Medie, baricentri e matrici

Un problema tra il classico e il moderno

Federico Poloni

PhD student, Scuola Normale Superiore, Pisa

Bergamo, 30 Gennaio 2008

Altri concetti di media

k reali positivi $a_1, \ldots, a_k$

Media aritmetica

$$AM(a_1, \ldots, a_k) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$$

Esempio

Tre oggetti pesano 300 g, 400 g, 800 g. Altri tre oggetti uguali tra loro hanno lo stesso peso complessivo, quanto pesano?

Altri concetti di media

Media armonica

$$HM(a_1, \ldots, a_k) = \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}}$$

Esempio

L'auto A fa tre giri di pista, uno a 30 km/h, uno a 40 km/h, uno a 80 km/h. L'auto B fa tre giri di pista, tutti e tre alla stessa velocità, e ci impiega lo stesso tempo di A. Qual è questa velocità?

Altri concetti di media

Media geometrica

$$GM(a_1, \ldots, a_k) = \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$$

Esempio

Una scatola ha lati 3 cm, 4 cm, 8 cm. Un'altra scatola, cubica, ha lo stesso volume. Qual è il suo lato?

Esempio

Sui miei risparmi, ottengo un anno l'interesse del 3%, un anno del 4%, un anno dell'8%. A quale tasso di interesse (costante) avrei dovuto investirli per ricavare la stessa somma dopo tre anni?

Cosa ci aspettiamo da una media?

- simmetrica: $M(a, b, c) = M(b, a, c) = \dots$
- omogenea: $M(ka, kb, kc) = kM(a, b, c)$
- compresa tra min e max:
  $\min(a, b, c) \leq M(a, b, c) \leq \max(a, b, c)$
- monotona: $b' \geq b \Rightarrow M(a, b', c) \geq M(a, b, c)$

ed altro...

Disuguaglianze

Non usatele per le medie di fine quadrimestre...

Teorema

Per ogni k-upla di reali positivi,

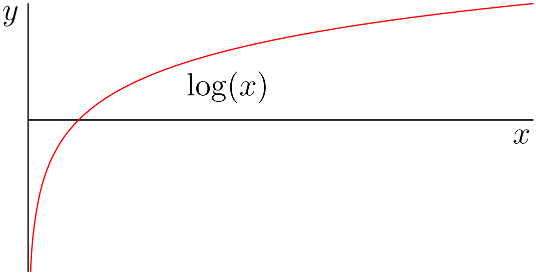
$$HM \leq GM \leq AM$$

Altra interpretazione della media geometrica

Passo ai logaritmi + media aritmetica:

$$\log(GM) = \frac{\log(a_1) + \log(a_2) + \cdots + \log(a_k)}{k}$$

In molti contesti, lavorando con numeri positivi ha senso passare prima ai logaritmi: il "bordo" scompare...

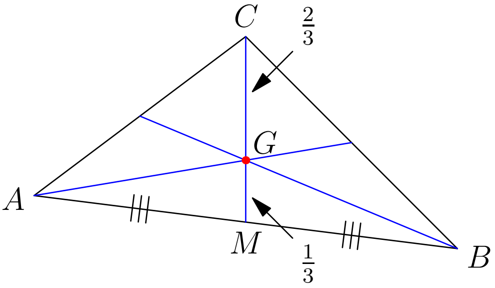


Il baricentro

Definizioni

Mediana di un triangolo = segmento che unisce il punto medio di un lato al vertice opposto

Baricentro = punto di incontro delle mediane (che si incontrano!)



Teorema

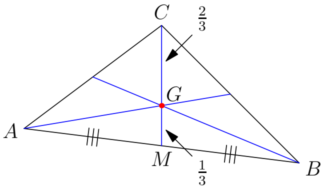
Le mediane si incontrano (nel baricentro) a 2/3 della loro lunghezza

Dimostrazione

Teorema

Le mediane si incontrano (nel baricentro) a 2/3 della loro lunghezza

Sorprendentemente semplice con geometria analitica!
Sulla mediana CM, costruiamo un "candidato G" che stia alla lunghezza giusta della mediana...



$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$$
$$x_G = \frac{2}{3}x_M + \frac{1}{3}x_C = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$$

L'espressione è simmetrica in A, B, C: allora se rifaccio la costruzione su un altro lato, finisco nello stesso punto. $\square$

Proprietà di minimo del baricentro

Teorema

Il baricentro è il punto P per cui è minima $AP^2 + BP^2 + CP^2$ (somma dei quadrati delle distanze dai vertici).

Di nuovo semplice con geometria analitica:

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= \\ &= (x_P - x_A)^2 + (x_P - x_B)^2 + (x_P - x_C)^2 + \dots \\ &= 3x_P^2 - 2x_P(x_A + x_B + x_C) + (x_A^2 + x_B^2 + x_C^2) + \dots \end{aligned}$$

parabola, ha minimo in $x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$

Matrici

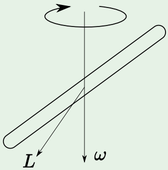
Matrice = "tabella" piena di numeri

$$M = \begin{bmatrix} 0.460 & 0.470 & 0.890 \\ 0.944 & 0.849 & 0.715 \\ 0.090 & 0.946 & 0.686 \end{bmatrix}$$

Alcune quantità fisiche si esprimono naturalmente come matrici (tensori).

Esempio

Tensore d'inerzia: velocità angolare $\mapsto$ momento angolare



$$L = \mathcal{I}\omega$$

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2$$

Media geometrica tra due matrici

Ipotesi tecnica

Lavoriamo con matrici *simmetriche* e *positive definite* (SPD): es.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1.5 & -1 \\ 1.5 & 5 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & 4 \end{bmatrix}$$

Problema: come "mediare" diversi dati sperimentali?

Come definire la media di due matrici?

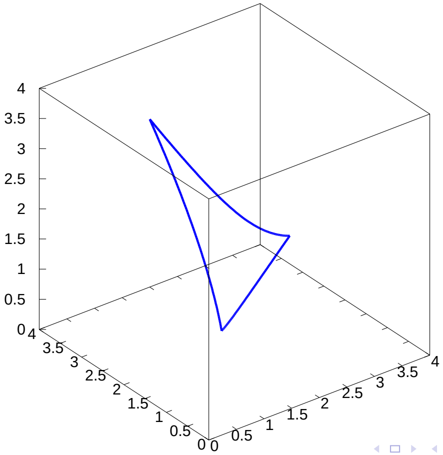
- $M(A,B) = (AB)^{1/2}$ oppure $A^{1/2}B^{1/2}$: no! $AB \neq BA$
- $M(A,B) = \exp(\frac{\log A + \log B}{2})$: no! non monotona

…sorprendentemente, $M(A,B) = A(A^{-1}B)^{1/2}$ funziona

Matrici e geometria

Possiamo definire una “geometria” sulle matrici simmetriche, positive definite.

Basta dire quanto costa spostarsi in una direzione. . .



Geometria e medie

Possiamo fare le stesse costruzioni della geometria piana, ma molti teoremi non valgono più

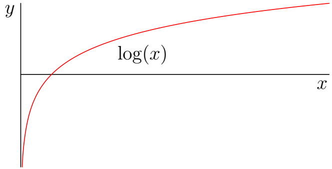
Qual è il rapporto tra questa geometria e le medie di matrici?

Teorema

L'equazione del segmento (geodetica) che congiunge A e B è $\gamma(t) = A(A^{-1}B)^t$, $t \in [0, 1]$.

La media geometrica tra due matrici è il punto medio di AB.

[Come mai non la media aritmetica? Per lavorare con le matrici SPD, costruzione simile al passare ai logaritmi. . .]



Media di più matrici

Problema

Come definire una "buona" media geometrica di tre o più matrici? Le formule più semplici non funzionano...

Idea:

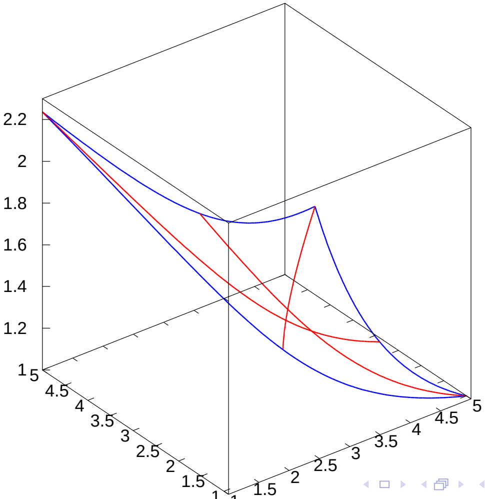
Due matrici: punto medio del segmento

Tre matrici: baricentro del triangolo

(nella nuova geometria)

Problema

Le mediane non si incontrano!



Soluzione I: proprietà di minimo del baricentro

Dalla geometria euclidea...

Teorema

Il baricentro è il punto P per cui è minima $AP^2 + BP^2 + CP^2$ *(somma dei quadrati delle distanze dai vertici).*

Definizione

La media geometrica di più matrici $A_1, A_2, \ldots, A_k$ è definita come la matrice P per cui è minima

$$[d(A_1, P)]^2 + [d(A_2, P)]^2 + \cdots + [d(A_k, P)]^2$$

dove $d(\cdot, \cdot)$ è la distanza nella nuova geometria

Soluzione I: proprietà di minimo del baricentro

Definizione

La media geometrica di più matrici $A_1, A_2, \ldots, A_k$ è definita come la matrice P per cui è minima

$$[d(A_1, P)]^2 + [d(A_2, P)]^2 + \cdots + [d(A_k, P)]^2$$

Proprietà:

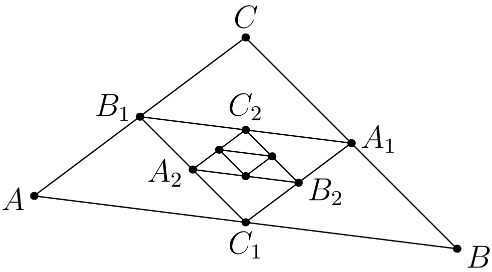
- per $k = 2$, è la stessa di prima, bene
- soddisfa molte delle proprietà che cercavamo (ma non tutte...)
- come si calcola? Non facile...

Soluzione II: iterazione

Con $M(X,Y) =$ punto medio tra X e Y, definiamo

$$
\begin{array}{lll}
A_1 = M(B,C) & A_2 = M(B_1,C_1) & \\
B_1 = M(C,A) & B_2 = M(C_1,A_1) & \ldots \\
C_1 = M(A,B) & C_2 = M(A_1,B_1) &
\end{array}
$$

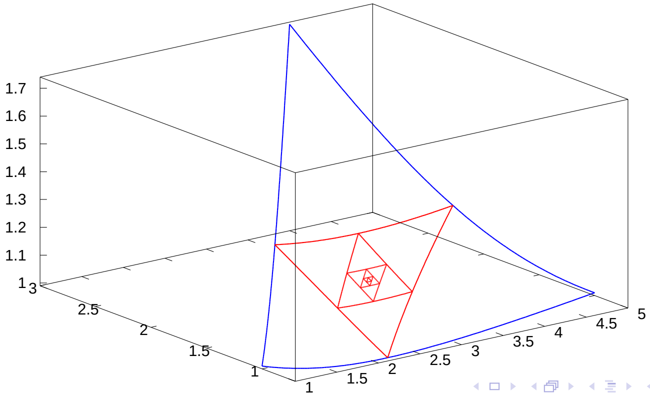
Nel piano (geometria Euclidea), converge al baricentro



Soluzione II: iterazione

Teorema

Anche nella geometria delle matrici A_i, B_i, C_i convergono a uno stesso punto. Lo definiamo media geometrica dei tre punti



Soluzione II: iterazione

Definizione

Anche nella geometria delle matrici A_i, B_i, C_i convergono a uno stesso punto. Lo definiamo media geometrica dei tre punti

Proprietà:

- per $k = 2$, è la stessa di prima, bene
- soddisfa tutte le proprietà che cercavamo
- generalizzabile a più di tre matrici: $A_{k+1} = M(B_k, C_k, \dots)$
- come si calcola? Facile: direttamente dalla definizione, ma...
- problema: servono molte iterazioni, calcolo laborioso

Soluzione III: altra iterazione

Dalla geometria euclidea. . .

Teorema

Le mediane si incontrano (nel baricentro) a 2/3 della loro lunghezza

Non ha senso per le matrici: le mediane non si incontrano!

Ricordiamo la dimostrazione del teorema:

- consideriamo i tre punti a 2/3 delle mediane
- con geometria analitica, coincidono (per simmetria dell'espressione)

Soluzione III: altra iterazione

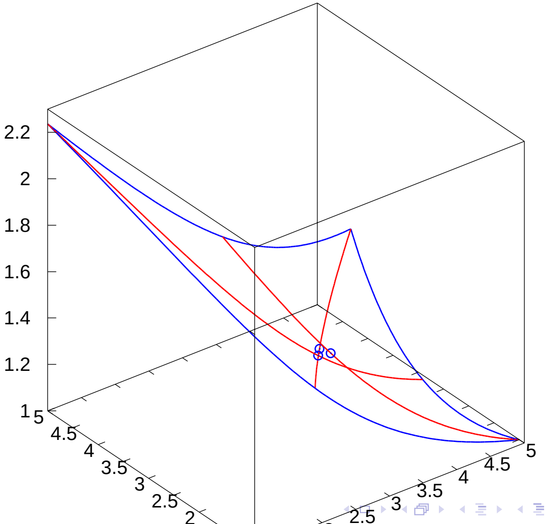
Definiamo A_1, B_1, C_1 = i punti a $2/3$ delle mediane di ABC (diversi tra loro in generale)

A_2, B_2, C_2 definiti nello stesso modo a partire da $A_1B_1C_1$ e così via

Teorema

A_i, B_i, C_i convergono a uno stesso punto. Lo definiamo media di A, B, C

Soluzione III: altra iterazione



Soluzione III: altra iterazione

Proprietà:

- per $k = 2$, è la stessa di prima, bene
- soddisfa tutte le proprietà che cercavamo
- generalizzabile a più di tre matrici
- come si calcola? Facile: direttamente dalla definizione
- molto più veloce da calcolare della precedente: l'iterazione converge più in fretta

Qualche numero

5
1.92542947898189
2.90969918536362
2.35774114351751
2.61639158463414
2.48316587472793
2.54876054375880
2.51571460655576
2.53217471946628
2.52392903948587
2.52804796243998
2.52598752310721
2.52701749813482
2.52650244948321
2.52675995852183
2.52663120018107
2.52669557839604
2.52666338904971
2.52667948366316
2.52667143634151

5
2.59890269690271
2.53027293208879
2.53025171828977
2.53025171828977

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

A sinistra: soluzione II: Punti medi dei lati

A destra: soluzione III: $\frac{2}{3}$ delle mediane

Altri spunti ...

Geometria euclidea:

Teorema (retta di Eulero)

In un triangolo, il baricentro G sta a $1/3$ del segmento OH, dove O è il circocentro e H è l'ortocentro.

Geometria delle matrici: chi sono il circocentro (punto d'incontro degli assi) e l'ortocentro (punto d'incontro delle altezze)?

Non è per nulla chiaro...

Altri spunti ...

Sia $M(X, Y, r)$ il punto che sta a una frazione r della "strada" tra X e Y (in modo che $M(X, Y, 0) = X$ e $M(X, Y, 1) = Y$)

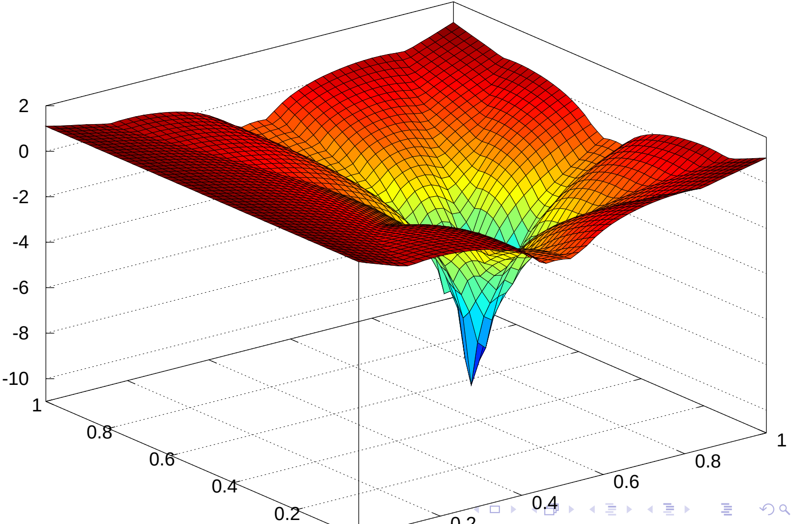
- Soluzione II: $A_{nuovo} = M(A, M(B, C, \frac{1}{2}), 1)$
- Soluzione III: $A_{nuovo} = M(A, M(B, C, \frac{1}{2}), \frac{2}{3})$

Se prendo due parametri s, t,

$$A_{nuovo} = M(A, M(B, C, s), t)$$

Chi sono gli s e t "migliori"?

Altri spunti . . .



Grazie dell'attenzione!