Laboratorio computazionale numerico
Lezione 7

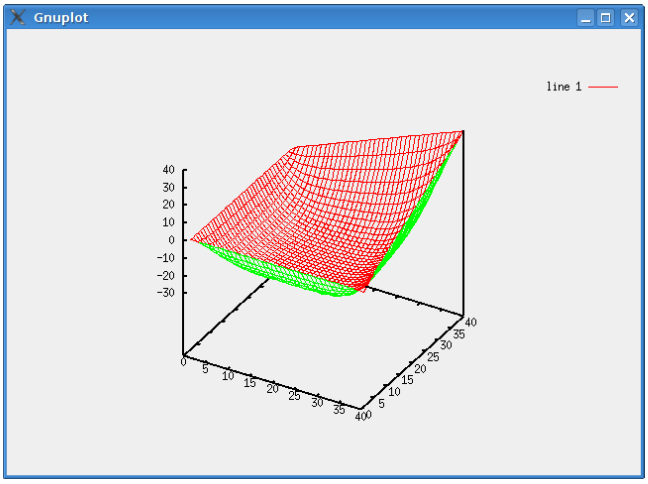
f.poloni&sns.it

2008-11-26

1 Jacobi e Gauss–Seidel in un problema differenziale in 2D

1.1 Problema e modello

Il nostro fisico di fiducia ci ha passato un problema in cui si chiede di calcolare che forma assume una membrana non rigida (un "foglio di gomma", una "tovaglia") rettangolare appesa con tutto il suo bordo in posizione fissata:



Possiamo discretizzare il problema immaginando che la superficie sia una griglia rettangolare fatta di $m \times n$ piccoli pesetti, ognuno con il suo peso e la sua altezza rispetto al suolo. In questo caso, le equazioni che rappresentano l'equilibrio sono

$$k \cdot p_{i,j} = (z_{i+1,j} - z_{i,j}) + (z_{i-1,j} - z_{i,j}) + (z_{i,j+1} - z_{i,j}) + (z_{i,j-1} - z_{i,j}), \quad \forall i = 2, \dots, m-1,\ j = 2, \dots, n-1$$

cioè il peso di ogni corpo $p_{i,j}$ dev'essere uguale alla somma delle quattro forze che "tirano" il punto dai quattro punti a cui è collegato, ognuna delle quali dipende linearmente dalla differenza di altezza tra un punto e il suo vicino. Notare che per come abbiamo scelto gli indici non ci sono equazioni che rappresentano l'altezza dei punti sul bordo, che è fissata. Questo è un sistema lineare negli

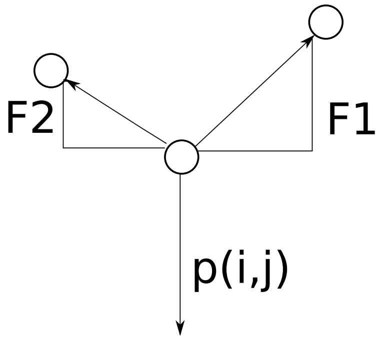


Figura 1: Le componenti verticali delle due forze di tensione $F1$ e $F2$ sono proporzionali alla differenza di altezza tra i due punti

$z(i, j)$: se scegliamo per esempio $m = n = 5$, otteniamo

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{22} \\ z_{23} \\ z_{24} \\ z_{32} \\ z_{33} \\ z_{34} \\ z_{42} \\ z_{43} \\ z_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kp_{22} - z_{12} - z_{21} \\ kp_{23} - z_{13} \\ kp_{24} - z_{14} - z_{25} \\ kp_{32} - z_{31} \\ kp_{33} \\ kp_{34} - z_{35} \\ kp_{42} - z_{41} - z_{52} \\ kp_{43} - z_{53} \\ kp_{44} - z_{54} - z_{45} \end{bmatrix} \tag{1}$$

1.2 Gauss–Seidel senza scrivere esplicitamente la (1)

Al crescere di m e n, calcolare esplicitamente matrice e termine noto diventa faticoso. Possiamo però scrivere le iterazioni che danno i metodi di Jacobi e Gauss–Seidel lavorando direttamente sulla tabella delle altezze z "in forma di matrice":

$$z_{i,j} \leftarrow \frac{1}{-4} [kp_{i,j} - z_{i-1,j} - z_{i+1,j} - z_{i,j-1} - z_{i,j+1}] \quad \text{per } i = 2, \dots, m-1 \text{ e } j = 2, \dots, n-1 \tag{2}$$

(dopo aver inizializzato correttamente le altezze dei punti del bordo).

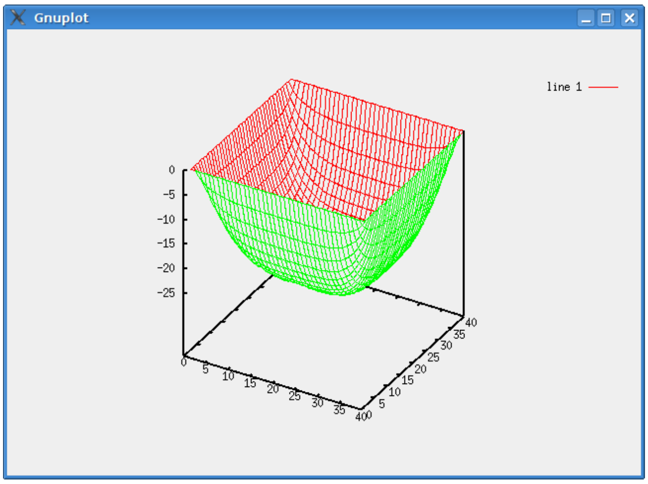
Esercizio 1. Scrivere una funzione z=membrana(bordo, carico, k) che prenda:

- bordo: matrice $m \times n$ tale che gli elementi sul suo "bordo" siano uguali alle altezze iniziali dei punti sul bordo del rettangolo (per esempio: altezza di tutti i punti sul bordo uguale a zero)
- carico: matrice $m \times n$ tale che carico(i,j) rappresenti il peso del punto (i, j) (per esempio: peso di tutti i punti uguale a 1)

ed esegua k iterazioni di Gauss–Seidel (o Jacobi), ritornando le altezze dei punti risultanti in una matrice $m \times n$ z.

Una volta risolto questo sistema lineare, possiamo disegnare su schermo il risultato con la funzione **mesh**:

```
octave:24> m=n=40;
octave:25> bordo=zeros(m,n);
octave:26> carico=ones(m,n);
octave:27> z=membrana(bordo, carico, 50);
octave:28> mesh(1:m,1:n,z)
```



Esercizio 2. Provare a vedere cosa succede se:

- cambiamo carico: per esempio, imponiamo che la metà di destra della tovaglia pesi 1 e la metà di sinistra pesi 2.
- cambiamo bordo: per esempio, il bordo di sinistra ad altezza 1, il bordo di destra ad altezza n, e l'i-esimo elemento del bordo in alto e in basso ad altezza i per "raccordare" in modo continuo gli altri due bordi. (cosa succede invece se le altezze sul bordo sono "discontinue"?)
- appoggiamo un peso in un punto specifico della "tovaglia"

1.3 Se vi state annoiando...

Esercizio 3. Chi converge più velocemente, Jacobi o Gauss–Seidel? Siete in grado di prevederlo teoricamente? (hint: avete mica visto un teorema a lezione che...)

Esercizio 4. Come si potrebbe calcolare la forma di una superficie non rettangolare, senza impazzire a scrivere l'equazione (1) esplicitamente?