# Il caos nella $\phi(\cdot)$ di Eulero

La funzione $\phi(\cdot)$ è quella che assegna ad ogni intero positivo $n$ il numero di interi (compresi tra 1 e $n$) coprimi con $n$.
Di seguito con $p_n$ indicheremo l'$n-$esimo numero primo e con $\mathbb{P}$ l'insieme dei primi. Vale questo risultato:

**Teorema.** *Fissato un $k \in \mathbb{N}$, siano $Q = \{p \in \mathbb{P} : p \leq k+1\}$ e $\alpha = \prod_{p \in Q} \frac{p-1}{p}$. Date due $(k+1)-$uple $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ e $(y_0, y_1, \ldots, y_k)$ tali che $\forall i \ 0 \leq x_i < y_i \leq \alpha$, esiste un $n$ (anzi ne esistono infiniti) tale che per ogni $i$ $x_i < \frac{\varphi(n+i)}{n+i} < y_i$.*

Premettiamo due lemmi:

**Lemma 1.** *Fissato $k \in \mathbb{N}$, sia $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una successione di interi positivi tale che per ogni $n$ $c_n$ ha al più $n+k$ divisori primi, tutti non inferiori a $p_n$. Allora $\lim_{n \to +\infty} \frac{\varphi(c_n)}{c_n} = 1$.*

*Dimostrazione.* Per la moltiplicatività di $\varphi(\cdot)$, $\frac{\varphi(c_n)}{c_n} = \prod_{p|c_n,\ p \in \mathbb{P}} \frac{\varphi(p)}{p}$
$= \prod_{p|c_n,\ p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{n+k}$. Fissiamo un qualunque $a \in \mathbb{R}^+$: avremo che esiste sempre un $N$ intero positivo tale che $p_n \geq an$ per ogni $n \geq N$, da cui $\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{n+k} \geq \left(1 - \frac{1}{an}\right)^{n+k}$.
Dunque, da $\left(1 + \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{n}\right)^{n+k} \leq \frac{\varphi(c_n)}{c_n} \leq 1$ (per $n \geq N$), essendo $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{n}\right)^{n+k} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-\frac{1}{a}}$, esiste un $N'$ tale che $e^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{a} \leq \frac{\varphi(c_n)}{c_n} \leq 1$ per ogni $n \geq N'$.
Quindi, essendo $\lim_{a \to +\infty} \left(e^{-\frac{1}{a}} - \frac{1}{a}\right) = 1$, esiste $\lim_{n \to +\infty} \frac{\varphi(c_n)}{c_n}$ e vale 1. □

**Lemma 2.** *Fissati $x, y$ tali che $0 \leq x < y \leq 1$, per ogni $z \in \mathbb{N}$ grande a piacere esiste un insieme finito $A$ di primi maggiori di $z$ tale che, detto $m$ il prodotto degli elementi di $A$, si abbia $x < \frac{\varphi(m)}{m} < y$.*

*Dimostrazione.* Costruiamo $m$ tramite le seguenti successioni:

- poniamo $m_0 = 1$ e $a_0 = \max\{i : p_i \leq z\}$; abbiamo banalmente $\frac{\varphi(m_0)}{m_0} = 1 > x$
- per ogni $i \geq 0$, supponendo che sia $\frac{\varphi(m_i)}{m_i} > x$, consideriamo il più piccolo primo $p_u$, con $u > a_i$, tale che $\frac{\varphi(m_i)}{m_i} \cdot \frac{p_u - 1}{p_u} > x$ (esiste essendo $\lim_{n \to +\infty} \frac{p_i - 1}{p_i} = 1$).

Sia inoltre $v$ il più grande intero non inferiore a $u$ tale che $\frac{\varphi(m_i)}{m_i} \cdot \prod_{i=u}^{v} \frac{p_i - 1}{p_i} > x$ (anche questo esiste essendo, come è noto, $\prod_{i \geq u} \frac{p_i - 1}{p_i} = 0$).

Poniamo $m_{i+1} = m_i \prod_{i=u}^{v} p_i$ e $a_{i+1} = v$.
Abbiamo per costruzione $\frac{\varphi(m_{i+1})}{m_{i+1}} = \frac{\varphi(m_i)}{m_i} \cdot \prod_{i=u}^{v} \frac{p_i - 1}{p_i} > x$. Per il principio di induzione possiamo costruire le due successioni e sarà sempre $\frac{\varphi(m_i)}{m_i} > x$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Inoltre, essendo $\frac{\varphi(m_i)}{m_i} \cdot \frac{p_{a_i+1}-1}{p_{a_i+1}} \leq x$ per come abbiamo definito $a_i$, esisterà un $r$ tale che $\frac{\varphi(m_r)}{m_r} < y$. Infatti, essendo la successione $\{a_i\}$ crescente, possiamo porre $r = \max\{i : p_{a_i} \leq \frac{y}{y-x}\}$. Avremo $p_{a_r+1} > \frac{y}{y-x}$, da cui $1 - \frac{1}{p_{a_r+1}} > \frac{x}{y}$ o anche $y \cdot \frac{p_{a_r+1}-1}{p_{a_r+1}} > x$; da $\frac{\varphi(m_r)}{m_r} \cdot \frac{p_{a_r+1}-1}{p_{a_r+1}} \leq x$ otteniamo $\frac{\varphi(m_r)}{m_r} < y$. Dunque ponendo $A = \{p \in \mathbb{P} : p \mid m_r\}$ si ha la tesi. □

*Dimostrazione del Teorema.* Sia $q = \prod_{p \in Q} p$. Dal Lemma 2 segue che possiamo trovare degli insiemi disgiunti $A_0, A_1, \ldots, A_k$ di primi maggiori di $k+1$ tali che, detto $s_i = \prod_{p \in A_i} p$ per ogni $i \leq k$, si abbia $\frac{x_i(q,i)}{\varphi((q,i))} < \frac{\varphi(s_i)}{s_i} < \frac{y_i(q,i)}{\varphi((q,i))}$. Sia $B_j = \{p_i, i \leq j\} \setminus A_0 \setminus A_1 \setminus \ldots \setminus A_k \setminus Q$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $t_j = \prod_{p \in B_j} p$.
Allora il sistema di congruenze

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{s_0} \\ n+1 \equiv 0 \pmod{s_1} \\ \ldots \\ n+k \equiv 0 \pmod{s_k} \\ n \equiv 0 \pmod{q} \\ n-1 \equiv 0 \pmod{t_j} \end{cases}$$

si può risolvere per ogni $j$, grazie al Teorema Cinese del Resto. In particolare per $j$ abbastanza grande avremo la tesi con la più piccola soluzione $n > 0$ del sistema:

- per ogni $i$ abbiamo che se $p \mid n+i$ (per $p$ primo) e $p \notin A_i$ allora $p > p_j$ o $p \leq k+1$, perché altrimenti sarebbe $p \in A_{i'}$ con $i' \neq i$ o $p \in B_j$. Nel primo caso, dato che $p \mid n+i'$, dovrebbe valere $p \mid |i'-i| \leq k$, assurdo. Nel secondo, poiché $p \mid n-1$, dovrebbe valere $p \mid i+1 \leq k+1$, di nuovo assurdo.
- se $p \leq k+1$, poiché $p \mid q \mid n$, vale $p \mid (q,i)$.
- $\frac{\varphi(n+i)}{n+i} = \prod_{p \mid (q,i),\ p \in \mathbb{P}} \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\varphi(s_i)}{s_i} \cdot \prod_{p_x \mid n+i,\ x>j} \frac{p_x-1}{p_x}$, dunque $x_i < \frac{\varphi(s_i)}{s_i} \cdot \prod_{p_x \mid n+i,\ x>j} \frac{p_x-1}{p_x} < y_i$
- per $j$ grande a sufficienza $n < p_1 p_2 \cdots p_j$ e pure $n+i \leq p_1 p_2 \cdots p_{j+1}$, quindi $|\{x : p_x \mid n+i,\ x > j\}| \leq j+1$
- $\prod_{p_x \mid n+i,\ x>j} \frac{p_x-1}{p_x} \to 1$ per $j \to +\infty$ (segue dal Lemma 1).

□

Abbiamo due corollari immediati, che mostrano l'andamento caotico della funzione $\phi$:

**Corollario 3.** *Data una qualunque permutazione $\sigma$ di $\{1, \ldots, k\}$, esistono infiniti $n$ tali che $i \mapsto \phi(n+\sigma(i))$ sia una funzione crescente ($i$ varia in $\{1, \ldots, k\}$). In altre parole $\phi(n+1), \ldots, \phi(n+k)$ realizzano tutti gli ordinamenti possibili.*

**Corollario 4.** *Per ogni $k$ intero positivo, $\{\frac{\phi(n+k)}{\phi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ è denso in $\mathbb{R}^+$.*