 \Delta L = -\frac{\mu_0 I_0^2 N^2 S}{d}.$$

Esercizio 13.9: Forza magnetica dall'energia

Una sbarra ferromagnetica con $\mu = 10^3 \mu_0$ e di area S viene inserita per una lunghezza z in un solenoide di area S , lunghezza $d > z \gg \sqrt{S}$ e contenente n spire per unità di lunghezza. Mostrare che viene attratta dentro, e calcolare la forza.

➤Soluzione: In assenza della sbarra, il coefficiente di auto-induzione del solenoide vale $L = \mu_0 n^2 S d$. È possibile vederlo come serie $L = L_{d-z} + L_z$ di due solenoidi di lunghezze $d-z$ e z . La loro mutua induzione è trascurabile nel limite di solenoide lungo. Inserendo la sbarra, L_z diventa $L_z = \mu n^2 S z$. L'induttanza totale vale $L \simeq L_z$ per $\mu \gg \mu_0$. La forza è ottenuta applicando la formula

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} I^2 \nabla L \quad \Rightarrow \quad F = \frac{I^2}{2} \mu n^2 S$$

e va nella direzione di aumentare L .

Campi magnetici nella materia

La densità di corrente totale \mathbf{J} viene divisa in corrente libera \mathbf{J}_{free} (usualmente chiamata \mathbf{J} , con abuso di notazione) e corrente di magnetizzazione $\mathbf{J}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}$. Si definisce il vettore \mathbf{H} come $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ in modo che le equazioni di Maxwell magnetiche diventano

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{free}}.$$

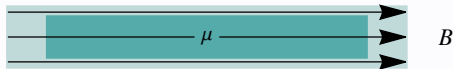
Quindi le condizioni di raccordo sul bordo fra due materiali sono:

$$\Delta B_{\perp} = 0, \quad \Delta H_{\parallel} = \Upsilon_{\text{free}}.$$

In molti materiali la magnetizzazione è approssimativamente legata ad H da $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ e quindi $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ con $\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$. La precessione di Larmour dà il diamagnetismo, $\chi < 0$. L'allineamento dei dipoli elementari dà il paramagnetismo, $\chi > 0$. Materiali ferromagnetici hanno $\mu \sim 10^{3 \div 5} \mu_0$.

Esercizio 14.1: Ferromagnete in campo esterno

È presente un campo magnetico esterno \mathbf{B}_{out} . Calcolare il campo magnetico all'interno di un parallelepipedo ferromagnete a) lungo parallelamente a \mathbf{B}_{out} ; b) lungo perpendicolarmente a \mathbf{B}_{out} .



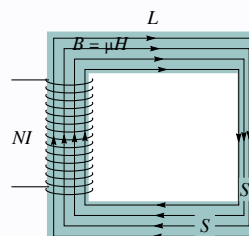
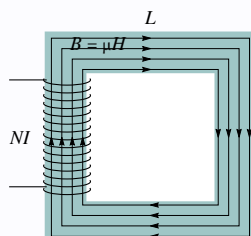
➤ Soluzione: La condizione al bordo sul lato lungo è dominante e quindi:

a) $H_{\text{in}} = H_{\text{out}}$ quindi $B_{\text{in}}/\mu_{\text{in}} = B_{\text{out}}/\mu_{\text{out}}$.

b) $B_{\text{in}} = B_{\text{out}}$.

Esercizio 14.2: Circuiti magnetici

N spire percorse da corrente I sono avvolte attorno ad un circuito ferro-magnetico di costante $\mu \gg \mu_0$ e forma quadrata, con quattro lati di lunghezza L di eguale spessore molto minore di L . a) Calcolare il campo magnetico all'interno, stimando come/se è possibile ottenere $B \approx 1$ Tesla. b) Come cambia la risposta se uno dei lati ha metà spessore rispetto agli altri?



➤ Soluzione:

- a) Siccome $\mu \gg \mu_0$ le condizioni al bordo implicano che il campo magnetico rimane all'interno del circuito magnetico. Siccome il flusso del campo magnetico vale zero e la sezione del circuito è costante, anche B è costante. La legge di Ampere $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{conc}}$ implica $4LH = NI$. Essendo $H = B/\mu$ si ottiene

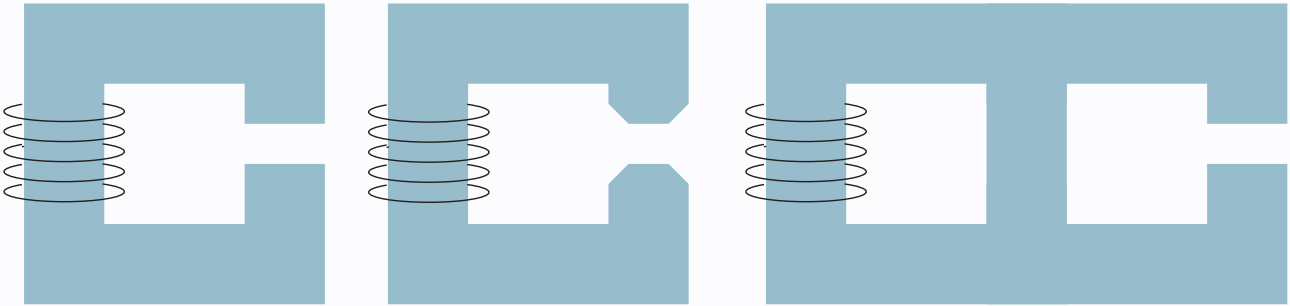
$$B = \mu H = \mu NI / 4L.$$

Un esempio numerico. La corrente 'di casa' ha $V \approx 200$ V e la potenza massima erogata vale $W = VI \approx 3$ kW. Quindi, a meno di usare trasformatori, la massima corrente ottenibile vale $I \approx 10$ A. Assumendo $\mu \approx 1000\mu_0$ e $N = 1000$ e $L \sim \text{m}$ si ottiene $B \approx \text{Tesla}$, circa μ/μ_0 maggiore che nel vuoto.

- b) Siccome il flusso del campo magnetico vale zero, deve essere $SB = S'B$. Quindi $B' = 2B$ nel tratto di sezione $S' = S/2$ dimezzata. Il sistema è analogo ad un tubo che non perde acqua (la frazione di flusso magnetico che scappa è trascurabile, circa $\mu_0/\mu \sim 0.001$): la portata è costante, quindi la corrente dell'acqua è maggiore dove il tubo è stretto. La legge di Ampere impone ora $5LH = NI$ e quindi $B = \mu H = \mu NI / 5L$.

Esercizio 14.3: Circuiti magnetici con traferri

Calcolare il campo magnetico prodotto da N spire percorse da corrente I avvolte attorno a materiali ferromagnetici con $\mu \gg \mu_0$ e geometria modificata nei seguenti modi rispetto all'esercizio precedente: a) tagliando via un traferro di piccolo spessore d ; b) sagomando il traferro come in figura, restringendo la sua area di un fattore 4. c) aggiungendo una seconda maglia con un traferro.

**➤ Soluzione:**

- a) Tenendo in conto del buco (o 'traferro') di spessore d le equazioni diventano $(4L - d)B/\mu + dB/\mu_0 = NI$. Notare che anche un piccolo buco $d \ll L$ può ridurre B in modo significativo: e.g. un $d \sim 4L/\mu_r \sim L/10000$ lo dimezza circa. Il motivo è che la lunghezza 'effettiva' del circuito varia da L/μ_r a circa $d + L/\mu_r$: il tratto nel vuoto non è soppresso da $1/\mu_r$.
- b) Essendo costante il flusso di B attraverso ogni sezione del ferromagnete, B diventa 4 volte più intenso nella zona con area 4 volte minore (sagomata in maniera da restringere solo per un tratto breve, in maniera che la sezione ridotta riduca in maniera trascurabile il valore del campo magnetico nel resto del circuito).
- c) Si può risolvere ragionando un poco. Il punto nuovo sono le biforcazioni in cui il flusso magnetico totale si conserva, ed occorre capire quanto va in ciascuna direzione. Conviene usare come incognite B_L e B_R , i valori del campo magnetico che 'gira' nelle maglie sinistra e destra, in maniera tale che la conservazione dei flussi è automaticamente soddisfatta. Per determinarli servono due equazioni, ottenute imponendo che la circuitazione di H lungo le due maglie abbia il valore che deve: NI a sinistra e 0 a destra. Si ottiene quindi

$$\begin{cases} 4LB_L/\mu - LB_R/\mu = NI \\ (4L - d)B_R/\mu - LB_L/\mu + dB_R/\mu_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_L = NI\mu(4 + d(\mu_r - 1)/L)/(15L + 4d(\mu_r - 1)) \\ B_R = NI\mu/(15L + 4d(\mu_r - 1)) \end{cases}.$$

Esercizio 14.4: Riluttanze

Rispondere nuovamente alle domande a), b), d) dell'esercizio precedente applicando il formalismo delle riluttanze \mathcal{R} .

♣ **Soluzione:**

- a) Si ottiene il formalismo delle 'riluttanze' osservando che il flusso di B in un circuito magnetico è analogo alla corrente I in un circuito elettrico: si conserva ai nodi. Abbiamo già calcolato che $B = NI/\mu L$ dentro un circuito magnetico ad una sola maglia di lunghezza totale L con NI spire. Possiamo ora riscriverlo come 'legge di Hopkinson'

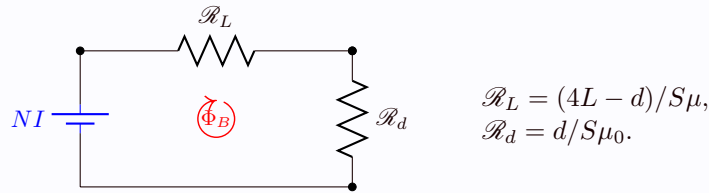
$$\Phi_B = NI/\mathcal{R} \quad \text{con} \quad \mathcal{R} = \mu L/S.$$

Queste equazioni sono analoghe a quelle di un circuito elettrico

$$I = V/R \quad \text{con} \quad R = \rho L/S.$$

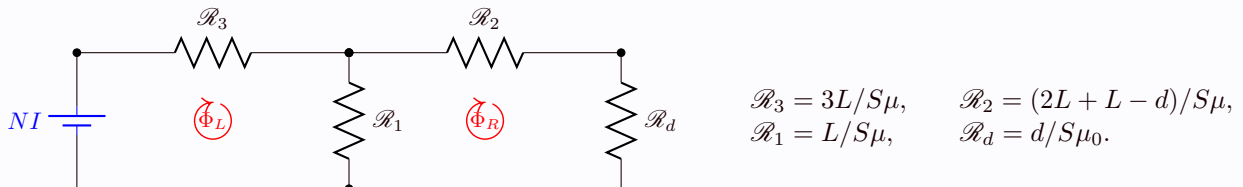
Pertanto le spire NI sono analoghe ad una batteria V , Φ_B è analogo ad I , μ alla resistività ρ , ed ogni tratto di circuito magnetico ad una resistenza.

- b) Il circuito magnetico con un traferro è ora risolubile osservando che è analogo al seguente circuito elettrico



Si ha quindi $\Phi_B = NI/\mathcal{R}$ con $\mathcal{R} = \mathcal{R}_L + \mathcal{R}_d$.

- d) Il circuito magnetico a due maglie è ora risolubile osservando che è analogo al seguente circuito elettrico con resistenze in parallelo e serie:



Si ha quindi $\Phi_L = NI/\mathcal{R}$ con $\mathcal{R} = \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_1 \parallel (\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_d)$.

Esercizio 14.5: Campo magnetico di calamita corta

Calcolare il campo magnetico B ed il campo H generato da una calamita cilindrica di raggio r ed altezza $h \ll r$ con magnetizzazione uniforme M lungo il suo asse.

♣ **Soluzione:** Essendo il cilindro corto l'equazione numericamente dominante è $\nabla \cdot B = 0$ (nell'esercizio successivo con cilindro lungo sarà invece $\nabla \times H = 0$), risolta dentro il cilindro da $B = 0$. Un piccolo campo magnetico è generato dalla corrente $I = Mh$ che gira sulla piccola superficie: $B = \mu_0 I/2r$ nel centro della calamita.

Essendo $B = \mu_0(H + M)$ si ha $H = -M$ dentro la calamita. La sorgente di H è la variazione di M sulle facce superiori ed inferiori, in base a $\nabla \cdot H = -\nabla \cdot M$.

Esercizio 14.6: Campo magnetico di calamita lunga

Una cilindro di raggio r ed altezza $h \gg r$ ha una magnetizzazione uniforme M lungo l'asse. a) Calcolare il campo magnetico B al suo interno. b) Si taglia via una fetta trasversale di spessore $d \ll r$; calcolare B nel centro del buco.

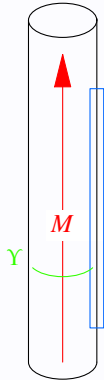
➤Soluzione: L'esercizio corrisponde ad un caso praticamente rilevante chiamato 'calamita': materiali ferromagnetici possono avere una magnetizzazione in assenza di campo esterno. Senza buco è possibile risolvere il problema in due modi: uno diretto ma lento, ed uno indiretto ma veloce.

- a) La magnetizzazione \mathbf{M} descrive una 'corrente di magnetizzazione' $\mathbf{J}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}$. Essa vale zero all'interno ed all'esterno del cilindro, in quanto \mathbf{M} è costante in ciascuna regione. Si ha solo una densità di corrente superficiale Υ_θ sul bordo del cilindro. Si calcola che $\Upsilon_\theta = M$ utilizzando il teorema di Stokes

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = \int dS \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{M} = \Phi(\mathbf{J}_{\text{mag}})$$

applicato ad un circuitino sottile parallelo al materiale, posizionato come in figura.

Per finire, nota la corrente, si calcola il campo magnetico che essa genera. Nel limite di cilindro lungo si trascurano gli effetti ai bordi, per cui l'equazione $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\text{mag}}$ è risolta in forma integrale considerando lo stesso circuitino immaginario discusso sopra, ottenendo la nota formula per il campo magnetico di un solenoide lungo, che in questo caso è scritta $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$.



- a') Questo risultato semplice suggerisce che problemi del genere si possono risolvere in modo più matematico, ma anche più veloce: utilizzando \mathbf{H} l'equazione da risolvere è $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ in quanto non ci sono correnti libere ed in quanto la geometria (cilindro lungo) rende irrilevante l'equazione per la divergenza. Si ottiene $\mathbf{H} = 0$. Essendo $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ si trova $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$.
- b) In presenza del buco diventa conveniente ragionare come al punto a). Infatti nel buco $\Upsilon = 0$, e quindi è possibile vedere il cilindro bucato come la sovrapposizione lineare di un cilindro pieno più una spiretta percorsa da corrente $I = -Md$, eguale ed opposta a Υ . Il campo magnetico è quello trovato al punto precedente più quello generato dalla spiretta, che nel suo centro genera $B_{\text{spira}} = \mu_0 I/2r$. Quindi $B = \mu_0 M(1 - d/2r)$.

Sapere che B_\perp è continuo lungo il taglio non basta a risolvere il problema, in quanto tagliare il materiale modifica anche il campo all'interno del materiale, non solo nel buco.

Esercizio 14.7: Due bacchette

Avendo due bacchette di ferro (e niente altro), e sapendo che una è magnetizzata lungo la sua lunghezza, e l'altra no, come si può scoprire quale delle due è magnetizzata?

➤Soluzione: Mettendole a T: l'estremo di quella magnetizzata si attacca a quella non magnetizzata.

Esercizio 14.8: Tre bacchette

Avendo tre bacchette — una di ferro magnetizzato, una di ferro non magnetizzato, ed una di un materiale non ferromagnetico — come si fa a distinguerle senza usare nessuno strumento?

➤Soluzione: Similmente a sopra, ne prendo due e le metto a T, fino a trovarne due che si attaccano. Allora quella + è magnetizzata, quella - è ferro non magnetizzato, e la terza non è ferromagnetica.

Esercizio 14.9: Ferromagnete con calamita

Rispondere nuovamente alla domanda a) dell'esercizio 14.3 assumendo che il traferro venga riempito con un materiale di magnetizzazione fissata M .

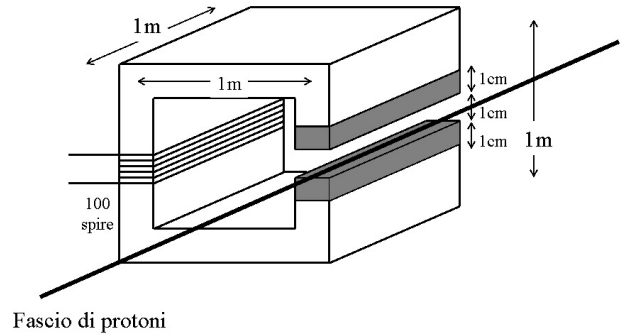
➤Soluzione: Essendo il suo flusso zero, il campo magnetico ha lo stesso valore B in tutto il circuito magnetico. All'interno del ferro si ha $H = B/\mu$; dentro il materiale con M dato si ha $H = B/\mu_0 - M$. Applicando la legge di Ampere $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{conc}}$ si ottiene

$$(4L - d) \frac{B}{\mu} + d \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) = NI \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu(NI + Md)}{4L + d(\mu/\mu_0 - 1)}.$$

Questo significa che il campo magnetico è ora generato da due sorgenti: i fili ed il materiale magnetizzato.

Esercizio 14.10: Ferromagnete con calamita e protoni

In un esperimento si ha un fascio di protoni ($m_p = 1.6 \cdot 10^{-27}$ kg) di velocità $v = 1000$ km/s. Un magnete dipolare di lunghezza $\ell = 1$ m lungo la direzione del fascio viene usato per deflettere i protoni di un angolo di $\theta = 10^\circ$ nel piano orizzontale. Il magnete ha le caratteristiche rappresentate in figura ed è di materiale ferromagnetico di $\mu_r = 2500$. I protoni passano nel traferro, di altezza $\delta = 1$ cm. Sopra e sotto il traferro sono poste due lastrine uguali, della stessa sezione del magnete, ognuna di altezza $\delta = 1$ cm e magnetizzazione \mathbf{M} , diretta verso l'alto. Inoltre è presente un avvolgimento di $N = 100$ spire, che però non è inizialmente percorso da corrente. Si calcoli:



- Il campo \mathbf{B} che dev'essere presente nel traferro per ottenere la deviazione voluta. (Essendo l'angolo piccolo, approssimare ad ℓ la lunghezza dell'arco di circonferenza percorsa dai protoni all'interno del traferro).
- Il valore di \mathbf{M} che per il problema assegnato permette di ottenere tale deflessione.
- Si vuole ora usare l'avvolgimento come "correttore" per operare piccoli cambiamenti nella deflessione dei protoni. Se vogliamo una sensibilità del 2% sull'angolo di deflessione, con che precisione dobbiamo regolare la corrente che passa nell'avvolgimento?

✎Soluzione:

- Il raggio di curvatura R dovrà essere $R \approx \ell/\theta = 5.75$ m; serve quindi $B = m_p v / q R = 1.7 \times 10^{-3}$ Tesla.
- Si ha $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = NI$ e cioè: $4\ell H_{\text{magnete}} + 2\delta H_{\text{lastrine}} + \delta H_{\text{traferro}} = NI$. Esprimendo H in termini di B

$$\frac{4\ell B}{\mu_0 \mu_r} + 2\delta \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) + \frac{B\delta}{\mu_0} = NI$$

e tenendo conto che inizialmente $I = 0$ si trova

$$M = \frac{B}{\mu_0} \left(\frac{3}{2} + \overbrace{\frac{2\ell}{\delta \mu_r}}^{0.08} \right) = 2200 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

- Siccome abbiamo angoli piccoli, l'angolo di deflessione è proporzionale al campo magnetico, che va quindi controllato con una sensibilità del 2%. La sorgente di B è proporzionale a $NI + 2\delta M$: la sensibilità su I deve essere $\delta I \approx 2\% \cdot 2\delta M / N = 10$ mA.

Esercizio 14.11: Trasformatore ideale

Due circuiti 1 e 2 in cui scorrono correnti I_1 ed I_2 vengono accoppiati avvolgendoli N_1 ed N_2 volte su di un ferromagnete di lunghezza ℓ e sezione S . Calcolare i coefficienti di induzione e mutua induzione.

✎Soluzione: I circuiti sono descritti dalle equazioni $\mathcal{E}_i = -\dot{\Phi}_i$ dove $\mathcal{E}_1 = V_1 + R_1 I_1 + \dots$ dipende da come è fatto il circuito e $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$. Il campo magnetico vale $B = \mu(N_1 I_1 + N_2 I_2)/\ell$. Quindi $L_1 = SN_1^2/\ell$, $M = SN_1 N_2/\ell$ e $L_2 = SN_2^2/\ell$. Siccome non c'è dispersione di flusso viene quindi realizzato un trasformatore ideale con $M^2 = L_1 L_2$.

Il fatto che sia possibile trasformare in modo 'perfetto' correnti alternate, ha portato all'attuale sistema, che utilizza una corrente alternata trasportata ad alto V e basso I (in modo da ridurre la dispersione RI^2 a fissa potenza $W = VI$), poi trasformata a basso $V = 220$ V per motivi di sicurezza.

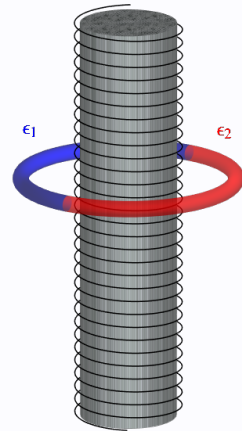
Esercizio 14.12: Solenoide

Un solenoide di lunghezza h ha $N \gg 1$ spire di raggio $a \ll h$ avvolte attorno ad un ferromagnete (costante magnetica μ , conducibilità σ) percorse da una corrente lentamente variabile $I = I_0 \cos \omega t$.

- Calcolare il campo magnetico \mathbf{B} ed il campo elettrico \mathbf{E} .
- Calcolare la potenza dissipata per effetto Joule nel ferromagnete.
- Calcolare il flusso del vettore di Poynting attraverso un cilindro di raggio $r < a$ con lo stesso asse del solenoide.

Intorno al solenoide viene disposto un anello isolante di raggio medio b e piccolo spessore, composto da due dielettrici con costanti ϵ_1 ed ϵ_2 come in figura.

- Come varia il campo elettrico nell'anello, rispetto a quanto calcolato al punto a) per $r = b$?

**➤ Soluzione:**

- Nel solenoide c'è un campo magnetico costante $B_z = \mu NI/h$. La sua variazione temporale genera un campo elettrico

$$E_\theta(r) = -\frac{\dot{\Phi}_B}{2\pi r} = \frac{NI_0\mu\omega}{2h} \sin(\omega t) \times \begin{cases} r & r < a \\ a^2/r & r > a \end{cases}$$

- La potenza dissipata per effetto Joule vale

$$W = \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \sigma h \int_0^a 2\pi r dr E_r^2 = \frac{\pi a^4}{8h^2} h I_0^2 N^2 \sigma \omega^2 \sin^2 \omega t.$$

- Il vettore di Poynting è radiale, $S_r = E_\theta B_z / \mu_0$. Il suo flusso vale

$$\Phi_S = 2\pi r h S_r = \frac{\pi r^2 I_0^2 \mu^2 N^2 \omega}{\mu_0 h} \sin(\omega t) \cos(\omega t).$$

- Ricordando che l'anello ha piccolo spessore e quindi si possono trascurare complicazioni ai bordi fra ϵ_1 ed ϵ_2 , i campi elettrici $E_{1\theta}$ ed $E_{2\theta}$ soddisfano a $D_\theta = \epsilon_1 E_{1\theta} = \epsilon_2 E_{2\theta}$ ed a $\pi b(E_{1\theta} + E_{2\theta}) = -\dot{\Phi}_B$, da cui

$$E_{1\theta} = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} E_\theta(b), \quad E_{2\theta} = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} E_\theta(b)$$

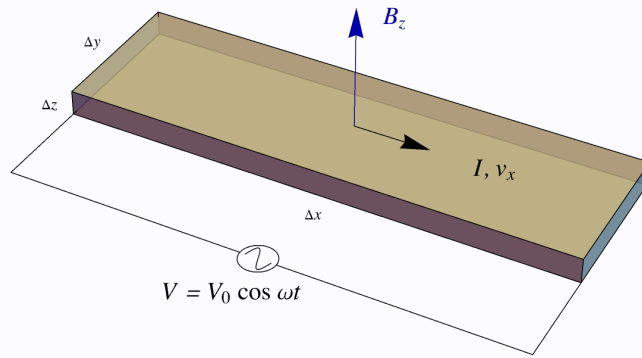
dove E_θ è il campo calcolato al punto a). Sulle superfici di separazione è presente una carica di polarizzazione

$$\sigma_{\text{pol}} = \pm \epsilon_0 (E_{1\theta} - E_{2\theta}) = 2\epsilon_0 E_\theta \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}.$$

Esercizio 14.13: Effetto Hall alternato ©

Un conduttore di forma cuboidale con lati $\Delta x \gg \Delta y \gg \Delta z$ ha resistività ρ . Il conduttore è soggetto ad una differenza di potenziale $V = V_0 \cos \omega t$ ai suoi capi a distanza Δx .

- Calcolare la corrente $I(t)$ che scorre lungo l'asse x .
- Calcolare la media temporale della potenza dissipata per effetto Joule.
- Detta n_e la densità degli elettroni liberi di condurre, calcolare la loro velocità di deriva v_x .



È ora presente anche un campo magnetico costante B_z . Nel seguito si risolve assumendo v_x nota.

- Il campo magnetico B_z produce una densità di corrente J_y , che produce una densità di carica $\pm\sigma$ sulle superfici di area $\Delta x \Delta z$, che produce un campo elettrico E_y . Scrivere le equazioni per E_y e σ che determinano il comportamento del sistema.
- Risolverle calcolando J_y a regime. Interpretare fisicamente il risultato, descrivendo qualitativamente il moto dei portatori di carica. Quale è la soluzione nel limite statico $\omega \rightarrow 0$?
- Calcolare la media temporale dell'ulteriore potenza dissipata per effetto Joule dovuta a J_y .

✎ Soluzione:

- $I = V/R$ con $R = \Delta x \rho / \Delta y \Delta z$.
- $W_{\text{Joule}} = \langle V^2 / R \rangle = V_0^2 / 2R$.
- Essendo $J_x = -n_e e v_x = I / \Delta y \Delta z$ si ottiene $v_x = -V / en_e \rho \Delta x$.
- I portatori di carica sono soggetti alla forza di Lorentz $F_y = -e(E_y - v_x B_z)$, che in un conduttore produce una corrente J_y . Notando che gli effetti al bordo sono trascurabili, il sistema è quindi descritto dalle equazioni

$$\dot{\sigma} = J_y = -\frac{E_y - v_x B_z}{\rho}, \quad E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

- Eliminando σ si ottiene $E_y + \tau \dot{E}_y = v_x B_z$ dove $\tau = \epsilon_0 \rho$. A regime $E_y = E_y^0 e^{i\omega t}$ la soluzione è

$$E_y = \frac{v_x B_z}{1 + i\omega\tau}, \quad J_y = \frac{v_x B_z}{\rho(1 + 1/i\omega\tau)}.$$

- La fase di J_y significa che il moto lungo l'asse y è sfasato rispetto al moto lungo l'asse x descritto da J_x : la composizione dei due moti è un'ellisse inclinata nel piano xy . Nel limite statico $\omega \rightarrow 0$ la soluzione si riduce come atteso a $J_y = 0$, quindi $E_y = v_x B_z$ e $\sigma = \epsilon_0 E_y$: è l'effetto Hall.
- $W_{\text{Joule}} = V \langle J_y^2 \rangle / \rho = V |J_y^2| / 2\rho$.

Esercizio 14.14: Correnti parassite ©

Un lungo solenoide cilindrico è costituito da N spire per unità di lunghezza avvolte su un nucleo di ferro di raggio R e lunghezza $L \gg R$. Il ferro ha permeabilità magnetica μ e conducibilità elettrica σ . Nelle spire si fa passare la corrente alternata $I = I_0 \cos \omega t$.

- Calcolare il campo magnetico all'interno del solenoide.
- Calcolare il campo elettrico indotto all'interno del solenoide.
- Si spieghi perchè il nucleo di ferro si riscalda e si calcoli la potenza dissipata per unità di lunghezza.

✎Soluzione:

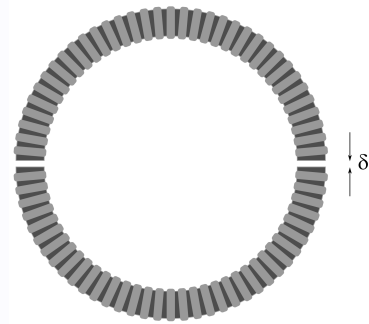
- a) $B = \mu H = \mu NI$
- b) Siccome $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ viene $E_\theta = \frac{1}{2} r \mu n I_0 \omega \sin \omega t$
- c) \mathbf{E} induce una corrente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ e quindi una potenza dissipata JE per unità di volume.

I trasformatori sono composti da lamine separate da una vernice isolante per evitare questi giramenti di correnti.

In generale un campo magnetico $B(t)$ induce un campo elettrico $E(t)$ e quindi delle correnti $J = \sigma E$ che dissipano energia e sono quindi dette ‘correnti parassite’. A frequenze alte bisogna tenere conto che B non è più uniforme: questo viene fatto nel prossimo esercizio, nel quale si sceglie la geometria più semplice possibile ma si deriva un risultato generale.

Esercizio 14.15: Correnti parassite in toro ©

Un toro è costituito accostando due ferromagneti uguali con permeabilità magnetica $\mu \gg \mu_0$, conducibilità σ ed a forma di semi-circonferenza con raggio R . La loro sezione è una circonferenza di raggio a . I due ferromagneti rimangono separati da un ‘traferro’ vuoto di piccolo spessore $\delta \ll a \ll R$. Vengono uniformemente avvolte sul toro $N \gg 1$ spire di resistenza trascurabile percorse da corrente I .



- a) Calcolare il campo magnetico, l'auto-induttanza e l'energia magnetica U_B per $\delta = 0$.
- b) Calcolare il campo magnetico per $\delta \neq 0$. Quale valore di δ dimezza l'auto-induttanza del circuito rispetto al caso $\delta = 0$? Si dia il valore numerico per $\mu = 1000\mu_0$ e $R = 0.1$ m.

Assumendo da ora in poi $\delta = 0$ e $I = I_0 \cos \omega t$:

- c) Calcolare il campo elettrico $E_\theta(r)$ presente nel ferromagnete. (Essendo $a \ll R$ si può qui approssimare il ferromagnete come un cilindro, e utilizzare le coordinate cilindriche r, θ, z attorno al suo asse z).
- d) Per quale valore di ω la media temporale dell'energia elettrica U_E presente nel ferromagnete è molto minore della media temporale dell'energia magnetica?
- e) Calcolare la corrente ‘parassita’ \mathbf{J} e la conseguente potenza dissipata per effetto Joule.

✎Soluzione:

- a) Si ha $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = NI$ con $B = \mu H$. Quindi il campo magnetico vale $B = \mu NI / 2\pi R$. L'auto-induttanza vale $L \equiv \Phi_B / I = N\pi a^2 B / I = \mu N^2 a^2 / 2R$. L'energia magnetica $U_B = LI^2 / 2$ è anche calcolabile come $U_B = VB^2 / 2\mu$ con $V = 2\pi R \pi a^2$.
- b) Il campo magnetico nel traferro è uguale a quello nel ferromagnete, quindi la circuitazione di H vale ora $(2\pi R + 2\delta\mu/\mu_0)H_{\text{in}}$. Quindi $B = \mu NI / (2\pi R + 2\delta\mu/\mu_0)$. Il campo magnetico e quindi l'auto-induttanza viene dimezzata se $2\pi R + 2\delta\mu/\mu_0 = 4\pi R$ ovvero per $\delta = \pi R \mu_0 / \mu = 0.31$ mm.
- c) Essendo $a \ll R$ è possibile approssimare il sistema come un cilindro di raggio a . Definendo r come la distanza dall'asse, al suo interno la II equazione di Maxwell fornisce $2\pi r E_\theta = -\dot{\Phi}_B$, quindi

$$E_\theta = -\frac{r}{2} \dot{B} = \frac{r \mu N}{4\pi R} I_0 \omega \sin \omega t$$

dentro il ferromagnete e $E_\theta = -\pi a^2 \dot{B} / 2\pi r$ al suo esterno.

- d) L'energia elettrica nel ferro-magnete vale

$$U_E = \int dV \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = 2\pi R \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a dr 2\pi r E_\theta^2 = \frac{a^4 \epsilon_0 N^2 \mu^2}{32R} I_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t.$$

Al suo esterno si ha un contributo simile, che può essere solo stimato essere innalzato da $\ln R/a$, tagliando l'integrale ad $a < r \lesssim R$. Ignorando questi fattori di ordine uno, si ha $\langle U_E \rangle \ll \langle U_B \rangle$ per $\omega \ll 1/a\sqrt{\epsilon_0\mu}$, ovvero se la corrente varia poco nel tempo che un'onda elettromagnetica impiega ad attraversare la distanza a .

e) La corrente parassita vale $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. La potenza dissipata per effetto Joule vale

$$W = \int dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} U_E = \frac{\sigma a^4 N^2 \mu^2}{16R} I_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t.$$

Esercizio 14.16: Effetto pelle per calore

Risolvere l'equazione di diffusione del calore $\rho c_p \dot{T} = k \nabla^2 T$ per: a) un muro in condizioni statiche che separa temperatura interna T_{in} da temperatura esterna T_{out} . b) un muro a regime con temperatura esterna oscillante $T_{\text{out}} = T_0 + \Delta T \cos(\omega t)$ con $\omega = 2\pi/\text{day}$.

♣**Soluzione:** L'equazione $\dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0$ di conservazione della densità di energia termica $u = c_p \rho T$ in presenza di una corrente di calore $\mathbf{J}_T = -\lambda \nabla T$ è $\rho c_p \dot{T} = \lambda \nabla^2 T$ in un materiale uniforme di densità ρ , capacità termica c_p e conducibilità termica λ . L'equazione di diffusione del calore viene scritta come $\dot{T} = \alpha \nabla^2 T$ definendo la *diffusività termica* $\alpha \equiv \lambda/\rho c_p$, che quindi controlla la dipendenza dal tempo della temperatura. Valori tipici sono:

Calore	Esempi	Conducibilità termica λ	Diffusività termica α
Conduttori	Metalli	(50 – 1000) W/m K	(10 – 100) mm ² /s
Isolante leggero	Polistirene, EPS, XPS	0.03 W/m K	1 mm ² /s
Isolante pesante	fibra di legno, sughero espanso	0.04 W/m K	(0.1 – 0.3) mm ² /s
Isolante costoso	aeropan	0.015 W/m K	

Gli isolanti con λ più basso sono materiali leggeri (gran parte del loro volume è aria), per cui un piccolo flusso di calore riesce a scaldarli, ed il loro α è maggiore di altri isolanti più pesanti (in cui passa più calore, ma provocando un più lento incremento della temperatura).

- a) In condizioni statiche $\dot{T} = 0$ la temperatura varia quindi linearmente all'interno di un muro di spessore $x = L$. La densità di corrente di calore vale $J = \lambda(T_{\text{in}} - T_{\text{out}})/L$ e la corrente di calore vale $I = SJ = U(T_{\text{in}} - T_{\text{out}})$ dove $R = 1/U = L/S\lambda$ è analogo ad una resistenza. Con ragionevole approssimazione l'isolamento termico invernale è bene approssimato da condizioni statiche (la temperatura esterna è sempre minore di quella interna), e quindi conviene avere isolanti termici con basso λ . Ad esempio i mattoni forati hanno $\lambda \approx 0.36 \text{ W/mK}$, quindi un muro spesso $L = 0.25 \text{ m}$ ha trasmittanza $U_1 = \lambda/L \approx 1.4 \text{ W/m}^2\text{K} = 1/R_1$ (circa il doppio di un vetro doppio, e simile a 3 cm di isolante): aggiungendo 10 cm di isolante la trasmittanza viene ridotta a $U = 1/(R_1 + R_2) \approx 0.25 \text{ W/m}^2\text{K}$. Riguardo alle finestre, il vetro è un isolante con $\lambda \approx 0.04 \text{ W/mK}$: quindi un vetro di spessore $L = 1 \text{ cm}$ ha trasmittanza $U = \lambda/L = 4 \text{ W/m}^2\text{K}$, che viene ridotta a $U \approx 1.1 \text{ W/m}^2\text{K}$ inserendo uno strato di gas isolante.
- b) D'estate ogni $T = 24$ ore la temperatura esterna varia molto rispetto a quella interna: questo rende più importante avere basso α . Approssimiamo la temperatura esterna come un'oscillazione sinusoidale a pulsazione $\omega = 2\pi/T$. A regime si cerca una soluzione della forma $T(x, t) = \text{Re } \tau(x) e^{-i\omega t}$ trovando l'equazione $i\omega\tau = \alpha\tau''$ risolta da $\tau(x) = e^{ikx}\tau_0$ con $k^2 = i\omega/\alpha$ ovvero $k = (1+i)/\sqrt{2\alpha/\omega}$, che descrive uno sfasamento ed un'attenuazione. Imponendo la condizione $T = T_{\text{out}}$ al bordo $x = 0$ e selezionando la soluzione decrescente (rilevante nel limite ideale di muro di spessore infinito, in cui l'interno non influenza l'esterno) si trova la soluzione a regime

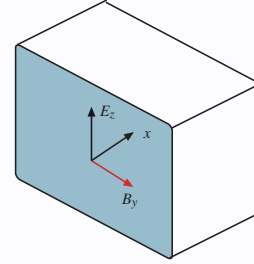
$$T(x, t) = T_0 + \Delta T e^{-x/\delta} \cos(x/\delta - \omega t), \quad \delta = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}.$$

Questo significa che un muro di spessore x attenua l'ondata di calore di $f = e^{-x/\delta}$ e la ritarda di $\Delta t = x/\delta\omega = T(x/\delta)/2\pi$. I due fenomeni sono controllati dalla lunghezza di pelle δ : se si raggiunge $\delta = x/\pi$ si ha $\Delta t \approx T/2$ (in maniera che aprire le finestre di notte disperda il calore accumulato durante il giorno) e $f = e^{-\pi} \approx 0.04$.

D'ora in poi assumiamo $T = 24$ h. La 'lunghezza di pelle' vale $\delta \sim 1$ m per un tipico metallo conduttore, e $\delta \sim 5$ cm per un tipico isolante come il legno: come atteso un minore spessore di isolante è sufficiente per attenuare l'ondata di calore esterna. Un muro in mattoni forati con spessore $d = 10$ cm ha resistenza termica $R = \lambda d \approx 0.25 \text{ m}^2 \text{ K/W}$, $\delta \approx 25$ cm, $\Delta t \approx 2$ h, $f \approx 0.65$, 6 cm di isolante in polistirene aggiungono $R \approx 0.6 \text{ m}^2 \text{ K/W}$ e trascurabile capacità termica. Mettendo più materiali di spessori x_i e lunghezze di pelle δ_i si trova la stessa soluzione con $x/\delta \rightarrow \sum x_i/\delta_i$ nel limite in cui conta solo la soluzione decrescente (il conto corretto, imponendo τ' continuo sui bordi, è complicato).

Esercizio 14.17: Effetto pelle per campo magnetico

Il semispazio con $x > 0$ è riempito da metallo di permeabilità magnetica μ e conducibilità elettrica σ . All'esterno del metallo viene applicato un campo magnetico oscillante con pulsazione ω , parallelo alla superficie: $B_y = B_0 \cos \omega t$. Determinare: a) la lunghezza di penetrazione del campo nel ferro; b) la potenza dissipata dalla corrente 'parassita' indotta dal campo elettrico. Si trascuri la corrente di spostamento.



◀Soluzione: Il campo magnetico $B_y(x, t) = \mu H_y(x, t)$ genera un campo elettrico $E_z(x, t)$ che genera una corrente $J_z = \sigma E_z$ detta 'parassita' in quanto dissipa energia per effetto Joule. Le rilevanti equazioni di Maxwell che descrivono questi fenomeni fisici sono

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = (\nabla \times \mathbf{H})_z = J_z = \sigma E_z, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -(\nabla \times \mathbf{E})_y = \dot{B}_y = \mu \dot{H}_y.$$

Derivando la 1a equazione rispetto ad x si può eliminare E_z , trovando che H_y soddisfa ad un'equazione detta 'di diffusione' in quanto è quella vista nell'esercizio precedente tipica di fenomeni diffusivi come la conduzione del calore:

$$\mu\sigma \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \quad \text{o, più in generale} \quad \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{H}.$$

- a) Come nell'esercizio precedente calcoliamo la soluzione a regime: assumendo $H_y \equiv h(x)e^{-i\omega t}$ l'equazione si riduce a $h'' = -i\omega\mu\sigma h$, risolta, nel semipiano $x > 0$ dove μ è costante, da $h(x) = h(0)e^{ikx}$ con $k^2 = 2i/\delta^2$ dove $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ viene chiamato 'lunghezza di pelle'. Quindi $k = (i+1)/\delta$. Ignorando la soluzione che diverge per $x \rightarrow \infty$, si ottiene che il campo magnetico entra nel metallo per una lunghezza di ordine δ :

$$H_y(x) = \text{Re} H_y(0) e^{(i-1)x/\delta} e^{-i\omega t} = H_y(0) e^{-x/\delta} \cos(x/\delta - \omega t).$$

La continuità di H_y al bordo $x = 0$ dà la condizione al contorno $H_y(0) = H_0 = B_0/\mu_0$.

- b) La IV equazione di Maxwell fornisce il campo elettrico

$$E_z = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{H_0}{\sigma\delta} e^{-x/\delta} \left[\cos(x/\delta - \omega t) - \sin(x/\delta - \omega t) \right]$$

che è piccolo a basse frequenze: $E_z/cH_y \sim 1/\sigma\delta c \ll 1$. Esso genera correnti 'parassite' $J = \sigma E$ che dissipano la seguente potenza media per unità di volume

$$\frac{dW}{dV} = \langle J_z E_z \rangle_t = \sigma \langle E_z^2 \rangle_t = \frac{\mu\omega}{2} H_0^2 e^{-2x/\delta}.$$

Integrando sul metallo presente ad $x > 0$ si trova la potenza dissipata per unità di superficie:

$$\frac{dW}{dS} = \int_0^\infty \frac{dP}{dV} dx = \frac{\mu\omega\delta}{\mu_0} \frac{B_0^2}{\mu_0}.$$

Nel limite $\sigma \rightarrow \infty$ di conducibilità grande si ha $\delta \rightarrow 0$ e la potenza dissipata va a zero. Nel futuro (esercizio 18.6) questo significherà che conduttori perfetti riflettono perfettamente onde elettromagnetiche.

Esercizio 14.18: Effetto pelle in filo

Un filo cilindrico di resistività ρ , raggio a e lunghezza $\ell \gg a$ è parallelo all'asse z . Viene applicata una differenza di potenziale oscillante a pulsazione ω abbastanza bassa tale che la corrente di spostamento è trascurabile (argomento discusso nel capitolo successivo). a) Calcolare al primo ordine perturbativo il campo magnetico, mostrando che la corrente si sposta sul bordo del filo. b) Mostrare che questo tende ad aumentare la resistenza del filo, e calcolarne l'impedenza.

✚**Soluzione:** Possiamo calcolare come si redistribuisce la corrente calcolando come si redistribuisce il campo elettrico, in quanto $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. All'ordine 0 la batteria produce un campo elettrico uniforme parallelo al filo, $E_z(t) = E_0 e^{i\omega t}$. Assumendo che la correzione all'uniformità sia piccola, possiamo calcolarla perturbativamente nel seguente modo.

a) La \mathbf{J} iniziale uniforme genera un campo magnetico ruotante $B_\theta(r, t) = B_0(r) e^{i\omega t}$, calcolabile alla Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad B_0 = \mu_0 J_z \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \mu_0 \sigma E_0 \frac{r}{2}.$$

Per induzione (II equazione di Maxwell) \mathbf{B} genera una correzione E_1 al campo elettrico, parallelo ad E_0 , calcolabile alla Faraday-Lenz:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad \Rightarrow \quad E_1 = i\omega \int_0^r dr' B_0(r') = iE_0 \frac{r^2}{2\delta^2} \quad \text{dove} \quad \delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}} = c\sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\omega\sigma}}$$

è detto *lunghezza di pelle*. La i significa che E_1 oscilla sfasato di 90° rispetto ad E_0 . Il campo elettrico totale $E_z(r) = E_0 + E_1(r)$, scritto in termini del suo valore $E_{\text{ext}} = E_z(r=a)$, è

$$E_z(r) = E_{\text{ext}} \frac{1 + ir^2/2\delta^2}{1 + ia^2/2\delta^2}.$$

Si ha $|E_z(0)| < |E_z(a)|$, e quindi la corrente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ tende a scorrere maggiormente sul bordo del filo. L'approssimazione perturbativa $E_1 \ll E_0$ vale se $\delta \gg a$. Nel rame $\tau = \epsilon_0/\sigma \sim 10^{-18}$ sec: per $a \sim \text{mm}$ si ha $\delta \gg a$ fino a $\omega \ll 10^5$ Hz.

b) Il fatto che la corrente non scorra uniformemente aumenta la resistenza del filo, che diventa una più generale impedenza $Z = R + i\omega L$ in quanto gli effetti magnetici producono anche un'induttanza L . L'impedenza è definita come $Z = V_{\text{ext}}/I$, dove I è la corrente totale:

$$I = \int_0^a J_z 2\pi r dr = \pi a^2 \sigma E_{\text{ext}} \frac{1 + ia^2/4\delta^2}{1 + ia^2/2\delta^2}.$$

Quindi

$$Z = R_0 \frac{1 + ia^2/2\delta^2}{1 + ia^2/4\delta^2} = R_0 \frac{1 + (a/2\delta)^2/2 + i(a/2\delta)^2}{1 + (a/2\delta)^4}$$

dove $R_0 = \ell/\sigma\pi a^2$ è il valore di Z nel limite statico $\omega \rightarrow 0$ ovvero $\delta \rightarrow \infty$. Fisicamente, questo è dovuto al fatto che la corrente si concentra verso l'esterno aumentando l'«intasamento» e quindi la resistenza. Per evitarlo conviene usare frequenze abbastanza basse tali che $\delta \gg a$. La parte immaginaria di Z , come atteso, ha il segno dell'impedenza di una induttanza, e non quello di una capacità.

Questi esercizi possono sembrare confusi: il motivo è che stiamo risolvendo equazioni fra di loro inconsistenti, come discusso nel prossimo capitolo. Nell'esercizio 15.10 questo esercizio verrà ripreso con le equazioni complete, chiarendo in che limite si ottiene nuovamente un'equazione di diffusione $\mu\sigma\dot{\mathbf{E}} = \nabla^2 \mathbf{E}$ e quindi la lunghezza di pelle.

Parte III

Elettrodinamica

Capitolo 15

Corrente di spostamento

Aggiungendo la corrente di spostamento $\mathbf{J}_s \equiv \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$ alle equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$$

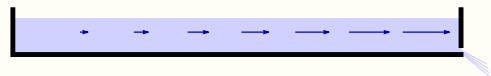
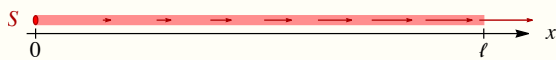
esse diventano consistenti con la conservazione della carica $\dot{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$, che diviene una implicazione.

Esercizio 15.1: Scarica di un filo

Un filo rettilineo è situato lungo l'asse x , da $x = 0$ a $x = \ell$. Ha sezione S e contiene una densità uniforme di carica $\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$ che si scarica al capo $x = \ell$. Calcolare a) la densità di corrente \mathbf{J} ; b) il campo magnetico generato.

✎ Soluzione:

- a) L'equazione di continuità $\partial J_x / \partial x = -\dot{\rho}$ equivale a $\partial I / \partial x = -\dot{\lambda}$ dove $\lambda = \rho S$ è la densità lineare di carica, e $I = J_x S$ è la corrente totale. Quindi la corrente vale $I(t, x) = -x \dot{\lambda}$. È come svuotare un canale d'acqua aprendo una chiusa: la corrente è forte vicino alla chiusa e debole al capo opposto.



- b) Siccome I dipende da x , l'equazione incompleta $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ implicherebbe una corrente concatenata $I(t, x)$ che dipende da quale superficie uno sceglie nell'applicare il teorema di Stokes. La corrente di spostamento evita l'inconsistenza. Calcoliamo il campo elettrico dalla prima equazione di Maxwell

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

risolta da $E_x(x) = x\rho/\epsilon_0 + \text{cte}$. Si ha quindi una corrente di spostamento $I_s(t, x) = S\epsilon_0 \dot{E}_x = +x \dot{\lambda}$ che cancella la corrente $I(t, x)$.

Esercizio 15.2: Scarica di sfera

Una sfera carica di raggio a che inizialmente contiene carica Q_0 è immersa in un conduttore di conducibilità σ .

- a) Calcolare la corrente. b) Calcolare il campo magnetico generato.

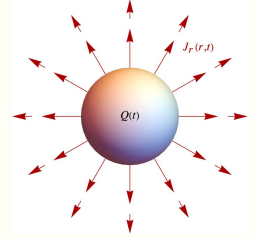
✎ Soluzione:

a) La scarica produce una densità di corrente radiale

$$J_r(r, t) = \sigma E_r = \sigma \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{per } r > a$$

dove $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ con $\tau = \epsilon_0/\sigma$.

b) Per simmetria sferica \mathbf{B} può solo avere una componente radiale $B_r(r, t)$, il cui rotore è nullo. Non può quindi nascere alcun campo magnetico. Ed infatti la corrente totale vale $J_r + \epsilon_0 \dot{E}_r = (\sigma - \epsilon_0/\tau)E_r = 0$.



Esercizio 15.3: Sfera radioattiva

Una sfera uniforme isolata di raggio a emette isotropicamente positroni da decadimento β (ovvero decadimenti di neutroni liberi $n \rightarrow p e \bar{\nu}$ o di nuclei) con velocità iniziale v_0 . Il tempo di decadimento della radioattività è τ . La corrente elettrica dovuta al moto dei positroni genera un campo magnetico?

➤Soluzione: Il numero di neutroni liberi di decadere diminuisce come $N = N_0 e^{-t/\tau}$ e quindi la sfera acquista una carica $Q(t) = e[N_0 - N] > 0$.

- Per semplicità, iniziamo assumendo che le cariche siano emesse con velocità iniziale v_0 talmente grossa che le forze elettriche la modificano in modo trascurabile. Assumiamo inoltre $\tau \gg r/v_0$, cioè un decadimento così lento da essere approssimabile ad un processo costante. I positroni generano allora una corrente $J_r(r, t) = e\dot{N}(t)/4\pi r^2$, che non dipende da v . Il campo magnetico è zero in quanto la corrente di spostamento cancella J_r : $J_{sr} = \epsilon_0 \dot{E}_r = -e\dot{N}/4\pi r^2$.

Per capire se questa cancellazione è un accidente del caso semplificato che abbiamo considerato, o se è invece dovuta a qualche motivo più profondo, consideriamo casi progressivamente meno semplici.

- Se il decadimento è veloce, $\tau \sim r/v_0$, in generale $J_r(r, t) = e\dot{N}(t - r/v_0)/4\pi r^2$: il numero di elettroni che attraversano una superficie a distanza r al tempo t dipende da quanti ne erano stati emessi al tempo $t - r/v_0$. Si ha ancora $J + J_s = 0$ in quanto $E_r(r) = Q_{in}/4\pi\epsilon_0 r^2$ è determinato dalla carica totale entro una sfera di raggio r (che contiene la sfera radioattiva ed una nuvola di elettroni), eguale a $Q_{in} = e[N_0 - N(t - r/v_0)]$.
- Il calcolo diventa ancora più complicato se si tiene in conto che v non è costante, in quanto la forza di Coulomb rallenta i positroni.

È invece facile vedere che, *qualunque sia il risultato*, si ha $J + J_s = 0$. Detta infatti $Q_{in}(r, t)$ una generica carica interna ad una sfera di raggio r al tempo t , si ha $E_r = Q_{in}/4\pi\epsilon_0 r^2$ e, per conservazione della carica, $J_r = -\dot{Q}_{in}/4\pi r^2$. La corrente di spostamento è stata infatti aggiunta alle equazioni di Maxwell per ottenere la conservazione della carica.

Il motivo generale per cui si ha sempre $J + J_s = 0$ con questa geometria a simmetria sferica è che una corrente a simmetria sferica non può generare un campo magnetico: un campo magnetico radiale ha sempre rotore zero.

Esercizio 15.4: Piano con carica ondulata

a) Trovare il potenziale generato da un piano con densità di carica $\sigma(x) = \sigma_0 \cos kx$. b) Le cariche sono lasciate libere di muoversi sul piano con conducibilità σ . Calcolare la loro evoluzione, la corrente, ed il campo magnetico generato.

➤Soluzione:

a) Invece di usare la formula integrale per φ , conviene risolvere $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ provando a cercare, nel vuoto a $z \neq 0$, una soluzione con variabili separate:

$$\varphi(x, z) = F(z) \cos kx, \quad \nabla^2 \varphi = [F'' - k^2 F] \cos kx.$$

L'equazione per F è risolta da $F(z) = c_+ e^{kz} + c_- e^{-kz}$, Tornando al problema, la soluzione sarà quindi della forma

$$\varphi(x, z) = \cos kx \begin{cases} c_+^{\text{sopra}} e^{kz} + c_-^{\text{sopra}} e^{-kz} & z > 0 \\ c_+^{\text{sotto}} e^{kz} + c_-^{\text{sotto}} e^{-kz} & z < 0 \end{cases}$$

Imponiamo $c_+^{\text{sopra}} = c_-^{\text{sotto}} = 0$ in maniera da avere $\varphi \rightarrow 0$ nel limite $|z| \rightarrow \infty$. Per motivi di simmetria si ha $\varphi(z) = \varphi(-z)$. Otteniamo quindi

$$\varphi(x, z) = c e^{-k|z|} \cos kx.$$

Per finire, la costante c viene determinata imponendo che $E_z = -\partial\varphi/\partial z$ abbia a $z = 0$ la discontinuità corrispondente alla carica superficiale, $E_z^{\text{sopra}} - E_z^{\text{sotto}} = \sigma_0 \cos(kx)/\epsilon_0$. Si ottiene

$$\varphi = -\frac{e^{-k|z|}}{2k\epsilon_0} \sigma_0 \cos kx.$$

Nel limite di piano uniformemente carico $k \rightarrow 0$ la soluzione si riduce a quella ottenuta nell'esercizio 1.16

$$\varphi \simeq (\text{costante divergente}) - \sigma_0 |z| / 2\epsilon_0.$$

- b) Il campo elettrico $E_x = -\partial\varphi/\partial x = \sigma_0 \sin kx / 2\epsilon_0$ genera una corrente $J_x = \sigma E_x$ che redistribuisce le cariche. La soluzione è $\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau} \cos kx$, come si vede da

$$\dot{\rho} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}.$$

Quindi anche il campo elettrico decade esponenzialmente. Non viene generato nessun campo magnetico in quanto la corrente di spostamento compensa la corrente

$$\mathbf{J} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} = \sigma \mathbf{E} - \epsilon_0 \frac{\mathbf{E}}{\tau} = 0$$

Vediamo quindi che questo accade in generale quando cariche sbilanciate sono libere di redistribuirsi secondo $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ con σ uniforme.

Esercizio 15.5: Campo magnetico di carica in moto

Una carica q si muove lungo l'asse z con velocità $v \ll c$ costante. a) Calcolare il campo magnetico che essa genera. b) Spiegare in che modo tante cariche q che formano una corrente I continua producono approssimativamente un campo magnetico che non dipende dal tempo.

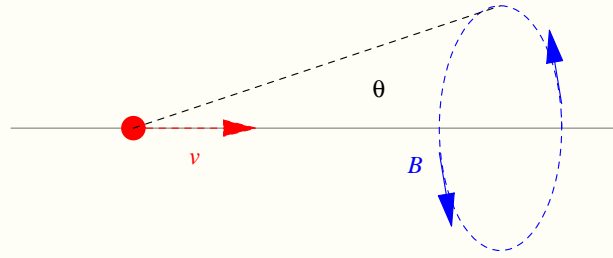
➤ Soluzione: Senza includere la corrente di spostamento si ha $\mathbf{J} \neq 0$ solo in coincidenza della carica, ed il problema non ha senso. Includendo \mathbf{J}_s , essa è l'unica sorgente di \mathbf{B} in tutto lo spazio vuoto. Qui risolviamo il problema con un calcolo esplicito approssimato valido per $v \ll c$. Partiamo dal campo elettrico \mathbf{E} a simmetria sferica prodotto da una carica ferma, e calcoliamo il \mathbf{B} indotto da $\dot{\mathbf{E}}$. Noi ci fermiamo qui (ottenendo un risultato valido al primo ordine in v/c), ma a sua volta $\dot{\mathbf{B}}$ induce un \mathbf{E} che induce un \mathbf{B} ... tale che alla fine \mathbf{E} non è più a simmetria sferica. Un modo alternativo di ottenere a botto il risultato finale consiste nel notare che le equazioni di Maxwell complete sono relativisticamente invarianti, calcolare i campi nel sistema rispetto al quale la carica è ferma, ed applicare le trasformazioni di Lorentz dei campi. Il risultato completo contiene extra fattori $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \simeq 1$ nella nostra approssimazione.

- a) Il campo magnetico ha solo componente $B_\theta(z - vt, r)$. È sufficiente calcolarlo a $z = 0$ per t ed r generici. Integriamo la IV equazione di Maxwell, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$ lungo la superficie di un anello di raggio r giacente a $z = 0$. Si ottiene

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\Phi}(\mathbf{E}) \quad \text{i.e.} \quad B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_s}{2\pi r}$$

dove I_s è la corrente di spostamento che attraversa l'anello. Per calcolare $I_s = \Phi(\mathbf{J}_s) = \epsilon_0 \dot{\Phi}(\mathbf{E})$ conviene scegliere come superficie immaginaria la corona circolare della sfera che ha centro nella carica, e che vede

la circonferenza di raggio r con dimensione angolare θ :



Quindi

$$I_s = \frac{d}{dt} \epsilon_0 E_r \cdot 2\pi r^2 [1 - \cos \theta(t)] = \frac{d}{dt} \frac{q}{2} [1 - \cos \theta(t)] = \frac{q}{2} \frac{d}{dt} \frac{vt}{\sqrt{a^2 + v^2 t^2}} = \frac{qva^2}{2(a^2 + t^2 v^2)^{3/2}}$$

Quindi $B_\theta(z, r, t) = \mu_0 qvr / 4\pi(r^2 + (z - vt)^2)^{3/2}$. Per $z = 0$ è massimo a $t = 0$, cioè mentre q sta passando. Notare che attorno alla carica ($z = vt$) va a zero come $1/r^2$.

- b) Una successione di cariche con densità lineare λ costante produce in media una corrente continua $I = \lambda v$. Infatti il campo magnetico generato vale

$$B_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dz \mu_0 vr}{4\pi[r^2 + (z - vt)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

che è la ben nota formula per il campo magnetico generato da una corrente I .

Esercizio 15.6: Forza fra 2 cariche

Due elettroni si muovono parallelamente lungo traiettorie rettilinee a distanza a con velocità costante $v \ll c$. Calcolare la forza elettromagnetica

➤Soluzione: La forza è diretta lungo la congiungente. La forza elettrica respinge e quella magnetica attira

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} - ev \cdot \frac{\mu_0 ev}{4\pi a^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Il risultato sopra è *sbagliato*. Esistono altri effetti relativistici di $\mathcal{O}(v^2/c^2)$. Nel sistema in cui le cariche sono in quiete $F_0 = e^2/4\pi\epsilon_0$ e quindi la relatività dice che $F_v = F_0/\gamma$, invece che $F_v = F_0/\gamma^2$. Infatti i campi E e B generati da cariche in moto vanno moltiplicati per γ .

Una carica può avere velocità media $\sim \text{cm/s} \sim 10^{-10}c$ e quindi il suo campo magnetico è una correzione di ordine 10^{-20} . Questa soppressione può venire compensata se ci sono $N_A \sim 6 \cdot 10^{23}$ cariche che si muovono nello stesso verso (formando una corrente), messe assieme ad altrettante cariche di segno opposto (in modo che i loro campi elettrici si cancellano). Siccome la materia è fatta in questo modo, ha senso studiare la magnetostatica.

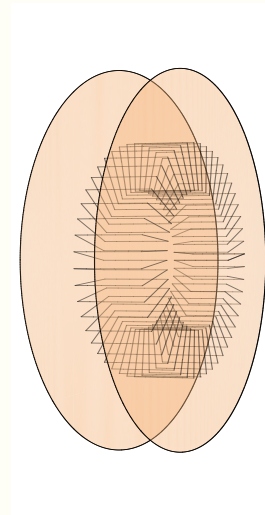
Esercizio 15.7: Condensatore lentamente alternato

Un condensatore è composto da due cerchi piani paralleli di raggio a a distanza $d \ll a$ aventi carica $Q(t) = Q_0 \cos \omega t$.

- Calcolare la corrente di spostamento \mathbf{J}_S all'interno del condensatore.
- Calcolare il campo magnetico all'interno del condensatore, all'ordine dominante in $\omega a/c$.

Dentro il condensatore viene inserito un solenoide toroidale composto da $N \gg 1$ spire quadrate di lato d poste a distanza $a/2$ dal centro del condensatore (si veda la figura).

- Calcolare l'auto-induttanza del solenoide.
- Calcolare il contributo alla forza elettromotrice dovuto al campo magnetico generato dal solo condensatore.
- Calcolare la corrente $I(t)$ che circola nel solenoide, assumendo $I(0) = 0$.



Per verificare che esiste per davvero l'effetto noto come 'corrente di spostamento' si connette al circuito che costituisce il solenoide un auricolare, che può essere schematizzato come una resistenza R , realizzando così un circuito RL .

- Calcolare la potenza W mediata sul tempo dissipata dalla resistenza "a regime", ovvero sia trascorso il transiente iniziale.
- Quale valore di R rende W massima?

✎ Soluzione:

- La corrente di spostamento è parallela all'asse del solenoide, con modulo $J_S = \dot{\sigma} = -(Q_0 \omega / \pi a^2) \sin \omega t$.
- Il campo magnetico è generato dalla corrente di spostamento e vale $B_\theta(r, t) = (\omega E_0 r / 2c^2) \sin \omega t = (\omega \mu_0 Q_0 r / 2\pi a^2) \sin \omega t$.
- Una corrente I nel solenoide genererebbe $B = \mu_0 N I / \pi a$ e quindi un flusso $\Phi = L I$ con $L = N d^2 B / I = \mu_0 N^2 d^2 / \pi a$.
- $\mathcal{E}^{\text{ext}} = -\dot{\Phi}_B^{\text{ext}} = N d^2 \dot{B}_\theta(a/2, t) = A \cos \omega t$ con $A = -N \mu_0 d^2 Q_0 \omega^2 / 4a\pi$.
- Il flusso del campo magnetico totale (esterno più auto-indotto) rimane costante, al valore iniziale zero: quindi $I = -\Phi_B^{\text{ext}} / L = -(Q_0 \omega / 4N) \sin \omega t$.
- Risolvere $L\dot{I} + RI = A \cos \omega t$ vedendola come parte reale di $(i\omega L + R)I_0 e^{i\omega t} = A e^{i\omega t}$. Da cui $I_0 = A / (R + i\omega L)$. La potenza dissipata media vale $W = R|I_0|^2 / 2 = RA^2 / (R^2 + \omega^2 L^2)$.
- W è massima per $R = L\omega$ e vale zero nei limiti $R \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$.

Esercizio 15.8: Scarica di un condensatore

Un condensatore di area $S = \pi a^2$ e distanza fra i piatti $d \ll a$ si scarica con costante tempo τ : $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$.

a) Calcolare la corrente di spostamento; b) Calcolare il campo magnetico; c) calcolare l'energia magnetica confrontandola con l'energia elettrica.

✎ Soluzione: La corrente $I = \dot{Q} = -Q/\tau$ entra in un piatto ed esce dall'altro.

a) Il campo elettrico fra i piatti è uniforme e vale $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/S\epsilon_0$. La corrispondente densità di ‘corrente di spostamento’ è uniforme e vale $J_s = \dot{\sigma} = -Q/S\tau$. La corrente totale di spostamento è uguale ad I : $I_s = I$.

b) A grande distanza $r \gg a$ la corrente nel filo I genera un campo magnetico circa radiale $B_\theta = \mu_0 I / 2\pi r$. Dentro i piatti J_s genera un campo magnetico

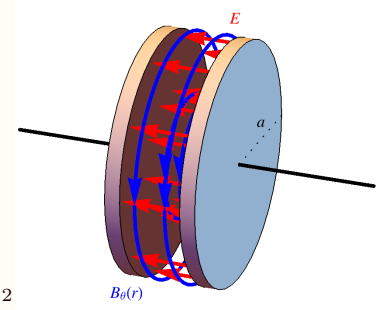
$$B_\theta = \frac{\pi r^2 \mu_0 J_s}{2\pi r} = \frac{\mu_0 r I}{2S} \quad \text{per } r < a.$$

c) L’energia nel campo magnetico

$$U_B = \int dV \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{dI^2 \mu_0}{16\pi}, \quad U_E = V \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \frac{U_B}{U_E} = \frac{a^2 \epsilon_0 \mu_0}{8\tau^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{a}{c\tau} \right)^2$$

è trascurabile rispetto all’energia elettrica U_E a meno che $a \sim c\tau$.

Questa è una lezione generale: $U_B \ll U_E$ a meno che E vari significativamente nel tempo che la luce impiega ad attraversare l’apparato.



Esercizio 15.9: Condensatore rapidamente alternato

Una capacità è costituita da due piatti circolari conduttori, messi a piccola distanza d in modo da poter trascurare gli effetti ai bordi. Viene applicata una differenza di potenziale oscillante con pulsazione ω . Calcolare i campi elettrici e magnetici trascurando l’irraggiamento.

✚Soluzione: Il campo elettrico oscillante $E_z = E_0 e^{i\omega t}$ genera un campo magnetico ruotante, $B_\theta = B_0 e^{i\omega t}$:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{E}}}{c^2} \quad \xRightarrow{\text{Ampere}} \quad B_\theta = \frac{\Phi_{\dot{E}}}{2\pi r c^2} = \frac{1}{rc^2} \int_0^r dr' r' \dot{E} \quad \Rightarrow \quad B_0 = \frac{i\omega E_0}{c^2} \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{i\omega E_0 r}{2c^2}$$

che a sua volta genera una correzione al campo elettrico $E_0 \rightarrow E_0 + E_1$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad \xRightarrow{\text{Lenz}} \quad E_z(r) = \int_0^r dr' \dot{B}_\theta \quad \Rightarrow \quad E_1 = i\omega \int_0^r dr' B_0(r') = -E_0 \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}$$

avendo definito E_0 come il campo a $r = 0$. A sua volta E_1 genera una correzione al campo magnetico $B_0 \rightarrow B_0 + B_1$

$$B_1 = \frac{i\omega}{c^2} \frac{1}{r} \int_0^r dr' r' E_1 = \frac{-i\omega^3 r^3}{16c^4} E_0$$

che genera un campo elettrico

$$E_2 = i\omega \int_0^r dr' B_1(r') = \frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0$$

che genera

$$B_2 = \frac{i\omega^5 r^5}{64 \cdot 6c^6} E_0, \quad E_3 = \frac{-\omega^6 r^6}{64 \cdot 6^2 c^6} E_0,$$

etc, etc. Quindi

$$E_z = (E_0 + E_1 + E_2 + E_3 + \dots) e^{i\omega t} = E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^{2n} \equiv E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)$$

La fig. 15.1a mostra $J_0(x)$ confrontata con la sua espansione in serie ad ordine 0,2,4,6,8: $J_0(x) = 1 - x^2/4 + x^4/64 - x^6/2304 + \dots$. $J_0(x) = 0$ a $x = \omega r/c \simeq 2.4$: $J_0(2.4) \simeq 1 - 1.44 + 0.52 - 0.08 = 0$.

.....

Riotteniamo lo stesso risultato risolvendo le equazioni di Maxwell in forma differenziale ed in coordinate cilindriche

$$(\nabla \times \hat{\mathbf{z}} E_z(r))_\theta = -\frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad (\nabla \times \hat{\boldsymbol{\theta}} B_\theta(r))_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r}.$$

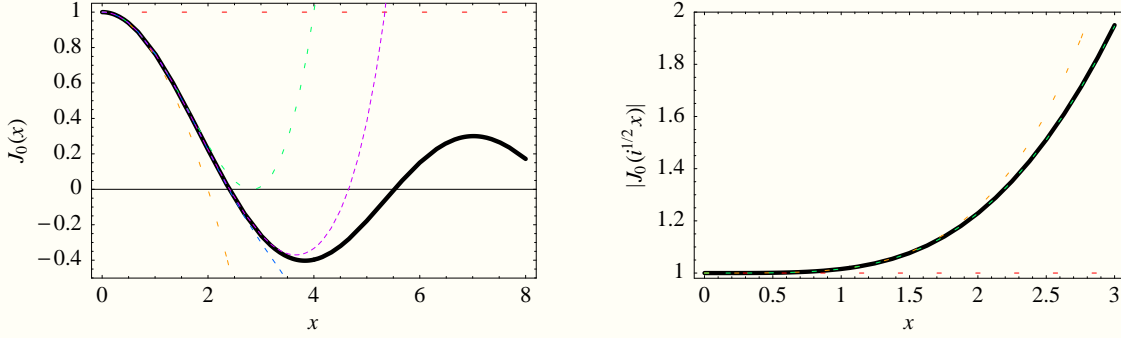


Figura 15.1: $J_0(x)$ e $|J_0(\sqrt{x})|$ (linee nere) confrontate con la loro espansione in serie attorno a $x = 0$ (linee tratteggiate, che corrispondono ad includere mano a mano ordini successivi).

Assumendo la geometria $E_z = E(r)e^{i\omega t}$ e $B_\theta = B(r)e^{i\omega t}$ la II e IV eq. di Maxwell diventano

$$-\frac{\partial E}{\partial r} = -i\omega B, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB) = \frac{i\omega}{c^2} E$$

e quindi, sostituendo nella seconda il B preso dalla prima, ed usando come variabile $x = \omega r/c$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) = -\frac{r^2 \omega^2}{c^2} E \quad \Rightarrow \quad x(xE')' = -x^2 E \quad \Rightarrow \quad E'' + \frac{E'}{x} = -E$$

Se non ci fosse il secondo termine si avrebbe $E'' = -E'$, la cui soluzione è una funzione speciale chiamata “ $\cos(x)$ ” che si trova su tutti i computer (o tavole). Con il secondo termine, che è di tipo attrito, la soluzione è chiamata “ $J_0(x)$ ” che si trova su molti computer (o tavole) ed assomiglia ad un $\cos(x)$ che si smorza.

Si può ripetere lo stesso conto in notazione vettoriale. Prendendo il rotore della II equazione di Maxwell

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \dot{\mathbf{J}} - \frac{\ddot{\mathbf{E}}}{c^2}$$

si ottiene un'equazione d'onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \mu_0 \dot{\mathbf{J}} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho. \quad (15.1)$$

Nel vuoto, assumendo che \mathbf{E} abbia solo una componente $E_z(r)$ che oscilla a frequenza ω , riscrivendo in coordinate cilindriche

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0$$

è risolta da $E_z \propto J_0(\omega r/c)$. La funzione di Bessel J_0 compare perchè siamo in simmetria cilindrica.

È interessante notare che J_0 può valere zero. Questo diventa rilevante chiudendo il condensatore, aggiungendo una parete laterale conduttrice. Questo seleziona pulsazioni speciali $\omega = 2.405r/c, 5.52r/c$ tali che $E_z(a) = 0$, in maniera che non ci sono correnti parassite sulla parete laterale.

Esercizio 15.10: Effetto pelle in filo'

Si riprenda l'esercizio 14.18, andando oltre il limite perturbativo in cui il campo elettrico è quasi uniforme.

➤Soluzione: L'esercizio assumeva bassa frequenza: questo significa che nel calcolare come il campo elettrico genera un campo magnetico, avevamo incluso il contributo della corrente di conduzione $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ e trascurato il contributo della corrente di spostamento $\mathbf{J}_s = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} = i\omega \epsilon_0 \mathbf{E}$, in quanto è molto minore della corrente di conduzione: $J_s/J \sim \omega \tau$ dove $\tau = \epsilon_0/\sigma$ è il tempo caratteristico del conduttore.

Inoltre avevamo calcolato perturbativamente assumendo, in approssimazione zero, un \mathbf{E}_0 uniforme che genera un \mathbf{B}_0 che genera un \mathbf{E}_1 molto minore di \mathbf{E}_0 . A sua volta questo genera una corrente ed una corrente di

spostamento, che generano un \mathbf{B}_1 che genera un \mathbf{E}_2 , producendo una serie infinita per $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$. Questo calcolo può essere più semplicemente fatto risolvendo le equazioni di Maxwell in forma differenziale. Abbiamo già scritto in eq. (15.1) l'equazione generale:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho.$$

Possiamo ora specializzarla inserendo $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, e trascurando la densità di carica ρ nel filo. Decidiamo inoltre di trascurare il termine $\ddot{\mathbf{E}}$, prodotto dalla corrente di spostamento. In questa maniera l'equazione assume la forma tipica di un'equazione di diffusione, $\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \sigma \dot{\mathbf{E}}$. Ne cerchiamo una soluzione con geometria cilindrica ed a regime, ovvero $\mathbf{E} = E_z(r) \hat{\mathbf{z}} e^{i\omega t}$. Si ottiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = \mu_0 \dot{J}_z = i\omega \sigma \mu_0 E_z \quad \Rightarrow \quad E_z'' + \frac{E_z'}{r} = \frac{2i}{\delta^2} E_z \quad \Rightarrow \quad E_z(r) \propto J_0 \left(\frac{r\sqrt{2i}}{\delta} \right).$$

Avendo geometria cilindrica, come nell'esercizio precedente si ottengono funzioni di Bessel J_0 , ma questa volta con un coefficiente numerico immaginario. Non deve sorprendere, in quanto già la correzione al primo ordine ad E_z era immaginaria. La funzione completa è mostrata in fig. 15.1b. Per $\delta \gg a$ è simile al risultato perturbativo. Per $\delta \ll a$ la funzione di Bessel diventa circa esponenziale, $E_z(r) \simeq E_{\text{ext}} e^{-r(1+i)/\delta}$, in quanto si può trascurare il termine E_z'/r nell'equazione differenziale. Fisicamente, significa che la corrente scorre solo sui bordi del filo per uno spessore δ , giustificando il nome 'lunghezza di pelle'.

Come vedremo in seguito, tenere in conto la corrente di spostamento porta ad un fenomeno nuovo: le onde. A frequenze $\omega \gtrsim 10^9$ Hz hanno lunghezza d'onda minore di 1 cm, ed è possibile utilizzarle per trasportare energia dentro cavità metalliche dette 'guide d'onda'. Il fatto che i campi penetrino dentro il metallo solo per un piccolo spessore δ e che quindi le correnti 'parassite' $J = \sigma E$ dentro al metallo siano trascurabili diventa un vantaggio. In questo modo si riesce a trasportare grandi potenze con poca dissipazione di energia per effetto Joule. Tecnologicamente risulta più semplice trasportare la corrente a basse frequenze in cavi di rame che ad alte frequenze in tubi di rame.

Esercizio 15.11: Filo conduttore interrotto ©

Un filo conduttore rettilineo e cilindrico, di resistività ρ , raggio a e lunghezza $\ell \gg a$, viene connesso ad un generatore di corrente, in modo che nel filo passa la corrente $I = I_0 \cos \omega t$.

- a) Si calcoli il campo magnetico in tutto lo spazio (assumendo un filo di lunghezza infinita) e il campo elettrico per $r < a$ nell'assunzione di corrente lentamente variabile. Si discuta *a posteriori* la condizione necessaria a questa approssimazione.

Si taglia via un tratto $h \ll a$ del filo e si regola di nuovo il generatore in modo che passi la stessa corrente di prima.

- b) Si risponda di nuovo alla domanda a); come cambiano i campi prima e dopo l'interruzione del filo?
- c) L'interruzione del filo si può schematizzare come l'inserimento in serie di una impedenza Z . Si stimi e discuta il valore di Z in funzione di ω .

➤ Soluzione:

- a) Per $\omega \rightarrow 0$ si ha un campo elettrico uniforme $E_0 = \rho I / \pi a^2$. La corrente genera un campo magnetico $B_\theta = \mu_0 r I / 2\pi a^2$ per $r < a$. Come già visto in esercizi precedenti, vi sono correzioni di ordine relativo $\omega \rho \epsilon_0$, che diventano significative ad alte frequenze.
- b) Prendendo la divergenza della IV equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}})$ si ottiene che $\mathbf{J} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$ ha divergenza zero, e quindi è costante sul taglio del filo. Questo significa che $\epsilon_0 \dot{E}_v = J + \epsilon_0 \dot{E}_0$, dove E_v è il campo nella regione di vuoto. Utilizzando $J = E_0 / \rho$ e $\dot{E} = i\omega E$ si ottiene

$$E_v = E_0 [1 + i/(\omega \rho \epsilon_0)].$$

Tutto questo equivale alla conservazione della carica: si può schematizzare il sistema come un condensatore inserito fra due resistenze: sulle superfici si deposita una densità di carica σ tale che $\dot{\sigma} = J$, per cui $E_v = E_0 + \sigma / \epsilon_0$.

- c) La parte vuota si comporta come un condensatore di capacità $C = \epsilon_0 \pi a^2 / h$. Al crescere della frequenza questo “condensatore” ha una induttanza parassita $L \simeq \mu_0 h / 8\pi$. Per trovare L si può calcolare l’energia magnetica contenuta nel condensatore

$$U_{\text{mag}} = \int dV \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} = \int_0^a dr \, 2\pi r \frac{(\mu_0 r I / 2\pi a^2)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 h I^2}{16\pi} \equiv \frac{LI^2}{2}.$$

Quindi, l’impedenza associata è $Z = i\omega L + 1/i\omega C$.

L’induttanza diventa rilevante solo ad alte frequenze, quando la nostra approssimazione di corrente lentamente variabile cessa di valere. Ad esempio $Z = 0$ per $\omega = 1/\sqrt{LC} = 2\sqrt{2}c/a$: per valori di ω così alti, I varia in modo significativo nel tempo che la luce impiega ad attraversare il filo. A frequenze così alte ci sono effetti addizionali: il filo irraggia; la corrente non è più uniforme a causa dell’effetto pelle. Infatti, $\omega\rho\epsilon_0 \ll 1$ implica $\delta = 2\sqrt{c\epsilon_0\rho/\omega} \ll c/\omega$, che per $Z = 0$ è comparabile al raggio a del filo.

Esercizio 15.12: Cavo coassiale ©

Due cilindri cavi coassiali di raggi $a < b$ sono percorsi da correnti uguali $I(t) = I_0 \sin \omega t$ in verso opposto, distribuite uniformemente sulle superfici. a) Trascurando la corrente di spostamento calcolare \mathbf{B} . b) Mostrare che \mathbf{E} può avere una sola componente non nulla. c) Calcolare \mathbf{E} assumendo che valga zero sul cilindro esterno. d) Calcolare la corrente di spostamento I_s . e) Discutere come deve essere calcolato \mathbf{B} nei tre casi $I_s \ll I_0$, $I_s < I_0$ e $I_s \approx I_0$. f) Caso numerico: $a = 1 \text{ mm}$, $b = 1 \text{ cm}$, $I_0 = 2 \text{ A}$, $\omega = 1000 \text{ Hz}$.

✚Soluzione:

- a) $\mathbf{B} = 0$ per $r < a$ ed per $r > b$. Nella zona intermedia $2\pi r B_\theta = \mu_0 I$.
- b) Per simmetria cilindrica \mathbf{E} può dipendere solo da r . Siccome non c’è carica $E_r = 0$. Siccome $B_z = 0$ si ha $2\pi r E_\theta = 0$. Quindi l’unica componente è $E_z(r)$, generata da $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$.
- c) Riscrivendo in componenti la II equazione di Maxwell si ottiene $-\partial E_z / \partial r = -\partial B_\theta / \partial t = -\mu_0 \omega I_0 \cos(\omega t) / 2\pi r$ per $a < r < b$. La soluzione con $E_z(b) = 0$ è

$$E_z(r) = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \cos(\omega t) \begin{cases} 0 & r > b \\ \ln(r/b) & a < r < b \\ \ln(a/b) & r < a \end{cases}.$$

- d) La corrente di spostamento $\mathbf{J}_s \equiv \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$ vale

$$I_s = \epsilon_0 \int_0^b \dot{E}_z 2\pi r dr = \frac{b^2 - a^2}{4} \frac{\omega^2}{c^2} I.$$

- e) Se $I_s \ll I_0$ il conto perturbativo fatto finora è accurato. Se $I_s < I_0$ si può iterare $B \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow \dots$ aggiungendo i termini perturbativi successivi. Se $I_s \approx I_0$ occorre risolvere le equazioni di Maxwell.
- f) Siccome $b\omega/c \ll 1$ siamo nel caso $I_s \ll I_0$.

Esercizio 15.13: Verso le onde

Si consideri un campo elettrico $E_z = E_0 \cos kx$ nel vuoto. Mostrare che deve essere presente un campo magnetico, che può essere assunto lungo y ed uguale a zero a $t = 0$. Mostrare che questo genera una correzione al campo elettrico, che genera una correzione al campo magnetico, etc.

✚Soluzione: Il campo elettrico ha divergenza zero, ma non soddisfa alla componente z della II equazione di Maxwell. $\partial_x E_z = \dot{B}_y$. In forma integrale, la si ottiene considerando un circuito rettangolare immaginario nel piano xz di lati $\Delta x \ll \Delta z$. Occorre quindi introdurre un

$$B_y^{(1)} = \int_0^t dt' \partial_x E_z = -E_0 k t \sin kx.$$

Questo campo magnetico ha divergenza zero, ma non soddisfa la componente z della IV equazione di Maxwell. $\partial_x B_y = \epsilon_0 \mu_0 \dot{E}_z$. In forma integrale, la si ottiene considerando un circuito rettangolare immaginario nel piano xy di lati $\Delta x \ll \Delta y$. Occorre quindi introdurre un

$$E_z^{(1)} = c^2 \int_0^t dt' \partial_x B_y^{(1)} = -\frac{1}{2} (ckt)^2 E_0 \cos kx$$

avendo definito $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$. Ma $E_z^{(1)}$ richiede un

$$B_y^{(2)} = \int_0^t dt' \partial_x E_z^{(1)} = \frac{1}{6} (ckt)^3 E_0 \sin kx$$

e poi

$$E_z^{(2)} = c^2 \int_0^t dt' \partial_x B_y^{(2)} = \frac{1}{24} (ckt)^4 E_0 \cos kx.$$

Risommando:

$$E_z = E_0 \cos kx \left[1 - \frac{(ckt)^2}{2} + \frac{(ckt)^4}{24} - \frac{(ckt)^6}{720} + \dots \right] = E_0 \cos kx \cos ckt = \frac{E_0}{2} \left[\cos(k(x - ct)) + \cos(k(x + ct)) \right]$$

$$B_y = -\frac{E_0}{c} \sin kx \left[(ckt) - \frac{(ckt)^3}{6} + \frac{(ckt)^5}{120} + \dots \right] = -\frac{E_0}{c} \sin kx \sin ckt = -\frac{E_0}{2c} \left[\cos(k(x - ct)) - \cos(k(x + ct)) \right]$$

Capitolo 16

Vettore di Poynting

Il teorema di Poynting

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad \text{dove} \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

ha come significato fisico la conservazione dell'energia in forma locale.

Esercizio 16.1: Teorema di Poynting in condensatore

Verificare il teorema di Poynting per una capacità cilindrica di raggio a e spessore $h \ll a$ assumendo che la carica $Q(t)$ vari su frequenze non troppo alte $\omega < c/a$.

➤Soluzione: Siccome non ci sono dissipazioni per effetto Joule, il teorema di Poynting si riduce a $\dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$ in forma differenziale, ovvero $\dot{U} + \Phi_S = 0$ in forma integrale.

A frequenze non troppo alte il campo elettrico è uniforme e vale $E_z(t) = Q(t)/S\epsilon_0$. La corrente di spostamento $J_z = \epsilon_0 \dot{E}_z$ genera un campo magnetico

$$B_\theta = \pi r^2 \dot{E}_z / c^2 / 2\pi r = r \dot{E}_z / 2c^2.$$

L'energia contenuta in un cilindro di raggio r è dominata dalla componente elettrica e vale

$$U \simeq U_E = (\pi r^2 h) \frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad \dot{U} = \pi r^2 h \epsilon_0 E_z \dot{E}_z.$$

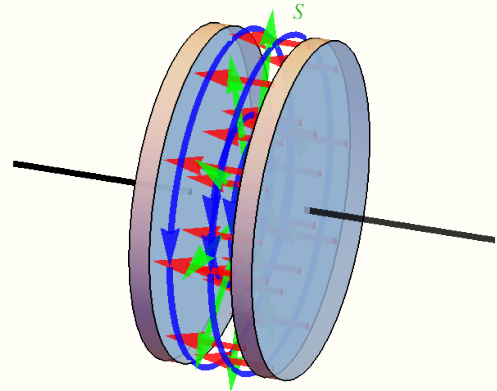
Tenendo conto che $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\mathbf{r}}$ il vettore di Poynting vale

$$S_r = -\epsilon_0 c^2 E_z B_\theta = -\frac{r}{2} \epsilon_0 E_z \dot{E}_z.$$

Il suo flusso attraverso un cilindro di raggio r ed altezza h vale

$$\Phi_S = 2\pi r h S_r = -\dot{U}$$

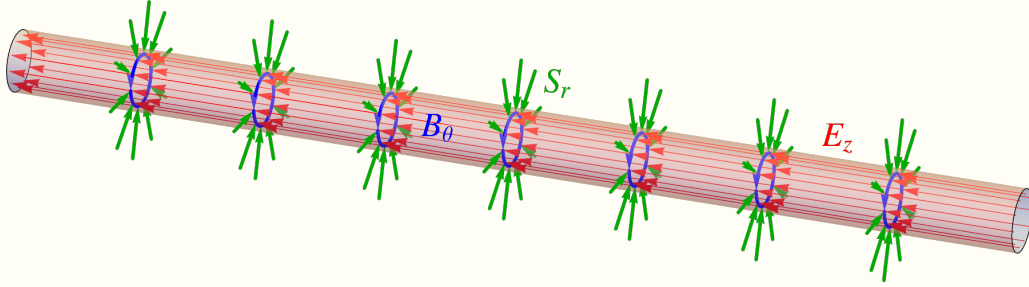
in accordo con il teorema di Poynting. Possiamo anche verificarlo in forma differenziale, $\dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$, calcolando $\nabla \cdot \mathbf{S} = (1/r)d(rS_r)/dr$.



Esercizio 16.2: Teorema di Poynting in filo resistivo

Verificare il teorema di Poynting per un filo cilindrico di lunghezza ℓ , raggio $a \ll \ell$, grande conducibilità σ sottoposto a differenza di potenziale $V(z)$ che varia su frequenze non troppo alte $\omega < c/a$.

➤Soluzione: L'energia elettromagnetica del filo è trascurabile rispetto all'energia dissipata per effetto Joule. Quindi il teorema di Poynting si riduce a $\nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = 0$ in forma differenziale, ovvero $\Phi_S + W_J = 0$ in forma integrale.

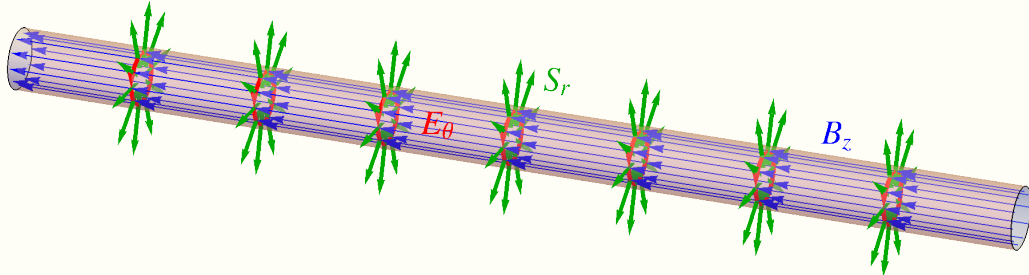


Nelle approssimazioni date, all'interno del filo resistivo si ha un campo elettrico uniforme $E_z = V/\ell$. La corrente $J_z = \sigma E_z$ dissipa una potenza $W_J = \ell \cdot \pi r^2 J_z E_z$ e genera, all'interno del filo, un campo magnetico $B_\theta = \mu_0 J_z \pi r^2 / 2\pi r$. Quindi il vettore di Poynting vale $S_r = -r J_z E_z / 2$. Il suo flusso attraverso un cilindro di raggio r arbitrario e lunghezza ℓ vale $\Phi_S = -\ell \pi r^2 J_z E_z$, che soddisfa al teorema di Poynting $\Phi_S + W_J = 0$.

Esercizio 16.3: Teorema di Poynting in solenoide

Verificare il teorema di Poynting per un solenoide cilindrico di lunghezza ℓ , raggio $a \ll \ell$, attorno a cui sono avvolte n spire per unità di lunghezza percorse da corrente $I(t)$ che vara su frequenze $\omega \ll c/a$.

➤Soluzione: Siccome non ci sono dissipazioni per effetto Joule, il teorema di Poynting si riduce a $\dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$ in forma differenziale, ovvero $\dot{U} + \Phi_S = 0$ in forma integrale. L'energia è dominata dalla componente magnetica.



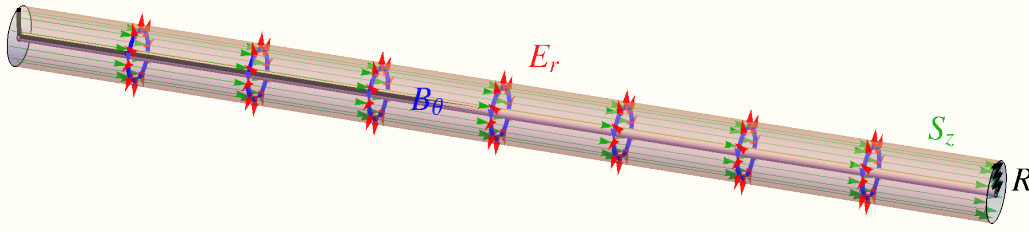
Nell'approssimazione data il solenoide contiene un campo magnetico $B_z = \mu_0 n I$. In base alla II equazione di Maxwell B_z genera un campo elettrico $E_\theta = -\dot{B}_z r / 2$. Il vettore di Poynting vale $S_r = -B_z \dot{B}_z r / 2\mu_0$. L'energia in un cilindro di altezza ℓ e raggio r vale $U \simeq U_B = \pi r^2 \ell B_z^2 / 2\mu_0$. La sua variazione rispetto al tempo è $\dot{U} = \pi r^2 \ell B_z \dot{B}_z / \mu_0$. Il flusso del vettore di Poynting attraverso il cilindro vale $\Phi_S = 2\pi r \ell S_r$ e soddisfa a $\Phi_S + \dot{U} = 0$.

Esercizio 16.4: Teorema di Poynting in cavo coassiale

Verificare il teorema di Poynting per un cavo coassiale, le cui armature sono connesse da una resistenza R a differenza di potenziale V .

➤Soluzione: Le due armature del cavo coassiale sono percorse da corrente $\pm I$ data da $I = V/R$. La potenza dissipata per effetto Joule dalla resistenza vale $W_J = IV$. All'interno del cavo coassiale sono presenti un campo elettrico radiale ed un campo magnetico dati da

$$E_r = -\frac{V}{r \ln r_2/r_1} \quad B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$



Il vettore di Poynting è quindi parallelo al cavo coassiale. Il suo flusso attraverso una sezione del cavo vale

$$S_z = \epsilon_0 c^2 E_r B_\theta = \frac{IV}{2\pi r^2 \ln r_2/r_1}, \quad \Phi_S = \int_{r_1}^{r_2} S_z 2\pi r dr = IV$$

che soddisfa a $\Phi_S + W_J = 0$.

Esercizio 16.5: Riscaldamento di conduttore

Un conduttore ohmico cilindrico di raggio a e lunghezza infinita ha inizialmente resistività ρ_0 e temperatura T_0 . La resistività varia con la temperatura T secondo una legge lineare $\rho = \rho_0(T/T_0)$. Durante il passaggio di corrente, a causa dell'effetto Joule la temperatura cresce proporzionalmente all'energia dissipata ($dT/dt = \alpha JE$) essendo J la densità di corrente ed E il campo elettrico.

- Si supponga che E venga mantenuto costante: trovare l'andamento temporale di ρ e J ;
- Si supponga che J venga mantenuta costante: si risponda di nuovo alle domanda a).
- Verificare la conservazione dell'energia.

✎ Soluzione:

- Poichè E è costante, e $JE = E^2/\rho$, si ha l'equazione $d\rho/dt = (\rho_0/T_0)dT/dt = (\rho_0/T_0)(\alpha E^2/\rho)$, la cui soluzione che soddisfa la condizione iniziale $\rho(0) = \rho_0$ è $\rho = \rho_0 \sqrt{1 + t/\tau_1}$ con $\tau_1 = \rho_0 T_0 / (2\alpha E^2)$.
- Poichè J è costante, e $JE = \rho J^2$, si ha l'equazione $d\rho/dt = (\rho_0/T_0)dT/dt = (\rho_0/T_0)\alpha \rho J^2$, la cui soluzione che soddisfa la condizione iniziale $\rho(0) = \rho_0$ è $\rho = \rho_0 \exp(t/\tau_2)$ con $\tau_2 = T_0 / (\rho_0 \alpha J^2)$.
- Per verificare la conservazione dell'energia occorre tenere in conto del campo magnetico B_ϕ generato dalla corrente $J = E/\rho$: all'interno del conduttore è dato da (legge di Ampère) $B_\phi = \mu_0 r J / 2 = \mu_0 r E / 2\rho$. Il vettore di Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / \mu_0$ alla superficie è quindi radiale e diretto verso l'interno del conduttore. Il flusso di \mathbf{S} per unità di lunghezza è $\Phi_S = -2\pi a S = -\pi a^2 E / \rho$ e si verifica che la potenza entrante è uguale alla potenza dissipata per effetto Joule:

$$\int J E dV = \pi a^2 E^2 / \rho = -\Phi_S.$$

Nel secondo caso, poichè ora $\partial_t E = \rho J \neq 0$ nel calcolo di B_ϕ occorre tenere conto della corrente di spostamento:

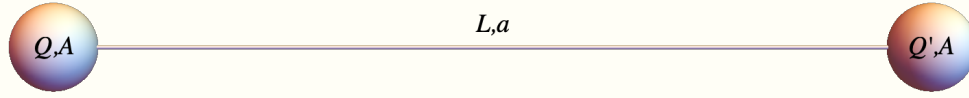
$$B_\phi = (\mu_0 r / 2)(J + \epsilon_0 \partial_t E) = (\mu_0 J r / 2)(1 - \epsilon_0 \rho / \tau_2).$$

Si ha quindi $\Phi_S = \pi a^2 J^2 \rho (1 - \epsilon_0 \rho / \tau_2)$. Il primo termine corrisponde alla dissipazione Joule, il secondo alla variazione dell'energia del campo elettrico:

$$\partial_t (\epsilon_0 E^2 / 2) = -\rho^2 J^2 / \tau_2.$$

Esercizio 16.6: Scarica di sfera ©

Una sfera perfettamente conduttrice di raggio A contiene una carica elettrica iniziale Q_0 . Dalla sfera esce radialmente un filo rettilineo di conducibilità σ , sezione circolare con raggio $a \ll A$ e lunghezza $L \gg A$. Il filo termina entrando radialmente in una seconda sfera perfettamente conduttrice di raggio A e carica iniziale $Q'_0 = 0$.



- Calcolare la resistenza R del filo e l'evoluzione temporale $Q(t)$ della carica sulla prima sfera.
- Calcolare, in termini di $Q(t)$ e $\dot{Q}(t)$ (ovvero, senza usare l'espressione calcolata al punto precedente) ad un tempo t generico, l'energia elettrostatica U e la potenza W_{Joule} dissipata per effetto Joule verificando che $\dot{U} = -W_{\text{Joule}}$.
- Calcolare in termini di $I = \dot{Q}$ il campo magnetico \mathbf{B} ed il vettore di Poynting \mathbf{S} vicini al filo.
- Calcolare il flusso Φ_S del vettore di Poynting su di un cilindro di piccolo raggio attorno al filo, verificando il teorema di Poynting, ovvero le relazioni fra Φ_S , \dot{U} e W_{Joule} .

➤Soluzione:

- La sfera è a potenziale elettrico $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 A$. Il filo ha resistenza $R = L/\pi a^2 \sigma$ e la connette con la seconda sfera a potenziale $\varphi' = Q'/4\pi\epsilon_0 A$ dove $Q' = Q_0 - Q$. L'equazione differenziale $\dot{Q} = I = V/R$ con $V = \varphi' - \varphi = (Q_0 - 2Q)/4\pi\epsilon_0 R$ è risolta da

$$Q(t) = Q_0 \frac{1 + e^{-t/\tau}}{2}, \quad \tau = RC, \quad C = 2\pi\epsilon_0 A.$$

L'ultima espressione indica che il sistema può anche essere visto come un circuito RC con C uguale alla capacità $C = C_{1,2}/2$ di due sfere in serie, $C_{1,2} = 4\pi\epsilon_0 A$.

- La potenza dissipata per effetto Joule vale $W_{\text{Joule}} = RI^2 = IV = (Q_0 - 2Q)\dot{Q}/4\pi\epsilon_0 A$. Siccome $L \gg A$, l'energia elettrostatica totale è la somma di quella delle due sfere, $U = (Q^2 + Q'^2)/8\pi\epsilon_0 A$. Quindi $\dot{U} = -(Q_0 - 2Q)\dot{Q}/4\pi\epsilon_0 A = -W_{\text{Joule}}$.
- Vicino al filo la corrente di spostamento (che si diffonde nello spazio) è trascurabile rispetto alla corrente I (che passa tutta nel filo). A piccola distanza ρ dal filo è possibile approssimare il filo come rettilineo infinito. Utilizzando coordinate cilindriche (ρ, θ, z) con l'asse z lungo il filo, il campo magnetico vale $B_\theta = \mu_0 I/2\pi\rho$. Il vettore di Poynting vale $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ ed è ortogonale alla superficie del filo, $S_\rho = E_z I/2\pi\rho$, in quanto il campo elettrico E_z è parallelo al filo. Il campo elettrico è somma di quello generato da Q , da Q' e (vicino al filo) dalle cariche nel filo.
- Il flusso di \mathbf{S} vale $\Phi_S = \int dz 2\pi\rho S_\rho = I \int dz E_z = IV$ dove non occorre conoscere la forma specifica di $E_z(z)$ in quanto l'integrale ricostruisce la differenza di potenziale. Il teorema di Poynting dice che $\dot{U} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$. Siccome $U = 0$ nel filo, il teorema di Poynting impone $W_{\text{Joule}} = \Phi_S$. Chiudendo invece il volume verso l'esterno, siccome $W_{\text{Joule}} = 0$, Poynting impone $\dot{U} = -\Phi_S$.

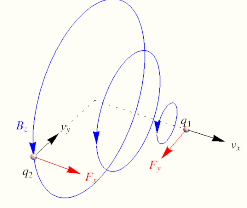
Esercizio 16.7: Azione e reazione fra due cariche

Una carica q_1 è in moto con velocità v_1 lungo l'asse x , una carica q_2 è in moto con velocità v_2 lungo l'asse y . Assumendo che entrambe le velocità siano non-relativistiche, mostrare che le forze elettromagnetiche non sono uguali ed opposte. Che ne è della conservazione dell'impulso?

➤Soluzione: Per velocità non-relativistiche i campi elettrici sono circa sferici, e danno luogo a forze di Coulomb uguali ed opposte.

Consideriamo quindi le sole forze magnetiche. La carica 1 genera, nella posizione della carica 2, un campo magnetico $B_z \propto q_1 v_x$ (le cui linee sono disegnate in figura) e quindi una forza di Lorentz $F_x = q_2 v_y B_z \propto q_1 q_2 v_x v_y$. Allo stesso modo, la carica 2 genera, nella posizione della carica 1, un campo magnetico $B_z \propto q_2 v_y$, e quindi una forza di Lorentz $F_y = -q_1 v_x B_z \propto q_1 q_2 v_x v_y$. Essendo in direzioni diverse, le due forze non possono essere uguali ed opposte.

La apparente non-conservazione dell'impulso delle cariche è spiegata dal fatto che anche il campo elettro-magnetico è un oggetto fisico, che ha energia ed impulso. La conservazione dell'impulso totale è garantita dal teorema di Noether, ma verificarla è difficile, in quanto la geometria è complicata. Proviamo a calcolare l'impulso di una carica in moto.



Esercizio 16.8: Impulso del campo di una carica in moto

Provare a calcolare l'impulso di una carica q in moto con velocità $v_z \ll c$ lungo l'asse z di un sistema di coordinate cilindriche.

✚Soluzione: La carica q ha coordinata $z = v_z t$ e (come visto in precedenza) genera i campi

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0[r^2 + (z - v_z t)^2]^{3/2}}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 q v r}{4\pi[r^2 + (z - v t)^2]^{3/2}}.$$

Il campo elettrico di modulo E è solo quello di Coulomb, radiale in coordinate sferiche. Calcoliamo a $t = 0$ l'impulso e l'energia nei campi. Notiamo che $cB_\theta/E_r = (v_z/c)(r/\sqrt{r^2 + z^2}) \ll 1$. Quindi l'energia è dominata dal campo elettrico:

$$u = \frac{dU}{dV} \simeq \frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad S_z = \epsilon_0 c^2 E_r B_\theta, \quad \frac{dp_z}{dV} = \frac{S_z}{c^2}.$$

La componente del campo elettrico radiale in coordinate cilindriche vale

$$E_r = E \cos \theta = E \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r[r^2 + (z - vt)^2]^{3/2}}.$$

Sia u che S_z divergono nel limite di carica puntiforme, come già visto quando era stato definito il raggio classico dell'elettrone, interpretando u/c^2 come contributo elettromagnetico alla massa. Questa divergenza complica il calcolo. Per evitare la divergenza integriamo su di un piano a $z \neq 0$ il flusso del vettore di Poynting ed il contributo all'energia. Integrando in $\int_0^\infty 2\pi r dr$ si ottiene

$$\frac{dU}{dz} = \frac{1}{8z^2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad \Phi_S = v_z \frac{1}{8z^2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} = v_z \frac{dU}{dz}.$$

Entrambe le espressioni divergono, ma nella stessa maniera: il loro rapporto significa che (a qualunque z) l'impulso del campo elettromagnetico è proporzionale all'energia elettromagnetica del campo. La costante di proporzionalità significa che il campo si 'muove' a velocità v_z . Ricordando che, per particelle come l'elettrone, l'energia elettromagnetica è una piccola frazione della massa, $U \sim m_e c^2/137$, si deduce che l'impulso elettromagnetico è una similmente una piccola frazione dell'impulso meccanico $m_e v_z$:

$$\frac{dp_z}{dz} = \frac{\Phi_S}{c^2} \quad \text{e quindi} \quad \frac{dp_z}{dU/c^2} = v_z.$$

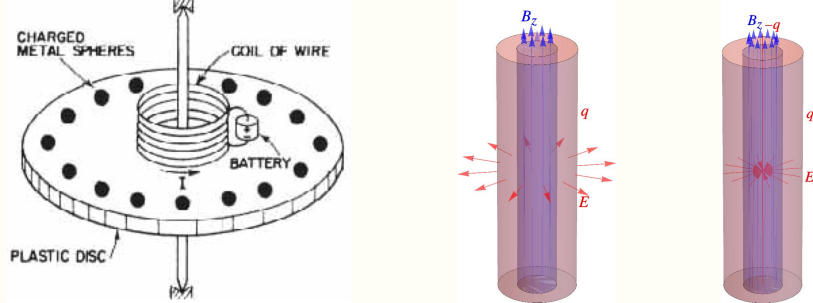
Per questo motivo è possibile trascurarlo (ed ignorare anche la non-conservazione dell'impulso), se ci si accontenta di un livello di precisione dell'1% circa.

Se $v_z \sim c$, la variazione \dot{B}_θ del campo magnetico modifica il campo elettrico, che non è più quello radiale di Coulomb. Lorentz ed altri fecero conti simili a questo, estesi a velocità $v_z \sim c$. Trovavano per l'impulso espressioni con strani fattori non-Newtoniani $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Il loro significato venne poi capito da Einstein: l'elettromagnetismo nasconde simmetria relativistica. Sfruttando questa simmetria non è necessario calcolare cariche in moto: basta applicare una trasformazione relativistica ad una carica ferma.

La conservazione dell'impulso è meglio vista in un caso con geometria più facilmente calcolabile, considerato nel prossimo esercizio.

Esercizio 16.9: Paradosso di Feynman

Un disco libero di ruotare lungo l'asse z contiene cariche elettriche (carica totale q) a distanza a dall'asse ed un solenoide di raggio b percorso da una corrente continua che genera al suo interno un campo magnetico costante B_z . Il sistema ha momento di inerzia I . Si spegne la corrente: il campo magnetico decresce fino a zero generando un campo elettrico rotazionale E_θ che mette in rotazione il disco. a) Calcolare il momento angolare. b) Discutere la sua conservazione.



➤Soluzione: In base alla II equazione di Maxwell, la variazione temporale di B_z produce, attorno alle cariche, un campo elettrico 'ruotante' $E_\theta(r) = -\dot{\Phi}_B/2\pi r = -b^2\dot{B}_z/2r$.

- a) Le cariche sono quindi soggette ad un momento delle forze $M_z = qaE_\theta(a)$ che genera un momento angolare $\dot{L}_z = I\dot{\omega} = M_z = -qa\dot{\Phi}_B/2\pi a$. Si ha quindi $\Delta L_z = -q\Delta\Phi_B/2\pi$.
- b) Per verificare che il momento angolare totale è conservato occorre tenere in conto che non solo il disco ma anche il campo elettro-magnetico possiede momento angolare. Il campo possiede infatti densità di impulso $d\mathbf{p}/dV = \mathbf{S}/c^2$ e quindi un momento angolare

$$\mathbf{L}^{\text{campo}} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{p} = \int dV \mathbf{r} \times \mathbf{S}/c^2.$$

In coordinate cilindriche, il campo magnetico B_z ed il campo elettrico E_r generato dalle cariche danno un vettore di Poynting $S_\theta = \epsilon_0 c^2 E_r B_z$ e quindi un momento angolare $L_z^{\text{campo}} \neq 0$.¹

Per verificare esplicitamente che la somma dei due momenti angolari è conservata consideriamo il problema analogo in figura b), con geometria più semplice che consente conti analitici. Le cariche elettriche sono ora distribuite con densità superficiale di carica $\sigma = q/2\pi ah$ su di un cilindro di raggio a ed altezza $h \gg a$. Si ha quindi $E_r = q/2\pi\epsilon_0 hr$ per $r > a$ e

$$L_z^{\text{campo}} = \int dV r \frac{S_\theta}{c^2} = h \int_a^\infty dS r \epsilon_0 E_r(r) B_z(r) = \frac{q}{2\pi} \int_a^\infty dS B_z = -\frac{q}{2\pi} \int_0^a dS B_z = -\frac{q\Phi_B}{2\pi}.$$

dove, per integrare il campo magnetico di un solenoide (semplice a $r < a$ ma non ad $r > a$), si è tenuto conto che le linee di campo magnetico circolano, per cui il flusso su tutto il piano vale zero. Il momento angolare totale rimane costante.

Per evitare questo passaggio si può modificare il problema, come in figura c), aggiungendo sull'asse un filo con carica $-q$ e densità di carica lineare costante, in maniera che il campo elettrico e quindi \mathbf{S} ora è diverso da zero solo per $r < a$. La variazione del momento angolare rimane come nel problema precedente, in quanto la nuova carica $-q$ è sull'asse, e quindi il momento delle forze su di essa vale zero. Si ottiene nuovamente

$$L_z^{\text{campo}} = h \int_0^a dS r \epsilon_0 E_r(r) B_z(r) = -\frac{q}{2\pi} \int_0^a dS B_z(r) = -\frac{q\Phi_B}{2\pi}.$$

(In meccanica quantistica il momento angolare L sarà quantizzato in unità di $\hbar/2$; il legame $L \sim q\Phi_B$ implicherà la quantizzazione del flusso del campo magnetico, tenendo conto che la carica elementare vale e).

¹Motivi di simmetria apparentemente suggeriscono $L_z = -L_z$, ma in realtà non è così in quanto il campo magnetico è uno pseudo-vettore, generato da correnti che girano in un verso dato.

Esercizio 16.10: Momento angolare dell'idrogeno

Stimare il momento angolare contenuto nei campi elettro-magnetici di un atomo di idrogeno, confrontandolo con il momento angolare meccanico.

✚Soluzione: L'elettrone in un atomo di idrogeno ruota a distanza a dal protone con velocità determinata da $m_e v^2/a = e^2/4\pi a^2 \epsilon_0$ cioè

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \frac{1}{a} \equiv \frac{r_e}{a} = \frac{1}{137.2} \quad \text{per} \quad a = 0.53 \text{ \AA}$$

dove la lunghezza $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2 \approx 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ è detta “raggio classico dell'elettrone”, pur non essendo il raggio dell'elettrone. L'elettrone, ruotando attorno al protone, genera anche un campo magnetico di tipo dipolare, $B \sim \mu_0 \mu/r^3$. Il dipolo magnetico vale

$$\mu = \pi a^2 I = \pi a^2 (e\omega/2\pi) = (e/2m_e) L \quad \text{dove} \quad L = m_e a^2 \omega$$

è il momento angolare dell'atomo, che ha quindi fattore giro-magnetico 1. Il vettore di Poynting è stimato come $S_\theta \sim E_r B_z/\mu_0 \sim L e^2/\epsilon_0 m_e r^5$. Il campo elettro-magnetico ha densità volumetrica di momento $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$. Quindi il momento angolare elettromagnetico vale

$$L_{\text{em}} = \int dV \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{S}}{c^2} \sim a^4 \frac{S(a)}{c^2} \sim \frac{e^2}{m_e c^2 \epsilon_0} \frac{L}{a} \sim \frac{r_e}{a} L \sim \frac{v^2}{c^2} L \sim \frac{L}{137^2}$$

ed è trascurabile rispetto al momento angolare meccanico, ricordando la velocità dell'elettrone scritta sopra. Essa necessariamente compare al quadrato, in maniera da rendere dimensionalmente corretta la formula $L_{\text{em}} \propto L/c^2$. Essendo l'atomo non-relativistico, ha momento angolare dominato da quello meccanico. Elettroni profondi in atomi ad alto $Z \sim 100$ sono quasi relativistici.

Capitolo 17

Onde nel vuoto

Un'onda elettromagnetica piana polarizzata linearmente nel vuoto è descritta da

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad c = \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k}$$

con \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{k} ortogonali. Frequenza: $\nu = \omega/2\pi$. Periodo: $T = 1/\nu$. Lunghezza d'onda; $\lambda = 2\pi/k = c/\nu = 2\pi c/\omega$. Densità e il flusso di energia:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}(E^2 + c^2 B^2) \quad \mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Il valore medio del vettore di Poynting è detto intensità \mathcal{I} dell'onda

$$\mathcal{I} = \langle S \rangle = \frac{c}{2} \epsilon_0 E_0^2 = c \langle u \rangle, \quad \langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2.$$

Esercizio 17.1: Campi elettrici illegali

Le antenne wi-fi emettono a frequenze di circa 5 GHz. Limiti di legge impongono campi elettrici minori di $E_{\max} = 6 \text{ V/m}$ a distanza di 1 m. Quanto vale il flusso di energia?

♣**Soluzione:** Si ha $S = cu = c\epsilon_0 E^2$ e quindi $\langle S \rangle = c\epsilon_0 E_{\max}^2/2 < 0.05 \text{ W/m}^2$.

Esercizio 17.2: Campi elettrici bestiali

La luce più intensa realizzata sono brevi impulsi laser, di intensità $\mathcal{I} = 10^{29} \text{ W/m}^2$, utilizzati nella fusione inerziale. Quanto vale il campo elettrico e magnetico?

♣**Soluzione:** Si ha $\mathcal{I} = \langle S \rangle = c\epsilon_0 E_{\max}^2/2$, da cui $E_{\max} \sim 10^{15} \text{ V/m}$ e $B_{\max} \sim E_{\max}/c \sim 10^7 \text{ T}$.

Esercizio 17.3: Luce solare

La luce solare ricevuta sulla Terra porta un flusso di energia $K_{\odot} = 1366 \text{ J/m}^2\text{s}$. Calcolare a) il vettore di Poynting, densità di energia, pressione della luce solare, densità di impulso. b) I campi elettrici e magnetici. c) Il flusso di fotoni. d) L'energia ottenibile da pannelli solari in un anno. e) Quanta energia emette il sole ogni secondo.

♣**Soluzione:** La media temporale o spaziale del vettore di Poynting è uguale alla costante solare: $\langle S \rangle = K_{\odot}$.

a) Quindi pressione p , densità di energia u , densità di impulso g valgono

$$\langle p \rangle = c \langle g \rangle = \langle u \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c} = 4.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = 4.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

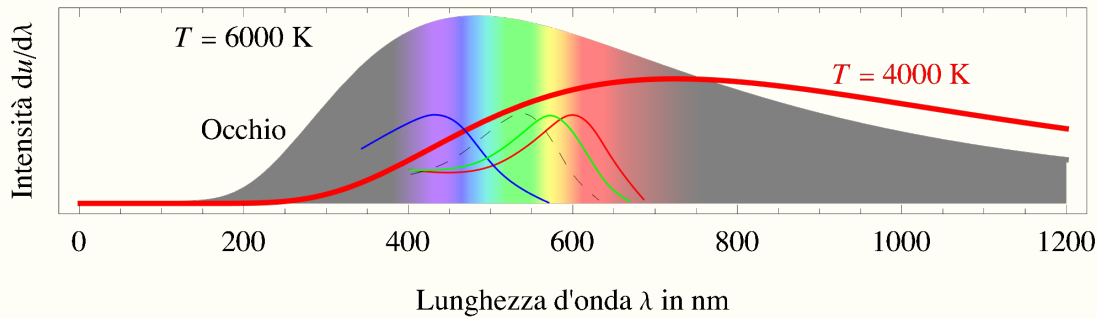


Figura 17.1: Spettro in energia $du/d\lambda$ della radiazione di corpo nero a $T = 6000\text{ K}$ (sole) e $T = 4000\text{ K}$ (lampadina ad incandescenza). La banda colorata indica la regione percepita come luce visibile. La figura mostra quanto i tre tipi di coni ed i bastoncelli nell'occhio umano reagiscono a diverse frequenze: la sensazione di colore percepita dipende da quanto viene attivato ciascun tipo di cono (dati da J.K. Bowmaker, H.J.A. Dartnall, *J. Physiol.* 298 (1980) 501).

- b) Il campo elettrico vale $E_0 = 1000\text{ V/m}$ (usando $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{ C}^2/\text{N m}^2$ e $\text{N} \cdot \text{m} = \text{V} \cdot \text{C}$). Il campo magnetico vale $B_0 = E_0/c = 3.36 \cdot 10^{-6}\text{ Tesla}$.
- c) La luce solare ha uno spettro continuo piccato sul giallo, di frequenza $\nu \approx 0.5 \cdot 10^{15}\text{ Hz}$ e lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu \approx 0.6\mu\text{m}$. La luce è composta da 'fotoni', ciascuno dei quali ha energia $h\nu \sim 10^{-19}\text{ J}$ dove la costante di Planck vale $h = 6.62 \cdot 10^{-34}\text{ J/s}$. Quindi la luce solare è un flusso di circa 10^{22} fotoni/ $\text{m}^2\text{ s}$.
- d) Il sole a picco porta flusso di energia $K_\odot = 1.366\text{ kW/m}^2$. Tenendo conto che pannelli solari hanno efficienza $\epsilon \approx 0.2$, la potenza prodotta per unità di superficie vale $dW/dS = \epsilon K_\odot = \text{kW}/4\text{m}^2$. L'energia totale prodotta in un anno vale $dE/dS = K_\odot \epsilon \cdot \text{yr}/2/3 = 400\text{ kWh/m}^2$, dove $1/2$ tiene conto che di notte non c'è il sole, ed $1/3$ dell'inclinazione del sole $\langle \cos^2 \theta \rangle < 1$ e delle nuvole.
- Se un kWh vale circa 0.15 €, l'energia prodotta vale circa 60 €/yr·m². Il costo di installazione è di circa 500 €/m², ed i pannelli solari durano circa 20 anni, nei quali producono circa 1000 € di energia per m². Se va tutto bene, dopo circa 10 anni compensano il costo di installazione, ed il costo energetico necessario per la loro produzione.
- e) La Terra dista $d \approx 1.5 \cdot 10^{11}\text{ m}$ dal Sole e riceve una frazione $\Omega/4\pi = \pi R^2/4\pi d^2 = 6.8 \cdot 10^{-5} = 1/14500$ della potenza totale irradiata dal Sole, uguale a $W_\odot = 4\pi d^2 K_\odot = 3.9 \cdot 10^{26}\text{ W/m}^2$. Siccome $E = mc^2$, questo significa che il Sole emette in radiazione circa 4 milioni di tonnellate al secondo.

Esercizio 17.4: Efficienza energetica di lampadina

Una lampadina a incandescenza da 25 Watt dichiara di emettere 210 lumen. Quanto vale la sua efficienza energetica?

➤Soluzione: Una commissione è stata pagata per definire il lumen (lm) come

$$\text{lm} = \frac{y(\lambda)}{683} \cdot W$$

dove $y(\lambda)$ è una funzione della lunghezza d'onda λ che definisce cosa si intende per 'visibile' dall'occhio umano: y è una campana che di giorno ha massimo $y(\lambda = 555\text{ nm}) = 1$ e larghezza di circa 50 nm, mentre di notte il massimo si sposta a $\lambda = 500\text{ nm}$ (perché coni e bastoncelli funzionano in modo un po' diverso).

Tutto ciò vuole dire che efficienza del 100% corrisponde ad emettere 683 lumen per ogni Watt di potenza impiegata. La lampadina termica ha efficienza di circa 1.2%. Parte di questa inefficienza è dovuta al fatto che irraggia più o meno come uno spettro di corpo nero a $T \approx 4000\text{ K}$, per cui solo il 10% della radiazione emessa cade nel visibile. Questo è illustrato in figura 17.1, dove si vede anche che una lampadina ad incandescenza produce, rispetto al sole, meno luce nell'ultravioletto (che è biologicamente dannoso) e quindi più nel giallo. Un

candela a combustione ha temperatura ancora minore ed efficienza ancora più bassa, circa 0.04%. Una lampada a gas, più calda, ha maggiore efficienza.

Lampade LED ad alta efficienza energetica raggiungono il 50%, ed hanno uno spettro costituito da varie righe scelte in modo da cadere soprattutto nel visibile. La luce è prodotta dal de-eccitamento di atomi, che vengono eccitati due volte ogni ciclo di corrente alternata, cioè 120 Hz: abbastanza veloce da non produrre un noioso brillio (che diventa visibile se uno le filma al rallentatore). Riassumendo:

Lampada	Efficienza luminosa
Candela	0.04%
Lampada a gas	0.3%
Lampada a incandescenza	1 – 4%
Lampada a fluorescenza/scarica	10 – 20%
LED	20-50%

Esercizio 17.5: Doppler

Un'onda elettromagnetica piana di pulsazione ω si propaga nel vuoto lungo l'asse x . L'onda è monocromatica polarizzata linearmente e l'ampiezza del campo magnetico è $B_0 = 10^{-7}$ T.

- Si scriva l'espressione di $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.
- Si calcoli l'intensità I dell'onda e la si confronti con l'intensità risultante da una sorgente isotropa di potenza $W = 1$ W a distanza di $r = 1$ m.
- Si scriva l'espressione della fase e si indichi la frequenza misurata da un ricevitore in moto rettilineo uniforme con velocità \mathbf{v} non-relativistica rispetto alla sorgente.

✎Soluzione:

- Le espressioni standard dell'onda piana sono

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \cos(kx - \omega t)$$

con $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ e

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{E}_0}{c} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad E_0 = cB_0 = 30 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

- L'intensità media vale $I = \epsilon_0 c E_0^2 / 2 = 1.19 \text{ W/m}^2$. Per confronto, l'intensità risultante da una sorgente isotropa di potenza W posta a distanza r vale $I = W/4\pi r^2 \approx 0.02 \text{ W/m}^2$, il cui campo elettrico vale

$$E = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{W}{4\pi\epsilon_0 c}} = 7.7 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

- La fase vale $\phi = k(x_0 + vt) - \omega t = kx_0 - (\omega - kv)t = kx_0 - \omega(1 - v/c)t$. La frequenza misurata dall'osservatore in moto risulta quindi modificata (fenomeno noto come effetto Doppler):

$$\nu_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi} \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Esercizio 17.6: Luce delle stelle

Stimare la distanza delle stelle assumendo che siano oggetti con luminosità intrinseca simile al sole, ma più lontani.

✎Soluzione: La luminosità apparente di una tipica stella visibile è circa 10^9 minore della luminosità apparente del sole, e simile alla luminosità apparente di una lampadina a distanza di 1 km. I campi elettrici e magnetici

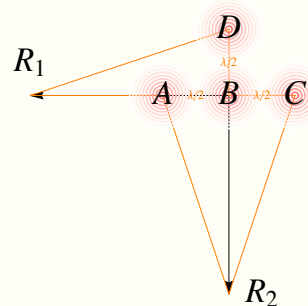
di onde sferiche decrescono come $1/r$, quindi il vettore di Poynting che misura l'intensità luminosa è $\mathbf{S} \propto \hat{\mathbf{r}}/r^2$.¹ Ed infatti questo soddisfa al teorema di Poynting per una sorgente stazionaria nel vuoto, $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$.

Quindi una stella dista da noi circa $10^{9/2} \sim 30000$ volte più del sole, cioè circa 1 anno luce.

L'unificazione fra oggetti che apparivano diversi (e che per motivi teologici dovevano essere diversi) fu proposta per la prima volta da Bruno Giordano, che stimò questa distanza così assurdamente grande da non poter essere testata mediante misure di parallasse con le tecnologie dell'epoca. Si dovette attendere il 1838 per la conferma sperimentale. Nel frattempo l'Inquisizione condannò Bruno al rogo (eseguito nel 1600) per idee eretiche, fra cui l'idea che esistessero altre stelle con altri pianeti e che la terra non fosse al centro dell'universo.

Esercizio 17.7: Interferenza fra onde

Quattro sorgenti identiche A, B, C, D disposte come in figura e situate a distanza $\lambda/2$ emettono onde sferiche di lunghezza d'onda λ con potenza totale W . Due ricevitori 1 e 2 sono situati a distanza $r \gg \lambda$ come in figura. a) Calcolare le potenze ricevute da 1 e 2. b) Cosa cambia se la sorgente D viene spenta? c) Se B viene spenta?



Soluzione: Il flusso del vettore di Poynting di ogni sorgente, ignorando le altre, è uguale a $\Phi_S = W$, quindi l'intensità dell'onda vale $I = \langle S \rangle = W/4\pi r^2$. Tenendo conto che $r \gg \lambda$ ogni sorgente riceve un'onda piana, quindi il vettore di Poynting è dato da $\mathbf{S} = \epsilon_0 E^2$ dove il campo elettrico totale $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$ è la somma dei campi elettici emessi dalle singole sorgenti. Si può quindi approssimare distanza comune r ovunque eccetto che nella differenza di fase fra le singole sorgenti.

a) Con tutte le sorgenti accese si ha

$$I_1 = \frac{W}{4\pi r^2} \left| e^{ik(r-\lambda/2)} + e^{ikr} + e^{ik(r+\lambda/2)} + e^{ik\sqrt{r^2+\lambda^2/4}} \right|^2 = \frac{W}{4\pi r^2} |-1 + 1 - 1 + 1|^2 \approx 0$$

$$I_2 = \frac{W}{4\pi r^2} \left| e^{ikr} + 2e^{ik\sqrt{r^2+\lambda^2/4}} + e^{ik(r+\lambda/2)} \right|^2 = \frac{W}{4\pi r^2} |1 + 1 + 1 - 1|^2 = 4 \frac{W}{4\pi r^2}$$

avendo usato $k = 2\pi/\lambda$, quindi $e^{\pm ik\lambda/2} = -1$, e $\sqrt{r^2 + \lambda^2/4} \simeq r$.

b) Se la sorgente D viene spenta, aumenta sia $I_1 \propto |1 - 1 + 1|^2$ che $I_2 \propto |1 + 1 + 1|^2$.

c) Se la sorgente B viene spenta aumenta $I_1 \propto |1 - 1 + 1|^2$ e diminuisce $I_2 \propto |1 + 1 - 1|^2$.

Quindi il ricevitore 1 da solo non sa dire se viene spenta B o D .

Esercizio 17.8: Ricevitore di onde

Calcolare la f.e.m. \mathcal{E} attraverso un circuito quadrato di lato $\ell = \lambda/2$ disposto nell'asse xy , quando viene attraversato da un'onda elettromagnetica che si propaga lungo x di lunghezza d'onda λ ed ampiezza E_0 polarizzata lungo y .

Soluzione: È possibile calcolare \mathcal{E} utilizzando o il campo elettrico o quello magnetico. Si ottiene lo stesso risultato in quanto un'onda piana è soluzione della II equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$.

- La circuitazione del campo elettrico vale

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \ell[E(x=\ell) - E_y(x=0)] = \frac{\lambda}{2} E_0 \left[\sin(k(0 + \frac{\lambda}{2}) - \omega t) - \sin(k(0 - \omega t)) \right] = E_0 \lambda \sin \omega t.$$

¹La dipendenza $S_r \propto 1/r^2$ è quella che si otterrebbe se la luce fossero quanti di energia che si disperdono.

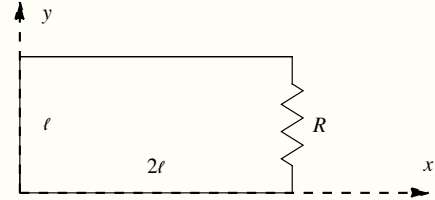
- Il flusso del campo magnetico vale

$$\Phi_B = \int dS B_z = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\lambda/2} dx B_0 \sin(kx - \omega t) = \frac{B_0 \lambda^2}{2\pi} \cos \omega t$$

quindi $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ viene uguale a prima, come si verifica usando $\omega = 2\pi c/\lambda$ e $E_0 = cB_0$.

Esercizio 17.9: Onda ricevuta da circuito rettangolare ©

Una spira rigida conduttrice rettangolare ha lati di lunghezza 2ℓ paralleli all'asse x e di lunghezza ℓ paralleli all'asse y . La spira contiene una resistenza R , ed è ferma in presenza di un'onda elettromagnetica nel vuoto di lunghezza d'onda $\lambda = 2\ell$ e intensità \mathcal{I} con il campo magnetico polarizzato lungo l'asse z , $B_z = B_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$. A tutte le domande si diano anche risposte numeriche assumendo $R = 300 \Omega$, $\lambda = 0.1 \text{ m}$, $\mathcal{I} = 10^4 \text{ W/m}^2$.



- Quanto vale il campo magnetico B_0 ?
- Assumendo che l'onda si propaghi lungo l'asse y , calcolare la potenza media W_{Joule} dissipata nel tempo dalle resistenze, presentando il risultato come una “sezione d'urto effettiva” definita da $\sigma \equiv W/\mathcal{I}$
- In tal caso, quanto vale la forza totale agente sulla spira?
- Ri-calcolare σ assumendo che l'onda si propaghi lungo l'asse x .
- In tal caso, quanto vale la forza totale agente sulla spira?

➤ Soluzione:

- Ricordando che $\mathcal{I} = \langle S \rangle = c\epsilon_0 \langle E^2 \rangle = c\epsilon_0 E_0^2/2$ si ha $B_0 = E_0/c = \sqrt{2\mathcal{I}/\epsilon_0 c^3} \approx 0.9 \cdot 10^{-6} \text{ T}$.
- Similmente all'esercizio 17.8, il flusso del campo magnetico vale $\Phi_B = B_0 \cos(\omega t) \lambda^2/\pi$. L'equazione del circuito è $RI = \mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = 2\lambda E_0 \sin(\omega t)$. La potenza media dissipata per effetto Joule vale

$$W_{\text{Joule}} = \frac{\langle \mathcal{E}^2 \rangle}{R} = \frac{8\lambda^2 \mathcal{I}}{c\epsilon_0 R} \langle \sin^2 \omega t \rangle = 4\lambda^2 \frac{Z_0}{R} \mathcal{I} = 5 \text{ W}$$

dove $Z_0 \equiv c\mu_0 = 1/c\epsilon_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377 \Omega$ è detta ‘impedenza del vuoto’. Si ha quindi sezione d'urto $\sigma \equiv W_{\text{Joule}}/\mathcal{I} = 4\lambda^2 Z_0/R = 0.05 \text{ m}^2$.

- Le forze sui lati di lunghezza ℓ paralleli alla direzione dell'onda sono uguali ed opposte, $F_x = \int_0^\ell dy I[B_z(y) - B_z(y)] = 0$. Le forze sui lati di lunghezza 2ℓ invece si sommano grazie allo sfasamento di mezzo periodo

$$F_y = -2\ell I[B_z(y, t) - B_z(y + \lambda/2, t)] = -4\ell I B_z(y, t).$$

- La forza elettromotrice $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ vale zero in quanto il flusso Φ_B del campo magnetico vale zero, essendo la lunghezza d'onda uguale al lato parallelo alla direzione dell'onda.
- Zero al quadrato: se anche ci fosse una corrente I , le forze sui lati di lunghezza 2ℓ paralleli alla direzione dell'onda sarebbero uguali ed opposte, $F_y = \int_0^{2\ell} dx I[B_z(x) - B_z(x)] = 0$. Le forze sui lati di lunghezza ℓ sarebbero uguali e opposte, $F_x = 2\ell I[B_z(x, t) - B_z(x + \lambda, t)] = 0$, in quanto i campi sono uguali alla distanza di una lunghezza d'onda.

Esercizio 17.10: Ricevitore di onde con sintonizzazione

a) Si ripeta il calcolo dell'esercizio 17.8 per un'onda di lunghezza d'onda λ arbitraria. b) Si calcoli la f.e.m. media indotta assumendo un'onda non monocromatica, scomponendola in serie di Fourier. c) Come è possibile ottenere un circuito che riceva principalmente ad una data frequenza?

➤Soluzione:

a) Per un circuito di lato ℓ generico si ha

$$\mathcal{E} = \ell[\sin(k\ell - \omega t) + \sin(\omega t)] = 2E_0\ell \sin \frac{\pi\ell}{\lambda} \cos\left(\frac{\pi\ell}{\lambda} - \omega t\right), \quad \langle \mathcal{E}^2 \rangle_t = 2E_0^2\ell^2 \sin^2 \frac{\pi\ell}{\lambda}.$$

Come funzione di ℓ , vale zero per $\ell = 0$, cresce mano a mano che uno ingrandisce l'antenna, e raggiunge un massimo per $\ell = \lambda/2$, e vale di nuovo zero per $\ell = \lambda$: quindi bisogna costruire le antenne grosse, ma farle più grandi dell'onda che si vuole rivelare è inutile o dannoso.

b) Una più generica onda non-monocromatica può essere scomposta in serie di Fourier come

$$E = \sum_n E_n \sin(k_n x - \omega_n t), \quad \text{quindi} \quad \mathcal{E} = 2\ell \sum_n E_n \sin \frac{\pi\ell}{\lambda_n} \sin(\omega_n t).$$

La potenza assorbita in media nel tempo vale

$$\langle \mathcal{E}^2 \rangle_t = \sum_n 2E_n^2\ell^2 \sin^2 \frac{\pi\ell}{\lambda_n}$$

in quanto i termini misti con frequenze diverse si mediano a zero. Il circuito riceve quindi meglio frequenze tali che $\lambda_n \sim 2\ell$, e riceve male basse frequenze tali che $\lambda_n \gg \ell$.

c) Inserendo nel circuito componenti (ad esempio RLC) è possibile trasformarlo in filtro piccato ad una frequenza desiderata, tale che la corrente $\langle I^2 \rangle_t$ è dominata da quella sola frequenza dell'onda non mono-cromatica. In questo modo le radio possono sintonizzarsi su frequenze diverse.

Esercizio 17.11: Antenna lineare vs circolare ©

In qualche vecchio modello di televisore può ancora capitare di osservare due tipi di antenne: una lineare, una circolare.

- In che direzione va orientata ciascuna delle due antenne per ottimizzare la ricezione ad un'onda elettromagnetica piana polarizzata linearmente?
- Assumendo l'orientazione ottimale calcolare la fem indotta nelle due antenne, specificando come, nel limite di basse frequenze, il rapporto dei segnali visti dalle due antenne dipende dalla frequenza. Quali sono i vantaggi di ciascuna delle due antenne?
- Supponiamo che l'antenna lineare sia lunga 50 cm e quella circolare abbia raggio di 10 cm. A quale frequenza le due antenne ricevono la stessa fem?
- Avete mai visto radio con antenne circolari?

**➤Soluzione:**

- Per massimizzare la ricezione, l'antenna lineare sarà orientata lungo la direzione del campo elettrico, mentre il piano dell'antenna circolare sarà orientato perpendicolarmente al campo magnetico. In Italia i segnali sono trasmessi con campo elettrico polarizzato orizzontalmente, mentre in Inghilterra viene polarizzato verticalmente: per questo le antenne sui tetti inglesi hanno una forma un po' diverse da quelle italiane.
- La fem può essere calcolata dalla circuitazione del campo elettrico o dal flusso del campo magnetico. Per un circuito rettangolare, come discusso in esercizi precedenti, la fem è data dalla differenza di $E\ell$ fra lati

paralleli, per cui c'è una cancellazione a frequenze basse. Un circuito circolare di raggio r si comporta in maniera simile

$$\Phi_B = \int_{-r}^r dx 2\sqrt{r^2 - x^2} B_0 \cos(kx - \omega t) = \pi r^2 \frac{2J_1(kr)}{kr} B_0 \cos \omega t, \quad \mathcal{E}_{\text{circolare}} = -\dot{\Phi}_B = \pi r^2 \omega \frac{2J_1(kr)}{kr} \sin \omega t$$

con la sola differenza che la funzione di Bessel oscilla in funzione di k in maniera smorzata invece che sinusoidale. Il conto preciso è superfluo: per capire la fisica basta il limite di basse frequenze, in cui $2J_1/rk \rightarrow 1$ ed il conto geometrico diventa semplice:

$$\Phi_B = \pi r^2 B_0 \cos \omega t, \quad \mathcal{E}_{\text{circolare}} = \pi r^2 B_0 \sin \omega t = \pi r^2 \frac{\omega}{c} E_0 \sin \omega t \quad \text{per } \lambda \gg r.$$

In un'antenna lineare non circola nessuna corrente: è quindi un sistema diverso, più complicato da trattare teoricamente. Ma è chiaro che se l'antenna è parallela al campo elettrico gli elettroni vengono fatti oscillare lungo l'antenna in qualche maniera che non viene discussa. La quantità rilevante sarà la differenza di potenziale ai capi dell'antenna di lunghezza ℓ :

$$\mathcal{E}_{\text{lineare}} = -\ell E_0 \cos \omega t.$$

Non comparando la differenza fra due lati vicini, a basse frequenze l'antenna lineare riceve un segnale maggiore.

c) Il rapporto:

$$\frac{\sqrt{\langle \mathcal{E}_{\text{circolare}}^2 \rangle}}{\sqrt{\langle \mathcal{E}_{\text{lineare}}^2 \rangle}} = \frac{\omega \pi r^2}{c \ell}$$

vale 1 per $\omega = \ell c / \pi r^2 \approx 4.8 \times 10^9 \text{ rad s}^{-1}$ corrispondente ad una frequenza $\nu = \omega / 2\pi \approx 760 \text{ MHz}$. A questa frequenza $\lambda = \nu / c = 2.5 \text{ m}$, per cui l'assunzione $\lambda \gg r$ è quasi realistica.

d) No: un'antenna lineare risulta più efficiente in quanto i segnali radio hanno frequenze di circa 100 MHz, minori di 760 MHz. Dovendo trasmettere meno informazione (solo la voce) possono utilizzare basse frequenze: in linea di principio basterebbe la frequenza tipica della voce umana, minore di circa 1 kHz.

Esercizio 17.12: Riflessione e polarizzazione

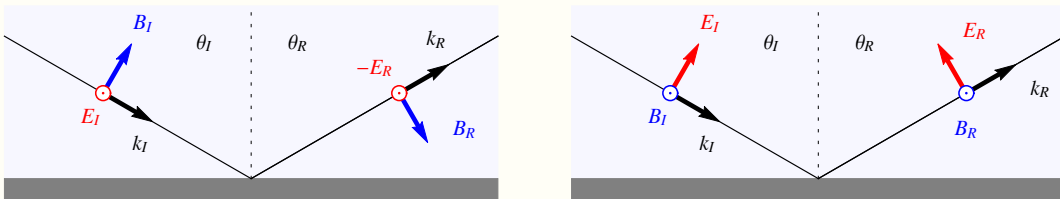
Un'onda piana polarizzata circolarmente si riflette su di uno specchio. Calcolare la polarizzazione dell'onda riflessa per

- Incidenza perpendicolare.
- Incidenza parallela.
- Incidenza ad angolo generico.

➤Soluzione: È complicato calcolare la riflessione per un'onda con polarizzazione circolare: conviene procedere in maniera indiretta: 1) decomporla in una base conveniente, come somma di polarizzazioni lineari; 2) calcolare la riflessione per le polarizzazioni lineari; 3) combinare i risultati ottenendo il risultato per l'onda circolare. Procedendo in questa maniera ed utilizzando la notazione complessa, un'onda piana polarizzata circolarmente è descritta da

$$\mathbf{E}_{\pm}^I(\mathbf{x}, t) = \text{Re}(\mathbf{E}_1 \pm i\mathbf{E}_2) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$$

dove \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 sono una base di due polarizzazioni lineari ortogonali fra di loro ed a \mathbf{k} , con $\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_1$ (e quindi $E_1 = E_2$). È conveniente scegliere la base di polarizzazioni lineari in maniera che sia il più semplice possibile. La figura mostra la base adottata. Il caso 1 è mostrato nella figura di sinistra: si sceglie il campo elettrico in maniera che sia parallelo al piano (e quindi il campo magnetico è storto). A destra nel caso 2 è possibile scegliere il campo magnetico in maniera che sia parallelo al piano (e quindi il campo elettrico è storto).



La figura già illustra anche l'onda riflessa per angolo generico, ma iniziamo dai casi a) e b).

- a) Per riflessione perpendicolare (angolo $\theta_I = 0$) si ha $\mathbf{E}_{1,2}^R = -\mathbf{E}_{1,2}^I$ e $\mathbf{k}_R \rightarrow -\mathbf{k}_I$ e quindi cambia un segno nella relazione $\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_1$, il che significa inversione della polarizzazione. A parole, l'onda riflessa

$$\mathbf{E}_{\pm}^R(\mathbf{x}, t) = -\text{Re}(\mathbf{E}_1 \pm i\mathbf{E}_2) \exp[i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)].$$

continua a 'girare' nello stesso senso di quella incidente ma si è invertita la direzione del moto e quindi la polarizzazione. È analogo alla rimbalzo perpendicolare di una sfera che ruota attorno alla sua direzione del moto: nel rimbalzo il momento angolare si conserva e l'impulso si inverte.

- b) Per riflessione quasi orizzontale ($\theta_I \rightarrow 90^\circ$) si ha $\mathbf{E}_1^R = -\mathbf{E}_1^I$, $\mathbf{E}_2^R = +\mathbf{E}_2^I$ e $\mathbf{k}_R = +\mathbf{k}_I$. Quindi nuovamente si inverte la relazione $\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_1$ ovvero il senso della polarizzazione circolare.
- c) A questo punto, è ragionevole presumere che, per continuità fra i due angoli estremi, il risultato per angolo generico sia come in figura e quindi che la riflessione sempre inverta la polarizzazione $\pm \rightarrow \mp$. In effetti, il risultato per angolo generico può essere matematicamente descritto definendo la matrice $R_{\perp} = \text{diag}(1, 1, -1)$ che riflette la componente z di un vettore ortogonale al piano di riflessione xy lasciando invariate le altre componenti. Si ha

$$\mathbf{k}_R = R_{\perp} \mathbf{k}_I, \quad \mathbf{E}_1^R = -\mathbf{E}_1^I, \quad \mathbf{E}_2^R = -R_{\perp} \mathbf{E}_2^I$$

che, come si può verificare, corrisponde ad un'inversione del segno della relazione $\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_1$.

In conclusione, una riflessione inverte il segno della polarizzazione circolare.

Questo è usato per evitare che un localizzatore GPS dia una posizione sbagliata quando uno è vicino ad una montagna: può capitare che il localizzatore si confonda ricevendo il segnale riflesso dalla montagna e assuma che sia il segnale proveniente direttamente dal satellite (che invece può essere schermato dalla montagna). Si evita questo possibile errore facendo emettere ai satelliti GPS solo polarizzazione destre: se viene ricevuta una polarizzazione sinistra si capisce che è un'onda riflessa da ignorare. Il GPS può ancora confondersi se, stando fra due montagne, avvengono due riflessioni.

Esercizio 17.13: Riflessione e ricezione ©

Un'onda elettromagnetica piana di pulsazione ω e lunghezza d'onda λ è diretta nel vuoto lungo l'asse x con il campo elettrico polarizzato lungo l'asse y , $E_y = E_0 \cos(kx - \omega t)$. L'onda incide perpendicolarmente su di uno specchio perfettamente riflettente situato ad $x = 0$.

- a) Scrivere il campo elettrico totale.
- b) Quanto vale la media temporale del vettore di Poynting?
- c) Un circuito quadrato di lato $\ell = \lambda/2$ ha i lati paralleli agli assi x ed y con il suo lato più vicino allo specchio situato a distanza d . Quale valore di d massimizza la forza elettromotrice \mathcal{E} attraverso il circuito e quanto vale tale valore massimo?

✚Soluzione:

- a) Dovendo essere $E_y = 0$ a $x = 0$ si ha $E_y = E_0[\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$.
- b) Vale zero, essendoci due onde di eguale intensità e dirette in direzioni opposte.
- c) $\mathcal{E} = 2\ell E_0 \sin(\omega t)[\sin(kd) - \sin(kd + \pi)] = 4\ell E_0 \sin(\omega t) \sin(kd)$ è massima per $\sin(kd) = 1$ cioè per $d = \lambda/4$.

Esercizio 17.14: Forza su superficie

Un'onda di intensità I_I si propaga nel vuoto incidendo perpendicolarmente su di una superficie. Assumendo note le intensità I_T e I_R dell'onda trasmessa e riflessa, calcolare la pressione di radiazione sulla superficie \wp e la potenza assorbita per unità di superficie, dW/dS .

✚Soluzione: In generale è complicato calcolare la forza di radiazione su di un oggetto: dipende dalla fisica della materia dell'oggetto stesso. La conservazione dell'energia fornisce una formula utile in tante situazioni in cui è

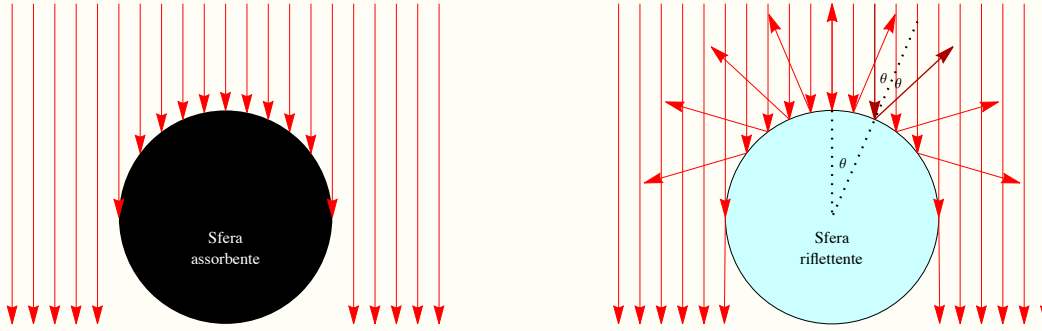


Figura 17.2: Pressione di radiazione su sfera perfettamente assorbente e riflettente.

possibile calcolare le potenze delle onde riflesse e trasmesse (ad esempio la rifrazione, calcolata nel seguito). La pressione \wp sulla superficie e la potenza dW/dS assorbita per unità di superficie valgono

$$\wp = \frac{I_I + I_R - I_T}{c}, \quad \frac{dW}{dS} = I_I - I_R - I_T.$$

Se l'energia assorbita vale zero si ha $I_I = I_R + I_T$ la pressione si semplifica in $\wp = 2I_R/c$. Consideriamo alcuni casi limite:

- 2) Superficie riflettente e.g. uno specchio. La potenza assorbita vale zero e si ha $I_T = 0$ (nessuna onda trasmessa) e quindi $I_R = I_I$. Quindi $p = 2I_I/c$.
- 1) Superficie assorbente. L'energia nell'onda viene assorbita, $dW/dS = I_I$ e si ha $I_R = I_T = 0$. La pressione vale $\wp = I_I/c$.
- 0) Superficie trasmettente. Non si ha onda riflessa, I_R e si ha $I_T = I_I$. La pressione vale $\wp = 0$, l'energia assorbita vale zero, $dW/dS = 0$.

Se l'incidenza non è perpendicolare occorre tenere conto delle direzioni delle tre onde: incidente, riflessa e trasmessa.

Esercizio 17.15: Pressione di radiazione solare

Una sfera di raggio R si trova a distanza r dal sole. Si calcoli la forza sulla sfera dovuta alla radiazione solare, assumendo a) che la sfera sia perfettamente assorbente; b) che la sfera sia perfettamente riflettente. La sfera ha densità $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ed è soggetta anche all'attrazione gravitazionale solare. c) Si determini il raggio critico R_0 tale che tutte le sfere di raggio inferiore sono espulse dal sistema solare.

➤Soluzione: La pressione di radiazione è diretta lungo la direzione dell'onda e vale $\wp_{\text{rad}} = \langle u \rangle = \langle S \rangle/c$. A distanza r dal sole si ha $\langle u \rangle = (d^2/r^2) 4.5 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$, dove d è la distanza della Terra dal Sole.

- a) Come illustrato in fig. 17.2a, la forza di radiazione è radiale e data dalla pressione di radiazione per l'area dell'ombra formata dall'oggetto assorbente, indipendentemente dalla sua forma:

$$F_{\text{rad}} = \frac{\langle \Phi_S \rangle}{c} = p_{\text{rad}} \int dS_{\perp} = \pi R^2 \langle u \rangle \quad \text{in quanto} \quad \int dS_{\perp} = \int dS \cos \theta = 2\pi R^2 \int_0^1 c \, dc = \pi R^2.$$

- b) Come illustrato in fig. 17.2b, per una sfera perfettamente riflettente l'onda riflessa ha, nella direzione parallela all'onda incidente, vettore d'onda $\cos 2\theta$ di quello incidente. Il risultante fattore $1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta = 2c^2$ è un innalzamento a piccolo θ , ed una riduzione a $\theta \lesssim 90$. In totale la forza rimane uguale al caso riflettente:

$$F_{\text{rad}} = \int \wp_{\text{rad}} [1 + \cos 2\theta] dS_{\perp} = \wp_{\text{rad}} \int_0^1 2c^2 2\pi R c \, dc = \pi R^2 \langle u \rangle.$$

Più in generale, un oggetto riflettente invece che assorbente riceve una forza di radiazione fino a 2 volte maggiore (quanto è perpendicolare all'onda), che dipende dalla forma dell'oggetto e che può essere non parallela alla direzione dell'onda.

- c) Alla distanza r la forza di gravità produce un'accelerazione $a = GM/d^2 = 0.006\text{m/s}^2$ e quindi una forza $F_{\text{grav}} = ma = \frac{4}{3}\rho R^3 a$. Entrambe le forze scalano come $1/r^2$, e $F_{\text{grav}} < F_{\text{rad}}$ per $\rho R < 3\langle u \rangle/4a = 0.57 \cdot 10^{-3}\text{kg/m}^2$. Quindi sfere della densità specificata vengono espulse se il loro raggio è minore di $R_0 = 5.7 \cdot 10^{-7}\text{m}$.

Esercizio 17.16: Navigazione stellare

Sembra possibile costruire una sonda che usa come vela una superficie riflettente di area $A \sim 10^5\text{m}^2$ e massa $m \sim 100\text{g}$ fatta di grafene rivestito di materiale riflettente, ed includendo un micro-processore con una fotocamera ed un laser per trasmettere dati. Calcolare il tempo di viaggio verso α Centauri (distanza 4.4ly , luminosità $W = 1.5W_\odot$) o verso Sirio (distanza 8.6ly , luminosità $W = 24W_\odot$) dove $W_\odot = 3.9 \cdot 10^{26}\text{W}$ è la luminosità del sole.

♣**Soluzione:** La superficie riflettente viene orientata ortogonalmente alla stella e messa su di una traiettoria radiale fra il sole e la stella destinazione. La pressione di radiazione a distanza r dalla stella, assunta puntiforme, vale $p = 2 \times W/4\pi r^2 c$. Quindi l'energia cinetica fornita dalla radiazione e la conseguente velocità raggiunta grazie alla pressione di radiazione, partendo o arrivando ad una distanza r_{min} dalla stella, sono

$$\frac{m}{2}v^2 = \int_{r_{\text{min}}}^{\infty} F_{\text{rad}} dr = \frac{AW}{2\pi r_{\text{min}} c}, \quad \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{AW}{\pi m r_{\text{min}} c^3}} = 0.021 \sqrt{\frac{10^{10}\text{m}}{r_{\text{min}}} \frac{W}{W_\odot}}.$$

avendo usato come valori di riferimento la potenza emessa dal sole, ed un r_{min} uguale a 14 volte il raggio del sole. La partenza può essere aiutata da un potente raggio laser; ma la frenata finale deve basarsi unicamente sulla pressione di radiazione della stella di arrivo. Quindi è meglio scegliere una stella luminosa come Sirio, che è possibile raggiungere in un centinaio di anni. Orientando opportunamente la vela è possibile fare ripartire la sonda verso una ulteriore destinazione.

Esercizio 17.17: Riflessione da conduttore sottile

Un'onda piana di lunghezza d'onda λ si propaga nel vuoto lungo l'asse x incontrando nel piano $x \approx 0$ un materiale di conducibilità σ e spessore $d \ll \lambda$.

- Scrivere la condizione di raccordo per il campo elettrico.
- Scrivere la condizione di raccordo per il campo magnetico.
- Trovare una soluzione contenente anche un'onda riflessa ed un'onda trasmessa.
- Verificare il bilancio energetico trovando il valore di σ che massimizza la perdita di energia per effetto Joule.
- Calcolare la pressione di radiazione sulla superficie del piano conduttore.

♣**Soluzione:**

- La II equazione di Maxwell, applicata ad un circuito immaginario lungo e sottile sui due lati del piano e parallelo ad \mathbf{E} , implica $E_{\parallel}^{\text{des}} = E_{\parallel}^{\text{sin}}$, come al solito.
- La IV equazione di Maxwell, applicata ad un circuito immaginario lungo ℓ e sottile $d \ll \ell$ sui due lati del piano e parallelo a \mathbf{B} , implica $\ell(B_{\parallel}^{\text{des}} - B_{\parallel}^{\text{sin}}) = \mu_0 I$ dove I è la corrente concatenata che scorre nel piano, uguale a $I = \ell d \sigma E_{\parallel}$ in quanto $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Si ha quindi, per questo problema, la condizione di raccordo $B_{\parallel}^{\text{des}} - B_{\parallel}^{\text{sin}} = \mu_0 d \sigma E_{\parallel}$.
- Risolviendo il sistema $E_I + E_R = E_T$ e $B_I + B_R - B_T = \mu_0 \sigma d E_T$ con $B_I = E_I/c$, $B_R = -E_R/c$ e $B_T = E_T/c$ si ottiene $E_R = R E_I$, $E_T = T E_I$ con

$$R = -\frac{r}{1+r}, \quad T = \frac{1}{1+r}, \quad r \equiv \frac{1}{2} \mu_0 c d \sigma = \frac{d\sigma}{2\epsilon_0 c}.$$

- d) Siccome tutte le onde sono nel vuoto, si ha semplicemente $I_R/I_I = R^2$ e $I_T/I_I = T^2$. La potenza assorbita per unità di superficie vale $dW/dS \equiv I_I - I_R - I_T$. Inserendo I_R e I_T si trova $(dW/dS)/I_I = 2r/(1+r)^2$, che è massimo per $r = 1$. dW/dS coincide con la potenza dissipata per effetto Joule per unità di superficie nel piano, $dW/dS = d\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = d\sigma E_T^2 = 2rI_T$ in quanto $I_T = cu_T = c\epsilon_0 E_T^2$.
- e) La pressione vale $\wp = (I_I + I_R - I_T)/c = (I_I/c) 2r/(1+r)$. Vale zero per $r = 0$ (superficie trasmettente $T = 1, R = 0$) ed è massima per $r \rightarrow \infty$ (superficie riflettente $R = -1, T = 0$).

Esercizio 17.18: Guida d'onda

Una guida d'onda rettangolare è costituita da uno spazio vuoto di lati a e b (paralleli agli assi y e x) circondato da un conduttore perfetto. Calcolare il modo più semplice TE_{10} .

➤Soluzione: Le condizioni al bordo su di un conduttore perfetto sono $E_{\parallel} = 0$ e $B_{\perp} = 0$. Provo la soluzione più semplice possibile

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)} \quad k_x = \frac{n\pi}{a} \quad \text{con } n = 1.$$

Soddisfa a $E_{\parallel} = 0$ per $x = \{0, a\}$ ed a $\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial E_y / \partial y = 0$. L'equazione d'onda $\square^2 E_y = 0$ implica che k_x agisce come un termine di massa, producendo come frequenza minima quella dell'onda stazionaria:

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2 \quad \text{i.e.} \quad k_z = \pm \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi/a)^2} = \pm (\omega/c) \sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}.$$

Sotto la pulsazione critica $\omega_c = \pi c/a$ il vettore d'onda k_z diventa immaginario, ovvero l'onda si attenua come $e^{-|k_z|z}$ invece di propagarsi. Modi con $n > 1$ hanno pulsazione critiche più alte. Lo stesso è vero per modi 'TM' con $E_z = E_0 \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/b)$ in quanto sia n che m devono essere $n, m \geq 1$. A frequenze appena maggiori di ω_c il modo TE_{10} è l'unico che può propagarsi. Quindi necessariamente la lunghezza d'onda è simile alle dimensioni della guida: $\lambda \sim \text{cm}$ corrisponde alle microonde.

Cercando di ottenere un'onda trasversa rispettando $B_{\perp} = 0$ aggiungo

$$B_x = B_0 \sin k_x x e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Tuttavia un B_x che dipende da x ha divergenza diversa da zero. Per ottenere divergenza zero occorre aggiungere un campo magnetico longitudinale:²

$$B_z = i \frac{k_x}{k_z} B_0 \cos k_x x e^{i(k_z z - \omega t)}$$

avendo scelto i fattori in maniera da avere $\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_z B_z + \partial_x B_x = (ik_z - ik_z)B_z = 0$. Le rimanenti equazioni di Maxwell (ad esempio le componenti x e z della 2a equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$) implicano $k_z E_0 = -\omega B_0$. Quindi le linee di B circolano attorno al massimo di \dot{E}_y .

Le velocità di fase e di gruppo sono

$$v_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2}} > c \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \sqrt{1 - (\omega_c/\omega)^2} < c$$

La densità di energia u si propaga con velocità v_g . Infatti essa vale

$$\langle u \rangle_{x,y,t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon_0}{2} \frac{E_0^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} \left(1 + \frac{k_x^2}{k_z^2} \right) \frac{B_0^2}{2} \right] = \frac{\epsilon_0}{8} \left[1 + \frac{k_z^2 + k_x^2}{\omega^2/c^2} \right] E_0^2 = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2.$$

E la componente del vettore di Poynting lungo la guida vale

$$\langle S_z \rangle_{x,y,t} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 E_0 B_0 = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \times c^2 \frac{k_z}{\omega} = \langle u \rangle_{x,y,t} v_g.$$

La componente S_x del vettore di Poynting è diversa da zero, ma la sua media spaziale vale zero.

²In generale che le onde in una cavità singola di qualunque forma non sono trasverse. Infatti è possibile dimostrare (ad esempio Jackson 8.2) che, in assenza di componenti longitudinali, le componenti di \mathbf{E} obbediscono ad un problema elettrostatico nel piano trasverso, e valgono quindi zero in quanto il conduttore è equipotenziale. Per far propagare onde trasverse TEM in una guida d'onda si usa un cavo coassiale, che consente una differenza di potenziale.

La lunghezza d'onda nella guida λ_g è maggiore di quella λ_0 nel vuoto:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Due guide possono essere connesse da un buco. È possibile ottenere un accoppiatore unidirezionale, che fa passare le onde da una guida all'altra solo se vanno in una data direzione, sfruttando l'interferenza: servono due buchi separati di $\lambda/4$. Nella guida ricevente i due buchi agiscono come sorgenti in fase o in contro-fase a seconda della direzione dell'onda.

Un modo per capire fisicamente l'esistenza della frequenza di taglio è mettere un filo nel centro della guida; per avere $E = 0$ sui bordi si aggiungono infinite immagini. Avevamo visto che se nel filo c'è una carica costante il campo muore esponenzialmente. Se invece la carica oscilla i campi si possono sommare costruttivamente per via del ritardo di fase; in direzioni θ tali che la differenza di distanza fra due fili $a \sin \theta$ è uguale a $(n - 1/2)\lambda_0$. Prendo $n = 1$. Sommando $\pm\theta$ la lunghezza d'onda nella guida vale $\lambda_g = \lambda_0 / \cos \theta$ che equivale alla formula di prima. Si ha $\lambda_g > \lambda_0$. Questo è quello che si ottiene anche ragionando in termini di raggi di luce che rimbalzano con angolo θ riflettendosi fra i bordi nella guida, se si tiene conto che ad ogni riflessione i campi si invertono. La velocità di gruppo è ridotta in modo corrispondente.

Esercizio 17.19: Parametri di Stokes

Vengono discussi i parametri di Stokes.

◀Soluzione: *Motivazioni:* L'interesse consiste in 1) dare una descrizione precisa della polarizzazione. Questo si potrebbe fare anche “a mano”, ma analogamente alle Hamiltoniane, i parametri di Stokes permettono di vedere un formalismo simile a quello della meccanica quantistica in un caso dove il significato fisico è più intuitivo. L'analogia con la meccanica quantistica nasce perchè tanti fotoni identici si sovrappongono dando un'onda e.m. che riflette le proprietà del fotone. 3) applicazioni alla CMB (e a generici problemi di diffusione di luce da sorgenti incoerenti).

Un'onda piana monocromatica che si propaga lungo l'asse z è descritta da

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \text{Re } \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} = E_0 \text{Re } \mathbf{e} e^{-i(\omega t - kz)}$$

Omettendo la componente di \mathbf{e} lungo z , che vale zero, alcuni casi sono

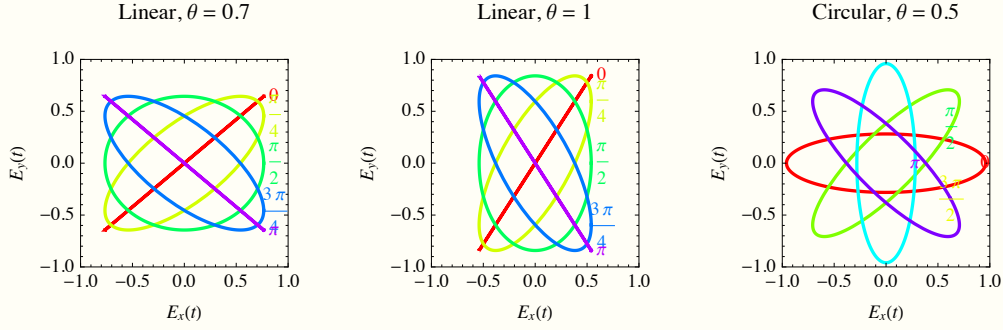
$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{pol. lineare } x \\ \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{pol. lineare } y \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & \text{pol. circolare } L \text{ o anti-oraria o elicità } + \\ \mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} & \text{pol. circolare } R \text{ o oraria o elicità } - \end{array}$$

dove il nome ‘elicità \pm ’, usato in fisica delle particelle, indica che l'onda porta un momento angolare parallelo (anti-parallelo) a \mathbf{k} . Il caso generale può essere scritto in termini di 2 parametri θ e δ come

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}(z=0) = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \omega t \\ \sin \theta \cos(\omega t - \delta) \end{pmatrix}$$

Come mostrato in figura, il vettore \mathbf{E} descrive ellissi contenute nel rettangolo di lati $\cos \theta$ e $\sin \theta$. Per $\delta = 0$ l'ellisse si riduce alla diagonale del rettangolo, inclinata di θ . Per $\delta \ll 1$ l'ellisse inizia ad aprirsi. Per $\delta = \pi/2$ si ha un'ellisse orizzontale. L'asse dell'ellisse è in generale inclinato di un qualche angolo α che dipende da δ . Per $\delta = \pi$ l'ellisse si riduce alla diagonale opposta del rettangolo. Avrebbe interesse calcolare α e gli assi dell'ellisse,

che sono quantità misurabili con un polarimetro, ma il calcolo diretto può essere noioso.



Notare che abbiamo usato la base $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$. Le onde circolari forniscono un'altra base frequentemente usata:

$$\mathbf{E}_0 = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y = E_+ \mathbf{e}_+ + E_- \mathbf{e}_-, \quad E_{\pm} = \frac{E_x \pm i E_y}{\sqrt{2}}$$

Questa equazione esprime un fatto non ovvio: la stessa onda può essere vista come sovrapposizione di polarizzazioni lineari, o di polarizzazioni circolari.

In questa nuova base possiamo introdurre due altri parametri

$$\begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

Si può verificare che l'orientazione dell'ellisse è eguale ad α (che quindi è il parametro che era interessante calcolare) e che il rapporto tra gli assi dell'ellisse è $\tan(\beta + \pi/4)$.

Notare che non è possibile fare un'onda non polarizzata. E.g. sovrapponendo polarizzazioni \mathbf{e}_x ed \mathbf{e}_y si ottiene un'onda completamente polarizzata a 45° ; sovrapponendo polarizzazioni \mathbf{e}_+ ed \mathbf{e}_- si ottiene un'onda completamente polarizzata lungo x . Le equazioni di Maxwell predicono che un'onda piana monocromatica è polarizzata.

Tuttavia le onde che vediamo ogni giorno sono tipicamente non polarizzate. Questo è possibile perchè queste onde non sono monocromatiche. L'intensità totale di due onde \mathbf{E}_1 di frequenza ω_1 e \mathbf{E}_2 di frequenza ω_2 sovrapposte è

$$|\mathbf{E}_{\text{tot}}|^2 = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2\text{Re} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \quad (17.1)$$

Siccome $\omega \sim 10^{16}\text{Hz}$, mediando su un periodo di tempo umano $t \sim \text{sec}$ l'ultimo termine si media a zero con grande precisione.

È utile descrivere la polarizzazione tramite un formalismo che tenga conto di questa proprietà. Per una data onda \mathbf{E} descritta da una polarizzazione \mathbf{e} definiamo

$$\rho = \begin{pmatrix} e_x^* e_x & e_y^* e_x \\ e_x^* e_y & e_y^* e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta e^{i\delta} \\ \sin \theta \cos \theta e^{-i\delta} & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

dove abbiamo dato il suo valore esplicito in termini dei parametri (θ, δ) utilizzati nella base della polarizzazione lineare. E.g. onde polarizzate lungo x e con polarizzazione circolare $+$ sono rispettivamente descritte da

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Notare che la matrice ρ che descrive un'onda completamente polarizzata (o uno stato puro in meccanica quantistica) è un proiettore, cioè $\rho^2 = \rho$. La componente ρ_{11} può essere misurata facendo passare l'onda per un polarimetro orientato lungo x e misurando la sua intensità. Analogamente per la componente ρ_{22} . $\text{Re} \rho_{12}$ può essere misurato tramite un polarimetro inclinato (e.g. a 45°). $\text{Im} \rho_{12}$ descrive la fase relativa fra le polarizzazioni x ed y , e può essere misurato facendo passare l'onda per un dielettrico anisotropo (e.g. una lamina 'a quarto d'onda'), che introduce uno sfasamento relativo fra le componenti x ed y . Quindi una matrice $\rho^2 = \rho$ con $\text{Tr} \rho = 1$ dà una descrizione completa e non ridondante di un'onda completamente polarizzata, equivalente alla descrizione più semplice data dal vettore \mathbf{e} .

L'utilità di utilizzare ρ consiste nel fatto che essa consente facilmente di combinare onde con fasi relative incoerenti: l'eq. (17.1) equivale a

$$W_{\text{tot}}\rho_{\text{tot}} = W_1\rho_1 + W_2\rho_2 \quad W_{\text{tot}} = W_1 + W_2$$

Ad esempio la sovrapposizione incoerente di due onde di eguale intensità $W_1 = W_2$ polarizzate lungo x e lungo y fornisce

$$\rho_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che descrive *un'onda non polarizzata*. Da un punto di vista matematico, questo lo si vede dal fatto che la matrice identità è invariante sotto rotazioni, cioè non ha nessuna direzione privilegiata.

Quindi una matrice ρ con $\text{Tr } \rho = 1$ fornisce una descrizione di un'onda generica. In meccanica quantistica ρ viene chiamata matrice densità. In elettromagnetismo la notazione usata è

$$W\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U + iV \\ U - iV & I - Q \end{pmatrix}$$

dove I, Q, U, V sono detti *parametri di Stokes*. I ha il significato fisico di intensità totale, Q di intensità in polarizzazione lineare x vs y ; U di intensità polarizzata linearmente a 45° , V di intensità in polarizzazione circolare $+$ vs $-$. Questo lo si vede calcolando i parametri di Stokes nel caso specifico di un'onda completamente polarizzata:

$$\begin{aligned} I &= E_x^2 + E_y^2 &= E_+^2 + E_-^2 \\ Q &= E_x^2 - E_y^2 &= 2E_+E_- \cos \alpha \\ U &= 2E_xE_y \cos \delta &= 2E_+E_- \sin \alpha \\ V &= 2E_xE_y \sin \delta &= E_+^2 - E_-^2 \end{aligned}$$

Esercizio 17.20: Polarizzazione di onda non polarizzata ©

È presente un'onda elettromagnetica piana nel vuoto con campo magnetico polarizzato linearmente

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = B_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t).$$

Si ha nel punto $\mathbf{x} = 0$ un circuito circolare di raggio a molto minore della lunghezza d'onda, orientato perpendicolarmente ad un versore \mathbf{n} liberamente variabile.

- a) Calcolare la forza elettromotrice $\mathcal{E}(t, \mathbf{n})$ nel circuito.
- b) Misurando $\mathcal{E}(t, \mathbf{n})$ quali proprietà dell'onda è possibile ricostruire fra pulsazione ω , intensità B_0 del campo magnetico, sua polarizzazione $\hat{\mathbf{B}}_0$, direzione $\hat{\mathbf{k}}$?
- c) Si hanno ora a disposizione due circuiti del tipo descritto sopra, che possono essere messi in posizioni \mathbf{x} arbitrarie: quali proprietà addizionali dell'onda è possibile ricostruire misurando le forze elettromotrici \mathcal{E} e \mathcal{E}' nei due circuiti?

Una tecnica chiamata 'correlazione di Hellings Downs' è stata usata nel 2023 per confermare che un certo segnale era dovuto ad onde gravitazionali di spin 2, sebbene le onde fossero generate da sorgenti in ogni direzione e con ogni polarizzazione. Le domande che seguono chiedono di calcolare la correlazione analoga nel caso di onde elettromagnetiche 'di spin 1'. Si assuma quindi da ora in poi che sia presente un'onda isotropa con polarizzazione media nulla, ovvero descritta come un'integrale sferico di onde piane di eguale intensità, polarizzazioni p date, fasi casuali δ_{kp} , vettori d'onda $\mathbf{k} = k(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ in ogni direzione, dove θ e ϕ sono gli usuali angoli polari:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \sum_{p=1}^2 B_0 \hat{\epsilon}_p(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta_{kp}), \quad \text{dove} \quad \int d\Omega_k = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos \theta = 4\pi.$$

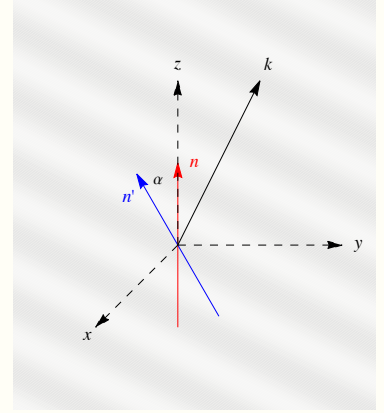
I due piccoli circuiti sono ora situati nel punto $\mathbf{x} = 0$ ed orientati lungo i versori $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ed $\mathbf{n}' = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$.

- d) Mostrare che la somma sulle due polarizzazioni indipendenti di un'onda elettromagnetica con dato \mathbf{k} vale

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}) = \sum_{p=1}^2 (\hat{\epsilon}_p)_i (\hat{\epsilon}_p)_j = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$$

dove δ_{ij} è la matrice unità (uguale ad 1 se $i = j$ e 0 altrimenti).

- e) Calcolare la media angolare $\int d\Omega_k \Pi_{ij}(\mathbf{k})$.
 f) Utilizzando i due punti precedenti, calcolare in che modo l'osservabile $C = \langle \mathcal{E} \mathcal{E}' \rangle$ dipende da α , dove $\langle \dots \rangle$ denota la media temporale.



✚ Soluzione:

- a) $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = \omega \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} \sin(\omega t)$.
 b) La dipendenza da t di \mathcal{E} fornisce ω ; l'orientazione in cui \mathcal{E} è massimo fornisce la polarizzazione $\hat{\mathbf{B}}_0$; il valore massimo di $\langle \mathcal{E}^2 \rangle = \omega^2 B_0^2 / 2$ fornisce l'intensità dell'onda. Non è possibile misurarne la direzione, solo dire che è ortogonale a $\hat{\mathbf{B}}_0$.
 c) È ora possibile anche misurare la direzione dell'onda: $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ se i due circuiti sono spostati in direzione perpendicolare a \mathbf{k} , e $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}'$ altrimenti.
 d) Un modo diretto ma calcoloso consiste nello scrivere esplicitamente i due versori di polarizzazione. Una buona base è

$$\hat{\epsilon}_1(\mathbf{k}) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \hat{\epsilon}_2(\mathbf{k}) = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) = \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

che hanno norma 1, sono ortogonali fra di loro ed a \mathbf{k} . Un modo meno calcoloso consiste nel notare che l'espressione desiderata è invariante per rotazioni, e scegliere $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, $\hat{\epsilon}_1 = (1, 0, 0)$, $\hat{\epsilon}_2 = (0, 1, 0)$, ottenendo che la quantità desiderata è $\text{diag}(1, 1, 0)$, il proiettore sullo spazio ortogonale a \mathbf{k} .

- e) La media angolare vale $\langle \delta_{ij} - k_i k_j / k^2 \rangle_\Omega = 2\delta_{ij} / 3$. Si ha infatti $\langle \delta_{ij} \rangle_\Omega = \delta_{ij}$ e $\langle k_i k_j \rangle_\Omega = k^2 \delta_{ij} / 3$, che può essere calcolato esplicitamente, o immediatamente ricavato considerando il prodotto scalare $\langle k^2 \rangle = k^2$ e $\sum_i \delta_{ii} = 3$.
 f) Espandendo il quadrato dell'onda, i contributi con due \mathbf{k} diversi si mediano a $\cos(\delta_k - \delta_{k'})$ che per assunzione vale zero in media. Rimane da calcolare solo i termini con k uguali:

$$C = \frac{(\omega B_0)^2}{2} \int \frac{d\Omega_k}{4\pi} \sum_{p=1}^2 (\hat{\epsilon}_p \cdot \mathbf{n})(\hat{\epsilon}_p \cdot \mathbf{n}') = \frac{(\omega B_0)^2}{3} \cos \alpha.$$

Il conto è immediatamente fatto in notazione tensoriale utilizzando i punti precedenti; può anche essere fatto in maniera esplicita ma calcolosa: la somma fornisce $\sin \theta (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \cos \phi \sin \alpha)$. La dipendenza $C \propto \cos \alpha$ significa che l'onda rivelata è sensibile all'orientazione dell'antenna, e non è quindi un'onda scalare.

Capitolo 18

Onde nella materia

Esercizio 18.1: Onda in materiale birifrangente

Un'onda elettromagnetica di pulsazione ω polarizzata linearmente con campo elettrico $E_0(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$ si propaga lungo l'asse x , entrando in un tratto $0 < x < L$ contenente un materiale birifrangente con permeabilità elettrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ per quanto riguarda la componente del campo elettrico lungo l'asse y , e $\epsilon = \epsilon_0$ per quanto riguarda la componente lungo l'asse z .

- a) Si calcoli la differenza di fase all'uscita $x = L$ tra le due componenti del campo elettrico.
- b) Per quali valori di L l'onda all'uscita è ancora polarizzata linearmente?
- c) Per quali valori di L ha polarizzazione circolare sinistrorsa?
- d) Per quali valori di L ha polarizzazione circolare destrorsa?

➤Soluzione: L'indice di rifrazione che determina la velocità di propagazione $v = c/n$ è $n = \sqrt{\epsilon_r}$.

- a) Quindi il vettore d'onda per la componente di \mathbf{E} lungo y è $k' = nk = n\omega/c$. La differenza di fase è $\delta = \phi' - \phi = (k' - k)L = (n - 1)kL$.
- b) Utilizzando $\cos(k'L - \omega t) = \cos(kL - \omega t + \delta)$, il campo elettrico ad $x = L$ vale:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\hat{\mathbf{y}} \cos(kL - \omega t + \delta) + \hat{\mathbf{z}} \cos(kL - \omega t)].$$

Se $\delta = N\pi$ con N intero, E_y e E_z oscillano in fase con frequenza ω , dando polarizzazione lineare a ± 45 gradi.

- c) Se $\delta = 2\pi N + \pi/2$, ovvero lunghezza $L = (2N + 1/2)\lambda'$ (dove λ' è la lunghezza d'onda nel mezzo), si ottiene polarizzazione circolare sinistrorsa:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [-\hat{\mathbf{y}} \sin(kL - \omega t) + \hat{\mathbf{z}} \cos(kL - \omega t)].$$

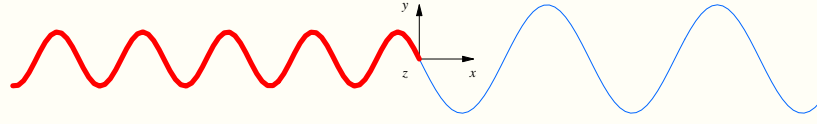
- d) Se $\delta = 2\pi N + 3\pi/2$, ovvero $L = (2N + 3/2)\lambda'$, abbiamo polarizzazione circolare destrorsa:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [+ \hat{\mathbf{y}} \sin(kL - \omega t) + \hat{\mathbf{z}} \cos(kL - \omega t)].$$

Esercizio 18.2: Riflessione di onde in una corda

Un'onda trasversa si propaga lungo una corda di tensione τ , composta da due diverse corde di densità lineari μ e $\mu' = n^2\mu$ (disegnate in rosso e blu nella figura) congiunte in un punto. a) Calcolare il coefficiente di riflessione

R e di trasmissione T interpretando fisicamente la possibilità che $T > 1$. b) Verificare che l'energia è conservata anche se $T > 1$.



Soluzione: Chiamando x l'asse parallelo alla corda, l'onda trasversa è descritta da una distorsione $y(x, t)$ rispetto al valore di equilibrio $y = 0$. La legge del moto per $y(x, t)$ è

$$ma = F \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

in cui non compare y' ma solo y'' perchè la tensione non richiama una corda dritta, con y' costante. La tensione τ è la stessa dovunque. La velocità dell'onda $v = \sqrt{\tau/\mu(x)} = \omega/k$ cambia improvvisamente sul punto di congiunzione, che mettiamo a $x = 0$. Si ha $v' = v/n$, e quindi n è l'analogo dell'indice di rifrazione delle onde elettromagnetiche. Come al solito, invece di studiare un pacchetto d'onda, conviene studiare onde piane ed usare la notazione complessa.

a) Per ottenere una soluzione, oltre all'onda incidente $y = a e^{i(kx - \omega t)}$, si assume una possibile onda Riflessa ed un'onda Trasmessa:

$$y = a \begin{cases} e^{i(kx - \omega t)} + R e^{i(-kx - \omega t)} & \text{per } x < 0 \\ T e^{i(k'x - \omega t)} & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

Servono ora le condizioni di raccordo analoghe a quelle elettromagnetiche: come intuitivamente ovvio y e y' sono continui in quanto la corda non può cambiare posizione né pendenza nel punto di congiunzione fra i due tratti di densità diversa.¹ Imponendo la condizioni di raccordo si trova

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ k(1 - R) = k'T \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2k}{k + k'} = \frac{2}{1 + n} \quad R = \frac{k - k'}{k + k'} = \frac{1 - n}{1 + n}.$$

Si ha $T > 1$ se $n < 1$, ovvero per un'onda che si trasmette da una corda 'pesante' ad una corda 'leggera', cioè $\mu' > \mu$. Questo è fisicamente sensato: un'oscillazione in una corda può provocare un'oscillazione maggiore in una corda più leggera.

b) Non si può invece amplificare l'energia trasportata dall'onda. Essendo l'onda nella corda uni-dimensionale, essa porta una potenza W piuttosto che una intensità $I = dW/dS$ (data dal vettore di Poynting nell'analogo elettromagnetico). L'intensità media dell'onda incidente vale $\langle I_I \rangle = v \langle u \rangle = \frac{1}{2} v \mu (a\omega)^2$: infatti la densità di energia $u = u_K + u_V$ è somma di energia cinetica u_K e potenziale u_V . L'energia cinetica vale $u_K = \frac{1}{2} \mu \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \mu (a\omega)^2$; la sua media temporale $\langle u_K \rangle = \frac{1}{4} \mu (a\omega)^2$ è uguale alla media temporale $\langle u_V \rangle$ dell'energia potenziale, che evitiamo di discutere esplicitamente.

L'intensità dell'onda riflessa vale $I_R = I_I R^2$. Per conservazione dell'energia l'onda trasmessa deve avere intensità $I_T = I_I - I_R$.² Infatti, facendo il calcolo esplicito sfruttando il fatto che $I \propto v \cdot \mu \cdot a^2 \propto (1/n) \cdot n^2 \cdot a^2$ si ottiene

$$\frac{I_T}{I_I} = T^2 n = \frac{4n}{(1 + n)^2} < 1.$$

Come giusto viene $I_T/I_I \leq 1$, massimo per $n = 1$.

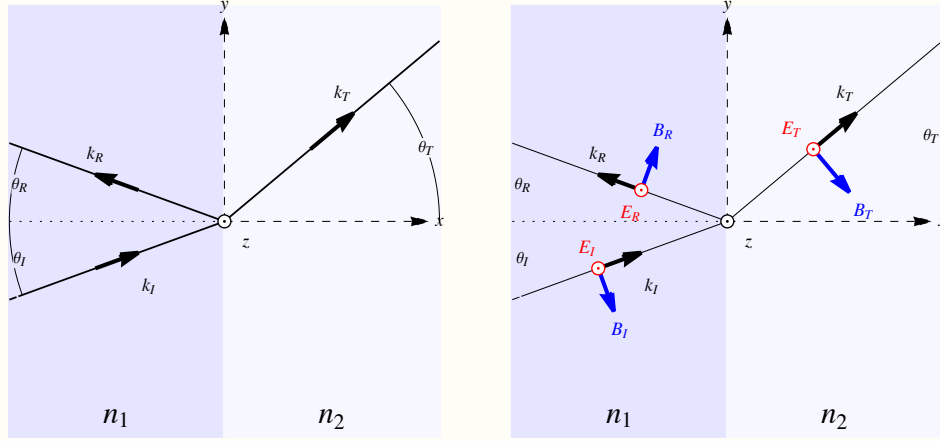
Tutte le formule sopra hanno analoghi elettromagnetici.

¹Matematicamente queste condizioni seguono dal fatto che l'equazione d'onda contiene due derivate rispetto a x . Pertanto le stesse condizioni valgono per equazioni d'onda su cui c'è meno intuizione, come le equazioni di Maxwell o di Schroedinger.

²Nella zona dove ci sono le due onde incidenti e riflessa, l'intensità media è la somma delle intensità medie delle due onde: $I = I_I - I_R$, senza nessun termine di interferenza. Fisicamente, questo è chiaro in quanto usare onde piane è un modo utile per descrivere un problema nel quale si invia un pacchetto d'onde, che viene parzialmente trasmesso e riflesso. Per vederlo matematicamente con onde piane, occorre notare che il termine di interferenza fa zero, se mediato sullo spazio e sul tempo, usando $2 \sin(kx - \omega t) \sin(-kx - \omega t) = \cos(2kx) - \cos(2\omega t)$. In sostanza, non c'è interferenza fra due onde che vanno in direzione opposta.

Esercizio 18.3: Rifrazione con \mathbf{E} parallelo al piano

Due dielettrici con indici di rifrazione n_1 ed n_2 sono separati dal piano $x = 0$. Un'onda elettromagnetica di intensità I_I con vettore d'onda $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ ha \mathbf{E} polarizzato lungo z , cioè parallelamente al piano di separazione yz . Calcolare le direzioni ed intensità delle onde riflesse e rifratte.



✎ **Soluzione:** Ricordiamo che in un dielettrico le onde elettromagnetiche si propagano in modo simile al vuoto, con l'unica differenza che c viene rimpiazzato da $v = c/n$, dove n è detto 'indice di rifrazione'

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} \equiv \frac{c^2}{n^2}, \quad \frac{E}{B} = v = \frac{\omega}{k}.$$

Sulla superficie di separazione fra due dielettrici valgono le condizioni al bordo $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ e $E_1^\parallel = E_2^\parallel$, $\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp$. Queste implicano ci deve essere un'onda riflessa: ad esempio, in caso di incidenza normale, in assenza di onda riflessa l'onda incidente e quella trasmessa dovrebbero avere gli stessi E e B ; ma questo sarebbe incompatibile con $B = n_1 E/c$ (nel mezzo 1) e $B = n_2 E/c$ (nel mezzo 2).

Per prima cosa, le condizioni al bordo, dovendo essere vere per ogni tempo t , implicano che l'onda incidente, l'onda riflessa (nel mezzo 1) e quella trasmessa (nel mezzo 2) hanno la stessa frequenza. Dovendo poi essere vere per ogni punto sul piano di separazione con coordinata y , si ha che tutte le onde hanno lo stesso k_y : $k_y \equiv k_y^I = k_y^R = k_y^T$. Siccome i moduli dei vettori \mathbf{k} sono dati da $k_i = n_i \omega/c$ si ha $k_I/k_T = n_1/n_2$ e quindi si impara che l'onda trasmessa si inclina secondo la legge di Snell:

$$\sin \theta_T = \frac{k_y}{k_T} \quad \sin \theta_I = \frac{k_y}{k_I} \quad \Rightarrow \quad n_2 \sin \theta_T = n_1 \sin \theta_I$$

Per quanto riguarda le ampiezze dell'onda le condizioni di raccordo sono

$$\begin{aligned} E_I + E_R &= E_T & (\text{da } E_\parallel = E_z \text{ o da } B_\perp = B_x \text{ usando } \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega) \\ k_x^I E_I - k_x^R E_R &= k_x^T E_T & (\text{da } B_\parallel = B_y = -k_x E_z/\omega \text{ o } E_y'^I + E_y'^R = E_y'^T) \end{aligned}$$

e quindi $E_R = R E_I$ e $E_T = T E_I$ con

$$R = \frac{k_x - k_x^T}{k_x + k_x^T} = \frac{n_1 \cos \theta_I - n_2 \cos \theta_T}{n_1 \cos \theta_I + n_2 \cos \theta_T} = -\frac{\sin(\theta_I - \theta_T)}{\sin(\theta_I + \theta_T)}, \quad T = \frac{2k_x}{k_x + k_x^T} = 1 + R$$

che è identica a quanto ottenuto nell'esercizio precedente su onde due corde con un capo in comune. Notare che il segno di R dipende dal segno di $n_1 - n_2$, mentre $T > 0$.

Il rapporto fra potenza riflessa ed incidente vale R^2 . Se $n_2 < n_1$ si può avere $T > 1$; tuttavia come nell'esercizio precedente si ha $I_T < I_I$. L'intensità vale $I_i = v_i u_i$ dove $v_i = c/n_i$ e u_i è la densità media di energia dell'onda i , data da

$$u_i = \left\langle \frac{\epsilon_i E_i^2}{2} + \frac{B_i^2}{2\mu_i} \right\rangle = \frac{\epsilon_i}{2} \left\langle E_i^2 + B_i^2 v_i^2 \right\rangle = \frac{\epsilon_i}{2} E_i^2 = \frac{\epsilon_0}{2} n_i^2 E_i^2, \quad I_i = v_i u_i = c \frac{\epsilon_0}{2} n_i E_i^2.$$

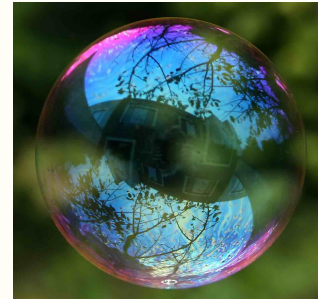
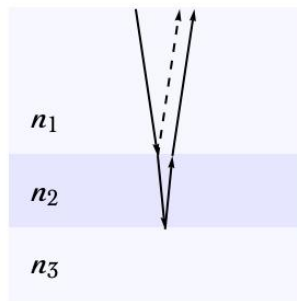
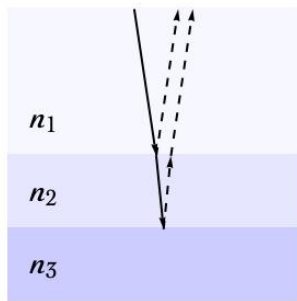
Analogamente al precedente esercizio con la corda si ha

$$\frac{I_T}{I_I} = T^2 n = \frac{4n}{(1+n)^2} < 1, \quad n \equiv \frac{n_2}{n_1}.$$

L'energia si conserva: $(I_I - I_R) \cos \theta_I - I_T \cos \theta_T = 0$.

Esercizio 18.4: Bolla di sapone

Tre materiali hanno indici di rifrazione $n_1 = 1$, n_2 , n_3 . Il materiale 1 riempie lo spazio di sinistra, il materiale 3 riempie lo spazio di destra, separati da un sottile strato del materiale 2 di spessore d . Si ha iridescenza quando le onde riflesse dalle superfici 12 e 23 fanno interferenza e lo spessore d è comparabile alla lunghezza d'onda λ_1 . Assumendo incidenza perpendicolare calcolare la condizione di interferenza costruttiva per a) cella solare coperta da uno strato di ossido, $n_1 = 1 < n_2 < n_3$; b) bolla di sapone, $n_1 = n_3 \approx 1 < n_2$.



➤Soluzione: Abbiamo calcolato in precedenza il coefficiente di riflessione, trovando che è negativo quando un'onda passa ad un materiale con indice di rifrazione maggiore.

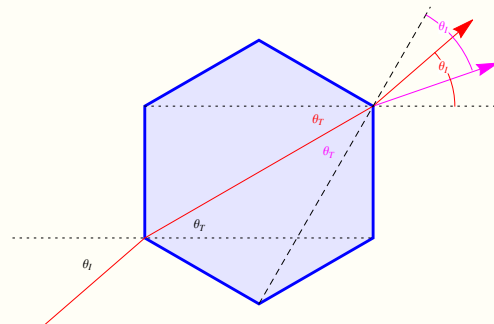
a) Si ha $R_{12}, R_{23} < 0$: l'interferenza è massimamente costruttiva quando $2d = N\lambda_2$ e massimamente distruttiva quando $2d = (N + 1/2)\lambda_2$ dove N è un intero e $\lambda_2 = \lambda_1/n_2$.

b) Si ha $R_{12} < 0$ e $R_{23} > 0$: l'interferenza è costruttiva quando $2d = (N + 1/2)\lambda_2$.

Esercizio 18.5: Alone a 22°

Quando fa freddo si osservano aloni più luminosi attorno al sole ed alla luna, ad angoli maggiori di 22° gradi. Una possibile interpretazione è la presenza di cristallo di ghiaccio esagonali con indice di rifrazione $n = 1.31$. Calcolare l'angolo critico a cui la luce che attraversa un tale cristallo inizia ad essere deviata.

➤Soluzione: Come mostrato in figura, si ha una deviazione quando i raggi escono da una faccia non parallela a quella di entrata.



Per la geometria dell'esagono, questo accade quando l'angolo di trasmissione vale $\theta_T = 30^\circ$, che, per la legge di Snell, corrisponde ad angolo di incidenza critico $\theta_I = \arcsin[n \sin(\theta_T)] = 40^\circ$. A tale angolo di incidenza l'angolo di deflessione passa da 0 (raggio in rosso nella figura, che esce dalla faccia parallela a quella di entrata) a $2\theta_I - 60^\circ = 22^\circ$ (raggio in viola nella figura, che esce dalla faccia inclinata di 60°), producendo quindi un alone chiaro oltre tale angolo limite.

Viene prodotto anche un alone meno intenso a 46° , quando i raggi escono dalla successiva faccia dell'esagono.

Esercizio 18.6: Onda in conduttore

Un'onda piana di pulsazione ω incide perpendicolarmente sulla superficie di un materiale di conducibilità $\sigma = 1/\rho$ e costanti ϵ e μ con polarizzazione lineare parallela alla superficie.

- Determinare la forma dell'equazione delle onde elettromagnetiche nel materiale.
- Studiare la penetrazione dell'onda nel materiale.
- Calcolare il campo magnetico e l'energia elettromagnetica.
- Calcolare la riflettività del materiale (rapporto tra intensità riflessa ed incidente), mostrando che un conduttore ideale è perfettamente riflettente.
- Trovare il flusso di energia verso l'interno del materiale e confrontarlo con la potenza dissipata per effetto Joule.

✚Soluzione: Un conduttore si scarica con costante tempo $\tau = \epsilon/\sigma$: ci aspettiamo quindi che onde siano attenuate, a seconda del valore di ω rispetto a $1/\tau \equiv \omega_{\text{cr}}$. Per calcolarlo si inserisce $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ nella IV equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu(\sigma \mathbf{E} + \epsilon \dot{\mathbf{E}})$ che a regime $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ si riduce all'equazione nel vuoto con $\epsilon \rightarrow \hat{\epsilon} \equiv \epsilon + i\sigma/\omega$. La parte immaginaria descrive l'attenuazione dell'onda dovuta a energia dissipata da correnti parassite. A bassa frequenza domina la conduzione; ad alta frequenza domina ϵ : esiste un ω speciale a cui sono uguali, dato dalla costante tempo del conduttore: $\omega_{\text{cr}} \equiv \sigma/\epsilon$. Per il rame a temperatura ambiente $\sigma \approx 6 \cdot 10^7/\Omega\text{m}$ si ha $\omega_{\text{cr}} = 6.6 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$, circa tre ordini di grandezza maggiore delle frequenza della luce visibile e nel range di frequenza dei raggi X. L'acqua di mare ha conduttività dominata dal sale: $\sigma \sim 4/\Omega\text{m}$ e $\epsilon \sim 80\epsilon_0$, quindi $\omega_{\text{cr}} \sim 10^{10} \text{ Hz}$. L'acqua 'pura' ha $\sigma \sim 10^{-5}/\Omega\text{m}$.

- Mettendo $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ e $\rho = 0$ nell'equazione delle onde (15.1) si ottiene

$$\left(\nabla^2 - \epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = \mu\mathbf{J} + \frac{1}{\epsilon}\nabla\rho \quad \Rightarrow \quad \left(\nabla^2 - \epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

A regime, per onde monocromatiche $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ l'equazione si riduce a

$$(\nabla^2 + \epsilon\mu\omega^2)\hat{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\sigma\hat{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad (\nabla^2 + \hat{\epsilon}\mu\omega^2)\hat{\mathbf{E}}$$

- Supponiamo che il conduttore si estenda per $x > 0$ e che \mathbf{E} sia polarizzato lungo z . Quindi per $x > 0$ la soluzione è $E_z = e^{i(kx - \omega t)}E_z(0)$ dove k soddisfa alla relazione di dispersione

$$k^2 = \epsilon\mu(\omega^2 + i\omega\omega_{\text{cr}}) \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} k_R^2 - k_I^2 = \epsilon\mu\omega^2 \\ 2k_Rk_I = \epsilon\mu\omega\omega_{\text{cr}} \end{cases}$$

dove $k = k_R + ik_I$. k_I descrive lo smorzamento dell'onda provocato dalle correnti parassite: definendo $k_I = 1/\delta$ si ha

$$E_z(x, t) = E_z(0)e^{i(k_R x - \omega t)}e^{-x/\delta}.$$

La soluzione esplicita per $k_{R,I}$ non è illuminante, ma si semplifica nei due casi limite.

- Ad alte frequenze $\omega \gg \omega_{\text{cr}}$ e/o in un materiale a bassa conducibilità si ha $k = \sqrt{\omega^2 + i\omega\omega_0}/c \simeq (\omega + i\omega_0/2)/c$, cioè $k_R \simeq \omega/c \gg k_I \simeq \omega_0/2c$ i.e.

$$\delta = \frac{\lambda_{\text{cr}}}{\pi} = \frac{2c}{\omega_{\text{cr}}} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}.$$

L'onda si propaga in maniera simile a quanto fa in assenza di conducibilità, ma smorzandosi su una distanza tipica $\delta \sim \lambda_{\text{cr}} \gg \lambda$. Per il rame $\delta \sim 0.1 \text{ nm}$.

- A basse frequenze $\omega \ll \omega_{\text{cr}}$ e/o in un materiale ad alta conducibilità si ha $k \simeq \sqrt{i\omega\omega_{\text{cr}}}/c$, il che corrisponde a trascurare la corrente di spostamento. Dobbiamo quindi ritrovare il caso dell'esercizio 14.17: usando $\sqrt{i} = (1+i)/2$ si ottiene

$$k_R \simeq k_I \simeq \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad \text{i.e.} \quad \delta \simeq \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

e quindi l'onda si smorza in qualche lunghezza d'onda.

- A frequenze intermedia si ha una situazione intermedia.

Il secondo caso si applica tipicamente per metalli alle frequenze della luce visibile ($\lambda_{\text{vuoto}} = 2\pi c/\omega = 380 - 740 \text{ nm}$, quindi $\delta = (5.6 - 7.9) \text{ nm}$). La luce visibile non penetra nei metalli e viene quindi riflessa, a meno di un piccolo assorbimento.

In un forno a micro-onde con $\omega = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ (cioè lunghezza d'onda di circa 1 cm) si ha $\delta \sim \mu\text{m}$: basta uno spessore metallico un poco maggiore di questo per impedire che le micro-onde escano. Viceversa le micro-onde entrano in materiali simili all'acqua, in quanto hanno $\omega_{\text{cr}} \sim \omega$ e quindi $\delta \sim \lambda$.

- c) Con metodi simili si trova che il campo magnetico soddisfa alla stessa equazione d'onda, ottenuta rimpiazzando $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$. Nel caso considerato \mathbf{B} ha solo componente B_y , data dalla II equazione di Maxwell, $\hat{B}_y = \partial E_z / \partial x$. Estraendo $e^{-i\omega t}$ si trova $-i\omega \hat{B}_y = ik \hat{E}_z$. Nel vuoto k è reale, quindi il campo magnetico è sfasato di 90° rispetto al campo elettrico. A basse frequenze $k \propto \sqrt{i}$, quindi il campo magnetico è sfasato di 45° . Il rapporto fra le ampiezze vale $|B_y/E_z| = |k/\omega|$, molto maggiore che nel vuoto: B domina la densità di energia elettro-magnetica

$$u = \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}, \quad \langle u \rangle = \frac{e^{-2x/\delta}}{2} \left(\frac{\epsilon \hat{E}^2}{2} + \frac{\hat{B}^2}{2\mu} \right) = \frac{e^{-2x/\delta}}{4} \epsilon \hat{E}^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_{\text{cr}}^2}{\omega^2}} \right).$$

- d) Fuori dal conduttore, per $x < 0$, i campi soddisfano l'equazione d'onda nel vuoto, con soluzione generale

$$E_z(x < 0, t) = E_I e^{ik_0 x - i\omega t} + E_R e^{-ik_0 x - i\omega t}.$$

E_I ha il significato fisico di onda incidente, e E_R di onda riflessa. Bisogna calcolare E_R/E_I .

- Ad *alte frequenze* tutta l'onda entra ($E_R \simeq 0$) e dissipa la sua energia per effetto Joule.
- A *basse frequenze* il campo elettrico dentro il metallo vale

$$E_z(x > 0, t) = E_T e^{-i\omega t - ix/\delta} e^{-x/\delta}.$$

Siccome \mathbf{E} risolve un'equazione di secondo grado in x , per raccordare le soluzioni occorre che E_z e $\partial E_z / \partial x$ siano continui a $x = 0$, cioè che

$$E_I + E_R = E_T, \quad ik_0(E_I - E_R) = ikE_T \simeq \frac{1+i}{\delta} E_T$$

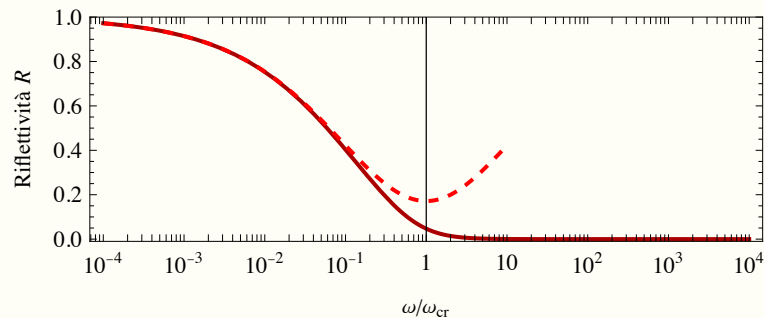
da cui

$$\frac{E_R}{E_I} = \frac{k_0 \delta + i - 1}{k_0 \delta - i + 1}, \quad \frac{E_T}{E_I} = \frac{2k_0 \delta}{k_0 \delta + i - 1}.$$

Poichè l'intensità delle onde sono proporzionali ai moduli quadri dei campi, la riflettività R è il modulo quadro di E_R/E_I :

$$R = \frac{1 + (k_0 \delta - 1)^2}{1 + (k_0 \delta + 1)^2} = \frac{\omega + \omega_{\text{cr}} - \sqrt{2\omega\omega_{\text{cr}}}}{\omega + \omega_{\text{cr}} + \sqrt{2\omega\omega_{\text{cr}}}} < 1.$$

Questa espressione approssimativamente valida per $\omega \ll \omega_{\text{cr}}$ è disegnata nella figura come curva tratteggiata; il risultato completo (non ricavato) è la linea continua, tale che $R = 0$ ad alta frequenza.



Nel limite di basse frequenze si ha riflessione ideale $R \simeq 1$. Fisicamente, questo accade in quanto la lunghezza di pelle δ diventa trascurabile rispetto a λ ; l'energia dissipata per effetto Joule (calcolata al punto successivo) diventa trascurabile; quindi l'onda incidente deve tornare tutta indietro. Come discusso sopra, la piccola parte di onda che entra nel conduttore ha campo elettrico trascurabile: nel limite di conduttore ideale la riflessione perfetta è quindi descritta dalla condizione al bordo $E_{\parallel} = 0$, ovvero il conduttore ideale scherma il campo elettrico esterno come nel limite statico.

Siccome l'onda riflessa deve essere generata dall'irraggiamento dovuto al moto collettivo delle cariche, può apparire sospetto che nel limite di conduttore ideale si abbia campo interno zero. Volendo capire nel dettaglio, accade che il campo esterno oscillante genera una corrente superficiale finita, calcolabile nel seguente modo.

Il campo magnetico entra nel materiale per una lunghezza δ , come visto sopra. In base alla IV equazione di Maxwell in cui la corrente di spostamento è trascurabile a basse frequenze, nel sottile strato di spessore δ è presente una grossa densità di corrente $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0 \propto 1/\delta$. Nel limite ideale $\sigma \rightarrow \infty$ i.e. $\delta \rightarrow 0$ la densità di corrente \mathbf{J} diverge, e la corrente superficiale $\Upsilon = \int_0^\infty J dx \sim J\delta \sim B/\mu_0$ ha un limite finito. L'irraggiamento dovuto a questo moto collettivo delle cariche è il fenomeno fisico che produce l'onda riflessa, e che permette di avere $B_{\parallel} \neq 0$ (ovvero condizione al bordo libera) lungo il bordo di un conduttore perfetto.

La grossa corrente \mathbf{J} è provocata dal piccolo campo elettrico interno $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma \propto \sqrt{\sigma}/\sigma \rightarrow 0$ nel limite ideale $\sigma \rightarrow \infty$.

- e) La potenza riflessa per unità di superficie vale $I_R/I_I = R^2$. Quindi la potenza trasmessa dovrebbe valere $I_T = TI_I$ con

$$T = 1 - R = \frac{4k_0\delta}{1 + (k_0\delta + 1)^2} \quad \text{per } \omega \ll \omega_{cr}$$

e tutta la potenza trasmessa deve venir dissipata per effetto Joule dalle correnti parassite nell'interno del metallo. Verifichiamolo. Dentro il metallo, $x > 0$, il campo elettrico E_T vale

$$E_T = E_I \cdot 2k_0\delta e^{-x/\delta} \operatorname{Re} \frac{e^{ix/\delta - i\omega t}}{1 + k_0\delta + i} = \frac{2k_0\delta E_I}{1 + (k_0\delta + 1)^2} e^{-x/\delta} \left[(1 + k_0\delta) \cos(x/\delta - \omega t) + \sin(x/\delta - \omega t) \right].$$

La media temporale della potenza dissipata per unità di superficie è

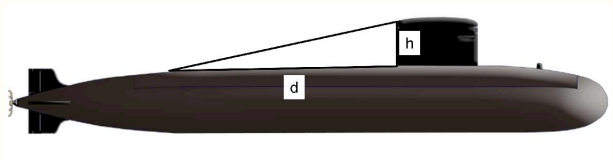
$$\frac{dW_{\text{Joule}}}{dS} = \int_0^\infty dx \sigma \langle E_z^2 \rangle_t = \frac{2\sigma(k_0\delta)^2 E_I^2}{1 + (k_0\delta + 1)^2} \int_0^\infty dx e^{-2x/\delta} = \frac{\sigma\delta(k_0\delta)^2 E_I^2}{1 + (k_0\delta + 1)^2}$$

avendo calcolato la media temporale come $\langle (A \cos + B \sin)^2 \rangle_t = (A^2 + B^2)/2$. Inserendo il valore di δ otteniamo il risultato atteso

$$\frac{dW_{\text{Joule}}}{dS} = \frac{4k_0\delta}{1 + (k_0\delta + 1)^2} \frac{\epsilon_0 c E_I^2}{2} = TI_I.$$

Esercizio 18.7: Sommergibile ©

Un sommergibile naviga in superficie ed è dotato di un'antenna approssimabile come una spira triangolare di altezza $h = 3$ m e base $d = 30$ m compresa tra la torretta, il ponte e la poppa (vedere figura). Il sommergibile riceve segnali approssimabili ad un'onda piana polarizzata linearmente di frequenza 1 kHz e di flusso di energia $I_0 = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ W/m}^2$. Il campo magnetico è ortogonale al piano dell'antenna. Il rapporto in ampiezza segnale/rumore in tali condizioni è $S/N = 100$. Si calcoli:



- La lunghezza d'onda λ dell'onda incidente, e i campi E , B .
- La f.e.m. efficace generata dall'onda nella spira.
- Ora il sommergibile si immerge in mare ($\epsilon_r(1 \text{ kHz}) = 72$, $\mu_r = 1$, conducibilità $\sigma = 4 \text{ } \Omega/\text{m}$); qual'è la velocità di propagazione e la lunghezza d'onda del segnale che riceve?

- d) Assumendo che il rumore rimanga costante, e che il minimo rapporto segnale/rumore accettabile sia $S/N = 5$, qual'è la massima profondità alla quale può andare se vuole continuare a ricevere comunicazioni?
- e) Discutere la dipendenza del punto d) dalla frequenza del segnale. Sarebbe più conveniente usare un segnale satellitare a 11 GHz?

✚Soluzione:

- a) La lunghezza d'onda vale $\lambda = c/\nu = 3 \cdot 10^5$ m. Ricordando che $\mathcal{I}_0 = \langle S \rangle = c\epsilon_0 E^2/2$, si ricava $E_0 = 0.1$ V/m e $B_0 = E_0/c = 3.3 \cdot 10^{-10}$ T.
- b) In base alla legge di Lenz la f.e.m. è

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -S\dot{B}_0 \simeq \frac{hd}{2} B_0 2\pi\nu \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\nu t\right),$$

avendo sfruttato il fatto che λ molto maggiore della dimensione del circuito ricevente per approssimare l'integrale di superficie come costante. La media temporale del quadrato della f.e.m. vale quindi

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} \equiv \sqrt{\langle \mathcal{E}^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{hd}{2} \frac{E_0}{c} 2\pi\nu.$$

- b') Se non fosse $\lambda \gg d, h$ il risultato dipenderebbe dalla direzione di propagazione dell'onda: se ad esempio fosse parallela al lato di lunghezza d dell'antenna triangolare si avrebbe

$$\Phi_B = \int_0^d dx \frac{x}{h} B_0 \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\nu t\right).$$

Omettendo formule troppo complicate per essere illuminanti, \mathcal{E}_{eff} sarebbe massima per $d \approx 0.65\lambda$ (mentre per un circuito rettangolare è massima per $d = (n + 1/2)\lambda$).

- c) In acqua $v = c/\sqrt{\epsilon_r\mu_r} = 3.5 \cdot 10^7$ m/s. In assenza della conducibilità la lunghezza d'onda sarebbe $\lambda = 3.5 \cdot 10^4$ m. Tenendo conto della conducibilità si ha $k_R \simeq k_I$ e quindi λ simile alla lunghezza di attenuazione.
- d) La lunghezza di attenuazione a bassa frequenza è $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma} = 7.96$ m. In base ai dati, l'ampiezza del segnale, proporzionale ad E_0 , può essere ridotta di un fattore 20 rispetto a quella in superficie. Siccome $E_0 \propto e^{-z/\delta}$ si ottiene $z = \delta \ln 20 \approx 24$ m.
- e) Ad alta frequenza l'attenuazione risulta maggiore, in quanto $\delta \propto 1/\sqrt{\omega}$. Pertanto in immersione il sommergibile deve comunicare usando la bassa frequenza.

Esercizio 18.8: Temperature di pianeti ☺

(Ultimo scritto prima del covid 19). Un corpo a temperatura T emette luce con “spettro di corpo nero” piccato a frequenza $h\nu \sim k_B T$ e con potenza per unità di superficie

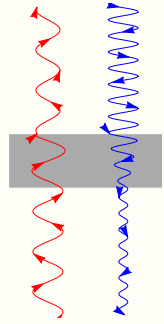
$$\frac{dW}{dS} = \epsilon\sigma T^4 \quad \text{dove} \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} = 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

è detta ‘costante di Stefan-Boltzmann’, e si può assumere efficienza $\epsilon = 1$.

- a) Sapendo la temperatura $T_{\text{Sole}} = 5800$ K ed il raggio $R_{\text{Sole}} = 7 \cdot 10^8$ m del Sole, calcolare la temperatura T_{Terra} della Terra, assunta uniforme (ovvero circa uguale giorno e notte grazie alla circolazione atmosferica del calore) ed a distanza $d \approx 214 R_{\text{Sole}}$ dal Sole.
- b) Sapendo che la radiazione solare è piccata nel visibile a frequenza $\nu_{\text{Sole}} \approx 10^{15}$ Hz, calcolare la frequenza di picco $\nu_{\text{Terra}}/\nu_{\text{Sole}}$ della radiazione irradiata dalla Terra.

Teller et al. proposero di portare nella stratosfera terrestre lamine di alluminio (densità 2.7 g/cm^3 , resistività $2.6 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$) con piccolo spessore h .

- c) Quali spessori h consentono di riflettere la radiazione solare entrante senza riflettere quella terrestre uscente, in maniera da raffreddare la Terra?
- d) Quale frazione delle radiazione solare deve essere riflessa per raffreddare la Terra di circa 1 grado?
- e) Stimare quanto costerebbe raffreddare la Terra di circa un grado, assumendo che produrre e portare materiale nella stratosfera costi 6 € al kg (ad esempio rivestendo palloncini).
- f) La Luna non ha atmosfera e il suo giorno dura 13.5 giorni terrestri: trascurando la circolazione del calore calcolare la temperatura della Luna a mezzogiorno.



Dyson propose che civiltà avanzate potrebbero costruire sfere attorno alle stelle alla distanza che consente temperatura ambiente.

- g) A quale distanza d' bisognerebbe costruire una “sfera di Dyson” attorno al Sole?

✎ Soluzione:

- a) Il Sole irraggia potenza $W_{\text{Sole}} = S_{\text{Sole}} \cdot \sigma T_{\text{Sole}}^4 = 4\pi R_{\text{Sole}}^2 \sigma T_{\text{Sole}}^4 = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$. La potenza per unità di superficie ricevuta alla distanza della terra vale $K_{\odot} = (R_{\text{Sole}}/d)^2 \sigma T_{\text{Sole}}^4 = 1366 \text{ W/m}^2$. La Terra è approssimabile come un corpo nero a temperatura circa uniforme T_{Terra} e di forma sferica con raggio R_{Terra} . In condizioni di equilibrio la Terra irraggia tutta l'energia che riceve dal Sole:

$$4\pi R_{\text{Terra}}^2 \sigma T_{\text{Terra}}^4 = \pi R_{\text{Terra}}^2 K_{\odot} = \pi R_{\text{Terra}}^2 (R_{\text{Sole}}/d)^2 \sigma T_{\text{Sole}}^4 \quad \text{da cui} \quad T_{\text{Terra}} = T_{\text{Sole}} \sqrt{R_{\text{Sole}}/2d} \approx 280 \text{ K}.$$

Il risultato può anche essere scritto come $T_{\text{Terra}} = T_{\text{Sole}} (\Omega/4\pi)^{1/4}$ dove Ω è l'angolo solido sotteso dalla Terra. Andando oltre l'approssimazione di corpo nero si hanno coefficienti di emissività e riflettività che sono uguali per via di un teorema generale: quindi T_{Sole} non viene modificata. Inoltre, per via dell'effetto serra, le zone interne dell'atmosfera sono più calde.

Marte dista dal sole il 50% in più della Terra, e quindi la sua temperatura è circa 25% più bassa, $T_{\text{Marte}} \approx 230 \text{ K}$. Esiste quindi una ‘zona abitabile’ a distanza appropriata da ciascuna stella in cui i pianeti hanno temperatura simile all'energia di legame atomica.

- b) La Terra irraggia luce a frequenza infrarossa, circa 30 volte minore di quella visibile, in quanto la temperatura della Terra è circa 30 volte minore di quella della superficie del Sole.
- c) La lunghezza di pelle vale $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$, uguale a 2.5 nm alla frequenza visibile, e circa 6 volte maggiore alla frequenza infrarossa. Occorre quindi scegliere lo spessore in questo intervallo, ad esempio $h \approx 4\delta = 10 \text{ nm}$.
- d) Come calcolato al punto a), $T_{\text{Terra}} \propto K_{\odot}^{1/4}$. Per raffreddare la terra di $dT_{\text{Terra}} = 1^\circ$, ovvero $dT_{\text{Terra}}/T_{\text{Terra}} = 1/280$, occorre quindi ridurre l'illuminazione solare del $4/280 \approx 1.4\%$.
- e) Serve quindi una massa $M = 1.4\% \times 4\pi R_{\text{Terra}}^2 h \times \rho \approx 2 \cdot 10^5 \text{ ton}$. L'operazione costerebbe circa un miliardo di €. Magari il doppio se le lamine si orientano a caso. Per confronto, ottenere lo stesso raffreddamento riducendo la CO_2 costerebbe circa 3 ordini di grandezza in più. Gruppi di ricerca cercano molecole non nocive (CaCO_3 ?) con righe atomiche che consentono di ottenere un risultato simile.
- f) Una superficie S in condizioni di equilibrio termico quando il Sole è a picco ha temperatura

$$S\sigma T_{\text{Luna}}^4 = SK_{\odot} = S(R_{\text{Sole}}/d)^2 \sigma T_{\text{Sole}}^4 \quad \text{da cui} \quad T_{\text{Luna}} = T_{\text{Sole}} \sqrt{R_{\text{Sole}}/d} \approx 400 \text{ K} = \sqrt{2} T_{\text{Terra}}.$$

Di notte T_{Luna} scende fino a poche decine di Kelvin.

- g) Su di una sfera di Dyson il Sole è sempre a picco, e la temperatura è quindi $T_{\text{sfera}} = T_{\text{Terra}} \sqrt{2d/d'}$. È uguale alla temperatura media della Terra per $d' \approx 2d$, dalle parti dell'orbita di Marte, dove infatti il Sole a picco riesce a scongelare l'acqua. Le sfere di Dyson rimetterebbero la luce stellare nell'infrarosso, e sono state cercate con telescopi appositi.

Esercizio 18.9: Forno a micro-onde ©

Nel vuoto è presente una lastra di spessore d composta da un materiale di conducibilità $\sigma = 10^6/\Omega\text{m}$ e costante dielettrica ϵ_0 . Un'onda piana con pulsazione $\omega_{\text{micro}} \sim 10^{10}\text{ Hz}$ ed intensità I_{micro} incide perpendicolarmente da un lato. Un'onda piana con pulsazione $\omega_{\text{vis}} \sim 10^{15}\text{ Hz}$ ed intensità I_{vis} incide perpendicolarmente dall'altro lato.

- Calcolare le lunghezze d'onda λ_{vis} e λ_{micro} e le lunghezze di pelle δ_{vis} e δ_{micro} per le due onde. Si fissi lo spessore d in maniera che la lastra sia opaca nel visibile e trasparente alle micro-onde.
- Dopo aver stabilito se ogni onda viene trasmessa, riflessa o assorbita dire quanto vale in tale caso la potenza assorbita dalla lastra per unità di superficie e la pressione di radiazione.
- Come occorre lavorare la piastra per ottenere un oggetto che faccia passare il 50% della luce visibile, riflettendo le micro-onde?
- Rispondere nuovamente alla domanda b) nel caso c).

➤Soluzione:

- Le lunghezze d'onda $\lambda = 2\pi c/\omega$ valgono $\lambda_{\text{vis}} \approx 2\mu\text{m}$ e $\lambda_{\text{micro}} \approx 0.2\text{ m}$. Essendo $\omega_{\text{cr}} \equiv \sigma/\epsilon_0 \sim 100\omega_{\text{vis}}$ le lunghezze di pelle $\delta \approx \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}$ valgono $\delta_{\text{vis}} \approx 4 \cdot 10^{-8}\text{ m}$ nel visibile e $\delta_{\text{micro}} \approx 0.01\text{ mm}$ nelle micro-onde. Entrambe sono maggiori delle corrispondenti lunghezze d'onda. Similmente all'esercizio precedente, occorre uno spessore d compreso fra δ_{vis} e δ_{micro} , ad esempio $d = 0.001\text{ mm}$.
- Essendo $\delta_{\text{vis}} \gg \lambda_{\text{vis}}$, possiamo assumere che l'onda visibile venga assorbita ma non riflessa. La micro-onda viene solo trasmessa. La potenza assorbita per unità di superficie vale I_{vis} e la pressione vale quindi $\wp = I_{\text{vis}}/c$,
- L'effetto desiderato è ottenuto mediante una griglia di spessore maggiore di $\delta_{\text{micro}} \approx 0.001\text{ mm}$ contenente in metà della sua superficie fori di dimensioni molto maggiore della lunghezza d'onda del visibile (che può così passare) e molto minore della lunghezza d'onda delle micro-onde (che quindi non possono passare, e vengono riflesse essendo $\delta_{\text{micro}} \ll \lambda_{\text{micro}}$). Ad esempio $d \approx 1\text{ mm}$. Questo è il sistema usato nei forni a micro-onde per vedere che succede dentro.
- Il materiale riflette le micro-onde ed assorbe (senza riflettere) il visibile. La potenza assorbita per unità di superficie assorbita vale quindi $I_{\text{vis}}/2$ e la pressione di radiazione vale $\wp = (I_{\text{vis}}/2 - 2I_{\text{micro}})/c$.

Esercizio 18.10: Pulsar

Una pulsar emette brevi impulsi a radio frequenze. Calcolare la distanza D della pulsar sapendo che $\nu_1 = 400\text{ MHz}$ arriva $\Delta t = 1\text{ s}$ dopo $\nu_2 = 1000\text{ MHz}$, e che lo spazio intermedio fra la pulsar e la terra contiene elettroni liberi con densità $n_e \approx 3 \cdot 10^4/\text{m}^3$.

➤Soluzione: Lo spazio intermedio è quindi un plasma dispersivo, con

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{dove} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} = 10^4\text{ Hz}$$

è detta 'frequenza di plasma' in quanto è anche la frequenza delle oscillazioni meccaniche del plasma. In questo plasma le frequenze basse viaggiano con velocità di gruppo v_g minore, ed arrivano quindi con un ritardo $\Delta t = D/v_{g1} - D/v_{g2}$. Ricordando che $k = n(\omega)\omega/c$, l'inverso della velocità di gruppo vale

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d(n\omega)}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) \simeq \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right)$$

avendo approssimato $n \simeq 1 - \omega_p^2/2\omega^2$ in quanto $n - 1 \sim 10^{-11}$. (La velocità di fase $v_f = \omega/k > c$ ha il comportamento opposto ma non è rilevante). Quindi, essendo $\omega = 2\pi\nu$, la distanza vale

$$D = \frac{2c \Delta t}{\omega_p^2/\omega_1^2 - \omega_p^2/\omega_2^2} \approx 5000\text{ ly}.$$

La dispersione di plasma è un background per esperimenti che cercano ipotetiche violazioni dell'invarianza di Lorentz: diverse frequenze che viaggiano a velocità diverse.

Esercizio 18.11: Onde adiabatiche

Una corda uniforme di massa m e lunghezza ℓ è appesa nel campo di gravità g . Come si propagano le onde?

✚**Soluzione:** La tensione ad un punto z è $\tau = mgz/\ell$, quindi la velocità delle onde è $v(z) = \sqrt{\tau/\lambda} = \sqrt{gz}$. Se $\lambda \ll \ell$ le onde si propagano adiabaticamente, cioè con $v = v(z)$, e quindi

$$t(\ell \rightarrow z) = \int_z^\ell \frac{dz}{\sqrt{gz}} = 2[\sqrt{\ell/g} - \sqrt{z/g}]$$

Un corpo che cade impiega un tempo $t'(\ell \rightarrow z) = \sqrt{2(\ell - z)/g}$.

Esercizio 18.12: Onde in plasma di densità variabile

Un'onda elettromagnetica di pulsazione ω si propaga lungo l'asse x in un mezzo con indice di rifrazione $n(x)$ che varia poco su di una lunghezza d'onda. a) Calcolare come l'ampiezza dell'onda dipende dalla posizione. b) Discutere la conservazione dell'energia. c) Considerare il caso particolare di un plasma, $n^2 = 1 - \omega_p^2(x)/\omega^2$, dove $\omega_p(x) = \sqrt{n_e(x)e^2/\epsilon_0 m_e}$ è una funzione lentamente variabile.

✚**Soluzione:** Il campo elettrico obbedisce all'equazione $E'' - n^2 \ddot{E}/c^2 = 0$.

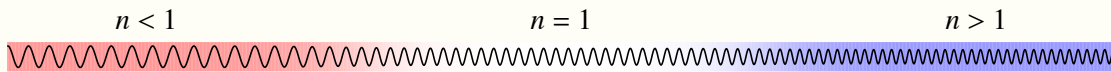
a) Possiamo risolvere in maniera approssimata l'equazione utilizzando una tecnica simile a quella chiamata WKB in meccanica quantistica. Definiamo in ogni punto $k(x) = n(x)\omega/c$. Scriviamo il campo in notazione complessa come

$$E(x, t) = \hat{E}(x) \exp \left[-i \left(\omega t + \int_0^x k dx \right) \right]$$

ottenendo l'equazione

$$\hat{E}'' + 2ik\hat{E}' + i\hat{E}k' = 0$$

in cui possiamo trascurare le derivate seconde in quanto, per assunzione, $\omega_p(x)$ è lentamente variabile. Si ha quindi la soluzione $\hat{E}(x) = \hat{E}(0)\sqrt{k(0)/k(x)}$.



b) La densità di energia dell'onda è data da $u = \epsilon E^2/2 + B^2/2\mu$ e contiene l'energia del materiale polarizzato. Tenendo conto che $B = E/v_f$ con $v_f = c/n$ i due contributi sono uguali. Si ha quindi $\langle u \rangle = n^2 \epsilon_0 \langle E^2 \rangle \propto n$. Il vettore di Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu$ vale quindi $S = v_f u$ ed è costante.

c) Il particolare n^2 di un plasma equivale ad un 'termine di massa', come si vede dall'equazione $E'' - \ddot{E}/c^2 - \omega_p^2 E = 0$ e anche dalla relazione di dispersione $k = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2(x)}/c$.

Esercizio 18.13: Miraggi

Calcolare la traiettoria di un raggio di luce che si propaga in un mezzo con indice di rifrazione variabile.

✚**Soluzione:** Il risultato è determinato da $v(x, y, z)$, cioè la velocità che la luce ha in ogni punto. Passare dalle equazioni di Maxwell esatte al limite approssimato di ottica geometrica non è ovvio. Senza fare conti, si può intuire che la traiettoria seguita da A a B è quella che minimizza (o in generale estremizza) T , il tempo necessario ad andare da A a B . Infatti questo significa che onde che si diffondono in traiettorie vicine hanno la stessa fase, e quindi le loro ampiezze si sommano coerentemente. (Lo stesso ragionamento spiega in che modo una traiettoria classica segue dalla meccanica quantistica, cioè come si va dal path-integral di $\exp(i \int \mathcal{L})$ alle equazioni del moto classiche). Come esempio semplice, si può verificare che per due semipiani con velocità v_1 e v_2 si riottiene la legge della rifrazione. (Esempio di Feynman con sabbia e mare).

In generale (per semplicità considero solo 2 dimensioni x e y) si ha

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{d\lambda}{v} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2} = \int \mathcal{L} dt$$

dove λ è un parametro arbitrario: alla fine uno preferirebbe usare $\lambda = t$, ma nei calcoli intermedi tenere λ arbitrario evita di dover imporre $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2(x, y, z)$ come vincolo addizionale nel calcolare l'equazione del moto che segue dal principio variazionale

$$\frac{\delta T}{\delta x} = \int dt \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x'} \right).$$

Dopo vari conti non ovvi che spero di aver fatto giusti, si ottengono le equazioni del moto:

$$x'' = -\frac{x'^2 + y'^2}{v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{cioè, scegliendo ora } \lambda = t, \quad \ddot{x} = v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x}$$

e simili per y e z . Notare che a posteriori queste equazioni sembrano ovvie: soddisfano la auto-consistenza $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2(x, y, z)$. Formalmente, sono uguali alle equazioni di Newton per il moto in un potenziale $V = -v^2$ di una particella con massa $m = 2$. Che ci sia una ‘costante dell’energia’ segue dal teorema di Noether: il sistema è invariante per traslazioni temporali.

Esempi:

- Per $v = \text{cte}$ si ottengono i raggi dritti.
- Con una $v(z)$ maggiore vicino subito sopra la strada si spiegano i miraggi: la luce preferisce scendere dove v è maggiore. Si trova $\dot{x} = \dot{y} = \text{cte}$. Nel caso matematicamente semplice $v^2 \propto z$ si trova un moto parabolico analogo a quello gravitazionale (ma a testa in giù).
- Un sistema cilindrico con $\mu_r = (1 - a/r)^2$ ed $\epsilon_z = (b/(b - a))^2$ fra $a < r < b$ fornisce il miraggio dell’invisibilità: qualunque cosa sia messa a $r < a$ diventa invisibile. [da fare]

Esercizio 18.14: Cavità risonante

Stimare il fattore di qualità $Q \equiv \omega_0 \text{Energia immagazzinata} / \text{Potenza dissipata}$.

♣**Soluzione:** Quindi $u(t) \propto e^{-\omega_0 t/Q}$ e $E(t) \propto e^{i\omega_0 t - \omega_0 t/2Q}$ e quindi lo spettro di energia è

$$|E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0/2Q)^2}$$

La stima è $Q \sim V/S\delta \sim 1000$ dove $\delta = \sqrt{2\epsilon_0 c^2 / \sigma \omega}$ è la lunghezza di pelle.

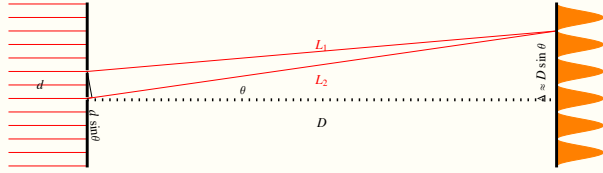
Capitolo 19

Interferenza e diffrazione

Esercizio 19.1: Interferenza alla Young

Due buchi di dimensione trascurabile, situati a distanza d , sono illuminati da luce di lunghezza d'onda λ come mostrato in figura.

- Calcolare il pattern di diffrazione visto su di uno schermo a distanza D grande.
- Calcolare λ assumendo che $D = 1$ m, $d = 10^{-3}$ m e che la decima banda luminosa sia a distanza $\Delta_{10} = 10^{-2}$ m dal centro.
- Uno dei due buchi viene coperto da un materiale trasparente di indice di rifrazione n e spessore $s = 10^{-4}$ m, e le frange di interferenza si spostano di $y = 10^{-2}$ m. Calcolare n .



✎ Soluzione:

- Per grande D si ha $L_1 - L_2 \simeq d \sin \theta$ e quindi la differenza di fase $\delta = kd \sin \theta$. Quindi l'ampiezza dell'onda è

$$E \propto 1 + e^{i\delta}, \quad I \propto |E|^2 \propto \cos^2 \frac{\delta}{2} = \cos^2 \frac{kd \sin \theta}{2} = \cos^2 \frac{\pi d \Delta}{\lambda D}$$

avendo usato $k = 2\pi/\lambda$ ed $\Delta = D \sin \theta$.

- I punti di intensità massima sono a $\Delta_n = n\lambda D/d$ con n intero, in quanto $\cos^2(\pi n) = 1$. Inserendo i valori numerici si trova $\lambda = (d/D)(\Delta_{10}/10) = \mu\text{m}$, circa nel visibile.
- Inserendo il materiale, la differenza di fase diventa $\delta = kd \sin \theta + 2\pi s(n-1)/\lambda$ e quindi

$$I \propto \cos^2 \frac{\delta}{2} = \cos^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{d\Delta}{D} + s(n-1) \right) \right].$$

Le frange si spostano di $y = Ds(n-1)/d$. Quindi $n = 1 + yd/sD = 1.1$ inserendo i valori numerici.

Esercizio 19.2: Interferenza alla Young ©

Una nave percorre una rotta parallela alla costa alla distanza di $D \approx 100$ km da questa e alla velocità $v = 18$ nodi. Un nodo è pari ad un miglio nautico (circa 1.8 km) all'ora. Un marinaio a bordo della nave sta ascoltando un programma musicale, sulla frequenza $\nu = 1200$ kHz, trasmesso da una stazione situata sulla costa, in direzione perpendicolare alla rotta. L'altezza del segnale varia regolarmente col tempo apparendo e scomparendo e l'intervallo tra il massimo ed il minimo è $\Delta t = 2$ minuti. Nei momenti di massima intensità,

il segnale ricevuto dall'antenna è stimato a 12 mV/m, pari a circa 8 volte il livello di rumore. Si intende che il segnale “scompare” quando è inferiore al livello di rumore. Il marinaio ipotizza che una seconda stazione costiera vicina alla prima abbia iniziato a trasmettere in fase e sulla stessa frequenza. Inquadrando i fenomeni nell'ambito dell'esperimento di Young stimare, fornendo i risultati numerici:

- La distanza d tra le due stazioni. Si ipotizzi, salvo verifica, che sia $d \ll D$ e si trascuri ogni effetto dovuto alla sfericità della Terra.
- La potenza emessa da ciascuna delle due stazioni.

✎Soluzione: La situazione è analoga all'esperimento di Young, eccetto che le due onde che interferiscono hanno intensità $I_1 \neq I_2$, dando $I_{\max} = |\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}|^2$ e $I_{\min} = |\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}|^2$.

- La lunghezza d'onda del segnale ricevuto è $\lambda = c/\nu = 250$ m mentre la distanza tra due massimi (o minimi) del segnale è $\Delta = 2\nu\Delta t = 2160$ m. Le onde emesse da due sorgenti a distanza d ricevute ad angolo θ sono in fase se $n\lambda = d \sin \theta = d\Delta/D$. Come nell'esperimento di Young, la distanza tra due massimi consecutivi vale $\Delta = \lambda D/d$ da cui $d = \lambda D/\Delta = 11.6$ km.
- Sia $E_{\text{noise}} \approx 1.5$ mV/m il valore del campo elettrico corrispondente alla soglia del rumore; se E_1 e E_2 sono le ampiezze dei campi elettrici ricevuti dalle due stazioni, le condizioni sui massimi e minimi di intensità sono

$$E_1 + E_2 = 8E_{\text{noise}}, \quad E_1 - E_2 = kE_{\text{noise}}$$

con $k = \mathcal{O}(1)$. Risolvendo il sistema si ottiene

$$E_1 = (8 + k)E_{\text{noise}}/2, \quad E_2 = (8 - k)E_{\text{noise}}/2.$$

Le intensità mediate su tempo o spazio sono legate ai campi elettrici massimi da $I_i = c\epsilon_0 E_i^2/2$ e sono legate alla potenza W_i della stazione emittente da

$$I = \frac{W}{4\pi D^2}, \quad W = 4\pi D^2 I = 2\pi c\epsilon_0 D^2 E^2.$$

Ne segue che la potenza delle due stazioni è $W_1 \sim 8$ kW e $W_2 \sim 5$ kW.

Esercizio 19.3: Fascio di luce di spessore finito ©

Si cerca una soluzione delle equazioni di Maxwell nel vuoto che descriva, invece di un'onda piana, un fascio di luce di spessore finito $\sim \ell$ che si propaga lungo l'asse z con frequenza ω . A tal fine si assume, per la componente x del campo elettrico, una soluzione della forma

$$E_x(x, y, z, t) = E_0 e^{-(x^2+y^2)/\ell^2} \cos(kz - \omega t)$$

- Nel limite di spessore ℓ molto maggiore della lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$, calcolare k ed il campo magnetico.
- Calcolare la media temporale della potenza portata dal fascio.
- Mostrare che al primo ordine in λ/ℓ i campi hanno anche componenti lungo z e calcolare E_z ;
- Mostrare che al secondo ordine in λ/ℓ occorrerebbe modificare E_x e interpretare fisicamente il risultato.

✎Soluzione:

- È il limite di onda piana: $k = \omega/c$ e $B_y = E_x/c$.
- Il vettore di Poynting vale $S_z = cu$ con $\langle u \rangle = \epsilon_0 \langle E_x^2 \rangle$. Il suo flusso fornisce la potenza: $\langle W \rangle = \int dx dy \langle S_z \rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \pi \ell^2 / 4$.
- La 1a equazione di Maxwell impone che \mathbf{E} ha divergenza zero. Conviene procedere in maniera differenziale imponendo

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad E_z = E_0 e^{-(x^2+y^2)/\ell^2} \frac{2x}{k\ell^2} \sin(kz - \omega t)$$

La componente z della IV equazione di Maxwell fornisce lo stesso E_z . Similmente si ottiene $B_{z,y} = E_{z,x}c$.

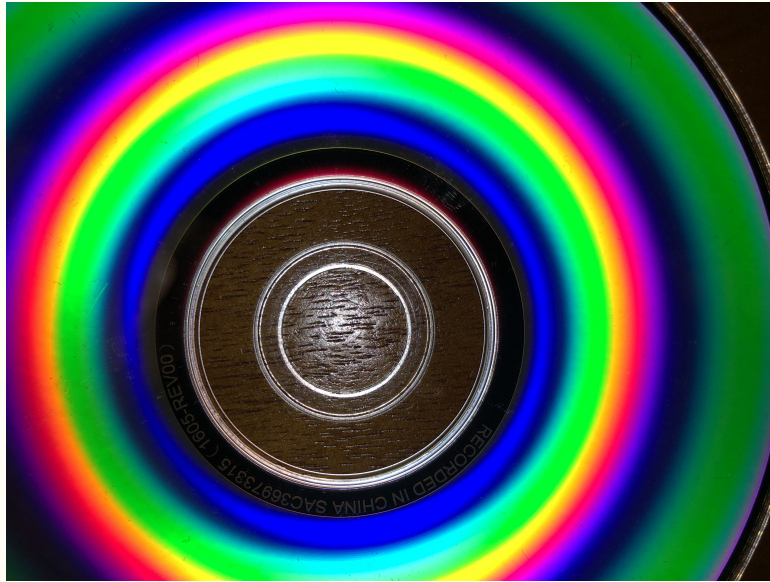


Figura 19.1: Foto di un CD ottenuta con il flash di un telefonino.

- d) L'equazione $\square^2 E_x = 0$ dipende solo da E_x ed è violata al 2o ordine in λ/ℓ : $\square^2 E_x = (-k^2 + \omega^2/c^2 - 2/\ell^2 + 4x^2/\ell^4)E_x \neq 0$. Il fatto che esista E_z indica che — contrariamente a quanto assunto in E_x — l'onda non si propaga lungo z , ma devia di un angolo $\theta \sim E_z/E_x \sim \lambda/\ell \ll 1$. È il fenomeno noto come diffrazione: un'onda piana va dritta, un'onda di spessore finito si diffonde.

Esercizio 19.4: CD

La luce di un puntatore laser per seminari ha spessore di circa $s = 1$ mm e spettro mono-cromatico rosso con lunghezza d'onda $\lambda = 680$ nm. Inviandola perpendicolarmente su di un CD si osservano riflessioni multiple separate di circa 25° . Interpretando il CD come un reticolo di diffrazione, dedurre il suo passo e la sua capacità di memoria.

✚Soluzione: Una griglia di diffrazione emette luce in direzione θ rispetto alla sua verticale con sfasamento $\delta = \varphi + 2\pi d \sin \theta / \lambda$ fra i singoli emettitori a distanza d uno dall'altro. La differenza di fase intrinseca φ vale zero in questo caso in quanto la luce è inviata perpendicolarmente. Si ottengono massimi quando δ è multiplo di 2π : il primo massimo è a $\theta = 0$, ed il secondo a $\sin \theta = \lambda/d$. Dal valore osservato di θ si impara che $d \approx 1.6 \mu\text{m}$. Quando vengono illuminati $n \gg 1$ punti l'intensità è concentrata in un piccolo angolo $\delta\theta \sim 1/n$. Nel caso in esame si ha $n \sim s/d \sim 1000$.

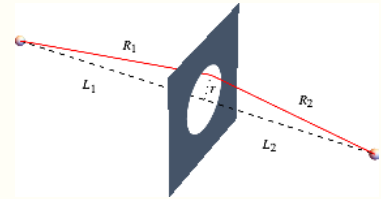
Il CD serve per memorizzare dati, ed un bit occupa un'area di circa d^2 . Nell'area di un CD ($S = \pi r^2$ con $r \approx 5$ cm) ci sono quindi $S/d^2 \sim 3 \cdot 10^9$ bit, che corrispondono circa a 700 Mbyte = $5.6 \cdot 10^9$ bit. Per aumentare la memoria bisognerebbe rendere d minore della lunghezza della luce visibile, cosa non possibile un quanto la luce visibile viene usata per scrivere e leggere un CD. Altri sistemi (DVD) aumentano la memoria scrivendo su più strati, ma in maniera macchinosa.



Attorno all'anno 2000 si faceva questo esercizio in classe, ma da allora la tecnologia si è evoluta: i puntatori laser sono stati digitalizzati, i CD sono scomparsi, e dal 2020 anche le classi. Una versione moderna dello stesso esercizio prevede che ogni studenti fotografi un CD con la luce bianca del flash del proprio telefonino, mantenendolo sopra il CD e bene allineato ad esso. Si ottiene la foto mostrata in figura 19.1. Sapendo che la luce bianca contiene un po'tutte le frequenze (nel caso di figura manca quella intermedia fra blu e verde), si può nuovamente dedurre il passo reticolare del CD.

Esercizio 19.5: Diffrazione da buco tondo

Una sorgente luminosa mono-cromatica di lunghezza d'onda λ è situata a distanza L_1 lungo l'asse di un piccolo buco di raggio $a \ll L_{1,2}$ in uno schermo opaco. Calcolare l'intensità luminosa ricevuta da un osservatore collocato sull'asse a distanza L_2 dall'altro lato utilizzando l'approssimazione di Fresnel (secondo ordine in a).



➤Soluzione: La diffrazione a piccolo angolo è usualmente approssimata in base al principio di Huygens, vedendo ogni punto del buco come sorgente che emette con intensità proporzionale all'intensità della luce emessa dalla sorgente. Si ottiene quindi un integrale su tutti i cammini possibili: raggi dall'oggetto al buco all'osservatore:

$$A_{\text{buco}} = \frac{1}{i\lambda} \int_0^a 2\pi r dr \frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2} f(\theta) \simeq \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ik(L_1+L_2)}}{L_1 L_2} \int_0^{a^2} \pi d(r^2) e^{ikr^2/2L} = \frac{L}{L_1 L_2} (1 - e^{ika^2/2L}) e^{ik(L_1+L_2)}$$

avendo approssimato $R_i = \sqrt{L_i^2 + r^2} \simeq L_i + r^2/2L_i$: per motivi di simmetria il termine lineare ('diffrazione alla Fraunhofer') vale zero; occorre quindi tenere il termine al secondo ordine in r ('diffrazione alla Fresnel'). Essendo a piccolo angolo si può trascurare il difficile fattore angolare $f(\theta)$, e tenere r solo nella fase: $R_1 + R_2 \simeq L_1 + L_2 + r^2/2L$ con $1/L = 1/L_1 + 1/L_2$. Si usa infine $\int dr r e^{ikr^2/2L} = e^{ikr^2/2L} L/ik$. Notare che, in termini di r^2 , l'integrale è semplice e può valere 0. Il modulo quadro dell'ampiezza oscilla quindi fra 0 ed un massimo

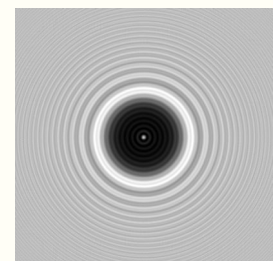
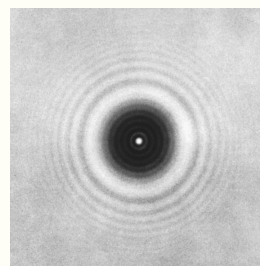
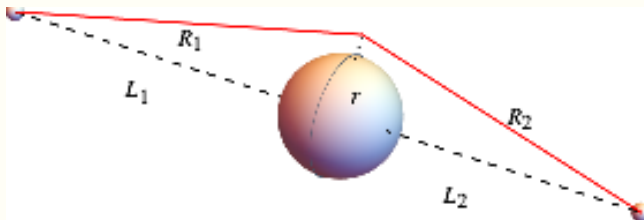
$$|A_{\text{buco}}|^2 = \frac{4L^2}{L_1^2 L_2^2} \sin^2 \frac{\pi a^2}{2L\lambda}.$$

Dietro l'apertura si hanno quindi punti di luce alternati a punti di buio (minimi per $a^2 = 4nL\lambda$), che sarebbero impossibili secondo la teoria corpuscolare della luce.

Esercizio 19.6: Ombra di una sfera

Rispondere nuovamente all'esercizio precedente sostituendo il buco con lo schermo complementare: un cerchio o una sfera di raggio a .

➤Soluzione: L'ampiezza A_{sfera} è data da un integrale di cammino sulla zona infinita non coperta dalla sfera: occorre tenere in conto i fattori angolari e tutta la geometria affinché sia convergente. Viene in aiuto il principio di Babinet degli schermi complementari: in assenza di ostacoli, integrando su tutto il piano si deve ottenere l'ampiezza (non l'intensità) della sorgente: $A_{\text{tutto}} = A_{\text{buco}} + A_{\text{sfera}}$. Sapendo che ci sono punti dove $A_{\text{buco}} = 0$ deduciamo che ci dovranno essere punti in cui $A_{\text{sfera}} = A_{\text{tutto}}$. Deve quindi esserci nell'ombra luce di intensità circa uguale a quella della sorgente non schermata. Attorno al 1818 Poisson predisse un punto luminoso lungo l'asse dietro l'ostacolo (punto di Poisson, che lo considerò assurdo deducendo che la teoria ondulatoria della luce proposta da Fresnel era sbagliata). Questo fenomeno fu però osservato da Arago (punto di Arago, poi primo ministro), ed oggi è utile per allineare oggetti.



La figura centrale mostra la misura dell'ombra di una sfera, e la figura a destra il calcolo teorico. Si può quindi usare una sfera come lente per focalizzare un'immagine (e un piccolo buco sferico, magari fatto con le dita, per migliorare la visione miope).

Per fare il conto preciso occorre tenere tutti i fattori nell'integrale di cammino: la normalizzazione ed il fattore angolare. Restringiamoci per semplicità al conto lungo l'asse ed assumiamo $L_1 = L_2 = L$ (da non

confondere con L nell'esercizio precedente) in maniera che $R_1 = R_2 = R$ e $\cos \theta = L/R$. Usando $R^2 = L^2 + r^2$ e quindi $r dr = R dr$ si ottiene

$$\begin{aligned} A_{\text{sfera}} &= \frac{1}{i\lambda} \int_a^\infty 2\pi r dr \frac{e^{2ikR}}{R^2} \frac{L}{R} = \frac{2\pi L}{i\lambda} \int_{\sqrt{L^2+a^2}}^\infty \frac{dR}{R^2} e^{2ikR} = \\ &= -ikL \frac{1}{2ik} \left[\frac{e^{2ikR}}{R^2} \Big|_{\sqrt{L^2+a^2}}^\infty + \int_{\sqrt{L^2+a^2}}^\infty \frac{dR}{R^3} e^{2ikR} \right] \simeq -L \frac{e^{2ik\sqrt{L^2+a^2}}}{L^2+a^2} \end{aligned}$$

avendo fatto un'integrazione per parti e trascurato l'integrale rimanente in quanto, continuando a procedere con integrazione per parti, si ottengono termini soppressi da $1/kR \ll 1$. L'ampiezza della luce sul buco è $A_{\text{sorgente}} = e^{ik\sqrt{L^2+a^2}}/\sqrt{L^2+a^2}$ per cui

$$\frac{I_{\text{sfera}}}{I_{\text{sorgente}}} = \left| \frac{A_{\text{sfera}}}{A_{\text{sorgente}}} \right|^2 = \frac{1}{4} \frac{L^2}{L^2+a^2}$$

che è diversa da zero per ogni L .

Esercizio 19.7: Luce bi-cromatica in interferometro di Michelson

Un'onda 'bi-cromatica' contenente due lunghezze d'onda $\lambda_{1,2}$ di intensità $\mathcal{I}_{1,2}$ viene fatta passare attraverso un interferometro di Michelson. Discutere cosa si vede ed in che modo si può ricostruire $\lambda_{1,2}$ e $\mathcal{I}_{1,2}$. Si consideri come esempio il sodio che emette due linee "D" con intensità $\mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2 = 1/2$, $(\lambda_1 + \lambda_2)/2 = 589.3 \text{ nm}$, $\lambda_1 - \lambda_2 = 0.59 \text{ nm}$.

Soluzione: Come riscaldamento consideriamo cosa succede inviando un'onda mono-cromatica in un interferometro di Michelson: lo specchio la divide in due parti eguali che seguono percorsi con differenze di cammino ottico d prima di venir ricombinate con differenza di fase $\delta = kd$. Inviando una sola onda monocromatica si ottiene

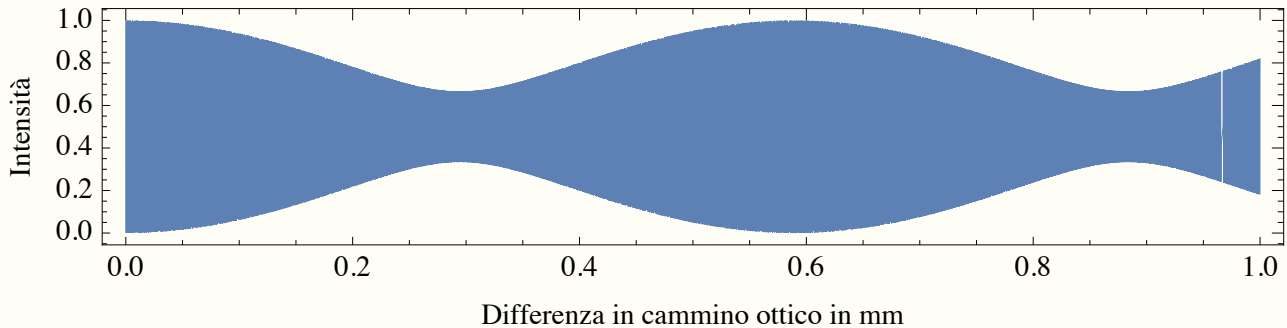
$$E = E_{\text{in}}(1 + e^{i\delta}), \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}_{\text{in}} \frac{1 + \cos \delta}{2}.$$

In funzione di d (che può essere variato), I oscilla fra 0 ed I_{in} su scale microscopiche, difficilmente osservabili.

Passiamo adesso al problema in cui si ha invece un'onda bi-cromatica, l'interferenza fra le due componenti con lunghezze d'onda diverse si media a zero nel tempo in quanto hanno due frequenze diverse, quindi l'intensità totale è la somma delle due intensità

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \frac{1 + \cos k_1 d}{2} + \mathcal{I}_2 \frac{1 + \cos k_2 d}{2} = \frac{\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2}{2} \left[1 + \cos(k_+ d) \cos(k_- d) \right] + \frac{\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_1}{2} \sin(k_+ d) \sin(k_- d).$$

La funzione $I(d)$ contiene battimenti di periodicità 'veloce' $k_+ = (k_1 + k_2)/2$ e periodicità 'lenta' $k_- = (k_1 - k_2)/2$. La figura esemplifica il risultato nel caso del sodio:



le oscillazioni con periodicità $\Delta d = \lambda$ sono troppo microscopiche per essere facilmente osservate, mentre sono osservabili i battimenti con periodo macroscopico $\Delta d = \lambda^2/\Delta\lambda \approx 0.59 \text{ mm}$. Con un po' di calcoli e pazienza si può vedere che il valore di \mathcal{I} estremizzato rispetto alle oscillazioni rapide varia fra $\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$, \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 , 0 (lineare negli \mathcal{I} in quanto non c'è interferenza fra le due lunghezze d'onda). Questo consente di misurare $\mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2$.

Esercizio 19.8: Grande fratello

Stimare che dimensione Δ deve avere un oggetto per essere visibile da un telescopio di diametro $d \sim \text{m}$ in orbita geostazionaria.

➤Soluzione: Il raggio dell'orbita geostazionaria è $r = GM_{\oplus}/\omega_{\oplus} \approx 42 \cdot 10^3 \text{ km}$. Quindi $D \approx r$. La risoluzione angolare di un telescopio è $\theta \approx \lambda/d$. La luce visibile ha $\lambda \approx 500 \text{ nm}$. Quindi $\Delta \approx \theta D \approx 20 \text{ m}$.

Esercizio 19.9: Foto di buco nero

Il buco nero nella galassia M87*, a distanza $D = 53 \text{ Myr} \approx 5 \cdot 10^{23} \text{ m}$, ha massa $M \sim 6.5 \cdot 10^9 M_{\text{sun}} \sim 10^{40} \text{ kg}$ e quindi raggio di Schwarzschild $R_S = 2G_N M/c^2 \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ m}$. La materia che ci casca dentro emette radiazione a circa $\nu = 230 \text{ GHz}$. Calcolare la dimensione che deve avere un telescopio per vedere il buco nero.

➤Soluzione: La dimensione angolare dell'oggetto è $\theta \sim \text{few} \times R_S/D \approx 10^{-10} \approx 40 \mu\text{arcsec}$. La luce ha lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu \approx 1 \text{ mm}$. Serve quindi un telescopio di dimensione $d \approx \lambda/\theta \approx 5 \cdot 10^6 \text{ m}$, grande circa come la Terra. Infatti per osservare il buco nero si è usata l'interferenza fra i vari ricevitori situati sulla Terra.

Esercizio 19.10: Minima distanza visibile

Come si fa a vedere un virus più piccolo della lunghezza d'onda visibile?

➤Soluzione: Nell'esercizio precedente abbiamo studiato la dimensione minima di un oggetto visibile da lontano. Andando il più vicino possibile, rimane comunque impossibile vedere oggetti più piccoli della lunghezza d'onda utilizzata. La lunghezza d'onda corrispondente alle frequenze della luce 'visibile' è $\lambda \approx 0.5 \mu\text{m}$.

Per vedere oggetti più piccoli si possono utilizzare frequenze maggiori (ultravioletto, etc.) Oppure mettere l'oggetto da vedere in acqua o in altro mezzo con indice di rifrazione $n > 1$: la luce rallenta $v = c/n$ e quindi, a frequenza fissata, diminuisce il passo $\lambda = \lambda_{\text{vuoto}}/n$, permettendo di vedere oggetti più piccoli.

Capitolo 20

Irraggiamento

Formula di base: una carica q in moto non relativistico irraggia

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}_{\text{rit}}), \quad c\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad \frac{dW}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \theta}{4\pi} \frac{q^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \quad W = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

dove θ è l'angolo fra \mathbf{a} e la direzione di osservazione \mathbf{n} . Un sistema complicato può spesso venir approssimato come un dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$, che irraggia potenza totale $W = \ddot{\mathbf{p}}^2/6\pi\epsilon_0 c^3$. Similmente, un dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}(t)$ irraggia $W = \mu_0 \ddot{\boldsymbol{\mu}}^2/6\pi c^3$.

Esercizio 20.1: Antenna

Un'antenna irraggia potenza media $W = 1$ MW ed è approssimabile come un dipolo elettrico $p_z = p_0 \cos \omega t$ con $\omega = 10$ MHz. a) Calcolare p_0 . b) Calcolare la lunghezza d'onda della radiazione irraggiata. c) Calcolare l'intensità \mathcal{I} dell'onda ricevuta da un osservatore situato a distanza $r = 1$ km lungo l'asse x . d) Calcolare il campo elettrico e magnetico ricevuto dall'osservatore, e la loro polarizzazione. e) Come occorre disporre l'antenna affinché il campo elettrico sia polarizzato orizzontalmente?

✚Soluzione:

- a) La potenza media vale $W = \langle \dot{\mathbf{p}}^2 \rangle / 6\pi\epsilon_0 c^3 = \omega^4 p_0^2 / 12\pi\epsilon_0 c^3$, quindi $p_0 = \sqrt{12\pi\epsilon_0 c^3 W} / \omega^2 = 0.95 \cdot 10^{-3}$ C m.
- b) La lunghezza d'onda vale $\lambda = 2\pi c / \omega \approx 188$ m $\ll r$.
- c) Essendo $\theta = \pi/2$, l'intensità vale $\mathcal{I} = \langle S \rangle = \frac{dW}{dS} = \frac{1}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}^2}{4\pi\epsilon_0 c^3 r^2} = \frac{3}{2} \frac{W}{4\pi r^2} = 0.12 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.
- d) Il campo elettrico vale $E_0 = \sqrt{2\mathcal{I}/c\epsilon_0} = 9.5$ V/m e $B_0 = E_0/c$. Il campo magnetico è polarizzato come $\mathbf{B} \propto \hat{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{p}} \propto \hat{\mathbf{y}}$, e quindi il campo elettrico è polarizzato lungo l'asse z , ovvero parallelo all'antenna.
- e) Si ottiene un campo elettrico E_y orizzontale mettendo l'antenna parallela all'asse y .

Esercizio 20.2: Elettrone libero in campo elettrico

Un elettrone si muove con velocità v parallela ad un campo elettrico E . Calcolare il valore di v tale che la potenza irraggiata è trascurabile rispetto alla potenza ricevuta dalla forza elettrica. Si dia il valore numerico per $E = \text{kV/m}$.

✚Soluzione: Si ha $W_{\text{mecc}} = eEv$ e $W_{\text{irr}} = e^2(eE/m_e)^2/6\pi\epsilon_0 c^3$. Imponendo $W_{\text{mecc}} \gg W_{\text{irr}}$ si ottiene

$$v \gg \frac{eE^3}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2} = 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}} \left(\frac{E}{\text{kV/m}} \right)^3.$$

Quindi l'irraggiamento è trascurabile in situazioni realistiche, quali a temperatura ambiente. Nel prossimo esercizio viene discusso se ha senso considerare situazioni in cui W_{irr} non è trascurabile.

Esercizio 20.3: Elettrone libero in campo magnetico ©

Un elettrone (particella di carica elettrica e e massa m_e) ruota con velocità $v \ll c$ nel piano xy attorno all'origine in un campo magnetico $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ uniforme e costante. Calcolare:

- La potenza irraggiata e l'energia irraggiata in un giro. Sotto quale condizione su B essa è molto minore dell'energia cinetica $K = m_e v^2/2$? Si dia anche il valore numerico.
- Mostrare che l'energia cinetica K dell'elettrone diminuisce come $K(t) = e^{-t/\tau} K(0)$, calcolando τ e dando il suo valore numerico per $B = 1 \text{ T}$.
- Il modulo del vettore di Poynting della radiazione ricevuta da un osservatore a grande distanza r lungo l'asse z , specificandone polarizzazione e pulsazione.
- Il modulo del vettore di Poynting della radiazione ricevuta da un osservatore a grande distanza r lungo l'asse x , specificandone polarizzazione e pulsazione.

Assumendo ora che l'elettrone compia un moto elicoidale con velocità $v_z \ll c$:

- Determinare la differenza tra le frequenze misurate da due osservatori situati lungo l'asse $\pm z$, il primo che vede l'elettrone avvicinarsi e il secondo allontanarsi.

✚ **Soluzione:**

- In base alla formula di Larmor la potenza irraggiata vale $W = e^2 a^2 / 6\pi\epsilon_0 c^3$ dove l'accelerazione a è data dalla forza di Lorentz, $a = evB/m_e$. Essendo $a = v^2/R$ l'elettrone ruota con raggio $R = m_e v / eB$ compiendo un giro in un periodo $T = 2\pi R/v = 2\pi m_e / eB$. La potenza e l'energia irraggiata valgono

$$W_{\text{irr}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{a^2}{c^3} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0} \frac{B^2 v^2}{m_e^2 c^3}, \quad E_{\text{irr}} = W_{\text{irr}} T = \frac{Be^3 v^2}{3\epsilon_0 m_e c^3}.$$

Imponendo $WT \ll K$ si ottiene $B \ll 3\epsilon_0 m_e^2 c^3 / 2e^3 \approx 7 \cdot 10^{10} \text{ T}$, condizione soddisfatta da campi magnetici producibili da materia ordinaria.

- L'energia cinetica $K = m_e v^2/2$ diminuisce perché viene in parte irraggiata, mentre la forza magnetica non compie lavoro. Notando che sia K che W sono proporzionali a v^2 si ha

$$\frac{dK}{dt} = -W = -\frac{K}{\tau}, \quad \tau = \frac{3\pi\epsilon_0 c^3 m_e^3}{B^2 e^4} = 2.57 \text{ sec} \left(\frac{1 \text{ T}}{B} \right)^2.$$

- La formula per i campi irraggiati $\mathbf{B} \propto \mathbf{a} \times \mathbf{n}$ significa che conta solo la componente di \mathbf{a} perpendicolare ad \mathbf{n} , ovvero conta solo la componente del moto 'vista' da un osservatore che guarda da direzione \mathbf{n} . Un osservatore lungo l'asse z 'vede' tutto il moto circolare lungo x e lungo y : i campi ricevuti hanno quindi polarizzazione circolare e pulsazione $\omega = 2\pi/T$. Tecnicamente $\mathbf{n} \propto \mathbf{z}$ e $\mathbf{B} \propto (\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \times \mathbf{z} = i(\mathbf{x} + i\mathbf{y})$, ovvero polarizzazione circolare. Il vettore di Poynting ha modulo

$$\mathcal{I} = S_z = \frac{dW}{dS} = \frac{1}{r^2} \frac{dW}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \theta}{4\pi r^2} \frac{e^2 a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{3W_{\text{irr}}/2}{4\pi r^2}$$

essendo $\sin^2 \theta = 1$.

- Un osservatore lungo l'asse x 'vede' il solo moto lineare lungo y : i campi ricevuti hanno quindi polarizzazione lineare, ed il vettore di Poynting ha modulo $S_x = S_z/2$.
- Applichiamo la formula dell'effetto Doppler non relativistico: $\nu_{\pm} = \nu_0(1 \pm v_z/c)$, dove il $+$ si applica all'osservatore che vede avvicinarsi l'elettrone e il $-$ all'altro. La differenza è $\nu_+ - \nu_- = 2\nu_0 v_z/c$.

Esercizio 20.4: Atomo di idrogeno

Calcolare la potenza W irraggiata da un atomo di idrogeno in orbita circolare, e il tempo τ impiegato per irraggiare tutta l'energia.

➤Soluzione: L'irraggiamento è dominato dall'elettrone, che ruota con velocità v non relativistica. Assumendo un'orbita circolare di raggio r , l'accelerazione vale $a = v^2/r$. Quindi in un giro irraggia

$$\Delta E = W \cdot T = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 \cdot \frac{2\pi r}{v} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{v}{c}\right)^3.$$

La frazione di energia persa in ogni giro è

$$\epsilon = \frac{\Delta E}{|E|} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{v}{c}\right)^3 \ll 1 \quad \text{dove} \quad E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

è l'energia totale dell'atomo. L'atomo farebbe circa $1/\epsilon$ giri, in un tempo $\tau \sim 12\pi^2\epsilon_0^2 m_e^2 r^3 c^3 / e^4 \sim 10^{-11}$ s. Questo tempo può essere calcolato in maniera più precisa sfruttando $\Delta E \ll |E|$ e integrando la perdita di energia continua

$$-\dot{E} = W = \frac{32}{3} \frac{4\pi\epsilon_0 E^4}{c^3 e^2 m_e^2} \Rightarrow E(t) = \frac{E_0}{(1 - t/\tau)^{1/3}} \quad \tau = \frac{e^2 c^3 m_e^2}{128\pi\epsilon_0 |E_0|^3} = \frac{4\pi^2\epsilon_0^2 m_e^2 c^3}{e^4} r_0^3 \sim 10^{-11} \text{ s}.$$

Equivalentemente, usando come variabile r invece di $E = -e^2/8\pi\epsilon_0 r$ si ottiene

$$\frac{d(r^3)}{dt} = 4r_e^2 c \Rightarrow r^3(t) = r_0^3 - 4r_e^2 c t \quad r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

L'elettromagnetismo classico fornisce risultati corretti riguardo alla vita media dei livelli eccitati degli atomi, la polarizzazione e la direzione della radiazione emessa. Una carica in moto circolare nel piano xy è descritta da un dipolo elettrico rotante $\mathbf{p} \propto (1, i, 0)e^{i\omega t}$. I campi di dipolo elettrico in zona di radiazione ($r \gg c\omega$) sono dati da

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{\mathbf{p}}_{\text{rit}} \times \mathbf{n}}{rc^3}, \quad \mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n}.$$

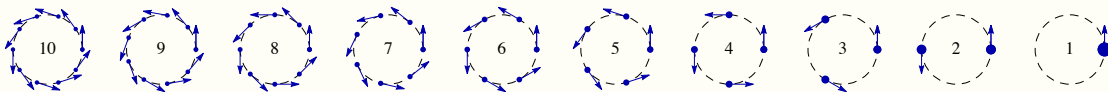
Quindi $\mathbf{B} \propto (\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \times \mathbf{n}$: se si osserva lungo l'asse z , essendo $(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \times \mathbf{z} = i(\mathbf{x} + i\mathbf{y})$ la polarizzazione è circolare. Se invece $\mathbf{n} = \mathbf{x}$ la polarizzazione è lineare. Infatti guardando dall'altro si vede una carica che gira, guardando di taglio una carica che oscilla.

Orbite ellittiche irraggiano di più, in quanto l'accelerazione è massima nel punto di minima distanza. Con un po' di pazienza è possibile mediare sull'orbita ottenendo

$$\langle W_{\text{Larmor}} \rangle = W_{\text{Larmor}}^{\text{circ}} \frac{3 - (\ell/\ell_{\text{circ}})^2}{2(\ell/\ell_{\text{circ}})^5}. \quad (20.1)$$

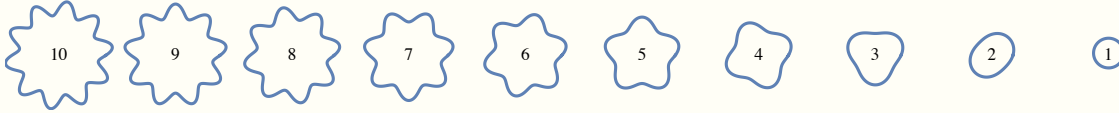
I colliders e^-e^+ vengono costruiti circolari per minimizzare l'energia persa in irraggiamento.

Però, come noto, la materia non collassa in 10^{-11} sec. L'irraggiamento si ferma quando viene raggiunto un raggio fissato, uguale per tutti gli atomi. Questo fenomeno può essere compreso solo in meccanica quantistica. Un modello classico forse aiuta a capire: se invece di immaginare l'elettrone come una carica puntiforme lo si pensasse come 2 cariche messe ai punti opposti della traiettoria, la potenza irraggiata sarebbe zero in approssimazione di dipolo. Con n cariche si ha una soppressione maggiore. Nel limite $n \rightarrow \infty$ l'elettrone viene spalmato lungo la sua traiettoria dando una corrente costante che non irraggia più, anche se i singoli pezzi lo farebbero, per via di interferenza distruttiva. (Negli acceleratori ci sono tanti elettroni, ma non sono coerenti).



In meccanica quantistica anche gli elettroni, come i fotoni, sono descritti non da punti ma da campi $\psi(\mathbf{r}, t)$, che soddisfano un'equazione d'onda detta di Schroedinger. Questa equazione d'onda implica che elettroni liberi

hanno lunghezza d'onda $\lambda_e = h/m_e v$ con $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js, come suggerito da de Broglie e sperimentalmente verificato osservando effetti di diffrazione. Aggiungendo un protone si ottiene un'equazione complicata che descrive l'atomo di idrogeno. L'esistenza di stati discreti può essere capita in maniera approssimata: elettroni in atomi formano stati stabili di raggi $2\pi r \sim N\lambda_e$ dove $N = 1, 2, \dots$ è un intero. Il suo valore minimo $N = 1$ corrisponde allo stato base, che esiste in quanto l'elettrone è un'onda che non può collassare a raggi minori della sua lunghezza d'onda.



Quanto scritto sopra ha un grosso problema: gli elettroni sono particelle individuali, non onde. In meccanica quantistica questo è risolto interpretando ψ come ampiezza di probabilità, rinunciando ad una teoria deterministica. Si osserva che sia elettroni che fotoni che ogni altra particella sono contemporaneamente particelle e onde. Ad esempio, illuminando una lastra fotografica con luce di frequenza ν escono elettroni di energia $E = h\nu - E_B$, indipendentemente dall'intensità dell'onda. Una luce intensa ne fa uscire tanti; una luce fioca ne fa uscire pochi, a tempi casuali.

Esercizio 20.5: Forza di una carica su se stessa

Trovare una forza \mathbf{F}_{self} che produca la perdita di energia W_{Larmor} per irraggiamento di una carica puntiforme accelerata.

◀Soluzione: È un problema difficile affrontato in vari lavori che hanno cercato una formula universale che descriva l'effetto dell'irraggiamento su di un irraggiatore carico di dimensione d nel limite di particella puntiforme $d \rightarrow 0$. Esempi concreti di oggetti con geometrie semplici sono: una sfera uniformemente carica di raggio d ; o ancora più semplice una bacchetta di lunghezza d con due cariche $q/2$ alle estremità. La forza totale elettromagnetica che un oggetto esercita su se stesso non è zero tenendo conto che i campi elettrici e magnetici sono dati da formule che contengono tempi e posizioni ritardate, invece di essere il campo Coulombiano statico. La conclusione è che è meglio limitarsi a W_{Larmor} : andando oltre si incontrano questioni complicate la cui comprensione aggiunge poco.

Nel calcolarla per $d \rightarrow 0$ si incontra questa difficoltà: che un oggetto di carica q e dimensione d ha energia elettromagnetica $U \sim q^2/4\pi\epsilon_0 d$ divergente nel limite $d \rightarrow 0$. Nelle equazioni del moto questo termine agisce come una “rinormalizzazione” della massa $m_{\text{fisica}} = m_{\text{bare}} + U/c^2$. Nel limite $d \rightarrow 0$ si ottiene poi un termine finito che non dipende dalla forma del piccolo oggetto, e termini che vanno a zero. Il termine finito è la ‘self-force’ (forza su se stesso) di Abraham-Lorentz.

$$\mathbf{F}_{\text{self}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{x}} = m\tau \dot{\mathbf{x}} \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} = 6.26 \cdot 10^{-24} \text{ s per l'elettrone}$$

e quindi l'equazione del moto

$$m(\ddot{\mathbf{x}} - \tau \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}_{\text{ext}}.$$

Inevitabilmente, per tenere conto dell'irraggiamento, si perde la simmetria $t \rightarrow -t$ dell'equazione di Newton.

Allo stesso \mathbf{F}_{self} si arriva considerando invece una sfera uniformemente carica di raggio d e calcolando indirettamente la forza $\dot{\mathbf{p}}$ come il flusso del tensore energia-impulso della radiazione uscente.

Alla stesso \mathbf{F}_{self} si arriva ancora più rapidamente usando la conservazione dell'energia e qualche assunzione arbitraria: una carica accelerata irraggia e quindi è soggetta ad una auto-forza $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{self}}$ con \mathbf{F}_{self} tale che $W_{\text{self}} = \mathbf{F}_{\text{self}} \cdot \mathbf{v} = -W_{\text{Larmor}}$. Una forza $F_{\text{self}} = -W_{\text{Larmor}}/v \propto a^2/v$ darebbe un'equazione del moto in cui a è data da un'equazione di secondo grado, che ha 0 o 2 soluzioni. Integrando sul tempo, e considerando moti periodici tali che $\langle \ddot{x}^2 \rangle = -\langle \dot{x} \ddot{x} \rangle$ si ottiene $\mathbf{F}_{\text{self}} = \dot{\mathbf{x}} q^2/6\pi\epsilon_0 c^3$, che è la forza di Abraham-Lorentz.



Questa forza ha però un grave problema: un'equazione del moto con più di 2 derivate ammette soluzioni runaway (Ostrogradsky dimostrò che possono essere derivate da Hamiltoniane con energia cinetica di segno indefinito). Lo si può vedere in maniera semplice ma astratta in assenza di forze esterne: un moto libero

possibile è $x \propto e^{t/\tau}$. In maniera più concreta (ma calcolosa), una particella inizialmente ferma, soggetta ad una forza impulsiva a $t = 0$, soddisfa all'equazione $\ddot{x} = \tau \dot{\ddot{x}} + \delta(t)$, la cui soluzione causale è runaway:

$$x = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t + \tau(1 - e^{t/\tau}) & \text{per } t > 0 \end{cases}.$$

In assenza della forza di Abraham-Lorentz ($\tau = 0$) la soluzione per $t > 0$ è $x = t$: una forza impulsiva in su spinge in su. Con la forza di Abraham-Lorentz una forza impulsiva in su spinge in giù: per $t \ll \tau$ si ha $x \simeq -t^2/2\tau$ in quanto \ddot{x} ha una discontinuità e quindi $\dot{\ddot{x}}$ ha la δ di Dirac. Per $\tau \rightarrow 0$ la soluzione non si riduce a quella Newtoniana per $\tau = 0$.

Sommando con coefficiente opportuno la soluzione libera $e^{t/\tau}$ si può ottenere un'altra soluzione senza runaway che per $\tau \rightarrow 0$ si riduce a quella Newtoniana. Però questa soluzione è *acausale*: la carica accelera *prima* dell'applicazione della forza a $t = 0$:

$$x = \begin{cases} \tau e^{t/\tau} & \text{per } t < 0 \\ t + \tau & \text{per } t > 0 \end{cases}.$$

L'equazione del moto di III grado ha bisogno di 3 condizioni iniziali: tornano ad essere 2 se uno impone di escludere moti run-away.¹ Procediamo in questa direzione, trattando una forza generica $F(t)$. Si può effettuare un integrale primo dell'equazione di III grado utilizzando come fattore integrante la soluzione runaway: in termini di $u \equiv e^{-t/\tau} \ddot{x}$ l'equazione del moto diventa $m\dot{u} = -e^{-t/\tau} F/\tau$ risolta da $mu = \int_{t_0}^t dt' e^{-t'/\tau} F(t')/\tau$ in cui t_0 parametrizza la condizione extra. Sostituendo la definizione di u si ottiene l'equazione di secondo ordine acausale

$$m\ddot{x} = \int_t^{t_0} dt' \frac{e^{-(t'-t)/\tau}}{\tau} \mathbf{F}_{\text{ext}}(t') = \int_0^{t_0-t} dt' \frac{e^{-\delta/\tau}}{\tau} \mathbf{F}_{\text{ext}}(t + \delta)$$

in cui si può ottenere la soluzione senza run-away scegliendo $t_0 \rightarrow \infty$. Si ottiene quindi in generale quanto già trovato nell'esempio particolare: senza runaway l'accelerazione al tempo t dipende dalla forza nel futuro. Se F_{ext} varia su scale di tempi molto maggiori di τ piccolo, è possibile espanderla in serie di Taylor ottenendo la “forza di Abraham-Lorentz effettiva” \mathbf{F}_{eff}

$$m\ddot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \frac{d^n \mathbf{F}_{\text{ext}}}{dt^n} \simeq \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{eff}}, \quad \mathbf{F}_{\text{eff}} \equiv \tau \frac{d\mathbf{F}_{\text{ext}}}{dt}.$$

Questi problemi indicano che il limite di carica puntiforme $d \rightarrow 0$ non ha senso (in meccanica quantistica le particelle sono rimpiazzate da onde con lunghezza d'onda). Ha senso preciso un limite più complicato: oggetti di dimensione d finita e molto minore delle altre lunghezze in gioco (fra cui la lunghezza d'onda della radiazione emessa). Gli effetti rilevanti in questo limite sono tenuti in conto dalla “forza di Abraham-Lorentz effettiva” ottenuta intuitivamente rimpiazzando \ddot{x} con $\mathbf{F}_{\text{ext}}/m$ nella forza di Abraham-Lorentz $d(\tau \ddot{x})/dt$. Essendo di secondo grado questa equazione non ha soluzioni runaway.

Per moti periodici l'equivalenza è una banale integrazione per parti; per moti non periodici anche la forza di Abraham-Lorentz effettiva produce risultati strani: vale zero per una particella uniformemente accelerata. Ad esempio una particella carica che entra in un condensatore con campo elettrico uniforme accelera solo all'ingresso ed all'uscita, anche aumentando la sua energia (l'energia totale si conserva in quanto il suo \mathbf{E} riduce quello del condensatore), dando luogo alla fine alla stessa energia irraggiata ottenibile da W_{Larmor} .

Esercizio 20.6: Atomo di Thomson

Calcolare il tempo di rilassamento di un atomo di Thomson eccitato.

⚡Soluzione: Questo modello dell'atomo sbagliato avrebbe uno stato di equilibrio in cui non irraggia, per cui da un punto di vista teorico era favorito rispetto all'atomo di Rutherford. L'equazione del moto di un elettrone spostato di x rispetto al centro è (come discusso nell'esercizio 20.12)

$$m_e \ddot{x} = F = -eE = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{a_0^3}$$

¹Risolvendo con tecniche di Fourier (ovvero scomponendo la forza $\delta(t)$ come combinazione di forze di pulsazione ω , e poi risommandole) si trova

$$x = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 + i\tau\omega^3}.$$

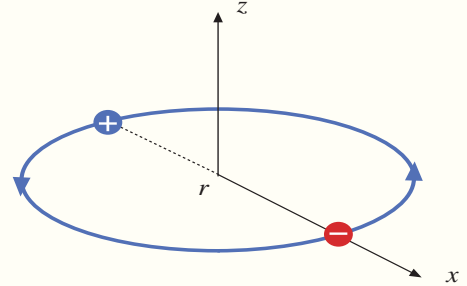
Integrando con il metodo dei residui nel piano complesso ω , la soluzione runaway casuale corrisponde ad integrare sopra i poli; la soluzione acausale corrisponde a passare sotto il polo a $\omega = i\tau$.

per cui oscilla con pulsazione $\omega^2 = e^2/4\pi\epsilon_0 a_0^3 = 1.6 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$ per $a_0 = \text{\AA}$. L'energia media dell'atomo vale $\langle E \rangle = 2\langle K \rangle = m_e v^2 = m_e (\omega x_0)^2$. Il tempo di rilassamento vale $\tau \sim E/W = 6\pi m_e \epsilon_0 c^3 / e^2 \omega^2 \approx 6 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.

Esercizio 20.7: Decadimento del positronio ©

Il positrone e^+ è una particella di massa m_e uguale a quella dell'elettrone e carica $+e$ di segno opposto. Un atomo di positronio è formato da un elettrone e da un positrone in orbita circolare a distanza iniziale d_0 . Calcolare:

- la pulsazione ω ;
- La polarizzazione della radiazione irraggiata lungo x e lungo z ;
- L'energia irraggiata in un giro. La si confronti con l'energia dell'atomo.



- Assumendo che l'atomo irraggiando spiraleggi lentamente, calcolare il tempo τ necessario per raggiungere $d = 0$. Confrontandolo con il valore sperimentale $\tau = 6.2 \cdot 10^{-11} \text{ s}$ determinare d .

➤ Soluzione:

- Nel sistema del centro di massa sia e^\pm fanno orbite circolari con $\mu \omega^2 r/2 = e^2/4\pi\epsilon_0 d^2$ dove $\mu = m_e/2$ è la massa ridotta e $d = 2r$. Quindi ω^2 è 2 volte maggiore che nell'idrogeno.
- Come nel caso dell'idrogeno, la polarizzazione è circolare lungo z e lineare lungo x . Infatti un osservatore da z vede due cariche girare, mentre da x le vede oscillare lungo una retta.
- Il dipolo $p = ed$ gira con pulsazione ω . Quindi $W_{\text{irr}} = \omega^4 p^2 / 6\pi\epsilon_0 c^3$. L'energia dell'atomo vale

$$E = 2 \frac{m_e}{2} (\omega r)^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d}.$$

A parte i fattori due, la situazione è simile a quella dell'atomo di idrogeno: l'energia irraggiata in un periodo T è $W_{\text{irr}} T \sim (v/c)^3 E$.

- Analogamente all'atomo di idrogeno, l'atomo di positronio spiraleggia con $d(t)$ dato da

$$\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 d^2} \dot{d} = \dot{E} = -W_{\text{irr}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 m_e d^2} \right)^2 \Rightarrow \dot{d} = \frac{16}{3} \frac{r_e^2}{d^2} c$$

dove $r_e \equiv e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ è il raggio classico dell'elettrone. Quindi

$$\frac{d(d^3)}{dt} = 16r_e^2 c \Rightarrow d^3(t) = d_0^3 - 16r_e^2 c t$$

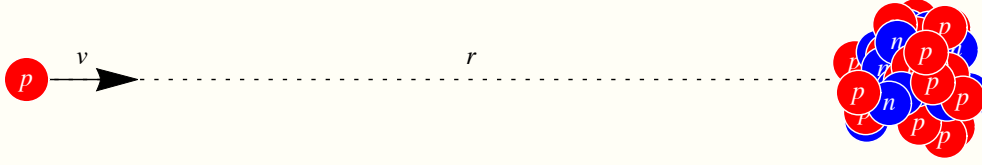
raggiunge $d = 0$ dopo un tempo $\tau = d_0^3 / 16r_e^2 c$. Confrontando con il valore sperimentale si trova $d_0 = (16r_e^2 c \tau)^{1/3} = 1.3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Per motivi quantistici, il tempo di decadimento fluttua attorno ad un valore medio calcolabile tramite meccanica quantistica.

Esercizio 20.8: Scattering protone/nucleo

L'esperimento di Rutherford mostra che una carica leggera che urta su nuclei pesanti di atomi può venire anche rimbalzato all'indietro. Mostriamo che era corretto trascurare l'irraggiamento. Un protone con velocità iniziale $v \ll c$ urta un nucleo fermo di carica $Z \gg 1$. L'urto è frontale, cioè il parametro d'impatto vale $b = 0$. Calcolare

la polarizzazione della radiazione emessa in direzione \mathbf{n} e l'energia totale irraggiata, assumendo e verificando che sia una piccola frazione dell'energia cinetica iniziale K_0 .



▲Soluzione: La radiazione irraggiata in direzione \mathbf{n} ha campo elettrico $\mathbf{E}_{\text{irr}} \propto \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})$, polarizzato linearmente nel piano (\mathbf{n}, \mathbf{a}) ed ortogonale ad \mathbf{n} . L'accelerazione vale $a = F/m_p = Ze^2/4\pi\epsilon_0 r^2$. La potenza irraggiata vale

$$W_{\text{irr}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} a^2 = \frac{A}{r^4} \quad \text{con} \quad A = \frac{e^6 Z^2}{96 m_p^2 (c\pi\epsilon_0)^3}.$$

L'energia irraggiata vale

$$E_{\text{irr}} = \int W_{\text{irr}} dt = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{W_{\text{irr}}}{v(r)} dr = \frac{8}{45} \frac{m_p v_0^5}{c^3 Z} \quad \text{i.e.} \quad \frac{E_{\text{irr}}}{K_0} = \frac{16}{45Z} \left(\frac{v_0}{c} \right)^3$$

dove $K_0 \equiv m_p v_0^2/2$ è l'energia cinetica iniziale. L'integrale sopra richiede un passaggio non banale, che ora descriviamo. Usando la conservazione approssimata dell'energia si ha

$$v(r) = \sqrt{v_0^2 - \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_p r}} = \sqrt{v_0^2 - \frac{B}{r}}, \quad r_{\min} = \frac{B}{v_0^2}, \quad B = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_p}.$$

L'integrale vale

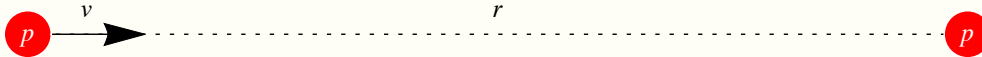
$$\int_{B/v_0^2}^{\infty} \frac{dr}{r^4 \sqrt{v_0^2 - B/r}} = \frac{v_0^5}{B^3} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 - 1/x}} = \frac{16}{15} \frac{v_0^5}{B^3}$$

avendo usato la variabile di integrazione adimensionale $x = r/r_{\min}$. Il fattore numerico $16/15$ è calcolabile usando $y = 1 - 1/x$ come variabile di integrazione. A parte il fattore numerico $16/15$, è importante stimare che il risultato segue in modo semplice dal fatto che l'integrale è dominato da $r \gtrsim r_{\min}$, e quindi $E_{\text{irr}} \sim W_{\text{irr}} r_{\min}/v_0 \sim A/r_{\min}^3 v_0 \sim A v_0^5/B^3$. Notare che $E_{\text{irr}} \propto 1/Z$ in quanto per $Z \gg 1$ il protone rimane lontano dal nucleo, $r_{\min} \propto Z$.

Ad esempio, l'energia cinetica irraggiata da un protone (massa $m_p \approx \text{GeV}/c^2$) di energia cinetica $K_0 \approx \text{MeV}$ che urta su di un nucleo di ossigeno ($Z = 8$) vale circa $E_{\text{irr}} \sim K_0(v/c)^3/Z \sim \text{MeV}(\text{MeV}/\text{GeV})^{3/2}/8 \sim \text{eV}$. È importante sapere fare stime rapide, ma a volte si rischia di sbagliare...

Esercizio 20.9: Scattering protone/protone

L'energia irraggiata in un urto di un protone con un altro protone è correttamente stimata mettendo $Z = 1$ nella risposta dell'esercizio precedente?



▲Soluzione: Nell'esercizio precedente il nucleo era molto più pesante del protone e quindi rimaneva circa fermo. A prima vista avere due particelle di massa uguale cambia solo qualche fattore di $\mathcal{O}(1)$ che tiene conto della massa ridotta e del fatto che irraggiano entrambe. *Sbagliato.* C'è una differenza qualitativa importante. Il 'dipolo elettrico totale' dei due protoni è proporzionale al loro 'centro di massa'

$$\mathbf{p} = e\mathbf{r}_1 + e\mathbf{r}_2 = 2e\mathbf{r}_{\text{CM}} \quad \mathbf{r}_{\text{CM}} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$$

e quindi è costante. In approssimazione 'di dipolo' non c'è irraggiamento. Più in generale, il dipolo elettrico è una specie di "centro di carica" analogo al "centro di massa"

$$\mathbf{X}_q = \frac{\sum_i q_i \mathbf{r}_i}{\sum_i q_i}, \quad \mathbf{X}_m = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$$

e i due centri coincidono per sistemi composti da particelle con cariche e masse uguali, come due protoni.

Per calcolare l'energia irraggiata bisogna andare oltre l'approssimazione di dipolo. Entrambi i protoni accelerano, ma c'è un'interferenza distruttiva fra i loro contributi. Siccome sono messi in posizioni diverse hanno diversi tempi ritardati e la cancellazione non è totale. Chiamando δ la distanza ed ignorando dettagli geometrici si ha $\ddot{x}(t+r/c) - \ddot{x}(t) \simeq \dot{\ddot{x}}r/c$, cioè compare una ulteriore derivata ed una ulteriore c al denominatore. La potenza irraggiata può essere calcolata con precisione approssimando il sistema di due cariche in posizione $\vec{r}_{1,2} = \pm(r, 0, 0)/2$ come un quadrupolo elettrico

$$Q_{ij} \equiv \sum_n q_n [3r_{in}r_{jn} - r_n^2 \delta_{ij}] = er^2 \text{diag}(1, -1/2, -1/2), \quad Q_{ij}Q_{ij} = 6q^2r^4.$$

La potenza irraggiata vale

$$W_{\text{irr}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{c^3} + \frac{\dot{\ddot{Q}}^2}{360c^5} + \dots \right] = \frac{q^2(r\dot{\ddot{x}} + 3\dot{r}\ddot{x})^2}{120\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{e^6 \dot{r}^2}{120\pi^3 \epsilon_0^3 m_p^2 c^5 r^4}$$

avendo usato l'equazione del moto $\mu\ddot{r} = F = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ con massa ridotta $\mu = m_p/2$. L'energia irraggiata vale

$$E_{\text{irr}} = \int W_{\text{irr}} dt = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} W \frac{dr}{\dot{r}} = K_0 \frac{32v_0^5}{1575c^5}$$

dove $K_0 = 2m_p v_0^2/2$. Quindi $E_{\text{irr}}/K_0 \sim (v_0/c)^5 \ll (v_0/c)^3$.

Esercizio 20.10: Onde gravitazionali

Stimare la potenza irraggiata in onde gravitazionali.

◀Soluzione: Gli esercizi precedenti invitano ad una digressione sull'irraggiamento di onde gravitazionali, dove si ha un fenomeno analogo all'irraggiamento con $1/\epsilon_0 \rightarrow G$ e $q \rightarrow m$:

$$W_{\text{irr(e.m.)}} \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\ddot{P}^2}{c^3} + \frac{\dot{\ddot{Q}}^2}{c^5} + \dots \right] \quad \rightarrow \quad W_{\text{irr(gravitazionale)}} \sim G \left[\frac{\ddot{P}^2}{c^3} + \frac{\dot{\ddot{Q}}^2}{c^5} + \dots \right]$$

Nel caso gravitazionale l'irraggiamento da dipolo è sempre zero in quanto l'impulso totale è costante del moto. (In linguaggio profondo ma per ora incomprensibile il gravitone ha spin 2, mentre il fotone ha spin 1). L'irraggiamento da quadrupolo può essere stimato come

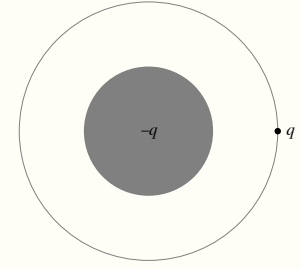
$$W_{\text{irr}} \sim \frac{W_{\text{int}}^2}{W_0} \quad \text{dove} \quad W_0 = \frac{c^5}{G} = 3.62 \cdot 10^{52} \text{ Watt}$$

e quindi $W_{\text{int}} \equiv \dot{\ddot{Q}}$ ha le dimensioni di potenza ed il significato fisico di potenza interna (non sferica) del sistema. Per due corpi che ruotano l'uno attorno all'altro con velocità v per via della gravità, per motivi dimensionali si ha $W_{\text{int}} \sim v^5/G$, e quindi $W_{\text{irr}} \sim W_0(v/c)^{10}$. Ad esempio due corpi di masse M in orbita a distanza R l'uno dall'altro sentono una forza $F \sim GM^2/R^2$ ed hanno velocità data da $Mv^2/R \sim F$: quindi, eliminando $M \sim v^2 R/G$ si ottiene $W_{\text{int}} \sim Fv \sim v^5/G = W_0(v/c)^5 < W_0$ in quanto $v < c$ (quando si raggiunge $v \sim c$ il sistema collassa in un buco nero). La costante universale W_0 ha quindi il significato fisico di massima potenza possibile.

Nel caso del sistema Terra/Sole, bisogna tenere conto che hanno masse diverse: $\epsilon = M_T/M_S \sim 10^{-6}$. Questo produce $W_{\text{int}} = \epsilon W_0(v/c)^5$. Essendo $v/c \approx 10^{-4}$ la potenza irraggiata in onde gravitazionali è $W_{\text{irr}} \sim \epsilon^2(v/c)^{10} W_0 \sim \text{Watt}$: meno di una lampadina. A differenza dell'analogo elettromagnetico nell'atomo di idrogeno non è un fenomeno preoccupante. Per irraggiare gravitazionalmente la sua energia $\sim M_T v^2 \sim 10^{33} \text{ J}$ la Terra impiega 10^{30} s , un tempo 10^{13} volte maggiore dell'età dell'universo.

Esercizio 20.11: Carica e sfera conduttrice ©

Una carica elettrica puntiforme q di massa m ruota in orbita circolare a distanza r dal centro di una sfera isolata di carica totale $-q$ e raggio $R = r/2$ ferma nell'origine. Il sistema è non relativistico.



- a) Assumendo che la carica $-q$ sia distribuita uniformemente sulla superficie della sfera, calcolare la forza F agente sulla carica q , la velocità angolare ω e la potenza W_{irr} irraggiata dal sistema.

Assumendo ora che la sfera sia perfettamente conduttrice:

- b) Descrivendo un opportuno sistema di cariche immagine, calcolare la forza F' agente sulla carica q , scrivendo il valore di F'/F .
- c) Calcolare il dipolo elettrico totale p del sistema e la sua velocità angolare ω' .
- d) Calcolare la potenza W'_{irr} irraggiata dal sistema, scrivendo il valore di $W'_{\text{irr}}/W_{\text{irr}}$.

✚ **Soluzione:**

- a) Si ha $F = -q^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ e $W_{\text{irr}} = q^6/96\pi^3\epsilon_0^3 c^3 m^2 r^4$.
- b) Il campo elettrico è quello dato da una carica immagine $q' = -qR/r = -q/2$ situata a distanza $r' = R^2/r = R/2$ dal centro, e da una carica $-q - q' = -q/2$ nel centro in maniera che la carica totale della sfera conduttrice sia $-q$. La forza totale vale

$$F' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q'}{(r-r')^2} - \frac{q+q'}{r^2} \right] = \frac{25}{18} F$$

ed è $F' > F$ in quanto q attira parte di $-q$.

- c) Il sistema forma un dipolo di modulo $p = qr + q'(r-r') = 7qr/8$ ruotante con velocità angolare $mr\omega'^2 = F'$ e quindi $\omega'^2/\omega^2 = F'/F = 25/18$.
- d) La potenza irraggiata vale $W'_{\text{irr}} = \ddot{p}^2/6\pi\epsilon_0 c^3$ con $\ddot{p} = -\omega'^2 p$, quindi $W'_{\text{irr}}/W_{\text{irr}} = (7/8)^2 (25/18)^2 \approx 1.47$.

Esercizio 20.12: Scattering elettrone/fotone

Calcolare la sezione d'urto (di 'Thomson') e stimare quando l'universo è diventato trasparente.

✚ **Soluzione:** Un'onda elettromagnetica dà accelerazione $a = q_e E/m$ ad un elettrone libero, che quindi irraggia con potenza $W = q_e^2 a^2/6\pi\epsilon_0 c^3$. Un modo standard per dire quanta parte dell'energia incidente S viene irraggiata è dare un'area σ che dice quando è 'grande' l'elettrone rispetto a questa interazione: la luce che finisce dentro questa area σ viene presa dall'elettrone e irraggiata. In fisica delle particelle, σ viene chiamata 'sezione d'urto' del processo $e\gamma \rightarrow e\gamma$. Usando $B = E/c$ si trova

$$\sigma \equiv \frac{W}{S} = \frac{q_e^2 (q_e E/m_e)^2/6\pi\epsilon_0 c^3}{\epsilon_0 c^2 E B} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$$

dove $r_e = q_e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ è detto 'raggio classico dell'elettrone'. Questa formula vale solo se si può trascurare il rinculo dell'elettrone, cioè per fotoni di energie $E_\gamma \lesssim m_e c^2$, quindi fino a raggi γ . I protoni hanno massa molto maggiore degli elettroni, e quindi il loro irraggiamento è trascurabile.

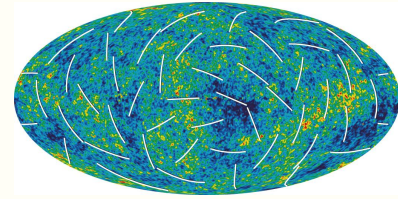
Consente di calcolare il cammino libero medio $L = 1/n_e \sigma = 25 \text{ km} (N_A/n_e \text{ m}^3)$ di un'onda in una nube contenente una densità n_e di elettroni liberi che oscillano in maniera incoerente.

Applicazione all'universo primordiale. Oggi la densità media di elettroni è $n_e^0 = 0.25/\text{m}^3$: uno ogni 4 metri cubi. Quindi il cammino libero medio di un fotone è quindi $1/n_e^0 \sigma = 6 \cdot 10^{28} \text{ m}$ ed il tempo di interazione medio è $1/n_e^0 \sigma c = 2 \cdot 10^{20} \text{ sec} = 6 \cdot 10^{12} \text{ yr}$. Siccome l'età dell'universo è oggi $T_0 = 10^{10} \text{ yr}$, la luce si propaga praticamente libera. L'universo è oggi trasparente.

In passato l'universo aveva 'raggio' più piccolo: $R < R_0$, e quindi la densità di elettroni era più alta di un fattore $(R_0/R)^3$, e l'universo si espandeva più velocemente: $H \equiv \dot{R}/R = \sqrt{8\pi G\rho/3}$ con $\rho \propto 1/R^3$.² Quindi, confrontando il rate di collisioni con il rate di espansione si trova $n_e c\sigma/H \propto (R_0/R)^{3/2}$: l'universo non era trasparente alla luce quando aveva un 'raggio' R circa 50 volte più piccolo di oggi. Un calcolo preciso tiene conto che solo parte degli elettroni sono elettroni liberi (gli altri formano atomi di idrogeno, elio, ...) e dice che la luce si è disaccoppiata dalla materia quando l'universo era 1000 volte più piccolo, ed aveva un'età di 300000 anni. Per cui osservando la radiazione cosmica di fondo oggi, vediamo una foto di quando l'universo aveva 300000 anni. Quello che si vedono sono piccole fluttuazioni primordiali ($\delta T/T \sim 10^{-5}$, probabilmente prodotte da fluttuazioni quantistiche amplificate dall'inflazione), che amplificandosi per via della gravità sono diventate le galassie etc che esistono oggi.

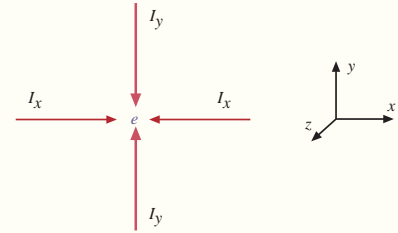
Esercizio 20.13: Radiazione cosmica

Misure della radiazione cosmica di fondo (CMB) hanno mostrato che essa ha diverse intensità in diversi punti del cielo (vedi figura superiore). La CMB che osserviamo è stata irraggiata da elettroni e protoni liberi, finché si sono legati a formare atomi di idrogeno neutro rendendo trasparente l'universo. Nell'esercizio si affronta un caso semplificato, che consente di capire se, come conseguenza di questi fatti, la CMB è polarizzata.



- a) Come mai si può trascurare la CMB diffusa dai protoni?
- b) Un'onda elettromagnetica non polarizzata si propaga lungo l'asse \mathbf{n} incidendo su di un elettrone libero situato nell'origine. Si descriva come è polarizzata la radiazione irraggiata misurata da un osservatore situato lungo l'asse z nei tre casi: $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$.

Si calcoli il grado di polarizzazione (misurata da un osservatore situato lungo l'asse z) della radiazione irraggiata da un elettrone e investito da:



- c) Radiazione isotropa e non polarizzata.
- d) Onde elettromagnetiche provenienti dalle direzioni $\pm\hat{\mathbf{x}}$ con intensità I_x e dalle direzioni $\pm\hat{\mathbf{y}}$ con intensità I_y (vedi figura inferiore).

✎Soluzione:

- a) La potenza irraggiata è proporzionale ad $a^2 = (F/m)^2$; protoni ed elettroni sentono la stessa forza $F = qE$, ma i protoni hanno massa $m_p \gg m_e$.
- c) Se $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{x}}$ l'osservatore riceve luce polarizzata lungo $\hat{\mathbf{y}}$: l'osservatore 'vede' l'elettrone oscillare lungo l'asse y , e questo, secondo le formule che descrivono l'irraggiamento, produce radiazione polarizzata lungo y . Similmente se $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{y}}$ l'osservatore riceve luce polarizzata lungo $\hat{\mathbf{x}}$. Se $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{z}}$ non si ha irraggiamento lungo $\hat{\mathbf{z}}$.

² Calcoliamo la rate $H(t)$ di espansione dell'universo in funzione della densità $\rho(t)$ di energia. Studiamo come una densità omogenea $\rho(t)$ di materia non-relativistica si evolve secondo la gravità. Una particella a distanza R da noi sente l'accelerazione di Newton

$$\ddot{R} = -\frac{GM(R)}{R^2} = -\frac{4\pi G\rho(t)}{3}R \quad (20.2)$$

dove $M(R)$ è la massa totale all'interno di una sfera del raggio R e G è la costante di Newton. Moltiplicando entrambi i lati di eq. (20.2) per \dot{R} ed integrando, tenendo conto che $\rho(t) \propto 1/R^3(t)$ si ottiene l'usuale costante del moto: l'energia totale, qui chiamata k

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{R}^2 - \frac{4\pi}{3} G\rho R^2 \right] = 0 \quad \text{so that} \quad H^2 \equiv \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2}. \quad (20.3)$$

Il caso speciale $k = 0$ è ottenuto quando la densità ρ è uguale alla 'densità critica' $\rho = \rho_{cr} \equiv 3H^2/8\pi G$. $k = 0$ è speciale perché significa zero 'energia totale' (l'energia potenziale gravitazionale negativa compensa l'energia positiva della materia): un universo con densità critica che si espande diventando grande gratis avrebbe potuto venir teoricamente anticipato fin dal 1687. Oggi i pregiudizi su di un universo statico sono stati abbandonati, e teorie più avanzate confermano la discussione sopra dandole basi solide: in relatività generale l'eq. (20.3) vale per qualunque forma di energia (particelle relativistiche, costante cosmologica,...) e la costante k ha il significato fisico di 'curvatura dell'universo'. Un meccanismo chiamato inflazione genera un universo quasi omogeneo con k trascurabile.

- c) Non esistendo nessuna direzione privilegiata, non si ha polarizzazione.
- d) Le onde di intensità I_x producono lungo z una radiazione irraggiata di intensità $I_z(I_x) \propto I_x$ e polarizzazione lungo y . Similmente le onde di intensità I_y producono lungo z una radiazione irraggiata di intensità $I_z(I_y) \propto I_y$ e polarizzazione lungo x . Se $I_x = I_y$ la polarizzazione totale si media a zero, come nel caso isotropo (e non dà una polarizzazione media a 45 gradi!). Quindi il grado di polarizzazione è $|I_x - I_y|/(I_x + I_y)$: massimo nei casi limite $I_y \ll I_x$ o $I_x \ll I_y$.

Esercizio 20.14: Ionosfera ☺

Semplificando un po' la situazione reale, l'atmosfera ad altezza maggiore di $z = 100$ km costituisce un plasma di elettroni ionizzati dalla luce solare e da raggi cosmici detto 'ionosfera'. Si osserva che onde elettromagnetiche emesse da terra con lunghezza d'onda maggiore di $\lambda_p = 10$ m vengono completamente riflesse dalla ionosfera.

- a) Determinare la densità degli elettroni ionizzati.
- b) Una stazione radio situata a terra emette una potenza $W = 10$ kW in modo isotropo. Determinare l'intensità I della radiazione ricevuta da un ascoltatore che, situato per terra a distanza $d = 200$ km dalla stazione radio, riceve l'onda riflessa una volta dalla ionosfera.
- c) Si risponda nuovamente alla domanda precedente assumendo che la potenza W sia ora emessa in modo non isotropo da una antenna, schematizzata come un dipolo oscillante perpendicolare alla superficie terrestre. A quale distanza d si riceve un'onda, riflessa una volta dalla ionosfera, con intensità massima?

Si ignori la curvatura della terra. Si assuma che l'onda diretta sorgente \rightarrow ascoltatore sia schermata da una montagna, e la si ignori. Si diano valori numerici.

✎ **Soluzione:**

- a) Frequenze minori della frequenza di plasma $\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / \epsilon_0 m_e}$ vengono riflesse, in quando l'indice di rifrazione $n = \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}$ diventa immaginario. Da $\omega_p = 2\pi c / \lambda_p = 0.2$ GHz si trova $n_e \sim 10^{13} / \text{m}^3$.
- b) L'intensità I decresce con la distanza r secondo $I = W / 4\pi r^2$. La distanza percorsa dalla radiazione vale $r = 2\sqrt{z^2 + (d/2)^2} = 282$ km (il fatto che l'onda faccia un rimbalzo non cambia la dipendenza $I \propto r^{-2}$, come si può intuitivamente vedere disegnando una 'sorgente immagine' situata 100 km sopra la ionosfera). Quindi $I = 10^{-8} \text{ W/m}^2$.
- c) Un dipolo irraggia in maniera non isotropa descritta dalla formula $I = 3W \sin^2 \theta / 8\pi r^2$ con $\sin \theta = d/r$. Quindi $I \propto d^2 / (d^2 + 4z^2)^2$, massimo a $d = 2z = 200$ km.

Esercizio 20.15: Irraggiamento da condensatore

Calcolare l'energia irraggiata da un condensatore con distanza fra i piatti ℓ connesso ad un generatore di corrente $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$.

✎ **Soluzione:** Il condensatore schematizza una antenna, evitando dettagli geometrici. Per calcolare l'irraggiamento lo si approssima come un dipolo $p = \ell q$, $\dot{p} = \ell I$, $\ddot{p} = i\omega \ell I$ e quindi

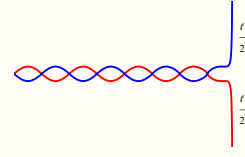
$$\langle W \rangle = \frac{\langle \ddot{p}^2 \rangle}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{I_0^2}{2} R_{\text{rad}} \quad R_{\text{rad}} = \frac{(k\ell)^2}{6\pi\epsilon_0 c} \approx (k\ell)^2 \text{ 20 ohm}$$

avendo usato $\omega/c = k$ e $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega$. L'antenna dissipa energia: da un punto di vista circuitale è come se avesse una resistenza R_{rad} .

La combinazione adimensionale $k\ell$ è circa il numero di lunghezze d'onda contenute in ℓ . L'approssimazione di dipolo è valida se $\ell \ll \lambda$, dove ℓ è la dimensione dell'antenna e λ la lunghezza dell'onda irraggiata. Segnali TV hanno $\lambda \sim (10 \div 100)$ m.

Esercizio 20.16: Irraggiamento da antenna

Due fili percorsi da correnti opposte vengono attorcigliati (per evitare irraggiamento) e poi piegati a formare un tratto rettilineo, disposto lungo l'asse z da $-\ell/2$ a $\ell/2$. È complicato calcolare la corrente risultante, che deve essere zero sulle estremità a $z = \pm\ell/2$, e che viene spesso approssimata come $I(z, t) = I_0 e^{-i\omega t} (1 - 2|z|/\ell)$. Calcolare a) il dipolo elettrico effettivo; b) la potenza irraggiata in base alla formula di Larmor.

**➤Soluzione:**

- a) Il dipolo è dato da $p(t) = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \lambda(z) z dz$ dove $\lambda(z)$ è la distribuzione lineare di carica, che va calcolata. La conservazione della corrente fornisce una densità di carica costante in ciascun filo

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{2I_0 e^{i\omega t}}{\ell} f(z) \quad \text{dove} \quad f(z) = \begin{cases} 0 & z < -\ell/2 \\ -1 & -\ell/2 < z < 0 \\ +1 & 0 < z < \ell/2 \\ 0 & z > \ell/2 \end{cases}$$

da cui $\lambda = i\dot{\lambda}/\omega$. Si ha quindi un dipolo $p = iI_0 \ell e^{i\omega t}/2\omega$.

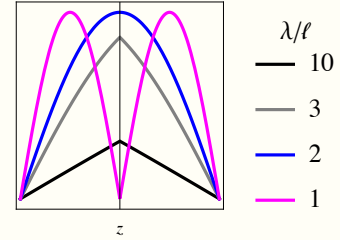
- b) La potenza irraggiata vale quindi $W = \dot{p}^2/6\pi\epsilon_0 c^3$ che può essere scritta come $\langle W \rangle = R_{\text{rad}} I_0^2/2$ dove R_{rad} è la resistenza effettiva dell'antenna, $R_{\text{rad}} = \omega^2 \ell^2/12\pi c^3 \epsilon_0 = Z_0 \pi \ell^2/6\lambda^2$ dove $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega$.

Esercizio 20.17: Irraggiamento da corrente sinusoidale

Si può dimostrare (si veda Jackson 9.4) che nel limite ideale di antenna conduttrice rettilinea di spessore zero la corrente è data da

$$I(z, t) = I(z) e^{-i\omega t}, \quad I(z) = I_0 \sin \left[k \left(\frac{\ell}{2} - |z| \right) \right], \quad I(0) = I_0 \sin \frac{k\ell}{2}.$$

La formula viene anche usata come approssimazione più realistica della funzione lineare considerata nell'esercizio precedente, a cui si riduce per $\lambda \gg \ell$. Hanno interesse i casi speciali di antenna a mezza onda $\ell = \lambda/2$ ed ad onda intera $\ell = \lambda$. a) Calcolare nuovamente la radiazione emessa in approssimazione di dipolo elettrico. b) Discutere il regime di validità dell'approssimazione di dipolo elettrico. c) Calcolare la radiazione emessa andando oltre l'approssimazione di dipolo elettrico.

**➤Soluzione:**

- a) Calcoliamo il dipolo, generalizzando quanto visto all'esercizio precedente, per una generica $I(z, t)$ che vale zero ai bordi:

$$\dot{p} = \int dz z \dot{\lambda} = - \int dz z \frac{dI}{dz} = \int dz I(z)$$

avendo integrato per parti usando che la corrente vale zero ai bordi. Inserendo ora la corrente $I(z)$ sinusoidale si ottiene

$$\dot{p} = 2 \int_0^{\ell/2} dz I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\ell}{2} - z \right) \right] = I_0 \frac{\lambda}{\pi} \left[1 - \cos \frac{\pi\ell}{\lambda} \right], \quad \mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu_0 e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}.$$

- b) La formula generale per il potenziale vettore in zona di radiazione generato da sorgente con pulsazione ω

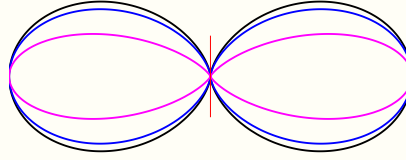
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mu_0 e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \int d^3 r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \exp(-ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')$$

mostra che per $\lambda \gg \ell$ l'esponenziale può essere approssimato come uno, ottenendo l'approssimazione di dipolo, $\int d^3 r' \mathbf{J} = \dot{\mathbf{p}}$.

c) Andando oltre l'approssimazione di dipolo si ottiene

$$\mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{z}}\mu_0 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r} \int_{-z/2}^{+z/2} dz I(z) e^{-ikz \cos \theta} = \frac{\hat{\mathbf{z}}\mu_0 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r} \frac{I_0 \lambda}{\pi \sin^2 \theta} \left[\cos \left(\frac{\pi \ell}{\lambda} \cos \theta \right) - \cos \left(\frac{\pi \ell}{\lambda} \right) \right]$$

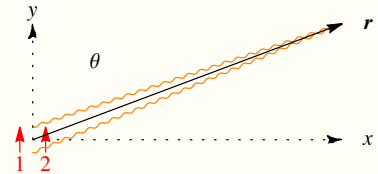
La figura mostra l'intensità $dW/d\Omega \propto |A|^2 \sin^2 \theta$ della radiazione emessa ad angolo θ rispetto all'antenna verticale, assumendo intensità comune a $\theta = \pi/2$:



L'emissione da antenna a mezza onda è poco più stretta che nel limite di dipolo. L'emissione da antenna ad onda intera è significativamente più stretta, ed una buona approssimazione può essere ottenuta includendo il quadrupolo.

Esercizio 20.18: Due antenne

Due antenne piccole rispetto alla lunghezza d'onda λ della radiazione irraggiata sono situate a distanza $\Delta x = d$ e sono approssimabili come dipoli elettrici $p(t)$ orientati lungo l'asse y che oscillano con pulsazione ω e ritardo di fase Δ fra una e l'altra. a) Calcolare la potenza $dW/d\Omega$ irraggiata ad angolo θ rispetto all'asse y . b) Mostrare che per $\Delta = 0$, $d = \lambda/2$ si ottiene interferenza distruttiva lungo l'asse $\pm x$. c) Mostrare che per $\Delta = \pi/2$, $d = \lambda/4$ si ottiene interferenza distruttiva verso $-x$ e costruttiva verso $+x$. d) Stimare l'impulso irraggiato. e) Cosa cambia se le antenne hanno potenze W_1 e W_2 generiche?



➤Soluzione: Il campo elettrico irraggiato è la somma dei campi elettrici irraggiati dalle singole antenne. Prendendo solo la componente di radiazione dei campi (cioè quella che va a zero come $E \propto 1/r$ e non più veloce) l'unico punto in cui bisogna tenere conto della differente geometria fra le due sorgenti è la *differenza di fase* δ per la radiazione ricevuta da un'osservatore situato a grande distanza ed angolo θ . Per $r \gg d$ si ha $r_1 - r_2 \simeq d \sin \theta$. Quindi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \simeq \mathbf{E}_1 z \quad \text{dove} \quad z \equiv 1 + e^{i\delta} \quad \text{e} \quad \delta = \Delta + \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

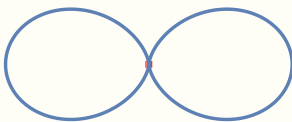
è uguale alla differenza di fase fra i dipoli, più un contributo che dipende dalla posizione \mathbf{r} dell'osservatore (che riceve prima la radiazione dell'antenna più vicina).

a) La potenza irraggiata vale

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{dW_1}{d\Omega} \times |z|^2 = \frac{\sin^2 \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}^2}{c^3} 4 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

La potenza irraggiata in funzione della direzione può essere visualizzata nel modo usuale: plottando la funzione $f(\theta)$ su di un cerchio. Il plot a sinistra nella figura è l'usuale antenna, i pannelli successivi considerano i valori di Δ e di d indicati ai punti b) e c).

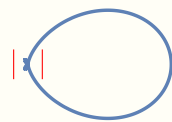
$$\Delta = 0, d = 0$$



$$\Delta = 0, d = \lambda/2$$



$$\Delta = \pi/2, d = \lambda/4$$



b) Scegliendo $d = \lambda/2$ si ottiene interferenza distruttiva lungo l'asse x (in quanto le due onde hanno ritardo di fase di mezzo periodo) e quindi un quadrifoglio.

- c) Aggiungendo una differenza di fase Δ si ottiene un'irraggiamento non simmetrico. Sono stati scelti i valori che massimizzano l'asimmetria, avendo irraggiamento zero verso sinistra (contro-fase $1/4 + 1/4$) e massimo verso destra (antenne in fase, $1/4 - 1/4$). La figura e le formule danno l'irraggiamento nel piano xy ma non verso z . In 3 dimensioni si ha $r_1 - r_2 = dx/r = d \sin \theta \cos \varphi$, che vale 0 lungo la direzione z . In tale direzione la differenza di fase è $\delta = \Delta$, che corrisponde a nessuna interferenza: $W_z = W_1 + W_2$. L'esercizio successivo mostra come ottenere irraggiamento in una sola direzione.

- d) Quando l'emissione non è simmetrica viene irraggiato anche un momento dp_x/dt e quindi il sistema è soggetto ad una forza

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} \sim \frac{W}{c}.$$

Non calcoliamo il fattore di ordine uno in quanto la stima mostra che l'effetto è piccolo per via dell' $1/c$: se $W \sim 10^5$ W la forza vale $F_x \sim W/c \sim 10^{-4}$ N.

- e) La potenza irraggiata è proporzionale a $|E_1 + E_2 e^{i\delta}|^2$, dove ora $E_1 \neq E_2$, quindi:

$$W_{1+2} = W_1 + W_2 + 2\sqrt{W_1 W_2} \cos \delta.$$

Ricordando che campi complessi sono un trucco per ottenere soluzioni 'a regime', lo stesso risultato può essere ottenuto usando il campo fisico reale $E = \text{Re}(E_1 + E_2 e^{i\delta})e^{i\omega t}$: mediando sul tempo per un periodo $T = 2\pi/\omega$ o un suo multiplo si ottiene

$$\langle E^2 \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T dt [E_1 \cos(\omega t) + E_2 \cos(\omega t + \delta)]^2 = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos \delta).$$

Il termine di interferenza si media a zero se la fase relativa δ assume grandi valori casuali (ad esempio due diverse frequenze o canali). Più in generale, il fasore $z = E_1 + E_2 e^{i\delta}$ ha modulo $|z|^2$ che non dipende dal tempo, dato da $|z|^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$ dove i due termini hanno uguale media temporale. Si ha quindi $\text{Re}(z)^2 = \frac{1}{2}|z|^2$.

Esercizio 20.19: Tre antenne ©

Una antenna è approssimabile come tre dipoli elettrici situati lungo l'asse y nelle posizioni $y_n = nd$ per $n = \{-1, 0, 1\}$ ed orientati lungo l'asse z . I dipoli hanno eguali ampiezze p ed oscillano con pulsazione ω e differenze di fasi Δ_- e Δ_+ rispetto al dipolo centrale. In formule: $\mathbf{p}_n(t) = \hat{\mathbf{z}} p \cos(\omega t + \Delta_n)$ con $\Delta_0 = 0$.

- Se $\Delta_{\pm} = 0$, in quale direzione si ha massima intensità I_{\max} dell'onda irraggiata e quanto vale tale potenza?
- Per quali valori di Δ_{\pm} si ha massima potenza I_+ irraggiata lungo il verso positivo dell'asse y ?
- Per tali valori di Δ_{\pm} , per quale d si ha minima potenza I_- irraggiata lungo il verso negativo dell'asse y , e quanto vale I_-/I_+ ?
- Per quali valori di Δ_{\pm} si ha interferenza totalmente distruttiva lungo il verso negativo dell'asse y , $I_- = 0$? In tal caso, quanto vale la massima potenza I_+ irraggiata lungo il verso positivo dell'asse y ?
- In che maniera è possibile variare il valore p_0 del dipolo centrale in maniera da avere interferenza massimamente costruttiva lungo il verso positivo dell'asse y , e interferenza totalmente distruttiva lungo il verso negativo dell'asse y ?

♣Soluzione:

- a) Lungo l'asse $\pm x$ si ha interferenza totalmente costruttiva, e quindi potenza massima uguale a

$$I = \frac{1}{4\pi} \frac{(3\omega p)^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}.$$

- b) In generale possiamo scrivere il campo elettrico come quello irraggiato da un solo dipolo moltiplicato per il fasore

$$z = 1 + e^{i[\Delta_- + (2\pi d/\lambda) \sin \theta]} + e^{i[\Delta_+ + (2\pi d/\lambda) \sin \theta]}$$

dove θ è l'angolo fra l'asse x e la direzione di irraggiamento. L'asse y positivo corrisponde a $\theta = -\pi/2$ ovvero $\sin \theta = -1$: in tal caso $|z|^2 = 9$ è massimo per $\Delta_{\pm} = 2\pi d/\lambda$.

- c) Lungo l'asse y negativo, che corrisponde a $\theta = \pi/2$ e quindi $\sin \theta = 1$, si ottiene $z = 1 + 2e^{4\pi id/\lambda}$. Questo non può mai essere zero, e $|z|^2 = 1$ è minimo per $d = \lambda/4$. Si ha quindi $I_-/I_+ = 1/9$.
- d) Tre numeri complessi di eguale modulo si sommano a zero solo se formano un triangolo equilatero, ovvero $\Delta_{\pm} + 2\pi d/\lambda = \pm 2\pi/3$. In tal caso $p(-\pi/2) = p[1 - e^{-4\pi id/\lambda}]$ assume valore massimo $2p$ per $d = \lambda/4$.
- e) Occorre raddoppiare il dipolo centrale, $p_0 = 2p_{\pm}$ e scegliere $d = \lambda/4$ e $\Delta_{\pm} = 2\pi/4$. In questo modo si ottiene un più banale sistema equivalente a due coppie di antenne sfasate di $\lambda/4$ e di un quarto di periodo.

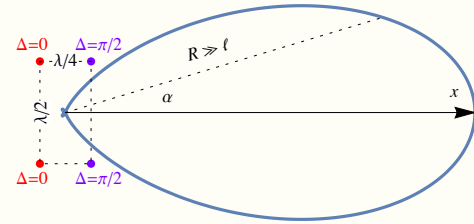
Esercizio 20.20: Quattro antenne

Si hanno 4 antenne approssimabili come dipoli elettrici paralleli all'asse z oscillanti con pulsazione ω e con uguale ampiezza. In che posizione e con quale differenza di fase vanno messi per farli irraggiare massimamente verso l'asse x positivo e minimamente verso ogni altra direzione?

➤Soluzione: È possibile disporre i dipoli in maniera da ottenere lungo l'asse y il 'cancellatore' (caso b dell'esercizio precedente) e lungo l'asse x il 'direzionatore' (caso c dell'esercizio precedente): si forma un rettangolo di lati $\Delta x = \lambda/4$, $\Delta y = \lambda/2$, e con una differenza di fase Δ pari ad un quarto di periodo fra i due a destra rispetto ai due a sinistra (si veda la figura).

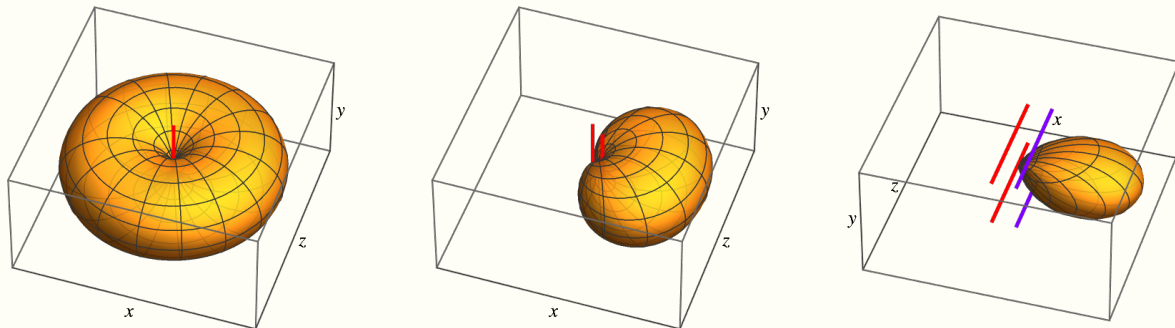
In questo modo, l'irraggiamento lungo l'asse z è soppresso dalla funzione di antenna $\sin^2 \theta$; l'irraggiamento lungo $+y$ e $-y$ dalla contro-fase provocata dalla distanza $\lambda/2$; l'irraggiamento lungo $-x$ dalla contro-fase provocata dalla distanza $\lambda/4$ e dalla differenza di fase. L'irraggiamento lungo $+x$ è invece in fase.

Il campo elettrico ricevuto da un osservatore situato a $R(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ è la somma dei campi generati dai singoli dipoli $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{++} + \mathbf{E}_{+-} + \mathbf{E}_{-+} + \mathbf{E}_{--}$ che, a distanza $R \gg \lambda$ differiscono per la loro fase



$$\delta_i = \Delta_i + 2\pi \frac{\ell_i}{\lambda}, \quad \ell_i \simeq R \pm \frac{\lambda}{8} \cos \alpha \pm \frac{\lambda}{4} \sin \alpha.$$

La figura a destra mostra l'emissione in 3 dimensioni.

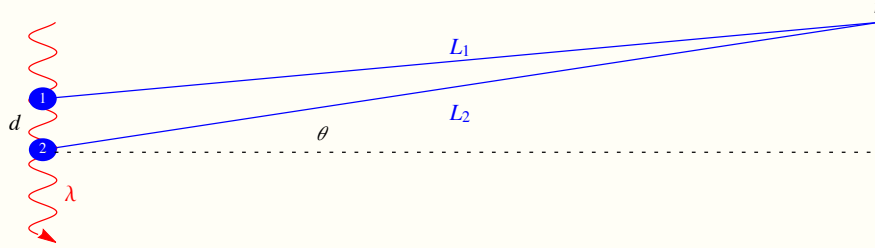


Per confronto a sinistra viene mostrata l'emissione da una sola antenna, e nel centro l'emissione da due antenne discussa nell'esercizio precedente.

Esercizio 20.21: Interferenza fra due sorgenti

Un'onda elettromagnetica piana di lunghezza d'onda λ incide lungo un asse sul quale sono posti a distanza $d \lesssim \lambda$ fra loro due diffusori puntiformi identici il cui momento di dipolo è $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ essendo \mathbf{E} il campo elettrico dell'onda. L'onda è polarizzata linearmente nel piano perpendicolare al piano della figura. Si consideri l'interferenza tra le onde emesse dei due diffusori (trascurando l'interferenza con l'onda incidente) nel piano della figura.

- Calcolare la distribuzione angolare della media temporale della potenza irradiata a distanze $r \gg d$ in funzione dell'angolo azimutale θ .
- Per quali valori di d non si ha radiazione emessa all'indietro (cioè per $\theta = \pi/2$)?

**➤ Soluzione:**

- I due diffusori irradiano con differenza di fase $\varphi_2 - \varphi_1 = \delta_{\text{sorgente}} = 2\pi d/\lambda$. Inoltre, un punto generico a $r \gg d$ riceve le onde emesse dai diffusori con differenza di cammino ottico $L_2 - L_1 \simeq d \sin \theta$, che produce una ulteriore differenza di fase $\delta_{\text{cammino}} = 2\pi d \sin \theta / \lambda$. Le due onde interferiscono con differenza di fase totale

$$\delta = \delta_{\text{sorgente}} + \delta_{\text{cammino}} = \frac{2\pi}{\lambda} d(1 + \sin \theta).$$

La media temporale della potenza totale ricevuta vale quindi

$$\frac{dW_{1+2}}{d\Omega} = \frac{dW_1}{d\Omega} |1 + e^{i\delta}|^2 = \frac{dW_1}{d\Omega} \cdot 4 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

dove $dW_1/d\Omega$ è la media temporale della potenza irradiata dal diffusore 1 in assenza del 2.

- Si ha interferenza distruttiva quando $e^{i\delta} = -1$, cioè per $\delta = \pi$. La direzione all'indietro corrisponde a $\theta = \pi/2$ e quindi $1 + \sin \theta = 2$: si ha interferenza distruttiva per $d = \lambda/4$, quando i due ritardi di fase sono entrambi uguali ad un quarto di fase.

Esercizio 20.22: Nube di elettroni

Un'onda elettromagnetica piana di lunghezza d'onda λ incide su di una nube contenente elettroni con densità n_e costante così grande che le interazioni fra gli elettroni mediano a zero la loro coerenza. Per semplicità si assuma che la nube abbia forma cubica di lato L e che l'onda incida lungo l'asse x , perpendicolare ad una faccia del cubo.

- Calcolare la potenza irradiata, assumendo che la nube sia trasparente, ovvero che L sia abbastanza piccolo da poter trascurare la riduzione di intensità dell'onda incidente.
- In quale direzione si osserva luce irradiata polarizzata linearmente, qualunque sia la polarizzazione della luce incidente?
- Rilassando l'assunzione al punto a), calcolare la lunghezza di penetrazione della luce nella nube. Per quale valore di L la nube è trasparente?

Si assuma ora che n_e sia invece così piccolo che le interazioni fra gli elettroni sono trascurabili

- d) Rispondere nuovamente alla domanda a).
- e) In quale dei due casi la potenza irraggiata è maggiore?
- f) Rispondere nuovamente alla domanda c).

✚Soluzione:

- a) Ogni elettrone si muove secondo $m_e \ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$ dove $E = E_0 \sin(kx - \omega t)$. Un singolo elettrone irraggia $W_e = \dot{p}^2 / 6\pi\epsilon_0 c^3$ dove $\dot{p} = e^2 E / m_e$. In base alle assunzioni, la potenza totale è ottenuta sommando incoerentemente i contributi dei singoli $N_e = n_e L^3$ elettroni:

$$\langle W_{\text{irr}}^{\text{inco}} \rangle_t = N_e \langle W_e \rangle = \frac{e^4 E_0^2 L^3 n_e}{12\pi\epsilon_0 m_e^2 c^3}.$$

- b) Un osservatore che guarda la nube ortogonalmente alla direzione di incidenza della luce ‘vede’ elettroni che oscillano lungo una linea, e quindi riceve luce polarizzata. La cosa è verificabile in pratica utilizzando un polarimetro.
- c) La nube diventa opaca quando $W_{\text{irr}}^{\text{inco}} \sim W_{\text{in}}$, cioè quando tutta la potenza incidente $W_{\text{in}} = L^2 u c$ viene re-irraggiata. Più precisamente, considerando la potenza irraggiata in un tratto di nuvola dx , si ha

$$\frac{dW_{\text{in}}}{dx} = -\frac{W_{\text{in}}}{L_{\text{ass}}^{\text{inco}}}, \quad L_{\text{ass}}^{\text{inco}} = \frac{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2}{n_e e^4} = \frac{1}{n_e \sigma_e}$$

e quindi l'intensità della luce incidente diminuisce esponenzialmente mano a mano che attraversa la nube: $W_{\text{in}}(x) = W_{\text{in}}(0)e^{-x/L_{\text{ass}}^{\text{inco}}}$. Nube opaca significa $L_{\text{ass}}^{\text{inco}} \lesssim L$. La lunghezza di assorbimento riproduce la nota formula $L_{\text{ass}}^{\text{inco}} = 1/n_e \sigma_e$ dove σ_e è la sezione d'urto di Thomson per lo scattering $e\gamma \rightarrow e\gamma$, uguale a $\sigma_e = 8\pi r_e^2/3 = 0.665 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$ in termini del ‘raggio classico dell'elettrone’ $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2 \approx 2.82 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

- d) La nube irraggia ora in maniera coerente. Il dipolo elettrico totale \mathbf{P} della nube vale

$$\ddot{\mathbf{P}} = \int dV n_e e \ddot{\mathbf{x}} = L^2 n_e \frac{e^2}{m_e} E_0 \int_0^L dx \sin(kx - \omega t) = L^2 n_e \frac{e^2}{m_e} E_0 \frac{2}{k} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \sin\left(\frac{kL}{2} - \omega t\right).$$

La potenza irraggiata mediata sul tempo è data da

$$\langle W_{\text{irr}}^{\text{co}} \rangle_t = \frac{\langle \ddot{\mathbf{P}}^2 \rangle_t}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 E_0^2 L^4 n_e^2}{3\pi\epsilon_0 c^3 k^2 m_e^2} \sin^2\left(\frac{kL}{2}\right)$$

avendo usato $\langle \sin^2(kL/2 - \omega t) \rangle = 1/2$. La potenza irraggiata è uguale a zero quando $kL/2 = \pi$ cioè $L = \lambda$, ed è proporzionale a L^2 se $\lambda \gg L$.

- e) Il rapporto fra le due potenze vale

$$\frac{\langle W_{\text{irr}}^{\text{co}} \rangle_t}{\langle W_{\text{irr}}^{\text{inco}} \rangle_t} = \frac{L \lambda^2 n_e}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{kL}{2}\right) \stackrel{L \ll \lambda}{\simeq} L^3 n_e$$

Eccettuati i casi limite speciali tali che $\sin(kL/2) \simeq 0$, l'irraggiamento coerente è maggiore ogni volta che ci sono tanti elettroni in un volume $L\lambda^2$. Questo è vero a basse frequenze tali che $\lambda \gg \lambda_{\text{cr}} = \pi/\sqrt{Ln_e}$ ovvero $\omega \ll \omega_{\text{cr}} = 2c\sqrt{Ln_e}$.

- f) Essendoci coerenza, non è più possibile focalizzarsi su di un tratto dx di nuvola. Apparentemente il problema è più complicato, ma in realtà la sua soluzione è semplice. Il problema è stato già risolto senza parlare di irraggiamento come fenomeno a se stante, risolvendo direttamente le equazioni di Maxwell in un plasma di elettroni liberi. Il risultato era $n^2 = 1 - (\omega_p/\omega)^2$ con $\omega_p^2 = n_e e^2/\epsilon_0 m_e$. La parte immaginaria di $k = n\omega/c$ dava luogo, per $\omega \ll \omega_p$, a $e^{ikx} \propto e^{-x/L_{\text{ass}}^{\text{co}}}$ con lunghezza di assorbimento $L_{\text{ass}}^{\text{co}} = c/\omega_p \sim 1/\sqrt{n_e r_e}$, che è quindi dominante rispetto all'effetto non-collettivo che dà $L_{\text{ass}}^{\text{inco}} \sim 1/n_e r_e^2$. L'effetto collettivo non comporta trasferimenti di energia: una nube non assorbe la luce del sole riscaldandosi ma la riflette.

Esercizio 20.23: Da atomo a materiale ©

Si schematizzi un atomo come un elettrone esterno di massa m_e legato al resto del sistema (di massa molto maggiore dell'elettrone) da una forza elastica con costante elastica $k = m_e \omega_0^2$ che approssima la forza elettrica. L'atomo è investito da un'onda elettromagnetica di pulsazione ω , con campo elettrico $\mathbf{E} = \text{Re } \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]$

- Assumendo che l'elettrone sia non-relativistico e che si sposti dalla sua posizione di equilibrio poco rispetto alla lunghezza d'onda, si scriva l'equazione di moto dell'elettrone risolvendola a regime, e ricavando il dipolo elettrico dell'atomo.
- Calcolare, a regime, la potenza media irraggiata dall'atomo.

Si consideri un materiale fatto di n tali atomi per unità di volume. L'effetto collettivo di irraggiamento è descritto dall'indice di rifrazione $\epsilon(\omega)$ del materiale.

- Calcolare ϵ definendo la frequenza di plasma ω_p , e dicendo per quali valori di ω l'onda si propaga nel materiale.
- Si assuma ora un materiale anisotropo, composti da atomi con diverse costanti elastiche $k_i = m_e \omega_i^2$ lungo le diverse direzioni x, y, z . Assumendo $\omega_x < \omega_y = \omega_z$, calcolare in quale intervallo di frequenze il materiale fa passare onde solo di data polarizzazione (dicendo quale), comportandosi come polarizzatore.

✚Soluzione:

- L'onda produce un dipolo elettrico oscillante $\mathbf{p} = e\mathbf{x}$ dove il nucleo pesante rimane fermo e \mathbf{x} è la posizione dell'elettrone, data dall'equazione del moto

$$m_e \ddot{\mathbf{x}} + k\mathbf{x} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$$

in cui la forza magnetica è stata trascurata rispetto a quella elettrica in quanto l'elettrone ha velocità $v \ll c$. A regime si cerca una soluzione del tipo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{i\omega t}$ trovando

$$\mathbf{p} = \text{Re} \frac{e\mathbf{E}_0}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}.$$

- La potenza irraggiata da un dipolo elettrico vale $W = \mu_0 \dot{\mathbf{p}}^2 / 6\pi c$ dove $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 \mathbf{p}$.
- La costante dielettrica relativa vale $\epsilon_r = 1 + P/\epsilon E_0$ dove $P = nep$ è la densità di polarizzazione. Si ottiene quindi $\epsilon_r = 1 - \omega_p^2/(\omega^2 - \omega_0^2)$ dove $\omega_p = \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m_e}$ è detto frequenza di plasma.
L'onda si propaga nel materiale quando l'indice di rifrazione $n = \sqrt{\epsilon_r}$ è reale, cioè quando $\epsilon_r > 0$, e quindi per $\omega^2 > \omega_0^2 + \omega_p^2$.
- Si ha $\epsilon_x \neq \epsilon_y = \epsilon_z$ in quanto le relative costanti $\omega_0 \rightarrow \omega_x$ e $\omega_0 \rightarrow \omega_y = \omega_z$ sono diverse. Quindi un'onda di frequenza $\omega_x^2 + \omega_p^2 < \omega^2 < \omega_{y,z}^2 + \omega_p^2$ si propaga se il campo elettrico è polarizzato lungo x , e viene assorbita se è polarizzato lungo y o z .

Esercizio 20.24: Irraggiamento da dipolo magnetico

La Terra ruota con pulsazione $\omega = 2\pi/\text{day}$ ed ha un dipolo magnetico $\mu \sim 8 \cdot 10^{22} \text{ J/T}$ storto di 11° rispetto all'asse di rotazione. a) Stimare il tempo di rallentamento della rotazione della Terra dovuto ad irraggiamento magnetico. b) Le **pulsar** sono oggetti fatti di materia nucleare con massa simile al sole $M \sim 1.4M_\odot \sim 10^{30} \text{ kg}$ concentrata in un raggio $R \sim 10 \text{ km}$. Si osserva che la loro velocità angolare vale $\omega \sim 1/\text{s}$ e rallenta in un tempo-scala di migliaia di anni. Schematizzandole come un dipolo magnetico μ perpendicolare all'asse di rotazione, dedurre una stima del loro dipolo e campo magnetico.

✚Soluzione: Calcoli diretti o dualità elettromagnetica mostrano che la potenza irraggiata da un dipolo magnetico μ è data dalla formula per la potenza irraggiata da un dipolo elettrico \mathbf{p} , sostituendo $\mathbf{p} \rightarrow \mu/c$:

$$W_{\text{irr}} = \frac{2}{3} \frac{\dot{\mu}^2}{4\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0 \ddot{\mu}^2}{4\pi c^3} = \frac{\mu_0 \omega^4 \mu^2}{6\pi c^3}.$$

- a) L'irraggiamento riduce l'energia cinetica rotazionale $U = I\omega^2/2$ dove $I \approx \frac{2}{5}MR^2$ è il momento di inerzia. Imponendo $\dot{U} = -W_{\text{irr}}$ si trova che questo effetto è trascurabile per la Terra:

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{W_{\text{irr}}}{I\omega^2} = -\frac{\mu_0\mu_{\perp}^2\omega^2}{6\pi Ic^3} \approx \frac{1}{10^{35} \text{ sec}}, \quad \dot{T} = -\frac{2\pi\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{\mu_0\mu_{\perp}^2\omega}{3c^3I^2} \sim 10^{-40}.$$

- b) Ogni giro una pulsar rallenta di circa $\dot{T} \sim 10^{-10}$. Si deduce quindi il dipolo magnetico $\mu \sim 10^{29} \text{ J/T}$ che genera il campo magnetico $B \sim \mu\mu_0/4\pi R^3 \sim 10^{10} \text{ Tesla}$.

Relatività

Introducendo il quadri-potenziale $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ le equazioni $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c - \nabla\varphi$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ diventano

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ E_x & 0 & & \\ E_y & cB_z & 0 & \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni di Maxwell diventano

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad \text{dove} \quad J^\nu = (c\rho, \mathbf{J}).$$

Le trasformazioni di Lorentz dei campi sono $F^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_\mu \Lambda^{\nu'}_\nu F^{\mu\nu}$. Per un boost lungo l'asse x :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta cB_z) & B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta cB_y) & B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c) \end{cases}.$$

È utile conoscere gli invarianti di Lorentz, che sono $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = (E^2 - c^2B^2)/2$ e $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} \propto \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ (evitando conti si arriva allo stesso risultato con un trucco: osservando che $\mathbf{F} \equiv \mathbf{E} + i\mathbf{B}$ fa rotazioni con angolo complesso, quindi F^2 è invariante). Per un'onda valgono zero.

Non useremo le seguenti formule. Quadri-corrente di una carica puntiforme q in moto $X_\mu(\tau)$ arbitrario:

$$J_\mu = q \int d\tau V_\mu \delta(x_\mu - X_\mu(\tau)).$$

Per moto rettilineo uniforme a velocità v si riduce all'ovvio $J_\mu = q \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \delta(x-vt)\delta(y)\delta(z)$, come si può verificare trasformando la carica ferma $J'_\mu = q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(x')\delta(y')\delta(z')$.

Il vettore di Poynting fa parte del tensore simmetrico 'energia impulso' $T_{\mu\nu}$ che trasforma come

$$\begin{aligned} T'_{00} &= \gamma^2(T_{00} - 2T_{0x}\beta + T_{xx}\beta^2), & T'_{xx} &= \gamma^2(T_{xx} - 2T_{0x}\beta + T_{00}\beta^2), & T'_{0x} &= \gamma^2[T_{0x}(1 + \beta^2) - \beta(T_{00} + T_{xx})] \\ T'_{0y} &= \gamma(T_{0y} - T_{xy}\beta), & T'_{xy} &= \gamma(T_{xy} - T_{0y}\beta), & T'_{yy} &= T_{yy} \end{aligned}$$

e lo stesso per $y \rightarrow z$.

Esercizio 21.1: Contrazione di Lorentz

Verso il 1900 si discuteva il seguente problema: assumendo che la materia sia tenuta assieme da forze elettromagnetiche, e sapendo come queste si trasformano in diversi sistemi di riferimento determinare in che modo la materia si ingrossa o rimpicciolisce se in moto.

✚Soluzione: Una volta capito, il problema diventa banale. Siccome l'elettromagnetismo ed il resto della fisica trasformano in modo ben definito sotto trasformazioni di Lorentz, la distanza fra due punti di un oggetto forma un quadrivettore X_μ , che si trasforma come un quadrivettore indipendentemente dalle forze complicate $F_{\mu\nu}$ che lo tengono assieme. E.g. è ovvio che sotto rotazioni la distanza è un invariante: il resto non è molto più profondo.

Esercizio 21.2: Forza fra 2 cariche bis

Due elettroni si muovono parallelamente lungo traiettorie rettilinee a distanza r con velocità costante $v \ll c$. Calcolare la forza elettromagnetica.

✚Soluzione: Abbiamo già discusso la forza fra due fili in moto. Il caso più realistico di forza fra cariche in moto richiede conti più complicati che, alla fine, forniscono lo stesso risultato. Nel sistema di quiete esiste solo \mathbf{E} . Trasformando i campi si ottiene che nel sistema in cui le cariche si muovono $E'_y = \gamma E_y$ e $B'_z = -\gamma\beta E_y$. Ricordando che fili con correnti uguali si attirano, la forza di Lorentz è

$$F_v = \gamma \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - ev \cdot \frac{\mu_0}{4\pi r^2} ev \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{F_0}{\gamma}.$$

Negli acceleratori di particelle si riesce a far circolare anche per ore fasci di particelle cariche perché la forza repulsiva di Coulomb viene compensata da quella magnetica quando v si avvicina a c . Il risultato è consistente con la relatività: nel sistema in cui le cariche sono in quiete $F_0 = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ e la forza si trasforma come $F_v = F_0/\gamma$.

Il fattore γ può anche essere visto come la dilatazione del tempo: un fascio di particelle relativistico ha durata γ volte maggiore di un fascio non relativistico per lo stesso motivo per cui un muone relativistico ha vita media γ volte maggiore di un muone non relativistico.

Esercizio 21.3: Verifica conservazione impulso

Una carica q è in moto lungo l'asse x con impulso p . Una carica Q , inizialmente ferma nel punto di coordinate $(0, b, 0)$, ha massa così grande che rimane approssimativamente a riposo. Assumendo che il parametro d'impatto b sia così grande che il moto di q è approssimativamente uniforme, a) calcolare il piccolo angolo di deflessione θ ; b) verificare che l'impulso (dominantemente trasverso) acquistato da q è uguale ed opposto a quello acquistato da Q .

✚Soluzione: L'equazione del moto relativistica è $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ dove ora $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ è l'impulso relativistico.

- a) L'angolo di deflessione vale $\tan \theta = \Delta p_\perp^q / p_x$ dove Δp_\perp^q è l'impulso acquistato dalla carica in moto q . Sotto le assunzioni del problema la carica q viene deflessa di poco $\theta \simeq \Delta p_\perp^q / p \ll 1$ e Δp_\perp^q è approssimabile come

$$\Delta p_\perp^q = \int_{-\infty}^{+\infty} dt q E_\perp^Q(x = vt, y = b, 0, t) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{[(vt)^2 + b^2]^{3/2}} = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 vb}.$$

Tale calcolo è stato già effettuato nell'esercizio 1.23, mostrando come il teorema di Gauss consente di dire il valore dell'integrale.

- b) Calcoliamo ora l'impulso acquistato da Q : si procede in modo analogo, utilizzando il campo elettrico generato dalla carica q in moto relativistico. Lo calcoliamo partendo dal campo Coulombiano nel sistema S' dove la carica q è ferma nell'origine ed applicando le trasformazioni di Lorentz sui campi

$$E_y(x, y, z, t) = \gamma E_{y'}(x', y', z', t') = \gamma \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{[x'^2 + (y' - b)^2]^{3/2}}$$

e sulle coordinate:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y.$$

L'impulso acquistato da Q vale

$$\Delta p_\perp^Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dt Q E_\perp^q(0, 0, 0, t) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma b dt}{[(\gamma vt)^2 + b^2]^{3/2}}.$$

Grazie ai due γ (uno dalle trasformazioni del campo, uno dalle trasformazioni delle coordinate) è uguale ed opposto all'impulso acquistato da q .

Esercizio 21.4: Carica in E e B ortogonali bis

Estendere l'esercizio 11.1 al caso di moto relativistico.

✚Soluzione: Avevamo visto che una carica in E e B ortogonali spiraleggia driftando a velocità costante, indipendente dalla carica e dalla massa. Questo diventa ovvio riassorbendo il drift tramite una trasformazione di Lorentz con velocità E/B . Nel nuovo sistema $E' = 0$ e $B' = \sqrt{B^2 - E^2/c^2}$ (se $cB > E$) come segue immediatamente dal fatto che $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ ed $E^2 - c^2 B^2$ sono invarianti di Lorentz. Se $E > cB = 3 \cdot 10^8 \text{ V/m} \cdot (B/\text{Tesla})$ si può andare in un sistema dove $B' = 0$ ed $E' = \sqrt{E^2 - c^2 B^2}$ tramite un boost di velocità $c^2 B/E$. Fisicamente questo è dovuto al fatto che se il campo elettrico è troppo grosso, $E > cB$, il campo magnetico non riesce ad incurvare la traiettoria.

Esercizio 21.5: Filo in moto

Si assume che un filo rettilineo infinito disposto lungo l'asse x ha sezione A e contiene n_e elettroni per unità di lunghezza in moto con velocità v_e , e n_e protoni fermi. Il filo viene messo in moto con velocità v_f lungo l'asse x . Calcolare i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} .

✚Soluzione: Nel sistema S dove il filo è fermo la quadri-corrente vale $\mathbb{J} = (\mathbf{J}, c\rho) = (I/A, 0, 0, 0)$ dove $I = n_e e v_e$. Questa sorgente produce $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{B} = \hat{\theta} \mu_0 I / 2\pi r$.

1. Un primo modo consiste nel calcolare i campi nel sistema S rispetto al quale il filo è fermo, e poi passare al sistema S' rispetto al quale il filo si muove con velocità v_f . Utilizzando coordinate cilindriche, le trasformazioni di Lorentz dei campi forniscono

$$E'_r = -v_f B'_\theta / c^2, \quad B'_\theta = \gamma_{v_f} B_\theta \quad (21.1)$$

avendo definito $\gamma_v \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ e verificato, per sicurezza, che $(E/c)^2 - B^2$ e $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ sono invarianti. Nasce un dubbio: chi genera il campo elettrico, visto che la carica totale è zero?

2. Un secondo modo consiste nel trasformare il quadrivettore \mathbb{J} , ottenendo

$$\rho' = -v_f J'_x / c^2, \quad J'_x = \gamma_{v_f} J_x \quad (21.2)$$

da cui è immediato riottenere la (21.1): J'_x e quindi B'_θ diventa γ_{v_f} volte più grosso, e la densità di carica lineare $\lambda' = A\rho' = -\gamma_{v_f} v_f n_e e v_e / c^2$ genera il campo elettrico $E'_r = \lambda' / 2\pi\epsilon_0 r$ calcolato nell'esercizio 1.15. Il campo elettrico è generato da una densità di carica non zero: il risultato segue dalle formule in modo rapido, ma sembra strano che sia $\rho = 0$ nel sistema S , e $\rho' \neq 0$ nel sistema S' .

3. Otteniamo lo stesso risultato in un terzo modo, piuttosto rognoso dal punto di vista dei calcoli, ma che consente di capire da dove salta fuori la carica: trasformiamo non quantità 'astratte' come $\mathbb{F}_{\mu\nu}$ e \mathbb{J}_μ , ma le singole particelle. Nel sistema S' i protoni hanno carica $+e$, velocità v_f e densità $n'_p = n_e \gamma_{v_f}$, perchè la lunghezza si contrae. Nel sistema S' gli elettroni hanno carica $-e$ e velocità $v'_e = (v_f + v_e) / (1 + v_f v_e / c^2)$ in base alla formula di addizione delle velocità. La densità degli elettroni è calcolabile considerando il sistema S'' rispetto al quale gli elettroni sono fermi e $n''_e = n_e / \gamma_{v_e}$:

$$n'_e = n''_e \gamma_{v'_e} = n_e \frac{\gamma_{v'_e}}{\gamma_{v_e}} = n_e \gamma_{v_f} \left(1 + \frac{v_e v_f}{c^2} \right).$$

Quindi la densità di carica del filo nel sistema S' vale

$$\lambda' = \lambda'_p + \lambda'_e = \lambda_e \left(-1 + 1 + \frac{v_e v_f}{c^2} \right) = -n_e e \gamma_{v_f} v_e v_f$$

utilizzando $\lambda_e = -n_e e$, $\lambda_p = n_e e$. Il risultato è in accordo con l'eq. (21.2) e quindi con l'eq. (21.1).

Questo esercizio illustra che tutto è consistente, e che utilizzare le leggi di trasformazione dei campi è molto più rapido.

Esercizio 21.6: Forza prodotta da filo in moto

Una particella di carica q è in quiete a distanza r dal filo dell'esercizio precedente. Calcolare la forza che agisce sulla carica.

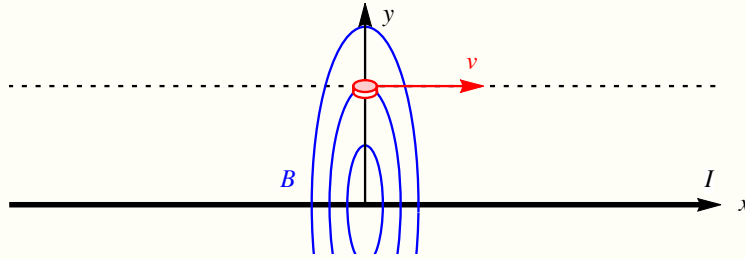
✎ **Soluzione:**

1. $F'_r = qE'_r$ dove E'_r è stato calcolato in vari modi all'esercizio precedente.
2. Alternativamente si può calcolare la forza nel sistema S dove il filo è fermo e la carica in moto con velocità $-\beta$ lungo l'asse x . La forza di Lorentz è diretta lungo r e vale $F_r = -q\beta B_\theta$. Trasformando la forza al sistema S' si ottiene $F'_r = \gamma F_r$ in accordo con il risultato precedente.

Esercizio 21.7: Effetto Joule in moto

Un filo rettilineo infinito conduttore è disposto lungo l'asse x . Un cilindro scarico di conducibilità σ si muove nel piano xy a distanza r dal filo con velocità costante v_x . Il conduttore è di forma cilindrica con raggio a ed altezza $h \ll a \ll r$; il suo asse è parallelo all'asse y . Una corrente I viene accesa nel filo a partire dall'istante $t = 0$. Calcolare, al tempo $t \approx 0$ prima che si raggiunga l'equilibrio elettrostatico:

- a) la potenza W_{Joule} dissipata per effetto Joule nel cilindro;
- b) la forza \mathbf{F} sul cilindro.
- c) Una volta raggiunto l'equilibrio, calcolare la densità superficiale di carica sul conduttore.



✎ **Soluzione:** Senza sapere la relatività, problemi simili sono stati risolti in maniera intuitiva per $v \ll c$ dicendo che la forza di Lorentz $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ è come un campo elettrico effettivo $\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, per cui si ha $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_{\text{eff}}$. Quindi $W_{\text{Joule}} = V\sigma E_{\text{eff}}^2$ dove $V = \pi a^2 h$. Avendo una densità di corrente J ha poi una forza magnetica $F_x = -VJB$. La potenza meccanica associata $W = F_x v_x$ è uguale a $-W_{\text{Joule}}$: l'energia cinetica del cilindro viene dissipata in calore. È possibile essere ora più rigorosi e generali.

- a) Lungo la traiettoria del cilindro si ha un campo magnetico $B_z = \mu_0 I / 2\pi r$ e nessun campo elettrico. Nel sistema di riferimento S' in cui il cilindro è fermo si ha un campo elettrico $E'_y = -\gamma v_x B_z$ (volendo, anche calcolabile come prodotto da una densità di carica ρ'). Nel sistema in cui il conduttore è fermo vale la formula $J'_y = \sigma E'_y$. La potenza dissipata per effetto Joule vale $W'_{\text{Joule}} = V\sigma E'^2_y = V\sigma \gamma^2 v_x^2 B_z^2$ con $V = \pi a^2 h$. Infine, $W_{\text{Joule}} = W'_{\text{Joule}}$ in quanto $dE/dt = dE'/dt'$.
- b) Nel sistema S' la forza magnetica su J'_y vale $F'_x = V J'_y B'_z = \sigma V \gamma^2 v_x B_z^2$. La forza magnetica non compie lavoro, per cui il quadri-vettore forza è $\mathbb{F}' = (F'_x, 0, 0, 0)$. Trasformandolo al sistema S diventa $\mathbb{F} = \gamma(F_x, 0, 0, W/c)$ con $F_x = F'_x$ e $W = F'_x v_x = \sigma V \gamma^2 v_x^2 B_z^2$.
- c) A regime il campo elettrico E'_y viene compensato da densità superficiali di carica $\pm E'_y / \epsilon_0$ sulle facce del cilindro. A questo punto le cariche di conduzione sono ferme, ed il campo magnetico non produce effetti.

In maniera più generale, la corrente di conduzione, data da $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ per un conduttore fermo, si generalizza, per un conduttore in moto con quadri-velocità \mathbb{V} , in $\mathbb{J}_\mu = (\mathbb{J} \cdot \mathbb{V}) \mathbb{V}_\mu / c^2 = \sigma \mathbb{F}_{\mu\nu} \mathbb{V}^\nu$ (il secondo termine è necessario per ottenere $0 = 0$ contraendo con \mathbb{V}^ν).

Esercizio 21.8: Trascinamento di onda in materiale

Calcolare la velocità di un'onda elettromagnetica che si propaga in acqua in moto a velocità v . L'effetto di trascinamento può essere precisamente misurato tramite un interferometro come fatto da Fizeau nel 1851.

✚Soluzione: La velocità dell'onda nell'acqua a riposo è $v_O = c/n$, dove n è l'indice di rifrazione. Secondo la simmetria Galileiana si avrebbe $v' = v_O + v = c/n + v$. Secondo la simmetria relativistica la formula di addizione delle velocità invece è

$$v'_O = \frac{v + c/n}{1 + v/n} \simeq \frac{c}{n} + (1 - \frac{1}{n^2})v + \mathcal{O}(\frac{v^2}{c^2})$$

ovvero l'effetto di trascinamento è ridotto di $f = 1 - 1/n^2$ detto coefficiente di Fresnel.

Per cancellare incertezze sistematiche Fizeau faceva passare la luce in acqua in circolazione con $\pm v$, ma questo è solo un dettaglio tecnico. Teorici provavano a spiegare $f < 1$ come trascinamento dell'etere.

Esercizio 21.9: Onda vista da sistema in moto

Lo scopo di questo esercizio è imparare a trasformare i campi con il minimo di calcoli possibili. Un'onda elettromagnetica piana di frequenza ω nel vuoto ha quadri-vettore d'onda $\mathbb{K} = (\omega, c\mathbf{k}) = \omega(1, \mathbf{n}) = \omega(1, n_x, n_y, 0)$ e campo magnetico polarizzato lungo l'asse z , $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$, e quindi $\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} = cB(-n_y, n_x, 0)$. Come diventa questa onda, vista da un sistema S' in moto lungo l'asse x con velocità $v = \beta c$ lungo l'asse x ? Calcolare: a) il quadri-vettore d'onda; b) i campi; c) la densità di energia e l'intensità dell'onda.

✚Soluzione: Il segno della trasformazione di Lorentz è fissato dal dover avere $x' = \gamma(x - vt)$.

a) Siccome K_μ è un quadri-vettore, nel sistema S' le sue componenti sono

$$\mathbb{K}' = \omega(\gamma(1 - n_x\beta), \gamma(n_x - \beta), n_y, 0) \equiv \omega'(1, n_{x'}, n_{y'}, 0)$$

e quindi l'onda ha pulsazione diversa (effetto Doppler relativistico) e direzione diversa:

$$\omega' = \gamma(\omega - n_x\beta), \quad \frac{n_{y'}}{n_{x'}} = \frac{1}{\gamma} \frac{n_y}{n_x - \beta}.$$

b) Guardando alle leggi di trasformazioni dei campi si nota che il campo magnetico in S' rimane semplice:

$$\mathbf{B}' = (0, 0, B'_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y) = \gamma B_z(1 - \beta n_x).$$

In questa maniera non serve trasformare il più complicato campo elettrico, in quanto *deve* diventare $\mathbf{E}' = cB'(-n'_{y'}, n'_{x'}, 0)$, siccome per un'onda nel vuoto vale sempre $\mathbf{E}' = c\mathbf{B}' \times \mathbf{n}'$.

c) Similmente, non occorre trasformare il tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$ che contiene u ed S , in quanto per un'onda si ha $u' = \epsilon_0 E'^2$ e $S' = cu'$. Quindi $u'/u = B'^2/B^2 = \gamma^2(1 - \beta n_x)^2$.

Esercizio 21.10: Raffreddamento laser

Uno specchio piano perfettamente riflettente di massa m è investito sui due lati da due onde elettromagnetiche perpendicolari alla sua superficie S di intensità I_1 e I_2 .

a) Calcolare la forza che agisce sullo specchio.

b) Calcolare nuovamente la forza assumendo ora $I_1 = I_2$ e che lo specchio sia in moto con velocità $v \ll c$ in direzione dell'onda 2.

c) Si risolva l'equazione del moto dello specchio.

✚Soluzione:

a) Siccome ciascuna onda viene riflessa la forza vale $F = 2S(I_1 - I_2)/c$.

- b) Andiamo nel sistema di riferimento S' in cui lo specchio è fermo. Come visto all'esercizio precedente, sotto una trasformazione di Lorentz $v_x = v'_x + \beta c$ il modulo E del campo elettrico di un'onda elettromagnetica diretta lungo l'asse x , $\mathbf{n} = (n_x, 0, 0)$, trasforma come $E' = \gamma(1 - \beta n_x)E$. Per le due onde con $n_x = \pm 1$ si ha quindi

$$E'_1 = \gamma(1 - \beta)E_1 = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} E_1 \stackrel{\beta \ll 1}{\simeq} (1 - \beta)E_1, \quad E'_2 = \gamma(1 + \beta)E_2 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} E_2 \stackrel{\beta \ll 1}{\simeq} (1 + \beta)E_2.$$

(Nel limite galileiano $\beta \ll 1$, la trasformazione di Lorentz $E' \simeq E - vB$ è stata anche ricavata imponendo l'invarianza della forza di Lorentz). Ricordando che l'intensità dell'onda è data da $I = c\epsilon_0 E^2$ e che $\beta = v/c$ si ha

$$I'_1 \simeq \left(1 - 2\frac{v}{c}\right) I_1, \quad I'_2 \simeq \left(1 + 2\frac{v}{c}\right) I_2.$$

La forza vale quindi $F' = 2S(I'_1 - I'_2)/c$. Inserendo ora $I = I_1 = I_2$ si ottiene $F' = -8SIv/c^2$. Per finire, grazie a $v \ll c$ ed alla cancellazione dei termini grossi, la trasformazione di Lorentz della forza è semplicemente $F \simeq F'$.

- c) La forza è di tipo attrito. L'equazione del moto $m\dot{v} = F$ è risolta da $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ con $\tau = mc^2/8SI$. Per raffreddare rapidamente occorre quindi una luce molto intensa.

Questo tipo di meccanismo è usato per raffreddare atomi, che interagiscono con la luce in maniera più complicata di uno specchio. Ma l'idea di base è la stessa: un atomo riceve una forza maggiore dal fascio di luce verso cui si sta muovendo.

Esercizio 21.11: Riflessione da specchio in moto

Un'onda elettromagnetica piana di pulsazione ω si propaga in direzione $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ con campo elettrico E_z polarizzato lungo l'asse z . Uno specchio perfettamente riflettente è situato a $x = 0$ nel piano yz .

- a) Calcolare direzione e campi elettromagnetici dell'onda riflessa.

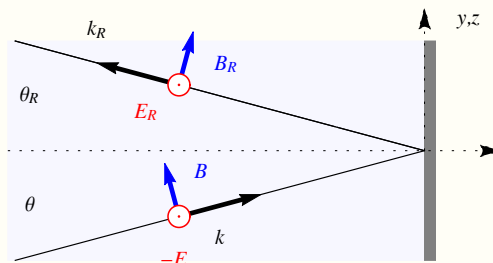
Lo specchio viene ora messo in moto con velocità costante $v_x = \beta c$ lungo l'asse x .

- b) Calcolare pulsazione ω_R , vettore d'onda \mathbf{k}_R e direzione \mathbf{n}_R dell'onda riflessa.
c) Calcolare la componente x del campo magnetico \mathbf{B}_R dell'onda riflessa.
d) Calcolare il campo elettrico \mathbf{E}_R e magnetico \mathbf{B}_R dell'onda riflessa.
e) Calcolare il vettore di Poynting \mathbf{S}_R dell'onda riflessa.
f) Interpretare fisicamente la differenza fra S_y e S_{Ry} .

✎ Soluzione:

- a) Lungo il bordo con una superficie riflettente ferma si ha $E_{\parallel} = B_{\perp} = 0$, producendo un'onda riflessa con k_{\perp} , E_{\parallel} e B_{\perp} invertiti. Quindi:

$$\begin{cases} k_{Rx} &= -k_x, \\ k_{Ry} &= +k_y, \\ E_{Rz} &= -E_z \\ B_{Ry} &= +B_y \\ B_{Rx} &= -B_x \end{cases}$$



- b) Il quadri-vettore dell'onda incidente è $\mathbb{K} = \omega(\cos \theta, \sin \theta, 0, 1)/c$. Applicando una trasformazione di Lorentz troviamo le sue componenti $\mathbb{K}' = (k'_x, k'_y, 0, \omega'/c)$ nel sistema S' rispetto al quale lo specchio è fermo:

$$\omega' = \gamma\omega(1 - n_x\beta), \quad k'_x = \gamma\frac{\omega}{c}(n_x - \beta), \quad k'_y = k_y = n_y\frac{\omega}{c}.$$

La riflessione inverte k'_x : il quadri-vettore dell'onda riflessa vale quindi $\mathbb{K}'_R = (-k'_x, k'_y, 0, \omega'/c)$. Tornando al sistema S originario, il quadri-vettore \mathbb{K}_R dell'onda Riflessa ha componenti

$$\omega_R = \frac{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta}{1 - \beta^2} \omega, \quad k_{Rx} = -\frac{\cos \theta(1 + \beta^2) - 2\beta}{1 - \beta^2} \frac{\omega}{c}, \quad k_{Ry} = k_y = \frac{\omega}{c} \sin \theta.$$

Si può verificare che \mathbb{K}_R ha modulo zero. La direzione dell'onda riflessa è $\mathbf{n}_R \equiv \mathbf{k}_R/k_R = (-\cos \theta_R, \sin \theta_R, 0)$ con $n_{Ry} = n_y\omega/\omega_R$ e

$$\tan \theta_R \equiv -\frac{k_{Ry}}{k_{Rx}} = \frac{\sin \theta(1 - \beta^2)}{\cos \theta(1 + \beta^2) - 2\beta} \stackrel{\beta \ll 1}{\simeq} \tan \theta(1 + \frac{2\beta}{\cos \theta}).$$

Quindi $\theta_R > \theta$ se $\beta > 0$.

Allo stesso risultato si può arrivare calcolando in notazione matriciale: la trasformazione inversa, riflessione lungo x , e trasformazione diretta si compongono come (scrivendo solo le componenti t ed x):

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 & -2\beta \\ 2\beta & -(1 + \beta^2) \end{pmatrix}.$$

- c) Una trasformazione di Lorentz lungo l'asse x lascia invariato B_x : si deve quindi avere $B_{Rx} = -B_x$.
- d) Il risultato al punto precedente consente di calcolare tutti i campi dell'onda riflessa. Sapendo infatti che deve essere $\mathbf{B}_R \cdot \mathbf{n}_R = 0$ si ricava $B_{Ry} = -B_{Rx}n_{Rx}/n_{Ry} = B_x/\tan \theta_R$. Notando che $n_{Ry} = n_y\omega/\omega_R$, il modulo vale

$$B_R^2 = B_{Rx}^2 + B_{Ry}^2 = B_x^2 \left[1 + \left(\frac{n_{Rx}}{n_{Ry}} \right)^2 \right] = \left(\frac{B_x}{n_{Ry}} \right)^2 = \left(\frac{B n_y}{n_{Ry}} \right)^2 = \left(B \frac{\omega_R}{\omega} \right)^2.$$

Quindi \mathbf{E}_R ha modulo $E_R = cB_R = E\omega_R/\omega$ e solo componente z .

- d') Calcoliamo nuovamente i campi in maniera diretta. Per ridurre i conti, conviene operare come segue. Conviene calcolare il campo elettrico, che ha solo la componente z . L'onda incidente nel sistema S' ha $E'_z = \gamma(E_z + \beta c B_y) = \gamma E_z(1 - \beta \cos \theta)$ in quanto $B_y = -n_x E_z/c$. L'onda riflessa ha quindi $E'_{Rz} = -E'_z$. Tornare al sistema S richiede conoscere anche \mathbf{B}_R . Ma il campo magnetico è semplice solo nel caso particolare di incidenza normale, $\theta = 0$. In tale caso speciale si ha $E_{Rz} = \gamma(E'_{Rz} - \beta c B'_{Ry}) = -E_z \gamma^2(1 - \beta)^2 = -E_z(1 - \beta)/(1 + \beta)$. Per angolo generico conviene fare la trasformazione inversa $S \rightarrow S'$ anche per l'onda riflessa: E'_{Rz} è legato ad E_{Rz} da $E'_{Rz} = \gamma(E_{Rz} + \beta c B_{Ry}) = \gamma E_{Rz}(1 + \beta \cos \theta_R)$ avendo tenuto conto che $B'_{Ry} = -n'_{Rx} E'_{Rz}$. Si ottiene quindi

$$E_{Rz} = -\frac{1 - \beta \cos \theta}{1 + \beta \cos \theta_R} E_z = -\frac{1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta}{1 - \beta^2} E_z = -\frac{\omega_R}{\omega} E_z.$$

Il secondo passaggio richiede un po' di conti. Il campo magnetico è poi dato dalla formula valida per ogni onda, $\mathbf{B}_R = \mathbf{n}_R \times \mathbf{E}_R/c$. Come atteso si ha $B_{Rx} = n_{Ry} E_{Rz}/c = (n_y \omega/\omega_R)(-E_z \omega_R/\omega) = -B_x$.

- e) Il vettore di Poynting vale $\mathbf{S}_R = cu_R \mathbf{n}_R$ dove $u_R/u = (\omega_R/\omega)^2$. L'intensità dell'onda varia, per via dell'urto con lo specchio.
- f) Uno potrebbe aspettarsi che la conservazione dell'impulso implichi $S_y = S_{Ry}$. Invece il risultato esplicito mostra che sono diversi. Per vederlo rapidamente conviene ricordare che la componente y del vettore di Poynting è $S_y = E_z B_x/\mu_0$, e che il moto dello specchio lascia $|B_{Rx}| = |B_x|$, mentre varia $|E_{Rz}| = |E_z| \omega_R/\omega$. Si ha quindi $S_{Ry}/S_y = \omega_R/\omega \neq 1$. Questo appare sorprendente, in quanto sembra indicare che onda incidente ed onda riflessa hanno diversi impulsi elettromagnetici, dati da $p_y^{\text{em}} = \int dV S_y/c^2$. Nel limite di onda piana questi integrali sono entrambi infiniti, quindi non è chiaro in che senso siano diversi. Il mistero si chiarisce considerando un treno d'onde di lunghezza finita: per motivi geometrici la riflessione da specchio in moto cambia la lunghezza del treno d'onde di un fattore ω/ω_R , in quanto la forma del pacchetto d'onde rimane la stessa, ma se ω aumenta ogni lunghezza d'onda si riduce. Integrando in dV questo compensa la variazione in S_{Ry}/S_y , portando alla conservazione dell'impulso.

La conservazione dell'impulso ha una interpretazione ancora più intuitiva pensando in termini di quanti: la luce sono tanti fotoni che rimbalzano sullo specchio, come se fossero palline. Il rimbalzo di ogni singolo fotone conserva la componente del suo impulso parallela allo specchio, $p_{Ry} = p_y$. Ma, per ovvi motivi geometrici, la riflessione da specchio in moto varia il loro flusso: questa è l'informazione contenuta nel vettore di Poynting.

Esercizio 21.12: Riflessione da specchio in moto'

Rispondere nuovamente alle domande dell'esercizio precedente, assumendo ora che il campo magnetico sia polarizzato lungo l'asse z parallelo al piano riflettente.

♣**Soluzione:**

a) Si ha ora $\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n} = cB_z(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ e la riflessione

$$E_{Ry} = -E_y, \quad E_{Rx} = E_x, \quad B_{Rz} = B_z$$

b) Il quadri-vettore \mathbb{K}_R rimane come prima.

c) La componente E_x è Lorentz invariante: si ha quindi $E_{Rx} = E_x$.

d) Analogamente a prima da questo segue $E_{Ry} = -E_x n_{Rx}/n_{Ry}$ e $E_R = E\omega_R/\omega$, e quindi $B_R = B\omega_R/\omega$.

e,f) Ora $S_y = -E_x B_z/\mu_0$ e come prima $S_{Ry}/S_y = \omega_R/\omega$.

Esercizio 21.13: Riflessione da specchio in moto parallelo a se stesso

Un'onda elettromagnetica incide con $\mathbb{K}_I = (\omega/c, k_x, k_y, k_z)$ generico su di uno specchio nel piano xz ed in moto lungo l'asse x . Che effetto ha il moto dello specchio a) sul quadri-vettore d'onda? b) Sui campi elettrici e magnetici?

♣**Soluzione:** Occorre andare con una trasformazione di Lorentz lungo x nel sistema S' in cui lo specchio è fermo; calcolare la riflessione; tornare al sistema di riferimento iniziale con una trasformazione di Lorentz inversa.

a) Il moto dello specchio non ha nessun effetto su \mathbb{K}_R , in quanto la trasformazione di Lorentz agisce solo sulle sue componenti t ed x , che sono lasciate invariate dalla riflessione.

b) Vedere che il moto dello specchio non ha effetto neanche sui campi richiede conti più pesanti. Conviene trattare \mathbf{E} ed \mathbf{B} come vettori generici, in quanto la proprietà non dipende dal fatto che, per un'onda, sono ortogonali fra di loro ed a \mathbf{k} . Calcolando la riflessione nel sistema S' , solo le componenti $\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}'_{x,z}$ e $\mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}'_y$ evidenziate in rosso vengono invertite dalla riflessione:

$$\mathbf{E}'_{R\parallel} = -\mathbf{E}'_{I\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{R\perp} = -\mathbf{B}'_{I\perp}, \quad \mathbf{E}'_{R\perp} = \mathbf{E}'_{I\perp}, \quad \mathbf{B}'_{R\parallel} = \mathbf{B}'_{I\parallel}.$$

Evidenziando queste componenti in rosso anche nella trasformazione di Lorentz

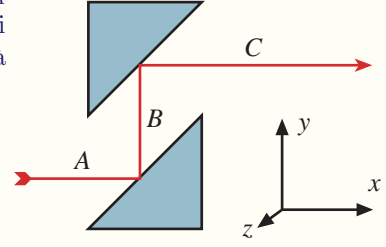
$$\begin{cases} \mathbf{E}'_x = \mathbf{E}_x & B'_x = B_x \\ \mathbf{E}'_y = \gamma(E_y - \beta c B_z) & \mathbf{B}'_y = \gamma(\mathbf{B}_y + \beta \mathbf{E}_z/c) \\ \mathbf{E}'_z = \gamma(\mathbf{E}_z + \beta c \mathbf{B}_y) & B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c) \end{cases}$$

si nota che queste trasformano solo fra di loro. (In corsi futuri, questa diventerà la base di elicità che semplifica le trasformazioni di particelle di massa zero). Pertanto, nonostante la riflessione intermedia, la trasformazione di Lorentz si cancella con quella inversa, lasciando solo la riflessione:

$$\mathbf{E}_{R\parallel} = -\mathbf{E}_{I\parallel}, \quad \mathbf{B}_{R\perp} = -\mathbf{B}_{I\perp}, \quad \mathbf{E}_{R\perp} = \mathbf{E}_{I\perp}, \quad \mathbf{B}_{R\parallel} = \mathbf{B}_{I\parallel}.$$

Esercizio 21.14: Riflessione da specchi in moto ©

Un'onda elettromagnetica diretta lungo l'asse x con intensità I_A , pulsazione ω_A e polarizzazione $\mathbf{E}_A \propto \hat{\mathbf{y}}$ incontra il sistema di specchi perfettamente riflettenti mostrato in figura. Gli specchi vengono messi in moto lungo l'asse x con velocità costante v . Calcolare



- La pulsazione ω_B e la direzione dell'onda nel tratto B.
- La polarizzazione dell'onda nel tratto B.
- L'intensità I_B dell'onda nel tratto B.
- Pulsazione ω_C ed intensità I_C dell'onda nel tratto C.

➤ Soluzione:

- Il quadrivettore dell'onda iniziale vale $\mathbb{K}_A = \omega(1, 0, 0, 1)/c$. Rispetto al sistema S' in cui gli specchi sono fermi esso diventa $\mathbb{K}'_A = \omega'(1, 0, 0, 1)/c$ con $\omega' = \omega\gamma(1 - v/c)$. In tale sistema $\mathbb{K}'_B = \omega'(0, 0, 1, 1)/c$. Tornando al sistema S diventa $\mathbb{K}_B = \omega'(\gamma v/c, 1, 0, \gamma)/c$, che corrisponde ad un'onda di pulsazione $\omega_B = \omega\gamma^2(1 - v/c) = \omega/(1 + v/c)$ che si propaga nel piano xy con angolo $\tan \theta = \gamma v/c$.
- Conviene considerare il campo magnetico, che è polarizzato lungo $\hat{\mathbf{z}}$ e non viene riflesso dallo specchio. Il fatto che lo specchio sia in moto non cambia questo risultato, come si può verificare guardando le trasformazioni di Lorentz dei campi. Quindi $\mathbf{B}_B \propto \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{E}_B = c\mathbf{B}_B \times \hat{\mathbf{k}}_B$.
- L'onda iniziale ha campi $\mathbf{E}_A = E_A(0, 1, 0)$ e $\mathbf{B}_A = E_A(0, 0, 1)/c$. Nel sistema S' si ha $B_{Az'} = \gamma(B_{Az} - vE_{Ay}/c)$ cioè $\mathbf{B}'_A = \gamma E_A(1 - v/c)(0, 0, 1)/c$. Dopo la riflessione $\mathbf{B}'_B = \gamma E_A(1 - v/c)(0, 0, 1)/c$ e $\mathbf{E}'_B = c\mathbf{B}'_B \times \hat{\mathbf{k}}'_B = \gamma E_A(1 - v/c)(-1, 0, 0)$. Tornando al sistema S , $B_{Bz} = \gamma B_{Bz'} = \gamma^2(1 - v/c)E_A(0, 0, 1)/c$. Calcolare il campo elettrico in componenti richiede conti più complicati, ma non necessari in quanto deve essere $E_B = cB_B$. Quindi $I_B/I_A = (E_B/E_A)^2 = 1/(1 + v/c)^2$.
- Allo stesso risultato si arriva considerando il tensore $\mathbb{T}_{\mu\nu}$, tramite i seguenti passaggi:

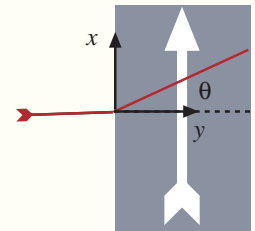
$$\mathbb{T}_A = u_A \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \mathbb{T}'_A = \Lambda \mathbb{T}_A \Lambda = u'_A \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \mathbb{T}'_B = u'_A \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

con $u'_A = u_A \gamma^2(1 - v/c)^2$ ed infine $(\mathbb{T}_B)^{00} = (\Lambda^{-1} \mathbb{T}'_B \Lambda^{-1})^{00} = u_A/(1 + v/c)^2$.

- Nel sistema S' l'onda in C è uguale all'onda in A. Quindi sono uguali in tutti i sistemi di riferimento.

Esercizio 21.15: Rifrazione da materiale in moto parallelo a se stesso

Un'onda elettromagnetica di pulsazione ω e intensità I si propaga nel vuoto lungo l'asse y incidendo perpendicolarmente su di un materiale con costante dielettrica n in moto con velocità βc lungo l'asse x come illustrato in figura.



- Calcolare l'angolo di incidenza θ'_I dell'onda rispetto al sistema di riferimento S' nel quale il dielettrico è fermo.
- Tornando al sistema di riferimento iniziale S calcolare l'angolo θ di deflessione dell'onda trasmessa.
- Calcolare la potenza I_R dell'onda riflessa.

➤ Soluzione:

- a) Il quadri-vettore dell'onda incidente vale $\mathbb{K}^I = (\omega, 0, \omega, 0)/c$. Rispetto al sistema S' in cui il dielettrico è fermo, questo diventa

$$\mathbb{K}'^I = (\gamma\omega, -\beta\gamma\omega, \omega, 0)/c \equiv (\omega'/c, k'_x, k'_y, k'_z).$$

Quindi la luce ha angolo di incidenza $\tan \theta'_I = k'_x/k'_y - \beta\gamma$.

- b) Nel sistema S' in cui il materiale è fermo valgono le normali leggi della rifrazione, in base alle quali l'onda trasmessa ha pulsazione $\omega'^T = \omega'$ e vettore d'onda $k'^T_x = k'_x$,

$$\mathbb{K}'^T = (\gamma\omega/c, -\beta\gamma\omega/c, k'^T_y, 0)$$

mentre la componente k'^T_y va calcolata in base alle leggi della rifrazione, imponendo che il modulo di \mathbf{k}'^T sia $n\omega'/c$. Vale quindi

$$k'^T_y = \sqrt{k'^T2 - k'^T_x2} = \frac{\omega'}{c} \sqrt{n^2 - \beta^2}.$$

Tornando al sistema S si ha quindi che le componenti lungo x e t di \mathbb{K}^T sono uguali a quelle di \mathbb{K}^I : l'onda trasmessa si propaga in direzione $\theta = 0$

$$\mathbb{K}^T = (\omega/c, 0, k_y^T, 0) = (\omega, 0, n_\beta\omega, 0)/c, \quad \text{con} \quad k_y^T = k'^T_y \equiv n_\beta \frac{\omega}{c}, \quad n_\beta = \sqrt{\frac{n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}}.$$

Il moto del dielettrico è quindi equivalente a modificare il suo indice di rifrazione da n a n_β .

- b') Alternativamente, si arriva allo stesso risultato utilizzando la formula di addizione relativistica delle velocità. Nel sistema in cui il dielettrico è fermo la luce ha $v'_x = -v$ e quindi $v'_y = \sqrt{c^2/n^2 - v^2}$. Aggiungendo v si trova $v_x = 0$ (e quindi nessuna deflessione) e

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 - v\dot{x}'/c^2)} = \gamma v_y.$$

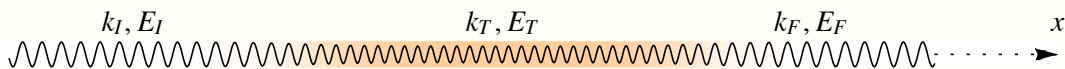
- c) Si può rispondere a botto prendendo la formula di Fresnel per il coefficiente di riflessione $R = (1 - n)/(1 + n)$ e sostituendo $n \rightarrow n_\beta$.
- c') Otteniamo lo stesso risultato facendo il conto nel sistema S' . Il campo elettrico ha solo componente lungo z . Nel sistema S' si ha $E'^R = R'E'$ con R' dato dalla formula di Fresnel:

$$R' = \frac{1 - k'^T_y/k'_y}{1 + k'^T_y/k'_y}, \quad \text{dove} \quad \frac{k'^T_y}{k'_y} = \frac{\sqrt{n^2\omega^2/c^2 - k'^T_x2}}{\omega} = \sqrt{\frac{n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}}.$$

Facendo le trasformazioni di Lorentz si può verificare che (come intuitivamente atteso) nel sistema S si ha $E^R = RE$ con $R = R'$. Quindi $I_R = R^2 I$.

Esercizio 21.16: Onda in nuvola ☺

Un'onda piana di pulsazione ω si propaga nel vuoto lungo l'asse x con intensità I_I e campo elettrico polarizzato lungo l'asse y . Incontra un nuvola ferma, dentro cui l'indice di rifrazione vale n . La variazione spaziale dell'indice di rifrazione è così graduale, sia all'ingresso che all'uscita della nuvola, che non c'è nessuna onda riflessa: solo l'onda Trasmessa dentro la nuvola, e poi l'onda Finale sull'altro lato.



- a) Assumendo noto E_T , calcolare il vettore d'onda k_T , la densità media di energia u_T ed il flusso medio di energia I_T ;
- b) Calcolare E_T e B_T .

La nuvola ora si muove lungo l'asse x con velocità βc :

- c) Calcolare la frequenza ω_T dell'onda dentro il materiale;
- d) Calcolare I_T/I_I .
- e) Calcolare I_F/I_I .

✎ Soluzione:

- a) La velocità dell'onda dentro alla nuvola vale $c_T = c/n$. Si ha $k_T = \omega/c_T$. Definendo $\epsilon = \epsilon_0 n^2$, la densità di media energia vale $u_T = \langle \epsilon E_T^2/2 + B_T^2/2\mu_0 \rangle = \epsilon E_T^2/2$, egualmente ripartita fra energia elettrica e magnetica, in quanto $B_T = E_T/c_T$. Quindi $I_T = c_T u_T = n\epsilon_0 E_T^2/2$. Allo stesso risultato si arriva utilizzando il vettore di Poynting $I_T = \langle S_T \rangle = \langle E_T B_T/\mu_0 \rangle$.
- b) Imponendo la conservazione dell'energia $I_T = I_I$ si ricava $E_T = E_I/\sqrt{n}$ e quindi $B_T = E_T/c_T = \sqrt{n}B_I$.
- c) Nel sistema S' rispetto al quale la nuvola è ferma si ha $\omega' = \gamma(1 - \beta)\omega$. Dentro la nuvola il quadri-vettore d'onda vale $\mathbb{K}'_T = \omega'(n, 0, 0, 1)/c$. Tornando al sistema iniziale si ha $\omega_T = \gamma\omega'(1 + \beta n) = \gamma\omega'(1 + \beta n)/(1 + \beta)$.
- d) Nel sistema S' si ha $E'_I = E_I\gamma(1 - \beta)$ e $B'_I = \gamma(1 - \beta)B_I$. Quindi $E'_T = E'_I/\sqrt{n}$ e $B'_T = B'_I\sqrt{n}$. Tornando al sistema iniziale si ha

$$E_T = \frac{1 + \beta n}{1 + \beta} \frac{E_I}{\sqrt{n}}, \quad B_T = \frac{1 + \beta/n}{1 + \beta} B_I \sqrt{n}, \quad I_T = \frac{\langle E_T B_T \rangle}{\mu_0} = \frac{(1 + \beta n)(1 + \beta/n)}{(1 + \beta)^2} I_I.$$

- e) Nel sistema S' si ha $I'_F = I'_I$ e quindi $I_F = I_I$.

Esercizio 21.17: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

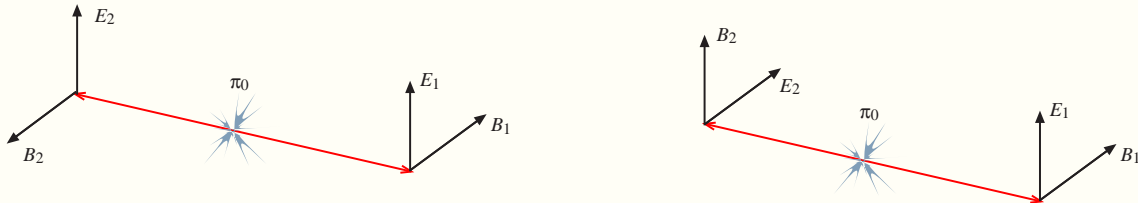
Dedurre la partità del π^0 dalla misura della polarizzazione della luce emessa nel suo decadimento.

✎ Soluzione: Un π^0 fermo decade in due onde elettromagnetiche ('fotoni' γ); per la conservazione dell'impulso le due onde hanno eguali intensità se il π^0 è a riposo. Possono però avere diversa polarizzazione: chiamiamo θ l'angolo fra i campi elettrici \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 delle due onde. Ha interesse calcolare in funzione di θ quanto valgono gli invarianti di Lorentz: scalare e pseudo-scalare:

$$E^2 - c^2 B^2 \propto F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \propto \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$$

dove $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$.

- 1 Se $\theta = 0$ (fig. a sinistra) si ha $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$; tenendo conto che i due γ hanno \mathbf{k} opposti i campi magnetici sono anti-paralleli: $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}_2$. Quindi $E^2 - B^2 \neq 0$ e $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.



- 2 Se $\theta = \pi/2$ (fig. a destra) i campi sono ortogonali: $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2$ e $\mathbf{B}_1 \perp \mathbf{B}_2$. Questo produce $E^2 - c^2 B^2 = 0$ e $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$.
- 3 Per θ generico si ha $\hat{\mathbf{E}}_1 = (1, 0)$, $\hat{\mathbf{B}}_1 = (0, 1)$, $\hat{\mathbf{E}}_2 = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\hat{\mathbf{B}}_2 = (\sin \theta, -\cos \theta)$. Questo produce sia $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \propto \sin \theta$ che $E^2 - B^2 \propto \cos \theta$.

Sperimentalmente misurando le polarizzazioni dei due fotoni emessi in decadimenti $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ si trova che esse sono ortogonali (cioè $\theta = \pi/2$ come nel caso 2) e che quindi il decadimento del π^0 genera un campo elettromagnetico che ha diverso da zero l'invariante pseudo-scalare $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. In linguaggio teorico, il π^0 è accoppiato all'elettromagnetismo tramite l'interazione $\pi^0 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$. La parità è conservata in quanto il π^0 è un campo *pseudoscalare*: $\pi_0(\mathbf{x}, t) \rightarrow -\pi_0(-\mathbf{x}, t)$. Un po' di conti consentirebbero di riscrivere $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = \partial_\mu C^\mu$ e l'interazione come $(\partial_\mu \pi) C^\mu$, segnalando che il π è un bosone di Goldstone.

Esercizio 21.18: GPS

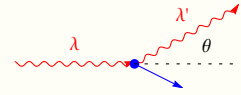
Mostrare che per far funzionare un sistema GPS è essenziale tenere in conto effetti relativistici.

➤Soluzione: Il GPS funziona in quanto vari satelliti orbitano ogni 12 ore a 20000 km da terra portando con loro un orologio atomico che trasmette l'ora. Un ricevitore a terra riceve le ore trasmesse dai satelliti e, conoscendo il moto dei satelliti che gli passano sopra, tramite triangolazioni calcola la propria posizione con un errore di 10 m = $c \cdot 33$ ns.

Siccome i satelliti girano con velocità $v = 14000$ km/h in un giorno accumulano un ritardo, dovuto alla dilatazione del tempo, di circa $\Delta t = \text{day} \cdot (\gamma - 1) \simeq \text{day} \cdot (v/c)^2 / 2 \approx 7000$ ns $\gg 33$ ns. Quindi occorre tenere conto della relatività speciale. C'è un secondo effetto (anticipo di circa 45000 ns) calcolabile conoscendo una teoria relativistica della gravità (detta relatività generale). Per far funzionare il GPS è essenziale tenere in conto di questi effetti.

Esercizio 21.19: Effetto Compton

Compton nel 1923 mandò fotoni di lunghezza d'onda λ nei raggi X su elettroni fermi, trovando che vengono prodotti fotoni deflessi ad angolo generico θ e che questi hanno lunghezza d'onda $\lambda'(\theta) = \lambda + \lambda_{\text{Compton}}(1 - \cos \theta)$ dove $\lambda_{\text{Compton}} = 0.024 \text{ \AA}$. Si mostri che questa è la relazione predetta da cinematica relativistica vedendo il processo come scattering $\gamma e \rightarrow \gamma' e'$ e considerando i fotoni come *particelle* di quadri-impulso $\mathbb{P} = \hbar \mathbb{K}$ e quindi di energia $E = h\nu = hc/\lambda$.



➤Soluzione: La cinematica degli scattering $2 \rightarrow 2$ dipende da $4 + 4 - 4 - 2 - 1 = 1$ parametro libero (l'angolo di deflessione θ è una possibile scelta) tenendo conto che 1) il quadri-impulso è conservato $\mathbb{P}_\gamma + \mathbb{P}_e = \mathbb{P}'_\gamma + \mathbb{P}'_e$; 2) i moduli quadri sono le masse; 3) lo scattering avviene in un piano. Parametizziamo

$$\mathbb{P}_\gamma = (E/c, E/c, 0, 0), \quad \mathbb{P}_e = (m_e c, 0, 0, 0), \quad \mathbb{P}'_\gamma = (E', E' \cos \theta, E' \sin \theta, 0)/c.$$

Riscrivendo la conservazione del quadri-impulso come $\mathbb{P}'_e = (\mathbb{P}_\gamma - \mathbb{P}'_\gamma + \mathbb{P}_e)$ e prendendo il modulo quadro per eliminare P'_e che non mi interessa ottengo la soluzione desiderata:

$$m_e^2 = m_e^2 + 0 + 0 + 2m_e(E - E') + 2EE'(\cos \theta - 1)$$

cioè

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1 - \cos \theta}{m_e c^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda' = \lambda + \lambda_{\text{Compton}}(1 - \cos \theta) \quad \lambda_{\text{Compton}} \equiv \frac{h}{m_e c} = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

dove l'ultima equazione è stata ricavata assumendo $1/E = \lambda/hc$.

Le equazioni di Maxwell consentono di avere luce di frequenza ν ed energia piccola a piacere, per campi elettrici poco intensi. Ora $E = h\nu$ significa invece che in natura esiste un valore minimo. La luce intensa, come quella solare, è costituita da un grande numero di quanti $W_\odot/h\nu \sim 10^{21}/\text{m}^2 \text{ sec}$. Affievolendo la luce fino a raggiungere il limite di pochi quanti si osserva l'effetto fotoelettrico: non succede nulla fino a quando all'improvviso ad un tempo casuale un elettrone della materia acquista tutta l'energia $E = h\nu$.

Esercizio 21.20: Irraggiamento relativistico

Ricavare la potenza irraggiata da particella relativistica accelerata. Discutere come l'irraggiamento limita la massima energia raggiungibile da un collider.

▣**Soluzione:** Calcolare in maniera diretta l'irraggiamento da particella relativistica è molto laborioso e poco istruttivo. Ma si ottiene immediatamente il risultato finale per la potenza totale usando la simmetria relativistica. La potenza irraggiata $W = dE/dt = dE'/dt'$ è uno scalare di Lorentz, quindi la generalizzazione relativistica della formula non-relativistica di Larmor è

$$W = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \frac{d\mathbb{P}_\mu}{d\tau} \frac{d\mathbb{P}^\mu}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right]$$

dove $d\tau = dt/\gamma$ è il tempo proprio e $\mathbb{P}^\mu = (\mathbf{p}, E/c) = m\gamma(\mathbf{v}, c)$ è il quadri-impulso. Calcoli dettagliati mostrano che l'irraggiamento relativistico avviene in avanti, entro un angolo $\sim 1/\gamma$. Specializziamo questa formula generale alle due geometrie limite di acceleratori di particelle: lineare e circolare.

La potenza irraggiata da un **acceleratore lineare** è uguale a quella non relativistica, come si calcola usando $dE = v dp$ (che segue da $0 = d(E^2/c^2 - p^2) = 2(E dE/c^2 - p dp)$)

$$W_{\text{irr}} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2.$$

Assumendo che la particella accelerata sia un elettrone ultra-relativistico, confrontiamo la potenza irraggiata con la potenza dE/dt che l'elettrone riceve dall'acceleratore

$$\frac{W_{\text{irr}}}{dE/dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} \approx \frac{dE/dx}{m_e c^2 / r_e} \ll 1$$

dove $r_e \equiv q^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 2.82 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ è il 'raggio classico dell'elettrone'. In un acceleratore si riescono a produrre campi elettrici tanto intensi da accelerare un elettrone da fermo a relativistico in 10 cm: cioè si raggiunge $dE/dx = m_e c^2 / \ell$ con $\ell \sim 10 \text{ cm}$. Quindi la frazione di energia persa per irraggiamento è $r_e / \ell \sim 10^{-13}$: completamente trascurabile. Il problema è che per accelerare elettroni fino ad energie mai raggiunte prima (oggi $E \sim 10^6 m_e c^2$) serve una lunghezza $10^6 \ell \sim 100 \text{ km}$, il che costa 10^{10} € .

Per questo motivo finora si preferisce un **acceleratore circolare**, in cui le particelle vengono accelerate facendo tanti giri. Tuttavia W_{irr} è dominata dal termine in cui varia l'orientazione di \mathbf{p} :

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right| = \left| \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \gamma \omega p = \gamma \frac{v}{R} m \gamma v = m \gamma^2 a \quad \text{essendo} \quad a = \frac{v^2}{R}.$$

Quindi la potenza irraggiata da ogni elettrone in moto circolare¹ è data dalla formula non relativistica moltiplicata per γ^4

$$W_{\text{irr}} = \frac{q^2 (v^2/R)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^4.$$

La potenza irraggiata per unità di lunghezza vale

$$\frac{dE_{\text{irr}}}{dx} = \frac{W_{\text{irr}}}{v} = \frac{q^2 \beta^3}{6\pi\epsilon_0 R^2} \gamma^4.$$

Considerando ancora un acceleratore di elettroni, la loro energia massima è raggiunta quando la potenza irraggiata è uguale all'energia $dE/dx = m_e c^2 / \ell$ fornita dall'acceleratore circolare di raggio R . Usando $q_e^2/4\pi\epsilon_0 = m_e c^2 r_e$, il massimo $\gamma = \gamma_{\text{max}} \gg 1$ raggiungibile vale

$$\gamma_{\text{max}} \simeq \sqrt[4]{\frac{dE/dx}{m_e c^2 r_e / R^2}} = \sqrt[4]{\frac{R^2}{r_e \ell}} \sim 6 \cdot 10^5 \sqrt{\frac{R}{5 \text{ km}}}.$$

Ad esempio, il più recente collider e^+e^- LEP con $2\pi R = 27 \text{ km}$ ha raggiunto $\gamma = 2 \cdot 10^5$. Per esplorare energie 10 volte più grandi servirebbe un collider di raggio 100 volte maggiore, o un dE/dx 10^4 volte migliore (ma, in questo modo, l'intensità del fascio è limitata dalla potenza massima disponibile per l'acceleratore, qualcosa come $W \lesssim 100 \text{ MW}$).

Siccome il γ_{max} non dipende dalla massa della particella, per raggiungere energie più elevate $E_{\text{max}} \sim m c^2 \gamma_{\text{max}}$ conviene accelerare particelle più pesanti: protoni e magari in futuro muoni.

¹È corretto, anche in acceleratori circolari, sommare le energie irraggiate dalle singole particelle in quanto non sono fra di loro coerenti. Se fossero coerenti su scale minori della lunghezza d'onda della radiazione emessa si avrebbe una corrente continua e quindi minore irraggiamento.

- Il protone pesa $m_p \sim 2000m_e$ ma non è una particelle elementare per cui la massima energia in urti di quark elementari è circa 10 volte meno di E_{\max} , e ci sono moltissimi più urti a energia minore.
- Il muone è una particelle elementare di massa $m_\mu \sim 200m_e$ ma decade, per cui al momento non si sanno costruire collider $\mu^+\mu^-$.

Oltre all'irraggiamento, c'è una ulteriore difficoltà. Nello stesso tunnel di LEP il collider pp LHC accelererà protoni 'solo' fino a $\gamma_{\max} \sim 10^4$. Come discusso nell'esercizio 11.4 questo limite è dovuto non all'irraggiamento ma al fatto che per far girare particelle di carica q e impulso p in un cerchio di raggio R serve un campo magnetico $B = p/Rq$ (anzi, due di segno opposto in un collider pp). Un campo magnetico maggiore di circa 100 Tesla produce una tale pressione magnetica da distruggere la materia che lo produce. Al momento il campo magnetico massimo è di ~ 10 Tesla, raggiunto grazie a magneti superconduttori che operano solo a basse temperature. Il loro raffreddamento richiede mesi (per cui ogni riparazione fa perdere mesi), mantenere il freddo costa molta energia anche causando problemi innominabili.

Esercizio 21.21: Collider circolare

Si vuole costruire un collider circolare e^+e^- di raggio $R = 26.6 \text{ km}/2\pi$ in cui ogni fascio ha energia $E \approx M_t c^2 \approx 175 \text{ GeV}$ tale da produrre il quark top. Quale è la massima corrente I permessa se il sistema di raffreddamento consente una massima potenza irradiata di 100 MW?

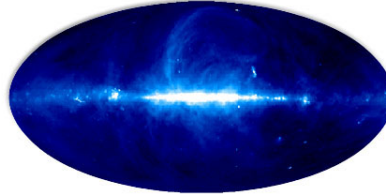
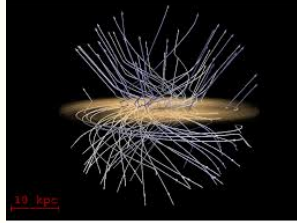
✎Soluzione: Dovendo essere $\gamma = E/m_e c^2 \approx 342000 \gg 1$ serve $v \simeq c$. Mettendo $N e^\pm$ in ogni fascio, la potenza irradiata dai due fasci vale

$$W_{\text{irr}} = \frac{2Ne^2 c \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 R^2} = 10^8 \text{ W} \frac{N}{1.4 \cdot 10^{12}}.$$

La corrente vale $I = Ne/T = Nec/2\pi R = 2.55 \text{ mA}$.

Esercizio 21.22: Irraggiamento da elettroni relativistici

Nella galassia è presente un piccolo campo magnetico $B \sim 10^{-10} \text{ T}$ con linee di campo caotiche. Calcolare la potenza W_{irr} irradiata da elettroni o positroni relativistici, mostrando che quelli di energie abbastanza alti la perdono su tempi scala minori dell'età dell'universo.



✎Soluzione: Il campo magnetico galattico B trattiene elettroni e positroni a girare a vuoto diffondendosi lentamente mentre perdono energia per irraggiamento. L'irraggiamento galattico da elettroni non relativistici risultava trascurabile in quanto la costante tempo calcolata nell'esercizio b era $\tau \sim 10^{13} \text{ Gyr}$, più lunga dell'età dell'universo. Utilizziamo adesso la potenza irradiata da elettroni relativistici in moto circolare ricavata all'esercizio precedente, $W_{\text{irr}} = e^2(v^2/R)^2\gamma^4/6\pi\epsilon_0 c^3$. Il raggio dell'orbita in un campo magnetico vale $R = p/eB$ e aumenta con γ in quanto $p = mv\gamma$. Esprimendo il tutto in funzione di p si ha $v^2/R = eBp/m_e^2\gamma^2$ e quindi

$$W_{\text{irr}} = \frac{e^4 B^2 p^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e^4}$$

è data dal suo valore non-relativistico per il γ^2 contenuto in p^2 . Il tempo-scala per la perdita di energia $E = \gamma m_e c^2$ vale

$$\tau \equiv \frac{E}{W_{\text{irr}}} = \frac{6\pi\epsilon_0 m_e^3 c^5}{e^4 B^2 \gamma v^2}.$$

Nel limite ultra-relativistico $v \simeq c$ il tempo τ è un fattore $2/\gamma$ più rapido che nel limite non-relativistico, e numericamente vale

$$\tau \approx \frac{5 \text{ sec}}{\gamma} \left(\frac{1 \text{ T}}{B} \right)^2 \approx \frac{T_U}{\gamma/1200} \left(\frac{10^{-10} \text{ T}}{B} \right)^2.$$

Quindi elettroni di energia E abbastanza elevata la perdono in tempi minori dell'età dell'universo, $T_U \approx 13$ Gyr. Viceversa, protoni della stessa energia la conservano per un tempo m_p^3/m_e^3 maggiore.

Esercizio 21.23: Radiazione di sincrotrone

Stimare direzione e frequenza della radiazione di sincrotrone.

✚**Soluzione:** La luce di sincrotrone emessa da acceleratori circolari di elettroni rende difficile raggiungere alte energia ma ha utilizzi pratici per studiare materiali, in campo medico, etc. Inoltre, la radiazione emessa da elettroni in vari sistemi astrofisici viene osservata da astronomi che cercano di capire cosa sono questi oggetti. In questo caso gli elettroni non sono in moto circolare, ma un moto generico può essere approssimato come istantaneamente circolare con 'raggio osculatore' R . Come visto nell'esercizio 21.20, l'irraggiamento è dominato dall'accelerazione centripeta.

Calcolare direzione e spettro in frequenza della radiazione di sincrotrone richiede calcoli lunghi. Qui ci limitiamo a stime che catturano gli aspetti essenziali.

Per quanto riguarda la direzione, sappiamo che nel sistema di riferimento S in cui la particella che irraggia è ferma vale la formula di Larmor non-relativistica, secondo cui la radiazione ha distribuzione angolare $dW/d\Omega \propto \sin^2 \theta$ che possiamo qui considerare come circa isotropa. Facendo una trasformazione di Lorentz al sistema S' in cui la particella ha $\gamma \gg 1$ si trova

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^\mu &= \omega(\cos \theta, \sin \theta, 0, 1)/c \\ \mathbb{K}^{\mu'} &\simeq \omega(\gamma(\beta + \cos \theta), \sin \theta, 0, \gamma(1 + \beta \cos \theta))/c \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\beta + \cos \theta)} \approx \frac{1}{\gamma}$$

ovvero la luce di sincrotrone è concentrata in avanti in un cono di angolo $\theta \approx 1/\gamma$.

Per quanto riguarda la frequenza, un osservatore riceve un breve impulso di luce emesso nell'intervallo di tempo $\Delta t_e = R/\gamma v$ in cui la particella si muove verso l'osservatore entro un cono $\theta \sim 1/\gamma$. La durata temporale dell'impulso ricevuto è però molto minore, in quanto anche la luce si muove verso l'osservatore:

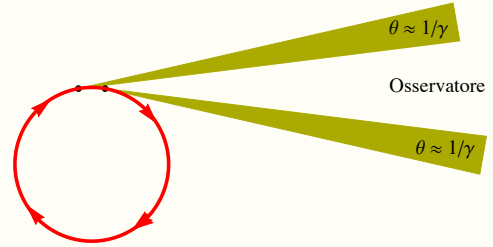
$$\Delta t_\gamma = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right) \frac{R}{\gamma} \simeq \frac{R}{2c\gamma^3}.$$

Quindi la frequenza tipica della luce di sincrotrone è

$$\omega \sim 1/\Delta t_\gamma \sim \gamma^3 \omega_0$$

dove $\omega_0 \simeq c/R$ è la frequenza di rotazione dell'elettrone.

Assumendo che l'elettrone venga accelerato da un campo magnetico, si ha $R = p/eB$ per cui $\omega \sim \gamma^2 \omega_B$ dove $\omega_B = eB/m_e \approx 10^{11} \text{ Hz}(B/\text{Tesla})$ è la frequenza di Larmor. Tenendo conto che il massimo B fattibile è di qualche Tesla, per ottenere raggi X ($\omega \sim 10^{19} \text{ Hz}$) o γ ($\omega \sim 10^{21} \text{ Hz}$) servono acceleratori di elettroni che raggiungono $\gamma \sim 10^{4 \div 5}$.



Capitolo 22

Oltre l'elettromagnetismo

Alcune delle equazioni seguenti sono parzialmente scritte in unità naturali in cui $c = \epsilon_0 = \mu_0 = \hbar = k_B = 1$.

Esercizio 22.1: Heisenberg-Euler

Correzioni quantistiche dovute agli elettroni aggiungono un termine non-lineare alla densità Lagrangiana effettiva che descrive l'elettromagnetismo in

$$\mathcal{L} = \epsilon_0 \frac{E^2 - c^2 B^2}{2} + \frac{\hbar c}{90\pi E_0^2} [(E^2 - c^2 B^2)^2 + 7c^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}] + \dots$$

dove $E_0 = e/4\pi\epsilon_0 r_e^2 \approx 1.8 \cdot 10^{20} \text{ V/m}$ è il campo elettrico di un elettrone al suo raggio classico r_e . Il coefficiente viene anche scritto $2\alpha^2/45m_e^4$. La serie completa è nota, ed ha una parte immaginaria che descrive come un campo elettrico più intenso di $E_{\text{cr}} = \alpha E_0$ forma coppie $e^- e^+$. Che effetti ha?

✚Soluzione: Per osservare il conseguente scattering luce/luce occorrono campi intensissimi ed inizia a diventare possibile oggi con brevi impulsi laser.

Esercizio 22.2: Assione

Ci sono motivi teorici per ipotizzare l'esistenza di una nuova particella leggera, detta assione e denotata con a . Tale estensione dell'elettromagnetismo sarebbe descritta dalla densità Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{(\partial_\mu a)^2}{2} - m_a^2 \frac{a^2}{2} - \frac{g_{a\gamma}}{4} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

dove $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$. Calcolare le equazioni del moto. Un background cosmologico di assione, $a = a_0 \cos(m_a t)$, potrebbe essere la materia oscura. Quali effetti fisici produce?

✚Soluzione: Le equazioni del moto in notazione relativistica sono

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} \sim g_{a\gamma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\nu a) F_{\rho\sigma}, \quad (\square + m_a^2) a = -\frac{g_{a\gamma}}{4} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

In notazione non-relativistica esse diventano

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -g_{a\gamma} \mathbf{B} \cdot \nabla a, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} - g_{a\gamma} (\mathbf{E} \times \nabla a - \mathbf{B} \dot{a}), \quad (\square^2 + m_a^2) a = g_{a\gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

Questo significa che il campo assionico cosmologico in un campo magnetico costante genera un'onda di frequenza m_a . In maniera più formale, questo può essere visto in maniera più generale notando che, definendo $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - g_{a\gamma} a \mathbf{B}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B} + g_{a\gamma} a \mathbf{E}$, le prime due equazioni possono essere riscritte come

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}}'.$$