Stima asintotica sul numero di partizioni

Vale $p(n) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n})}{4\sqrt{3}n}$. La dimostrazione che segue è dovuta a Newman [2].

- Sia $|z| < 1$. Supponiamo per ora z reale positivo. Per ogni n e per ogni $N \geq n$ $p(n)$ è il coefficiente di z^n nell'espansione in serie di $\prod_{k=1}^{N} \sum_{j=0}^{\infty} (z^k)^j = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k}$. Dato che $\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k$ converge, $\prod_{k=1}^{\infty}(1-z^k) > 0$. Dunque $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \leq \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k} < \infty$ e la serie converge. Essendo anche $\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$ (confrontando termine a termine con l'espansione in serie di potenze del primo membro), per $0 \leq z < 1$ otteniamo $\boxed{f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n}$. Il primo membro converge uniformemente sui compatti nel disco di raggio 1, quindi definisce una funzione analitica. Perciò l'identità vale per ogni z con $|z| < 1$ (nel piano complesso).

- Inoltre $\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(1-z^n)}\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} z^{kn}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{kn}}{n}) = f(z)$ (vale $\exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n}) = \frac{1}{1-u}$ se $|u| < 1$).
Essendo $|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(1-z^n)}| \leq \frac{|z|}{|1-z|} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(1-|z|)} \cdot \frac{n}{|z|^{-n} + \ldots + |z|^{-1}} \leq \frac{1}{|1-z|} + \frac{1}{1-|z|} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{|1-z|} + \frac{1}{1-|z|}$, segue che $\boxed{|f(z)| < \exp(\frac{1}{|1-z|} + \frac{1}{1-|z|})}$.

- Sia $\boxed{\phi(z) = \sqrt{\frac{1-z}{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi^2}{12}(-1 + \frac{2}{1-z})\right)}$ ($|z| < 1$). Sia poi $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme dei punti z con $|z| < 1$ e $|1-z| \leq 2(1-|z|)$. Per $z \to 1$ (in Ω) vale $\boxed{f(z) = \phi(z)\,(1 + O(1-z))}$.
Infatti scrivendo $z = e^{-w}$ (con $|\Im w| \leq \pi$) osserviamo che $|\arg w| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ per qualche α (se $z = \rho e^{i\theta}$, da $1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta = |1-z|^2 \leq 4(1-\rho)^2$ si ricava $3\rho^2 - 2(4-\cos\theta)\rho + 3 \geq 0$, da cui $\rho \leq \frac{4-\cos\theta - \sqrt{7-8\cos\theta+\cos^2\theta}}{3} = 1 - \frac{\theta}{\sqrt{3}} + o(\theta)$, cioè $\frac{\theta}{\log\rho}$ è limitato).
Come prima, un logaritmo (che chiameremo $\log f(z)$) di $f(z)$ è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(e^{nw}-1)}$.
Aggiungendo e togliendo $\frac{\pi^2}{6w} + \frac{1}{2}\log(1-e^{-w})$, abbiamo $\log f(z) = \frac{\pi^2}{6w} + \frac{1}{2}\log(1-e^{-w}) + w\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{nw(e^{nw}-1)} - \frac{1}{n^2w^2} + \frac{e^{-nw}}{2nw}\right)$.
Se poniamo $g(u) = \frac{1}{u(e^u-1)} - \frac{1}{u^2} + \frac{e^{-u}}{2u}$ (che si estende a una funzione analitica in 0), abbiamo $|t\sum_{n=1}^{\infty} g(nt) - \int_0^{\infty} g(u)\,du| \leq tV$ con $V = \int_0^{\infty} |g'(u)|\,du$ la variazione totale (infatti abbiamo $|g(b) - \int_a^b g(u)\,du| \leq \int_a^b |g(u) - g(b)|\,du \leq (b-a)V(a,b)$, $(b-a)$ volte la variazione totale da a a b). Analogamente, se L è la semiretta dei multipli sw di w ($s \geq 0$), vale $|w\sum_{n=0}^{\infty} g(nw) - \int_L g(u)\,du| \leq |w|V_L$ e V_L è limitata essendo $|\arg w| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ (da cui $|e^u| = e^{\Re u} \geq e^{\beta|u|}$ per qualche $\beta > 0$). Segue dal teorema di Cauchy che $\int_L g(u)\,du = \int_0^{\infty} g(u)\,du$. Quest'ultimo vale $-\frac{1}{2}\log(2\pi)$ (v. l'appendice).
Dunque $w\sum_{n=1}^{\infty} g(nw) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) + O(w)$, da cui $\log f(z) = \frac{\pi^2}{6w} + \frac{1}{2}\log\frac{1-e^{-w}}{2\pi} + O(w)$.
Ma $w = -\log z = (1-z) + \frac{1}{2}(1-z)^2 + o((1-z)^2)$, da cui $\log f(z) = \frac{\pi^2}{6(1-z)} - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\log\frac{1-z}{2\pi} + O(1-z)$. Applicando $\exp(\cdot)$ ad ambo i membri abbiamo la tesi.

- Se $\phi(z) = \sqrt{\frac{1-z}{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi^2}{12}(-1 + \frac{2}{1-z})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) z^n$, basta ottenere la stima asintotica per $q(n)$ essendo $\boxed{p(n) = q(n) + O\left(n^{-\frac{5}{4}} \exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n})\right)}$.
Infatti, se C è la circonferenza di raggio $1 - \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$, sia A l'arco $C \cap \Omega$ e B il complementare. La lunghezza di A è $O(n^{-\frac{1}{2}})$ (infatti come prima se $z = \rho e^{i\theta}$ abbiamo $3\rho^2 - 2(4-\cos\theta)\rho + 3 \geq 0$, che dà, ponendo $\rho = 1-x$, $\cos\theta \geq \frac{-3+8\rho-3\rho^2}{2\rho} = (1 - x - \frac{3}{2}x^2)(1 + x + x^2 + o(x^2)) = 1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$, da cui infine $|\theta| \leq \sqrt{3}x + o(x)$, essendo $\cos^{-1}(1-y) \sim \sqrt{2y}$ per $x \to 0$).

Su A vale $|1-z| \le \pi\sqrt{\frac{2}{3n}}$ e su B è $|1-z|^{-1} \le \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3n}{2}}$.
Ora è $p(n)-q(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)-\phi(z)}{z^{n+1}}\,dz$, ma per la stima del secondo punto $\int_B \frac{f(z)-\phi(z)}{z^{n+1}}\,dz = O\left(\sup_{z\in B}|z|^{-n}\left(\exp(|1-z|^{-1}+(1-|z|)^{-1})+\exp\frac{\pi^2}{6|1-z|}\right)\right)$
$= O\left(\exp(\pi\sqrt{\frac{n}{6}})\left(\exp(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3n}{2}}+\frac{1}{\pi}\sqrt{6n})+\exp(\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{3n}{2}})\right)\right)$, dato che
$(1-\frac{\pi}{\sqrt{6n}})^{-n} = \exp\left(-n\log(1-\frac{\pi}{\sqrt{6n}})\right) = \exp(\pi\sqrt{\frac{n}{6}}+O(1)) = O\left(\exp(\pi\sqrt{\frac{n}{6}})\right)$.
Essendo $\max\left\{\frac{\pi}{\sqrt{6}}+\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\pi}\sqrt{6}\right\} < \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, l'integrale su B è $O(\exp(\gamma\sqrt{n}))$ per qualche $\gamma < \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Infine (per la stima del terzo punto) $\int_A \frac{f(z)-\phi(z)}{z^{n+1}}\,dz = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\sup_{z\in A}|z|^{-n}|\phi(z)(1-z)|\right) = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\sup_{z\in A}|z|^{-n}|1-z|^{\frac{3}{2}}\exp(\frac{\pi^2}{6|1-z|})\right) = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\exp(\pi\sqrt{\frac{n}{6}})n^{-\frac{3}{4}}\exp(\pi\sqrt{\frac{n}{6}})\right)$
$= O\left(n^{-\frac{5}{4}}\exp(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$.

- Ricordando che $\phi(z) = \sqrt{\frac{1-z}{2\pi}}\exp\left(\frac{\pi^2}{12}(-1+\frac{2}{1-z})\right)$, abbiamo $\pi\sqrt{2}\exp(\frac{\pi^2}{12})\phi(z)$
$= (1-z)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}t-(1-z)t^2\right)dt$ (per $z<1$ reale), essendo
$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}t-(1-z)t^2\right)dt = \exp(\frac{\pi^2}{6(1-z)})\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-(1-z)\left(t-\frac{\pi}{\sqrt{6}(1-z)}\right)$
$= \exp(\frac{\pi^2}{6(1-z)})\sqrt{\frac{\pi}{1-z}}$.
Quindi confrontando l'espansione in serie abbiamo $\pi\sqrt{2}\exp(\frac{\pi^2}{12})q(n)$
$= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}t-t^2\right)\left(\frac{t^{2n}}{n!}-\frac{t^{2n-2}}{(n-1)!}\right)dt$ $(*)$ (basta ottenere che per $z\in[0,1)$
$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}t-t^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt^2)^n}{n!}\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}t-t^2\right)\frac{(zt^2)^n}{n!}\,dt$,
che è il teorema di convergenza monotona).
Ponendo $t = s+\sqrt{n}$ e usando la stima asintotica per $n!$ otteniamo
$\frac{t^{2n}}{n!}-\frac{t^{2n-2}}{(n-1)!} \sim t^{2n-2}(t^2-n)\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}n^n} = \left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^{2n-2}s\left(2+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$.
Quindi $(*) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n})}{\sqrt{2\pi n}}\int_{-\infty}^{+\infty}s\exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}s-s^2-2\sqrt{n}s)\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^{2n-2}\left(2+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)ds$.
Ma $\lim_{n\to\infty}\exp(-2\sqrt{n}s)\left(1+\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^{2n-2}\left(2+\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 2e^{-s^2}$
(essendo, per $u\to+\infty$, $2u^2\log(1+\frac{s}{u}) = 2us-s^2+o(1)$).
Inoltre l'integrando è dominato da $s\exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}s-s^2)(2+s)$ per $s\ge 0$
(infatti $(1+\frac{s}{\sqrt{n}})^{2n-2} \le (1+\frac{s}{\sqrt{n}})^{2n} \le \exp(2\sqrt{n}s)$)
e da $|s|\exp(-\pi\sqrt{\frac{2}{3}}|s|-|s|^2)(2+|s|)\exp(|s|^2+1)$ per $s\le 0$
(infatti $(1-\frac{|s|}{\sqrt{n}})^{2n-2} = (1-\frac{2|s|}{\sqrt{n}}+\frac{|s|^2}{n})^{n-1} \le \exp\left((n-1)(\frac{|s|^2}{n}-\frac{2|s|}{\sqrt{n}})\right)$,
da cui $\exp(2\sqrt{n}|s|)(1-\frac{|s|}{\sqrt{n}})^{2n-2} \le \exp\left(s^2+1-(\frac{s}{\sqrt{n}}-1)^2\right)$).
Quindi (teorema di convergenza dominata) $\pi\sqrt{2}\exp(\frac{\pi^2}{12})q(n) \sim$
$\frac{\exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n})}{\sqrt{2\pi n}}\int_{-\infty}^{+\infty}2s\exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}s-2s^2)\,ds = \frac{\exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n})}{\sqrt{2\pi n}}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{6}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}s-2s^2)\,ds$
e l'ultimo integrale è $\exp(\frac{\pi^2}{12})\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-2(s-\frac{\pi}{\sqrt{24}})^2\right)ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\exp(\frac{\pi^2}{12})$.
Dunque $\pi\sqrt{2}\exp(\frac{\pi^2}{12})q(n) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{6n}}\exp(\frac{\pi^2}{12}+\pi\sqrt{\frac{2}{3}n})$, da cui $q(n) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n})}{4\sqrt{3}n}$.

Appendice. Dimostrazione di $\int_0^\infty \left(\frac{1}{u(e^u-1)} - \frac{1}{u^2} + \frac{e^{-u}}{2u}\right) du = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$.

- $e^{-t}(1-\frac{t^2}{n}) \le (1-\frac{t}{n})^n \le e^{-t}$ per $t \in (0,1)$: per la seconda disuguaglianza basta avere che $(1-\frac{t}{n})^n$ dà una successione crescente al variare di n, cioè che $(1-\frac{t}{n+1})^{n+1} \ge (1-\frac{t}{n})^n$, o anche $\frac{n(1-\frac{t}{n})+1}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{(1-\frac{t}{n})^n \cdot 1}$, vera per $AM \ge GM$. Analogamente si ottiene che $e^t \ge (1+\frac{t}{n})^n$, da cui $e^t(1-\frac{t}{n})^n \ge (1-\frac{t^2}{n^2})^n \ge 1-\frac{t^2}{n}$ (disuguaglianza di Bernoulli), che è la prima disuguaglianza.

- $e^{-\frac{1}{t}}(1-\frac{1}{nt^2}) \le (1-\frac{1}{nt})^n \le e^{-\frac{1}{t}}$ per $t > \frac{1}{n}$: perfettamente analogo al punto precedente, usando il fatto che $\frac{1}{nt} < 1$.

- Se $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right)$ è la costante di Eulero-Mascheroni, $\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}}{t}\,dt$: infatti $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_0^\infty \sum_{k=1}^n e^{-kt}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}-e^{-(n+1)t}}{t}\,dt$ (posto $u = 1-e^{-t}$)
$= \int_0^1 \frac{(1-u)-(1-u)^{n+1}}{u(1-u)}\,du = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,du$.
Se $z = nu$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_0^n \frac{1-(1-\frac{z}{n})^n}{z}\,dz$ e $\log n = \int_0^n \frac{dz}{z}$, da cui
$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{1-(1-\frac{z}{n})^n}{z}\,dz - \int_1^n \frac{(1-\frac{z}{n})^n}{z}\,dz\right)$ e l'ultimo integrale (mandando $z \mapsto \frac{1}{z}$) è $\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-\frac{1}{nz})^n}{z}\,dz$.
Dunque $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \frac{1-(1-\frac{z}{n})^n}{z}\,dz - \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-\frac{1}{nz})^n}{z}\,dz\right)$.
Ma $\int_0^1 \frac{1-e^{-z}}{z} \le \int_0^1 \frac{1-(1-\frac{z}{n})^n}{z}\,dz \le \int_0^1 \frac{1-e^{-z}+\frac{z^2}{n}e^{-z}}{z}\,dz$ (per il primo punto), quindi il primo pezzo tende a $\int_0^1 \frac{1-e^{-z}}{z}\,dz$.
Allo stesso modo, $\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z}\,dz - \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{nz^3}\,dz \le \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{e^{-\frac{1}{z}}(1-\frac{1}{nz^2})}{z}\,dz \le \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{(1-\frac{1}{nz})^n}{z}\,dz \le \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z}\,dz$ (per le disuguaglianze del secondo punto), quindi segue la tesi (sempre per il teorema dei carabinieri).

- $\gamma = \int_0^\infty (\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t})e^{-t}\,dt$: infatti (dal punto precedente) $\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ ($\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}\,dt = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ mandando $t \mapsto \frac{1}{t}$). Quindi $\gamma = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_\delta^1 \frac{dt}{t} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right) = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{1-e^{-\delta}}^1 \frac{dt}{t} - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)$ (essendo $\lim_{\delta\to 0}\int_{1-e^{-\delta}}^\delta \frac{dt}{t} = \lim_{\delta\to 0}\log(\frac{\delta}{1-e^{-\delta}}) = 0$). Infine se $t = 1-e^{-u}$ otteniamo $\int_{1-e^{-\delta}}^1 \frac{dt}{t} = \int_\delta^\infty \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\,du$, quindi
$\gamma = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt - \int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)$.

- $\log z = \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-tz}}{t}\,dt$ (z è un numero reale positivo): infatti, se $f(t)$ è il secondo membro, $f(1) = 0$ e $f'(z) = \frac{1}{z}$ essendo $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \int_0^\infty \frac{e^{-tz}-e^{-t(z+h)}}{th}\,dt = \int_0^\infty e^{-tz}\frac{1-e^{-th}}{th}\,dt \to \int_0^\infty e^{-tz}\,dt = \frac{1}{z}$ per $h \to 0$ (per il teorema di convergenza dominata essendo $\frac{1-e^{-x}}{x}$ limitato).

- Se $\Gamma(z) = e^{-\gamma z}z^{-1}\prod_{n=1}^\infty (1+\frac{z}{n})^{-1}e^{\frac{z}{n}}$ è la funzione Γ di Eulero (e z è reale positivo),
$\boxed{\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\right) dt}$.
Intanto $\log\Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{z}{n} - \log(1+\frac{z}{n})\right)$, da cui derivando $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{n}}\right) = -\gamma + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right)$ (si può derivare termine a termine per la convergenza uniforme (localmente) dell'ultima serie).
Ma allora $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \int_0^\infty e^{-zt}\,dt + \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \sum_{n=1}^N (e^{-nt} - e^{-(z+n)t})\,dt$
$= -\gamma + \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-(N+1)t}-e^{-zt}+e^{-(z+N+1)t}}{1-e^{-t}}\,dt$
$= -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt - \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty e^{-(N+1)t}\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt$ e l'ultimo limite è nullo (per il teorema di convergenza dominata, essendo l'integrando dominato da $e^{-t}\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}$).
Quindi $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt$, che è la tesi usando il risultato del quarto punto.

- Dal punto precedente, $\frac{d}{du}\log\Gamma(u+1) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tu}}{e^t-1}\right) dt$.
  Essendo $\frac{1}{2u} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-tu}\, dt$ e $\log u = \int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-tu}}{t}\, dt$, otteniamo
  $\frac{d}{du}\log\Gamma(u+1) = \frac{1}{2u} + \log u - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) e^{-tu}\, dt$. Integrando da 1 a z,
  $\log\Gamma(z+1) = \frac{1}{2}\log z + z\log z - z + 1 - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) \frac{e^{-t}-e^{-tz}}{t}\, dt$ (infatti se $g(z)$ è l'ultimo integrale abbiamo $g(1) = 0$ e $g'(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) e^{-tz}\, dt$ per il teorema di convergenza dominata, applicato esattamente come due punti fa).

- Calcoliamo $I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) \frac{e^{-t}}{t}\, dt$. Se $t \mapsto \frac{t}{2}$, $I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t} + \frac{1}{e^{\frac{t}{2}}-1}\right) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}\, dt$.
  Se $J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}\, dt$, è $J - I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t-1}\right) \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}\, dt = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t-1}\right) \frac{dt}{t}$.
  Infine $J = (J-I)+I = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t-1} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{t} + \frac{e^{-t}}{e^t-1}\right) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t^2} - \frac{e^{-t}}{2t}\right) dt =$
  $\int_0^\infty \left(-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}\right) + \frac{e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{e^{-t}}{2t}\right) dt = -\left[\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-\frac{t}{2}}}{t}\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log(\frac{1}{2})$
  (v. quinto punto). Ma, ponendo $z = \frac{1}{2}$ nell'ultima equazione del punto precedente e usando il fatto che $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, arriviamo a $\log\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} + \log(\frac{1}{2}) + (J-I)$, da cui $J - I = \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}$.
  Dunque $I = J - (J-I) = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi)$.
  Da tutto questo e dal punto precedente segue che
  $\boxed{\log\Gamma(z+1) = (z+\frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1}\right) \frac{e^{-tz}}{t}\, dt}$ $(**)$.

- Sempre dal quinto punto, togliendo e riaggiungendo $\frac{1}{2}\log z = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-tz}}{t}\, dt$ al secondo membro della $(**)$, arriviamo a
  $\log\Gamma(z+1) = z\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{2t} - \frac{e^{-tz}}{t^2} + \frac{e^{-tz}}{t(e^t-1)}\right) dt$. Passando al limite per $z \to 0$, otteniamo $-\frac{1}{2}\log(2\pi) = \lim_{z\to 0}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{2t} - \frac{e^{-tz}}{t^2} + \frac{e^{-tz}}{t(e^t-1)}\right) dt$. Se $h(t,z)$ è l'integrando, la tesi segue dal teorema di convergenza dominata se mostriamo che $h(t,z)$ è limitata in un intorno di $(0,0)$.
  Ma espandendo $h(t,z)$ in somme e prodotti di serie di potenze (osservando che anche $\frac{t}{e^t-1}$ è analitica) e isolando gli opportuni termini iniziali per eliminare i denominatori è chiaro che $h(t,z)$ si scrive come polinomio di serie di potenze in t e tz, a coefficienti in $\mathbb{R}[t,z]$, da cui la tesi.

Riferimenti bibliografici

[1] G. H. Hardy and S. Ramanujan. Asymptotic formulaæ in combinatory analysis. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-17(1):75–115, 1918.

[2] D. J. Newman. A simplified proof of the partition formula. *Michigan Math. J.*, 9:283–287, 1962.