Soluzioni

Compito di MDAL
10 Febbraio 2016

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. Trovare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2^x \equiv 1 \pmod 7 \\ 3^x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$$

$2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$.

Quindi $\mathrm{ord}_7(2) = 3$, e $2^x \equiv 1 \pmod 7 \iff x \equiv 0 \pmod 3$

$3^1 = 3 \quad 3^2 = 9 \equiv -1 \quad 3^3 \equiv -3 \equiv 2 \quad 3^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod 5$

Quindi $\mathrm{ord}_5(3) = 4$, e $3^x \equiv 1 \pmod 5 \iff x \equiv 3 \pmod 4$

Il sistema allora diventa

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Che ha soluzione unica mod 12 per il teorema cinese del resto. Una soluzione (trovata per tentativi) è $x = 3$.

Quindi la soluzione completa del sistema è $x \equiv 3 \pmod{12}$.

(Non è sbagliato escludere i casi per cui $x < 0$)

Esercizio 2. Consideriamo i seguenti insiemi di matrici 4×4 a coefficienti in $\mathbb{Z}/5\,\mathbb{Z}$:

1. Matrici con esattamente due "1" su ogni riga.
2. Matrici con tutti numeri diversi su ciascuna riga.
3. Matrici con tutti numeri diversi su ciascuna delle prime 3 righe e sulla prima colonna.

i) Determinare il numero delle matrici in ciascuno dei gruppi 1,2,3.

ii) Chiamato n_i il numero delle matrici nel gruppo i, disporre in ordine crescente i numeri n_1, n_2, n_3.

i) 1: In ogni riga, scelgo la posizione degli 1 in $\binom{4}{2}$ modi diversi e gli altri numeri in $4 \cdot 4$ modi

Le possibilità riguardanti righe diverse sono scelte indipendenti, quindi vanno moltiplicate (occhio: [illegible] comune)

$$|\text{insieme } 1| = \left[\binom{4}{2} \cdot 4\,4\right]^4 = 6^4 4^4 4^4$$

2: In ogni riga, ho 5 scelte per il primo numero, 4 per il secondo, 3 per il terzo, 2 per il quarto. Quindi

$$|\text{insieme } 2| = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^4$$

3: scelgo le matrici nel modo seguente: prima scelgo gli elementi della prima colonna in $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ modi.

Poi posso completare la prima riga scegliendo il secondo numero in 4 modi (diverso dal primo), il terzo in 3, il quarto in 2, e analogamente la 2ª e la 3ª.

Non ci sono vincoli sui rimanenti 3 numeri dell'ultima riga, che si possono scegliere in 5^3 modi.

Quindi $|\text{insieme } 3| = \underbrace{(5\cdot4\cdot3\cdot2)}_{1^{a}\text{ colonna}} \cdot \underbrace{(4\cdot3\cdot2)^3}_{\text{prime 3 righe}} \cdot \underbrace{5^3}_{\text{ultima riga}}$

$= 5^4 4^4 3^4 2^4.$

ii) Per come abbiamo riscritto le espressioni,

$$n_2 = n_3 = (5\cdot4\cdot3\cdot2)^4.$$

Restano da confrontare n_1 e n_2.

n_1 e n_2 sono ordinati come

$\sqrt[4]{n_1} = 6\cdot4\cdot4$ e $\sqrt[4]{n_2} = 5\cdot4\cdot3\cdot2$, visto che

$a > b \iff a^4 > b^4$ (per $a, b \geq 0$).

Per lo stesso motivo essi sono ordinati come

i numeri $\frac{\sqrt[4]{n_1}}{6\cdot4} = 4$ e $\frac{\sqrt[4]{n_2}}{6\cdot4} = 5$,

quindi $\boxed{n_1 < n_2 = n_3}$

Esercizio 3. Siano dati i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1. Considerati come vettori in $\mathbb{R}^4$, è vero che essi sono linearmente indipendenti? Si scriva una base di $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ e la si completi a una base di $\mathbb{R}^4$.
2. Considerati come vettori in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$, è vero che essi sono linearmente indipendenti? Si scriva una base di $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ e la si completi a una base di $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

1) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono tre pivot, quindi i tre vettori sono lin. indipendenti. v_1, v_2, v_3 è una base di span(v_1, v_2, v_3).

Aggiungiamo un insieme di generatori di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ci sono pivot nella 1ª, 2ª, 3ª, 5ª colonna, quindi una base di $\mathbb{R}^4$ è

$$v_1, v_2, v_3, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (vettori corrispondenti alle colonne con pivot).

2) In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, l'eliminazione di Gauss precedente è valida fino a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(perché coinvolge solo interi). Ora però $3 \equiv 0 \pmod 3$, quindi continuiamo con

$$\ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ci sono due pivot, quindi i vettori <u>non</u> sono lin. ind. e una base di $\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$ è (v_1, v_2) (colonne con pivot).

Completiamoli a una base di $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ pivot nelle colonne 1, 2, 4, 5:

allora $v_1, v_2, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono una base di $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

Esercizio 4. Sia $M \in \mathrm{Mat}_{4,4}(\mathbb{R})$ data da

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinare autovalori e autovettori di M. La matrice è diagonalizzabile?

$$\det(M-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ -4 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \cdot \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

sviluppo sulla 2ª colonna

$$= -\lambda \cdot \left[(-2-\lambda)(2-\lambda)+4\right] = -\lambda\left(\lambda^2 \cancel{-4} \cancel{+4}\right) = -\lambda^3.$$

C'è il solo autovalore 0 con $m_a(0)=3$.

$$\mathrm{Ker}(M-0\cdot I) = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left\{ x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

$m_g(0) = 2 < m_a(0)$, quindi la matrice <u>non</u> è diagonalizzabile.

Gli autovettori relativi a $\lambda=0$ sono $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

(occhio — tutto il loro span, non solo due vettori).