UNIVERSITÀ DI PISA

Una dimostrazione della semplicità del gruppo alterno

Mattia Puddu
mattiapuddu@icloud.com

20 gennaio 2019

Sommario

In questa nota presentiamo una possibile dimostrazione della semplicità, per $n > 4$, del gruppo alterno $\mathcal{A}_n$.

INDICE

1. Risultati preliminari

Dato un qualsiasi gruppo $\mathscr{G}$, denotiamo l'azione di coniugio di $\mathscr{G}$ su se stesso con

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & \mathscr{G}\times\mathscr{G} & \to & \mathscr{G} \\ & (g,h) & \mapsto & g^{-1}hg \end{array}.$$

Denoteremo con

$$\mathcal{C}_{\mathscr{G}}(h) = \{g \in \mathscr{G} : \gamma(g,h) = h\}$$

il centralizzatore di h in $\mathscr{G}$, e con

$$Orb(h) = \left\{\gamma(g,h) = g^{-1}hg : g \in \mathscr{G}\right\}$$

l'orbita di h mediante l'azione di coniugio. Chiameremo l'orbita di h mediante tale azione anche classe di coniugio di h. Ricordiamo che il centralizzatore di un elemento è un sottogruppo di $\mathscr{G}$, e che, se $\mathscr{G}$ è un gruppo finito,

$$\frac{|\mathscr{G}|}{|\mathcal{C}_{\mathscr{G}}(h)|} = |Orb(h)| \tag{1}$$

Denotiamo con S_n il gruppo simmetrico a n elementi. Ricordiamo che $|S_n| = n!$ e che S_n è generato dalle trasposizioni, che la parità del numero di trasposizioni necessarie per scrivere un qualsiasi elemento del gruppo è un invariante, e che la mappa

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & S_n & \to & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & \sigma & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases} \end{array}$$

è un omomorfismo di gruppi, il cui nucleo è noto come gruppo alterno $\mathcal{A}_n$, che è dunque un sottogruppo normale di S_n e ha $\frac{n!}{2}$ elementi. Dato un elemento $\sigma \in S_n$, la sua classe di coniugio in S_n o è uguale alla sua classe di coniugio in $\mathcal{A}_n$, oppure si spezza in due classi di coniugio, della stessa cardinalità. Ricordiamo inoltre che $\mathcal{A}_n$ è generato dai $3-$cicli.

Ricordiamo che un gruppo $\mathscr{G}$ si dice semplice se e solo gli unici suoi sottogruppi normali sono $\{e\}$ e $\mathscr{G}$, e che un sottogruppo è normale se e solo se contiene le classi di coniugio di ogni suo elemento.

2. La dimostrazione del teorema

Teorema 2.1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$ il gruppo alterno $\mathcal{A}_n$ è semplice.*

<u>**Dimostrazione**</u>

Procediamo per induzione su n.

<u>Passo base, $n = 5$</u> Poiché S_5 ha $5! = 120$ elementi, $\mathcal{A}_5$ ne ha 60. Un generico elemento di $\mathcal{A}_5$ può essere scritto in uno (e soltanto uno) dei modi seguenti: o è l'identità, oppure è una doppia coppia, un $3-$ciclo o un $5-$ciclo.

L'identità, le doppie coppie, i $3-$cicli e i $5-$cicli individuano delle classi di coniugio in S_5. Contiamo il numero di elementi di ciascuna di queste classi: chiaramente la classe di coniugio dell'identità contiene un solo elemento, mentre è facile vedere che ci sono 15 doppie coppie, 20 $3-$cicli e 24 $5-$cicli.

Ogni classe di coniugio in S_5 o rimane una classe di coniugio anche in $\mathcal{A}_5$ oppure si spezza in due classi di coniugio (della stessa cardinalità). Osserviamo che questo non può accadere per le doppie coppie, essendo queste ultime in numero dispari.

Sia σ un $3-$ciclo. Osserviamo che per (1) il centralizzatore di σ in S_5 contiene 6 elementi, e dato che contiene σ e la trasposizione τ che muove in S_5 i due elementi che non compaiono in σ, si vede subito che è generato da questi due elementi. Dato che $\tau \notin \mathcal{A}_5$, è altrettanto immediato osservare che il centralizzatore di σ in $\mathcal{A}_5$ contiene 3 elementi, dunque per (1) la sua classe di coniugio in $\mathcal{A}_5$ contiene ancora 20 elementi.

Sia invece ρ un $5-$ciclo. Sempre per (1) il centralizzatore di ρ in S_5 contiene 5 elementi, e dato che contiene ρ è generato da quest'ultimo. Ma allora il centralizzatore di ρ in S_5 è uguale a quello in $\mathcal{A}_5$, e per (1) i $5-$cicli si dividono in $\mathcal{A}_5$ in due classi di coniugio.

Un sottogruppo normale di un gruppo $\mathscr{G}$ fissato deve contenere le classi di coniugio dei suoi elementi. Per quanto visto finora, se $\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{A}_5$, allora la sua cardinalità è un numero della forma

$$m = 1 + 15a + 20b + 12c + 12d,$$

con $a, b, c, d \in \{0, 1\}$. Le uniche possibilità per m sono quindi $1, 13, 16, 21, 25, 28, 33, 36, 40, 45, 48, 60$. Ma per il teorema di Lagrange m deve dividere 60 : le uniche possibilità sono $m = 1$, oppure $m = 60$. Quindi $\mathcal{A}_5$ è semplice.

<u>Passo induttivo</u> Supponiamo adesso che n sia maggiore di 5, e che $\mathcal{A}_{n-1}$ sia semplice. Consideriamo l'azione naturale di $\mathcal{A}_n$ su $\mathbb{X} = \{1, \ldots, n\}$. Si osserva subito che, per ogni $x \in \mathbb{X}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(x) \cong \mathcal{A}_{n-1}$. Dunque, per ipotesi induttiva, questi sottogruppi sono semplici.

Sia $\mathcal{N}$ un sottogruppo normale di $\mathcal{A}_n$: studiamo, al variare di $x \in \mathbb{X}$, $\mathcal{N} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(x)$. Dato che $\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}$ è semplice, ci sono due sole possibilità:

◇ Se esiste $x \in \mathbb{X}$ tale che $\mathcal{N} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(x)$, allora $\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(x) \subset \mathcal{N}$. Dato che $\mathcal{N}$ è normale, $\mathcal{N}$ conterrà le classi di coniugio degli elementi di $\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}$.
Prendiamo $y \in \mathbb{X}$: e sia $\tau \in \mathcal{A}_n$ tale che $\tau(x) = y$. Ma allora $\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(y) = \tau \mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(x)\tau^{-1}$, e $\mathcal{N}$ contiene tutti i $3-$cicli. Dato ce i $3-$cicli generano il gruppo alterno, e $\mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(x) \subset \mathcal{N}$, $\mathcal{N} = \mathcal{A}_n$.

◇ Se un tale elemento non esiste, per ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha $\mathcal{N} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{A}_n}(x) = \{e\}$. Supponiamo che $\mathcal{N}$ non sia il sottogruppo banale e proviamo che ciò è impossibile.
Sia $\rho \in \mathcal{N} - \{e\}$. Allora ρ può essere scritto in due modi possibili:

1. Se ρ è prodotto di almeno quattro trasposizioni, scriviamo

$$\rho = (a_1\ a_2)(a_3\ a_4)\sigma$$

e prendiamo $\tau = (a_1\ a_2\ a_3)$. Dato che $\mathcal{N}$ è normale,

$$\tau^{-1}\rho\tau\rho^{-1} = (a_1\ a_4)(a_3\ a_2) \in \mathcal{N}.$$

Ma tale elemento muove solo quattro elementi, dunque appartiene ad almeno un centralizzatore di un qualche elemento.

2. Se ρ contiene un ciclo di lunghezza $m \geq 3$, con m dispari, scriviamo

$$\rho = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_m)\sigma$$

e prendiamo $\tau = (a_1\ a_2\ b)$, con $b \neq a_1, a_2, a_3$. Dato che $\mathcal{N}$ è normale,

$$\tau^{-1}\rho\tau\rho^{-1} = (a_1\ b\ a_2)(a_2\ a_3\ c) \in \mathcal{N},$$

per qualche $c \in \mathbb{X}$. Ma tale elemento muove al più cinque elementi, dunque appartiene al centralizzatore di un qualche elemento.

In ogni caso abbiamo un assurdo, quindi $\mathcal{N} = \{e\}$.

Quindi $\mathcal{A}_n$ non possiede sottogruppi normali non banali, ed è pertanto semplice.

□

Riferimenti bibliografici

[Gai17] G. Gaiffi, *Dispense del corso di Algebra 1*, http://people.dm.unipi.it/~gaiffi/Algebra1-2016/Pages/dispense1.pdf, A.A. 2016-2017.