Laboratorio di Analisi Numerica
Lezione 2

Federico Poloni <f.poloni@sns.it>

3 novembre 2010

Quantità di esercizi: in questa dispensa ci sono *più esercizi* di quanti uno studente medio riesce a farne durante una lezione di laboratorio, specialmente tenendo conto anche degli esercizi facoltativi. Questo è perché sono pensate per "tenere impegnati" per tutta la lezione anche quegli studenti che già hanno un solido background di programmazione.
Quindi fate gli esercizi che riuscite, partendo da quelli *non* segnati come facoltativi, e non preoccupatevi se non li finite tutti!

1 Ottenere aiuto

Con il comando `help`, potete ottenere una breve documentazione su come si usa un comando.

```
octave:1> help imag
 -- Mapping Function: imag (Z)
     Return the imaginary part of Z as a real number.

     See also: real, conj.
imag is a built-in mapper function

Additional help for built-in functions and operators is
available in the on-line version of the manual. Use the command
'doc <topic>' to search the manual index.

Help and information about Octave is also available on the WWW
at http://www.octave.org and via the help@octave.org
mailing list.
```

2 Vettori e matrici

Octave è pensato per lavorare con vettori e matrici; pertanto, ha una sintassi specifica e parecchi comandi dedicati, che rendono molto più semplice lavorare con i vettori rispetto a un linguaggio generico come il C.

2.1 Creare vettori e matrici

```
octave:1> A=[1 2 3; 4 5 6]
A =

   1 2 3
   4 5 6
```

```
 octave:1> zeros(3,2)
ans =

   0 0
   0 0
   0 0

octave:2> ones(3,2)
ans =

   1 1
   1 1
   1 1

octave:3> eye(3)
ans =

   1 0 0
   0 1 0
   0 0 1

octave:4> rand(2,3)
ans =

   0.615284 0.959462 0.755501
   0.343727 0.098065 0.469369
```

2.2 Il *range operator* :

Con la sintassi `a:t:b` creiamo un vettore (riga) che contiene gli elementi `a`, `a+t`, `a+2t`... fino a `b` (o fino all'ultimo che sia minore o uguale a `b`). Se `t`=1, può essere omesso.

```
 octave:6> 1:0.5:4
ans =

   1.0000 1.5000 2.0000 2.5000 3.0000 3.5000 4.0000

octave:7> 1:10
ans =

   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

octave:8> 1:2:10
ans =

   1 3 5 7 9
```

Dove avete già usato l'operatore :?

2.3 Accedere agli elementi

```
octave:16> A=ones(2,3)
A =

   1 1 1
   1 1 1

octave:17> A(1,2)=2
A =

   1 2 1
   1 1 1

octave:18> A(1,2)
ans = 2
octave:19> A(5,10)
error: invalid row index = 5
error: invalid column index = 10
octave:19> A(5,10)=7
A =

   1 2 1 0 0 0 0 0 0 0
   1 1 1 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 7
```

Se cerco di *leggere* un elemento che non esiste (perché la matrice è troppo piccola), ottengo un errore. Se cerco di *scrivere* un elemento che non esiste, la matrice viene automaticamente ingrandita.

2.4 Operazioni su vettori

```
octave:20> a=1:3
a =

  1 2 3

octave:21> b=4:6
b =

  4 5 6

octave:22> a+b
ans =

   5 7 9

octave:23> sin(a)
ans =

   0.84147 0.90930 0.14112

octave:24> 2*a+1
ans =

   3 5 7

octave:25> a.*b %operazioni elemento per elemento
ans =

    4 10 18

octave:26> c=a' %matrice trasposta
c =

   1
   2
   3

octave:27> C=a'*b %prodotto matrice-matrice
C =
```

```
   4  5  6
   8 10 12
  12 15 18

octave:28> length(a) %lunghezza di un vettore
ans = 3

octave:28> size(C) %dimensioni di una matrice - (righe, colonne)
ans =

  3 3
```

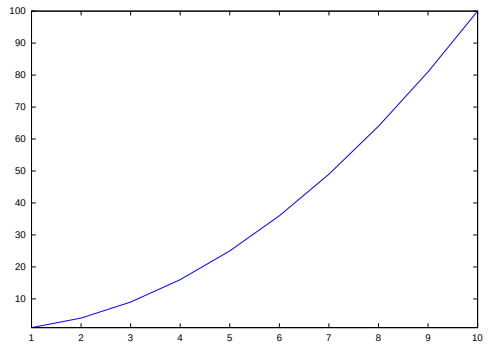
3 Grafici

Il comando `plot(x,y)` prende come argomenti due vettori della stessa lunghezza `x` e `y` e disegna sul piano cartesiano i punti `x(i),y(i)` collegandoli con una linea.

```
octave:28> r=1:10
r =

  1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

octave:30> plot(r,r.^2)
```



Il seguente comando disegna un cerchio.

```
octave:23> t=0:.1:2*pi;
octave:24> plot(cos(t),sin(t))
```

Esercizio 1. Scrivere una funzione `circle(z,r)` che, dato un complesso `z` e un reale `r`≥ 0, disegni il cerchio di centro `(real(z),imag(z))` e raggio `r`. Testare con `circle(1+2i,2)`. A quale ascissa/ordinata arriva il cerchio?

4 Cerchi di Gerschgorin

La seguente funzione disegna gli autovalori e i cerchi di Gerschgorin di una matrice quadrata `A`.

```
function gg(A)
  n=size(A)(1); %cosa fa questa istruzione?
  clearplot; %elimina i disegni preesistenti
  hold on; %fa si' che ogni disegno non cancelli il precedente
  axis('equal'); %forza la stessa scala su x e y
  autovalori=eig(A);
  plot(real(autovalori),imag(autovalori),'.*');
  % '.*': disegna solo i punti, non collegandoli con linee
  %"help plot" per altre stringhe magiche
  for k=1:n
    center=A(k,k);
    radius=0; %accumulatore
    for j=1:n
      if(j~=k)
        radius=radius+abs(A(k,j));
      endif
    endfor
    circle(center,radius);
  endfor
endfunction
```

Esercizio 2. Testare la funzione `gg` su alcune matrici test: `rand(10)`, `randn(10)`, `hilb(10)`,

```
octave:133> A=diag(1:10)+diag(ones(9,1),1)
A =

   1  1  0  0  0  0  0  0  0  0
   0  2  1  0  0  0  0  0  0  0
   0  0  3  1  0  0  0  0  0  0
   0  0  0  4  1  0  0  0  0  0
   0  0  0  0  5  1  0  0  0  0
   0  0  0  0  0  6  1  0  0  0
   0  0  0  0  0  0  7  1  0  0
   0  0  0  0  0  0  0  8  1  0
   0  0  0  0  0  0  0  0  9  1
   0  0  0  0  0  0  0  0  0 10
```

Esercizio 3. Riuscite a trovare una matrice irriducibile con un autovalore sul bordo dei cerchi (terzo teorema di Gerschgorin)?

Esercizio 4. Scrivere una funzione `ggsecond(A)` che disegni i cerchi di Gerschgorin di A e mostri come variano gli autovalori quando gli elementi fuori dalla diagonale di `A`

vengono ridotti pian piano fino a diventare zero, come nella dimostrazione del secondo teorema di Gerschgorin. Per farlo, generate tante matrici (diciamo $k = 100$) a intervalli uguali lungo il "segmento" che unisce A alla sua diagonale, e plottate i loro autovalori.

Esercizio 5 (facoltativo). Poiché Octave è un linguaggio *interpretato*, eseguire ogni singola istruzione ha un "costo" non trascurabile (il computer deve leggere la riga, interpretarla e trasformarla in codice macchina). Per questo se si riesce a riscrivere le funzioni utilizzando delle operazioni sui vettori invece che dei cicli `for`, il programma gira molto più velocemente. Per esempio, è molto più veloce

```
s=sum(abs(v));
```

(una istruzione da interpretare) rispetto a

```
s=0;
for k=1:length(v)
 s=s+abs(v(k));
endfor
```

($O(n)$ istruzioni da interpretare, dove n è la lunghezza del vettore `v`).

L'operazione di sostituire tante istruzioni su scalari con una singola istruzione su un vettore si chiama *vectorization*. Riuscite a riscrivere i programmi della scorsa lezione (`fattoriale`, `pow`, `myexp`, `myexp2`) vettorizzando i cicli `for`, in modo che non siano più necessarie $O(n)$ istruzioni per calcolare un esponenziale? Potrebbe esservi utile il manuale di Octave alla sezione Sums and Products.

5 Soluzione dell'esercizio 4

```
function ggsecond(A)
  n=size(A)(1);
  clearplot;
  hold on;
  axis('equal');
  for t=0:.01:1
    autoval=eig((1-t)*A+t*diag(diag(A))); %"help diag" per saperne di piu'
    plot(real(autoval),imag(autoval),'1.');
  endfor
  for k=1:n
    center=A(k,k);
    radius=0;
    for j=1:n
      if(j~=k)
        radius=radius+abs(A(k,j));
      endif
    endfor
    circle(center,radius);
  endfor
endfunction
```