Il teorema di Van der Waerden per i polinomi

Il nostro obiettivo è ottenere il seguente risultato:

Teorema 1. *Sia* $\mathbb{N} = \sqcup_{i=1}^{r} C_i$ *una colorazione di* $\mathbb{N}$ *e siano* $(P_j(x))_{j=1}^{k}$ k *polinomi in* $\mathbb{Q}[x]$ *che assumono solo valori interi e si annullano in* 0. *Allora esistono un* $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ *ed* $s, t \in \mathbb{N}$ *tali che* $s + P_j(t) \in C_{i_0}$ *per* $j = 1, \dots, k$.

Osserviamo che basta mostrare l'analogo risultato con $\mathbb{Z}$ al posto di $\mathbb{N}$:

Teorema 2. *Sia* $\mathbb{Z} = \sqcup_{i=1}^{r} C_i$ *una colorazione di* $\mathbb{Z}$ *e siano* $(P_j(x))_{j=1}^{k}$ *polinomi come prima. Allora esistono un* $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ *ed* $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$ *tali che* $s + P_j(t) \in C_{i_0}$ *per* $j = 1, \dots, k$.

Infatti questo implica una versione finita del tipo

Corollario 3. *Fissati* $r > 0$ *e* $(P_j(x))_{j=1}^{k}$ *polinomi come prima, esiste un* $m \in \mathbb{N}$ *abbastanza grande tale che per ogni colorazione* $[-m, m] = \sqcup_{i=1}^{r} C_i$ *esistono un* $s \in [-m, m]$ *e un* $t \in \mathbb{N}$ *in modo che* $\{s + P_j(t)\}$ *sia monocromatico (e ovviamente* $\forall j \ s + P_j(t) \in [-m, m]$*)*

e per ottenere il risultato per $\mathbb{N}$ basterà traslare la sua colorazione per averne una di $[-m, +\infty]$ e applicare il corollario.

Per ottenere il secondo teorema useremo un ultrafiltro minimale di $\beta\mathbb{Z}$, cioè mostreremo che

Teorema 4. *Dati* k *polinomi come prima e* $p \in \beta\mathbb{Z}$ *ultrafiltro minimale, esiste* $q \in \beta(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ *tale che* $\lim\limits_{(s,t) \to q} (s + P_j(t) + p) = p$ *per ogni* $j = 1, \dots, k$.

(il limite nell'enunciato è da intendersi nella topologia di $\beta(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$)

Cominciamo col vedere che il Teorema 4 implica il Teorema 2: possiamo considerare la colorazione come una funzione $f : \mathbb{Z} \to \{1, \dots, r\}$. Questa si estende a una funzione continua $\tilde{f} : \beta\mathbb{Z} \to \{1, \dots, r\}$ (al codominio diamo la topologia discreta) e, essendo i polinomi in numero finito, otteniamo che esiste una coppia $(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tale che $\tilde{f}(s + P_j(t) + p) = \tilde{f}(p)$ per tutti i j. Di nuovo, per la continuità di $r \mapsto s + P_j(t) + r$ ($r \in \beta\mathbb{Z}$), esiste un $u \in \mathbb{Z}$ tale che $f(s + P_j(t) + u) = \tilde{f}(p)$ per tutti i j, cioè la tesi.

Esiste anche un corrispondente enunciato di dinamica topologica:

Teorema 5. *Sia* (X, T) *un sistema dinamico topologico (con* X *compatto metrizzabile e* T *omeomorfismo). Dati un ricoprimento aperto* $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ *e* k *polinomi come prima, esistono un* $i \in I$ *e un* $t \in \mathbb{N}$ *tali che* $\bigcap_{j=1}^{k} T^{-P_j(t)}(U_i) \neq \emptyset$.

Anche questo si deduce facilmente dal Teorema 4: definiamo $T^z(x)$ per un generico $z \in \beta\mathbb{Z}$ ponendo $T^z(x) = \lim_{n\to z} T^n(x) = z - \lim T^n(x)$ (esiste per la compattezza di X). Questa non è altro che l'estensione continua della funzione $n \mapsto T^n(x)$ (definita su $\mathbb{Z}$) a tutto $\beta\mathbb{Z}$, quindi per continuità è $T^{u+v}(x) = (u+v) - \lim T^n(x) = u - \lim(v - \lim T^n(x)) = T^u \circ T^v(x)$.
Scegliamo ora un ultrafiltro $p \in \beta\mathbb{Z}$ minimale e un $x \in X$ a caso. Per il Teorema 4 è $\lim_{(s,t)\to q} T^{s+P_j(t)+p}(x) = T^p(x)$, ma $T^{s+P_j(t)+p}(x) = T^{s+P_j(t)} \circ T^p(x)$ per cui, detto $\ell = T^p(x)$, vale $\lim_{(s,t)\to q} T^{s+P_j(t)}(\ell) = \ell$. Sia i_0 tale che $\ell \in U_{i_0}$: per un'opportuna coppia (s,t) $(t > 0)$ abbiamo $T^{s+P_j(t)}(\ell) \in U_{i_0}$ (per tutti i j), cioè $\bigcap_{j=1}^{r} T^{-P_j(t)}(U_{i_0}) \neq \emptyset$ (perché contiene $T^s(\ell)$).

Dimostrazione del Teorema 4.

Fissiamo d'ora in poi un $p \in \beta\mathbb{Z}$ minimale.
Diciamo che una $k-$upla di polinomi $(P_j(x))_{j=1}^k$ è *buona* se con essa vale il Teorema 4. Vale una sorta di invarianza per traslazioni:

Lemma 6. *Sia $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ a valori interi. Allora $(P_1, \ldots, P_k)$ è buona se e solo se $(P_1 - Q, \ldots, P_k - Q)$ è buona.*

Dimostrazione. Assumiamo $(P_1 - Q, \ldots, P_k - Q)$ buona (l'altra implicazione è analoga). Sappiamo che c'è un $q \in \beta(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})$ tale che $\lim_{(s,t)\to q} (s + P_j(t) - Q(t) + p)$ $= p$. Definiamo $q' = \lim_{(s,t)\to q} (s - Q(t), t)$ e osserviamo che $\lim_{(s,t)\to q'} (s + P_j(t) + p) = p$: infatti se $((s_i, t_i))_{i\in I}$ è una successione generalizzata che tende a q allora $(s_i - Q(t_i), t_i) \to q'$ e vale $(s_i - Q(t_i)) + P_j(t_i) + p \to p$. □

Ora passiamo al lemma fondamentale da cui seguirà il Teorema:

Lemma 7. *Siano $Q, P_1, \ldots, P_k$ polinomi a valori interi con $P_j(0) = 0$. Supponiamo che comunque scelti m interi $h_1, \ldots, h_m$ la $km-$upla di polinomi $(P_j(x + h_\ell) - P_j(h_\ell) - Q(x))_{1\le j\le k, 1\le \ell\le m}$ sia buona. Allora $(0, P_1, \ldots, P_k)$ è buona.*

Dimostrazione. Poniamo $P_0(x) = 0$. Fissiamo un numero finito di coppie (s_i, t_i), diciamo $1 \le i \le b$.
Per ogni $d > 0$ sappiamo dall'ipotesi che esiste un $q_d \in \beta(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ tale che

$$\lim_{(s_d,t_d)\to q_d} s_d + P_j(t_{a+1} + \cdots + t_d) - P_j(t_{a+1} + \cdots + t_{d-1}) - Q(t_d) + p = p$$

per $0 \le a < d$ e $1 \le j \le k$.
Sia $m_b = \sum_{i=1}^b (s_i - Q(t_i))$. Per $0 \le a \le b$ e $0 \le i \le k$ definiamo anche

$$p_{a,b,j} = \lim_{(s_1,t_1)\to q_1} \cdots \lim_{(s_b,t_b)\to q_b} P_j(t_{a+1} + \cdots + t_b) + m_b + p$$

($q_1, \ldots, q_b$ sono definiti ricorsivamente nel modo indicato prima).
Osserviamo che $p_{a,b,j} \in \beta\mathbb{Z} + p$. Per ipotesi, se $j \ge 1$ e $0 \le a < b$ vale $p_{a,b,j} =$

$p_{a,b-1,j}$: infatti $P_j(t_{a+1}+\cdots+t_b)+m_b+p=(P_j(t_{a+1}+\cdots+t_{b-1})+m_{b-1})$ $+(s_b+P_j(t_{a+1}+\cdots+t_b)-P_j(t_{a+1}+\cdots+t_{b-1})-Q(t_b)+p)$
e per $(s_b,t_b)\to q_b$ il primo termine non cambia, mentre il secondo tende a p.
Dunque $p_{a,b,j}=p_{a,a,j}=p_{a,a,0}$.
Per $j=0$ invece semplicemente $p_{a,b,0}=p_{b,b,0}$.
Sia $p_*\in\beta\mathbb{N}$ ultrafiltro non principale e poniamo $p'=\lim\limits_{a\to p_*}p_{a,a,0}=\lim\limits_{b\to p_*}p_{b,b,0}$.
Chiaramente $p'\in\beta\mathbb{Z}+p$. Essendo p minimale, possiamo trovare un $p''\in\beta\mathbb{Z}$ che dia $p''+p'=p$. Segue che $\lim\limits_{h\to p''}\lim\limits_{a\to p_*}\lim\limits_{b\to p_*}h+p_{a,b,j}=p$ per $0\le j\le k$ (perché, grazie al fatto che $p_*\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, possiamo supporre $0\le a\le b$). Posto

$$q=\lim_{h\to p''}\lim_{a\to p_*}\lim_{b\to p_*}\lim_{(s_1,t_1)\to q_1}\ldots\lim_{(s_b,t_b)\to q_b}(h+m_b,t_{a+1}+\cdots+t_b)$$

abbiamo che $\lim\limits_{(s,t)\to q}s+P_j(t)+p=p$ per $0\le j\le k$. Per convincerci di questo possiamo pensare di estendere la mappa $(s,t)\mapsto s+P_j(t)+p$ a tutto $\beta(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})$ in modo continuo, per cui il primo membro è in realtà

$$\lim_{h\to p''}\lim_{a\to p_*}\lim_{b\to p_*}\lim_{(s_1,t_1)\to q_1}\ldots\lim_{(s_b,t_b)\to q_b}((h+m_b)+P_j(t_{a+1}+\cdots+t_b)+p)\,.$$

□

Può essere istruttivo rivedere l'ultima dimostrazione nell'ottica della dinamica topologica (per una dimostrazione completa di quest'ultimo tipo si può vedere [1]). Abbiamo un sistema (X,T), con X spazio metrico con distanza $d(\cdot,\cdot)$.
Supponiamo di sapere che per ogni $\epsilon>0$ e ogni scelta di $(h_1,\ldots,h_m)$ esistono $t>0$ e $x\in X$ tali che i punti $T^{P_j(t+h_\ell)-P_j(t)-Q(t)}x$ distino meno di ϵ gli uni dagli altri (al variare di j e ℓ). Vogliamo mostrare che vale lo stesso per i polinomi $(0,P_1,\ldots,P_k)$.
Prendere un ultrafiltro *minimale* p equivale in questo nuovo contesto a ridursi a un sottosistema *minimale*. Ora l'idea è di costruire una successione (t_i) a valori in $\mathbb{N}$ e una successione (x_i) a valori in X in modo che per ogni $a<b$ $T^{P_j(t_{a+1}+\cdots+t_b)}x_b$ sia *vicino* a x_a (per ogni j). Prendendo un punto limite della successione (x_i) abbiamo la tesi (questo corrisponde al punto in cui abbiamo preso il limite di $p_{a,b,j}$).
Vediamo come si fa questo concretamente nel caso particolare in cui $k=1$ e $P_1(t)=t^2$: senza perdita di generalità (X,T) è minimale. Scegliamo x_1 e t_1 a caso; supponendo di aver scelto $x_1,\ldots,x_n$ e $t_1,\ldots,t_n$ in modo che per $a<b\le n$ sia $d(T^{(t_{a+1}+\cdots+t_b)^2}x_b,x_a)<\epsilon$, prendiamo un $\delta<\epsilon$ tale che, per ogni $y\in X$, $d(y,x_n)<\delta$ implichi $d(T^{(t_{a+1}+\cdots+t_n)^2}y,x_a)<\epsilon$ per ogni $a<n$ (uniforme continuità).
Ora sappiamo che esistono un y_n e un t_{n+1} per cui $d(T^{(t_{a+1}+\cdots+t_n)t_{n+1}}y_n,y_n)<\frac{\delta}{2}$ per tutti gli $a<n$ e grazie alla minimalità di X possiamo anche richiedere $d(y_n,x_n)<\frac{\delta}{2}$.
Posto $x_{n+1}=T^{-t_{n+1}^2}y_n$ otteniamo $d(T^{2(t_{a+1}+\cdots+t_n)t_{n+1}+t_{n+1}^2}x_{n+1},x_n)=$
$=d(T^{2(t_{a+1}+\cdots+t_n)t_{n+1}}y_n,x_n)\le d(T^{2(t_{a+1}+\cdots+t_n)t_{n+1}}y_n,y_n)+d(y_n,x_n)<\delta$, quindi $d(T^{(t_{a+1}+\cdots+t_{n+1})^2}x_{n+1},x_a)<\epsilon$. Questo è proprio quello che volevamo.

Dato un polinomio $a_d x^d + \cdots + a_1 x$ ($a_d \neq 0$) chiamiamo $a_d x^d$ il suo *monomio di testa* e data una $k-$upla di polinomi il suo *peso* è il vettore infinito $(w_1, w_2, \dots)$, dove w_i è il numero dei monomi di testa di grado i distinti di polinomi della $k-$upla. Diciamo che $(w_1, w_2, \dots) > (w'_1, w'_2, \dots)$ se per qualche i_0 abbiamo $w_{i_0} > w_{i_0}$ e $w_i = w'_i$ per tutti gli $i > i_0$. Questo dà un buon ordine sui vettori definitivamente nulli di $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$. È facile vedere che:

1. Se P_1 ha grado minimo in $(P_1, \dots, P_k)$ (e $\forall j\ P_j \neq 0$), il peso di questa è maggiore del peso di $(0, P_2 - P_1, \dots, P_k - P_1)$.
2. Se Q_1 ha grado minimo in $(0, Q_1, \dots, Q_k)$ (e $\forall j\ Q_j \neq 0$), il peso di questa $(k+1)-$upla è maggiore di quello di $(Q_j(x + h_\ell) - Q_j(h_\ell) - Q_1(x))_{1 \leq j \leq k, 1 \leq \ell \leq m}$, per qualsiasi scelta di $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}$.

Ora, se vogliamo mostrare che una $k-$upla $(P_1, \dots, P_k)$ è buona, grazie al primo punto e al Lemma 6 possiamo sottrarre P_1 (che supponiamo avere grado minimo) e ricondurci a una situazione del tipo $(0, Q_1, \dots)$ di peso minore (se $P_1 = 0$ saltiamo questo passaggio); grazie al secondo punto e al Lemma 7 infine ci riduciamo a una collezione di polinomi di peso ancora inferiore. Il buon ordine ci assicura che arriveremo (in finiti passi) a (0), con cui vale il Teorema 4 con un ultrafiltro principale.

Riferimenti bibliografici

[1] V. Bergelson and A. Leibman. Polynomial extensions of van der Waerden's and Szemerédi's theorems. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3):725–753, 1996.

[2] Terence Tao. Lecture 5: Other topological recurrence results (note per un corso di teoria ergodica). `http://terrytao.wordpress.com/2008/01/21/254a-lecture-5-other-topological-recurrence-results/`.