Fatti sulle funzioni C^∞

Teorema (di Borel)**.** *Data una successione* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, esiste una funzione* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *tale che* $\forall k\ f^{(k)}(0) = c_k$*.*

Dimostrazione. Possiamo supporre $c_0 = 0$. Cerchiamo f della forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin^k(b_k x).$$

Notiamo intanto che, per ogni $s, i, j \in \mathbb{N}$, $D^s(\sin^j(x)\cos^k(x))$ è un polinomio omogeneo di grado al più $j + k$ e con i coefficienti di modulo al più $(j + k)^s$ (infatti è vero per $s = 0$ e, supponendolo vero per un certo s, considerando per semplicità $i, j > 0$,

$$D^{s+1}(\sin^j(x)\cos^k(x)) = D^s(j\sin^{j-1}(x)\cos^{k+1}(x) - k\sin^{j+1}(x)\cos^{k-1}(x))$$

e la tesi segue facilmente).
Quindi $|D^s(\sin^k(b_k x))| \le (k+1)k^s|b_k|^s$.
Se per ogni coppia (j, s) con $j > s$ è $|a_j|(j+1)j^s|b_j|^s \le 2^{-j}$ $(*)$, la serie delle derivate s-esime convergerà uniformemente e sarà $f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D^s(a_k \sin^k(b_k x))$.
Notiamo poi che $D^s(\sin^k(x))$ in $x = 0$ vale 0 se $k > s$ ed è diversa da 0 se $k = s$.
Dunque se è rispettato il vincolo $(*)$ abbiamo

$$f^{(s)}(0) = \sum_{k=1}^{s} a_k b_k^s [D^s(\sin^k(x))]_{x=0}.$$

L'idea ora è di costruire induttivamente le successioni $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ e $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, facendo "avanzare" j anziché s, in modo che (per ogni j) $(*)$ si riduca a un numero finito di condizioni.
Scelti i primi $n-1$ valori di $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ e $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in modo che per $j \le n-1$ sia rispettato $(*)$ e in modo che sia $c_j = \sum_{k=1}^{j} a_k b_k^j [D^j(\sin^k(x))]_{x=0}$, grazie al fatto (già osservato) che $[D^n(\sin^n(x))]_{x=0} \neq 0$ possiamo imporre $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k^n [D^n(\sin^k(x))]_{x=0}$ e ricavarne $a_n b_n^n = u$ per qualche u fissato (per ora non abbiamo scelto né a_n né b_n). Prendendo $b_n > 0$, deve valere $a_n = \frac{u}{b_n^n}$.
Rimane da imporre $(*)$ con $j = n$, cioè $\forall s < n\ |a_n|(n+1)n^s b_n^s \le 2^{-n}$. Questo equivale a $\forall s < n\ |u|(n+1)n^s b_n^{s-n} \le 2^{-n}$. Essendo $s - n < 0$, queste disuguaglianze sono tutte vere scegliendo b_n sufficientemente grande.
Una volta scelti tutti gli $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ e tutti i $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, poiché $(*)$ vale per ogni coppia (j, s), otteniamo

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D^s(a_k \sin^k(b_k x)) = \sum_{k=1}^{s} a_k b_k^s [D^s(\sin^k(x))]_{x=0} = c_s$$

per costruzione. $\square$

Proposizione. *Esiste una funzione C^∞ su tutto $\mathbb{R}$ tale che la sua serie di Taylor abbia raggio di convergenza nullo in ogni punto.*

Dimostrazione. Sia, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $f_k(x) = (k!)^{-3k+2} \cos((k!)^3 x)$. Osserviamo che $\forall s \leq k-1$ $|f_k^{(s)}(x)| \leq (k!)^{-1}$, mentre $\left(f_k^{(k)}(x)\right)^2 + \left(f_k^{(k+1)}(x)\right)^2 \geq (k!)^4$ $(**)$. Quindi almeno una tra $|f_k^{(k)}(x)|$ e $|f_k^{(k+1)}(x)|$ è $\geq \frac{(k!)^2}{2}$.
Costruiamo induttivamente una successione $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $\forall j$ $k_{j+1} \geq k_j + 2$, in modo che $\sum_{j=0}^{\infty} f_{k_j}(x)$ abbia la proprietà cercata. La sua convergenza a una funzione C^∞ è assicurata in ogni caso (per ogni s $\sum_{j=0}^{\infty} f_{k_j}^{(s)}(x)$ converge uniformemente).
Scelti i primi n termini, basta fare in modo che la derivata k_n-esima (o (k_n+1)-esima) della serie sia $\Omega((k_n!)^2)$ per garantire raggio di convergenza di Taylor nullo ovunque. Per la $(**)$, basta fare in modo che $\sum_{j\neq n} f_{k_j}^{(k_n)}(x) = o((k_n!)^2)$ (e lo stesso per le derivate (k_n+1)-esime).
Il vincolo finora imposto sulla successione assicura che $\sum_{j>n} |f_{k_j}^{(k_n)}(x)| \leq e = O(1)$ (e lo stesso vale per k_n+1), quindi basta occuparsi dei termini precedenti. Ora però $g(x) = \sum_{j<n} f_{k_j}(x)$ è una serie di potenze con raggio di convergenza infinito. Essendo anche periodica, diciamo $g(x) = g(x+c)$ con $c > 0$, vale $|g(k)(x)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+k)}(0)}{n!} x^n| \leq \sup_{s\geq k} |g^{(s)}(0)| e^c$ per $x \in [0, c]$ e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Poiché $\frac{g^{(s)}(0)}{s!} \to 0$, esiste $k \geq k_{n-1} + 2$ tale che $|g^{(k)}(0)|, |g^{(k+1)}(0)| \leq \frac{(k+1)!}{e^c}$. Dunque $g^{(k)}(x), g^{(k+1)}(x) = o((k!)^2)$ e ponendo $k_n = k$ abbiamo quanto volevamo. Per avere una funzione che sia anche monotona, basta aggiungere alla serie un multiplo sufficientemente grande di x. $\square$