Analisi complessa

Definizione 1 (Logaritmo principale)**.**

$$\begin{aligned} Log_{\theta_0} : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \log(|z|) + i\arg(z) \end{aligned}$$

Definizione 2 (Funzioni trigonometriche e iperboliche)**.**

$$\cos(z) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cosh(z) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \qquad \sinh(z) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

Definizione 3 (Olomorfia)**.** Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, sia $f : D \to \mathbb{C}$ una funzione, sia $z_0 \in D$. f si dice olomorfa in z_0 con derivata $f'(z_0) = d \in \mathbb{C}$ se vale uno dei seguenti fatti equivalenti:

1. $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = d$$
2. $\exists \varphi : D \to \mathbb{C}$ continua in z_0, con $\varphi(z_0) = d$ e t.c. $f(z) = f(z_0) + \varphi(z) \cdot (z - z_0)$
3. $\exists \tilde{\varphi} : D \to \mathbb{C}$ continua in z_0, con $\tilde{\varphi}(z_0) = 0$ e t.c. $f(z) = f(z_0) + d \cdot (z - z_0) + \tilde{\varphi}(z) \cdot (z - z_0)$
4. $\exists r : D \to \mathbb{C}$ t.c. $f(z) = f(z_0) + d \cdot (z - z_0) + r(z)$ e $\lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|} = 0$

Teorema 1 (Cauchy-Riemann)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, siano $u : D \to \mathbb{R}$, $v : D \to \mathbb{R}$ funzioni, sia $f = u+iv$, sia $z_0 \in D$. Allora le seguenti sono equivalenti:*

1. f è olomorfa in z_0

2. f è differenziabile in senso reale in z_0 e vale:

(a)
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

(b)
$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

3. f è differenziabile in senso reale in z_0 e la matrice Jacobiana in z_0 è della forma:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

In tal caso $f'(z_0) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.

Definizione 4 (Funzione intera)**.** Una funzione definita su tutto $\mathbb{C}$ a valori complessi e olomorfa ovunque si dice intera.

Teorema 2. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso, sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se $Re(f)$ (o $Im(f)$) è costante su D, allora f è costante su D.*

Teorema 3 (Funzione inversa)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, sia $z_0 \in D$ e supponiamo $f'(z_0) \neq 0$. Allora esistono $U \subseteq D$, $V \subseteq f(D)$ aperti di $\mathbb{C}$ con $V = f(U)$ e $f|_U$ è invertibile con inversa olomorfa g. Inoltre, per ogni $z \in U$ vale $g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.*

Definizione 5 (Funzione armonica)**.** Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : D \to \mathbb{R}$ di classe C^2. f si dice armonica se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Teorema 4. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $u : D \to \mathbb{R}$, sia $v : D \to \mathbb{R}$, sia $f = u + iv$. Allora se f è olomorfa su D, u e v sono armoniche.*

Definizione 6 (Funzioni coniugate armoniche)**.** Nelle ipotesi e notazioni del teorema precedente, u e v si dicono coniugate armoniche.

Teorema 5. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso, sia $u : D \to \mathbb{R}$ armonica e di classe C^2. Allora esiste $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa con $Re(f) = u$. Inoltre f è univocamente determinata a meno di somma per costanti immaginarie.*

Teorema 6. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $u : D \to \mathbb{R}$, sia $v : D \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $f = u + iv$ sia olomorfa su D. Allora le curve di livello di u e v sono ortogonali fra loro nei punti z in cui $f'(z) \neq 0$.*

Teorema 7. *Le funzioni olomorfe sono conformi (preservano gli angoli) e distorcono in modo localmente uniforme in tutte le direzioni.*

Definizione 7 (Forma differenziale complessa)**.** Una forma differenziale complessa continua è una applicazione continua

$$\omega : D \to End_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$$

dove $D \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto.

Definizione 8.

$$dx(z) \overset{\text{def}}{=\!=} Re(z) \qquad dy(z) \overset{\text{def}}{=\!=} Im(z) \qquad dz \overset{\text{def}}{=\!=} dx + idy \qquad d\overline{z} \overset{\text{def}}{=\!=} dx - idy$$

Supponendo $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f : D \to \mathbb{C}$ di classe C^1 dal punto di vista reale:

$$df \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Osservazione 1. f olomorfa $\iff \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \iff df$ è proporzionale a dz
In tal caso $df = f'dz$.

Definizione 9. Sia ω una forma differenziale complessa su un aperto $D \subseteq \mathbb{C}$. Allora ω si dice esatta se $\omega = df$ per una $f : D \to \mathbb{C}$ differenziabile in senso reale. ω si dice chiusa se ogni punto di D ammette un intorno in cui è esatta.

Definizione 10 (Integrazione complessa)**.** Siano $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Sia $f = u + iv$. Allora f si dice integrabile e si scrive:

$$\int_a^b f(t)dt \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Teorema 8. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua. Allora $|f|$ è integrabile e vale:*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Definizione 11 (Integrale di 1-forme lungo curve)**.** Sia $\omega = Pdx + Qdy$ forma differenziale su un aperto $D \subseteq \mathbb{C}$ e sia $\gamma : [a, b] \to D$ curva di classe C^1. $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ con x e y funzioni reali. Allora:

$$\int_\gamma \omega \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^b \big(P(\gamma(t)x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)\big)\, dt$$

(la definizione è analoga se γ è solo C^1 a tratti).

Teorema 9 (Cauchy e corollari)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $f : D \to \mathbb{C}$ continua su D e olomorfa su D meno, al più, sui punti di una retta o su un numero finito di punti, allora $f(z)dz$ è chiusa.*

Definizione 12 (Primitiva)**.** Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Si dice primitiva di f una funzione $F : D \to \mathbb{C}$ differenziabile con $dF = f(z)dz$.

Osservazione 2. Qualunque primitiva di una funzione olomorfa è olomorfa.

Definizione 13. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva chiusa C^1 a tratti e sia $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Si dice indice di γ rispetto a z_0 il numero (intero):

$$I(\gamma, z_0) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Teorema 10. *Nelle ipotesi e notazioni della definizione precedente, la funzione $z \mapsto I(\gamma, z)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Se z è in una componente esterna a γ, allora $I(\gamma, z) = 0$.*

Teorema 11 (Cauchy-Hadamard)**.** *Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, il suo raggio di convergenza è dato dalla formula*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Inoltre se esiste, eventualmente infinito, il limite di $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, allora

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

Teorema 12. *Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ con raggio di convergenza R, detta $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ la funzione corrispondente, vale: f è olomorfa, tutte le sue derivate sono olomorfe e coincidono con le serie derivate (che hanno raggio di convergenza R). In particolare la serie data è uguale alla serie di Taylor di f centrata in z_0.*

Teorema 13. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, sia $z_0 \in D$. Allora f ammette uno sviluppo in serie di potenze centrato in z_0 che converge uniformemente a f in ogni palla chiusa centrata in z_0 e contenuta in D.*

Definizione 14 (Funzione analitica)**.** Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $f : D \to \mathbb{C}$, sia $z_0 \in D$. f si dice analitica in z_0 se ammette uno sviluppo in serie di potenze convergente a f in un intorno di z_0.

Teorema 14. *Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : D \to \mathbb{C}$. Allora:*

$$f \text{ olomorfa in } D \iff f \text{ analitica in } D \iff f dz \text{ chiusa in } D$$

Teorema 15 (Stima delle derivate)**.** *Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, $z_0 \in D$, $r > 0$, $\overline{B_r(z_0)} \subset D$, allora:*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{z\in\partial B_r(z_0)} |f(z)|$$

Teorema 16 (Formula integrale di Cauchy)**.** *Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, $\gamma : [a,b] \to D$ curva chiusa C^1 a tratti e contraibile, $z_0 \in D \setminus \gamma([a,b])$. Allora:*

$$f^{(n)}(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Teorema 17 (Liouville)**.** *Ogni funzione intera e limitata è costante.*

Teorema 18. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Siano $f : D \to \mathbb{C}$ e $g : D \to \mathbb{C}$ olomorfe. Se $\{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}$ possiede un punto di accumulazione, allora $f \equiv g$.*

Teorema 19. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto semplicemente connesso, sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa e mai nulla. Allora esistono $h : D \to \mathbb{C}$ e $H : D \to \mathbb{C}$ olomorfe e tali che $f(z) = e^{h(z)}$ e $f(z) = H(z)^n$.*

Teorema 20 (Mappa aperta)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa non costante. Allora f è aperta.*

Teorema 21 (Principio del massimo modulo)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se esiste in D un punto di massimo locale per $|f(z)|$, allora f è costante. In particolare, dato $K \subseteq D$ compatto, il massimo di $|f(z)|$ è assunto su ∂K e, se f è non costante, mai in K°.*

Teorema 22. *Sia $f : B_1(0) \to \overline{B_1(0)}$ olomorfa. Supponiamo $f(0) = 0$. Allora $|f(z)| \leq |z|$ e $|f'(0)| \leq 1$. Inoltre, se esiste $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$ t.c. $|f(z_0)| = |z_0|$ o se $|f'(0)| = 1$, allora esiste $\alpha \in S^1$ t.c. $f(z) = \alpha z$.*

Teorema 23. *Siano $0 \leq r < R \leq +\infty$, sia $z_0 \in \mathbb{C}$, sia $C_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (r,R)\}$, sia $f : C_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora f ammette un unico sviluppo di Laurent centrato in z_0 e convergente alla funzione. Inoltre, se $\rho \in (r,R)$ e se $\gamma_{z_0,\rho} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ è la curva $\gamma_{z_0,\rho}(t) = z_0 + \rho e^{it}$, allora l'n-esimo termine dello sviluppo di Laurent è:*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,\rho}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Definizione 15. (Singolarità isolata) Sia $z_0 \in \mathbb{C}$. Si dice che z_0 è una singolarità isolata per la funzione f se quest'ultima è olomorfa in un intorno di z_0 (tolto eventualmente il punto).

Definizione 16. (Parte principale) Si dice parte principale di una serie di Laurent la serie comprendente i soli termini con esponente negativo.

Definizione 17. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia f una funzione olomorfa in un intorno di z_0 (tolto eventualmente il punto). z_0 si dice singolarità eliminabile se f si estende a una funzione olomorfa definita in $dom(f) \cup \{z_0\}$. z_0 si dice singolarità polare (polo) se esiste m intero per cui $(z-z_0)^m f(z)$ ha una singolarità eliminabile in z_0. z_0 si dice singolarità essenziale altrimenti.

Definizione 18. Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia $S \subseteq D$ un insieme di punti isolati in $\mathbb{C}$. $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ si dice meromorfa su D se è olomorfa su $D \setminus S$ e ogni punto di S non è una singolarità essenziale.

Teorema 24. *(Picard) Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $z_0 \in D$ singolarità essenziale, sia $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora f assume ogni valore di $\mathbb{C}$ tranne al più uno. Inoltre se un valore sta nell'immagine, viene assunto infinite volte.*

Definizione 19. (Residuo) Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, $z_0 \in D$, $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Si dice residuo di f in z_0 il coefficiente del termine $(z-z_0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent di f e si indica con $Res_{z_0}(f)$.

Teorema 25 (dei residui)**.** *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sia $\gamma : [a,b] \to D$ curva chiusa C^1 a tratti e contraibile in D, siano $z_1, ..., z_n \in D \setminus \gamma([a,b])$, sia $f : D \setminus \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora:*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i}(f) \cdot I(\gamma, z_i)$$

Teorema 26 (Residuo di poli di ordine 1)**.** *Nelle ipotesi della definizione 19 e supponendo $f = \frac{p}{q}$ con p e q olomorfe in D, $p(z_0) \neq 0$ e z_0 zero di ordine 1 per q, vale:*

$$Res_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Teorema 27 (Residuo di poli di ordine qualunque). *Nelle ipotesi della definizione 19 e supponendo* $f = (z - z_0)^{-m} g(z)$ *con* g *olomorfa in* D *e* $g(z_0) \neq 0$*, vale:*

$$Res_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0)$$

Teorema 28 (Calcolo di integrali trigonometrici). *Sia* $R = \frac{p}{q}$ *un rapporto di polinomi a coefficienti complessi in due variabili. Supponiamo che* q *non abbia zeri che soddisfano* $x^2 + y^2 = 1$ *e sia*

$$F(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

definita su $\mathbb{C}$ *meno un numero finito di punti. Allora:*

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos(t), \sin(t)\big)\, dt = \int_{S^1} F(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in B_1(0)} Res_z(F)$$

Teorema 29. *Sia* f *una funzione meromorfa in un intorno del semipiano complesso dove la parte immaginaria è* ≥ 0*, senza poli su* $\mathbb{R}$ *e con* $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$*. Si supponga che* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix}$ *converga, allora:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} = 2\pi i \sum_{Im(z) > 0} Res_z(f(z) e^{iz})$$

Teorema 30 (Residuio della derivata logaritmica). *Sia* $U \subseteq \mathbb{C}$ *aperto e sia* f *meromorfa su* U *e non nulla. Sia* $z_0 \in \mathbb{C}$ *un polo per* f *di ordine* m*. Allora:*

$$Res_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right) = m$$

Definizione 20 (Indicatore logaritmico). Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia f meromorfa su U. Sia $\gamma : [a, b] \to U$ una curva chiusa, C^1 a tratti e contraibile. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$. Si dice indicatore logaritmico di $f(z) - \alpha$ il numero

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} dz = I(f^\circ \gamma, \alpha)$$

Teorema 31. *Siano* $U \subseteq \mathbb{C}$ *aperto,* $f : U \to \mathbb{C}$ *olomorfa,* $z_0 \in U$ *con* $f(z_0) = \alpha \in \mathbb{C}$*, sia* m *l'ordine di* z_0 *come radice di* $f(z) - \alpha$*. Allora esistono* $r > 0$ *e* $r' > 0$ *tali che l'equazione* $f(z) = \beta$ *ammette esattamente* m *radici (e tutte semplici) tra gli* $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$*, per ogni* $\beta \in B_{r'}(\alpha) \setminus \{\alpha\}$*.*

Teorema 32 (Rouché). *Sia* $U \subseteq \mathbb{C}$ *aperto,* $f : U \to \mathbb{C}$ *e* $f : U \to \mathbb{C}$ *olomorfe,* $\gamma : [a, b] \to U$ *curva chiusa,* C^1 *a tratti e contraibile in* U*. Si supponga che* $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$ *per ogni* z *nell'immagine di* γ*. Allora:*

$$\sum_{z \in U} ord_z(f) \cdot I(\gamma, z) = \sum_{z \in U} ord_z(g) \cdot I(\gamma, z)$$

Definizione 21. Sia $\hat{\mathbb{C}}$ la sfera di Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Una funzione $f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ si dice meromorfa se $f|_{\mathbb{C}}(z)$ e $f|_{\mathbb{C}}(1/z)$ lo sono (intendendo $1/\infty = 0$).

Definizione 22 (Residuo all'infinito). Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un intorno di ∞ (un aperto tale che esiste $R > 0$ tale che $\mathbb{C} \setminus \overline{B_R(0)} \subseteq U$) e sia f una funzione meromorfa su U. Allora si definisce:

$$Res_\infty(f) \overset{\text{def}}{=\!=} Res_0\left(-\frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

Teorema 33. *Sia* $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ *aperto, sia* $K \subseteq U$ *compatto. Si supponga che* ∂K *si possa parametrizzare come unione finita di curve* C^1 *a tratti, semplici, a 2 a 2 disgiunte. Sia* Γ *una tale parametrizzazione, percorsa "in modo da tenere la parte interna di* K *a sinistra". Sia* f *una funzione meromorfa su* U *senza poli su* ∂K*. Allora* f *ha un numero finito di poli* $z_1, ..., z_n$ *e vale:*

$$\int_\Gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res_{z_i}(f)$$