Dispense di Geometria

Ludovico Piazza

Anno accademico 2019-2020

Indice

• Primo Semestre

Prossimamente...

• Secondo Semestre

0.1 Riepilogo

Prima di continuare con il programma riprendiamo alcuni concetti affrontati al termine del primo semestre.
Dato V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ tale che $\dim V = n$, possiamo considerare il quoziente ${}^{\mathrm{End}(V)}/_{\sim}$ con la relazione $\sim$ (detta di *coniugazione* o *similitudine* nel caso matriciale) definita nella seguente maniera:

$$g \sim f \Leftrightarrow \exists h \in GL(V) : g = h \circ f \circ h^{-1}.$$

Rinfreschiamo velocemente alcuni invarianti di $\sim$.

Invarianti di $\sim$ che ci torneranno utili

Spec(f) : lo spettro di f è definito come $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ è un autovalore di } f\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \dim(\ker(f - \lambda id)) > 0\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid V_\lambda \neq \{0\}\}$ dove V_λ è l'autospazio relativo a λ.
$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f) : \dim V_\lambda$ è anche detta molteplicità geometrica di λ.

$p_f(t)$: il polinomio caratteristico è definito come $\det(A - tI) \in \mathbb{K}[t]$ con $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ per ogni $\mathfrak{B}$ base di V essendo indipendente dalla sua scelta.
Inoltre $\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \Leftrightarrow p_f(\lambda) = 0$.

m_λ: molteplicità algebrica di λ nel polinomio caratteristico.

I(f) : l'ideale di f è definito come $\{p(f) \in \mathbb{K}[t] \mid p(f) = 0 \in \mathrm{End}(V)\}$.
Poiché è un ideale principale possiede un unico generatore monico, cioè il polinomio monico di grado ≥ 1 minimo tra i polinomi di I(f) che denominiamo polinomio minimo e indicheremo con $q_f(t)$.
Per Cayley-Hamilton sappiamo anche che $p_f(t) \in \mathrm{I}(f)$, ovvero che $q_f(t) \mid p_f(t)$.

Riprendiamo inoltre anche le definizioni di endomorfismi triangolabili $\mathcal{T}(V)$ ed endomorfismi diagonalizzabili $\mathcal{D}(V)$.

Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ si dice **diagonalizzabile** $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$.
Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ si dice **triangolabile** $\Leftrightarrow p_f(t)$ è completamente fattorizzabile su $\mathbb{K}[t]$. Di conseguenza $\mathrm{End}(V) = \mathcal{T}(V)$ se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso.

1 Decomposizione Primaria

Per dimostrare il teorema di *Decomposizione Primaria* abbiamo bisogno preliminarmente di dimostrare il seguente lemma.

Lemma 1.0.1. *Dati* $f \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ e $p(t) \in \mathrm{I}(f)$ *allora abbiamo che* $p(\lambda) = 0$.

Dimostrazione. Sia $v \in V, v \neq 0$ con v autovettore relativo a λ.
Poichè $p(t) \in \mathrm{I}(f)$ allora $p(f) = 0$ e a maggior ragione $p(f)(v) = 0$.

Esplicitiamo il polinomio: $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_k t^k$, quindi:
$p(f) = a_0\mathrm{Id} + a_1 f + ... + a_k f^k$;
$p(f)(v) = a_0 v + a_1 \lambda v + ... + a_k \lambda^k v$ infatti:
$f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$ ma per induzione si può vedere che vale allo stesso modo per ogni esponente $h \in \mathbb{N}$.

$p(f)(v) = (a_0 + a_1\lambda + ... + a_k\lambda^k)v = p(\lambda) \cdot v \Rightarrow p(\lambda) = 0$ visto che avevamo posto $v \neq 0$. □

Corollario 1.0.1. $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f) : q_f(\lambda) = 0$.

Teorema 1.1. *Dati* $f \in \mathrm{End}(V)$, $p(t) \in \mathrm{I}(f) : p(t) = a_1(t)a_2(t)$ *con* $(a_1, a_2) = 1$ *allora:*

$$V = \ker(a_1(f)) \oplus \ker(a_2(f)) \text{ con i due addendi f-invarianti.}$$

Dimostrazione. Poiché a_1 e a_2 sono coprimi allora per l'identità di Bezout sappiamo che $\exists m_1(t), m_2(t) \in \mathbb{K}[t] : 1 = m_1(t)a_1(t) + m_2(t)a_2(t)$.

Valutando in f ottengo:
$\mathrm{Id} = (m_1(f) \circ a_1(f))(v) + (m_2(f) \circ a_2(f))(v)$.

Notiamo che $(m_1(f) \circ a_1(f))(v) \in \ker(a_2(f))$ e $(m_2(f) \circ a_2(f))(v) \in \ker(a_1(f))$, infatti:
$a_2(f)(\ (m_1(f) \circ a_1(f))(v)\ ) =$
$= (\ a_2(f) \circ m_1(f) \circ a_1(f)\ )(v) =$
$= (\ m_1(f) \circ a_1(f) \circ a_2(f)\ )(v) =$
$= (\ m_1(f) \circ p(f)\ )(v) = 0$ perché $p(f)(v) = 0$.

Quindi possiamo affermare che $V = \ker(a_1(f)) + \ker(a_2(f))$.
É vero che $\ker(a_1(f)) \cap \ker(a_2(f)) = 0$?

Sì, perché:
$v \in \ker(a_1(f)) \cap \ker(a_2(f)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\ m_1(f) \circ a_1(f)\ )(v) = 0$ e $(\ m_2(f) \circ a_2(f)\ )(v) = 0$.
Poiché V è la somma dei due nuclei, ogni v può essere scritto come combinazione lineare dei due spazi vettoriali, tuttavia l'unica combinazione lineare che soddisfa la condizione data è $v = 0 + 0 = 0$.

Conclusione: $V = \ker(a_1(f)) \oplus \ker(a_2(f))$.
La f-invarianza, invece, è lasciata come esercizio. □

2 Forma Normale di Jordan

Per ottenere un risultato più profondo possiamo restringerci al caso $\mathcal{T}(V)$, in cui $p_f(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}...(t-\lambda_k)^{m_k}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$.
Per il lemma 1.0.1 sappiamo che $q_f(t) = (t-\lambda_1)^{r_1}...(t-\lambda_k)^{r_k}$ con $\forall j = 1, ..., k$: $1 \leq r_j \leq m_j$. Applicando la decomposizione primaria a $p_f(t)$ troviamo che:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} \ker(f - \lambda_j \mathrm{I})^{m_j}.$$

I $\ker(f-\lambda_j\mathrm{I})^{m_j}$ sono chiamati **autospazi generalizzati** e si possono anche indicare con W_j oppure $W(\lambda_j)$.

Osservazione 2.0.1. Dato $g \in \mathrm{End}(V)$:
$\ker(g) \subseteq \ker(g^2) \subseteq ... \subseteq \ker(g^k)$ e più in particolare $V_\lambda(f) \subseteq \ker(f-\lambda\mathrm{I})^{m_\lambda}$.

Lemma 2.0.1. $p_{f|W_j} = \pm(t-\lambda_j)^{m_j}$.

Dimostrazione. Sappiamo che $V = \bigoplus_{j=1}^{k} W_j$.
Prendiamo la base adattata $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup ... \cup \mathfrak{B}_k$ di V con $\mathfrak{B}_i$ base di W_i. Allora

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{\mathfrak{B}_1}_{\mathfrak{B}_1}(f_{|w_1}) & & & \text{\Large 0} \\ & \mathcal{M}^{\mathfrak{B}_2}_{\mathfrak{B}_2}(f_{|w_2}) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \mathcal{M}^{\mathfrak{B}_j}_{\mathfrak{B}_j}(f_{|w_j}) \end{pmatrix}.$$

Quindi $\det(\mathcal{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(f) - t\mathrm{I}) = p_f(t)$ ma poiché la matrice di sopra è una matrice a blocchi può essere espressa come prodotto di matrici in maniera tale che, utilizzando Binet, otteniamo che $p_f(t) = \pm\, p_{f_{|W_1}}(t) \cdot ... \cdot p_{f_{|W_k}}(t)$.
Tuttavia, dal momento che gli autospazi generalizzati sono in somma diretta, $\forall i = 1, ..., k : p_{f_{|W_i}}(t) = \pm(t-\lambda_i)^{m_i}$.
Ciò si ricava dal fatto che il polinomio non può contenere altre radici oltre a λ_i, infatti in caso contrario l'intersezione con gli altri autospazi non sarebbe banale. Inoltre il prodotto tra tutti i polinomi caratteristici delle restrizioni deve essere uguale al polinomio caratteristico di f, quindi λ_i deve avere molteplicità algebrica $m_{\lambda_i} \forall i$. $\square$

Come abbiamo precedentemente notato se:
$p_f(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}...(t-\lambda_k)^{m_k}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j \Leftrightarrow i \neq j$ allora:
$q_f(t) = (t-\lambda_1)^{r_1}...(t-\lambda_k)^{r_k}$ *con* $1 \leq r_j \leq m_j$.
Ma cosa sappiamo del polinomio minimo della restrizione a W_j? Sicuramente $q_{f_{|W_j}}(t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$ con $1 \leq s_j \leq m_j$, ma qual è la sua relazione con r_j?

Lemma 2.0.2. $\forall j = 1, ..., k : r_j = s_j$.

Dimostrazione. Se per assurdo avessimo $s_j < r_j$ allora avremmo anche un polinomio p di grado minore a quello di q_f tale che $p(f) = 0$.

Invece, se $r_j < s_j$ allora non esisterebbe una potenza di grado uguale a quello del polinomio minimo che si annulla in f.

$\square$

Lemma 2.0.3. *Se $g \sim f \Rightarrow g = h \circ f \circ h^{-1}$ allora:*

$$h(\bigoplus_{j=1}^{k} W_j(f)) = \bigoplus_{j=1}^{k} h(W_j(f)) = \bigoplus_{j=1}^{k} W_j(g).$$

Dimostrazione: è simile a quella già fatta precedentemente per gli autospazi.

Per studiare $\mathcal{T}/_{\sim}$ quindi ci siamo ridotti a studiare gli endomorfismi $g : W \to W$ con:

1. $\dim W = n$;
2. $p_g(t) = (t - \lambda)^m$;
3. $q_g(t) = (t - \lambda)^r$ tale che $1 \leq r \leq m$.

Osservazione 2.0.2. Se $\lambda = 0$ allora g è **nilpotente**.

Di seguito analizzeremo specificatamente il caso g nilpotente per semplificare i conti e la scrittura, tuttavia i casi $\lambda \neq 0$ vi possono essere facilmente ricondotti senza cambiamenti nella trattazione, infatti:
$g = \lambda \cdot \mathrm{Id} + (g - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \lambda \cdot \mathrm{Id} - h$ ponendo $h = g - \lambda \cdot \mathrm{Id}$.

Esercizio 2.1. h è nilpotente e inoltre $p_h(t) = t^m, q_h(t) = t^n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$.

Detto questo, h può quindi essere vista come la *parte nilpotente* di g.

Esercizio 2.2. Se g_1, g_2 sono endomorfismi del tipo appena descritto allora: $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow h_1 \sim h_2$.

Al momento su r abbiamo posto una sola restrizione: deve essere compreso tra 1 e m.
Proviamo, quindi, a studiarne i vari casi $1 \leq r \leq m$ partendo da quelli estremi.

Caso r=1

$r = 1 \Rightarrow g^1 = 0$.
Abbiamo a che fare con la matrice nulla e in generale con un multiplo dell'identità, quindi con una matrice diagonalizzabile.

Corollario 2.0.1. *f è diagonalizzabile se è triangolabile e il polinomio minimo è della forma:*
$q_f(t) = (t - \lambda_1) \cdot ... \cdot (t - \lambda_k)$.

Caso r=m

$r = m \Rightarrow g^{m-1} \neq 0,\ g^m = 0$.
Di conseguenza $v \neq 0 \Rightarrow g^{m-1}(v) \neq 0$ perchè stiamo lavorando in $\mathcal{T}(V)$.
Possiamo prendere quindi $\mathfrak{B} = \{g^{m-1}(v), g^{m-2}(v), ..., g(v), v\}$ che forma una base, detta **ciclica** di W rispetto a g; $\mathfrak{B}$ è anche chiamata **base di Jordan per *h*** quando ordinata con esponente decrescente.
Per vedere che è una base ci è sufficiente verificare che gli elementi sono tutti linearmente indipendenti visto che $\dim W = m$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\alpha_0 v + \alpha_1 g(v) + ... + \alpha_{m-1} g^{m-1}(v) = 0$.
Se applico a quest'ultimo g e ricordando che $g^m = 0$ otteniamo:
$\alpha_0 g(v) + ... + \alpha_{m-2} g^{m-1}(v) = 0$.
Reiterando m volte ottengo:
$\alpha_0 g^{m-1}(v) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$.
Reiterando più volte l'algoritmo si ottiene quindi che:
$\alpha_0 v + \alpha_1 g(v) + ... + \alpha_{m-1} g^{m-1}(v) = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{m-1} = 0$. $\square$

Se adesso scriviamo la matrice di cambiamento di base di g rispetto a $\mathfrak{B}$ otteniamo:

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \text{\huge 0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g)$ è anche detto **blocco di Jordan** di taglia m e ordine 0, inoltre si indica con $J(m, 0)$.

Nel caso in cui avessimo avuto una g generica allora:

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

dove λ è l'autovalore dell'endomorfismo.

Osservazione 2.0.3. Nei casi estremi, la forma normale della matrice è fatta di blocchi di Jordan di taglia r.

Osservazione 2.0.4. Avere una base ciclica è equivalente a poter rappresentare l'endomorfismo come blocco di Jordan.

Caso $1 < r < m$

Prima di addentrarci nel problema dobbiamo fare delle osservazioni che ci serviranno nelle dimostrazioni.

Prendiamo $f \in \mathrm{End}(V)$, di questo possiamo considerare la successione dei nuclei delle sue potenze e notare che: $\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \ker f^3 \subseteq \dots$
Tuttavia, possiamo affermare anche qualcosa di più preciso sui contenimenti di questi nuclei:

Lemma 2.0.4. $\ker f^k = \ker f^{k+1} \Rightarrow \forall s \geq k : \ker f^s = \ker f^{s+1}$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione.
È vero che $\ker f^k = \ker f^{k=1} \Rightarrow \ker f^{k+1} = \ker f^{k+2}$?
Sì, infatti:

- **$\ker f^{k+1} \subseteq \ker f^{k+2}$** è ovvio.

- **$\ker f^{k+1} \supseteq \ker f^{k+2}$:** Sia $v \in \ker f^{k+2} \Rightarrow f^{k+2}(v) = 0 \Leftrightarrow f^{k+1}(f(v)) = 0$.

Poichè noi sappiamo per ipotesi induttiva che $\ker f^{k+1} = \ker f^k$ allora:
$f^{k+1}(f(v)) = f^k(f(v)) = f^{k+1}(v) = 0$.
Questo ci dimostra che ogni elemento di $\ker f^{k+2}$ è contenuto in $\ker f^{k+1}$, cioè $\ker f^{k+2} \subseteq \ker f^{k+1}$.

□

Il lemma 2.0.4 applicato al caso che stavamo esaminando ci dice che:
$V_0 = \ker h \subsetneq \ker h^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker h^r = V$ con r grado del polinomio minimo di h.
Da questo possiamo anche ricavare una successione strettamente crescente delle dimensioni dei nuclei delle potenze di h: posto $d_j = \dim \ker h^j$, abbiamo:
$\dim V_0 = d_1 < \cdots < d_r = \dim V$.

Lemma 2.0.5. *Se h_1 e h_2 sono nilpotenti e coniugati allora hanno la stessa stringa di dimensioni.*

Dimostrazione. (non è stata fatta a lezione)
$h_1 \sim h_2 \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathrm{GL}(W) : h_2 = \beta \circ h_1 \circ \beta^{-1}$.
Quindi, $\forall v \in \ker h_1$:
$h_2(\beta(v)) = (\beta \circ h_1 \circ \beta^{-1})(\beta(v)) = (\beta \circ h_1 \circ \beta^{-1}\ circ\beta)(v) = (\beta \circ h_1)(v) = \beta(h_1(v)) = \beta(0) = 0$.
Abbiamo dimostrato quindi che $\beta(\ker h_2) \subseteq \ker h_1$, ma in maniera analoga si dimostra facilmente anche che $\beta^{-1}(\ker h_1) \subseteq \ker h_2 \Leftrightarrow \ker h_1 \subseteq \beta(\ker h_2)$, e quindi che $\ker h_1 \cong \ker h_2$ e quindi $\dim \ker h_1 = \dim \ker h_2$.
Poichè sappiamo che, dati due endomorfismi $f \sim g$, $\forall n \in N : f^n \sim g^n$, allora $\forall i \in N : i > 0 \Rightarrow \dim \ker h_1^i = \dim \ker h_2^i$, cioè la stringa delle dimensioni di h_1 e h_2 è la stessa. □

Osservazione 2.0.5. La stringa di dimensione è un'invariante per coniugio (ed è anche l'ultimo che individueremo nel corso delle lezioni).

Teorema 2.1. *h_1, h_2 nilpotenti $\Rightarrow$ $h_1 \sim h_2 \Leftrightarrow$ hanno la stessa stringa di dimensioni.*

Dimostrazione.
$\Rightarrow$: Vero per il lemma 2.0.5.
$\Leftarrow$: Sia $h : V \to V$ nilpotente con stringa di dimensioni $d_1 < \cdots < d_r$.
Dal momento che $\ker h^{r-1} \subsetneq \ker h^r = V$ so che esiste uno spazio vettoriale U tale che $V = \ker h^{r-1} \oplus U$ con $\dim U = d_r - d_{r-1} = t$.
Prendiamo una base di U: $u_1, \ldots, u_t$.
Se ad essa applichiamo h otteniamo $h(u_1), \ldots, h(u_t)$.

Osservazione 2.0.6.

1. $\mathrm{Span}(h(u_1), \ldots, h(u_t)) \subseteq \ker h^{r-1}$
2. $h(u_1), \ldots, h(u_t)$ sono linearmente indipendenti
3. $\mathrm{Span}(h(u_1), \ldots, h(u_t)) \cap \ker h^{r-2} = \{0\}$.

Dimostrazione.

1. Ovvio perché $h^{r-1}(h(u_j)) = h^r(u_j) = 0$.

2. $a_1h(u_1) + \cdots + a_th(u_t) = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_t = 0$?
   Sì perché: $a_1h(u_1) + \cdots + a_th(u_t) = h(a_1u_1 + \cdots + a_tu_t) = 0$ quindi $u = a_1u_1 + \cdots + a_tu_t \in \ker h \subseteq \; ker h^{r-1}$.
   Ma u è anche un elemento di U, quindi $u \in U \cap \; \ker h^{r-1} = \{0\}$ perché sono in somma diretta, quindi in conclusione: $u = 0$, ma essendo $u_1, \ldots, u_t$ linearmente indipendenti $\Rightarrow a_1 = \cdots = a_t = 0$.

3. $h^{r-2}(a_1h(u_1) + \cdots + a_th(u_t)) = 0 \Leftrightarrow h^{r-1}(a_1u_1 + \cdots + a_tu_t) = 0$ e da qui in poi si continua la dimostrazione come per il punto *2.*

□

Quindi abbiamo una base di $U : u_1, u_2, \ldots, u_t$ tale che se le applichiamo h soddisfa 1., 2. e 3.
Adesso possiamo riapplicare la costruzione su $\ker h^{r-1}$ così da far vedere che $\exists U' = \mathrm{Span}(h(u_1), \ldots, h(u_t), u_{t+1}, \ldots, u_s)$ tale che: $\ker f^{r-2} = \ker f^{r-1} \oplus U'$.
Possiamo quindi nuovamente applicare h in questo caso a U' così da ottenere $h^2(u_1), \ldots, h^2(u_t), h(u_{t+1}), \ldots, h(u_s)$ che soddisfa 1., 2. e 3.
Possiamo reiterare il ragionamento più volte in maniera tale da ottenere:

$$\begin{bmatrix} u_1, & \ldots & u_t & & & & \\ h(u_1,) & \ldots & h(u_t), & u_{t+1}, & \ldots & u_s & \\ h^2(u_1), & \ldots & h^2(u_t), & h(u_{t+1}), & \ldots & h(u_s), & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h^{r-1}(u_1), & \ldots & h^{r-1}(u_t), & h^{r-2}(u_{t+1}), & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

Notiamo che i gradini di questa tabella dipendono esclusivamente dalla stringa delle dimensioni; inoltre, ognuna delle sue colonne forma una base ciclica il cui Span è un sottospazio C_j.
Per come abbiamo costruito le basi di $U^{(k)}$ però possiamo vedere facilmente che:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r-1} C_j.$$

Ma poiché ogni C_j possiede una base ciclica, riordinandola otteniamo una base di Jordan e quindi un suo corrispondente blocco di Jordan.
Di conseguenza trovo una base rappresentativa di f composta da blocchi di Jordan le cui taglie dipendono esclusivamente dalla stringa delle dimensioni. □

Osservazione 2.0.7. La stringa delle dimensioni è un invariante completo per coniugio.

Dalla costruzione usata per la dimostrazione del teorema 2.1 segue che:

Teorema 2.2 (Forma Normale di Jordan nilpotente).
Per ogni h nilpotente con stringa $1 \leq d_1 < \cdots < d_r = \dim V$ esiste una base di

Jordan $\mathfrak{B}$ per h tale che:

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(h) = \begin{pmatrix} J(s_1,0) & & & \mathit{0} \\ & J(s_2,0) & & \\ & & \ddots & \\ \mathit{0} & & & J(s_k,0) \end{pmatrix}$$

e $\mathcal{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(h)$ è unica a meno di riordinarne i blocchi. Per convenzione, tuttavia, si preferisce indicare come forma normale quella con blocchi disposti con taglia decrescente.

Osservazione 2.0.8. Nel caso generale abbiamo che la forma di Jordan è:

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{B}}(h) = \begin{pmatrix} J(s_1,\lambda) & & & 0 \\ & J(s_2,\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J(s_k,\lambda) \end{pmatrix}.$$

2.1 Forma Normale di Jordan reale e complessificazione

Riepiloghiamo alcune nozioni note su $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e la loro relazione. Innanzitutto entrambi sono campi e $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dal momento che ogni elemento $z \in \mathbb{C}$ è definito come una coppia di reali $(x, y) := x + iy$ con le note operazioni di somma e prodotto tra complessi.
A noi interessa particolarmente ricordare anche l'operazione di coniugio all'interno dei complessi, un'involuzione definita nella seguente maniera:
dato $z = x + iy$ allora $\bar{z} = x - iy$.
Il motivo per cui lo si è riportato alla memoria è che il sottocampo di $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$ può essere definito in due maniere equivalenti. La più ovvia è quella per cui $\mathbb{R} \cong \{a + ib \in \mathbb{C} \mid b = 0\}$, ma possiamo anche vederlo come $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}$, ovvero i punti fissi dell'operazione di coniugio.

Tornando a trattare di spazi vettoriali, consideriamo V sul campo di scalari $\mathbb{R}$.
A V si può sempre associare la sua complessificazione $V_{\mathbb{C}}$ definendola come il prodotto diretto $V \times V$, i cui elementi sono coppie (X, Y) - che solitamente denotiamo con $X + iY$ per assonanza con i complessi. Su di esso definiamo le seguenti operazioni per renderlo un $\mathbb{C}-$spazio vettoriale:

- $+ : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, \quad (X + iY) + (A + iB) = (X + A) + i(Y + B).$
- $\cdot : \mathbb{C} \to V_{\mathbb{C}}, \quad (x + iy) \cdot (X + iY) := (xX - yY) + i(yX + xY).$

Anche in $V_{\mathbb{C}}$ possiamo definire l'operazione di coniugio:
$Z = X + iY \Rightarrow \bar{Z} = X + i(-Y) := X - iY.$
Analogamente ai reali inoltre:
$V \cong \{Z = X + iY \in V_{\mathbb{C}} \mid Y = 0\} = \{Z \in V_{\mathbb{C}} \mid \bar{Z} = Z\}.$

Proposizione 2.1. *Sia $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, allora è anche una base di $V_{\mathbb{C}}$ ed è detta **base reale** di $V_{\mathbb{C}}$.*

Dimostrazione. $\forall Z \in V_{\mathbb{C}} : Z = X + iY \Rightarrow Z = (\sum_{i=1}^{n} x_i v_i) + i(\sum_{j=1}^{n} y_j v_j)$.
Ciò ci mostra che $\mathfrak{B}$ genera $V_{\mathbb{C}}$.
Ci manca da verificare la lineare indipendenza dei suoi elementi:

$$z = \sum_{i=1}^{n}(z_i v_i) = 0 \Rightarrow$$

(posto $z_i = \alpha_i + \beta_i$)

$$\Rightarrow z = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i v_i) + i\sum_{j=1}^{n}(\beta_j v_j) = 0 + i0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i v_i) = \sum_{j=1}^{n}(\beta_j v_j) = 0$$

ma poiché $\mathfrak{B}$ è linearmente indipendente in V allora:
$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0 \Rightarrow z_1 = \cdots = z_n = 0$. □

Corollario 2.1.1. $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}}$.

Sia $f \in \mathrm{End}(V)$, ad esso si associa $f_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ endomorfismo complessificato definito come segue, in maniera da renderlo $\mathbb{C}-$lineare:

$$f_{\mathbb{C}}(Z) = f_{\mathbb{C}}(X + iY) = f(X) + if(Y).$$

Osservazione 2.1.1. $p_f(t) = p_{f_{\mathbb{C}}}(t) \in \mathbb{R}[t]$.
Dimostrazione: Fissata una base reale $\mathfrak{B}$ di $V_{\mathbb{C}}$ allora: $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(V)(f) = \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(V_{\mathbb{C}})(f_{\mathbb{C}})$.
Da qui la conclusione è evidente.

Osservazione 2.1.2. Se $V = \mathbb{R}^n$ allora $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$ e l'iniezione da V in $V_{\mathbb{C}}$ non è altro che quella standard da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$.
Quindi se $A \in M(n, \mathbb{R}) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ allora $A_{\mathbb{C}} \in M(n, \mathbb{C}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$.

Dal corso di Aritmetica sappiamo già che i polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[t]$ sono soltanto di primo e di secondo grado. Più in particolare ognuno di quest'ultimi, quando scomposto in $\mathbb{C}[t]$, possiede due radici $\alpha, \bar{\alpha}$ distinte e per questo sarà indicato con $q_a(t)$.
Da ciò consegue che il polinomio caratteristico in $\mathbb{R}[t]$ può essere sempre così scomposto in fattori primi:

$$p_f(t) = \prod_i (x - \lambda_i) \cdot \prod_j (q_{\alpha_k}(t)) = p_{f_{\mathbb{C}}}(t).$$

Consideriamo quindi le rispettive decomposizioni primarie nel campo reale e nel campo complesso:

$$V = \big(\bigoplus_{j=1}^{s} \ker(f - \lambda_j \mathrm{id}_V)^{n_j}\big) \oplus \big(\bigoplus_{l=1}^{r} \ker q_{\alpha_l}(f)^{m_l}\big);$$

$$V_{\mathbb{C}} = \big(\bigoplus_{j=1}^{s} \ker(f_{\mathbb{C}} - \lambda_j \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{n_j}\big) \oplus \big[\bigoplus_{l=1}^{r} (\ker(f_{\mathbb{C}} - \alpha_j \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{m_l} \oplus \ker(f_{\mathbb{C}} - \bar{\alpha_j} \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{m_l})\big].$$

Notiamo che $\forall \lambda_j \in \mathrm{Spec}(f) : \ker(f_{\mathbb{C}} - \lambda_j \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})^{n_j}$ è il complessificato di $\ker(f - \lambda_j \mathrm{id}_V)^{n_j}$ e lo contiene.
Ogni base di Jordan per f_{W_j} è una base di Jordan reale per $f_{\mathbb{C}\,|W_j}$: ciò ci dice che non c'è nulla di diverso nella forma normale di Jordan della complessificata

se trattiamo una matrice triangolabile.

Se la matrice non è triangolabile, tuttavia, il polinomio possiede almeno una radice non reale $\alpha \in \mathbb{C}$; il complessificato di $\ker_{q_\alpha}(f)$ è:
$\ker_{q_\alpha}(f_\mathbb{C})^m = \ker(f_\mathbb{C} - \alpha \cdot \mathrm{id}_{V_\mathbb{C}})^m \oplus \ker(f_\mathbb{C} - \bar{\alpha} \cdot \mathrm{id}_{V_\mathbb{C}})^m$.

Proposizione 2.2. $\ker(f_\mathbb{C} - \bar{\alpha} \cdot \mathrm{id}_{V_\mathbb{C}})^m = \overline{\ker(f_\mathbb{C} - \alpha \cdot \mathrm{id}_{V_\mathbb{C}})^m}$.

Dimostrazione. Dato un vettore v che appartiene al $\ker(f_\mathbb{C} - \bar{\alpha} \cdot I)^m$ allora:

$$\begin{aligned}
&(f_\mathbb{C} - \bar{\alpha} \cdot I)^m v = 0 \\
\Leftrightarrow &\overline{(f_\mathbb{C} - \bar{\alpha} \cdot I)^m v} = \bar{0} = 0 \\
\Leftrightarrow &(f_\mathbb{C} - \alpha \cdot I)^m \bar{v} = 0.
\end{aligned}$$

Quindi $v \in \ker(f_\mathbb{C} - \bar{\alpha} \cdot I)^m \Leftrightarrow v \in \overline{\ker(f_\mathbb{C} - \alpha \cdot \mathrm{id}_{V_\mathbb{C}})^m}$. □

Se $\mathfrak{B}_\mathbb{C} = \{z_1, \ldots, z_m\}$ è una base di Jordan per $f_\mathbb{C}$ ristretto a $\ker(f_\mathbb{C} - \alpha \cdot \mathrm{id}_{V_\mathbb{C}})^m$ allora $\overline{\mathfrak{B}_\mathbb{C}} = \{\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m}\}$ è una base di Jordan per la restrizione a $\ker(f_\mathbb{C} - \bar{\alpha} \cdot \mathrm{id}_{V_\mathbb{C}})^m$.
Queste due basi determinano la stessa matrice in forma normale di Jordan complessa, ad eccezione della diagonale che in una è composta soltanto da α e nell'altra da $\bar{\alpha}$. Per ogni blocco associato a un fattore irridicubile di grado due in $\mathbb{R}[x]$ abbiamo, quindi, una base complessa $(\mathfrak{B}_\mathbb{C}, \overline{\mathfrak{B}_\mathbb{C}})$ che la rappresenta in forma normale di Jordan.
A meno di riordinare gli elementi della base possiamo ottenere m blocchi sulla diagonale del tipo:

$$\begin{pmatrix} J(\alpha, h) & 0 \\ 0 & J(\bar{\alpha}, h) \end{pmatrix}.$$

Possiamo però, da $(\mathfrak{B}_\mathbb{C}, \overline{\mathfrak{B}_\mathbb{C}})$, ricavare una base reale che genera lo stesso spazio. Possiamo infatti prendere le componenti reali e complesse della base in questo modo:

$$\forall j : x_j = \frac{z_j + \overline{z_j}}{2i}, \qquad y_j = \frac{z_j - \overline{z_j}}{2}.$$

I vettori $\mathfrak{B}_\mathbb{R} = \{x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m\}$ possono essere ottenuti da $(\mathfrak{B}_\mathbb{C}, \overline{\mathfrak{B}_\mathbb{C}})$ attraverso una matrice di cambiamento di base, quindi sono anch'essi una base di $\ker_{q_\alpha}(f_\mathbb{C})^m$, più particolarmente sono una **base di Jordan reale** per la restrizione di f a $\ker_{q_\alpha}(f)^m$, associata alla coppia di basi di Jordan coniugate $(\mathfrak{B}_\mathbb{C}, \overline{\mathfrak{B}_\mathbb{C}})$.
Rappresentando l'applicazione lineare f in $\mathfrak{B}_\mathbb{R}$ ottengo:

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{B}_\mathbb{R}}_{\mathfrak{B}_\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} M & I & & \Large 0 \\ & M & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ \Large 0 & & & M \end{pmatrix}$$

con

$$M = \rho \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Prodotti scalari

Definizione 3.1 (Prodotto scalare).
Un prodotto scalare ϕ su un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V è un'**applicazione bilineare simmetrica**, ovvero una funzione definita nella seguente maniera:
$\phi : V \times V \to K$
$\phi(v_1 + v_2,\ w) = \phi(v_1,\ w) + \phi(v_2,\ w) \qquad \forall v_1, v_2, w \in V$
$\phi(v,\ w_1 + w_2) = \phi(v,\ w_1) + \phi(v,\ w_2) \qquad \forall v, w_1, w_2 \in V$
$\phi(\alpha v,\ w) = \phi(v,\ \alpha w) = \alpha\phi(v,\ w) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in V$
$\phi(v,\ w) = \phi(w,\ v) \qquad \forall v, w \in V$

Se $V = \mathbb{K}^n$ allora $\phi(v, w) = v^\intercal A w$ con A definito nella seguente maniera:
$a_{i,j} = \phi(e_i, e_j) = e_i^\intercal A e_j$.
Ciò è vero perché, dati due vettori
$v = (v_1, \dots, v_n)^\intercal = v_1 \cdot e_1 + \dots + v_n \cdot e_n$,
$w = (w_1, \dots, w_n)^\intercal = w_1 \cdot e_1 + \dots + w_n \cdot e_n$
allora $\phi(v, w) = \phi(v_1 \cdot e_1 + \dots + v_n \cdot e_n,\ w_1 \cdot e_1 + \dots + w_n \cdot e_n)$ che sviluppato con la bilinearità diventa:

$$\phi(v, w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(v_i \cdot \phi(e_i, e_j) \cdot w_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(v_i \cdot a_{i,j} \cdot w_j) = v^\intercal A w.$$

Naturalmente, per poter rendere simmetrico il prodotto scalare, anche A deve esserlo.

Osservazione 3.0.1. Il prodotto scalare in $\mathbb{K}^n$ associato alla matrice simmetrica A solitamente si usa indicare con la notazione: ϕ_A.

3.1 Isometria e congruenza

Definizione 3.2 (Isometria).
$f : (V, \phi) \to (W, \psi)$ si dice isometria se è un **isomorfismo lineare che preserva il prodotto scalare**, ovvero $\forall v_1, v_2 \in V : \phi(v_1, v_2) = \psi(f(v_1), f(v_2))$.

Si nota facilmente che *essere isometrici* è una relazione di equivalenza.
Nasce spontanea, quindi, la domanda su quali siano gli **invarianti** di questa relazione: il più evidente è che $\dim V = \dim W$ dal momento che un'isometria è anche un isomorfismo, ma naturalmente questo non costituisce un'invariante completo: se non fosse così, tutti gli spazi della stessa dimensione sarebbero automaticamente isometrici (di esempi ne possono essere fatti molti).

Per ricercare gli invarianti per isometria possiamo anche considerare una variante del problema: quando (V, ϕ) è isometrico a (V, ψ)?
In questo caso, un'isometria è un endomorfismo $f \in GL(V)$ che preserva i prodotti scalari. Tuttavia, non è difficile notare che **i due problemi sono equivalenti**.

Consideriamo uno spazio vettoriale W isomorfo a V e lo muniamo del prodotto scalare φ. Poiché V e W sono isomorfi possiamo sempre trasportare φ su V attraverso un isomorfismo $f : V \to W$:

$$\varphi_V(v, w) := \varphi(f(v), f(w)).$$

In questa maniera abbiamo anche fatto in modo che f sia un'isometria, ma dal momento che *essere isometrici* è una relazione di equivalenza,

$$(V,\phi) \text{ isometrico a } (W,\varphi) \Leftrightarrow (V,\phi) \text{ isometrico a } (V,\varphi_V).$$

Definizione 3.3 (Congruenza)**.**
Dati $A, B \in \mathrm{M}(\mathrm{n}, \mathbb{K})$, A si dice **congruente** a B se

$$\exists P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) : B = P^\intercal A P.$$

Proposizione 3.1. *Dato $V = \mathbb{K}^n$ allora*

$$(V,\ \phi_A) \textit{ isometrico a } (V,\ \phi_B) \Leftrightarrow A \textit{ congruente a } B.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&(V,\ \phi_A) \text{ isometrico a } (V,\ \phi_B)\\
&\Leftrightarrow \forall v, w \in \mathbb{K}^n : \exists P \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) : (Px)^\intercal B(Py) = x^\intercal(P^\intercal BP)y = x^\intercal Ay\\
&\Leftrightarrow A = P^\intercal BP.
\end{aligned}$$

□

Osservazione 3.1.1. Dato (V,ϕ) e una sua base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ allora possiamo definire $M = M_{\mathfrak{B}}(\phi)$ (**matrice che rappresenta $\boldsymbol{\phi}$ rispetto a $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$**) con $m_{i,j} = \phi(v_i, v_j)$ in maniera tale che:

$$\phi(v,w) = [v]_{\mathfrak{B}}^\intercal M[w]_{\mathfrak{B}}.$$

Infatti, poiché $[v]_{\mathfrak{B}}^\intercal M[w]_{\mathfrak{B}}$ è un'applicazione bilineare in v e w, ci basta verificare che abbia gli stessi valori del prodotto scalare per ogni coppia di elementi della base $\mathfrak{B}$:

$$\forall v_i, v_j \in \mathfrak{B} : [v_i]_{\mathfrak{B}}^\intercal M[v_j]_{\mathfrak{B}} = e_i^\intercal M e_j = m_{i,j} = \phi(v_i, v_j).$$

Con questo procedimento possiamo sempre ridurre il caso astratto (V,ϕ) a quello matriciale $(\mathbb{K}^n, \phi_M)$ usando l'isomorfismo $[\ ]_{\mathfrak{B}}$, che in questo caso è per ragioni tautologiche un'isometria.

Osservazione 3.1.2. Date due basi $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ di V, $M_{\mathfrak{B}}(\phi)$ è congruente a $M_{\mathfrak{B}'}(\phi)$ tramite $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(\mathrm{Id}_V)$.
La dimostrazione è banale e può essere svolta come esercizio.

Teorema 3.1. *Dati ϕ e ψ prodotti scalari di V, i seguenti fatti sono tra loro equivalenti:*

1. *(V,ϕ) e (V,ψ) sono isometrici;*
2. *$\forall\mathfrak{B}$ base di V : $M_{\mathfrak{B}}(\phi)$ e $M_{\mathfrak{B}}(\psi)$ sono congruenti;*
3. *$\exists\mathfrak{B}$ base di V : $M_{\mathfrak{B}}(\phi)$ e $M_{\mathfrak{B}}(\psi)$ sono congruenti;*
4. *$\exists\mathfrak{B}, \mathcal{D}$ basi di V : $M_{\mathfrak{B}}(\phi) = M_{\mathcal{D}}(\psi)$.*

La dimostrazione è identica all'analogo teorema sulla coniugazione di endomorfismi.

Studiare le restrizioni dei prodotti scalari potrebbe essere molto interessante per fornirci maggiori informazioni sul comportamento globale, tuttavia abbiamo bisogno preliminarmente di alcune definizioni e proposizioni.

3.2 Ortogonalità e radicale

Definizione 3.4 (Sottospazio ortogonale)**.**
Dato W sottospazio di V, definiamo così il sottospazio di V **ortogonale** a W:

$$W^{\perp} := \{v \in V \mid \forall w \in W : \phi(v, w) = 0\}.$$

Osservazione 3.1.3. Si può facilmente verificare che $W^{\perp}$ è uno spazio vettoriale.

Definizione 3.5 (Radicale)**.**
Dato (V, ϕ), il suo **radicale** é $\mathrm{Rad}(\phi) := V^{\perp}$.
ϕ è detto **non degenere** se $\mathrm{Rad}(\phi) = \{0\}$.

Osservazione 3.1.4. Dato $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale e ϕ un prodotto scalare di V, $\phi_{|W \times W}$ è un prodotto scalare per W. Solitamente lo indicheremo semplicemente con $\phi_{|W}$.

Proposizione 3.2. *Dato* $V = \mathbb{K}^n$, ϕ_A *non degenere* $\Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Rad}(\phi_A) &\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{K}^n : \phi_A(x, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : \phi_A(x, e_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : e_i^{\intercal} A x = A_i x = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker A. \end{aligned}$$

Di conseguenza, se ϕ_A è degenere allora $A \notin GL(n, \mathbb{K})$ perché avrebbe un nucleo non banale, ma ciò è equivalente a:

$$\phi_A \text{ non degenere } \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}).$$

$\square$

Corollario 3.2.1. $\dim(\mathrm{Rad}(\phi_A)) = \dim(\ker A) = \dim V - \mathrm{rnk} A$.

Corollario 3.2.2. *La dimensione del radicale è un invariante per isometria (si verifica in maniera immediata con il corollario precedente).*

Proposizione 3.3. $V = W \oplus W^{\perp} \Leftrightarrow \phi_{|W}$ *è non degenere.*

Dimostrazione. Intanto notiamo che W e il suo ortogonale sono in somma diretta se e solo se $\phi_{|W}$ è non degenere, infatti: $W \cap W^{\perp} = \mathrm{Rad}(\phi_{|W})$ ed esso è $\{0\}$ se e soltanto se $\phi_{|W}$ non è degenere.

Poniamo $\dim W = m$.
Noi sappiamo che $W + W^{\perp} \subseteq V$, per studiarne l'uguaglianza ci è sufficiente osservare le dimensioni dei due sottospazi, infatti se $\phi_{|W}$ non è degenere:
$W \oplus W^{\perp} = V \Leftrightarrow \dim W + \dim W^{\perp} = \dim V \Leftrightarrow \dim W^{\perp} = n - m$.
Prendiamo una base di W e la estendiamo a $\mathfrak{B}$ base di V.
Definiamo quindi $A \in M(n, m, \mathbb{K})$ costituita dalle prime m righe di $M_{\mathfrak{B}}(\phi)$.

Sappiamo che $v \in W^{\perp} \Leftrightarrow A[v]_{\mathfrak{B}} = 0 \Leftrightarrow [v]_{\mathfrak{B}} \in \ker A$, da cui si ricava che $\dim W^{\perp} = \dim(\ker A)$.
Tuttavia, noi sappiamo che $\mathrm{rnk}(A) \leq m$ vista la sua taglia, ma dal momento che $\phi_{|W}$ non è degenere allora possiamo dire che la sottomatrice $m \times m$ in alto a sinistra (cioè $M_{\mathfrak{B}}(\phi_{|W})$) ha rango m, di conseguenza $\mathrm{rnk}A \geq m$, quindi $\mathrm{rnk}A = m$.
Concludendo abbiamo che $\dim W^{\perp} = \dim(\ker A) = n - \mathrm{rnk}A = n - m$. □

Corollario 3.3.1. *Se $\phi_{|W}$ non degenere allora* $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$.

Per comprendere meglio l'ortogonalità dobbiamo innanzitutto notare che non sempre si comporta nella maniera intuitiva a cui siamo abituati, ad esempio possiamo soltanto affermare in generale che $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$, infatti $\phi_{|W}$ non degenere non implica che lo sia anche $\phi_{|W^{\perp}}$: in un caso simile avremmo $W^{\perp} \cap (W^{\perp})^{\perp} \neq \{0\}$, cosa impossibile se $W = (W^{\perp})^{\perp}$.
Per studiare meglio questi sottospazi proviamo a generalizzare il corollario 3.3.1:

Proposizione 3.4. $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W + \dim(W \cap \mathrm{Rad}(\phi))$.

Dimostrazione. Consideriamo la seguente decomposizione in forma diretta:
$V = W' \oplus (W \cap \mathrm{Rad}(\phi)) \oplus Z \oplus T$,
con $W = W' \oplus (W \cap \mathrm{Rad}(\phi))$ e $\mathrm{Rad}(\phi) = (W \cap \mathrm{Rad}(\phi)) \oplus Z$.

Prendendo una base $\mathfrak{B}$ adattata alla precedente decomposizione, possiamo procedere con una dimostrazione analoga a quella svolta per la proposizione 3.3. □

Dal momento che lavorare con un prodotto scalare degenere ci causa dei problemi, come visto nelle precedenti proposizioni, proviamo a ricavare da (V, ϕ) una struttura che abbia un radicale banale.

Consideriamo lo spazio con prodotto scalare non degenere **canonicamente associato** a (V, ϕ): $\left(V \big/ \mathrm{Rad}(\phi) \, , \, \overline{\phi} \right)$ con $\overline{\phi}$ prodotto scalare definito come segue:

$$\overline{\phi}([v]_{\mathrm{Rad}(\phi)}, [w]_{\mathrm{Rad}(\phi)}) := \phi(v, w).$$

Tralasciando le rapide verifiche sulla buon definizione, osserviamo che possiamo connettere senza troppe difficoltà questo struttura appena definita con una restrizione del nostro prodotto scalare originario:

Proposizione 3.5. *Dato W uno spazio complementare di* $\mathrm{Rad}(\phi)$*, allora:*

1. *Definita la proiezione al quoziente $\pi_{|W} : (W, \phi_{|W}) \to \left(V \big/ \mathrm{Rad}(\phi) \, , \, \overline{\phi} \right)$, osserviamo che $\pi_{|W}$ è un'isometria;*
2. *$\phi_{|W}$ è non degenere.*

Dimostrazione. $\pi_{|W}$ è un ovviamente un isomorfismo in quanto ha nucleo banale ed è suriettivo, inoltre mantiene anche il prodotto scalare per definizione di $\overline{\phi}$, infatti:
$\forall (w, w') \in W \times W : \phi(w, w') = \overline{\phi}([w], [w'])$.

$\phi_{|W}$ è non degenere perché:

$$\begin{aligned} & w \in \mathrm{Rad}(\phi_{|W}) \\ \Rightarrow\ & w \in \mathrm{Rad}(\phi) \\ \Rightarrow\ & w = 0 \text{ perché } W \cap \mathrm{Rad}(\phi) = \{0\} \text{ essendo in somma diretta.} \end{aligned}$$

□

Corollario 3.5.1. *Dati W_1, W_2 spazi complementari di* $\mathrm{Rad}(\phi)$ *muniti rispettivamente di $\phi_{|W_1}$ e $\phi_{|W_2}$, essi sono* ***canonicamente isometrici*** *mediante $\pi^{-1}_{|W_2} \circ \pi_{|W_1}$.*

Tra le tante cose che possiamo associare ad un prodotto scalare vi è anche la **forma quadratica**, una generalizzazione della norma.

3.3 Basi ortogonali normalizzate e classificazione dei prodotti scalari

Definizione 3.6 (Forma quadratica)**.** Si dice forma quadratica associata a ϕ la seguente applicazione:

$$q_\phi : V \to \mathbb{K}, \qquad q_\phi(v) := \phi(v, v).$$

Possiamo notare però che il nostro prodotto scalare è determinato completamente dalla sua forma quadratica, infatti:

Proposizione 3.6 (Formula di polarizzazione)**.**

$$2 \cdot \phi(v, w) = q_\phi(v + w) - q_\phi(v) - q_\phi(w).$$

O se char $\mathbb{K} \neq 2$*:*

$$\phi(v, w) = \frac{q_\phi(v + w) - q_\phi(v) - q_\phi(w)}{2}.$$

La dimostrazione è banale e deriva dallo sviluppo per bilinearità del prodotto scalare.

Corollario 3.6.1. $q_\phi = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$.

D'ora in poi, a meno di specificare il contrario, la nostra discussione sui prodotti scalari sarà valida soltanto per campi di caratteristica diversa da 2, ma prima di continuarne lo studio diamo qualche definizione:

Definizione 3.7 (Vettore isotropo)**.** $v \in V$ si dice **isotropo** per ϕ se $q_\phi(v) = 0$.

Definizione 3.8 (Prodotto scalare anisotropo)**.** Il prodotto scalare ϕ di V si dice **anisotropo** se $q_\phi(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Osservazione 3.6.1. *Essere anisotropi* è una tesi più forte di *essere non degeneri*, infatti il primo implica il secondo.

Definizione 3.9 (Base ortogonale)**.** $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V si dice **ortogonale** per ϕ se:

$$\forall i, j \in \mathbb{N}_n, i \neq j : \phi(v_i, v_j) = 0.$$

Osservazione 3.6.2. $M_{\mathfrak{B}}(\phi)$ con $\mathfrak{B}$ base ortogonale è una matrice diagonale.

Teorema 3.2. *Ogni* (V, ϕ) *ammette basi ortogonali.*

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione stretta.
Se $\dim V = 1$ allora tutte le basi sono ortogonali.

Se $\dim V = n > 1$ allora possiamo considerare due casi.

- $q_\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow$ tutte le basi sono ortogonali;
- $q_\phi \neq 0 \Rightarrow \exists v \in V$ non isotropo.

  Ponendo $W = \text{Span}(v)$ abbiamo che $\phi_{|W}$ è non degenere. Ciò implica che $V = W \oplus W^\perp$ e anche che $\dim W^\perp = n - \dim W = n - 1$. A questo punto possiamo sfruttare l'ipotesi induttiva su $(W, \phi_{|W})$ e affermare che essa ammetta una base $\mathfrak{B}' = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ortogonale. Di conseguenza, anche la base $\mathfrak{B} = \{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ di V è ortogonale per ϕ.

□

Corollario 3.6.2 (Coefficiente di Fourier)**.** *Sfruttando la decomposizione primaria fatta qui sopra, ogni* $w \in V$ *può essere scritto in maniera unica nella forma:*

$$w = \lambda v + z \qquad \text{con } z \in W^\perp.$$

Presa la componente z *possiamo anche dire:*

$$z = w - \lambda v \in W^\perp \Rightarrow \phi(w - \lambda v, v) = 0.$$

Da questa semplice osservazione possiamo ricavare, attraverso lo sviluppo per bilinearità, una forma esplicita per λ*:*

$$\lambda = \frac{\phi(w, v)}{\phi(v, v)}.$$

λ *è anche noto come* ***coefficiente di Fourier*** *di* w *rispetto al vettore non isotropo* v*.*

Osservazione 3.6.3. La proiezione ortogonale di w sulla retta W generata da v è sempre: $\lambda v = \frac{\phi(w,v)}{\phi(v,v)} v$.
La proiezione ortogonale di w su $W^\perp$ è sempre: $z = w - \frac{\phi(v,w)}{\phi(v,v)} v$.

Il teorema 3.2, inoltre, ci dà delle ulteriori informazioni sul caso standard matriciale, infatti dato ϕ_A prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$ sappiamo che esiste una matrice D diagonale congruente ad A. Questo è equivalente a dire che per **ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale**.

La dimostrazione del teorema 3.2 ci può inoltre aiutare, congiuntamente all'uso dei coefficienti di Fourier, a costruire un algoritmo costruttivo che partendo da una base $\mathfrak{B}$ di V ci fornisca $\mathfrak{B}'$ base ortogonale di V.

Algoritmo 3.1 (Algoritmo di Lagrange)**.** Se $\phi = 0$ allora $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$ poiché tutte le sue basi sono ortogonali.
Se $\phi \neq 0$ allora cerchiamo un vettore non isotropo.
Abbiamo due possibilità: almeno un vettore v_i di $\mathfrak{B}$ è non isotropo, quindi pongo $v = v_i$; tutti i vettori di $\mathfrak{B}$ sono isotropi, quindi cerchiamo v_i, v_j non perpendicolari tra loro (se non esistono: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$) e poniamo $v = v_i + v_j$ che possiamo vedere non essere isotropo dalla formula di polarizzazione.

A questo punto se siamo nel secondo caso sostituiamo $v_i = v_i + v_j$, in ogni caso poi continuiamo scambiando eventualmente i vettori per porre $v = v_1$.
In questa maniera abbiamo quindi ottenuto una base con un primo vettore v_1 non isotropo, a questo punto possiamo porre $W = \mathrm{Span}(v_1)$ e decomporre $V = W \oplus W^\perp$. Se riuscissimo a determinare concretamente una base di $W^\perp$ potremmo completare la costruzione dell'algoritmo in maniera ricorsiva.
Ciò è infatti possibile proiettando i vettori $v_2, \ldots, v_n$ su $W^\perp$ ottenendo $w_2, \ldots, w_n$.
Siamo quindi riusciti a ottenere da $\mathfrak{B}$ una base $\hat{\mathfrak{B}} = \{v_1, w_2, \ldots, w_n\}$ in cui gli ultimi $n-1$ vettori formano una base di $W^\perp$.

□

Osservazione 3.6.4. Se ϕ anisotropo, l'algoritmo genera una base con la stessa bandiera di sottospazi di quella di partenza.

Adesso faremo una trattazione dei prodotti scalari anisotropi su $\mathbb{R}$ per poterne fornire una classificazione degli invarianti per isometria.

Definizione 3.10 (Prodotto scalare definito o semidefinito)**.** Un prodotto scalare ϕ si dice **definito positivo** se $\forall v \in V : q_\phi(v) > 0$, mentre **definito negativo** se: $q_\phi(v) < 0$.

Analogamente, un prodotto scalare φ si dice **semidefinito positivo** se $\forall v \in V : q_\varphi(v) \geq 0$, mentre **semidefinito negativo** $q_\psi(v) \leq 0$.

Proposizione 3.7. *Dato ϕ un prodotto scalare su V, un $\mathbb{R}-$spazio vettoriale:*

$$\phi \text{ anisotropo } \Leftrightarrow \phi \text{ definito positivo o negativo.}$$

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) è ovvio.
($\Rightarrow$) dimostriamolo per assurdo.
Supponiamo che ϕ anisotropo non sia definito, allora $\exists v, w \in V : q_\phi(v) > 0, q_\phi(w) < 0$.
$\forall t \in \mathbb{R} : z = w + tv \neq 0$ perchè $q_\phi(-tv) = t^2 q_\phi(v) \geq 0$, mentre $q_\phi(w) < 0$ di conseguenza non può succedere che $w = -tv$.
Proviamo quindi a vedere se esiste un valore di t per cui z sia isotropo:

$$q_\phi(z) = \phi(w, w) + 2t \cdot \phi(v, w) + t^2 \cdot \phi(v, v) = 0,$$

ma il discrimintante di quest'equazione di secondo grado è:

$$\Delta = 4\phi(v, w)^2 - 4\phi(w, w)\phi(v, v) > 0$$

di conseguenza possiede almeno due soluzioni, cioè esistono due vettori isotropi per ϕ non nulli. □

Nel momento in cui espandiamo la discussione al campo $\mathbb{C}$, invece, troviamo una caratterizzazione dei prodotti scalari anisotropi ancora più semplice, infatti:

Proposizione 3.8. *Dato ϕ un prodotto scalare su V, un $\mathbb{C}-$spazio vettoriale:*

$$\phi \textit{ anisotropo } \Leftrightarrow \phi \textit{ non degenere e } \dim V = 1.$$

Dimostrazione. Se $\dim V > 1$ allora esistono almeno due vettori v, w linearmente indipendenti, di conseguenza:
$\forall t \in \mathbb{C} : z = w + tv \neq 0$. Alla stessa maniera di prima cerchiamo un t per cui z sia isotropo, quindi otteniamo la seguente equazione di secondo grado:

$$q_\phi(z) = \phi(w, w) + 2t \cdot \phi(v, w) + t^2 \cdot \phi(v, v) = 0,$$

ma essendo $\mathbb{C}$ un campo algebricamente chiuso, ha sempre soluzione. □

Per poter cercare un'invariante completo per isometria per $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ possiamo intanto provare a trovare dei particolari rappresentanti in ogni classe di equivalenza. In particolare, sappiamo già che in ognuna di queste si trovano delle matrici diagonali, ma sarebbe bello poter trovare tra queste ultime qualcuna che abbia delle particolari proprietà. Quello che faremo di seguito sarà trovare delle **basi ortogonali normalizzate** nei $\mathbb{R}-$spazi vettoriali e $\mathbb{C}-$spazi vettoriali. Con questo termine intenderemo delle basi in cui tutti vettori hanno $q_\phi(v_i) = \pm 1$ o, più specificatamente, nel caso complesso $q_\phi(v_i) = 1$.

Algoritmo 3.2 (Costruzione di basi ortogonali normalizzate in $\mathbb{C}$)**.**
Data una qualsiasi base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonale di (V, ϕ), a meno di riordinarne i vettori, possiamo supporre che i primi m vettori non siano isotropi mentre i restanti sì.
Affermiamo che gli ultimi $n - m$ vettori formano una base del radicale: $M_\mathfrak{B}(\phi)$, essendo $\mathfrak{B}$ una base ortogonale, è una matrice diagonale di rango m, ma poiché $\mathrm{Span}(v_{m+1}, \ldots, v_n) \subseteq \mathrm{Rad}(\phi) \cong \ker M_\mathfrak{B}(\phi)$ ed entrambi hanno dimensione $n - m$ possiamo affermare che siano uguali, cioè che $v_{m+1}, \ldots, v_n$ sia una base del radicale.

Di conseguenza, $\forall i = 1, \ldots, m : q_\phi(v_i) = c_i \neq 0$.
Se effettuiamo un cambiamento di base che mantenga invariati gli ultimi $n - m$ vettori e che moltiplichi per degli scalari t_i i primi m otterremmo comunque una base $\mathfrak{B} =' \{v'_1, \ldots, v'_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ ortogonale.
In particolare: $\forall i = 1, \ldots, m : q_\phi(v'_i) = q_\phi(t_i \cdot v_i) = t_i^2 \cdot c_i$.
Di conseguenza, scegliendo come t_i una delle due radici quadrate di $\frac{1}{c_i}$ otterremmo una base $\mathfrak{B}'$ in cui:

$$\forall i = 1, \ldots, m : q_\phi(v'_i) = 1;$$
$$\forall i = m + 1, \ldots, n : q_\phi(v'_i) = 0.$$

Osservazione 3.8.1. $M'_\mathfrak{B}(\phi)$ definita come sopra è una matrice $n \times n$ della forma:

$$M'_\mathfrak{B}(\phi) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algoritmo 3.3 (Costruzione di basi ortogonali normalizzate in $\mathbb{R}$)**.**
L'algoritmo è molto simile a quello complesso, differisce soltanto nel cambiamento di base finale. Infatti, non esiste la radice di un numero negativo all'interno dei reali, di conseguenza, nel caso in cui v_i non isotropo abbia $q_\phi(v_i)$ positivo l'algoritmo sarà identico a quello complesso, mentre nel caso in cui sia negativo si prenderà $t_i = \sqrt{-\frac{1}{c_i}}$, così da ottenere $q_\phi(t_i \cdot v_i) = t_i^2 c_i = -1$.
Infine, a meno di riordinare i vettori della base ponendo tra i primi p quelli con q_ϕ positivo, otterremo una base $\mathfrak{B}'$ in cui:

$$\begin{aligned}
&\forall i = 1, \ldots, p : q_\phi(v_i') = 1; \\
&\forall i = p+1, \ldots, m : q_\phi(v_i') = -1; \\
&\forall i = m+1, \ldots, n : q_\phi(v_i') = 0.
\end{aligned}$$

Osservazione 3.8.2. $M'_{\mathfrak{B}}(\phi)$ definita come sopra è una matrice $n \times n$ della forma:

$$M'_{\mathfrak{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{m-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come possiamo notare, dal momento che sapevamo già che $\dim \mathrm{Rad}(\phi)$ fosse un'invariante, adesso abbiamo dimostrato che nei $\mathbb{C}-$spazi vettoriali è anche un **invariante completo**, ovvero

Teorema 3.3 (Teorema di Sylvester complesso)**.**
Dati (V, ϕ), (V, ψ) con V $\mathbb{C}-$spazio vettoriale:

$$\phi, \psi \textit{ isometrici } \Leftrightarrow \dim \mathrm{Rad}(\phi) = \dim \mathrm{Rad}(\psi).$$

Esiste inoltre anche una forma reale del teorema di Sylvester, ma prima di introdurlo dobbiamo presentare un paio di definizioni:

Definizione 3.11 (Indice di positività/negatività di ϕ)**.** Dato ϕ un prodotto scalare di V, definiamo l'**indice di positività** come segue:

$$i_+(\phi) = \max\{\dim W \mid W \text{ sottospazio di } V,\ \phi_{|W} \text{ definito positivo}\}.$$

Analogamente, l'**indice di negatività** è:

$$i_-(\phi) = \max\{\dim W \mid W \text{ sottospazio di } V,\ \phi_{|W} \text{ definito negativo}\}.$$

Definizione 3.12 (Segnatura di ϕ)**.** Si dice **segnatura di $\boldsymbol{\phi}$** la terna

$$\sigma(\phi) = (i_+(\phi), i_-(\phi), \dim \mathrm{Rad}(\phi)).$$

Teorema 3.4 (Teorema di Sylvester reale)**.** *Dati (V, ϕ), (V, ψ) con V $\mathbb{R}-$spazio vettoriale:*

$$\phi, \psi \textit{ isometrici } \Leftrightarrow \sigma(\phi) = \sigma(\psi).$$

Dimostrazione.
Prendiamo $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q, z_1, \ldots, z_k\}$ base ortonormale in cui i v_j danno degli ingressi positivi, i w_j negativi e i z_j formano una base del radicale. Proviamo a dimostrare che $i_+ = p$.

Posto $W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$, notiamo che $\phi_{|W}$ è definito positivo, di conseguenza $i_+ \geq p$.
Poniamo anche $Z = \text{Span}\{w_1, \dots, w_q, z_1, \dots, z_k\}$, in questo caso $\phi_{|Z}$ è semidefinito negativo. Di conseguenza i_+ non può essere maggiore di p, sia infatti W' un sottospazio di dimensione i_+ con $\phi_{|W'}$ definito positivo, per Grassmann avremmo necessariamente che $\dim W' \cap Z > 0 \Rightarrow W' \cap Z \neq \{0\}$. Tuttavia, se avessimo $w \neq 0, w \in W' \cap Z \Rightarrow q_\phi(w) > 0$ e contemporaneamente $q_\phi(w) \leq 0$, che è assurdo. ↯
Analogamente vediamo che $i_- = q$.
Ora, poiché le isometrie mantengono il prodotto scalare la freccia ($\Rightarrow$) risulta ovvia, ma dopo visto questo possiamo facilmente dimostrare anche ($\Leftarrow$): infatti, attraverso l'algoritmo di ortonormalizzazione delle basi sappiamo che esistono una base $\mathfrak{C}$ ed una base $\mathfrak{D}$ tale che:

$$M_{\mathfrak{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathfrak{D}}(\psi).$$

Di conseguenza, ϕ e ψ sono isometrici. □

3.4 Gruppo ortogonale e Teorema di Rappresentazione

Definizione 3.13. Dato (V, ϕ), il **gruppo ortogonale** associato è definito come segue:

$$O(\phi) = \{f \in \text{GL}(V) \mid \forall (v, w) \in V \times V : \phi(v, w) = \phi(f(v), f(w))\}.$$

Osservazione 3.8.3. Nel caso standard $V = \mathbb{K}^n$ e $\phi = \phi_M$ allora:

$$O(\phi) = \{P \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid P^\intercal M P = M\}.$$

In particolare, se $M = I$ si ottiene il **gruppo ortogonale classico**:

$$O(n, \mathbb{K}) = \{P \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid P^\intercal = P^{-1}\}.$$

Osservazione 3.8.4. $O(\phi) < \text{GL}(V)$, cioè il gruppo ortogonale è sempre un sottogruppo del gruppo lineare.

Definizione 3.14. Dato (V, ϕ), ad ogni $v \in V$ possiamo associare il funzionale ϕ_v definito come segue:

$$\forall w \in V : \phi_v(w) = \phi(v, w) \in \mathbb{K}.$$

Usando la bilinearità di ϕ rispetto al secondo argomento, si vede che ϕ_v è lineare, di conseguenza $\phi_v \in V^*$.

Sfruttando la definizione appena data, possiamo anche costruire un'applicazione lineare tra V e V^*:

Definizione 3.15. Dato (V, ϕ) definiamo la funzione F_ϕ come segue:

$$F_\phi : V \to V^*, \qquad \forall v \in V : \; F_\phi(v) := \phi_v.$$

Si verifica facilmente che è lineare sfruttando la bilinearità di ϕ rispetto al primo argomento.

Definizione 3.16 (Rappresentabilità di un funzionale)**.** Un vettore $\varphi \in V^*$ si dice **rappresentabile** per mezzo di ϕ se $\varphi \in \mathrm{Im}(F_\phi)$.

Osservazione 3.8.5. Per ogni φ rappresentabile, $F_\phi^{-1}(\varphi)$ è l'insieme dei vettori che lo rappresentano.

Proposizione 3.9.

1. $\ker(F_\phi) = \mathrm{Rad}(\phi)$*;*
2. $\mathrm{Im}(F_\phi) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Rad}(\phi))$*.*

Dimostrazione.

1. $$\begin{aligned} & v \in \ker(F_\phi) \\ \Leftrightarrow\ & \forall w \in V : \phi_v(w) = \phi(v, w) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & v \in \mathrm{Rad}(\phi). \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} & \varphi_v \in \mathrm{Im}(F_\phi) \\ \Rightarrow\ & \forall z \in \mathrm{Rad}(\phi) : \varphi_v(z) = \phi(v, z) = 0 \\ \Rightarrow\ & \varphi_v \in \mathrm{Ann}(\mathrm{Rad}(\phi)). \end{aligned}$$

   Quindi sappiamo che $\mathrm{Im}(F_\phi) \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Rad}(\phi))$, ma noi sappiamo anche che:

   $\dim \mathrm{Im}(F_\phi) = \dim V - \dim(\ker F_\phi) = \dim V - \dim \mathrm{Rad}\phi = \dim \mathrm{Ann}(\mathrm{Rad}\phi)$

   di conseguenza $\mathrm{Im}(F_\phi) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Rad}(\phi))$.

□

Corollario 3.9.1 (Teorema di rappresentazione)**.**

$$\phi \textit{ non degenere } \Leftrightarrow F_\phi \textit{ isomorfismo}$$

Quest'ultimo risultato è estremamente importante in quanto ci fornisce degli isomorfismi canonici tra V munito di ϕ e il suo duale e ci permette di rappresentare in maniera unica un funzionale con un vettore.

D'ora in poi, salvo specifiche contrarie, quando faremo riferimento a F_ϕ supporremo che ϕ sia non degenere, cioè che F_ϕ sia un isomorfismo.

Proposizione 3.10. $\forall W \subset V$ *sottospazio, si ha che:* $\mathrm{Ann}(W) = F_\phi(W^\perp)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} & \varphi_v \in F_\phi(W^\perp) \\ \Rightarrow\ & \forall z \in W : \varphi_v(z) = \phi(v, z) = 0 \\ \Rightarrow\ & \varphi_v \in \mathrm{Ann}(W). \end{aligned}$$

Ma poiché hanno la stessa dimensione:

$$\dim(\mathrm{Ann}(W)) = \dim V - \dim W = \dim W^\perp$$

allora $\mathrm{Ann}(W) = F_\phi(W^\perp)$. □

Per ogni $f : V \to W$ possiamo associare un omomorfismo trasposto f^t, richiamiamo la definizione:

$$f^t : W^* \to V^*, \qquad \forall \phi \in W^* : f^t(\phi) = \phi \circ f.$$

Lavorando al caso degli endomorfismi, però, possiamo sfruttare la trasposizione di omomorfismi per definire un ulteriore endomorfismo da associare a f:

Definizione 3.17 (Endomorfismo aggiunto)**.**
Dato (V, ϕ), l'**endomorfismo aggiunto** $f^* \in \mathrm{End}(V)$ che rappresenta $f \in \mathrm{End}(V)$ mediante F_ϕ è l'applicazione che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "F_\phi"] & V \arrow[d, "F_\phi"] \\ V^* \arrow[r, "f^t"'] & V^* \end{tikzcd}$$

Ovvero è:

$$f^* := F_\phi^{-1} \circ f^t \circ F_\phi.$$

Seppur questa costruzione possa sembrare arbitraria, è estremamente utile a causa delle proprietà che possiede, in particolare esplicitando la definizione vediamo che:

$$\begin{aligned} &\phi_{f^*(v)} = \\ &= F_\phi \circ f^*(v) \\ &= F_\phi \circ F_\phi^{-1} \circ f^t \circ F_\phi(v) \\ &= f^t \circ F_\phi(v) \\ &= \phi_v \circ f. \end{aligned}$$

Quindi, $\forall w \in V : \phi(f^*(v), w) = \phi_{f^*(v)}(w) = \phi_v \circ f(w) = \phi(v, f(w))$.

Osservazione 3.10.1. Nel caso $V = \mathbb{K}^n, \phi = \phi_M$ con $M = M^\intercal$ e $\det M \neq 0$.
Dato l'endomorfismo $f = f_A$ per cui $f(x) = Ax$, allora possiamo cercare la matrice A^* per cui $f_{A^*} = f^*$.
Siccome sappiamo che $\forall x, y \in V : \phi(f^*(x), y) = \phi(x, f(y))$ vediamo se ne ricaviamo qualcosa:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V : x^\intercal M(Ay) &= (A^* x)^\intercal M y \\ \Leftrightarrow x^\intercal (MA) y &= X^\intercal ((A*)^\intercal M) y \\ \Leftrightarrow A^\intercal M^\intercal &= M^\intercal A^* \\ \Leftrightarrow A^* &= (MAM^{-1})^\intercal. \end{aligned}$$

Questo ci dice anche che $(A^*)^* = A$ (e più in generale $(f^*)^* = f$ se consideriamo A come la rappresentazione in una base qualsiasi del prodotto scalare).
Inoltre $M = I \Rightarrow A^* = A^\intercal$.

3.5 Alcuni isomorfismi tra spazi vettoriali

Tra poco vorremmo affrontare uno dei teoremi fondamentali dell'algebra lineare, ovvero il **teorema spettrale**, ma per trattarlo nella sua forma più generale e astratta dovremo fare uso di alcuni strumenti che saranno presentati qui di seguito: essi ci torneranno utili per creare una connessione tra gli endomorfismi e le applicazioni bilineari, per poi discendere al caso particolare dei prodotti scalari.

Definizione 3.18. Chiamiamo con $\mathrm{Bil}(V^* \times V)$ lo spazio delle applicazioni bilineari da $V^* \times V$ a $\mathbb{K}$.

Definizione 3.19. Denotiamo l'applicazione χ nella seguente maniera:

$$\chi : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Bil}(V^* \times V), \qquad \chi(f)(\phi, v) := \phi(f(v)).$$

Osservazione 3.10.2. χ definita come sopra è un isomorfismo lineare: è lineare, è iniettiva e i due spazi hanno la stessa dimensione.
Verifichiamo soltanto che è iniettiva, il resto è banale:

$$\begin{aligned} & f \neq 0,\ f \in \ker \chi \\ \Rightarrow\ & v \in V : f(v) \neq 0 \\ \Rightarrow\ & \exists \phi : \phi(f(v)) \neq 0 \\ \Rightarrow\ & f \notin \ker \chi \ \lightning \end{aligned}$$

Allora $\ker \chi = \{0\}$, cioè χ iniettiva.

Definizione 3.20. Costruiamo ancora un'altra applicazione b_ϕ:

$$\mathrm{b}_\phi : \mathrm{Bil}(V^* \times V) \to \mathrm{Bil}(V \times V),$$

$$\forall \psi \in \mathrm{Bil}(V^* \times V) :\ \forall v, w \in V :\ \mathrm{b}_\phi(\psi)(v, w) = \psi(F_\phi(v), w).$$

Si vede facilmente che è lineare, iniettiva e tra insiemi della stessa dimensione, di conseguenza è un isomorfismo.

Costruiamo come composizione dei precedenti l'ultimo di questa serie di isomorfismi, ovvero:

Definizione 3.21.

$$\chi_\phi : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Bil}(V \times V), \qquad \chi_\phi := b_\phi \circ \chi.$$

Cioè:

$$\chi_\phi(f)(v, w) = \phi(v, f(w)).$$

3.6 Teorema Spettrale

Definizione 3.22 (Endomorfismo autoaggiunto)**.** f si dice **autoaggiunto** se $f = f^*$.

Proposizione 3.11.
f autoaggiunto $\Leftrightarrow \chi_\phi(f)$ è simmetrica $\Leftrightarrow \chi_\phi(f)$ è un prodotto scalare.

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione per il caso matriciale.
Quindi, dato $V = \mathbb{K}^n$ allora $V^* = M(1, n, \mathbb{K})$. Poniamo inoltre $\phi = \phi_M$ con $M = M^\intercal$ e $f(x) = f_A(x) = Ax$.
Da ciò discende che $\forall (R, x) \in M(1, n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n : \chi(f)(R, x) = RAx$. Invece

$\forall (y,x) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n : \chi_\phi(f)(y,x) = y^\intercal MAx$.
Tuttavia χ_ϕ simmetrica $\Leftrightarrow \chi_\phi(f)(x,y) = \chi_\phi(f)(y,x) \Leftrightarrow y^\intercal M(Ax) = x^\intercal M(Ay)$.
Ma poichè M è simmetrica: $x^\intercal M(Ay) = (Ay)^\intercal Mx = y^\intercal A^\intercal Mx$. Di conseguenza $y^\intercal M(Ax) = y^\intercal A^\intercal Mx$, cioè:

$$\begin{aligned}
&\chi_\phi \text{ simmetrica } \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow y^\intercal A^\intercal Mx = y^\intercal MAx \\
&\Leftrightarrow A^\intercal M = MA \\
&\Leftrightarrow A^\intercal = MAM^{-1} \\
&\Leftrightarrow A = (MAM^{-1})^\intercal = A^*.
\end{aligned}$$

□

Specializzando meglio il risultato precedente possiamo ottenere però un risultato più profondo. In particolare, se ci restringiamo al caso V $\mathbb{R}-$spazio vettoriale dotato di prodotto scalare ϕ definito positivo.

A questo punto, per quanto visto con il teorema di Sylvester, possiamo dotarlo di una base ortonormale per cui $M_{\mathfrak{B}}(\phi) = I$ e ridurci al caso matriciale con prodotto scalare standard. In particolare in questa situazione, posta $A = \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$, avremmo $f = f^* \Leftrightarrow A = A^* = A^\intercal$.

Inoltre, sappiamo che un'altra base $\mathfrak{B}'$ è ortonormale per ϕ se e solo se $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(Id_V) \in O(n,\mathbb{R})$, infatti come sappiamo se $M_{\mathfrak{B}}(\phi)$ è isometrico a $M'_{\mathfrak{B}}(\phi)$ mediante $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}}(Id_V)$, ma se le due matrici sono proprio identiche allora deve anche appartenere al gruppo ortogonale classico. Inoltre, per ogni base $\mathcal{D}$, $f \in O(\phi) \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{D}}(f) \in O(n,\mathbb{R})$.

Definizione 3.23 (Endomorfismo ortogonalmente diagonalizzabile)**.** Un endomorfismo f si dice **ortogonalmente diagonalizzabile** se esiste una base ortonormale composta da suoi autovettori, cioè se $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}}(f)$ è diagonale.

Osservazione 3.11.1. Nel caso matriciale, A si dice ortongalmente diagonalizzabile se esiste $P \in O(n,\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}AP = P^\intercal AP = D$ diagonale.

... Completerò dopo

4 Geometria Affine

Definizione 4.1 (Traslazioni)**.** Dato V spazio vettoriale e $w \in V$, indichiamo con **traslazione** una funzione del seguente tipo:

$$\tau_w : V \to V, \qquad \forall v \in V : \ \tau_w(v) := w + v.$$

L'insieme di tutte le traslazioni di V si indica anche con $\mathcal{T}(V)$.

Osservazione 4.0.1. τ_v è sempre bigettiva, ma è lineare soltanto se $w = 0$.

Osservazione 4.0.2. $(\mathcal{T}(V), \circ)$ è un gruppo di trasformazioni dell'insieme V, cioè $\mathcal{T}(V) < S(V)$ dove $S(V)$ indica il gruppo simmetrico di X.

Possiamo inoltre notare che esiste un isomorfismo di gruppi abeliani tra V e $\mathcal{T}(V)$, più in particolare costruiamo

$$\tau : V \to \mathcal{T}(V), \qquad \forall v \in V : \tau(v) = \tau_v.$$

Si verifica senza difficoltà che è un omomorfismo con nucleo banale surgettivo, quindi un isomorfismo.

Definizione 4.2 (Gruppo delle Trasformazioni Affini)**.** Indichiamo con $\mathrm{Aff}(V)$ il **gruppo delle trasformazioni affini** di V, definito come segue:

$$\mathrm{Aff}(V) := \{f : V \to V \mid \exists k \in \mathbb{N} : f = g_1 \circ \ldots g_k \text{ con } g_1, \ldots, g_k \in \mathrm{GL}(V) \cup \mathcal{T}(V)\}.$$

Si può vedere facilmente che si tratta di un gruppo abeliano.

Osservazione 4.0.3. Data $f = g_1 \circ \cdots \circ g_k \in \mathrm{Aff}(V)$, si vede che la sua inversa è $f^{-1} = g_k^{-1} \circ \cdots \circ g_1^{-1}$.

Vista la maniera in cui abbiamo definito la struttura, ci potrebbe tornare molto utile trovare una scrittura normalizzata di una trasformazione affine così da poterci lavorare più agevolmente. Effettivamente una forma normalizzata esiste ed è anche molto semplice, vediamola qui di seguito:

Proposizione 4.1. *Ogni $f \in \mathrm{Aff}(V)$ può essere sempre scritto nella forma $f = \tau_v \circ g$ con $v \in V$ e $g \in \mathrm{GL}(V)$ e questa scrittura è unica.*

Dimostrazione. Intanto dimostriamo l'esistenza di tale scrittura per induzione sul numero k di composizioni con cui definiamo f.
Se $k = 1$ è ovvio.
Se $k > 1$ allora $f = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_k = g_1 \circ (g_2 \circ \cdots \circ g_k)$, ma sfruttando il passo induttivo abbiamo che $\exists w \in V : \exists g \in \mathrm{GL}(V) : \ f = g_1 \circ \tau_w \circ g$.

A questo punto abbiamo due possibilità:

- $g_1 \in \mathcal{T}(V)$, cioè $\exists v \in V : g_1 = \tau_v$. A questo punto $f = \tau_v \circ \tau_w \circ g = \tau_{v+w} \circ g$, di conseguenza abbiamo finito;

- $g_1 = g' \in \mathrm{GL}(V)$ quindi $f = g' \circ \tau_w \circ g = (g' \circ \tau_w) \circ g$, tuttavia possiamo notare che $\forall v \in V : g' \circ \tau_w(v) = g'(w+v) = g'(w) + g'(v) = \tau_{g'(w)} \circ g'(v)$. Allora $f = (g' \circ \tau_w) \circ g = \tau_{g'(w)} \circ g' \circ g$ ma $g' \circ g = h \in \mathrm{GL}(V)$, quindi abbiamo finito perchè a questo punto $f = \tau_{g'(w)} \circ h$.

A questo punto ci rimane da dimostrare che questa scrittura è unica.
Dati $w, w' \in V, \ g, g' \in \mathrm{GL}(V)$ allora poniamo che $f = \tau_w \circ g = \tau_{w'} \circ g'$.
Di conseguenza $f(0) = \tau_w \circ g(0) = w + 0 = \tau_{w'} \circ g'(0) = w' + 0 \Rightarrow w = w'$.
Tuttavia questo ci dice anche che $\forall v \in V : f(v) - f(v) = \tau_w \circ g(v) - \tau_w \circ g'(v) = g(v) - g'(v) = 0 \Rightarrow g = g'$. □

Detto questo, possiamo identificare $\mathrm{Aff}(V)$ con $V \times \mathrm{GL}(V)$ dotato della seguente operazione di **prodotto semi-diretto**:

$$* : V \times \mathrm{GL}(V) \to V \times \mathrm{GL}(V), \qquad (v, g) * (w, h) := (v + g(w), g \circ h).$$

Infatti si può vedere che $(V \times \mathrm{GL}(V), *)$ è isomorfo come gruppo (non-abeliano) a $(\mathrm{Aff}(V), \circ)$ tramite:

$$\phi : (V \times \mathrm{GL}(V), *) \to (\mathrm{Aff}(V), \circ), \qquad \forall (v, g) \in V \times \mathrm{GL}(V) : \ \phi(v, g) = \tau_v \circ g.$$

Vedere perché è vero è semplice, l'unica osservazione da fare è che, date due trasformazioni affini $f = \tau_v \circ g$ e $f' = \tau_{v'} \circ g'$, allora:

$$f \circ f' = \tau_v \circ g \circ \tau_{v'} \circ g' = \tau_v \circ \tau_{g(v')} \circ g \circ g' = \tau_{v+g(v')} \circ (g \circ g')$$

ed esso si comporta esattamente come il nostro prodotto semi-diretto. Fare la verifica formale è molto semplice, quindi la dimostrazione sarà tralasciata.

Definizione 4.3 (Estensione affine)**.** Per ogni $G < \mathrm{GL}(V)$ possiamo definire l'**estensione affine** di G come $\phi(V \times G) < \mathrm{Aff}(V)$.

Osservazione 4.1.1. Dato (V, ϕ) spazio euclideo, $\mathrm{Isom(V, d)} = \phi(\mathrm{V} \times \mathrm{O}(\phi))$.

Nel momento in cui abbiamo esteso il gruppo di trasformazioni da $\mathrm{GL}(V)$ a $\mathrm{Aff}(V)$ abbiamo alterato la struttura interna dello spazio V, in particolare non possediamo più un *punto speciale*, quale poteva essere lo 0 negli spazi vettoriali, ma ora tutti i punti sono equivalenti. Questo cambio di ruolo può essere notato anche attraverso un'osservazione sullo *stabilizzatore.*

Definizione 4.4 (Stabilizzatore)**.** Si definisce stabilizzatore di $x \in X$ dotato di un gruppo di trasformazioni G il seguente sottogruppo di G:

$$\mathrm{st}(x) := \{g \in G \mid g(x) = x\}.$$

Infatti, considerando come gruppo di trasformazioni $\mathrm{GL}(V)$, 0 è l'unico elemento di V tale che possiede come stabilizzatore l'intero gruppo lineare. Al contrario, considerando $\mathrm{Aff}(V)$ si può vedere che lo stabilizzatore di ogni elemento v è isomorfo a $\mathrm{GL}(V)$ tramite τ_{-v}.

La discussione fatta precedentemente sulla scrittura delle trasformazioni affini può anche essere portato al caso particolare di $V = \mathbb{K}^n$. In questa situazione, infatti, ogni $f \in \mathrm{Aff}(V)$ può essere scritta come:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : f(x) = Px + b, \quad P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}),\ b \in \mathbb{K}^n.$$

Le trasformazioni affini, di conseguenza, sono codificate dalle coppie $(b, P) \in \mathbb{K}^n \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Ciò ci può anche far ipotizzare che esistano altre maniere che in funzione di questi due elementi ci permettano di descrivere $\mathcal{T}(V)$.
Una via che possiamo considerare è quella dell'inclusione di $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^{n+1}$. Naturalmente i due spazi sono distinti e non possiedono propriamente alcuna intersezione, ma il secondo contiene infiniti sottospazi isomorfi al primo, in particolare identifichiamo $\mathbb{K}^n$ con l'iperpiano $\mathcal{P} := \{y \in \mathbb{K}^{n+1} \mid y_{n+1} = 0\}$.
A questo punto, possiamo anche determinare il seguente sottogruppo di $\mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{K})$:

$$G_{\mathcal{P}} := \{h \in \mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{K}) \mid h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}.$$

Si può anche vedere senza troppe difficoltà che:

$$G_{\mathcal{P}} = \left\{ \begin{pmatrix} P & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{K}) \;\middle|\; P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}),\ b \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Attraverso qualche conto si può anche verificare che la funzione ψ:

$$\psi : (\mathbb{K}^n \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), *) \to (G_{\mathcal{P}}, \cdot), \qquad \psi(b, P) = \begin{pmatrix} P & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di gruppi.
Da questo si può vedere che l'azione di $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$ su $\mathbb{K}^n$ coincide con quella di $G_{\mathcal{P}}$ su $\mathbb{K}^{n+1}$.

Nonostante i discorsi fatti, ancora non abbiamo adattato nessuno dei concetti fondamentali con cui lavoravamo nel caso vettoriale per le trasformazioni affine. Sicuramente, quella fondamentale è la seguente:

Definizione 4.5 (Spazio affine)**.** Dato V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, l'insieme $A \neq \emptyset$ si dice **spazio affine** se dotato di un'applicazione $\phi : A \times A \to V$ tale che $\forall (P, Q) \in A \times A : \phi(P, Q) := \overrightarrow{PQ} \in V$ con le seguenti proprietà:

1. $\forall P \in A$: $\phi_P : A \to V, \quad \phi_P(Q) := \phi(P, Q)$
   è bigettiva;
2. $\forall P \in A : \phi_P(P) = 0$;
3. $\forall P, Q, R \in A : \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = 0.$ (chiusura del triangolo)

Corollario 4.1.1. $\forall P, Q \in A : \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.
Infatti per le proprietà 2. *e* 3. *degli spazi affini, sappiamo che* $\forall P, Q \in A$:

$$0 \overset{3.}{=} \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PP} \overset{2.}{=} \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} + 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

Osservazione 4.1.2. Sia $A = V$ come spazio vettoriale, ne si può estendere la struttura a quella di spazio affine tramite ϕ definito come segue:

$$\forall (P, Q) \in A \times A : \ \phi(P, Q) = \overrightarrow{PQ} := Q - P.$$

Questa è detta la **struttura affine standard** sullo spazio vettoriale V.
Si vede facilmente che soddisfa tutte le proprietà di uno spazio affine.

Definiamo su questa struttura un'ulteriore operazione che traduce la nostra idea *intuitiva* di spostamento di un punto lungo un certo vettore; in realtà non si tratta di nulla di nuovo, essa è infatti strettamente legata all'applicazione ϕ, ma l'uso è così frequente che si merita una notazione indipendente:

Definizione 4.6 (Somma punto vettore)**.** Siano $P \in A, \ v \in V$ allora definiamo la **somma punto vettore** come segue:

$$P + v := \phi_P^{-1}(v) = Q.$$

Cioè, è la funzione che ci fornisce l'unico punto Q per cui $\overrightarrow{PQ} = v$.

Corollario 4.1.2. $\forall P \in A : \ \forall v, w \in V : P + (v + w) = (P + v) + w$.

Dimostrazione. $Q := \phi_P^{-1}(v + w)$.
Come sappiamo Q è l'unico punto tale che $\overrightarrow{PQ} = v + w$.
$Q' := \phi_P^{-1}(v)$ è invece l'unico punto tale che $\overrightarrow{PQ} = v$, mentre $Q'' := (P+v)+w = \phi_{Q'}^{-1}(w)$ è l'unico punto tale che $\overrightarrow{Q'Q''} = w$.
Notiamo che $\overrightarrow{PQ''} = \overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{Q'Q''} = v + w = \overrightarrow{PQ}$ ma questo implica che $Q = Q''$ dal momento che Q è l'unico punto a soddisfare la proprietà data. $\square$

Vorremmo ora anche provare a definire un'operazione su un certo insieme di punti che possa ricordarci la **combinazione lineare** negli spazi vettoriali. Una prima idea potrebbe essere quella di cercare qualcosa di questa forma:

$$P_0 + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_0P_j} = P \in A$$

dove con a_j indico degli scalari.
Naturalmente, per definire questa operazione abbiamo bisogno un'n-upla di punti ed una di scalari, ma tra le altre cose diamo per implicita la scelta di un punto che svolga un ruolo diverso dagli altri all'interno dell'insieme (nel caso si tratta di P_0). Osservato ciò, potremmo definire per ogni $i = 0, \dots, k$:

$$P^{(i)} = P_i + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_iP_j}.$$

Ora potremmo cercare le condizioni per cui $\forall i = 1, \dots, k : P^{(i)} = P$, cioè il punto risultate dall'operazione non dipende dalla scelta di alcun punto.
Alla ricerca di questa condizione, possiamo intanto osservare una cosa: per ogni terna $P_0, P_i, P_j \in A$ abbiamo per la proprietà di chiusura del triangolo quanto segue:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{P_0P_i} + \overrightarrow{P_iP_j} + \overrightarrow{P_jP_0} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{P_0P_i} + \overrightarrow{P_iP_j} = -\overrightarrow{P_jP_0} \\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{P_0P_i} + \overrightarrow{P_iP_j} = \overrightarrow{P_0P_j} \end{aligned}$$

Da ciò consegue che $\forall i = 1, \dots, k$:

$$P = P_0 + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_0P_j} = P_0 + \sum_{j=0}^{k} a_j \left(\overrightarrow{P_0P_i} + \overrightarrow{P_iP_j}\right) = P_0 + \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right) \overrightarrow{P_0P_i} + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_iP_j}.$$

Tuttavia, ponendo $P = P^{(i)}$ abbiamo che:

$$P^{(i)} = P \Leftrightarrow P_i = P_0 + \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right) \overrightarrow{P_0P_i} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k} a_j = 1.$$

Definizione 4.7 (Combinazione affine di punti)**.**
Dati $P_0, \dots, P_k \in A$ e $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ tali che $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j = 1$ allora $\forall i = 0, \dots, k$:

$$P = \sum_{j=0}^{k} a_j P_j := P_i + \sum_{j=0}^{k} a_j \overrightarrow{P_iP_j}$$

si dice una **combinazione affine di punti** ed è indipendente dalla scelta di i, quindi ben definita.

Definizione 4.8 (Baricentro)**.** Dato il campo $\mathbb{K}$ associato allo spazio affine A, se char $\mathbb{K} = 0$ allora per ogni insieme $P_0, \dots, P_{n-1}$ di n punti è definito il loro **baricentro**:

$$G = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} P_j.$$

Se $n = 2$ si parla anche di **punto medio**.