Testi degli esercizi di
Elementi di Teoria degli Insiemi

23 maggio 2018

Lezione del 26/02

Esercizio 1. La coppia ordinata definita come $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$ è tale che $(a,b) = (c,d)$ se e solo se $a = c, b = d$

Lezione del 09/03

Esercizio 2. I seguenti sono equivalenti

1. Assioma di scelta: se $\langle A_i | i \in I\rangle$ è una sequenza di insiemi non vuoti, allora $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.
2. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia non vuota di insiemi non vuoti, allora esiste una funzione di scelta f con $Dom(f) = \mathcal{F}$. Funzione di scelta significa che $\forall A \in \mathcal{F} : f(A) \in A$.
3. Ogni funzione suriettiva f ha inversa destra, ovvero ammette una $g : Im(f) \to Dom(f)$ tale che $f \circ g$ è la funzione identica di $Im(f)$.
4. $\forall < A_{i,j} | (i,j) \in I \times J >$
$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{f:I\to J}\bigcap_{i\in I} A_{i,j}$$

Lezione del 12/03

Esercizio 3. Siano A, A', B, B' insiemi tali che $|A| = |A'|, |B| = |B'|$. Allora valgono

1. Se $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$ allora $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.
2. $|A \times B| = |A' \times B'|$.
3. $|B^A| = |B'^{A'}|$.
4. $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$

Esercizio 4. Dati A, B, C tre insiemi, mostrare che vale

1. $\left|\left(A^B\right)^C\right| = \left|A^{B\times C}\right|$

2. Supponendo $B \cap C = \emptyset$, $\left|A^B \times A^C\right| = \left|A^{B \cup C}\right|$

Esercizio 5. 1. Dimostrare (senza AC) che se $A \subset \mathbb{N}$ è infinito, allora $|A| = |\mathbb{N}|$.

2. Dimostrare che se esiste $f : \mathbb{N} \to A$ surgettiva, A è finito oppure $|A| = |\mathbb{N}|$.

3. Dimostrare che se A è infinito, allora $|A| \geq |\mathbb{N}|$.

Lezione del 15/03

Esercizio 6. Se A, B sono infiniti e $A \Delta B$ è finito, allora $|A| = |B|$.

Esercizio 7. Mostrare che per ogni relazione R vale $|\operatorname{Dom} R|, |\operatorname{Im} R| \leq |R|$.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale reale con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \aleph_0$. Quanto vale $|V|$?

Esercizio 9. Sia $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ monotona}\}$. Quanto vale $|A|$?

Esercizio 10. Dati tre insiemi A, B, C tali che $|A| = |B|$, dimostrare che $\left|[A]^{|C|}\right| = \left|[B]^{|C|}\right|$ dove $[A]^{|C|} := \{S \subset A \mid |S| = |C|\}$

Esercizio 11. Sia $A \subset \mathbb{R}$ numerabile, allora $\mathbb{R} \setminus A$ è denso in $\mathbb{R}$.

Lezione del 16/03

Esercizio 12. $\forall A \; \forall B \; \exists Fun(A, B)$.

Lezione del 19/03

Esercizio 13. La somma sui naturali è commutativa e associativa.

Esercizio 14. Il prodotto sui naturali è commutativo e associativo.

Esercizio 15. Sui naturali vale la proprietà distributiva $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Esercizio 16. Sia $<$ l'ordinamento sui naturali dato da $x < y \Leftrightarrow \exists z \in \omega \setminus \{0\} : x + z = y$. Esso è un ordine totale.

Esercizio 17. $x \in y \in \omega \Rightarrow x \in \omega$

Esercizio 18. $\forall x, y, z \in \omega : x \in y \in z \Rightarrow x \in z$

Esercizio 19. Mostrare che $(\omega, \in)$ è totalmente ordinato.

Esercizio 20. Dimostrare che se $x \in y$ allora $\hat{x} \in \hat{y}$.

Esercizio 21. Dati $m, n \in \omega$, mostrare che $n \in m \iff n \subsetneq m$.

Esercizio 22. Dimostrare che se $|k| = |n|$ allora $k = n$.

Lezione del 22/03

Esercizio 23. Dimostrare che se A è infinito allora A è equipotente ad una sua parte propria.(AC)

Esercizio 24. Dimostrare che se A e B sono finiti allora anche $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $P(A)$, $A \times B$ e $f(A)$ sono finiti.

Esercizio 25. Dimostrare che se $\mathcal{F}$ è una famiglia finita di insiemi finiti allora $\bigcup \mathcal{F}$ è finito.

Esercizio 26. Dimostrare che se A e B sono finiti allora $A \cup B$ è finito e se $\mid A' \mid = \mid A \mid$ e $\mid B' \mid = \mid B \mid$ allora $\mid A \cup B \mid = \mid A' \cup B' \mid$.

Esercizio 27. Verificare che $(\omega, , +, \cdot, 0)$ soddisfa tutti gli assiomi PA (aritmetica di Peano).

Esercizio 28. $\forall n \in \omega$, $n + 1 = \hat{n}$ e $\nexists m \in \omega$ tale che $n < m < n + 1$.

Lezione del 23/03

Esercizio 29. Dato un insieme A, mostrare che $\bigcup_{n \in \omega} \mathrm{Fun}(n, A)$ è un insieme.

Esercizio 30. Trovare un sottoinseieme $A \subset \mathbb{Q}$ isomorfo (come ordinamento) a ω^2.

Esercizio 31. Sia $(A, <_A)$ totalmente ordinato numerabile denso, senza massimo e minimo. Allora $A \cong \mathbb{Q}$.

Lezione del 26/03

Esercizio 32. Sia $(A, <)$ insieme totalmente ordinato finito. Allora $(A, <) \cong (n, \in)$ con $n \in \omega$, $|n| = |A|$; in particolare A è bene ordinato.

Esercizio 33. Mostrare che $(\omega, \in)$ è un buon ordine.

Esercizio 34. Mostrare che $(\omega, \in)$ è il più piccolo insieme bene ordinato infinito. Ovvero, che per ogni $(A, <)$ bene ordinato infinito, ho una mappa $f : \omega \to A$ che rispetta l'ordine. (senza AC)

Esercizio 35. Sia $(A, <)$ un insieme ordinato. Dimostrare che se ogni suo segmento iniziale S diverso da A è generato da un $a_S \in A$, allora $<$ è un buon ordine.

Esercizio 36. Siano $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ una famiglia numerabile di insiemi totalmente ordinati. Allora $\bigcup_n A_n$ è totalmente ordinato.

Esercizio 37. Dimostrare che se $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ è una catena di buoni ordini tale che ($i < j \implies A_i$ è segmento iniziale di A_j) allora $\bigcup_i A_i$ è ben ordinato.

Lezione del 29/03

Esercizio 38. Definite $\oplus, \otimes$ tra buoni ordini,

1. trovare controesempi alla commutatività di $\oplus$ e $\otimes$;
2. mostrare che $\oplus$ e $\otimes$ sono associative;
3. dire quale delle due proprietà distributive vale (quella a destra o quella a sinistra).

Esercizio 39. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ bene ordinati (tramite l'ordine indotto). Mostrare che $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ è bene ordinato.

Lezione del 06/04

Esercizio 40. Sia $(A, <)$ bene ordinato e sia $\psi : A \to A$ che conserva l'ordine, allora $\psi(a) \geq a$ per ogni $a \in A$.

Esercizio 41. Sia $(A, <)$ bene ordinato e sia $a \in A$, allora $A \ncong A_a$.

Esercizio 42. Sia $(A, <)$ bene ordinato e siano $a, a' \in A$ con $A_a \cong A_{a'}$, allora $a = a'$.

Esercizio 43. Siano $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ bene ordinati e sia $a \in A$. Sia $\psi : A \to B$ un isomorfismo. Mostrare che $\psi|_{A_a}$ è un isomorfismo tra A_a e $B_{\psi(a)}$.

Lezione del 09/04

Esercizio 44. Ogni insieme bene ordinato $(A, <)$ finito è isomorfo ad un unico $(n, \in)$ con $n \in \omega$.

Esercizio 45. $(\omega, \in)$ è il più piccolo buon ordine infinito, cioè:

1. il suo tipo d'ordine è maggiore del tipo d'ordine di ogni buon ordine finito;
2. se $(A, <)$ è un buon ordine infinito, allora $ot(\omega, \in) \leq ot(A, <)$.

Esercizio 46. Sia α un ordinale. Sia $x \in \alpha$, allora x è un ordinale.

Esercizio 47. Se α e β sono ordinali, allora $\alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$.

Esercizio 48. Se β è un ordinale, allora $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$ è il minimo degli ordinali maggiori di β.

Esercizio 49. L'ordinale α ha massimo se e solo se esiste un ordinale β con $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$.

Esercizio 50. Se X è un insieme di ordinali, allora $\bigcup X$ è un ordinale. Inoltre $\bigcup X = \sup X$

Esercizio 51. Se $X \neq \emptyset$ è un insieme di ordinali, allora $\bigcap X$ è un ordinale. Inoltre $\bigcap X \in X$ e $\bigcap X = \min X$.

Esercizio 52. La collezione degli ordinali con $\in$ è bene ordinato, cioè:

1. $\forall \alpha$ ordinale : $\alpha \notin \alpha$;

2. $\forall \alpha, \beta$ ordinali : $\alpha \in \beta \Rightarrow \beta \notin \alpha$;

3. $\forall \alpha, \beta, \gamma$ ordinali : $\alpha \in \beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma$;

4. $\forall \alpha, \beta$ ordinali : $\alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha \vee \alpha = \beta$;

5. se $X \neq \emptyset$ è un insieme di ordinali, allora ha minimo.

Esercizio 53. Se X è un insieme transitivo di ordinali, allora X stesso è un ordinale.

Lezione del 12/04

Esercizio 54. La classe dei singoletti $\mathbf{SING} = \{x : |x| = 1\}$ non è un insieme.

Esercizio 55. La classe dei buoni ordini non è un insieme.

Lezione del 13/04

Esercizio 56. Gli ordinali diversi da $\emptyset$ sono di due tipi:

1. gli ordinali α aventi massimo e della forma $\alpha = \beta + 1$ con β ordinale;

2. gli ordinali λ che non hanno massimo e sono tali che $\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma$.

Esercizio 57. Dimostrare per induzione transfinita che $0 + \alpha = \alpha$ per ogni α ordinale.

Esercizio 58. Dimostrare per induzione transfinita che $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$ per ogni α, β, γ ordinali.

Lezione del 16/04

Esercizio 59. Usando il lemma di Zorn, dimostrare il teorema di Zermelo.

Esercizio 60. Usando il lemma di Zorn, dimostrare l'assioma della scelta.

Lezione del 19/04

Esercizio 61. Usando il lemma di Zorn, dimostrare che, se A è un insieme infinito, allora $|A \times \{1, 2\}| = |A|$.

Esercizio 62. Siano α e β ordinali e sia λ un ordinale limite. Allora

$$\alpha \cdot \beta^{\lambda} = \bigcup_{\eta<\lambda} (\alpha \cdot \beta^{\eta})$$

Lezione del 20/04

Esercizio 63. Dimostrare che l'insieme di Cantor $\mathcal{C}$ ha cardinalità del continuo.

Esercizio 64. Sia $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ una funzione classe iniettiva con $\mathbf{A}$ classe propria. Mostrare che anche $\mathbf{B}$ è una classe propria.

Esercizio 65. Sia G un gruppo. Sia $X \subseteq G$ un sottoinsieme non vuoto. Sia $\langle X \rangle$ il gruppo generato da X, ovvero il più piccolo gruppo contenuto in G contenente X. Allora

$$\langle X \rangle = \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n$$

, dove $X_0 = X$ e

$$X_{n+1} = X_n \cup \{y^{-1} | y \in X_n\} \cup \{y_1 \cdot ... \cdot y_k | k \in \mathbb{N} \wedge y_1, ..., y_k \in X_n\}$$

.

Esercizio 66. Sia G un gruppo. Sia $X \subseteq G$ un sottoinsieme non vuoto. Sia $\langle X \rangle$ il gruppo generato da X. Supponiamo $|X| = \aleph_0$. Mostrare che allora $|\langle X \rangle| = \aleph_0$.

Esercizio 67. Sia G un gruppo. Sia $X \subseteq G$ un sottoinsieme non vuoto. Sia $\langle X \rangle$ il gruppo generato da X. Supponiamo $|X| = \mathfrak{c}$. Mostrare che allora $|\langle X \rangle| = \mathfrak{c}$.

Lezione del 23/04

Esercizio 68. Mostrare che per ogni ordinale α vale $\alpha \leq \aleph_\alpha$.

Lezione del 26/04

Esercizio 69. L'operazione di somma tra cardinali è ben definita, ovvero, per ogni coppia di cardinali κ e μ esistono A e B disgiunti con $|A| = \kappa$ e $|B| = \mu$; inoltre, presa comunque un'altra coppia di insiemi C e D con la stessa proprietà, vale $|A \cup B| = |C \cup D|$.

Esercizio 70. L'operazione di prodotto tra cardinali è ben definita, ovvero, per ogni coppia di cardinali κ e μ, e per ogni coppia di insiemi A e B con $|A| = \kappa$ e $|B| = \mu$, vale $|A \times B| = |\kappa \times \mu|$.

Esercizio 71. L'operazione di esponenziazione tra cardinali è ben definita, ovvero, per ogni coppia di cardinali κ e μ, e per ogni coppia di insiemi A e B con $|A| = \kappa$ e $|B| = \mu$, vale $|Fun(B, A)| = |Fun(\mu, \kappa)|$.

Esercizio 72. Dati μ e κ cardinali infiniti con $\mu \leq \kappa$, mostrare $|[\kappa]^\mu| = \kappa^\mu$.

Esercizio 73. Siano α, γ, γ' ordinali, con $\gamma < \gamma'$. Mostrare le seguenti proprietà:

1. $\alpha + \gamma < \alpha + \gamma'$;
2. $\gamma + \alpha \leq \gamma' + \alpha$ e può valere l'uguale;
3. $(\alpha \geq 1) \Rightarrow (\alpha \cdot \gamma < \alpha \cdot \gamma')$;
4. $\gamma \cdot \alpha \leq \gamma' \cdot \alpha$ e può valere l'uguale.

Lezione del 27/04

Esercizio 74. Siano α e β due ordinali infiniti. Mostrare che allora $|\alpha^\beta| = max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Esercizio 75. La forma normale di Cantor è unica.

Esercizio 76. L'operazione di somma infinita tra cardinali è ben definita, ovvero, data una sequenza $\langle \kappa_i | i \in I \rangle$ di cardinali e due sequenze $\langle A_i | i \in I \rangle$ e $\langle B_i | i \in I \rangle$ di insiemi con $|A_i| = |B_i| = k_i$ $\forall i \in I$ e $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall i, j \in I, i \neq j$, vale:

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| = \left| \bigcup_{i \in I} B_i \right|$$

.

Esercizio 77. Siano κ un cardinale e I un insieme. Mostrare che allora valgono i seguenti fatti (intendendo le operazioni di somma e prodotto infiniti tra cardinali):

1. $\sum_{i \in I} \kappa = \kappa \cdot |I|$;
2. $\prod_{i \in I} \kappa = \kappa^{|I|}$.

Lezione del 03/05

Esercizio 78. Mostrare che esiste una successione $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ non decrescente di cardinali infiniti, dove I è un ordinale infinito e

$$\prod_{i \in I} \kappa_i \neq \left(\bigcup_{i \in I} \kappa_i \right)^{|I|}$$

.

Esercizio 79. Mostrare che esiste una successione $\langle \kappa_i : i \in \nu \rangle$ di cardinali infiniti, dove ν è un cardinale infinito e

$$\prod_{i \in \nu} \kappa_i \neq \left(\bigcup_{i \in \nu} \kappa_i \right)^{\nu}$$

.

Esercizio 80. Mostrare che se $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ e $\langle \mu_i : i \in I \rangle$ sono successioni di cardinali infiniti con $\kappa_i < \mu_i$ $\forall i \in I$, allora

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \mu_i$$

.

Esercizio 81. Mostrare che se $\langle \kappa_i : i \in I \rangle$ è una successione di cardinali infiniti, allora

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \kappa_i$$

.

Lezione del 04/05

Esercizio 82. Sia κ un cardinale. Mostrare che κ è un limite forte se e solo se $\exists\lambda$ cardinale limite tale che $\kappa = \beth_\lambda$.

Esercizio 83. Mostrare che esistono cardinali κ con la proprietà $\beth_\kappa = \kappa$.

Esercizio 84. Mostrare che se κ è un cardinale fortemente inaccessibile, allora $\beth_\kappa = \kappa$.

Lezione del 07/05

Esercizio 85. Sia $(X, <)$ totalmente ordinato. Allora $Cof(X, <)$ è un cardinale regolare, ovvero $Cof(Cof(X, <)) = Cof(X, <)$.

Lezione del 09/05

Esercizio 86. Sia $\approx$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ t.c. $r \approx r' \iff r - r' \in \mathbb{Q}$. Mostrare $|\mathbb{R}/\approx| = \mathfrak{c}$.

Esercizio 87. Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ una probabilità σ-additiva tale che è singoletti abbiano misura nulla. Sia Y equipotente a X. Mostrare che allora esiste una probabilità $\mu' : \mathcal{P}(Y) \to [0, 1]$ con le stesse proprietà.

Lezione del 10/05

Esercizio 88. Sia κ un cardinale limite, sia ν un cardinale e sia $\langle \alpha_i : i < \nu \rangle$ una successione di ordinali illimitata in κ. Mostrare che allora anche la successione $\langle |\alpha_i| : i < \nu \rangle$ è illimitata in κ.

Esercizio 89. Siano κ, ν cardinali con $\nu < Cof(\kappa)$. Mostrare che vale

$$\kappa^\nu = \bigcup_{\mu < \kappa} \mu^\nu$$

.

Lezione del 11/05

Esercizio 90. Sia V_α un insieme della gerarchia di Von Neumann con α ordinale. Mostrare $\alpha \subseteq V_\alpha$ e $\alpha \notin V_\alpha$.

Esercizio 91. Sia $V_{\omega+\alpha}$ un insieme della gerarchia di Von Neumann con α ordinale. Mostrare $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$.

Esercizio 92. Sia α un ordinale. Allora i seguenti sono equivalenti:

1. se $\beta < \alpha$ è un ordinale, allora $\beta \cdot \alpha = \alpha$;
2. se $\beta, \gamma < \alpha$ sono ordinali, allora $\beta \cdot \gamma < \alpha$;
3. esiste δ ordinale tale che $\alpha = \omega^{(\omega^\delta)}$.

Lezione del 14/05

Esercizio 93. Sia α ordinale. Mostrare $\rho(\alpha) = \alpha$.

Esercizio 94. Per ogni x insieme, mostrare $\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 | y \in x\}$.

Esercizio 95. Per ogni x, A insiemi, mostrare $x \in TC(A) \iff$ esiste una sequenza finita $x = x_0 \in x_1 \in ... \in x_n = A$.

Esercizio 96. Dimostrare $(X, \in) \models$ estensionalità $\iff X$ è transitivo.

Esercizio 97. Sia V_α un insieme della gerarchia di Von Neumann e si supponga $b \subseteq a \in V_\alpha$. Allora $b \in V_\alpha$.

Lezione del 16/05

Esercizio 98. Siano A, B insiemi con $|A| = |B|$ e sia $\mu \leq |A|, |B|$ un cardinale. Mostrare $|[A]^\mu| = |[B]^\mu|$.

Esercizio 99. Trovare una $f : \aleph_{\omega_1} \to \aleph_{\omega_1}$ crescente e continua con esattamente $\aleph_1$ punti fissi.

Lezione del 17/05

Esercizio 100. Sia $n \geq 1$ intero e sia $f : \omega_1 \cdot n \to \omega_1 \cdot n$ crescente e continua. Mostrare che f ha $\aleph_1$ punti fissi più piccoli di ω_1.