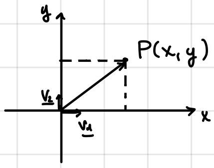
A.A. 2022-2023
SIMONE SACCANI

Geometria I

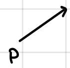
VETTORI GEOMETRICI

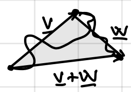
vettore: lunghezza, direzione, verso

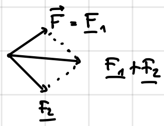
$\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ versori

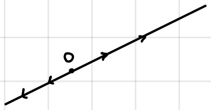


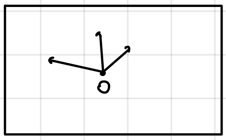
$\vec{OP} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2$

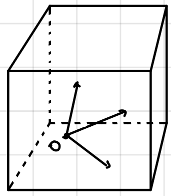






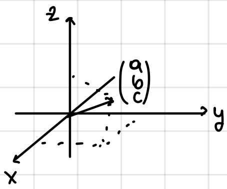






retta $= \mathbb{R}$ piano $= \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ spazio $= \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

In generale: $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$



somma

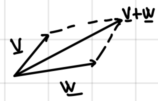
$+ : V \times V \longrightarrow V$

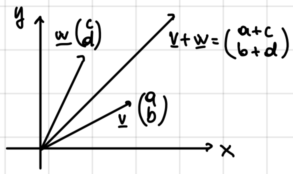
$(\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} + \underline{w}$

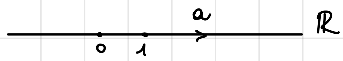
- associativa: $(\underline{u}+\underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v}+\underline{w}) \quad \forall\, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$
- commutativa: $\underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u} \quad \forall\, \underline{u}, \underline{v}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

regola del parallelogrammo







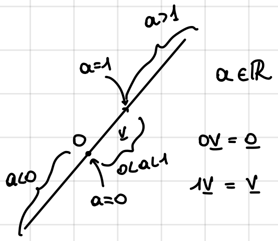
prodotto esterno

$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(x, \underline{v}) \longrightarrow x\underline{v}$

- distributiva: $x(\underline{v}+\underline{w}) = x\underline{v} + x\underline{w}$

  $(x+y)\underline{v} = x\underline{v} + y\underline{v}$



$a \in \mathbb{R}$

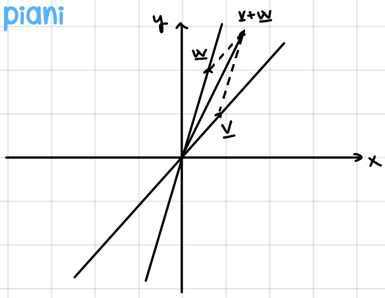
$0\underline{v} = \underline{0}$

$1\underline{v} = \underline{v}$

Retta generata da $\underline{v}$

$\mathcal{L}(\underline{v}) = \mathrm{Span}(\underline{v}) = \{ a\underline{v} \mid a \in \mathbb{R} \}$ retta se $\underline{v} \neq \underline{0}$; $\{0\}$ se $\underline{v} = 0$

Rette e piani



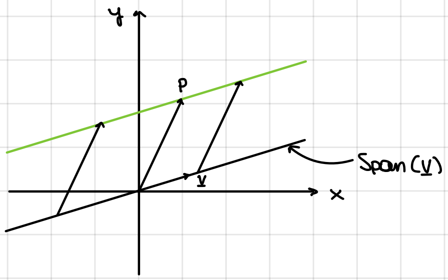
Retta generata da $\underline{v}$:

$R = \mathrm{Span}(\underline{v}) = \{ a\underline{v} \mid a \in \mathbb{R} \}$ retta se $\underline{v} \neq \underline{0}$

$\{0\}$ se $\underline{v} = 0$

Piano generato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$:

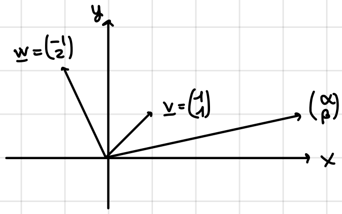
$H = \mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w}) = \{ a\underline{v} + b\underline{w} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ (se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ non sono allineati)



Rette traslate: $\mathrm{Span}(\underline{v}) + \underline{P} = \{ a\underline{v} + \underline{P} \mid a \in \mathbb{R} \}$

Piani traslati: $\mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w}) + \underline{P} = \{ a\underline{v} + b\underline{w} + \underline{P} \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

esercizio $\text{Span}(\underline{v},\underline{w}) = \{a\underline{v}+b\underline{w} \mid a,b\in\mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$



a) $a\underline{v}+b\underline{w} = a\binom{1}{1}+b\binom{-1}{2} = \binom{a}{a}+\binom{-b}{2b} = \binom{a-b}{a+2b} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{\text{Span}(\underline{v},\underline{w}) \subseteq \mathbb{R}^2}$

b) $\binom{\alpha}{\beta}\in\mathbb{R}^2 \quad \exists\, a,b : \binom{\alpha}{\beta} = a\underline{v}+b\underline{w} = \binom{a-b}{a+2b} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = a-b\\ \beta = a+2b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha+b \\ \beta = \alpha+3b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\beta-\alpha}{3} \\ a = \frac{2\alpha+\beta}{3}\end{cases} \Rightarrow \underline{\mathbb{R}^2 \subseteq \text{Span}(\underline{v},\underline{w})} \qquad \Rightarrow \text{Span}(\underline{v},\underline{w}) = \mathbb{R}^2$

Equazione cartesiana della retta

in $\mathbb{R}^2$: $\quad R = \text{Span}\left(\binom{a}{b}\right) + \binom{c}{d} \qquad a,b,c,d\in\mathbb{R},\ \binom{a}{b}\neq\binom{0}{0}$

$\exists\lambda\in\mathbb{R}: \binom{x}{y} = \lambda\binom{a}{b}+\binom{c}{d} = \binom{\lambda a+c}{\lambda b+d} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda a+c\\ y=\lambda b+d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bx = ab\lambda+bc \\ ay = ab\lambda+ad\end{cases} \Rightarrow bx-ay = bc-ad$

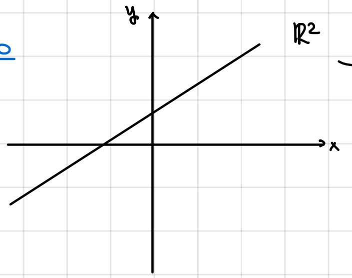
in $\mathbb{R}^3$: $\quad R = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix} \qquad a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\exists\lambda\in\mathbb{R}: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\lambda+d\\ y=b\lambda+e\\ z=c\lambda+f\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bx-ay=bd-ae\\ cx-az=cd-af\end{cases}$

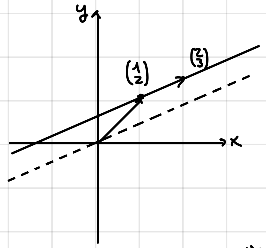
Retta per due punti

$\boxed{R = \text{Span}(\underline{P}-\underline{Q})+\underline{P}}$

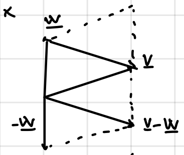
esercizio



$\rightarrow \left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R} \mid ax+by=c\right\}$



$\binom{2}{3}-\binom{1}{2}=\binom{1}{1}$



$\text{Span}\left(\binom{1}{1}\right)+\binom{1}{2} \ni \binom{x}{y}$

$\exists\lambda\in\mathbb{R}: \binom{x}{y} = \lambda\binom{1}{1}+\binom{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\lambda+1\\ y=\lambda+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = x-1\\ y=x+1\end{cases}$

$\rightarrow$ eq. cartesiana: $y-x=1$

$R = \text{Span}\left(\binom{1}{1}\right)+\binom{1}{2} = \text{Span}\left(\binom{2}{2}\right)+\binom{2}{3}$

esercizio retta $R := \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix}x-2y+z=1\\ x+y-z=2\end{matrix}\right\}$

$2x-y=3 \rightarrow y=2x-3 \rightarrow x+2x-3-z=2 \rightarrow z=3x-5 \qquad \begin{pmatrix}x\\2x-3\\3x-5\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-3\\-5\end{pmatrix}$

$R = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}0\\-3\\-5\end{pmatrix}$

Equazione cartesiana del piano

esercizio $\underline{v},\underline{w}\in\mathbb{R}^3$ non allineati, $P\in\mathbb{R}^3$ il piano $\text{Span}(\underline{v},\underline{w})+\underline{P} \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$\exists\, a,b\in\mathbb{R}: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\underline{v}+b\underline{w}+\underline{P} \Leftrightarrow ax+by+cz=d$

$\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\ \underline{w}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\ P=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a-b\\ y=a\\ z=2a-b+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=y\\ b=y-x\\ z=2y-y+x+1\end{cases} \Leftrightarrow x+y-z=-1$

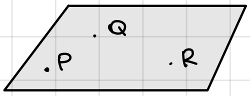
esercizio $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R} \mid x+y-z=-1\right\}$ piano in $\mathbb{R}^3$

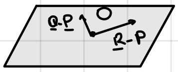
$x=-1-y+z \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1-y+z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

$H = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

Piano per tre punti

$$\boxed{H = \mathrm{Span}(\underline{Q}-\underline{P}, \underline{R}-\underline{P}) + \underline{P}}$$





esercizio in $\mathbb{R}^3$ $\quad P = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

$$Q-P = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad R-P = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} \qquad \text{Piano} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

esercizio in $\mathbb{R}^4$ $\quad \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x-2y+z+t=1 \\ x+y-z-t=2 \end{matrix} \right\}$

$$2x - y = 3 \rightarrow y = 2x-3$$
$$3x-3-z-t=2 \rightarrow z = 3x-t-5$$

$$H = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\2x-3\\3x-t-5\\t\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-3\\-5\\0\end{pmatrix} \qquad H = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}0\\-3\\-5\\0\end{pmatrix}$$

piano in $\mathbb{R}^4$

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid eq.1\right\} \cap \left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid eq.2\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid eq.1 \text{ e } eq.2\right\}}$$

esercizio $\quad H = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z=3\right\} \qquad R = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$H \cap R \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+1\\-\lambda+1\\1\end{pmatrix} \qquad \lambda+1+(-\lambda+1)-2\cdot 1 = 3 \Rightarrow 0=3 \;\lightning \Rightarrow H\cap R = \emptyset \quad R \parallel H$$

$$R' = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$H \cap R' \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+1\\-\lambda+1\\\lambda+1\end{pmatrix}$$

$$\lambda+1+(-\lambda+1)-2(\lambda+1) = 3 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \qquad H \cap R' = \left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}$$

esercizio $\quad H_1 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R} \mid x+y+3z=2\right\} \qquad H_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$

$$H_1 \cap H_2 \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda-\mu+3\\2\mu\\\lambda+3\end{pmatrix}$$

$$\lambda-\mu+3+2\mu+3(\lambda+3) = 2 \Leftrightarrow 4\lambda+\mu = -10 \Rightarrow \mu = -4\lambda-10$$

$$H_1 \cap H_2 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\lambda+13\\-8\lambda-20\\\lambda+3\end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}5\\-8\\1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}13\\-20\\3\end{pmatrix}$$

$$H_3 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$H_1 \cap H_3 \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda+\mu+1\\\lambda+2\mu+1\\-\lambda-\mu\end{pmatrix}$$

$$2\lambda+\mu+1+\lambda+2\mu+1+3(-\lambda-\mu) = 2 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow H_3 \subset H_1 \Rightarrow H_3 = H_1, \quad H_1 \cap H_3 = H_1 = H_3$$

$$H_2 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} \qquad H_4 = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

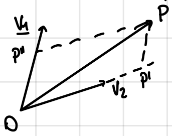
$$H_2 \cap H_4 \ni \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \begin{cases} \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} \\ \exists \lambda',\mu' \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda'\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mu'\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda-\mu+3 = 2\mu'+1 \\ 2\mu = -\mu' \\ \lambda+3 = \lambda' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda-\mu+3 = -4\mu+1 \\ \mu' = -2\mu \\ \lambda' = \lambda+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda+3\mu = -2 \\ \mu' = -2\mu \\ \lambda' = \lambda+3 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2-3\mu$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda-\mu+3\\2\mu\\\lambda+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\mu+1\\2\mu\\-3\mu+1\end{pmatrix} \Rightarrow H_2 \cap H_4 = R = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-4\\2\\-3\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

coordinate generalizzate

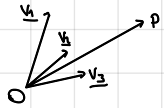
In $\mathbb{R}^2$: O, $\underline{v_1}$, $\underline{v_2}$ (non allineati)



$\vec{OP} = \vec{OP'} + \vec{OP''} = x\underline{v_1} + y\underline{v_2}$

le coordinate di P (o del vettore $\vec{OP}$) sono x, y

In $\mathbb{R}^3$: O, $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ (non complanari)



$\vec{OP} = x\underline{v_1} + y\underline{v_2} + z\underline{v_3}$

Le coordinate si comportano bene rispetto alla somma e al prodotto esterno

$\underline{v} = x\underline{v_1} + y\underline{v_2} + z\underline{v_3}$ $\quad \underline{w} = x'\underline{v_1} + y'\underline{v_2} + z'\underline{v_3}$

$\underline{v}+\underline{w} = (x+x')\underline{v_1} + (y+y')\underline{v_2} + (z+z')\underline{v_3}$

$\alpha\underline{v} = \alpha(x\underline{v_1} + y\underline{v_2} + z\underline{v_3}) = \alpha x\underline{v_1} + \alpha y\underline{v_2} + \alpha z\underline{v_3}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

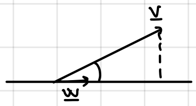
prodotto scalare

$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$

$\boxed{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \cos \widehat{\underline{v},\underline{w}}}$ $\quad \|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$

$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0 \iff \underline{v}$ e $\underline{w}$ sono ortogonali

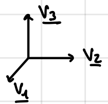


proiezione di $\underline{v}$ sulla retta di $\underline{w}$: $\boxed{pr_{\underline{w}}(\underline{v}) = \|\underline{v}\| \cos \widehat{\underline{v},\underline{w}}}$

$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \|\underline{w}\| \cdot$ (proiezione di $\underline{v}$ sulla retta di $\underline{w}$)

- simmetria: $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$
- bilinearità: $\langle \alpha\underline{u}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \alpha\underline{w} \rangle = \alpha\langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$ $\quad \langle \underline{u}+\underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ $\quad \langle \underline{u}, \underline{v}+\underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$

Se prendo $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ versori ortonormali



$\langle \underline{v_i}, \underline{v_j} \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

$\underline{v} = x\underline{v_1} + y\underline{v_2} + z\underline{v_3}$ $\quad \underline{w} = x'\underline{v_1} + y'\underline{v_2} + z'\underline{v_3}$

$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle x\underline{v_1} + y\underline{v_2} + z\underline{v_3}, x'\underline{v_1} + y'\underline{v_2} + z'\underline{v_3} \rangle = \langle x\underline{v_1}, x'\underline{v_1} \rangle + \langle x\underline{v_1}, y'\underline{v_2} \rangle + \ldots =$

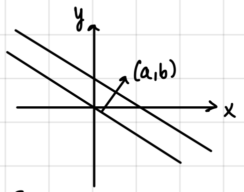
$= xx'\langle \underline{v_1}, \underline{v_1} \rangle + xy'\langle \underline{v_1}, \underline{v_2} \rangle + \ldots = xx' + yy' + zz'$

$\boxed{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = xx' + yy' + zz'}$ $\quad \boxed{\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Equazione della retta nel piano

$ax + by = c$

$ax + by = 0$



$\langle (a,b), (x,y) \rangle = 0$

$\langle (x,y), (a,b) \rangle = c$

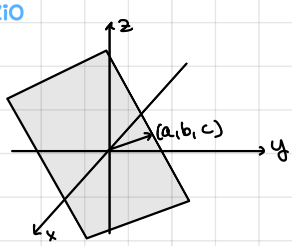
$\|(a,b)\| \underbrace{(\|(x,y)\| \cos\theta)}_{\text{proiezione}}$

proiezione di (x,y): $\quad pr_{(a,b)}(x,y) = \dfrac{c}{\|(a,b)\|}$

Equazione del piano nello spazio

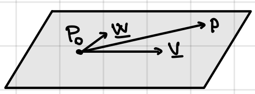
$ax + by + cz = d$

$ax + by + cz = 0$



$\langle (a,b,c), (x,y,z) \rangle = 0$

$\langle (a,b,c), (x,y,z) \rangle = d \longrightarrow$ proiezione di (x,y,z) sulla retta di $(a,b,c) = \dfrac{d}{\|(a,b,c)\|}$



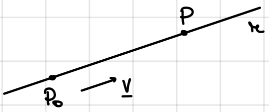
$P \in$ piano $\iff \vec{P_0P} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ $\quad \underline{v} \equiv (a,b,c)$ $\quad \underline{w} \equiv (a',b',c')$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}}$$

equazione parametrica

Equazione di una retta nello spazio



$P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = t\underline{v} \qquad t \in \mathbb{R}$

in coordinate $\quad P \equiv (x, y, z) \qquad \underline{v} \equiv (a, b, c)$

$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) \qquad \overrightarrow{P_0P} \equiv (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}}$$ equazione parametrica

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}}$$ equazione cartesiana

<u>esercizio</u> Due piani $\pi : ax + by + cz = d$ e $\pi' : a'x + b'y + c'z = d'$

1. incidenti $\quad \pi \cap \pi'$ è una retta
2. paralleli $\quad \pi \cap \pi' = \emptyset$
3. coincidenti

π e π' sono paralleli $\Leftrightarrow$ i loro vettori normali $\underline{n} = (a, b, c)$ e $\underline{n}' = (a', b', c')$ sono multipli

π e π' sono coincidenti $\Leftrightarrow$ i vettori (a, b, c, d) e (a', b', c', d') sono multipli

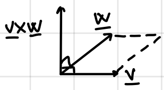
Prodotto vettore

$$\times : V \times V \longrightarrow V$$
$$(\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} \times \underline{w}$$

$\boxed{\|\underline{v} \times \underline{w}\| = \|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \sin \widehat{\underline{v}, \underline{w}}}$ $\qquad \underline{v} \times \underline{w} = 0 \Leftrightarrow \underline{v}$ e $\underline{w}$ sono multipli

<u>direzione</u> $(\underline{v} \times \underline{w} \neq 0)$ data dalle normali al piano individuato dai due vettori

<u>verso</u>: regola della mano destra



<u>Nota</u>: $\|\underline{v} \times \underline{w}\|$ = area del parallelogramma individuato dai due vettori

- $(\underline{u} + \underline{v}) \times \underline{w} = \underline{u} \times \underline{w} + \underline{v} \times \underline{w} \qquad \underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \times \underline{v} + \underline{u} \times \underline{w}$
- $(\alpha \underline{v}) \times \underline{w} = \alpha (\underline{v} \times \underline{w}) = \underline{v} \times (\alpha \underline{w})$
- antisimmetria: $\underline{v} \times \underline{w} = - \underline{w} \times \underline{v}$ $\quad$ [deriva anche dal fatto che $\underline{v} \times \underline{v} = 0 \;\; \forall \underline{v}$
  $(\underline{v} + \underline{w}) \times (\underline{v} + \underline{w}) = \overset{=0}{\underline{v} \times \underline{v}} + \underline{v} \times \underline{w} + \underline{w} \times \underline{v} + \overset{=0}{\underline{w} \times \underline{w}} = 0 \longrightarrow \underline{v} \times \underline{w} + \underline{w} \times \underline{v} = 0$]
- in generale: $\underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w}) \neq (\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w}$ $\quad \left[\underset{\underset{0}{\|}}{(\underline{i} \times \underline{i})} \times \underline{j} \neq \underline{i} \times \underset{\underset{k}{\|}}{(\underline{i} \times \underline{j})} \right]$

Prendiamo $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ortonormali e disposti secondo la regola della mano destra, cioè

$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \underline{v}_3 \quad \underline{v}_2 \times \underline{v}_3 = \underline{v}_1 \quad \underline{v}_3 \times \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \quad \underline{v}_2 \times \underline{v}_1 = -\underline{v}_3 \quad \underline{v}_3 \times \underline{v}_2 = -\underline{v}_1 \quad \underline{v}_1 \times \underline{v}_3 = -\underline{v}_2 \quad \underline{v}_i \times \underline{v}_i = 0$

$\underline{v} = x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3 \qquad \underline{w} = x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2 + z'\underline{v}_3$

$$\underline{v} \times \underline{w} = (x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{v}_3) \times (x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2 + z'\underline{v}_3) = xx' \overset{=0}{\underline{v}_1 \times \underline{v}_1} + xy' \overset{\underline{v}_3}{\underline{v}_1 \times \underline{v}_2} + xz' \overset{-\underline{v}_2}{\underline{v}_1 \times \underline{v}_3} + yx' \overset{-\underline{v}_3}{\underline{v}_2 \times \underline{v}_1} + yy' \overset{=0}{\underline{v}_2 \times \underline{v}_2} + yz' \overset{\underline{v}_1}{\underline{v}_2 \times \underline{v}_3} +$$
$$+ zx' \overset{\underline{v}_2}{\underline{v}_3 \times \underline{v}_1} + zy' \overset{-\underline{v}_1}{\underline{v}_3 \times \underline{v}_2} + zz' \overset{=0}{\underline{v}_3 \times \underline{v}_3} =$$
$$= (yz' - zy')\underline{v}_1 - (xz' - zx')\underline{v}_2 + (xy' - yx')\underline{v}_3$$

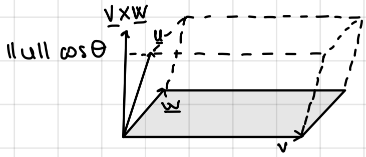
$$\boxed{\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \underline{v}_1 - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \underline{v}_2 + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}}$$

$\boxed{\text{IDENTITA' DI JACOBI: } \underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w}) + \underline{v} \times (\underline{w} \times \underline{u}) + \underline{w} \times (\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{0}}$

Prodotto misto

$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$

$$\boxed{\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v} \times \underline{w}\| \cos(\widehat{\underline{u}, \underline{v}\times\underline{w}})}$$



$\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ volume del parallelepipedo

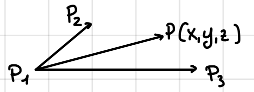
Nota: $\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle = 0 \iff \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono complanari

$\underline{u} = x\underline{v_1} + y\underline{v_2} + z\underline{v_3}$ $\quad \underline{v} = x'\underline{v_1} + y'\underline{v_2} + z'\underline{v_3}$ $\quad \underline{w} = x''\underline{v_1} + y''\underline{v_2} + z''\underline{v_3}$

$$\boxed{\langle \underline{u}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}}$$

esercizio $\quad ax + by + cz = d$ piano

$P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ $\quad P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ $\quad P_3 \equiv (x_3, y_3, z_3)$ $\quad$ non allineati ($\overrightarrow{P_1P_2}$ non multiplo di $\overrightarrow{P_1P_3}$)



$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

$P \in$ piano $\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.c. $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2} + \mu \overrightarrow{P_1P_3}$ $\quad \overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}(x - x_1) - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}(y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}(z - z_1) = 0$$

Posizione relativa di piano e retta nello spazio

r retta, π piano

1. incidenti $\quad r \cap \pi$ è un punto
2. paralleli $\quad r \cap \pi = \emptyset$
3. r inclusa in π $\quad r \subset \pi$

π cartesiana $\quad ax + by + cz = d$ $\quad \underline{n} \equiv (a, b, c)$

r parametrica $\quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\underline{v} = \begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma \end{cases}$

1. $\iff \langle \underline{n}, \underline{v} \rangle \neq 0$
2. $\iff \langle \underline{n}, \underline{v} \rangle = 0$, $\quad P_0 \notin \pi \cdot \langle \underline{n}, \overrightarrow{OP_0} \rangle \neq d$
3. $\iff \langle \underline{n}, \underline{v} \rangle = 0$, $\quad P_0 \in \pi : \langle \underline{n}, \overrightarrow{OP_0} \rangle = d$

Posizione relativa di due rette nello spazio

r, s rette

1. sghembe (non complanari)
2. incidenti $\quad r \cap s$ è un punto
3. parallele (non coincidenti)
4. coincidenti

r e s siano date in forma parametrica

$r: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\underline{v}$ $\qquad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ_0} + t'\underline{w}$

3. $\iff \underline{v}$ e $\underline{w}$ multipli, $\overrightarrow{P_0Q_0}$ non multiplo di $\underline{v}$ e $\underline{w}$
4. $\iff \underline{v}$ e $\underline{w}$ multipli, $\overrightarrow{P_0Q_0}$ multiplo di $\underline{v}$ e $\underline{w}$
2. $\iff \underline{v}$ e $\underline{w}$ non multipli, $\underline{v}, \underline{w}$ e $\overrightarrow{P_0Q_0}$ complanari $\quad \langle \underline{v}, \underline{w} \times \overrightarrow{P_0Q_0} \rangle = 0$
1. $\iff \underline{v}, \underline{w}, \overrightarrow{P_0Q_0}$ non complanari $\quad \langle \underline{v}, \underline{w} \times \overrightarrow{P_0Q_0} \rangle \neq 0$

SPAZI VETTORIALI

campi

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a,b) \mapsto a+b$

$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$

- associatività: $(a+b)+c = a+(b+c)$ $\quad a(bc) = (ab)c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$
- commutatività: $a+b = b+a \quad ab = ba \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$
- distributività: $a(b+c) = ab + ac \quad \forall a,b,c \in \mathbb{N}$
- elemento neutro della somma: $\exists\, 0$ t.c. $a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$
- elemento neutro della moltiplicazione: $\exists\, 1$ t.c. $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{N}$
- in $\mathbb{N}$, non esiste l'opposto additivo
- in $\mathbb{N}$, non esiste l'inverso moltiplicativo

$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
$+, \cdot$

in $\mathbb{Z}$ si aggiunge:
- opposto additivo: $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z}$ t.c. $a+b=0$, $b=-a$

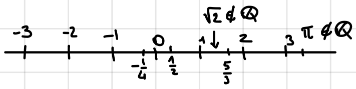
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un ANELLO COMMUTATIVO

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
$+, \cdot$ $\quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \leftrightarrow pq' = p'q$

in $\mathbb{Q}$ si aggiunge:
- inverso moltiplicativo: $\forall a \in \mathbb{Q}\ \exists b \in \mathbb{Q}$ t.c. $ab = 1$, $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$ $\left[a = \frac{p}{q}, b = \frac{q}{p}\right]$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un CAMPO

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un CAMPO



$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un CAMPO ALGEBRICAMENTE CHIUSO (i polinomi hanno sempre radici)

def. L'insieme $\mathbb{K}$ non vuoto dotato di operazione somma e prodotto

$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(a,b) \mapsto a+b$ $\qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$

è un **campo** se valgono le seguenti proprietà (<u>assiomi di campo</u>):

$(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo abeliano:
- c1 associatività: $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{K}$
- c2 commutatività: $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{K}$
- c3 elemento neutro: $\exists\, 0 \in \mathbb{K} : a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$
- c4 opposto: $\forall a \in \mathbb{K}\ \exists b \in \mathbb{K} : a+b = 0$, $b = -a$

$(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano:
- c5 associatività: $(ab)c = a(bc) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{K}$
- c6 commutatività: $ab = ba \quad \forall a,b \in \mathbb{K}$
- c7 elemento neutro: $\exists\, 1 \in \mathbb{K} : 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$
- c8 inverso: $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \exists b \in \mathbb{K} : ab = 1$, $b = \frac{1}{a} = a^{-1}$

c9 distributività: $a(b+c) = ab + ac \quad \forall a,b,c \in \mathbb{K}$

<u>esempio</u> $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

esempio $\mathbb{F}_2 = \{p, d\} = \{0, 1\}$
pari, dispari

somma $+ : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$

$p+p=p \qquad d+p=d$

$p+d=d \qquad d+d=p$

p elemento neutro: $p=0$

$0+0=p+p=0=p$

prodotto $\cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$

$p \cdot p = p \qquad d \cdot p = p$

$p \cdot d = p \qquad d \cdot d = d$

d elemento neutro : $d=1$

$1 \cdot 1 = 1 = d = d \cdot d$

esempio in $\mathbb{Z}$, svolgendo la divisione euclidea, si ha: $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ $\exists!\, q \in \mathbb{Z}, m>0, r \in \mathbb{Z}, 0 \le r \le m-1$ t.c. $n = mq + r$

il resto si indica : $r = R_m(n)$

Si creano così delle possibili classi di resto: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, m-1\}$

Si definiscono: $\oplus : a \oplus b = R_m(a+b) \qquad \odot : a \odot b = R_m(a \cdot b)$

$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ è un ANELLO COMMUTATIVO

$m=4 \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\} \qquad 3 \oplus 2 = 1 \qquad 2 \oplus 2 = 0$

$2 \odot 3 = 2 \qquad 2 \odot 2 = 0$

esiste l'inverso? $\exists b : 2 \odot b = 1 \qquad 2 \odot 2 \odot b = 0 \odot b$

$\to 2 \odot 1 = 0$ ↯

proposizione In generale: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, m non primo, non è un campo
$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, m primo, è un campo

DIMOSTRAZIONE

$a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, a \neq 0$

$MCD(a,m) \begin{cases} =1 \Rightarrow a \text{ invertibile} \\ >1 \Rightarrow a \text{ non invertibile} \end{cases}$

a) $MCD(a,m) = 1$

Bézout : $1 = \alpha a + \beta m$ per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

$\alpha a = 1 - \beta m \qquad R_m(\alpha) = r \qquad \alpha = qm + r, \; q \in \mathbb{Z}$

$ar = 1 - \beta m - aqm = 1 + m(-\beta - aq) \qquad r \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$a \odot r = R_m(a \cdot r) = 1$

$\Rightarrow r = a^{-1}$

b) $1 < MCD(a,m) < m \quad \to MCD(a,m) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$b = \dfrac{m}{MCD(a,m)} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$a \odot b = R_m(a \cdot b) = R_m\left(a \cdot \dfrac{m}{MCD(a,m)}\right) = R_m\left(m \cdot \dfrac{a}{MCD(a,m)}\right) = 0$

$\Rightarrow$ a e b sono divisori di 0 in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ a e b non sono invertibili in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$\{a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid a \text{ è invertibile}\} = \{a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \mid a \text{ è coprimo con } m\}$

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ campo $\Leftrightarrow$ m primo $\square$

esempio $m=3 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$

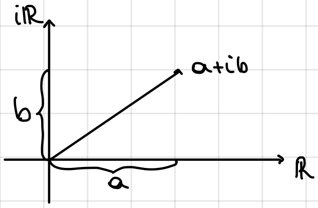
Numeri complessi

$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ $\quad i^2 = -1$ unità immaginaria

$Re(z) = a \quad Im(z) = b$

$\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$

$a+ib \leftrightarrow \binom{a}{b}$



$a + i\cdot 0 = a$ numeri reali $\mathbb{R}$

$0 + ib = ib$ numeri immaginari puri $i\mathbb{R}$

$a+ib,\ c+id \in \mathbb{C}$

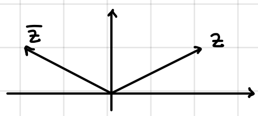
somma. $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$ $\qquad 0 = 0 + i\cdot 0$

prodotto. $(a+ib)\cdot(c+id) = ac - bd + i(ad+bc)$ $\qquad 1 = 1 + i\cdot 0$

CONIUGIO: $\bar{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \longmapsto \bar{z}$

$z = a+ib \qquad \bar{z} = a + i(-b) = a - ib$

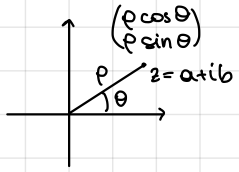


$\forall\, z, w \in \mathbb{C}$:
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\cdot\bar{w}$
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$

$z = a+ib \in \mathbb{C}$

$Re(z) = a = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \frac{z-\bar{z}}{2} = ib \ \to Im(z) = b = \frac{i(\bar{z}-z)}{2}$

FORMA TRIGONOMETRICA



modulo $\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$ $\qquad |z| = 0 \leftrightarrow z = 0 \qquad |\bar{z}| = |z|$

argomento $\theta = Arg(z) \in \mathbb{R}$

$Arg(z) \in [0, 2\pi)$

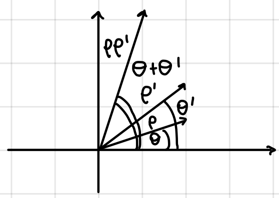
$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$

prodotto. $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),\ z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$z\cdot z' = \rho\rho'((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')) = \rho\rho'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'))$

$\Rightarrow \quad |z\cdot z'| = \rho\cdot\rho' = |z|\cdot|z'|$

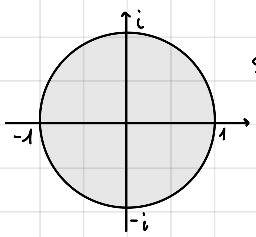
$Arg(z\cdot z') = Arg(z) + Arg(z')$



inverso: $\quad z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$

$z \neq 0 \quad |z| \neq 0 \ \longrightarrow\ z\cdot\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \ \to\ z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

FORMA ESPONENZIALE



$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

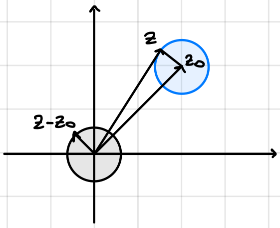
$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \in S^1$

$e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)} \qquad S^1$ è un gruppo

$(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$

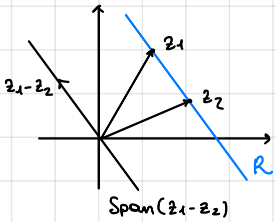
$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

Circonferenza di centro z_0 e raggio r



$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r \}$$

Retta per due punti



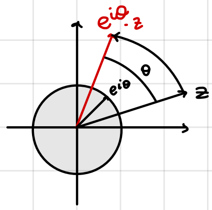
$$R = \mathrm{Span}(z_1 - z_2) + z_2 = \{ \lambda (z_1 - z_2) + z_2 \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Segmento: $\{ \lambda (z_1 - z_2) + z_2 \mid 0 \leq \lambda \leq 1 \}$

ROTAZIONE

$$R(\theta): \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto e^{i\theta} \cdot z$$
$$|e^{i\theta} \cdot z| = |z|$$

rotazione di angolo θ



RADICI N-ESIME

$z_0 \in \mathbb{C}$ $\quad x^n = z_0$ o $x^n - z_0 = 0$ $\quad$ (radici n-esime di z_0)

Se $z_0 = 0$ $\quad x^n = 0$

Se $z_0 \neq 0$ scrivo $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ $\quad x = \rho e^{i\theta}$

$x^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0}$

$$\begin{cases} \rho^n = \rho_0 \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{\rho_0} \\ n\theta = \theta_0 + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

$k = 0 \rightarrow \theta = \frac{\theta_0}{n}$

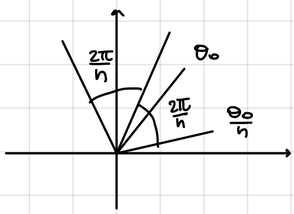
$k = 1 \rightarrow \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n}$

$k = 2 \rightarrow \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{4\pi}{n}$

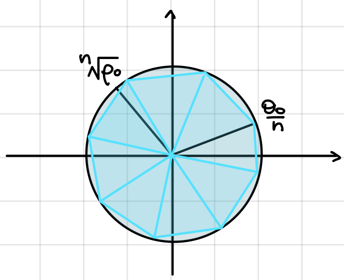
$\vdots$

$k = n-1 \rightarrow \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}$

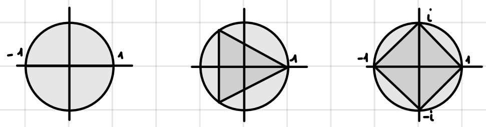
$k = n \rightarrow \theta = \frac{\theta_0}{n} + 2\pi$



Soluzioni: $x = \sqrt[n]{\rho_0}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$



vertici di un n-agono inscritto nella circonferenza di centro O e raggio $r = \sqrt[n]{\rho_0}$



$x^2 = 1$ $\quad$ $x^3 = 1$ $\quad$ $x^4 = 1$

n-agono con centro O e vertice z_0

$\{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = z_0^n \}$ $\quad$ (soluzioni di $x^n = z_0^n$)

n-agono con centro c e vertice z_0

$\{ z \in \mathbb{C} \mid (z - c)^n = (z_0 - c)^n \}$

spazi vettoriali

def. Si dice spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ un insieme V dotato di somma e prodotto esterno

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$
$$(\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} + \underline{w} \qquad (\alpha, \underline{v}) \longrightarrow \alpha \underline{v}$$

che soddisfano le seguenti proprietà (assiomi di spazio vettoriale):

$(V, +)$ è un gruppo abeliano:

- SV1 associatività: $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) \quad \forall\, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$
- SV2 commutatività: $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u} \quad \forall\, \underline{u}, \underline{v} \in V$
- SV3 elemento neutro: $\exists\, \underline{0} \in V : \underline{u} + \underline{0} = \underline{u} \quad \forall\, \underline{u} \in V$
- SV4 opposto: $\forall\, \underline{u} \in V \;\; \exists\, \underline{v} \in V : \underline{u} + \underline{v} = \underline{0}, \; \underline{v} = -\underline{u}$
- SV5 distributività: $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \underline{u} + \alpha \underline{v} \quad (\alpha + \beta)\underline{u} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{u} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\; \forall\, \underline{u}, \underline{v} \in V$
- SV6 associatività: $(\alpha \beta)\underline{v} = \alpha(\beta \underline{v}) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\; \forall\, \underline{v} \in V$
- SV7 elemento neutro: $\exists\, 1 \in \mathbb{K} : 1\underline{v} = \underline{v} \quad \forall\, \underline{v} \in V$

esempio $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

esempio $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

esercizio dimostrare che l'elemento neutro $\underline{0}$ è unico

Per assurdo: $\underline{0}, \underline{0}'$ $\quad \underline{0} = \underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}'$ assurdo ↯

esempio V vettori geometrici: spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

esempio $\mathbb{K}^n$: spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

1) $\big((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\big) + (z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n) + \big((y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n)\big)$
$\big((x_1 + y_1) + z_1, \dots, (x_n + y_n) + z_n\big) = \big(x_1 + (y_1 + z_1), \dots, x_n + (y_n + z_n)\big)$
$(x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n) = (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n)$

2) $\underline{0} = (0, \dots, 0)$

3) $(-x_1, \dots, -x_n)$

esempio $V = \mathbb{R}[x]$ polinomi a coefficienti reali

$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \qquad a_i \in \mathbb{R}$

$V = \mathbb{K}[x] \quad a_i \in \mathbb{K}$

$p(x) + q(x)$ è il polinomio che ha come coefficiente di x^n la somma dei coefficienti di x^n nei due polinomi

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$

$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots$

prodotto esterno $\alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha p(x) := \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_n x^n$

esercizio Verificare gli assiomi

el. neutro $\underline{0}(x) = 0 \in \mathbb{K}$

$\mathbb{K}_n[x] = \{ p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid gr(p) \leq n \}$ è uno spazio vettoriale

Nota: i polinomi di grado n non formano uno spazio vettoriale con la somma e il prodotto esterno definiti sopra

esempio $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(f+g)(x):=f(x)+g(x) \quad \forall x$

$\alpha\in\mathbb{R} \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(\alpha f)(x):=\alpha(f(x))$

$V=\{f:\mathbb{K}\to\mathbb{K}\}$

$V=\{f:X\to\mathbb{K}\}\ (X\neq\emptyset)$

$f+g:X\to\mathbb{K} \qquad af:X\to\mathbb{K} \quad a\in\mathbb{K}$

$(f+g)(x):=f(x)+g(x) \qquad (a\cdot f)(x):=a(f(x))$

$(V,+,\cdot)$ è sp. vett. su $\mathbb{K}$: $V=\mathbb{K}^X$

esempio successioni a valori in $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$(a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)$ $\quad a_i\in\mathbb{K}$

$+:\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ $\quad (a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)+(b_0,b_1,\dots,b_n,\dots)=(a_0+b_0,a_1+b_1,\dots,a_n+b_n,\dots)$

$\cdot:\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ $\quad \alpha(a_0,a_1,\dots,a_n,\dots)=(\alpha a_0,\alpha a_1,\dots,\alpha a_n,\dots)$

esempio $M(m,n,\mathbb{K})$ o $M_{m,n}(\mathbb{K})$: matrici di taglia $m\times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \qquad \text{taglia } m\times n$$

$$A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \quad B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \quad A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \quad O=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$-A=(-a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

$$\alpha\in\mathbb{K},\ A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \qquad \alpha A=(\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

$(M_{m,n}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ spazio vettoriale su $\mathbb{K}$

diagonale: a_{ii}

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ \vdots & a_{22} & & \\ \vdots & & a_{33} & \\ & & & \ddots\end{pmatrix}$$

matrici quadrate $(m=n)$ $\quad M(n,\mathbb{K})=M_n(\mathbb{K})$

esercizio $\alpha\underline{0}=\underline{0} \quad \forall\alpha\in\mathbb{K}$

$\underline{0}=\underline{0}+\underline{0} \qquad \alpha\underline{0}=\alpha(\underline{0}+\underline{0})=\alpha\underline{0}+\alpha\underline{0}$

Sommando l'opposto di $\alpha\underline{0}$, $\underline{v}$: $\underline{v}+\alpha\underline{0}=\underline{0}$

$\underline{v}+\alpha\underline{0}=\underline{v}+\alpha\underline{0}+\alpha\underline{0}$

$\underline{0}=\underline{0}+\alpha\underline{0} \longrightarrow \alpha\underline{0}=\underline{0}$

esercizio $0\cdot\underline{v}=\underline{0}$

$0=0+0 \longrightarrow 0\cdot\underline{v}=(0+0)\underline{v}=0\cdot\underline{v}+0\cdot\underline{v}$

Da cui: $0\,\underline{v}+0\cdot\underline{v}=0\cdot\underline{v}=0\cdot\underline{v}+\underline{0}$

Sommando l'opposto di $0\cdot\underline{v}$, $\underline{u}$, si ha:

$0\cdot\underline{v}+0\cdot\underline{v}+\underline{u}=0\cdot\underline{v}+\underline{0}+\underline{u} \longrightarrow 0\cdot\underline{v}=\underline{0}$

esercizio l'opposto di $\underline{v}$ è $(-1)\cdot\underline{v}$, dove (-1) è l'opposto di 1 in $\mathbb{K}$

$\underline{v}+(-1)\underline{v}=1\cdot\underline{v}+(-1)\underline{v}=(1+(-1))\underline{v}=(0)\,\underline{v}=\underline{0}$

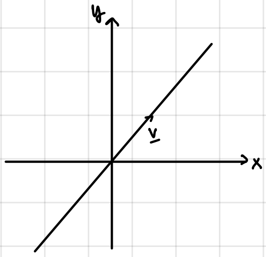
def. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$
Un sottoinsieme $W \subset V$ si dice sottospazio vettoriale di V se
W è spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni che ci sono su V, ossia
se $+|_{W\times W} : W \times W \to W$, $\cdot|_{\mathbb{K}\times W} : \mathbb{K} \times W \to W$, $(W, +|_{W\times W}, \cdot|_{\mathbb{K}\times W})$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

<u>Nota</u>: un sottospazio vettoriale deve contenere il vettore $\underline{0} \in V$
Un sottospazio $W \subset V$ si dice proprio se $W \neq V$

esempio $V = \mathbb{R}^2$ $W = \{0\}$ $W = V$ sono sottospazi vettoriali

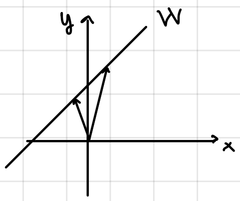
Proposizione $W \subset V$, con $W \neq \emptyset$, è un sottospazio vettoriale se e solo se:
i) $\underline{0} \in W$
ii) $\forall \underline{v}, \underline{w} \in W$, $\underline{v} + \underline{w} \in W$ (W è chiuso per somma)
iii) $\forall \underline{v} \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \underline{v} \in W$ (W è chiuso per prodotto esterno)

esercizio Trovare tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^2$



- $W = \{\alpha \underline{v} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
  è un sottospazio vettoriale
- $W = \{0\}$
- $W = \mathbb{R}^2$

esercizio



W non è un sottospazio vettoriale: non contiene $\underline{0}$ e la somma non è ben definita

<u>oss</u>: l'intersezione di sottospazi è sottospazio

esempio
$T_+ = \{A \in M(m,n,\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0 \quad i > j\}$ matrici triangolari superiori
$T_- = \{A \in M(m,n,\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0 \quad i < j\}$ matrici triangolari inferiori
$D = \{A \in M(m,n,\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0 \quad i \neq j\} = T_+ \cap T_-$ matrici diagonali
Sono tutti sottospazi di $M(m,n,\mathbb{K})$

esempio $V = \mathbb{K}[t]$ $d \geq 1$
$W = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid \deg p = d\} \cup \{0\}$
non è un sottospazio, poiché:
$$\deg(ap) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a = 0 \\ \deg p & \text{se } a \neq 0 \end{cases}$$

$\mathbb{K}_d[t] = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid \deg p \leq d\}$ è sottospazio
Infatti: $\deg(p+q) \leq \max(\deg p, \deg q)$

Proposizione Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $V \neq \{0\}$, con $\mathbb{K}$ infinito. Allora V non è unione finita di sottospazi propri.

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo per induzione su k che se $V_1, .., V_k \subset V$ sono sottospazi propri

$\Rightarrow V \neq V_1 \cup V_2 \cup .. \cup V_k$

$k=1$: $V \neq V_1$ perché V_1 è proprio

$k \geq 2$: se $V_1 \subset V_2 \cup ... \cup V_k$, allora $V_1 \cup V_2 \cup ... V_k = \underbrace{V_2 \cup ... \cup V_k}_{k-1 \text{ ssp}} \neq V$

se $V_1 \not\subset V_2 \cup ... \cup V_k$

$\exists \underline{w} \in V_1$ ma $\underline{w} \notin V_2 \cup ... \cup V_k$

V_1 è proprio : $\exists \underline{v} \in V$ t.c $\underline{v} \notin V_1$

Considero $L = \{ a\underline{w} + \underline{v} \mid a \in \mathbb{K} \} = \text{Span}(\underline{w}) + \underline{v}$

Sia $h : \mathbb{K} \longrightarrow L$

$a \longmapsto a\underline{w} + \underline{v}$

h è biunivoca, infatti è surgettiva per definizione di L ed è iniettiva poiché $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ $a_1\underline{w} + \underline{v} = a_2\underline{w} + \underline{v} \Rightarrow a_1\underline{w} = a_2\underline{w}$

$\Rightarrow (a_1 - a_2)\underline{w} = \underline{0} \Rightarrow a_1 = a_2$

$\Rightarrow L$ è infinito

(1) $L \cap V_1 = \emptyset$

(2) $L \cap V_i$ contiene al più un vettore

(1) $\underline{u}_1 \in V_1 \cap L$: $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $\underline{u}_1 = \lambda\underline{w} + \underline{v}$

$\Rightarrow \underline{v} = \underset{V_1}{\underset{\cap}{\underline{u}_1}} - \lambda \underset{V_1}{\underset{\cap}{\underline{w}}} \in V_1$ ↯

$\Rightarrow V_1 \cap L = \emptyset$

(2) se $L \cap V_i \ni \underline{w}_1, \underline{w}_2 \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $\underline{w}_1 = \lambda_1\underline{w} + \underline{v}$

$\underline{w}_2 = \lambda_2\underline{w} + \underline{v}$

$\Rightarrow \underline{v} = \underline{w}_1 - \lambda_1\underline{w} = \underline{w}_2 - \lambda_2\underline{w}$

$V_i \ni \underset{V_i}{\underset{\cap}{\underline{w}_1}} - \underset{V_i}{\underset{\cap}{\underline{w}_2}} = (\lambda_1 - \lambda_2)\underset{\underline{0}}{\underset{\neq}{\underline{w}}}$

Se fosse $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \underline{w} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) \in V_i$ ↯

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \underline{w}_1 = \underline{w}_2$

$\Rightarrow L \cap (V_1 \cup ... \cup V_k)$ contiene al più $k-1$ elementi, ma L è infinito

$\Rightarrow \exists \underline{v} \in L$ t.c. $\underline{v} \notin V_1 \cup V_2 \cup .. \cup V_k$

$\Rightarrow V \neq V_1 \cup V_2 \cup ... V_k$ □

def. Dati i vettori $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n} \in V$, una loro **combinazione lineare** è l'espressione
$\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}$ con $\alpha_i \in \mathbb{K}$

def. Fissiamo n vettori $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$
$\mathrm{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}) = \{ \underline{v} \in V \mid \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} \} = \{ \alpha_1 \underline{v_1} + \dots \alpha_n \underline{v_n} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \}$
OSS $\mathrm{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}) \ni \underline{v_i} \ \forall i = 1, \dots, n$

Proposizione $\mathrm{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$ è un sottospazio vettoriale di V.

DIMOSTRAZIONE
Verifichiamo:
i) $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}$
$\underline{w} = \beta_1 \underline{v_1} + \dots + \beta_n \underline{v_n}$
$\underline{v} + \underline{w} = \alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} + \beta_1 \underline{v_1} + \dots + \beta_n \underline{v_n} = (\alpha_1 + \beta_1) \underline{v_1} + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \underline{v_n} \in \mathrm{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$
ii) $\alpha \in \mathbb{K}$
$\alpha \underline{v} = \alpha (\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}) = (\alpha \alpha_1) \underline{v_1} + \dots + (\alpha \alpha_n) \underline{v_n} \in \mathrm{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$
$\square$

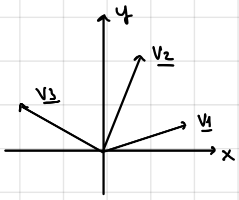
def. $A \subset V$ sottoinsieme qualunque
$\mathrm{Span}(A) = \{ \underline{v} \in V \mid \exists\, \underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in A,\ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} \}$

<u>esempio</u> $V = \mathbb{K}[x]$ $\quad A = \{1, x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2n}, \dots\}$
$\mathrm{Span}(A) = \{ \alpha_0 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \dots + \alpha_n x^{2n} + \dots \}$

Nel caso dei vettori geometrici, le coordinate si ottenevano da $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ t.c.
ogni vettore $\underline{v} = x_1 \underline{v_1} + x_2 \underline{v_2} + x_3 \underline{v_3}$ $\quad x_i \in \mathbb{R}$ unici

def. I **generatori** di V sono un insieme di vettori A tali che $V = \mathrm{Span}(A)$

<u>esercizio</u> $\mathrm{Span}(A) \supset A$ $\quad \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} \quad \forall\, \underline{v} \in A$
<u>esercizio</u> $A \supset B \Rightarrow \mathrm{Span}(A) \supset \mathrm{Span}(B)$
Devo dimostrare che $\underline{v} \in \mathrm{Span}(B) \Rightarrow \underline{v} \in \mathrm{Span}(A)$
$\Leftrightarrow \exists\, \underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in B,\ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \cdot \underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}$
i $\underline{v_i} \in A$ poiché $A \supset B$, quindi $\underline{v} \in \mathrm{Span}\, A$
<u>esercizio</u> $\mathrm{Span}(\mathrm{Span}\, A) = \mathrm{Span}\, A$
$\Updownarrow$ Se $W \subset V$ è sottospazio vettoriale $\Rightarrow \mathrm{Span}\, W = W$
Dimostrare l'uguaglianza di due insiemi, spesso si spezza in $\subset$ e $\supset$
1) $\mathrm{Span}\, W \supset W$ per quanto sopra
2) $\mathrm{Span}\, W \subset W$
$\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} \in W$ perché W è chiuso per somma e prodotto esterno.
<u>Nota</u>: $W \subset V$ è sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow$ è chiuso per combinazioni lineari



In $\mathbb{R}^2$, se prendo 3 vettori $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$, sono generatori.

Ma ogni vettore si scrive come combinazione di $\underline{v_1}$ e $\underline{v_2}$, ma anche $\underline{v_1}$ e $\underline{v_3}$
Quindi ho molte combinazioni che mi danno lo stesso $\underline{v}$.

def. I vettori $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ si dicono linearmente indipendenti se l'unica soluzione di

$$x_1 \underline{v_1} + \dots + x_n \underline{v_n} = \underline{0}$$

è $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \in \mathbb{K}$

OSS. $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n}$ lin. dip. $\Rightarrow$ ogni sottoinsieme $\underline{v_{j_1}}, \underline{v_{j_2}}, \dots, \underline{v_{j_k}}$ sono lin. indip.

$\underline{0} \neq \underline{v_i}$ $\quad i = 1, \dots, n$

def. I vettori $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$ si dicono linearmente dipendenti se esiste una combinazione lineare $x_1 \underline{v_1} + \dots + x_n \underline{v_n} = \underline{0}$ tale che almeno uno degli $x_i \neq 0$

proposizione $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in V$ linearmente indipendenti, $\underline{v} \in \text{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n})$, allora

se $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} =$ $\quad \alpha_i \in \mathbb{K}$

$= \beta_1 \underline{v_1} + \dots + \beta_n \underline{v_n}$ $\quad \beta_i \in \mathbb{K}$

allora $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

DIMOSTRAZIONE

$\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} = \beta_1 \underline{v_1} + \dots + \beta_n \underline{v_n}$

Sommando l'opposto del vettore a destra trovo:

$\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} - (\beta_1 \underline{v_1} + \dots + \beta_n \underline{v_n}) = \underline{0}$

$-(\beta_1 \underline{v_1} + \dots + \beta_n \underline{v_n}) = (-\beta_1)\underline{v_1} + \dots + (-\beta_n)\underline{v_n}$

$\Rightarrow$ per indipendenza lineare, $\alpha_1 - \beta_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \beta_1$

$\vdots$

$\alpha_n - \beta_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_n = \beta_n$ $\square$

esercizio $\underline{v_1}$ è linearmente indipendente $\Leftrightarrow \underline{v_1} \neq \underline{0}$

se $\underline{v_1} = \underline{0}$, $\alpha \underline{v_1} = \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$ è linearmente dipendente

se $\underline{v_1} \neq \underline{0}$, $x \cdot \underline{v_1} = \underline{0}$, $x \in \mathbb{K}, x \neq 0$

$\exists x^{-1} \in \mathbb{K} \rightarrow x^{-1}(x \cdot \underline{v_1}) = \underline{0} \cdot x^{-1} = \underline{0}$

$(x^{-1}x)\underline{v_1} = \underline{0} \rightarrow 1 \cdot \underline{v_1} = \underline{0} \rightarrow \underline{v_1} = \underline{0}$ ↯

esercizio I vettori $\underline{v_1}, \underline{v_2}$ in $\mathbb{R}^2$

se $\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} = \underline{0}$ non banale, ad esempio $\alpha_2 \neq 0$, allora

$\alpha_2 \underline{v_2} = -\alpha_1 \underline{v_1}$ $\quad \underline{v_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \underline{v_1}$ $\quad \left[\frac{1}{\alpha_2} = \alpha_2^{-1}\right]$

$\underline{v_1}, \underline{v_2}$ linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \underline{v_1}, \underline{v_2}$ sono multipli

esercizio I vettori $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ in $\mathbb{R}^3$ linearmente dipendenti

$\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \alpha_3 \underline{v_3} = \underline{0}$ $\quad \alpha_3 \neq 0$

$\underline{v_3} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \underline{v_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \underline{v_2}$

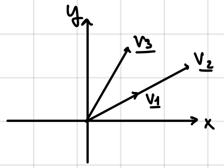
$\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow \underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}$ non complanari

OSS: $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}$ linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \exists \underline{v_i}$ che è combinazione lineare dai rimanenti

$\Leftrightarrow v_i \in \text{Span}(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_{i-1}}, \underline{v_{i+1}}, \dots, \underline{v_n})$

$\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} = \underline{0}$ non banale

posso esprimere $\underline{v_i}$ tramite i rimanenti se $\alpha_i \neq 0$



$\alpha_1 \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \alpha_3 \underline{v_3} = \underline{0}$

$\overset{\shortparallel}{0}$

def. $A \subset V$ anche infinito
Si dirà linearmente dipendente se esiste un sottoinsieme finito $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in A$ di vettori linearmente dipendenti
(Quindi se un insieme A contiene un insieme B lin. dip $\Rightarrow$ A è lin. dip.)

def. $X \subset V$, $X \neq \emptyset$
X si dice linearmente indipendente se:
$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in X, \; a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K} : \; a_1\underline{v}_1 + \dots + a_k\underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$

La definizione si può estendere a una lista ordinata di vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$
Nota: se ci sono ripetizioni, la lista di vettori è lin. dip.

def. Si dice base $\mathcal{B} \subset V$ un sottoinsieme ordinato di generatori linearmente indipendenti
$V = \operatorname{Span} \mathcal{B}$, con $\mathcal{B}$ linearmente indipendente

Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è base, allora ogni vettore $\underline{v} \in V$ ha un'unica espressione:
$\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n \qquad x_i \in \mathbb{K}$, x_i unici
$\underline{v} \longleftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$ corrispondenza biunivoca (che dipende da $\mathcal{B}$)

$$\underline{v} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n = [\underline{v}]_{\mathcal{B}} \qquad \mathcal{B} \text{ è ordinata}$$

Proprietà
$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \dots + x_n\underline{v}_n]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [y_1\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2 + \dots + y_n\underline{v}_n]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$[\underline{v}+\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [(x_1+y_1)\underline{v}_1 + \dots + (x_n+y_n)\underline{v}_n]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$[\alpha\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\alpha x_1\underline{v}_1 + \dots + \alpha x_n\underline{v}_n]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

In altri termini: $[\underline{v}+\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}} + [\underline{w}]_{\mathcal{B}} \qquad [\alpha\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \alpha[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$

esempio $V = \mathbb{R}^2$ sp. v. su $\mathbb{R}$
base canonica $\underline{e}_1 = (1,0) \quad \underline{e}_2 = (0,1)$
$(x,y) = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2$ sono generatori
$x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 = \underline{0} \Leftrightarrow (x,0) + (0,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x=0, y=0$ è base

In generale su $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ base canonica: $\underline{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{i\text{-esimo}}{1}, 0, \dots, 0)$

esempio $V = \mathbb{K}[x]$ base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$

esempio $M_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K} \right\} \qquad M_{m,n}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$

$M_2(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{K} \right\}$ Tipo della matrice: (m,n)

$V = M_2(\mathbb{K})$ spazio vettoriale $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$$A + A' := \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \quad \alpha A := \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \qquad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

base standard $\mathcal{B}$: $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} \qquad [A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

proposizione $A \subset V$ è una base se e solo se A è linearmente indipendente massimale (rispetto all'inclusione: $B \supsetneq A$, B non è lin. indip.)

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: A base, A è lin. indip.

Se aggiungo ad A un vettore $\underline{v} \notin A$, $B = A \cup \{\underline{v}\}$ non è lin. indip.

A generatori $\Rightarrow \underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}$, con $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n} \in A$

$\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} + (-1)\underline{v} = \underline{0}$ è combinazione lineare non banale di vettori di B

OSS se B è lin. dip. $\Rightarrow$ ogni $C \supset B$ è lin. dip.

$\Leftarrow$: A lin. indip. massimale

Devo dimostrare che $\forall \underline{v} \in V$ è combinazione lineare di vettori di A.

Se $\underline{v} \in A$, è ovvio

Se $\underline{v} \notin A$, $B = A \cup \{\underline{v}\}$ non è più lin. indip.

C'è una relazione lineare in B che coinvolge il vettore $\underline{v}$:

$$\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} + \alpha \underline{v} = \underline{0} \quad \text{con } \alpha \neq 0$$

Da cui $\underline{v} = -\frac{\alpha_1}{\alpha} \underline{v_1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} \underline{v_n}$

Quindi $\underline{v} \in \operatorname{Span} A$ □

proposizione $A \subset V$ è base se e solo se A è un insieme di generatori minimale (se $B \subsetneq A \Rightarrow B$ non genera V)

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: A è base $\rightarrow$ A generatori e lin indip

Sia $B = A \setminus \{\underline{v_i}\}$ per un certo i. B non è più generatore;

infatti, se lo fosse, risulterebbe $\underline{v_i} = \alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_{i-1} \underline{v_{i-1}} + \alpha_{i+1} \underline{v_{i+1}} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}$

Quindi A non sarebbe lin. indip., che è un assurdo.

Perciò A è l'insieme di generatori minimale.

$\Leftarrow$: A è un insieme di generatori minimale

$\forall \underline{v} \in V$, $\underline{v} \in \operatorname{Span} A$ Sia $A = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$.

Per assurdo, sia A lin. dip. Allora esiste una combinazione lineare

$$\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_i \underline{v_i} + \dots + \alpha_n \underline{v_n} = 0 \quad \text{con almeno un } \alpha_i \neq 0$$

Allora si può ricavare $\underline{v_i}$:

$$\underline{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \underline{v_1} - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \underline{v_{i-1}} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \underline{v_{i+1}} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \underline{v_i}$$

Quindi anche l'insieme $A \setminus \{\underline{v_i}\} = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_{i-1}}, \underline{v_{i+1}}, \dots, \underline{v_n}\}$ è un insieme di generatori,

ma ciò è un assurdo con il fatto che A sia l'insieme di generatori minimale.

Quindi A è lin. indip., e perciò A è una base. □

Teorema Ogni spazio vettoriale ha una base.

DIMOSTRAZIONE

Ipotesi aggiuntiva: V finitamente generato (altrimenti bisogna usare il lemma di Zorn)

$\exists A \subset V$ finito t.c. $V = \operatorname{Span} A$

$A = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

Se $V = \{\underline{0}\}$ $\quad \mathcal{B} = \emptyset$ per convenzione

Supponiamo $V \supsetneq \{\underline{0}\}$

Consideriamo tutti i sottoinsiemi $B \subset A$ fatti da vettori lin. indip.

$B \neq \emptyset$, poiché essendo $V \supsetneq \{\underline{0}\}$, A contiene qualche vettore $\underline{v}_i \neq \underline{0}$ e $\{\underline{v}_i\}$ è lin. indip.

Prendiamo un B massimale dentro A (cioè se $B' \supsetneq B$, $B' \subset A$, allora B' non è lin. indip.)

Se $B = A$ ho finito, perché allora A è lin. indip., ma allora A è base.

Se $B \subsetneq A$, voglio mostrare che B genera.

Posso supporre $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$. Intanto facciamo vedere che ogni altro vettore di A è combinazione lineare di vettori di B.

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}\}$ non è lin. indip., cioè c'è una combinazione lineare

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k + \alpha_{k+1} \underline{v}_{k+1} = \underline{0} \quad \text{con } \alpha_{k+1} \neq 0$$

Allora $\underline{v}_{k+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} \underline{v}_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \underline{v}_k$

Lo stesso per tutti gli altri $\underline{v}_j$, $j > k$. Quindi $A \subset \operatorname{Span} B$

$\forall\, \underline{v} \in V$, $\underline{v} \in \operatorname{Span} A$ per ipotesi.

Ma $\operatorname{Span} A \subset \operatorname{Span} B$, quindi $\forall\, \underline{v} \in V$, $\underline{v} \in \operatorname{Span} B \Rightarrow B$ è lin. indip. e genera V

$\Rightarrow B$ è base di V $\square$

<u>OSS</u>: da ogni sistema di generatori si può estrarre una base

esercizio $A \subset \operatorname{Span} B \Rightarrow \operatorname{Span} A \subset \operatorname{Span} B$

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k + \alpha_{k+1} \underline{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

$\underline{v}_{k+1} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_k \underline{v}_k$

$\vdots$

$\underline{v}_n = \gamma_1 \underline{v}_1 + \dots + \gamma_k \underline{v}_k$

$\Rightarrow \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k + \alpha_{k+1}(\beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_k \underline{v}_k) + \dots + \alpha_n(\gamma_1 \underline{v}_1 + \dots + \gamma_k \underline{v}_k)$

esercizio $V = \mathbb{K}[x]$ non è finitamente generato

Se $\exists A \subset \mathbb{K}[x]$ finito di polinomi che genera V.

Sia m il max dei gradi dei polinomi in A

Polinomi di grado $> m$ non stanno in $\operatorname{Span} A$

esercizio $A \subset V$ lin. indip $\Rightarrow \forall B \subset A$, B è lin. indip.

Siano $A = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ con $k < n$

$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0} \Rightarrow \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k + 0 \cdot \underline{v}_{k+1} + \dots + 0\, \underline{v}_n = \underline{0}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0 \Rightarrow B$ lin. ind.

esercizio $A \subset V$ è insieme di generatori $\Rightarrow \forall B \supset A$ è insieme di generatori

$V = \operatorname{Span} A \qquad A = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \qquad B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \dots, \underline{v}_h\} \qquad \underline{v}_k \in \operatorname{Span} A$ per $k = n+1, \dots, h$

$\operatorname{Span} B = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n + \beta_1 \underline{v}_{n+1} + \dots + \beta_n \underline{v}_h,\ \alpha_j \in \mathbb{K}\} = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n + \beta_1(\gamma_1 \underline{v}_1 + \dots + \gamma_n \underline{v}_n) + \dots +$
$+ \beta_n(\delta_1 \underline{v}_1 + \dots + \delta_n \underline{v}_n)\} = \operatorname{Span} A = V$

$\Rightarrow B$ genera

Lemma
Algoritmo di scambio

Sia $A = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ lin. indip.
Sia $\underline{w} \in \operatorname{Span} A$, $\underline{w} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_k \underline{u}_k$ $\quad \alpha_i \in \mathbb{K}$
Supponiamo $\alpha_k \neq 0$. Allora
$A' = (A \setminus \{\underline{u}_k\}) \cup \{\underline{w}\} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{k-1}, \underline{w}\}$ è ancora linearmente indipendente e $\operatorname{Span} A' = \operatorname{Span} A$

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo che A' è lin. indip:

$\beta_1 \underline{u}_1 + \dots + \beta_{k-1} \underline{u}_{k-1} + \beta_k \underline{w} = \underline{0}$

$\beta_1 \underline{u}_1 + \dots + \beta_{k-1} \underline{u}_{k-1} + \beta_k (\alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_k \underline{u}_k) = \underline{0}$

$(\beta_1 + \beta_k \alpha_1) \underline{u}_1 + \dots + (\beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) \underline{u}_{k-1} + \beta_k \alpha_k \underline{u}_k = \underline{0}$

Usiamo che gli $\underline{u}_j$ sono lin. indip $\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \beta_k \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1} = 0 \\ \beta_k \alpha_k = 0 \longrightarrow \beta_k = 0 \end{cases}$

Dalle precedenti equazioni, ricavo quindi $\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = 0$

$\Rightarrow A'$ è lin. indip.

Ora devo dimostrare $\operatorname{Span} A' = \operatorname{Span} A$

$\underline{v} \in \operatorname{Span} A'$ $\quad \underline{v} = x_1 \underline{u}_1 + \dots + x_{k-1} \underline{u}_{k-1} + x_k \underline{w} = x_1 \underline{u}_1 + \dots + x_{k-1} \underline{u}_{k-1} + x_k (\alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_k \underline{u}_k) =$
$= (x_1 + x_k \alpha_1) \underline{u}_1 + \dots +$

$\Rightarrow \underline{v} \in \operatorname{Span} A \longrightarrow \operatorname{Span} A' \subset \operatorname{Span} A$

Viceversa se $\underline{v} \in \operatorname{Span} A$, $\underline{v} = x_1 \underline{u}_1 + \dots + x_k \underline{u}_k$

$\underline{u}_k = -\frac{1}{\alpha_k} (\alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \underline{u}_{k-1} - \underline{w})$

Sostituendo, trovo $\underline{v} \in \operatorname{Span} A'$ $\square$

Lemma generale
Algoritmo di scambio

$A = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ linearmente indipendente
Sia $B = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h\}$ linearmente indipendente con $B \subset \operatorname{Span} A$
Allora $\exists B' \subset A$ con $\# B' = \# B$ $(= h)$ t.c.
$A' = (A \setminus B') \cup B$ è ancora linearmente indipendente e $\operatorname{Span} A' = \operatorname{Span} A$

DIMOSTRAZIONE

Applico il lemma precedente a $\underline{w}_1$: supponiamo di scambiarlo con il primo vettore di A

$A = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$

$A_1 = \{\underline{w}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k\}$ lin. indip. con lo stesso Span

Adesso scambio $\underline{w}_2$ usando A_1:

$\underline{w}_2 = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \dots + \alpha_k \underline{u}_k$

$\underline{w}_2$ lo posso scambiare con un qualunque vettore che abbia coefficiente $\alpha_i \neq 0$

Sicuramente uno tra $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ è $\neq 0$, altrimenti avrei $\underline{w}_2 = \alpha_1 \underline{w}_1$ ma i $\underline{w}_j$ sono lin. indip.

Suppongo $\alpha_2 \neq 0$ (a meno di rinumerare gli indici)

$A_2 = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{u}_3, \dots, \underline{u}_k\}$

$\underline{w}_3 = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \alpha_3 \underline{u}_3 + \dots + \alpha_k \underline{u}_k$

Almeno uno tra gli $\alpha_3, \dots, \alpha_n$ è $\neq 0$, altrimenti $\underline{w}_3 = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2$

Vado avanti così.

$A' = A_h = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h, \underline{u}_{k+1}, \dots, \underline{u}_n\}$ $\square$

Corollario $\quad \# B \leq \# A$

Teorema Due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V hanno lo stesso numero di elementi.

DIMOSTRAZIONE
$\mathcal{B}=\{\underline{v_1},\dots,\underline{v_k}\}$, $\mathcal{B}'=\{\underline{w_1},\dots,\underline{w_n}\}$ basi di V
Applico il lemma con $A=\mathcal{B}$ e $B=\mathcal{B}'$
è lin. indip. e genera perché base
Quindi le ipotesi sono verificate. Dal corollario $\#\mathcal{B}'\leq\#\mathcal{B}$
Simmetricamente, applicando il lemma con $A=\mathcal{B}'$ e $B=\mathcal{B}'$, trovo $\#\mathcal{B}\leq\#\mathcal{B}'$
Quindi $\#\mathcal{B}=\#\mathcal{B}'$ $\square$

def. La dimensione di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ è il numero di elementi di una base
Si indica $\dim_{\mathbb{K}} V$ (o $\dim V$)

esempio $V=\mathbb{R}^n$ ha base canonica fatta da n elementi
$\Rightarrow$ ogni base ha n elementi : $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n=n$

esempio $V=\mathbb{K}^n$ sp. vett. su $\mathbb{K}$: $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}^n=n$

esempio $V=\mathbb{C}$ è sp. vett. su $\mathbb{C}$ $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1$
$\mathcal{B}$: $\underline{v}=1$ Tutti i vettori $\underline{w}=z=z\cdot\underline{v}$
Qualunque altro numero ($\neq 0$) è base
$V=\mathbb{C}$ sp. vett. su $\mathbb{R}$ $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2$
$\mathcal{B}$: 2 vettori $\underline{v_1}=1$, $\underline{v_2}=i$
In generale: $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n=n$ $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n=2n$ base : $i\mapsto \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ i\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$

esempio $V=\mathbb{K}_n[x]=\{p(x)\mid \deg(p(x))\leq n\}$
$\mathcal{B}=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$
$\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_n[x]=n+1$

esempio $V=M_{m,n}(\mathbb{K})$
$\dim_{\mathbb{K}} M_{m,n}(\mathbb{K})=mn$

OSS: Se $A\subset V$ è lin. indip, allora A si estende a una base di V
(cioè $A\subset B$, con B base)
Prendiamo una base $\mathcal{B}$ di V: per l'algoritmo di scambio, $\exists A'\subset\mathcal{B}$, $\#A'=\#A$, t.c.
$\mathcal{B}'=(\mathcal{B}\setminus A')\cup A$ è lin. indip. e Span $\mathcal{B}'$ = Span $\mathcal{B}=V$, cioè $\mathcal{B}'$ è base.

esercizio $W\subset V$ sottospazio di V $\Rightarrow$ $\dim W\leq\dim V$
e vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow$ $W=V$
Prendiamo $\mathcal{B}'$, base di W : $\mathcal{B}'=\{\underline{w_1},\dots,\underline{w_k}\}$, sono lin. indipendenti in W
e quindi (dalla definizione) anche in V
Per l'osservazione, si estendono a una base di V
Quindi $\dim W\leq\dim V$
Se $\dim W=\dim V$, $\mathcal{B}'$ è base di V quindi Span $\mathcal{B}'=W=V$

esempio $V=\mathbb{R}^3$ i possibili sottospazi hanno dim 0 $\{\underline{0}\}$, 1 Span$(\underline{v})$ $(\underline{v}\neq\underline{0})$,
2 Span$(\underline{v},\underline{w})$, 3 $\mathbb{R}^3$

esempio $W \subset M_n(\mathbb{R})$ $S_n = \{A \mid a_{ij} = a_{ji}\}$ matrici simmetriche es. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & g \end{pmatrix}$

S_2 è sottospazio vettoriale

$\dim S_2 = 3$ base: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim S_3 = 6$

$\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$A_n = \{A \mid a_{ij} = -a_{ji}\}$ (sul campo $\mathbb{K}$ purché $-a \neq a$ in $\mathbb{K}$, come in $\mathbb{F}_2$)

su $\mathbb{R}$ è sottospazio vettoriale

$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ $\dim A_2 = 1$

$\dim A_3 = 3$

$\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$

esercizio V spazio vettoriale di dim n

1) $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k}$ lin. indip $\Rightarrow k \leq n$
2) ogni sistema di $n+1$ o più vettori è linearmente dipendente
3) ogni sistema di n vettori lin. indip. è una base
4) $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k}$ generatori $\Rightarrow k \geq n$
5) $n-1$ vettori o meno non generano V
6) ogni sistema di n vettori che generano V è una base

OSS: $U, W \subset Z$ sottospazi

i) $\bigcap_{i \in J} U_i$ è sottospazio (intersezione di una famiglia qualunque di sottospazi)

quindi anche $U \cap W$ è sottospazio

ii) $U \cup W$ è sottospazio $\Leftrightarrow$ $U \subset W$ oppure $W \subset U$

DIMOSTRAZIONE

$\Leftarrow$: ovvio

$\Rightarrow$: se $W \setminus U \neq \emptyset$ e $U \setminus W \neq \emptyset$

$\exists\, \underline{u} \in U \setminus W$ e $\underline{w} \in W \setminus U$

Se fosse $\underline{u} + \underline{w} \in U \cup W$ avrei ad es. $\underline{u} + \underline{w} \in U \Rightarrow \underline{w} = \underline{u}' - \underline{u} \in U$ ↯

analogamente se $\underline{u} + \underline{w} \in W \Rightarrow \underline{u} \in W$ ↯

Chi è il più piccolo sottospazio che contiene $U \cup W$?

oss $A \subset V$ sottoinsieme, il più piccolo sottospazio di V che contiene A è Span A

Infatti se un sottospazio W contiene A, contiene tutte le sue combinazioni lineari, cioè Span$A$

Quindi Span $(U \cup W)$ è il più piccolo sottospazio che contiene $U \cup W$

def. $U + W := \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} = \underline{u} + \underline{w},\ \underline{u} \in U,\ \underline{w} \in W \}$

Proposizione $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V e coincide con Span $(U \cup W)$ (è il più piccolo sottospazio che contiene $U \cup W$)

DIMOSTRAZIONE

$\underline{v}, \underline{v}' \in U + W$ $\exists\, \underline{u}, \underline{u}' \in U$, $\exists\, \underline{w}, \underline{w}' \in W$

t.c. $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ $\underline{v}' = \underline{u}' + \underline{w}'$

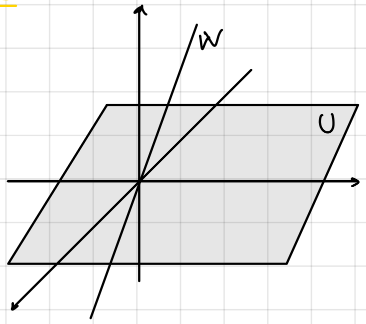
allora $\underline{v} + \underline{v}' = \underbrace{(\underline{u} + \underline{u}')}_{\in U} + \underbrace{(\underline{w} + \underline{w}')}_{\in W} \in U + W$ $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \underline{v} = \underbrace{\alpha \underline{u}}_{\in U} + \underbrace{\alpha \underline{w}}_{\in W} \in U + W$

$U + W \supset U$

$U + W \supset W$

$\Rightarrow U + W \supset U \cup W$ e quindi $U + W \supset$ Span $(U \cup W)$ $\square$

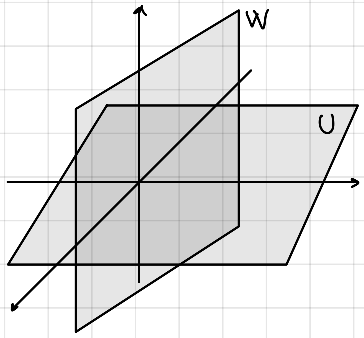
esempio



$U+W=\mathbb{R}^3$

$\forall \underline{v}\in V \quad \exists!\ \underline{u}\in U,\ \underline{w}\in W$

$\underline{v}=\underline{u}+\underline{w}$



$U+W=\mathbb{R}^3$

$\underline{v}=\underline{u}+\underline{w}$ non è unica

$=(\underline{u}+\underline{z})+(\underline{w}-\underline{z})$ con $\underline{z}\in U\cap W$

def. Due sottospazi $U,W\subset V$ si dicono in somma diretta (interna) se $U\cap W=\{\underline{0}\}$

Un sottospazio $Z\subset V$ si dice somma diretta di due sottospazi $U,W\subset V$ se:

i) $Z=U+W$

ii) $U\cap W=\{\underline{0}\}$

Si indica $Z=U\oplus W$

proposizione Sia $Z=U+W$. Allora $Z=U\oplus W \Leftrightarrow$ ogni vettore $\underline{z}\in Z$ si scrive in modo unico come $\underline{z}=\underline{u}+\underline{w}$, $\underline{u}\in U,\underline{w}\in W$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: Hp $U\cap W=\{\underline{0}\}$ Ts la scrittura è unica

$\underline{z}=\underline{u}+\underline{w}=\underline{u}'+\underline{w}' \Rightarrow \underset{\in U}{\underline{u}-\underline{u}'}=\underset{\in W}{\underline{w}'-\underline{w}}=\underline{v}$

$\underline{v}$ sta sia in U sia in $W \Rightarrow \underline{v}\in U\cap W=\{\underline{0}\} \Rightarrow \underline{v}=\underline{0}$

$\Rightarrow \underline{u}=\underline{u}'$ e $\underline{w}=\underline{w}'$

$\Leftarrow$: Hp $Z=U+W$, scrittura unica Ts $U\cap W=\{\underline{0}\}$

$\underline{v}\in U\cap W \qquad \underline{v}=\underline{0}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{0}$ due scritture diverse

$\Rightarrow \underline{v}=0$ □

esercizio $A=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ lin. indip. $\quad Z=\operatorname{Span}A$

$A=A'\cup A''$ con $A'\cap A''=\emptyset$ es. $A'=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_h\}$ $A''=\{\underline{v}_{h+1},\dots,\underline{v}_k\}$

$U=\operatorname{Span}A'$ $\quad W=\operatorname{Span}A'' \Rightarrow Z=U\oplus W$

DIMOSTRAZIONE

i) $Z=U+W$ $\quad$ ii) $U\cap W=\emptyset$

i) $Z=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\underline{v}_i\right\}=\left\{\sum_{i=1}^{h}\alpha_i\underline{v}_i+\sum_{i=h+1}^{k}\alpha_i\underline{v}_i\right\}=\operatorname{Span}A'+\operatorname{Span}A''$

ii) $\underline{v}=\sum_{i=1}^{h}\alpha_i\underline{v}_i=\sum_{i=h+1}^{k}\beta_i\underline{v}_i$ se $\underline{v}\in\operatorname{Span}A'\cap\operatorname{Span}A''$

$\sum_{i=1}^{h}\alpha_i\underline{v}_i-\sum_{i=h+1}^{k}\beta_i\underline{v}_i=\underline{0}$ è una relazione lineare e i vettori sono lin. indip.

$\Rightarrow \alpha_i=0,\ \beta_i=0$

$\Rightarrow \underline{v}=\underline{0}$

$\dim Z=k$ perché i $\underline{v}_i$ sono lin. indip. quindi sono una base di $\operatorname{Span}A$

$\dim U=h \quad \dim W=k-h$

cioè $\dim Z=\dim U+\dim W$ □

Proposizione Se $Z = U \oplus W$ allora $\dim Z = \dim U + \dim W$

DIMOSTRAZIONE

Se $\mathcal{B}' = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ è base di U

$\mathcal{B}'' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h\}$ è base di W

Allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}'' = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h\}$ è base di Z

Devo dimostrare che $\mathcal{B}$ genera ed è lin. indip.

i) $\mathcal{B}$ genera: $\mathcal{B}'$ genera U, $\mathcal{B}''$ genera W

ogni vettore $\underline{u} = \sum_{i=1}^{k} a_i \underline{u}_i$, $\forall \underline{u} \in U$, e $\underline{w} = \sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j$, $\forall \underline{w} \in W$

$Z \ni \underline{z} = \underline{u} + \underline{w}$

Sostituendo, troviamo una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.

ii) $\mathcal{B}$ è lin. indip

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j = \underline{0} \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v}_i}_{\in U} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j}_{\in W} = \underline{v} \in U \cap W = \{\underline{0}\}$$

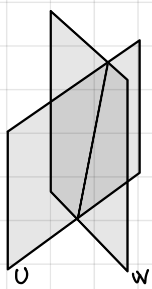
$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$ $\Rightarrow$ $\alpha_i = 0$ perché i vettori $\underline{u}_i$ sono lin. indip.

$\beta_j = 0$ perché i vettori $\underline{w}_j$ sono lin. indip. □

Teorema
Formula di Grassmann

Siano U, W sottospazi vettoriali di V. Allora
$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

DIMOSTRAZIONE



$n = \dim(U+W)$ $m = \dim U$ $p = \dim W$ $q = \dim(U \cap W)$

Ts $n = m + p - q$

$\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q\}$ base di $U \cap W$

Ogni sistema indipendente si estende a una base

Estendo $\mathcal{B}_1$ a una base di U:

$\mathcal{B}_2 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q, \underline{v}'_{q+1}, \dots, \underline{v}'_m\}$

Estendo $\mathcal{B}_1$ a una base in W:

$\mathcal{B}_3 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q, \underline{v}''_{q+1}, \dots, \underline{v}''_p\}$

Sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q, \underline{v}'_{q+1}, \dots, \underline{v}'_m, \underline{v}''_{q+1}, \dots, \underline{v}''_p\}$

Faccio vedere che $\mathcal{B}$ è una base di $U+W$

Devo dimostrare che $\mathcal{B}$ genera $U+W$ e $\mathcal{B}$ è lin. indip.

$\mathcal{B}$ genera $U+W$: ho messo insieme un insieme di generatori di U e un insieme di generatori di W, e come si è visto sopra quest'unione genera la somma

$\mathcal{B}$ lin. indip.: $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_q \underline{v}_q + \alpha'_{q+1} \underline{v}'_{q+1} + \dots + \alpha'_m \underline{v}'_m + \dots + \alpha''_p \underline{v}''_p = \underline{0}$ (1)

$$\underbrace{\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_q \underline{v}_q + \alpha'_{q+1} \underline{v}'_{q+1} + \dots + \alpha'_m \underline{v}'_m}_{\in U} = \underbrace{-\alpha''_{q+1} \underline{v}''_{q+1} - \dots - \alpha''_p \underline{v}''_p}_{\in W} = \underline{v}$$

Quindi $\underline{v} \in U \cap W = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q)$ quindi $\underline{v}$ si esprime come combinazione lineare dei soli $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q$

Siccome l'espressione per $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}_2$ è unica

segue $\alpha'_{q+1} = \dots = \alpha'_m = 0$

Allora in (1) rimane una combinazione dei vettori di $\mathcal{B}_3$

che sono lin. indip.

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_q = 0$ e $\alpha''_{q+1} = \dots = \alpha''_p = 0$

□

esempio $V = M_n(\mathbb{R})$ U : matrici simmetriche $a_{ij} = a_{ji}$

W : matrici antisimmetriche $a_{ij} = -a_{ji}$

${}^tA$: matrice trasposta $(b_{ij}) = (a_{ji})$

oss: A è simmetrica $\Leftrightarrow {}^tA = A$

A è antisimmetrica $\Leftrightarrow {}^tA = -A$

$V = U \oplus W$ $A \in M_n(\mathbb{R})$

$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ $M_2(\mathbb{R}) = U + W$

$U \cap W = \{0\}$ A simultaneamente simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\underline{v} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ $V \to \mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ $\mathbb{K}^{\mathcal{B}} \cong \mathbb{K}^n$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$v_i \longmapsto \alpha_i$

$\underline{v} \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$ $[\underline{v} + \underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}} + [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$ $[\alpha \underline{v}]_{\mathcal{B}} = \alpha [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$

$\varphi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$

def. Un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$, con V, W su $\mathbb{K}$, è un'applicazione che verifica:

$f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$

$f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$

Un isomorfismo è un'applicazione lineare bigettiva

esempio $\varphi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$

def. $W \subset V$ sottospazio vettoriale

Chiamo supplementare di W un sottospazio tale che

$V = W \oplus U$

$\dim U + \dim W = \dim V$

esercizio Se $\dim U = \dim V - \dim W$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$ $\Rightarrow V = U \oplus W$

Grassman: $\dim V = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

esercizio Se U, U' sono supplementari di W, allora

$U \cong U'$

esercizio $V = \mathbb{K}_3[x]$ $U = \{p(x) \mid p(0) = p(1) = 0\}$

$W = \{p(x) \mid p(2) = p(3) = 0\}$

i) U e W sono sottospazi vettoriali (verificare!)

Trovare basi per U e W

α radice di $p(x)$ $\Rightarrow p(x) = (x - \alpha)\, q(x)$ $\operatorname{gr} q(x) = \operatorname{gr} p(x) - 1$

$p(0) = 0 \Leftrightarrow p(x) = x\, q(x)$ $p(1) = 0$

$\Rightarrow p(x) = x(x-1)\, r(x)$

base per U $\{x(x-1), x^2(x-1)\}$

ii) U e W sono in somma diretta? $U \cap W = \{\underline{0}\}$?

$p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0$ $\operatorname{gr} p(x) \leq 3$

$\Rightarrow p(x) = 0$

MATRICI E SISTEMI LINEARI

Matrici

esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$

riga i-esima $A_i = (a_{i1} \cdots a_{in}) \in \mathbb{K}^n$

colonna j-esima $A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

- Abbiamo che si possono sommare 2 matrici $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$
- Moltiplicazione righe x colonne:

Date $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

il prodotto è $C = AB \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ t.c. $c_{ij} = A_i B^j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Proprietà:

1) distributività: $A(B+C) = AB + AC$ quando si può

$(A+B)C = AC + BC$

2) $\alpha \in \mathbb{K}$ $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$

3) associatività: $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$

$(AB)C = A(BC)$

4) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

5) Se prendo $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si può sempre fare il prodotto

è una nuova operazione su $M_n(\mathbb{K})$, associativa, distributiva rispetto a $+$.

Ha elemento neutro $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $a_{ii} = 1$

Notiamo che l'operazione non è commutativa

Non è vero che ogni $A \neq I$ è invertibile

$M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$, non sono un campo: è un anello con unità (un' algebra)

6) se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono invertibili

$\Rightarrow$ AB è invertibile e vale $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

In particolare, se $p=1$ (B ha una sola colonna), il risultato AB ha una sola colonna

Quindi possiamo pensare alla moltiplicazione di $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

con un vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $A\underline{x} \in \mathbb{K}^m$

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Questo dà un' applicazione lineare

$$f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$\underline{x} \longmapsto A\underline{x}$$

f_A lineare segue da $\begin{cases} A(\underline{x}+\underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} \\ A(\alpha\underline{x}) = \alpha A\underline{x} \end{cases}$

Notiamo che $A\underline{x}$ si può riscrivere

$$A\underline{x} = x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_nA^n = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Quindi il vettore $A\underline{x}$ è la combinazione lineare delle colonne di A a coefficienti le componenti di $\underline{x}$

sistemi lineari

m equazioni in n incognite: $x_1, x_2 \dots$ $\qquad a_{ij}, b_\ell \in \mathbb{K}$

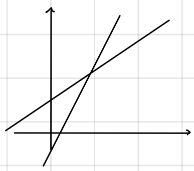
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

PROBLEMA: vedere quando è risolubile, e, se lo è, "trovare" le soluzioni

Il sistema si può riscrivere: $A\underline{x} = \underline{b}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

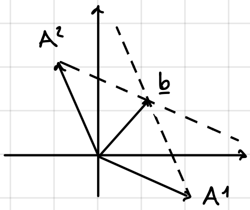
Soluzioni: coppie (x,y) che verificano

esempio $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Quindi le soluzioni sono anche i coefficienti di una combinazione lineare delle colonne di A che dà $\underline{b}$



Caso omogeneo: $\underline{b} = \underline{0}$

$A\underline{x} = \underline{0}$

- c'è sempre la soluzione $\underline{x} = \underline{0}$
- $\{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f_A(\underline{x}) = \underline{0}\}$

def. i) $f: V \longrightarrow W$ lineare

Si definisce **nucleo di f**, e si scrive $\operatorname{Ker} f$, come

$\operatorname{Ker} f = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0}\}$

ii) Si definisce **immagine di f**, e si scrive $\operatorname{Im} f$, come

$\operatorname{Im} f = \{\underline{w} \in W \mid \exists \underline{v} \in V \text{ t.c. } \underline{w} = f(\underline{v})\}$

proposizione $\operatorname{Ker} f$ è sottospazio di V
$\operatorname{Im} f$ è sottospazio di W

DIMOSTRAZIONE

$\underline{0} \in \operatorname{Ker} f$: $\quad f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

$f(\underline{0}) = f(\underline{0} + \underline{0}) = f(\underline{0}) + f(\underline{0}) \Rightarrow f(\underline{0}) = \underline{0}$

$\underline{v}, \underline{v}' \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\underline{v} + \underline{v}') = f(\underline{v}) + f(\underline{v}') = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

$f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v}) = \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$

$\underline{0} \in \operatorname{Im} f$ perché $f(\underline{0}) = \underline{0}$

$\underline{w} = f(\underline{v}), \underline{w}' = f(\underline{v}')$: $\quad \underline{w} + \underline{w}' = f(\underline{v}) + f(\underline{v}') = f(\underline{v} + \underline{v}')$

$\alpha \underline{w} = \alpha f(\underline{v}) = f(\alpha \underline{v})$ $\quad \square$

esempio $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \longmapsto (x,y,0)$

$\operatorname{Ker} f =$ asse $z = \{(0,0,z)\}$

$\operatorname{Im} f =$ piano $xy = \{(x,y,0)\}$

$S_0 = \{\underline{x} \mid \underline{x}$ soluzione di $A\underline{x} = 0\} = \{\underline{x} \mid f_A(\underline{x}) = 0\} = \operatorname{Ker} f_A$
In particolare, le soluzioni di un sistema omogeneo formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Chi è $\operatorname{Im} f_A$?
$\operatorname{Im} f_A = \{\underline{y} \in \mathbb{K}^m \mid \exists\, \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ con $\underline{y} = A\underline{x} = x_1 A^1 + \dots + x_n A^n\} = \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n)$
Quindi: il sistema non omogeneo $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\Leftrightarrow$ $\underline{b} \in \operatorname{Im} f_A = \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n)$

Geometria delle soluzioni

Se è risolubile, le soluzioni sono tutti gli $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$ t.c. $A\underline{x} = \underline{b}$ cioè t.c. $f_A(\underline{x}) = \underline{b}$
Sia $f: V \to W$ lineare, sia $\underline{w} \in W$, denotiamo la controimmagine di $\underline{w}$ con:

$$f^{-1}(\underline{w}) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{w}\}$$

<u>NOTA</u> Se $\underline{w} = \underline{0}$ $\quad f^{-1}(\underline{0}) = \operatorname{Ker} f$
Se $\underline{w} \neq \underline{0}$ $\quad f^{-1}(\underline{w})$ può essere vuoto (se $\underline{w} \notin \operatorname{Im} f$)
se $\underline{w} \in \operatorname{Im} f$, $\exists\, \underline{v}$ t.c. $f(\underline{v}) = \underline{w}$

<u>NOTA</u> tutti i $\underline{v}' \in V$ t.c. $f(\underline{v}') = \underline{w}$ si ottengono sommando a $\underline{v}$ un qualunque vettore di $\operatorname{Ker} f$

$$f^{-1}(\underline{w}) = \operatorname{Ker} f + \underline{v} \overset{\text{def}}{=} \{\underline{u} + \underline{v} \mid \underline{u} \in \operatorname{Ker} f\}$$

DIMOSTRAZIONE
$f(\underline{v}) = \underline{w}$ $\quad \underline{u} \in \operatorname{Ker} f$ $\quad f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) = \underline{0} + \underline{w} = \underline{w}$
Sia $\underline{v}'$ t.c. $f(\underline{v}') = \underline{w} = f(\underline{v}) \rightarrow f(\underline{v}') - f(\underline{v}) = \underline{0}$
$f(\underline{v}' - \underline{v}) = \underline{0}$
cioè $\underline{v}' - \underline{v} \in \operatorname{Ker} f$
$\exists\, \underline{u} \in \operatorname{Ker} f$ t.c. $\underline{v}' - \underline{v} = \underline{u} \Rightarrow \underline{v}' = \underline{u} + \underline{v}$

def. Un insieme S ottenuto traslando un sottospazio vettoriale $W \subset V$

$$S = W + \underline{v} = \{\underline{w} + \underline{v} \mid \underline{w} \in W\}$$

si chiama sottospazio affine

<u>esercizio</u>
1) $\underline{v} \in S$ $\quad (\underline{w} = \underline{0})$, $\quad \forall\, \underline{v}' \in S \quad S = W + \underline{v}'$
2) S è sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow \underline{0} \in S \Leftrightarrow \underline{v} \in W$

Applicando ai sistemi lineari $A\underline{x} = \underline{b}$
- è risolubile $\Leftrightarrow \underline{b} \in \operatorname{Im} f_A$
- se è risolubile, le soluzioni sono $S = f_A^{-1}(\underline{b}) = \operatorname{Ker} f_A + \underline{v}$ $\Longrightarrow$ $S = S_0 + \underline{\xi}$
  dove $\underline{v}$ è una soluzione particolare qualunque

soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $\uparrow$ (S_0)

Quindi si deve:
1) capire se è risolubile
2) se è risolubile, trovare una soluzione particolare
3) trovare una base di soluzioni dell'omogeneo associato $A\underline{x} = \underline{0}$ (che dimensione ha?)

def. Si definisce rango di A, rg A, il numero

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) = \dim \operatorname{Im}\{f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : \underline{x} \mapsto A\underline{x}\} = \text{max n° di colonne lin. indip.}$$

Teorema – Formula delle dimensioni

Se $f : V \to W$ è lineare
$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ base di Ker f

Estendiamo a base di V: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$

Siano $\underline{w}_{k+1} = f(\underline{v}_{k+1}), \dots, \underline{w}_n = f(\underline{v}_n)$

Se dimostriamo che i $\underline{w}_j$ sono una base di Im f abbiamo finito.

Sono lin. indip:
$$\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \underline{w}_j = \underline{0} \iff \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(\underline{v}_j) = f\left(\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \underline{v}_j\right) = \underline{0} \iff \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \underline{v}_j \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$$

$\Rightarrow$ essendo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lin. indip., $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$

Generano Im f.

$\underline{w} = f(\underline{v})$

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i \Rightarrow f(\underline{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\underline{v}_i) = \alpha_1 0 + \dots + \alpha_k 0 + \alpha_{k+1} \underline{w} + \dots + \alpha_n \underline{w}_n \in \operatorname{Span}(\underline{w}_{k+1}, \dots, \underline{w}_n) \quad \square$$

esercizio: f lineare $\iff$ f "conserva" le combinazioni lineari
$$f\left(\sum \alpha_i \underline{v}_i\right) = \sum \alpha_i f(\underline{v}_i)$$

corollario $\dim \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = \dim \operatorname{Ker} f_A = \dim \mathbb{K}^n - \dim \operatorname{Im} f_A = n - \operatorname{rg} A$

Teorema di Rouché-Capelli

$A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A}$

dove $\tilde{A} = [A : \underline{b}]$ è la matrice completa del sistema, ottenuta aggiungendo alla matrice incompleta A la colonna $\underline{b}$ come ultima colonna

DIMOSTRAZIONE

Segue da $\underline{v} \in \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) \iff \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}) = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

$\Rightarrow$: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$ $\qquad \supset$ ovvio

$\underline{w} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n + \beta \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + \beta\alpha_i) \underline{v}_i$ cioè $\underline{w} \in \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ $\subset$

$\Leftarrow$: qualunque vettore in $\operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v})$ sta anche in $\operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ per ipotesi

In particolare $\underline{v} \in \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$

$\operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) = \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n, \underline{b})$

$A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\iff \underline{b} \in \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^n) \iff \operatorname{rg}[A^1 \vdots \dots \vdots A^n] = \operatorname{rg}[A^1 \vdots \dots \vdots A^n | \underline{b}]$ $\square$

Quindi le soluzioni del sistema sono:

$$\mathcal{S} = \{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{x} = \underline{b} \} = \underline{\xi} + \mathcal{S}_0$$

Ossia, la soluzione generale è

$$\underline{x} = \underline{\xi} + \sum_{i=1}^{n-k} t_i \, \underline{\xi}^{(i)}$$

con $t_i \in \mathbb{K}$

dove $\underline{\xi}^{(1)}, \dots, \underline{\xi}^{(n-k)}$ è una base di $\mathcal{S}_0$ $\quad (k = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A})$

Metodo di riduzione a scala di Gauss

Idea: modificare il sistema in uno equivalente (con le stesse soluzioni) più "facile" da risolvere

Operazioni elementari sulle righe di $\tilde{A} = [A \,\vdots\, \underline{b}]$

I. scambio di righe $\quad \tilde{A}_i \longleftrightarrow \tilde{A}_j$

II. moltiplicazione di una riga per un numero $\neq 0$ $\quad \tilde{A}_i \longrightarrow \lambda \tilde{A}_i \quad \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$

III. sommare a una riga un multiplo di un'altra riga $\quad \tilde{A}_i \longrightarrow \tilde{A}_i + \lambda \tilde{A}_j \quad i \neq j, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$

> **Proposizione** Le 3 operazioni lasciano invariate le soluzioni
> (cioè il nuovo sistema ha le stesse soluzioni)

DIMOSTRAZIONE

I. chiaro

II. $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \longrightarrow \lambda a_{i1}x_1 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_1 \quad , \lambda \neq 0$

III. $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i, \quad a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j$

$\longrightarrow (a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n = (b_i + \lambda b_j)$

$\Leftrightarrow \underbrace{a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n}_{= b_i} + \lambda(\underbrace{a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n}_{= b_j}) = b_i + \lambda b_j$

Viceversa da $(a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n = (b_i + \lambda b_j)$

$a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = b_j$

si ricava $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ $\square$

> **Proposizione** Le 3 operazioni non cambiano lo spazio generato dalle righe

DIMOSTRAZIONE

I. ovvio

II. $\operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_m) = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \lambda \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_m) \quad \lambda \neq 0$

III. $\operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i, \dots, \underline{v}_m) = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i + \lambda \underline{v}_j, \dots, \underline{v}_m) \quad \lambda \neq 0, \ i \neq j$ $\square$

Nota: lo Span delle colonne in generale cambia

Riduzione a scala di una matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

- se $a_{11} \neq 0$, "uccido" quello che sta sotto a a_{11} con operazioni elementari

$$A_2 \longrightarrow A_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} A_1$$
$$A_3 \longrightarrow A_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} A_1$$

Trovo una matrice $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$

- Se $a'_{22} \neq 0$, "uccido" quello che sta sotto

$$A'_3 \longrightarrow A'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} A'_2$$
$$A'_4 \longrightarrow A'_4 - \frac{a'_{42}}{a'_{22}} A'_2$$

Trovo $A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & \\ \vdots & 0 & a''_{33} & \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots\ a''_{mn} \end{pmatrix}$

- Se trovo $a_{11} = 0$, guardo se nella prima colonna c'è un $a_{i1} \neq 0$
  se $a_{i1} \neq 0$, scambio A_i con A_1 e proseguo come prima.
- Se tutti gli $a_{i1} = 0$, passo alla colonna successiva

Il risultato finale è una matrice a scala con le prime k righe $\neq 0$ e le rimanenti $= 0$

$$\begin{array}{c} \qquad\quad j'_1 \qquad j'_2 \quad j'_3 \quad j'_4 \quad j'_k \\ S = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & p_1 & & & & & \\ \vdots & 0 & 0 \cdots & p_2 & & & \\ \vdots & \vdots & & 0 \cdots & p_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \cdots & p_4 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & p_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 \cdots \\ 0 & 0\,0 & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

gli scalini corrispondono a certe colonne $j'_1 < \dots < j'_k$

Gli elementi $p_1 = S_{1,j'_1}$, $p_2 = S_{2,j'_2}$, ..., $p_k = S_{k,j'_k}$ sono i PIVOT

Notiamo che le colonne contenenti i pivot

$$\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} * \\ p_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad \underline{v}^{(k)} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ p_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ k-esima posiz.}$$

sono a scala: $\underline{v}^{(i)}$ ha tutti 0 a partire dalla $i+1$ esima posizione

Lemma Vettori a scala sono linearmente indipendenti

DIMOSTRAZIONE

$\alpha_1 \underline{v}^{(1)} + \dots + \alpha_k \underline{v}^{(k)} = \underline{0}$

La k-esima si riduce a $\alpha_k p_k = 0$ e $p_k \neq 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$

La $(k-1)$-esima è $\alpha_{k-1} p_{k-1} + \overset{0}{\alpha_k} v^{(k)}_{k-1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k-1} = 0$

Quindi, dal basso verso l'alto, deduco che $\alpha_i = 0$ □

Corollario $rg(S) = k$

DIMOSTRAZIONE

Le colonne dei pivot $S^{j'_1}, \dots, S^{j'_k}$ sono a scala e quindi lin. ind.

Sia $W_k = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m \;\middle|\; y_i = 0,\ i > k \right\} = \text{Span}(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k)$
dove $\underline{e}^i$ sono base canonica di $\mathbb{K}^m$

ha dimensione k e contiene $S^{j'_1}, \dots, S^{j'_k}$ lin. indip.

$\Rightarrow$ sono una base, quindi ogni altra colonna è combinazione di queste □

corollario $\quad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} S = k$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il sistema omogeneo $\quad A\underline{x} = \underline{0}$

Siccome le operazioni elementari non cambiano le soluzioni, si ha:

$$\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \mid S\underline{x} = \underline{0}\}$$

Si è visto $\quad \dim\{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = n - \operatorname{rg} A$

$\qquad\qquad \dim\{\underline{x} \mid S\underline{x} = \underline{0}\} = n - \operatorname{rg} S$

$\Rightarrow n - \operatorname{rg} S = n - \operatorname{rg} A \iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} S \quad \square$

def. Definiamo il **rango per righe** di una matrice A come

$$\widetilde{\operatorname{rg}}(A) = \dim \operatorname{Span}(A_1, \dots, A_m)$$

Teorema $\quad$ Qualsiasi matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} S = \text{n° di pivot di } S = \widetilde{\operatorname{rg}} A$$

DIMOSTRAZIONE

Le prime due uguaglianze sono già viste

Rimane da vedere $\operatorname{rg} A = \widetilde{\operatorname{rg}} A$, $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Se S è una matrice a scala, allora è vero $\operatorname{rg} S = \widetilde{\operatorname{rg}} S$

perché abbiamo visto $\operatorname{rg} S =$ n° di righe $\neq 0$ di S, ma le righe $\neq 0$ di S sono a scala,

quindi sono lin. ind. e quindi $\widetilde{\operatorname{rg}} S =$ n° di righe $\neq 0$ di $S = \operatorname{rg} S$

Dalla prop. 2 segue: Span(righe di A) = Span(righe di S)

Perciò: $\quad \widetilde{\operatorname{rg}}(A) = \widetilde{\operatorname{rg}}(S) = \operatorname{rg}(S) = \operatorname{rg}(A) \quad \square$

esempio $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \in M_{2,4}(\mathbb{R})$

$$\dim\Big(\underbrace{\operatorname{Span}\left(\tbinom{1}{2}, \tbinom{3}{4}, \tbinom{5}{6}, \tbinom{7}{8}\right)}_{\subseteq \mathbb{R}^2}\Big) = \dim\Big(\underbrace{\operatorname{Span}\big((1\ 3\ 5\ 7), (2\ 4\ 6\ 8)\big)}_{\subseteq \mathbb{R}^4}\Big)$$

OSS $\quad$ Per matrici $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A$ può assumere tutti i valori compresi tra 0 e $\min\{m,n\}$

corollario $\quad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$

Dato $\quad A\underline{x} = \underline{b} \qquad \tilde{A} = [A \,\vdots\, \underline{b}]$

Si riduce a scala $\quad \tilde{A} \longrightarrow \tilde{S} = [S \,\vdots\, \underline{c}]$

$$\tilde{S} = \left(\begin{array}{cccc|c} \cdots p_1 & & & & c_1 \\ & \cdots p_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & p_k & c_k \\ \vdots & & & & c_{k+1} \\ & & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \vdots \end{array}\right)$$

Allora il sistema è risolubile $\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} \iff \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} \tilde{S} \iff c_{k+1} = 0$

$(A\underline{x} = \underline{b} \iff S\underline{x} = \underline{c} \qquad$ se $c_{k+1} \neq 0$ ho $0 = c_{k+1}$ impossibile$)$

esempio

$$\begin{cases} -x_4 + x_5 + x_6 = -1 \\ 2x_3 - x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 17x_4 - 12x_5 - 4x_6 = 20 \\ 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 3 \end{cases} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 17 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 20 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 17 & -12 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\tilde{A}_1 \longleftrightarrow \tilde{A}_5} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 17 & -12 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\tilde{A}_3 \to \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 13 & -12 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\tilde{A}_4 \to \tilde{A}_4 - \tilde{A}_2]{\tilde{A}_3 \to \tilde{A}_3 - \tilde{A}_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -14 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\tilde{A}_5 \longleftrightarrow \tilde{A}_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -14 & -14 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[\tilde{A}_5 \to \tilde{A}_5 + 14\tilde{A}_3]{\tilde{A}_4 \to \tilde{A}_4 - 2\tilde{A}_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \tilde{S}$$

$j'_1=1 \quad j'_2=3 \quad j'_3=4$

$\Rightarrow rg\, S = rg\, \tilde{S} = 3$ è risolubile $\quad p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_3 = -1$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 3 \\ 2x_3 - x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 0 \\ -x_4 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

variabili "libere": x_j, dove j non corrisponde a una colonna di pivot (nell'es. x_2, x_5, x_6)

variabili "di pivot": x_j, dove j corrisponde a una colonna di pivot (nell'es.: x_1, x_3, x_4)

<u>OSS</u> assegnando in qualunque modo le variabili libere, quelle di pivot sono univocamente determinate

$-x_4 + x_5 + x_6 = 1 \longrightarrow$ ricavo x_4: $x_4 = x_5 + x_6 - 1$

$2x_3 - x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 0 \longrightarrow$ ricavo x_3: $x_3 = -\frac{x_5 + 3x_6 + 1}{2}$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 3 \longrightarrow$ ricavo x_1

Per trovare 1 soluzione, assegno le variabi libere come mi pare:

per es. $x_2 = x_5 = x_6 = 0$: $x_4 = -1$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{11}{2}$

Trovare la base $\underline{\xi}^{(1)}, \dots, \underline{\xi}^{(n-k)}$ di $A\underline{x} = \underline{0}$ equivale a trovare una base di $S\underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 0 \\ 2x_3 - x_4 + 2x_5 + 4x_6 = 0 \\ -x_4 + x_5 + x_6 = 0 \end{cases} \qquad \text{base di 3 vettori}$$

idea: assegnare le variabili libere 3 volte, in modo da trovare 3 vettori lin. indip

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{completare e ricavare base}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 17 & -12 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \tilde{S} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$j'_1=1 \quad j'_2=3 \quad j'_3=4$

Posizioni pivot: $j'_1 < \dots < j'_k$ $\quad (k = rg\, A = rg\, \tilde{A})$ $\quad$ Posizioni rimanenti: $j''_1 < \dots < j''_{n-k}$

Assegnate le variabi $x_{j''_1}, \dots, x_{j''_{n-k}}$ arbitrariamente, le $x_{j'_1}, \dots, x_{j'_k}$ restano univocamente determinate

Le colonne $S^{j'_1}, \dots, S^{j'_k}$ dei pivot sono lin. ind. (sono a scala). Segue che le $A^{j'_1}, \dots, A^{j'_k}$ corrispondenti sono anch'esse indipendenti e quindi sono base di Span (colonne di A).

Infatti: $\quad \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \mid S\underline{x} = \underline{0}\}$

Allora segue $\quad x_{j'_1} A^{j'_1} + \dots + x_{j'_k} A^{j'_k} = \underline{0} \Leftrightarrow x_{j'_1} S^{j'_1} + \dots + x_{j'_k} S^{j'_k} = \underline{0}$

(perché le $x_{j'_\ell}$ si completano a una soluzione del sistema quando $x_{j''_\ell} = 0$)

<u>NOTA</u>: lo stesso argomento dice che, in generale, la riduzione a scala mantiene l'indipendenza (o dipendenza) lineare delle colonne:

se certe colonne di A sono indipendenti (dipendenti) allora le corrispondenti colonne di S sono indipendenti (dipendenti)

Quindi la riduzione a scala mantiene il rango (quindi $rg\,A = rg\,S$, che dà un'altra dimostrazione che non usa la formula delle dimensioni che rango per riga = rango per colonna)

$$\tilde{S} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\tilde{S}_1 \to \tilde{S}_1 + 2\tilde{S}_3]{\tilde{S}_2 \to \tilde{S}_2 - \tilde{S}_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\tilde{S}_1 \to \tilde{S}_1 - \frac{1}{2}\tilde{S}_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\tilde{S}_3 \to -\tilde{S}_3]{\tilde{S}_2 \to \frac{1}{2}\tilde{S}_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ a scala-ridotta} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_5 + \frac{7}{2}x_6 = \frac{1}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_6 = \frac{1}{2} \\ x_4 - x_5 - x_6 = 1 \end{cases}$$

NOTA Se $\hat{S}$ è a scala ridotta, allora:

· soluzione particolare: $\underline{\xi} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad x_{j'_1} = \hat{S}_{1,n+1} \quad x_{j'_2} = \hat{S}_{2,n+1}, \dots, x_{j'_k} = \hat{S}_{k,n+1}$

$x_{j''_\ell} = 0, \quad \ell = 1, \dots, n-k$

· base di soluzioni dell'omogenea: $\underline{\xi}^{(1)}, \dots, \underline{\xi}^{(n-k)}$

$\underline{\xi}^{(i)}: \quad x_{j''_i} = -1, \quad x_{j''_\ell} = 0 \quad \ell \neq i$

$x_{j'_1} = S_{1,j''_i} \quad x_{j'_2} = S_{2,j''_i}$

nell'esempio $\quad \underline{\xi} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soluzione particolare $(x_2 = x_5 = x_6 = 0)$

$\underline{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = -1, x_5 = x_6 = 0$ $\quad \underline{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = x_6 = 0, x_5 = -1$ $\quad \underline{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \\ 3/2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $x_2 = x_5 = 0, x_6 = -1$

OSS Operazioni di riga corrispondono a moltiplicare a sinistra per una certa matrice:

(i) scambio $A_i \longleftrightarrow A_j$ · moltiplicazione per $\begin{array}{c} \\ i- \\ j- \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 \cdots 1 & & \\ & & 1 \cdots 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$

verificare: moltiplicare il vettore riga canonico

$${}^t[\underline{e}_i] = [0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]$$

$${}^t[\underline{e}_i]\, A = [0 \dots 1 \dots 0] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$$

$$E_1(i,j) = \begin{pmatrix} {}^t\underline{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\underline{e}_{i-1} \\ {}^t\underline{e}_j \\ {}^t\underline{e}_{i+1} \\ \vdots \\ {}^t\underline{e}_{j-1} \\ {}^t\underline{e}_i \\ {}^t\underline{e}_{j+1} \\ \vdots \\ {}^t\underline{e}_n \end{pmatrix}$$

Prendo la matrice I_n e scambiamo le righe i e j

Quando moltiplico a sinistra per $E_1(i,j)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

(ii) moltiplicare per un numero $\lambda \neq 0$ la riga i-esima:

$$E_2(i,\lambda) = \begin{array}{c} \\ i- \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2(i,\lambda) \cdot A = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

(iii) $A_i \longrightarrow A_i + \lambda A_j \quad (j \neq i)$ si ottiene moltiplicando a sinistra per $E_3(i,j,\lambda)$

$E_3(i,j,\lambda) = I + \lambda E_{ij} =$ $\quad$ (E_{ij} matrice con 1 in (i,j) e 0 altrove)

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \cdots \lambda \cdots & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + \lambda A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$
$$\quad j$$

Quindi $\exists L \in M_m(\mathbb{K})$ t.c. $L \cdot A = S$

esercizio tutte le matrici per cui moltiplico sono invertibili, quindi L è invertibile

$E_1^2(i,j) = I_n$

$E_2(i,\lambda)\, E_2(i,\lambda^{-1}) = I_n$

$E_3(i,j,\lambda)\, E_3(i,j,-\lambda) = I_n$

Proposizione $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora
$$rg(A+B) \leq rg A + rg B$$

DIMOSTRAZIONE

Si ha:
$$Span(A^1+B^1, \dots, A^n+B^n) \subset Span(A^1, \dots, A^n) + Span(B^1, \dots, B^n)$$
Quindi $rg(A+B) = \dim(Span(A^1+B^1, \dots, A^n+B^n)) \leq \dim(Span(A^1, \dots, A^n) + Span(B^1, \dots, B^n))$
$$\underset{\text{Grassman}}{\leq} \dim(Span(A^1, \dots, A^n)) + \dim(Span(B^1, \dots, B^n)) \quad \square$$

Corollario Se $M^{(1)}, \dots, M^{(k)}$ sono matrici di rango 1, allora $rg(M^{(1)} + \dots + M^{(k)}) \leq k$

OSS Ogni matrice $A \neq 0$ è somma di matrici di rango 1

Ad esempio: prendo $M^{(j)} = [0|0|\dots|A^j|0|\dots|0]$ $\quad rg M^{(j)} \leq 1$

Prendo solo quelle con $A^j \neq 0$
$$A = \sum_{\substack{j=1 \\ M^{(j)} \neq 0}}^{n} M^{(j)}$$

Teorema Il rango della matrice A è
$$rg A = \min\{h \in \mathbb{N} \mid A = M^{(1)} + \dots + M^{(h)}, \text{ con } rg M^{(i)} = 1\}$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $rg A = k$. Ci sono k colonne lin. indip. e le altre sono combinazione di queste.

Supponiamo che queste colonne siano le prime k.

Allora: $A^{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k+1,j} A^j$, $A^{k+2} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k+2,j} A^j, \dots, A^n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{n,j} A^j$

$$M^{(1)} = [\overbrace{A^1|0|\dots|0}^{k}|\alpha_{k+1,1} A^1|\dots|\alpha_{n,1} A^1]$$
$$M^{(2)} = [0|A^2|\dots|0|\alpha_{k+1,2} A^2|\dots|\alpha_{n,2} A^2]$$
$$\vdots$$
$$M^{(k)} = [0|\dots|0|A^k|\alpha_{k+1,k} A^k|\dots|\alpha_{n,k} A^k]$$

si ha $rg M^{(i)} = 1$ e $A = \sum_{i=1}^{k} M^{(i)}$

Inoltre A non può essere somma di $h<k$ matrici di rango 1 per il corollario precedente. $\square$

$\underline{rg A = 1}$ Se $A^1 \neq \underline{0}$, allora tutte le altre colonne sono multiple di A^1

$A^2 = b_2 A^1, A^3 = b_3 A^1, \dots, A^n = b_n A^1 \quad (b_i \in \mathbb{K})$

$B_1 = [1, b_2, \dots, b_n]$

$$A = A_1 B_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} [1, b_2, \dots, b_n]$$

In generale, siano: $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m$, $\underline{v} = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{K}^n$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} [v_1, \dots, v_n] = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n \\ \vdots & & & \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \dots & u_mv_n \end{bmatrix} = C = (c_{ij}) \qquad c_{ij} = u_i v_j$$

NOTA le colonne sono tutte multiple di $\underline{u}$
e le righe sono tutte multiple di $\underline{v}$ $\quad \Rightarrow rg\, C = 1$

Lemma Tutte le matrici C di rango 1 sono di questa forma cioè $\exists \underline{u} \in \mathbb{K}^m$, $\underline{v} \in \mathbb{K}^n$ t.c. $c_{ij} = u_i v_j$

DIMOSTRAZIONE

Se $C^i \neq 0$, allora $C^j = v_j C^i$ $j \neq i$, $v_j \in \mathbb{K}$

Poniamo ${}^t\underline{v} = [v_1, \dots, v_{i-1}, 1, v_{i+1}, \dots, v_n]$

$\underline{u} = C^i$

Allora: $C = \underline{u} \cdot {}^t\underline{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \cdot [v_1, \dots, v_{i-1}, 1, v_{i+1}, \dots, v_n]$ $\square$

$rg\, C = 1$ $C = \underline{u} \cdot {}^t\underline{v}$ non è unica ($\underline{u}$ e ${}^t\underline{v}$ non sono unici)

se moltiplico $\underline{u}$ per $\alpha \neq 0$ e $\underline{v}$ per α^{-1}: $\underline{u}' = \alpha \underline{u}$, $\underline{v}' = \alpha^{-1}\underline{v}$ $\Rightarrow \underline{u}' \cdot {}^t\underline{v}' = \underline{u} \cdot {}^t\underline{v}$

esercizio Se $\underline{u}, \underline{u}' \in \mathbb{K}^m$ e $\underline{v}, \underline{v}' \in \mathbb{K}^n$ sono tali che

$\underline{u} \cdot {}^t\underline{v} = \underline{u}' \cdot {}^t\underline{v}' \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ t.c. $\underline{u}' = \alpha \underline{u}$, $\underline{v}' = \alpha^{-1} \underline{v}$

corollario rango per righe = rango per colonne

DIMOSTRAZIONE

rg_c: rango per colonne, rg_r: rango per righe

Si ha $rg_c(M) = 1 \Leftrightarrow rg_r(M) = 1$

perché in entrambi i casi si ottiene una matrice $c_{ij} = u_i v_j$

Il lemma vale anche per le righe. Quindi $rg_c = rg_r$ $\square$

APPLICAZIONI LINEARI

$f: V \to W$ $\quad \dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \ker f$

Quindi $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$

Proposizione f iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ $\underline{0} \in \operatorname{Ker} f$: poiché f iniettiva, $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f$, $\underline{v} \neq 0 \Rightarrow f(\underline{v}) = \underline{0} = f(\underline{0})$ $\lightning$

$\Leftarrow$ $f(\underline{v}) = f(\underline{w}) \Rightarrow f(\underline{v} - \underline{w}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} - \underline{w} \in \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

$\Rightarrow \underline{v} - \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{w} \Rightarrow f$ iniettiva $\square$

Quindi : f iniettiva $\Rightarrow f$ conserva la dimensione $(\dim \operatorname{Im} f = \dim V)$

f iniettiva $\Rightarrow \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lin. indip. $\Rightarrow f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ lin. indip.

Lemma $U \subset V$ sottospazio vettoriali

Allora $f(U) = \{\underline{w} \in W \mid \underline{w} = f(\underline{u})$ per qualche $\underline{u} \in U\}$ è sottospazio vettoriale di W

f manda sottospazi in sottospazi

Si ha:

$$\dim f(U) = \dim U - \dim(U \cap \operatorname{Ker} f)$$

In particolare : f iniettiva $\Rightarrow f$ conserva la dimensione dei sottospazi

DIMOSTRAZIONE

$\underline{w} = f(\underline{u})$, $\underline{w}' = f(\underline{u}') \Rightarrow \underline{w} + \underline{w}' = f(\underline{u}) + f(\underline{u}') = f(\underbrace{\underline{u} + \underline{u}'}_{\in U}) \in f(U)$

$\alpha \underline{w} = \alpha f(\underline{u}) = f(\underbrace{\alpha \underline{u}}_{\in U}) \in f(U)$

Si può vedere come

$f(U) = \operatorname{Im} f|_U$

$f|_U : U \to W$ è la restrizione di f a U

Per la formula delle dimensioni

$\dim f(U) = \dim \operatorname{Im} f|_U = \dim U - \dim \ker f|_U$

si ha: $\operatorname{Ker} f|_U = U \cap \operatorname{Ker} f$ $\square$

esempio $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y, z) = (x, y, 0)$

$\operatorname{Ker} f = (0, 0, z)$

$U \subset \mathbb{R}^3$ con $\dim U = 2$

Se $U \supset$ asse z $\quad \dim f(U) = 2 - 1 = 1$

altrimenti $\dim f(U) = 2$

def. $f: V \to W$ è isomorfismo se è lineare bigettiva

Oss f isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W$

Proposizione $f: V \longrightarrow W$ lineare, con $\dim V = \dim W$
Allora f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f è surgettiva $\Leftrightarrow$ f è isomorfismo

DIMOSTRAZIONE
Dalla formula delle dimensioni: f iniettiva $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V = \dim W$ □

esercizio $f: V \longrightarrow W$ allora
f iniettiva $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$
f surgettiva $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$
f isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W$

def. Dati V e W sp vett su $\mathbb{K}$, indichiamo
$\mathcal{L}(V,W) = \{ f: V \to W \mid f \text{ lineare} \}$ oppure $\operatorname{Hom}(V,W)$

Teorema Fissata una base $\mathcal{B}$ di V, l'applicazione che associa ad una $f \in \mathcal{L}(V,W)$ la restrizione $f|_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \to W$, è una bigezione $|_{\mathcal{B}}: \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow W^{\mathcal{B}}$ (tutte le funzioni da $\mathcal{B}$ in W)

In altri termini: se $\mathcal{B} = \{\underline{v}_j\}_{j \in J}$, l'applicazione lineare $f: V \longrightarrow W$ è l'unica applicazione lineare che assume i valori $f(\underline{v}_j) = \underline{w}'_j \in W$, $j \in J$
Inoltre fissati comunque dei vettori $w'_j \in W$, $j \in J$, esiste un'unica applicazione $f: V \longrightarrow W$ lineare tale che $f(\underline{v}_j) = \underline{w}'_j$
Si può riassumere dicendo che un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base fissata.

DIMOSTRAZIONE
$\forall \underline{v} \in V$ c'è un'unica espressione $\underline{v} = \sum_{j \in J} x_j \underline{v}_j$ (con $x_j \neq 0$ solo per un numero finito di termini)
Quindi $f(\underline{v}) = f\left(\sum_{j \in J} x_j \underline{v}_j\right) = \sum_{j \in J} x_j f(\underline{v}_j)$
quindi $f(\underline{v})$ è determinata univocamente dagli $f(\underline{v}_j)$
Viceversa, assegnando comunque i $\underline{w}'_j \in W$, $j \in J$,
definiamo l'applicazione $f(\underline{v}) = \sum_{j \in J} x_j \underline{w}'_j$.
- $f(\underline{v}_j) = \underline{w}'_j$ (perché $\underline{v}_j = 1 \cdot \underline{v}_j + 0 \cdot$ altri $\underline{v}_k$)
- è lineare

se $\underline{v}' = \sum_{j \in J} x'_j \underline{v}_j$, si ha che $\underline{v} + \underline{v}' = \sum_{j \in J} (x_j + x'_j) \underline{v}_j$
quindi $f(\underline{v} + \underline{v}') = f\left(\sum_{j \in J} (x_j + x'_j) \underline{v}_j\right) = \sum_{j \in J} (x_j + x'_j) \underline{w}'_j = \sum_{j \in J} x_j \underline{w}'_j + \sum_{j \in J} x'_j \underline{w}'_j = f(\underline{v}) + f(\underline{v}')$
se $\alpha \underline{v} = \sum_{j \in J} \alpha x_j \underline{v}_j$, allora $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f\left(\sum_{j \in J} x_j \underline{v}_j\right) = \alpha f(\underline{v})$ □

Torniamo al caso di dim finita.
$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V, $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W

$\varphi_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow \mathbb{K}^n$
$\underline{v} \longmapsto [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$ se $\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\varphi_{\mathcal{B}'}: W \longrightarrow \mathbb{K}^m$
$\underline{w} \longmapsto [\underline{w}]_{\mathcal{B}'}$ se $\underline{w} = y_1 \underline{w}_1 + \dots + y_m \underline{w}_m$, allora $[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare
Si ha $f(\underline{v}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \underline{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\underline{v}_j)$
Applichiamo $\varphi_{\mathcal{B}'}$:
$$[f(\underline{v})]_{\mathcal{B}'} = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j f(\underline{v}_j)\right]_{\mathcal{B}'} = \sum_{j=1}^{n} x_j [f(\underline{v}_j)]_{\mathcal{B}'} = \left[[f(\underline{v}_1)]_{\mathcal{B}'} \middle| [f(\underline{v}_2)]_{\mathcal{B}'} \middle| \dots \middle| [f(\underline{v}_n)]_{\mathcal{B}'} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ho introdotto:

$$M^{B}_{B'}(f) = \left[[f(\underline{v}_1)]_{B'} \middle| [f(\underline{v}_2)]_{B'} \middle| \dots \middle| [f(\underline{v}_n)]_{B'} \right] \in M(m,n,\mathbb{K})$$

la matrice associata ad f nelle basi B e B'.

Si ha la relazione fondamentale:

$$[f(\underline{v})]_{B'} = M^{B}_{B'}(f) \cdot [\underline{v}]_B$$

Quindi se $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ sono le coordinate di $\underline{v}$ nella base B di V.

$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ sono le coordinate di $f(\underline{v})$ nella base B' di W

Allora $\underline{y} = A\underline{x}$ dove $A = M^{B}_{B'}(f)$

In altre parole, la $f: V \longrightarrow W$ corrisponde, tramite passaggio alle coordinate, alla $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, $\underline{x} \longmapsto A\underline{x}$

Possiamo riassumere la situazione nel diagramma:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & W \arrow[d, "\varphi_{B'}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "f_A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

è un diagramma commutativo

$\varphi_{B'} \circ f = f_A \circ \varphi_B \Rightarrow f_A = \varphi_{B'} \circ f \circ \varphi_B^{-1}$

esempio

φ_B è un isomorfismo e manda isomorficamente $\operatorname{Ker} f$ in $\operatorname{Ker} f_A$

Similmente $\varphi_{B'}$ manda isomorficamente $\operatorname{Im} f$ in $\operatorname{Im} f_A$

Quindi $\dim \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rg} A$ e $\dim \operatorname{Ker} f_A = n - \operatorname{rg} A$

(e posso usare Gauss per trovare una base di $\operatorname{Ker} f_A$ e tornare indietro trovando una base di $\operatorname{Ker} f$)

Abbiamo trovato un'applicazione:

$$M^{B}_{B'} : \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow M(m,n,\mathbb{K})$$
$$f \longmapsto M^{B}_{B'}(f)$$

Teorema

1) $\mathcal{L}(V,W)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con somma $(f+g)(\underline{v}) := f(\underline{v}) + g(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$

e prodotto esterno $(\alpha f)(\underline{v}) := \alpha(f(\underline{v})) \quad \forall \underline{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

2) L'applicazione $M^{B}_{B'}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

DIMOSTRAZIONE

1) si verificano facilmente tutti gli assiomi

ad es., l'elemento neutro della somma: $e(\underline{v}) = \underline{0}$, $\forall \underline{v} \in V$

l'opposto di f è la funzione $(-f)(\underline{v}) = -(f(\underline{v}))$

2) $M^{B}_{B'}$ è lineare

$M^{B}_{B'}(f+g)$ ha come colonna j-esima $[(f+g)(\underline{v}_j)]_{B'} = [f(\underline{v}_j) + g(\underline{v}_j)]_{B'} = \underbrace{[f(\underline{v}_j)]_{B'}}_{\substack{\text{j-esima col.} \\ \text{di } M^{B}_{B'}(f)}} + \underbrace{[g(\underline{v}_j)]_{B'}}_{\substack{\text{j-esima col.} \\ \text{di } M^{B}_{B'}(g)}}$

$M^{B}_{B'}(\alpha f)$ ha come colonna j-esima $[(\alpha f)(\underline{v}_j)]_{B'} = [\alpha(f(\underline{v}_j))]_{B'} = \alpha\,[f(\underline{v}_j)]_{B'}$ = j-esima col. di $M^{B}_{B'}(f)$

$M^{B}_{B'}(f)$ è iniettiva: $M^{B}_{B'}(f) = 0$ (matrice nulla) $f \in \operatorname{Ker} M^{B}_{B'}$

per la relaz. fondamentale, ho che $[f(\underline{v})]_{B'} = \underline{0} \in \mathbb{K}^n$, $\forall \underline{v} \in V$

cioè $f(\underline{v}) = \underline{0}$, $\forall \underline{v} \in V$, quindi è l'applicazione nulla

$M^{B}_{B'}(f)$ è suriettiva: data $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, sia $\underline{w}'_j \in W$ l'unico vettore in W t.c. $[\underline{w}'_j]_{B'} = A^j$

Allora usando il teorema iniziale: (cioè $\underline{w}'_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \underline{w}_k$)

$\exists$ unica $f: V \longrightarrow W$ tale che $f(\underline{v}_j) = \underline{w}'_j$. Per costruzione $M^{B}_{B'}(f) = A$ $\square$

Abbiamo.

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[rr, mapsto] & & M^B_{B'}(f) \\
\mathcal{L}(V,W) \arrow[rr] \arrow[dr] & & M_{m,n}(\mathbb{K}) \arrow[dl] \\
& \mathcal{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m) \arrow[ur, bend right, "M^e_{e'}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$f \longmapsto f_A \longleftarrow\!\shortmid A \qquad A = M^B_{B'}(f)$$

e base canonica di $\mathbb{K}^n$
e' base canonica di $\mathbb{K}^m$

NOTA $f_A : \underline{x} \longmapsto A\underline{x}$

$M^e_{e'}(f_A) = A$

$1°$ col. di $M^e_{e'}(f_A) = [f_A(\underline{e}_1)]_{e'} = [A\underline{e}_1]_{e'} = [A^1]_{e'} = A^1$ $\longrightarrow$ sono tutti iso (diagramma commutativo)

corollario $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$

NOTA Nell'isomorfismo $M^B_{B'}$, alla base canonica $E^{(ij)}$ di $M_{m,n}(\mathbb{K})$ corrisponde la $f^{(ij)} : V \longrightarrow W$ data da $f^{(ij)}(\underline{v}_j) = \underline{w}_i$, $f^{(ij)}(\underline{v}_k) = \underline{0}$ se $k \neq j$

esempio $V = W = M_2(\mathbb{R})$ $\quad f : V \longrightarrow W$ $\quad f(X) = AX - XA$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) f è lineare

2) determinare $M^B_{B'}(f)$ $\qquad B = B' = \left\{ \underset{E^{(11)}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E^{(12)}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E^{(21)}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{E^{(22)}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$

$M = M^B_{B'}(f) \in M_4(\mathbb{R})$

I colonna: $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)E^{(12)} + E^{(21)}$

II colonna: $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)E^{(11)} + E^{(22)}$

III colonna: $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E^{(11)} + (-1)E^{(22)}$

IV colonna: $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E^{(12)} + (-1)E^{(21)}$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La relazione fondamentale diventa:

$$\left[f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} -b+c \\ -a+d \\ a-d \\ b-c \end{bmatrix}$$ sono le coordinate

con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE^{(11)} + bE^{(12)} + cE^{(21)} + dE^{(22)}$

$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (-b+c)E^{(11)} + (-a+d)E^{(12)} + (a-d)E^{(21)} + (b-c)E^{(22)} = \begin{pmatrix} -b+c & -a+d \\ a-d & b-c \end{pmatrix}$$

3) Determinare dimensione e base per $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$

$\operatorname{rg}(M^B_{B'}(f)) = 2 \longrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f_M = 2$

$\dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2$

osservo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$ e sono lin. indip.

dunque $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}(I, A)$

Si può anche fare il conto: trovo una base di $M\underline{x} = \underline{0}$. Riduco a scala:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

allora base di $\operatorname{Ker} f$: $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ assegno $(0,1),(1,0)$ a x_3 e x_4

allora una base è data da $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

quindi la base di $\operatorname{Ker} f$ è: $1 \cdot E^{(11)} + 0 \cdot E^{(12)} + 0 \cdot E^{(21)} + 1 \cdot E^{(22)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$0 \cdot E^{(11)} + 1 \cdot E^{(12)} + 1 \cdot E^{(21)} + 0 \cdot E^{(22)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

esempio $V = \mathbb{K}_n[x]$ $\quad f(p(x)) = p(x) + x \cdot \frac{d}{dx} p(x)$

$B = B' = \{x^j,\ j = 0, 1, \dots, n\}$ base canonica

$$M^{B}_{B'}(f) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & & n+1 \end{array}\right]$$

esercizio $f(p(x)) = \sum_{i=0}^{n} p(i)\, x^i$

Calcolare $M^{B}_{B'}(f)$, basi canoniche

esercizio $V = \mathbb{R}^4$, $W = \mathbb{R}^5$

siano $U \subset V$ con $\dim U = 2$ e $Z \subset W$ con $\dim Z = 3$

a) dimostrare che $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(V,W) \mid f(U) \subset Z\}$ è ssp vett. di $\mathcal{L}(V,W)$

b) calcolare $\dim \mathcal{F}$

suggerimento: scegliere basi (di partenza e d'arrivo) "adattate" al problema, guardare che forma hanno le matrici e vedere che le matrici associate saranno $\left[\begin{array}{cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \end{array}\right]$

Visto $\quad \underset{B\ \ B'}{\mathcal{L}(V,W)} \ni f \longmapsto M^{B}_{B'}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$[f(\underline{v})]_{B'} = M^{B}_{B'}(f)\, [\underline{v}]_B$

Date $f: V \longrightarrow W$ $\quad g: W \longrightarrow Z$ $\quad V, W, Z$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$

$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$

$g \circ f: V \longrightarrow Z$ $\qquad (g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$

proposizione $\quad f, g$ lineari $\Rightarrow g \circ f: V \longrightarrow Z$ è lineare

DIMOSTRAZIONE

$(g \circ f)(\underline{v} + \underline{w}) = g(f(\underline{v} + \underline{w})) = g(f(\underline{v}) + f(\underline{w})) = g(f(\underline{v})) + g(f(\underline{w}))$

$(g \circ f)(\alpha \underline{v}) = g(f(\alpha \underline{v})) = g(\alpha f(\underline{v})) = \alpha\, g(f(\underline{v}))$ $\square$

Proprietà

· associatività $\quad V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

· $f_1, f_2 : V \longrightarrow W$ $\qquad g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$

$g_1, g_2 : W \longrightarrow Z$ $\qquad (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$

· $c \in \mathbb{K}$ $\qquad (cg) \circ f = g \circ (cf) = c(g \circ f)$

def. Chiamiamo rango di un'applicazione lineare f:

$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$

esercizio
1) $g \circ f$ iniettiva $\Rightarrow f$ iniettiva
2) $g \circ f$ sorgettiva $\Rightarrow g$ sorgettiva
3) $\operatorname{Ker}(g \circ f) \supset \operatorname{Ker} f$; $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$
4) $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min\{\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\}$

   $\operatorname{Im}(g \circ f) = g(\operatorname{Im} f) \Rightarrow \dim g(\operatorname{Im} f) \leq \dim \operatorname{Im} f$
5) $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim \operatorname{Im} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g)$

   suggerimento: applicare la formula delle dimensioni a $g|_{\operatorname{Im} f} : \operatorname{Im} f \longrightarrow Z$

def. Data $f: V \longrightarrow V$ lineare, f si dice **endomorfismo** di V o **operatore** di V.
L'insieme degli endomorfismi di V si indica con $\mathcal{L}(V)$ o $End(V)$.

<u>oss</u> $f: V \longrightarrow V$ è invertibile se $\exists\, g: V \longrightarrow V$ t.c.
$g \circ f = f \circ g = id_V$ $\qquad id_V : V \longrightarrow V$, $id_V(v) = v \quad \forall v \in V$
$\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$ ha la composizione come operazione, con id_V elemento neutro

Proposizione Sono equivalenti le seguenti affermazioni per un endomorfismo f:
i) $f: V \to V$ è invertibile
ii) f è isomorfismo
iii) f è iniettiva
iv) f è surgettiva
v) $rg\, f = \dim V$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$
$\mathcal{B} \qquad \mathcal{B}' \qquad \mathcal{B}''$ $\qquad \mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{B}'$ base di W, $\mathcal{B}''$ base di Z

voglio calcolare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f)$

Teorema Si ha:
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$$
(prodotto riga per colonna)

Per ricorsione si generalizza:
$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[rrrr, bend right, "f_{k-1} \circ \dots \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1"'] & V_2 \arrow[r, "f_2"] & V_3 \arrow[r, "f_3"] & \dots \arrow[r, "f_{k-1}"] & V_k \end{tikzcd}$$
$\mathcal{B}_1 \qquad \mathcal{B}_2 \qquad \mathcal{B}_3 \qquad \qquad \mathcal{B}_k$

$$M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_k}(f_{k-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1) = M^{\mathcal{B}_{k-1}}_{\mathcal{B}_k}(f_{k-1}) \cdot \dots \cdot M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_3}(f_2) \cdot M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f_1)$$

DIMOSTRAZIONE
La j-esima colonna di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f)$ è $[g(f(v_j))]_{\mathcal{B}''}$
con $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$
Applicando la formula fondamentale a g:
$[g(f(v_j))]_{\mathcal{B}''} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g)\ [f(v_j)]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g) \cdot$ (j-esima colonna di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$)

Quindi per definizione di prodotto riga per colonna $\left((AB)^j = A \cdot B^j\right)$ si ha:
$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ $\square$

corollario $rg(AB) \leq \min\{rg A, rg B\}$

DIMOSTRAZIONE
Consideriamo $f_A, f_B, f_{AB} = f_A \circ f_B$
e applichiamo l'esercizio sopra $\square$

$id_V : V \longrightarrow V$ $\quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_V) = I$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad [id_V(v_j)]_{\mathcal{B}} = [v_j]_{\mathcal{B}} = e_j$

$f: V \longrightarrow V$ invertibile, con inversa $f^{-1}: V \longrightarrow V$ $\quad f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id_V$

$$\underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{B}'}{V} \xrightarrow{f^{-1}} \underset{\mathcal{B}}{V}$$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1} = id_V) = I = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

quindi le $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ e $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$ sono invertibili e

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = (M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}))^{-1}$

esercizio $\quad rg\, f = rg(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)) \quad \forall \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi

OSS $\quad A, B$ invertibili in $M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AB$ è invertibile: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e $((AB)^{-1})^{-1} = AB$

Quindi le matrici invertibili in $M_n(\mathbb{K})$ formano un gruppo rispetto al prodotto riga per colonna

def. Il gruppo delle matrici invertibili in $M(n, \mathbb{K})$ si denota con $GL_n(\mathbb{K})$ (gruppo lineare)

esempio $\quad GL_2(\mathbb{R}) = \{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid rg A = 2 \}$

$V \xrightarrow{f} W$

$\mathcal{B} \quad \mathcal{B}' \rightsquigarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

$\mathcal{C} \quad \mathcal{C}' \rightsquigarrow M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(f)$

Teorema di cambiamento di base

Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi di V, e $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$ basi di W, $f: V \longrightarrow W$ lineare.

Allora vale:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(id_W) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

secondo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} {}_{\mathcal{B}}V & \xrightarrow{f} & W_{\mathcal{B}'} \\ {\scriptstyle id_V}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle id_W} \\ {}_{\mathcal{C}}V & \xrightarrow{f} & W_{\mathcal{C}'} \end{array}$$

In altre parole: se $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$, $B = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(f)$, allora

$\exists\, P \in GL_m(\mathbb{K}),\ Q \in GL_n(\mathbb{K})$ $(n = \dim V,\ m = \dim W)$ t.c. $B = PAQ$

DIMOSTRAZIONE

Ho che $\quad f = id_W \circ f \circ id_V$

Per il teorema sopra: $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(id_W \circ f \circ id_V) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(id_W) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(f) = \underbrace{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(id_W)}_{\substack{\text{mat. quad} \\ m \times m}} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot \underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)}_{\substack{\text{mat. quad.} \\ n \times n}} \qquad \square$$

La relazione $A \sim B \Leftrightarrow \exists\, P \in GL_m(\mathbb{K}),\ Q \in GL_n(\mathbb{K})$

in $M_{m,n}(\mathbb{K})$ $\quad$ t.c. $\quad B = PAQ$

è una relazione di equivalenza

- riflessiva: $A \sim A$ con $P = I_m$, $Q = I_n$
- simmetrica: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ $\quad B = PAQ \Rightarrow A = P^{-1}BQ^{-1}$
- transitiva: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ $\quad B = PAQ,\ C = P'BQ' \Rightarrow C = P'PAQQ'$

def. SD - equivalenza (sinistra - destra equivalenza)

Due matrici $A, B \in M(m,n,\mathbb{K})$ si dicono SD - equivalenti se esistono $P \in GL_m(\mathbb{K}), Q \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = PAQ$

Quindi $M_{m,n}(\mathbb{K})$ è partizionato in classi di equivalenza

Problema: trovare un insieme di invarianti che caratterizzano la classe di equivalenza

esercizio

1) $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ Se f è surgettiva $\Rightarrow rg(g \circ f) = rg(g)$

Se g è iniettiva $\Rightarrow rg(g \circ f) = rg(f)$

In particolare, se f isomorfismo $\Rightarrow rg(g \circ f) = rg(g)$

se g isomorfismo $\Rightarrow rg(g \circ f) = rg(f)$

2) si deduce che se A è invertibile $\Rightarrow rg(AB) = rg(B)$

se B è invertibile $\Rightarrow rg(AB) = rg(A)$

Quindi il rango è un invariante per SD - equivalenza, cioè

se $A \sim_{SD} B$, allora $rg A = rg B$

Teorema $f: V \longrightarrow W$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $rg(f) = r$.

Allora $\exists$ basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{B}'$ di W t.c.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

DIMOSTRAZIONE

Partiamo da una base per $\operatorname{Ker} f$ che ha dimensione $n-r$:

$\underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n$ e completiamo a base di V: $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n\}$

Sia $f(\underline{v}_1) = \underline{w}_1, \dots, f(\underline{v}_r) = \underline{w}_r$ questi vettori sono lin. indip. in W

(dim. uguale a quella fatta per la formula delle dimensioni)

Completiamo a una base $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r, \underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_m\}$

Allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ assume la forma scritta sopra. □

Teorema $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora

A è SD-equivalente a $B \Leftrightarrow rg A = rg B$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: visto sopra

$\Leftarrow$: $rg A = rg B$

Facciamo vedere che se $rg(A) = r \Rightarrow A \underset{SD}{\sim} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Per transitività, questo basterà.

Associamo ad A la $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ $f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$

la matrice associata ad f_A nelle basi canoniche è la matrice A stessa

$rg(f_A) = rg(A) = r$ per il th. sopra $\exists$ basi $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{K}^m$ t.c.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f_A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per il th. di cambiamento di base, $\exists P, Q$ invertibili t.c.

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f_A) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = PAQ$$ □

Quindi le classi di SD-equivalenza sono caratterizzate dal rango.

Si dirà che il rango è un invariante completo.

C'è una classe di equivalenza per ogni possibile rango: $0, 1, \dots, \min(m,n)$

OSS Se considerassi le classi di equivalenza di $M_{m,n}(\mathbb{K})$ permettendo solo la moltiplicazione a sinistra per $P \in GL_m(\mathbb{K})$, posso ridurre A a scala ridotta, ma mi rimangono "parametri liberi".

Caso degli endomorfismi $f: V \longrightarrow V$

è naturale scegliere la stessa base in partenza e in arrivo $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$

si è visto: $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(id_V) = (M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_V))^{-1}$

Teorema di cambiamento di base per endomorfismi

Si ha:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_V) = (M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_V))^{-1} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \; M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

$$\begin{array}{ccc} {}^{\mathcal{B}}V & \xrightarrow{f} & V^{\mathcal{B}} \\ \uparrow id_V & & \downarrow id_V \\ {}_{\mathcal{E}}V & \xrightarrow{f} & V_{\mathcal{E}} \end{array}$$

Quindi se $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ $\quad B = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ vale

$$B = P^{-1}AP$$

$P \in GL_n(\mathbb{K})$ è la matrice di cambio base $\quad P = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_V)$

def. Relazione di similitudine

Due matrici $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ si dicono simili, $A \sim B$, se $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = P^{-1}AP$

È una relazione di equivalenza: $M_n(\mathbb{K})$ è partizionato in classi di matrici simili

rango è invariante: $rg\, A = rg\, B$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad AI = IA \quad \forall A$

quindi $P^{-1}IP = P^{-1}P = I$ $\quad \longrightarrow$ I è simile solo a se stessa

quindi ogni altra matrice di rango 2 non è simile a I

def. Data una matrice A, si definisce la traccia di A come:

$$tr\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposizione $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si ha:

$$tr(AB) = tr(BA) \quad (\text{anche se } AB \neq BA)$$

DIMOSTRAZIONE

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = tr(BA) \;\square$$

corollario $tr(P^{-1}AP) = tr(P^{-1}(AP)) = tr((AP)P^{-1}) = tr(A(PP^{-1})) = tr(A \cdot I) = tr(A)$

Rango e traccia non bastano come invariante per similitudine.

costruzioni di spazi vettoriali

1) Se V e W sono sp vett su $\mathbb{K}$, il prodotto cartesiano $V\times W=\{(\underline{v},\underline{w})\mid \underline{v}\in V, \underline{w}\in W\}$ è uno sp. vett. con somma $(\underline{v},\underline{w})+(\underline{v}',\underline{w}')=(\underline{v}+\underline{v}',\underline{w}+\underline{w}')$

Gli assiomi si verificano facilmente

ad es. l'elemento neutro è $(\underline{0},\underline{0})$

l'opposto di $(\underline{v},\underline{w})$ è $(-\underline{v},-\underline{w})$

Se $\mathcal{B}=\{\underline{v}_i\}_{i\in I}$ base di V, $\mathcal{B}'=\{\underline{w}_j\}_{j\in J}$ base di W

allora $\{(\underline{v}_i,\underline{0}), i\in I\}\cup\{(\underline{0},\underline{w}_j), j\in J\}$ è una base di $V\times W$

Quindi $\dim V\times W=\dim V+\dim W$

Si hanno proiezioni: $p_V: V\times W\longrightarrow V$ $\quad p_V((\underline{v},\underline{w}))=\underline{v}$

$p_W: V\times W\longrightarrow W$ $\quad p_W((\underline{v},\underline{w}))=\underline{w}$

e immersioni. $i_V: V\longrightarrow V\times W$ $\quad i_V(\underline{v})=(\underline{v},\underline{0})$

$i_W: W\longrightarrow V\times W$ $\quad i_W(\underline{w})=(\underline{0},\underline{w})$

con $p_V\circ i_V=id_V$ $\quad p_W\circ i_W=id_W$

Posso fare il prodotto di più sp. vett $V_1,V_2,\dots,V_k$:

$V_1\times\dots\times V_k=\{(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k)\mid \underline{v}_i\in V_i\}$ $\qquad \dim V_1\times\dots\times V_k=\sum_{i=1}^{k}\dim V_i$

esercizio $\quad U=V\oplus W$ somma diretta.

l'applicazione $f: V\times W\longrightarrow U=V\oplus W$ $\quad f((\underline{v},\underline{w}))=\underline{v}+\underline{w}$ è un isomorfismo

2) Spazio vettoriale V_X generato da un insieme qualunque X su un campo $\mathbb{K}$

È l'insieme di tutte le combinazioni finite formali di elementi in X a coefficienti in $\mathbb{K}$

$V_X=\{\sum_{x\in X}\alpha_x x\mid \alpha_x\in\mathbb{K},\ \alpha_x\neq 0$ solo per un numero finito di $x\in X\}$

La somma si fa:

$$\sum_{x\in X}\alpha_x x+\sum_{x\in X}\beta_x x=\sum_{x\in X}(\alpha_x+\beta_x)x$$

lo $\underline{0}$ è l'espressione dove tutti gli $\alpha_x=0$

Per def, una base di V_X è X stesso, perché due combinazioni lineari formali sono uguali, se e solo se i coefficienti sono gli stessi.

esempio $\quad \mathbb{K}=\mathbb{F}_2$, allora ogni $\underline{v}\in V_X$ si scrive $\underline{v}=\sum\alpha_x x=\sum_{x\in I(\underline{v})}x$

dove $I(\underline{v})\subset X$ è il sottoinsieme finito di X in cui $\alpha_x=1$

Ne segue che V_X è isomorfo al seguente sp. vett su $\mathbb{F}_2$.

Sia $\mathcal{P}_{fin}(X)=\{I\subset X\mid I \text{ finito}\}$

$I+J=I\Delta J=(I\setminus J)\cup(J\setminus I)$ $\qquad$ (differenza simmetrica)

$\alpha\in\mathbb{F}_2$: $\quad \alpha I=\emptyset$ $\quad$ se $\alpha=0$

$\alpha I=I$ $\quad$ se $\alpha=1$

$\mathcal{P}_{fin}(X)$ è sp. vett su $\mathbb{F}_2$

l'el. neutro $\emptyset$: $\quad I+J=\emptyset$

esercizio $\quad X$, V_X su $\mathbb{F}_3$ corrisponde a $\{(A,B)\in\mathcal{P}_{fin}(X)\times\mathcal{P}_{fin}(X)\mid A\cap B=\emptyset\}$

con qualche operazione di somma

$$(A_1,B_1)\oplus(A_2,B_2)=\Big(\big((A_1\Delta A_2)\setminus(B_1\cup B_2)\big)\cup(B_1\cap B_2)\big),\ \big((B_1\Delta B_2)\setminus(A_1\cup A_2)\big)\cup\big((A_1\cap A_2)\big)\Big)$$

NOTA $\quad V$ sp vett qualunque $\quad V\cong V_{\mathcal{B}}$

3) Spazio quoziente

def. Sia V sp vett su $\mathbb{K}$, $U \subset V$ sottospazio vettoriale

Definiamo la relazione d'equivalenza $\underline{v} \sim \underline{v}' \Leftrightarrow \underline{v} - \underline{v}' \in U$

- riflessiva $\underline{v} - \underline{v} = \underline{o} \in U$
- simmetrica $\underline{v} - \underline{v}' \in U \Rightarrow \underline{v}' - \underline{v} = -(\underline{v} - \underline{v}') \in U$
- transitiva $\underline{v} - \underline{v}' \in U$, $\underline{v}' - \underline{v}'' \in U \Rightarrow \underline{v} - \underline{v}' - (\underline{v}' - \underline{v}'') = \underline{v} - \underline{v}'' \in U$

Allora lo spazio V si partiziona in classi di equivalenza

Ogni classe $\mathcal{C}$ è fatta da vettori tra loro equivalenti.

Se conosco $\underline{v} \in \mathcal{C}$, tutti gli altri si trovano sommando un qualunque vettore di U:

$$\mathcal{C} = \underline{v} + U$$

Indichiamo con $[\underline{v}]_U$ ($[\underline{v}]$ se U è sottinteso; da non confondere con le coordinate)

def. Indichiamo con V/U l'insieme delle classi di equivalenza, lo spazio quoziente di V per U.

> **Proposizione** V/U è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, con somma $[\underline{v}] + [\underline{v}'] = [\underline{v} + \underline{v}']$ e prodotto esterno $\alpha[\underline{v}] = [\alpha\underline{v}]$

DIMOSTRAZIONE

la definizione di + non dipende dal rappresentante:

se $\hat{\underline{v}} = \underline{v} + \underline{u}$, $\hat{\underline{v}}' = \hat{\underline{v}}' + \underline{u}'$ $\Rightarrow$ $\hat{\underline{v}} + \hat{\underline{v}}' = \underline{v} + \underline{v}' + \underbrace{(\underline{u} + \underline{u}')}_{\in U}$ $\Rightarrow \hat{\underline{v}} + \hat{\underline{v}}' \sim \underline{v} + \underline{v}'$

$\alpha\hat{\underline{v}} = \alpha\underline{v} + \overset{\in U}{\alpha\underline{u}} \Rightarrow \alpha\hat{\underline{v}} \sim \alpha\underline{v}$

lo $\underline{o}$ è la classe di $\underline{o} \in V$ $[\underline{o}] = \underline{o} + U = U$ (ecc.) $\square$

> **Proposizione** Ogni supplementare U' di U (cioè $V = U \oplus U'$) interseca ogni classe in uno e un solo vettore

DIMOSTRAZIONE

$[\underline{v}] \in V/U$. Allora $\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}'$, $\underline{u} \in U$, $\underline{u}' \in U'$, quindi $\underline{v} \sim \underline{u}' \in U'$

Quindi U' interseca ogni classe.

Se $\underline{u}', \underline{u}'' \in U'$ non possono essere equivalenti:

$U' \ni \underline{u}' - \underline{u}'' = \underline{u} \in U$ avrei $U \cap U' \neq \{\underline{o}\}$ contro l'ipotesi $\square$

> **Teorema**
> 1) L'applicazione $\pi : V \longrightarrow V/U$: $\pi(\underline{v}) = [\underline{v}]$ è lineare e surgettiva
> 2) $\ker \pi = U$
> 3) $\dim V/U = \dim V - \dim U$
> 4) Se U' è supplementare di U, $\pi|_{U'} : U' \longrightarrow V/U$ è isomorfismo
> 5) Viceversa, sia $[\underline{v}_1], \dots, [\underline{v}_{n-k}]$ base di V/U ($k = \dim U$)
> Comunque si scelgano $\underline{v}_i' \in [\underline{v}_i]$ i $\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_{n-k}'$ sono lin. indip.
> e il loro span è supplementare di U.

DIMOSTRAZIONE

1) $\pi(\underline{v} + \underline{v}') = [\underline{v} + \underline{v}'] = [\underline{v}] + [\underline{v}'] = \pi(\underline{v}) + \pi(\underline{v}')$

$\pi(\alpha\underline{v}) = [\alpha\underline{v}] = \alpha[\underline{v}] = \alpha\pi(\underline{v})$

2) $\pi(\underline{v}) = [\underline{v}] = [\underline{o}] \Leftrightarrow \underline{v} \sim \underline{o} \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{o} + \underline{u}$, $\underline{u} \in U \Leftrightarrow \underline{v} \in U$

3) formula delle dimensioni: $\dim V = \dim U + \dim V/U$

4) Deriva da $U' \cap \ker \pi = U' \cap U = \{\underline{o}\}$, quindi $\dim \pi(U') = \dim U'$

5) $\sum \alpha_i \underline{v}_i' = \underline{o}$ $\Rightarrow$ applico la proiezione $\sum \alpha_i \pi(\underline{v}_i') = [\underline{o}]$

$= \sum \alpha_i [\underline{v}_i] = [\underline{o}] \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\; \forall i$ $\square$

Teorema Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare.
Allora l'applicazione $\tilde{f}: V/_{Ker f} \longrightarrow W$
data da $\tilde{f}([\underline{v}]) = f(\underline{v})$ è un isomorfismo tra $V/_{Ker f} \cong Im f$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Im f \subset W \\ & V/Ker f \arrow[ur, "\tilde{f}"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

DIMOSTRAZIONE
$\tilde{f}$ è ben definita perché se $\underline{v}' \sim \underline{v} \Rightarrow \underline{v} - \underline{v}' \in Ker f$
quindi $f(\underline{v}) = f(\underline{v}' + (\underline{v} - \underline{v}')) = f(\underline{v}') + f(\underline{v} - \underline{v}') = f(\underline{v}')$
È surgettiva su $Im f$. Inoltre $\tilde{f}([\underline{v}]) = \underline{0} \Leftrightarrow f(\underline{v}) = \underline{0}$
$\Leftrightarrow \underline{v} \in Ker f \Leftrightarrow [\underline{v}] = \underline{0}$ □

Proposizione Sia $f: V \longrightarrow W$ lineare, $U \subset V$, $Z \subset W$ ssp. t.c. $f(U) \subset Z$
Allora si ha una applicazione
$\tilde{f}: V/U \longrightarrow W/Z$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_U"'] & W \arrow[d, "\pi_Z"] \\ V/U \arrow[r, "\tilde{f}"'] & W/Z \end{tikzcd}$$

DIMOSTRAZIONE
Definiamo $\tilde{f}([\underline{v}]_U) = [f(\underline{v})]_Z$ · se $\underline{v} \sim \underline{v}' \Rightarrow \underline{v}' = \underline{v} + \underline{u}$, $\underline{u} \in U$
quindi $f(\underline{v}') = f(\underline{v}) + f(\underline{u})$ e siccome $f(\underline{u}) \in Z$, $f(\underline{v}') \sim f(\underline{v})$, che dimostra la buona definizione □

OSS Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V t.c. $\mathcal{B}_U = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ base di U
Sia $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W t.c. $\mathcal{B}_Z = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h\}$ base di Z
allora:
$\overline{\mathcal{B}}_{V/U} = \{[\underline{v}_{k+1}], \dots, [\underline{v}_n]\}$ è una base di V/U
$\overline{\mathcal{B}}'_{W/Z} = \{[\underline{w}_{h+1}], \dots, [\underline{w}_m]\}$ è una base di V/Z
si ha

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c c} & \overbrace{\phantom{M^{\mathcal{B}_U}_{\mathcal{B}_Z}(f|_U)}}^{\dim U} \\ \dim Z \left\{ \right. & \left[\begin{array}{c|c} M^{\mathcal{B}_U}_{\mathcal{B}_Z}(f|_U) & M^{\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_Z}_{\mathcal{B}_Z}(pr_Z \circ f) \\ \hline 0 & M^{\overline{\mathcal{B}}_{V/U}}_{\overline{\mathcal{B}}'_{W/Z}}(\tilde{f}) \end{array} \right] \end{array}$$

$f|_U : U \rightarrow W$ $\quad Im f|_U \subset Z$

4) Spazio duale di V

def. Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$
Si chiama duale di V e si indica con V^* lo spazio $\mathcal{L}(V,\mathbb{K})$: $V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{K})$
Gli elementi $f: V \longrightarrow \mathbb{K}$ di V^* si diranno anche funzionali su V.

esempio $V = \mathbb{K}[x]$ $\quad f: V \longrightarrow \mathbb{K}$
$f(p(x)) = p(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{K}$
$V = M(n,\mathbb{K})$ $\quad f: V \longrightarrow \mathbb{K}$
$f(A) = \mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

proposizione Se $\dim V = n$ finito, allora $\dim V^* = n$

Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Per il teorema visto la lezione precedente,
un funzionale $f: V \longrightarrow \mathbb{K}$ è definito da una qualunque applicazione $\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}$
Definiamo il funzionale duale di v_i:

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad \text{ossia} \quad v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

Ancora per lo stesso teorema, l'applicazione che associa ad ogni $v_i, i \in I$,
un funzionale v_i^*, definisce un'applicazione lineare

$$\varphi_{\mathcal{B}}^* : V \longrightarrow V^*$$

corollario se $\dim V$ è finita, $\varphi_{\mathcal{B}}^*$ è isomorfismo tra V e V^*

DIMOSTRAZIONE
Basta dimostrare che è iniettiva
$\varphi_{\mathcal{B}}^*(v) = 0$ (funzionale nullo)
Sia $v = \sum \alpha_i v_i$, allora $\varphi_{\mathcal{B}}^*(v) = \sum \alpha_i \varphi_{\mathcal{B}}^*(v_i) = \sum \alpha_i v_i^* = 0$
Ma valutando sulla base $\sum \alpha_i v_i^*(v_j) = \alpha_j = 0 \implies \underline{v} = \underline{0}$ $\square$

NOTA Se $\dim V = \infty$, $\varphi_{\mathcal{B}}^*$ non è surgettiva
Infatti, data base $\{v_i\}_{i\in I}$ di V, si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccl} V & \xrightarrow[\varphi_{\mathcal{B}}]{\sim} & \mathbb{K}^{\mathcal{B}}_{fin} = \{ f: \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ha supporto finito} \} \\ \varphi_{\mathcal{B}}^* \downarrow & & \downarrow j \\ V^* & \xrightarrow[\ |_{\mathcal{B}}\ ]{} & \mathbb{K}^{\mathcal{B}} = \{ f: \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}, f \text{ qualunque} \} \end{array}$$

dove $\varphi_{\mathcal{B}}$ è il passaggio alle coordinate, j è l'inclusione e $|_{\mathcal{B}}$ è la restrizione di un funzionale alla base $\mathcal{B}$. La commutatività basta verificarla $\forall v_i \in \mathcal{B}$
$j \circ \varphi_{\mathcal{B}}(v_i)(v_j) = \delta_{ij}$ $\quad |_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}^*}(v_i)(v_j) = v_i^*|_{\mathcal{B}}(v_j) = \delta_{ij}$
Quindi $\mathrm{Im}\,\varphi_{\mathcal{B}}^*$ si identifica con i funzionali a supporto finito
(la base è data dai v_i^* che hanno supporto finito)
Se $\mathcal{B}$ è infinito, la cardinalità di $\mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ può essere maggiore di quella di $\mathbb{K}^{\mathcal{B}}_{fin}$

esempio $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ e $\mathcal{B}$ numerabile (es. $V = \mathbb{F}_2[x]$)
$V \longleftrightarrow$ ai sottoinsiemi finiti di $\mathcal{B}$ (cardinalità del numerabile, $\aleph_0$)
$V^* \longleftrightarrow$ tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{B}$ (cardinalità del continuo, c)

def. Il *biduale* di V è lo spazio vettoriale $V^{**}=(V^*)^*=\mathcal{L}(V^*,\mathbb{K})$

Si ha un'applicazione naturale $\varphi^{**}: V \longrightarrow V^{**}$

$$\underline{v} \longmapsto val_{\underline{v}} : [f \longmapsto f(\underline{v})]$$

def. Sia $f: V \to W$ lineare.

L'applicazione che manda $F: W \to \mathbb{K}$ in $F \circ f: V \to \mathbb{K}$

si dice *trasposta di f*. ${}^t f: W^* \longrightarrow V^*$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "F\circ f"'] & W \arrow[d, "F"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ V^* & W^* \arrow[l, "{}^t f"] \end{tikzcd}$$

> **proposizione** Siano $\dim V, \dim W < +\infty$
> Siano $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{C}$ base di W, $\mathcal{B}^*$ base duale di V^*, $\mathcal{C}^*$ base duale di W^*, allora
> $$M^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}({}^t f) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)\right)^T$$

DIMOSTRAZIONE

Poniamo $M^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}({}^t f) = (m^*_{ij})$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = (m_{ij})$

${}^t f(\underline{w}^*_j) = \underline{w}^*_j \circ f = \sum m^*_{ij} \underline{v}^*_i$

$m^*_{ij} = \underline{w}^*_j \circ f(\underline{v}_i) = \underline{w}^*_j\left(\sum m_{ki} \underline{w}_k\right) = m_{ji}$ □

def. Dato $W \subset V$ sottospazio, l'*annullatore di W* è dato da

$$\mathrm{Ann}(W) = \{ g \in V^* \mid g(\underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{w} \in W \}$$

Equivalentemente $\mathrm{Ann}(W) = \{ g \in V^* \mid W \subset \mathrm{Ker}\, g \} = \{ g \in V^* \mid g|_W = 0 \}$

$|_W : V^* \to W^*$ è lineare e $\mathrm{Ann}(W) = \mathrm{Ker}\, |_W$: $\mathrm{Ann}(W)$ è sottospazio di V^*

> **proposizione** Se V ha dim finita e $W \subset V$ è sottospazio,
> $$\dim \mathrm{Ann}(W) = \dim V - \dim W$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{B}_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W. La estendiamo a base di V: $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m, \underline{v}_{m+1}, \dots, \underline{v}_n\}$

la base duale è $\mathcal{B}^* = \{\underline{w}^*_1, \dots, \underline{w}^*_m, \underline{v}^*_{m+1}, \dots, \underline{v}^*_n\}$. Basta dimostrare che $H = \{\underline{v}^*_{m+1}, \dots, \underline{v}^*_n\}$ è base di $\mathrm{Ann}(W)$

Poiché $\underline{v}^*_i(\underline{w}_j) = 0 \quad \forall i = m+1 \_ n, \forall j = 1 \_ m$, $\underline{v}^*_i \in \mathrm{Ann}(W)$. Poiché $H \subset \mathcal{B}^*$, H è lin. ind.

Se $g \in \mathrm{Ann}(W)$, $g = a_1 \underline{w}^*_1 + \dots + a_m \underline{w}^*_m + a_{m+1} \underline{v}^*_{m+1} + \dots + a_n \underline{v}^*_n$

Valutando su $\underline{w}_k$, si ha $0 = g(\underline{w}_k) = a_k \ \forall k = 1 \_ m$, quindi H genera $\mathrm{Ann}(W)$ □

Data $f \in \mathcal{L}(V, W)$

$\mathrm{Ker}\, {}^t f = \{ g \in W^* \mid g \circ f = 0 \} = \{ g \in W^* \mid \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g \} = \mathrm{Ann}(\mathrm{Im} f)$

Quindi

$\dim \mathrm{Im}\, {}^t f = \dim W^* - \dim \mathrm{Ker}\, {}^t f = \dim W - \dim \mathrm{Ann}\, \mathrm{Im} f = \dim W - (\dim W - \dim \mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{Im} f$

da cui segue $\mathrm{rnk}\, A = \mathrm{rnk}\, {}^t A$

Inoltre $\mathrm{Im}\, {}^t f = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}\, f)$

poiché $\dim \mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}\, f) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim V - (\dim V - \dim \mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im}\, {}^t f$

e data $g \in \mathrm{Im}\, {}^t f$, $\exists h \in W^*$ t.c. ${}^t f(h) = h \circ f = g$

sia $\underline{v} \in \mathrm{Ker}\, f$: $g(\underline{v}) = h(f(\underline{v})) = h(\underline{0}) = \underline{0} \Rightarrow g \in \mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}\, f) \Rightarrow \mathrm{Im}\, {}^t f \subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Ker} f)$

Se $U \subset W \Rightarrow \mathrm{Ann}\, U \supset \mathrm{Ann}\, W$

Valgono: $\mathrm{Ann}\, U \cap \mathrm{Ann}\, W = \mathrm{Ann}(U + W)$ e $\mathrm{Ann}\, U + \mathrm{Ann}\, W = \mathrm{Ann}(U \cap W)$

DIMOSTRAZIONE

(1) $\supset$: $\begin{matrix} U \subset \\ W \subset \end{matrix} U + W \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{Ann}\, U \supset \\ \mathrm{Ann}\, W \supset \end{matrix} \mathrm{Ann}(U+W) \Rightarrow \mathrm{Ann}(U+W) \subset \mathrm{Ann}\, U \cap \mathrm{Ann}\, W$

$\subset$: $g \in \mathrm{Ann}\, U \cap \mathrm{Ann}\, W$, $\underline{v} \in U + W$: $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w} \Rightarrow g(\underline{v}) = g(\underline{u}) + g(\underline{w}) = 0 \Rightarrow g \in \mathrm{Ann}(U+W)$

(2) $\subset$: $U \cap W \begin{matrix} \subset U \\ \subset W \end{matrix} \Rightarrow \mathrm{Ann}(U \cap W) \begin{matrix} \supset \mathrm{Ann}\, U \\ \supset \mathrm{Ann}\, W \end{matrix} \Rightarrow \mathrm{Ann}(U \cap W) \supset \mathrm{Ann}\, U + \mathrm{Ann}\, W$

$\dim(\mathrm{Ann}\, U + \mathrm{Ann}\, W) = \dim \mathrm{Ann}\, U + \dim \mathrm{Ann}\, W - \dim \mathrm{Ann}\, U \cap \mathrm{Ann}\, W = 2\dim V - \dim U - \dim W - \dim V + \dim(U+W) = \dim \mathrm{Ann}\, U \cap W$ □

V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ (dimensione finita)

$V^* \times W^*$ $\qquad$ $(V \times W)^*$

$\dim V + \dim W$ $\qquad$ $\dim V + \dim W$

$$(f, g) \xmapsto{\Phi} [f \oplus g : (\underline{v}, \underline{w}) \longmapsto f(\underline{v}) + g(\underline{w})]$$

verificare: $f \oplus g$ è un funzionale su $V \times W$

e l'applicazione Φ è un isomorfismo

Si può fare il prodotto di 2 funzionali, $f \in V^*$, $g \in W^*$?

Sembrerebbe naturale definire

$$f \otimes g : V \times W \longrightarrow \mathbb{K} : (\underline{v}, \underline{w}) \longmapsto f(\underline{v}) \cdot g(\underline{w})$$

Si vede subito che $f \otimes g$ non è lineare

$$(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}') \xrightarrow{f \otimes g} f(\underline{v} + \underline{v}') g(\underline{w} + \underline{w}') = (f(\underline{v}) + f(\underline{v}'))(g(\underline{w}) + g(\underline{w}')) =$$

$$= f(\underline{v}) g(\underline{w}) + f(\underline{v}') g(\underline{w}') + f(\underline{v}) g(\underline{w}') + f(\underline{v}') g(\underline{w})$$

$$f \otimes g(\underline{v}, \underline{w}) + f \otimes g(\underline{v}', \underline{w}') = f(\underline{v}) g(\underline{w}) + f(\underline{v}') g(\underline{w}') \neq$$

$$f \otimes g(\alpha(\underline{v}, \underline{w})) = f \otimes g(\alpha \underline{v}, \alpha \underline{w}) = f(\alpha \underline{v}) g(\alpha \underline{w}) = \alpha^2 f(\underline{v}) g(\underline{w}) = \alpha^2 \, f \otimes g(\underline{v}, \underline{w})$$

def. Un'applicazione $\varphi : V \times W \longrightarrow U$ si dice **bilineare** se è lineare in ogni componente.

$$\varphi(\alpha \underline{v} + \beta \underline{v}', \underline{w}) = \alpha \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \beta(\underline{v}', \underline{w})$$

$$\varphi(\underline{v}, \alpha \underline{w} + \beta \underline{w}') = \alpha \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \beta(\underline{v}, \underline{w}')$$

$f \otimes g : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ è bilineare

$$f \otimes g(\alpha \underline{v} + \beta \underline{v}', \underline{w}) = f(\alpha \underline{v} + \beta \underline{v}') g(\underline{w}) = (\alpha f(\underline{v}) + \beta f(\underline{v}')) g(\underline{w}) = \alpha f(\underline{v}) g(\underline{w}) + \beta(\underline{v}', \underline{w}) = \alpha f \otimes g(\underline{v}, \underline{w}) + \beta f \otimes g(\underline{v}', \underline{w})$$

nella seconda analogamente

Quindi abbiamo costruito un'applicazione

$$V^* \times W^* \longrightarrow \mathrm{Bil}(V \times W, \mathbb{K}) = \{ \text{appl. bilineari} : V \times W \longrightarrow \mathbb{K} \}$$

<u>NOTA</u> $\varphi, \psi : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ sono bilineari, allora $\varphi + \psi$ è bilineare

$$(\varphi + \psi)(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \psi(\underline{v}, \underline{w})$$

$$(\alpha \varphi)(\underline{v}, \underline{w}) = \alpha(\varphi(\underline{v}, \underline{w})) \qquad \text{(verificare)}$$

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V, $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W

$$V \ni \underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v}_i \qquad W \ni \underline{w} = \sum_{j=1}^m y_j \underline{w}_j$$

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi\left(\Sigma x_i \underline{v}_i, \Sigma y_j \underline{w}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \, \varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j) \qquad (*)$$

Segue che φ è determinata dai valori $\varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j) = a_{ij}$

Viceversa, assegnati dei numeri $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$

allora la formula $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j$ è un'applicazione bilineare (verificare)

Quindi $\dim \mathrm{Bil}(V \times W, \mathbb{K}) = \dim V \cdot \dim W$

(Più precisamente $\mathrm{Bil}(V \times W, \mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{\mathcal{B} \times \mathcal{B}'}$)

basi duali $\mathcal{B}^* = \{\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*\}$ di V^* $\qquad$ $\underline{v}_i^*(\underline{v}_j) = \delta_{ij}$

$\mathcal{B}'^* = \{\underline{w}_1^*, \dots, \underline{w}_m^*\}$ di W^*

<u>NOTA</u> $\underline{v}_h^* \otimes \underline{w}_k^*(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v}_h^*(\underline{v}) \, \underline{w}_k^*(\underline{w}) = \underline{v}_h^*\left(\sum_{i=1}^n x_i \underline{v}_i\right) \underline{w}_k^*\left(\sum_{j=1}^m y_j \underline{w}_j\right) =$

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i \, \underline{v}_h^*(\underline{v}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^m y_j \, \underline{w}_k^*(\underline{w}_j)\right) = x_h y_k$$

In particolare l'espressione $(*)$ diventa

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \, \varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j) \; \underline{v}_i^* \otimes \underline{w}_j^*(\underline{v}, \underline{w})$$

cioè

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j) \, \underline{v}_i^* \otimes \underline{w}_j^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \, \underbrace{\underline{v}_i^* \otimes \underline{w}_j^*}_{n \times m \text{ coppie}}$$

Quindi $\underline{v}_i^* \otimes \underline{w}_j^*$ sono una base di $\mathrm{Bil}(V \times W, \mathbb{K})$

def. Si può definire $\text{Bil}(V \times W, \mathbb{K}) = V^* \otimes W^*$

Si chiama usualmente **prodotto tensoriale** di V^* e W^*

OSS L'applicazione $F: V^* \times W^* \longrightarrow V^* \otimes W^*$ è bilineare
$$(f,g) \longmapsto f \otimes g$$

F non è surgettiva: le applicazioni bilineari della forma $F(f,g) = f \otimes g$ si scrivono

$$f \otimes g(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \, f \otimes g(\underline{v}_i, \underline{w}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \underbrace{f(\underline{v}_i)\, g(\underline{w}_j)}_{a_{ij}}$$

quindi $a_{ij} = \xi_i \eta_j \qquad rg((a_{ij})) = 1$

Se abbiamo tre funzionali $f \in V^*$, $g \in W^*$, $h \in U^*$ si possono moltiplicare

$$f \otimes g \otimes h : V \times W \times U \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}) \longmapsto f(\underline{v})\, g(\underline{w})\, h(\underline{u})$$

è un'applicazione tri-lineare (lineare in ogni componente)

def. Siano $V_1, V_2, \dots, V_n$ sp. vett su $\mathbb{K}$

Sia $\text{Mult}(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n, \mathbb{K})$ l'insieme di tutte le **applicazioni multilineari**

$f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K}$, cioè lineari in ogni componente.

$$f(\underline{v}_1, \dots, \alpha \underline{v}_i' + \beta \underline{v}_i'', \dots, \underline{v}_n) = \alpha f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i', \dots, \underline{v}_n) + \beta f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i'', \dots, \underline{v}_n)$$

Sia $B_i = \{ \underline{v}_1^{(i)}, \dots, \underline{v}_{n_i}^{(i)} \}$ base dell'i-esimo spazio

$f \in \text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K})$ si scrive:

$f(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)$

dove $\underline{u}_i = \sum x_j^{(i)} \underline{v}_j^{(i)}$

$$f\Big(\sum_{j_1=1}^{n_1} x_{j_1}^{(1)} v_{j_1}^{(1)}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n_n} x_{j_n}^{(n)} v_{j_n}^{(n)}\Big) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_n=1}^{n_n} x_{j_1}^{(1)} \dots x_{j_n}^{(n)} \overbrace{f(\underline{v}_{j_1}^{(1)}, \dots, \underline{v}_{j_n}^{(n)})}^{a_{j_1 \dots j_n}}$$

contiene $n_1 n_2 \dots n_n$ termini

Quindi f è determinata dagli $n_1 \dots n_n$ numeri $f(\underline{v}_{j_1}^{(1)}, \dots, \underline{v}_{j_n}^{(n)})$

quindi $\dim \text{Mult}(V_1 \times \dots V_n, \mathbb{K}) = \prod_{i=1}^{n} \dim V_i$

$(\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^{B_1 \times \dots \times B_n})$

Prendo le basi duali $B_1^*, \dots, B_n^*$ di $V_1^*, \dots, V_n^*$

Ogni $f \in \text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K})$ si scrive in modo unico

$(\underline{v}_{i_1}^{(1)})^* \otimes \dots \otimes (\underline{v}_{i_n}^{(n)})^*$ è una funzione multilineare

$$(\underline{v}_{i_1}^{(1)})^* \otimes \dots \otimes (\underline{v}_{i_n}^{(n)})^* (\underline{u}_1^{(1)}, \dots, \underline{u}_n^{(n)}) = x_{i_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot x_{i_n}^{(n)}$$

base di $\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K})$ è

$$\{ (\underline{v}_{i_1}^{(1)})^* \otimes \dots \otimes (\underline{v}_{i_n}^{(n)})^* \mid 1 \le i_1 \le n_1, \dots, 1 \le i_n \le n_n \}$$

def. Si può definire $\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K}) = V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^*$

Si chiama **prodotto tensoriale** di $V_1^*, \dots, V_n^*$.

$$\psi: V_1^* \times \dots \times V_n^* \longrightarrow V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^*$$
$$(f_1, \dots, f_n) \longmapsto f_1 \otimes \dots \otimes f_n$$

ψ non è surgettiva

(l'immagine sarà data da quei tensori t.c. $a_{j_1 \dots j_n} = \xi_{j_1}^{(1)} \dots \xi_{j_n}^{(n)}$)

Mi interessa il caso $V_1 = V_2 = \dots = V_h$, cioè:

$$\mathrm{Mult}(\underbrace{V\times V\times\dots\times V}_{k}, \mathbb{K}) = V^* \otimes \dots \otimes V^* = (V^*)^k$$

Prendo la stessa base per tutti i fattori $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad \mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$

$$f(u_1, \dots, u_h) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1}^{(1)} v_{i_1}, \dots, \sum_{i_h=1}^{n} x_{i_h}^{(h)} v_{i_h}\right) = \sum_{i_1,\dots,i_h=1}^{n} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_h}^{(h)} f(v_{i_1}, \dots, v_{i_h})$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_h} f(v_{i_1}, \dots, v_{i_h})\ v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_h}^* (u_1, \dots, u_h)$$

la base di V^{*h} è data dalle applicazioni multilineari

$$v_{i_1}^* \otimes \dots \otimes v_{i_h}^* \qquad (\text{sono } (\dim V)^h = n^h)$$

Distinguiamo le applicazioni multilineari simmetriche

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_h) = f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_h) \qquad i<j$$

Quindi $\forall \sigma \in S_h$

$$f(u_1, \dots, u_h) = f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(h)}) \qquad (1)$$

Dalle applicazioni multilineari antisimmetriche o alternanti

$$f(u_1, \dots, u, \dots, u, \dots u_h) = 0 \qquad \text{cioè se } u_i = u_j \qquad (2)$$

NOTA se f è alternante, ponendo $u_i = u_j = u' + u''$

$$f(u_1, \dots, u'+u'', \dots, u'+u'', \dots, u_h) = 0$$

$$f(u_1, \dots, u', \dots, u', \dots, u_h) + f(u_1, \dots, u'', \dots, u'', \dots, u_h) + f(u_1, \dots, u', \dots, u'', \dots, u_h) + f(u_1, \dots, u'', \dots, u', \dots, u_h) = 0$$

$$\Rightarrow f(u_1, \dots, u', \dots, u'', \dots, u_h) = -f(u_1, \dots, u'', \dots, u', \dots, u_h) \qquad (2')$$

Viceversa se scambiando due fattori cambia segno

$$f(u_1, \dots, u, \dots, u, \dots, u_h) = -f(u_1, \dots, u, \dots, u, \dots, u_h)$$

$$2 f(u_1, \dots, u, \dots, u, \dots, u_h) = 0$$

Se vale $(2')$ e il campo $\mathbb{K}$ è t.c. $2 = 1+1$ è invertibile ($\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$) $\Rightarrow$ vale (2)

$$f(u_1, \dots, u_h) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(h)}) \qquad \forall \sigma \in S_h$$

esercizio Le funzioni multilineari simmetriche formano un sottospazio di $\mathrm{Mult}(V^h, \mathbb{K})$: $\mathrm{Sym}^h(V)$

Le funzioni multilineari alternanti formano un sottospazio di $\mathrm{Mult}(V^h, \mathbb{K})$: $\Lambda^h(V^*) = \mathrm{Alt}^h(V)$

esempio $h=2$ $\quad f = \sum a_{ij} v_i^* \otimes v_j^*$

1) f simmetrica $\Rightarrow f(u_1, u_2) = f(u_2, u_1)$

2) f alternante $\Rightarrow f(u_1, u_2) = -f(u_2, u_1)$ $\qquad f(u,u) = 0$

1) $a_{ij} = f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i) = a_{ji}$

base $v_i^* \otimes v_j^* + v_j^* \otimes v_i^* \qquad i<j$

$v_i^* \otimes v_i^* \qquad i=j \qquad \dim \mathrm{Sym}^2(V) = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $a_{ij} = f(v_i, v_j) = -f(v_j, v_i) = -a_{ji} \qquad a_{ii} = f(v_i, v_i) = 0$

base $v_i^* \wedge v_j^* := v_i^* \otimes v_j^* - v_j^* \otimes v_i^* \qquad i<j \qquad \dim \Lambda^2(V) = \frac{n(n-1)}{2}$

Visto $\mathrm{Mult}(V\times\dots\times V, \mathbb{K}) = V^* \otimes \dots \otimes V^* \cong \mathbb{K}^{\mathcal{B}\times\dots\times\mathcal{B}}$

l'isomorfismo è dato dalla restrizione $f|_{\mathcal{B}\times\dots\times\mathcal{B}}$

cioè f è determinato dai $f(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ $\qquad \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ sono n^k numeri

NOTA si può definire $V \otimes V = \mathrm{Bil}(V^* \times V^*, \mathbb{K})$

$$V\times V \longrightarrow V\otimes V \qquad (v, w) \longmapsto [(f,g) \longmapsto f(v)g(w)]$$

NOTA f alternante allora $f|_{\mathcal{B}\times\dots\times\mathcal{B}}$ lo è, cioè:

1) $f(v_{i_{\sigma(1)}}, \dots, v_{i_{\sigma(k)}}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\ f(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$

2) $f(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = 0$ se due indici sono uguali

$(1 \Rightarrow 2)$ se $2 \in \mathbb{K}$ è invertibile)

corollario Se $h > \dim V = n$, $\Lambda^h(V^*) = 0$

DIMOSTRAZIONE

In 2) c'è per forza una ripetizione, quindi f è 0 $\square$

Costruiamo delle funzioni "semplici" che verificano 1) e 2)

Scegliamo un sottoinsieme di h indici $I \subset \{1, \dots, n\}$

$I = \{i_1, \dots, i_h\}$ $\quad i_1 < \dots < i_h$

Definiamo $\quad v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_h}^* := \sum_{\sigma \in S_h} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{i_{\sigma(1)}}^* \otimes \dots \otimes v_{i_{\sigma(h)}}^*$ $\quad (*)$

Lemma Sia $(v_{j_1}, \dots, v_{j_h}) \in \mathcal{B}^h$

Se $j_1, \dots, j_h$ è una permutazione σ di $i_1, \dots, i_h$,

allora $v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_h}^* (v_{j_1}, \dots, v_{j_h}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$

altrimenti $v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_h}^* (v_{j_1}, \dots, v_{j_h}) = 0$

DIMOSTRAZIONE

$v_{e_1}^* \otimes \dots \otimes v_{e_h}^* (v_{m_1}, \dots, v_{m_h}) = v_{e_1}^*(v_{m_1}) \cdots v_{e_h}^*(v_{m_h}) = \delta_{e_1 m_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{e_h m_h}$ $\square$

Quindi $v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_h}^* \neq 0$ solo sulle h-uple $(v_{j_1}, \dots, v_{j_h})$ con $\{j_1, \dots, j_h\} = I$,

cioè sono una permutazione di $(i_1, \dots, i_h)$

Lemma I $v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_h}^*$, al variare di $I = \{i_1, \dots, i_h\} \subset \{1, \dots, n\}$ $(i_1 < \dots < i_h)$

sono una base di $\Lambda^h(V^*)$

DIMOSTRAZIONE

i) sono lin. ind.

$f = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_h \le n} a_{i_1 \dots i_h} v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_h}^* = 0$

Valutando f in $(v_{j_1}, \dots, v_{j_h})$, $j_1 < \dots < j_h$, rimane solo $f(v_{j_1}, \dots, v_{j_h}) = a_{j_1 \dots j_h} = 0$

ii) sono generatori

Sia $f \in \Lambda^h(V^*)$. Si verifica usando 1) e 2)

$f = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_h \le n} f(v_{i_1}, \dots, v_{i_h})\, v_{i_1}^* \wedge \dots \wedge v_{i_h}^*$

si verifica che membro di sx e membro di dx hanno gli stessi valori sulle h-uple di $\mathcal{B}^h$ $\square$

corollario $\dim \Lambda^h(V^*) = \binom{n}{h}$

DIMOSTRAZIONE

Una base corrisponde a tutti i sottoinsiemi $I \subset \{1, \dots, n\}$ di cardinalità h. $\square$

In particolare $\Lambda^n(V^*) = 1$

Per ogni scelta di una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

la funzione $\quad v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^* = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)}^* \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}^*$

è una base di $\Lambda^n(V^*)$ che vale 1 su $(v_1, \dots, v_n)$

Viceversa, se f vale 1 su $(v_1, \dots, v_n)$, allora $f = v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*$

Infatti dovrà essere $f = \lambda\, v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Ma $f(v_1, \dots, v_n) = \lambda \Rightarrow \lambda = 1$

In altri termini, fissata una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V,

c'è un'unica $f \in \Lambda^n(V^*)$ t.c. $f(v_1, \dots, v_n) = 1$: $f = v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*$

DETERMINANTE

APPLICAZIONE Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ $A_i \in \mathbb{K}^n = V$

Consideriamo $\Lambda^n(V)$ $f(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{K}$

Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica di V

def. Chiamiamo **det** : $\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ (n fattori)

l'unica **funzione multilineare alternante delle righe di A**,

che vale 1 su $(e_1, \dots, e_n)$ $\det(I) = 1$

> FORMULA Si ha :
>
> $$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \quad a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Infatti $\det(A) = \det(A_1, \dots, A_n) = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* (A_1, \dots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \; e^*_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^*_{\sigma(n)} (A_1, \dots, A_n)$

$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \; e^*_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^*_{\sigma(n)} \left(\sum a_{1j_1} e_{j_1}, \dots, \sum a_{nj_n} e_{j_n} \right) =$ $\qquad A_i = \sum a_{ij_i} e_{j_i}$

$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \; e^*_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e^*_{\sigma(n)} (e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \quad a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$

esempio $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det A = \overset{id}{a_{11} a_{22}} - \overset{(1,2)}{a_{12} a_{21}}$

$n = 3$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\det A = \overset{id}{a_{11} a_{22} a_{33}} - \overset{(2,3)}{a_{11} a_{32} a_{23}} - \overset{(1,2)}{a_{12} a_{21} a_{33}} + \overset{(1,2,3)}{a_{12} a_{23} a_{31}} + \overset{(1,3,2)}{a_{13} a_{21} a_{32}} - \overset{(1,3)}{a_{13} a_{22} a_{31}}$

Proprietà

i) se A ha 2 righe uguali , $\det A = 0$

se scambio 2 righe, det cambia segno

ii) se A ha una riga nulla , $\det A = 0$

(se ad es. $A_1 = \underline{0}$, det è lineare nella prima riga $\Rightarrow \det A = 0$)

iii) se si somma alla riga A_i un multiplo di A_j $(i \neq j)$ si ottiene una matrice B t.c. $\det B = \det A$

$\left(\det(A_1 + \lambda A_2, A_2, \dots, A_n) = \det(A_1, A_2, \dots, A_n) + \lambda \underbrace{\det(A_2, A_2, \dots, A_n)}_{=0} \right)$

iv) se S è una forma a scala di A, ottenuta con la riduzione di Gauss senza moltiplicare una riga per un numero (op. 2) $\Rightarrow \det A = \pm \det S$

Il segno è + se si è fatto un numero pari di scambi di righe, altrimenti è −.

v) se la matrice A è diagonale , $\det A = a_{11} \dots a_{nn}$

$(\det(a_{11} e_1, a_{22} e_2, \dots, a_{nn} e_n) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \det(e_1, \dots, e_n) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn})$

A è non singolare $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow$ la sua riduzione a scala ha n pivot

vi) se A è singolare $(\Leftrightarrow \operatorname{rg} A < n)$, $\det A = 0$

Infatti una sua ridotta a scala S ha almeno una riga nulla $\Rightarrow \det S = 0 = \pm \det A$

vii) se A è non singolare $(\operatorname{rg} A = n) \Rightarrow \det A \neq 0$

Infatti $A \sim S = \begin{pmatrix} p_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$ con $p_i \neq 0$

Facendo ancora operazioni di riga dal basso verso l'alto, riduco S alla matrice diagonale $\begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det S = \pm \det A = p_1 \cdots p_n$

> **Proposizione** A è invertibile $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$

Teorema $\det A = \det {}^tA$

DIMOSTRAZIONE

<u>OSS</u> $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ $\quad A = (a_{ij})$ $\quad {}^tA = (a_{ji}) = (a'_{ij})$

$$\det {}^tA = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots a_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))} =$$
$$= \sum_{\sigma^{-1}} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A$$

□

corollario Si può costruire det usando le colonne, ottenendo lo stesso risultato

corollario Nell'ultimo punto detto, se A è triangolare $\Rightarrow \det A = a_{11} \dots a_{nn}$

def. Si definisce complemento algebrico o cofattore dell'elemento a_{ij} della matrice A, il determinante della matrice che si ottiene cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna, con segno $(-1)^{i+j}$

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_i^j \quad \text{o} \quad \operatorname{Cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_i^j$$

Teorema sviluppo di Laplace Data $A \in M(n, \mathbb{K})$ (per righe o per colonne) si ha:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \mathcal{A}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \mathcal{A}_{ij}$$

<u>esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Il teorema si può dimostrare usando il seguente metodo:
si considera la funzione $\varphi(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \mathcal{A}_{ij}$
e si dimostra che è multilineare alternante sulle righe di A e vale 1 su I

Teorema di Binet Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, allora:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

DIMOSTRAZIONE

<u>I caso</u> Se una delle due matrici è singolare, allora anche AB lo è
$\Rightarrow \det AB = 0 = \det A \det B$

<u>II caso</u> Se $\det B \neq 0$. Consideriamo la funzione
$\varphi: M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ data $\varphi(A) = \dfrac{\det(AB)}{\det(B)}$
e mostriamo che è multilineare alternante sulle righe e vale $\varphi(I) = 1$

- Multilinearità $\quad (AB)_i = A_i B$

  quindi se $A_i = \lambda A'_i + \mu A''_i \Rightarrow (AB)_i = (\lambda A'_i + \mu A''_i) B = \lambda A'_i B + \mu A''_i B$
  Per la multilinearità del det
  $$\det(AB) = \lambda \det(A'B) + \mu \det(A''B) \qquad A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A'_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A''_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

  Dividendo per $\det B$: $\quad \varphi(A) = \lambda \varphi(A') + \mu \varphi(A'')$
  cioè φ è lineare sull'i-esima riga

- L'alternanza: se A ha due righe uguali, allora anche AB ha le stesse due righe uguali $\Rightarrow \det AB = 0$

- "normalizzazione" $\quad \varphi(I) = \dfrac{\det(IB)}{\det(B)} = 1$

Per l'unicità del determinante, $\varphi(A) = \det A$ □

corollario Se A è non singolare, $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

DIMOSTRAZIONE

$A \cdot A^{-1} = I \qquad \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det I = 1$ $\square$

corollario $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(BA)$

corollario P invertibile ($P \in GL_n(\mathbb{K})$) $\Rightarrow \det(P^{-1}AP) = \det A$

DIMOSTRAZIONE

$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A$

(alternativamente $\det(P^{-1}(AP)) = \det((AP)P^{-1}) = \det A$) $\square$

corollario $\det A$ è invariante per similitudine

Non basta neanche questo (rg, tr, det)

esercizio 1) Data $A \in M_{2,3}(\mathbb{K})$ con righe $A_1, A_2 \in \mathbb{K}^3 = V$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica

Dimostrare che $e_1^* \wedge e_2^* \in \Lambda^2(V)$ agisce come

$$e_1^* \wedge e_2^* \, (A_1, A_2) = \det(A^1 | A^2)$$

2) $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, con $m \leq n$

Prendiamo $1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$

Dimostrare che $e_{j_1}^* \wedge e_{j_2}^* \wedge \dots \wedge e_{j_m}^* \in \Lambda^m(V)$ agisce come

$$e_{j_1}^* \wedge e_{j_2}^* \wedge \dots e_{j_m}^* (A_1, A_2, \dots, A_m) = \det(A^{j_1} | A^{j_2} | \dots | A^{j_m}) \qquad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = (A^1 | \dots | A^n)$$

3) In generale, se $\dim V = n$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, allora la funzione

$v_{j_1}^* \wedge v_{j_2}^* \wedge \dots \wedge v_{j_h}^*$ con $1 \leq j_1 < \dots < j_h \leq n$ applicata all'h-pla

$u_1 = \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} v_{k_1}, \dots, u_h = \sum_{k_h=1}^{n} a_{hk_h} v_{k_h}$ dà:

$$v_{j_1}^* \wedge \dots \wedge v_{j_h}^* (u_1, \dots, u_h) = \det(A^{j_1} | \dots | A^{j_h}) \qquad \text{con } A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots h \\ j=1 \dots n}}$$

def. La matrice aggiunta classica di A è la matrice:

$\operatorname{adj}(A) = (\alpha_{ij})^T_{i,j=1 \dots n} = (\alpha_{ji})_{i,j=1 \dots n}$ ossia $\operatorname{adj}(A) = \left((-1)^{i+j} \det A_j^i\right)_{i,j=1 \dots n}$

Dato $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, si ha: $\operatorname{adj}(A) \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} \det(\underline{b} | A^2 | \dots | A^n) \\ \det(A^1 | \underline{b} | \dots | A^n) \\ \vdots \\ \det(A^1 | A^2 | \dots | \underline{b}) \end{pmatrix}$ e $\underline{b}^T \operatorname{adj}(A) = \left(\det\begin{pmatrix} \underline{b}^T \\ \vdots \\ A_1 \end{pmatrix} \dots \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \underline{b}^T \end{pmatrix} \right)$

Infatti la riga i-esima è: $(\operatorname{adj}(A))_i \cdot \underline{b} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_j^i)\, b_j = \det(A^1 | \dots | \overset{i}{\underline{b}} | \dots | A^n)$

Si ha poi: $\operatorname{adj}(A) A = A \operatorname{adj}(A) = \det A \, I_n$

Infatti: $\operatorname{adj}(A) A = (\operatorname{adj}(A) A^1 | \dots | \operatorname{adj}(A) A^n) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \, I_n$

$$\begin{pmatrix} \det(A^1 | A^2 | \dots | A^n) \\ \det(A^1 | A^1 | \dots A^n) \\ \vdots \\ \det(A^1 | A^2 | \dots | A^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Perciò, se $\det A \neq 0$: $\frac{\operatorname{adj}(A)}{\det A} A = A \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det A} = I_n$ da cui $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$

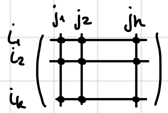
Data $A \in GL(n, \mathbb{K})$ e $\underline{b} \in \mathbb{K}^n$, il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente a $\underline{x} = A^{-1}\underline{b} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)\, \underline{b}$

Quindi, se $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, si ha $x_i = \dfrac{\det(A^1 | \dots | \overset{i}{\underline{b}} | \dots | A^n)}{\det A}$ (regola di Cramer)

Rango tramite il determinante

def. Data una matrice $A \in M(m,n,\mathbb{K})$, una sottomatrice di A è una matrice ottenuta intersecando alcune righe $(i_1,\dots,i_k)$ e alcune colonne $(j_1,\dots,j_h)$ di A: $A^{j_1,\dots,j_h}_{i_1,\dots,i_k} \in M(k,h,\mathbb{K})$

Se $h=k$, la sottomatrice si dice minore di A di ordine k o taglia $k \times k$

$A =$ 

OSS Se M è sottomatrice di A, $\operatorname{rnk} M \leq \operatorname{rnk} A$

Lemma Data $M = A^{j_1,\dots,j_h}_{i_1,\dots,i_k}$, se le colonne di M $M^{c_1},\dots,M^{c_r}$ sono lin. ind., allora $A^{j_{c_1}},\dots,A^{j_{c_r}}$ sono lin. ind.

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i A^{j_{c_i}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$

Guardando le righe $i_1,\dots,i_k$: $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i M^{c_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$ □

OSS $\operatorname{rnk} A = \max\{\operatorname{rnk} M \mid M \text{ sottomatrice di } A\}$

Proposizione $\operatorname{rnk} A = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ minore } M \text{ di } A \text{ di ordine } k \text{ invertibile } (\det M \neq 0)\}$

DIMOSTRAZIONE

Siano $r = \operatorname{rnk} A$ e $\rho = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ minore } M \text{ di } A \text{ di ordine } k \text{ invertibile } (\det M \neq 0)\}$

1) $\exists$ M minore di A di ordine ρ invertibile $\Rightarrow \operatorname{rnk} M = \rho \leq r = \operatorname{rnk} A$

2) Mostriamo che esiste in A un minore di ordine r invertibile $\Rightarrow r \leq \rho$

$\exists$ r righe di A $A_{i_1},\dots,A_{i_r}$ lin. ind.

Sia $N = A^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_r}$: si ha $\operatorname{rnk} N = r$

In N $\exists$ r colonne lin. ind.: $N^{j_1},\dots,N^{j_r}$

$\Rightarrow A^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}$ è $r \times r$ e ha r colonne lin. ind., per cui è invertibile

$\Rightarrow A^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}$ è un minore di A di taglia r invertibile □

Perciò $\operatorname{rnk} A = r \iff \exists$ in A un minore M di ordine r t.c. $\det M \neq 0$
$\forall$ minore N in A di ordine $> r$, si ha $\det N = 0$

OSS Per lo sviluppo di Laplace di $\det A$ (per riga o colonna), si ha che $\det A$ è combinazione lineare di determinanti di minori di A di ordine $n-1$

OSS Se tutti i det dei minori di A di ordine $r+1$ sono nulli
$\Rightarrow$ tutti i det dei minori di A di ordine $r+2$ sono nulli

Diventa perciò: $\operatorname{rnk} A = r \iff \exists$ in A un minore M di ordine r t.c. $\det M \neq 0$
$\forall$ minore N in A di ordine $r+1$, si ha $\det N = 0$

proposizione $\operatorname{rnk} A = k \iff \exists$ un minore M di A di ordine k con $\det M \neq 0$
$\forall$ minore N in A di ordine $k+1$ che contiene M: $\det N = 0$

N si dice "orlato" di M

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ ovvio da prima

$\Leftarrow$ Supponiamo $M = A^{1,\dots,k}_{1,\dots,k}$: $A = \begin{array}{c} \\ k \end{array}\begin{pmatrix} \boxed{M} & & \\ & & \end{pmatrix}_i$

Mostriamo che $\forall j > r$, $A^j \in \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^k)$; in più $A^1, \dots, A^k$ sono lin. ind $\Rightarrow \operatorname{rnk} A = r$

Sia $N = A^{1,\dots,k,j}_{1,\dots,m}$

$N_1, \dots, N_k$ sono lin. ind. perché sono estensioni di righe di M

Sia $i > k$, $Z = N^{1,\dots,k+1}_{1,\dots,k,i} = A^{1,\dots,k,j}_{1,\dots,k,i}$ (orlato di M)

$\det Z = 0 \Rightarrow$ le righe di Z non sono lin. ind. $\Rightarrow N_i \in \operatorname{Span}(N_1, \dots, N_k)$

$\Rightarrow \operatorname{rnk} N = k \Rightarrow$ le colonne di N non sono lin. ind, ma $N^1, \dots, N^k$ lo sono

$\Rightarrow N^{k+1} = A^j \in \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^k)$ $\square$

<u>esempio</u> Matrice di Vandermonde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Si dimostra per induzione che $\det M = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

Matrici a blocchi

Il prodotto di matrici a blocchi si fa a blocchi:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{A_1}^{k} & \overbrace{A_2}^{h} \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \}k \\ \}h \end{array} \Rightarrow AB = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right)$$

proposizione $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det A \cdot \det C$ con A, C matrici quadrate

DIMOSTRAZIONE

$A = I \Rightarrow \det \left(\begin{array}{c|c} I & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det C$

$C = I \Rightarrow \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I \end{array}\right) = \det B$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & M \\ \hline 0 & I \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I & N \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & AN + MC \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \overset{?}{=} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

$\exists M, N$: $AN + MC \overset{?}{=} B$

Se C è invertibile $N = 0$, $M = BC^{-1}$

Se C è singolare ($\det C = 0$):

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \overset{\text{op. riga}}{=} \pm \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} * \\ 0 \cdots 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right) = 0 \quad \square$$

TEORIA SPETTRALE PER ENDOMORFISMI

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $f: V \to V$ endomorfismo
$\mathcal{B}$ base di V $\quad M_{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad$ con $n = \dim V$
cambiando base $\mathcal{B}'$, M cambia per similitudine: $P \in GL_n(\mathbb{K})$ $\quad M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}MP$
Come scegliere $\mathcal{B}$ in modo che $M_{\mathcal{B}}(f)$ sia il più "semplice" possibile?
- definire "semplice"
- determinare criteri affinché esista base $\mathcal{B}$ per cui $M_{\mathcal{B}}(f)$ è "semplice"
- dare algoritmi per produrre $\mathcal{B}$

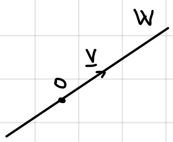
equivalentemente, cerco matrici "semplici" nelle classi di similitudini

$id: V \longrightarrow V$ identità, $\forall$ base $\mathcal{B}$
$M_{\mathcal{B}}(id) = I_n$
è diagonale
"semplici" = diagonali $\qquad M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\qquad \mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$
$\Rightarrow f(\underline{v}_j) = \lambda_j \underline{v}_j$ $\qquad j = 1, \dots, n$
Quindi $\mathrm{Span}(\underline{v}_j)$ è f-invariante

def. Dato un endomorfismo $f: V \longrightarrow V$, un sottospazio $W \subset V$ si dice **f-invariante** se $f(W) \subset W$

<u>oss</u> $W \subset V$ con $\dim W = 1$, W f-invariante, allora
$\exists \lambda \in \mathbb{K}$ per cui $\forall \underline{v} \in W$, $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$



W f-invariante $\Rightarrow f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ per $\underline{v} \in W$
$\underline{v}' = \mu \underline{v}$ $\qquad f(\underline{v}') = \mu f(\underline{v}) = \lambda \mu \underline{v} = \lambda \underline{v}'$

def. Un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ si dice **autovalore** di f
se $\exists \underline{v} \neq \underline{0}$ t.c. $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$
$\underline{v}$ si chiama **autovettore relativo all'autovalore λ**

<u>esempio</u> $id: V \longrightarrow V$, ogni vettore $\underline{v} \in V$ è autovettore relativo all'autovalore 1

def. Lo **spettro di f** è l'insieme degli autovalori di f
$\mathrm{sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ è autovalore}\}$

def. $f: V \longrightarrow V$ è **diagonalizzabile** se $\exists$ base $\mathcal{B}$ t.c. $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale

<u>esempio</u> l'applicazione nulla $f(\underline{v}) = \underline{0}$ $\forall \underline{v}$ è diagonalizzabile

<u>oss</u> $f: V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ V ha una base di autovettori di f

$\Rightarrow$: visto sopra, se $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, allora $f(\underline{v}_1) = \lambda_1 \underline{v}_1, \dots, f(\underline{v}_n) = \lambda_n \underline{v}_n$
$\Leftarrow$: $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di autovettori $\Rightarrow f(\underline{v}_j) = \lambda_j \underline{v}_j$ $\quad j = 1, \dots, n$
$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

esempio rotazione di angolo θ in $\mathbb{R}^2$, $\theta \neq k\pi$
in base canonica $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

non ha autovettori reali, ma ha una base di autovettori complessi
$\Rightarrow$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, ma lo è su $\mathbb{C}$

def. Se λ è un autovalore, indichiamo con
$V_\lambda = V_\lambda(f) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\}$ (tutti gli autovettori e $\underline{0}$)
si chiama **autospazio relativo all'autovalore λ**

esempio $0 \in \mathbb{K}$ è autovalore $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} f > 0$ perché $V_0 = \{\underline{v} \mid f(\underline{v}) = \underline{0}\}$

oss $V_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$
$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Leftrightarrow f(\underline{v}) - \lambda \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id})(\underline{v}) = \underline{0}$

corollario V_λ è un sottospazio vettoriale di V

corollario $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{\underline{0}\}$
$[\exists \underline{v} \neq \underline{0}$ t.c. $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Leftrightarrow \exists \underline{v} \neq \underline{0} \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})]$

Come trovare gli autovalori:
Prendiamo $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V
$M = M_\mathcal{B}(f)$ matrice associata
$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \xLeftrightarrow[\text{alle coordinate}]{\text{passando}} M[\underline{v}]_\mathcal{B} = \lambda [\underline{v}]_\mathcal{B} \Leftrightarrow (M - \lambda I_n)[\underline{v}]_\mathcal{B} = \underline{0}$

λ è autovalore $\Leftrightarrow$ il sistema $(M - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ ha soluzioni non banali $(\operatorname{rg}(M - \lambda I_n) < n)$
$\Leftrightarrow \det(M - \lambda I) = 0$

oss $\det(M - \lambda I)$ è un polinomio in λ a coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado $n = \dim V$
(1) $\dim V = 1$ $\quad M = [a] \quad \det(M - \lambda I) = a - \lambda$
(2) $\dim V = 2$ $\quad M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =$
$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \operatorname{tr} M \, \lambda + \det M$

(3) $\dim V = 3$
$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$
$$\det(M - \lambda I) = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda + \det M$$

def. $p_f(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ è il **polinomio caratteristico dell'applicazione f**

def. Si definisce **autovalore** di $A \in M_n(\mathbb{K})$ un $\lambda \in \mathbb{K}$ t.c.
$\exists \underline{x} \in \mathbb{K}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$ t.c. $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$

def. Una matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ si dice **diagonalizzabile** se è simile a una matrice diagonale

oss $f: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \forall$ base $\mathcal{B}$ la matrice $M_\mathcal{B}(f)$ è diagonalizzabile

def. Data $M \in M_n(\mathbb{K})$, chiamo **polinomio caratteristico della matrice**
$p_M = \det(M - \lambda I)$ è un polinomio di grado n con coeff. direttore $(-1)^n$

OSS $f: V \longrightarrow V$ gli autovalori di f sono gli autovalori di $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, $\forall \mathcal{B}$ base di V

$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \iff M_{\mathcal{B}}(f)\,[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \lambda\,[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$

proposizione Se $N = P^{-1}MP \longrightarrow p_N(\lambda) = p_M(\lambda)$

DIMOSTRAZIONE

$$\det(N - \lambda I) = \det(P^{-1}MP - \lambda I) = \det(P^{-1}MP - \lambda P^{-1}P) =$$
$$= \det(P^{-1}(M - \lambda I)P) \underset{\text{"Binet"}}{=} (\det P)^{-1} \cdot \det(M - \lambda I) \cdot \det P = \det(M - \lambda I)$$

"Binet" vale anche su un anello □

OSS Avremmo anche potuto dire:

$N = P^{-1}MP \qquad p_N(\lambda) = \det(N - \lambda I) = \det(P^{-1}(M - \lambda I)P)$

Quindi $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad p_N(\alpha) = \det(P^{-1}(M - \alpha I)P) \underset{\text{Binet}}{=} \det(M - \alpha I) = p_M(\alpha)$

Quindi $p_N(\lambda)$ e $p_M(\lambda)$ assumono gli stessi valori su $\mathbb{K}$

Se $\mathbb{K}$ è infinito $\Rightarrow p_N(\lambda) - p_M(\lambda)$ si annulla per infiniti valori $\Rightarrow$ è nullo

Se $\mathbb{K}$ è finito, può essere $p(\alpha) = q(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$, ma $p(x) \neq q(x)$ (sono uguali come funzioni ma non come polinomi)

esempio in $\mathbb{F}_2 \quad x^3 + x,\ x^3 + x^2$ hanno gli stessi valori

In generale, siccome le matrici hanno coefficienti in $\mathbb{K}[\lambda]$, si applica Binet sul campo:

$$\mathbb{K}(\lambda) = \left\{ f(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} \right\} \hookleftarrow \mathbb{K}[\lambda]$$

corollario $p_f(\lambda)$ è ben definito

corollario Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine (Quindi tutti i suoi coefficienti lo sono)

Non bastano a caratterizzare le classi di similitudine

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili

esempio $M = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$

Gli autovalori sono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

α autovalore $\iff$ radice di $p_f(\lambda) \iff p_f(\alpha) = 0$

$\iff (\lambda - \alpha) \mid p_f(\lambda)$ cioè $p_f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m q(\lambda)$ con $m \geq 1$

def. La **molteplicità algebrica** dell'autovalore $\alpha \in \mathbb{K}$ è la molteplicità come radice del polinomio caratteristico, cioè il massimo esponente m t.c. $(\lambda - \alpha)^m$ divide $p_f(\lambda)$

Si indica con $\mu_a(\alpha)$

def. La **molteplicità geometrica** dell'autovalore α è

$\mu_g(\alpha) = \dim V_\alpha$

(cioè il massimo numero di autovettori relativi a α lin. ind.)

OSS $\mu_g(\lambda) = \dim V_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(M - \lambda I_n) = n - rg(M - \lambda I_n)$

Teorema $\forall$ autovalore α, si ha
$\mu_g(\alpha) \leq \mu_a(\alpha)$

DIMOSTRAZIONE

$\mu_g(\alpha) = \dim V_\alpha$. Prendiamo una base di V_α $\{v_1, \dots, v_k\}$ con $k = \mu_g(\alpha)$

Estendiamola a base di V: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} \implies M_\mathcal{B}(f) = \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & 0 & \\ 0 & \alpha & \vdots & B \\ \vdots & \ddots & \alpha & \\ \hline 0 & 0 & 0 & C \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha-\lambda & & 0 & \\ 0 & \alpha-\lambda & \vdots & B \\ \vdots & \ddots & \alpha-\lambda & \\ \hline 0 & 0 & 0 & C-\lambda I_{n-k} \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} (\alpha-\lambda) I_k & B \\ \hline 0 & C - \lambda I_{n-k} \end{array}\right] = (\alpha - \lambda)^k \cdot q(\lambda) = (\alpha-\lambda)^{\mu_g(\alpha)} q(\lambda)$$

Quindi $\mu_a(\alpha) \geq \mu_g(\alpha)$ □

esercizio $\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right] = \det A \cdot \det C$

esempio $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Trovare autovalori e autovettori

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = ((2-\lambda)^2 - 1)(3-\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)^2$$

autovalori $\lambda = 1$ (autovalore semplice, $\mu_a(\lambda) = 1$) $\lambda = 3$ (autovalore doppio, $\mu_a(\lambda) = 2$)

- $\lambda = 1$ $\mu_g(1) = 1 = \mu_a(1)$

$$M - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad x_2 = -1 \quad \text{autovettore} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\lambda = 3$

$$M - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rg(M - 3I) = 2 \longrightarrow \dim V_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{autovettore} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Non c'è base di autovettori $\implies f_M : \underline{x} \longmapsto M\underline{x}$ non è diagonalizzabile

esempio $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$ gli autovalori sono $a_{11}, \dots, a_{nn}$

ha unico autovalore 1 con $\mu_a(1) = 2$, $\mu_g(1) = 1$

Proposizione $f : V \longrightarrow V$. Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

DIMOSTRAZIONE

Dimostriamo per induzione su k che, se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono autovettori relativi agli autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, sono lin. ind.

$k = 1$. per def., $v_1 \neq \underline{0}$

Devo dimostrare che se $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$, $\alpha_i \in \mathbb{K} \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

Applichiamo f. $f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k) = f(\underline{0}) = \underline{0}$

$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \underline{v}_{k-1} + \alpha_k \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}$

Moltiplichiamo la prima per λ_k e facciamo la differenza:

$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \underline{v}_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_k) \underline{v}_2 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \underline{v}_{k-1} = \underline{0}$

Per induzione, $v_1, \dots, v_{k-1}$ sono lin. indipendenti $\Rightarrow$ tutti i coefficienti sono nulli

$\Rightarrow \alpha_j (\lambda_j - \lambda_k) = 0$ $j = 1, \dots, k-1$ ma $\lambda_j \neq \lambda_k$ per $j = 1, \dots, k-1 \Rightarrow \alpha_j = 0$ $j = 1, \dots, k-1$

dalla prima $\alpha_k \underline{v}_k = \underline{0}$, ma $\underline{v}_k \neq \underline{0} \implies \alpha_k = 0$ □

esempio $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ $f(v_2) = \lambda_2 \underline{v}_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, v_2 non può essere multiplo di v_1

corollario Se $\dim V = n$ e $f: V \longrightarrow V$ ha n autovalori semplici
$\Longrightarrow f$ è diagonalizzabile

def. Dati $W_1, \dots, W_k \subset V$ sottospazi, la loro **somma** è
$W_1 + \dots + W_k = \{ \underline{v} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_k \mid \underline{w}_i \in W_i \}$
Dico che i W_j sono in **somma diretta** se
$\forall \underline{v} \in W_1 + \dots + W_k \quad \exists$ unici $\underline{w}_i \in W_i$ t.c. $\underline{v} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_k$

<u>ACHTUNG</u> non basta $W_i \cap W_j = \{\underline{0}\}$

proposizione Dati $W_1, \dots, W_k \subset V$ sottospazi. Sono fatti equivalenti:
(i) $W_1, \dots, W_k$ sono in somma diretta
(ii) $\underline{w}_i \in W_i$: $\sum_{i=1}^{k} \underline{w}_i = \underline{0} \Rightarrow \underline{w}_i = \underline{0}$
(iii) $\forall i \quad W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k) = \{\underline{0}\}$
(iv) $\forall i \quad W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1}) = \{\underline{0}\}$
(v) se B_i è una base di W_i, allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ è base di $W_1 + \dots + W_k$
(vi) $\dim(W_1 + \dots + W_k) = \sum_{i=1}^{k} \dim W_i$

DIMOSTRAZIONE

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\underline{0} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_k = \underline{0} + \dots + \underline{0}$ ma la scrittura è unica $\Longrightarrow \underline{w}_i = \underline{0} \ \forall i = 1, \dots, n$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\underline{w} = \underline{w}_1 + \dots + \underline{w}_k = \underline{w}_1' + \dots + \underline{w}_k' \Longrightarrow (\underline{w}_1 - \underline{w}_1') + \dots + (\underline{w}_k - \underline{w}_k') = \underline{0} \Longrightarrow \underline{w}_i = \underline{w}_i' \Rightarrow$ la scrittura è unica

(i) $\Rightarrow$ (iv) Sia $\underline{v} \in W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1})$: $\underline{v} = \underline{0} + \underline{v}$ con $\underline{0} \in W_i$ e $\underline{v} \in W_1 \cap \dots \cap W_{i-1}$ e $\underline{v} = \underline{v} + \underline{0}$ con $\underline{v} \in W_i$ e $\underline{0} \in W_1 \cap \dots \cap W_{i-1}$
ma la scrittura è unica $\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$

(iv) $\Rightarrow$ (iii) $i = k \quad W_k \cap (W_1 + \dots + W_{k-1}) = \{\underline{0}\}$
$W_1 + \dots + W_k = \mathrm{Span}(W_1 \cup \dots \cup W_k) = \mathrm{Span}(W_1 \cup \dots \cup \cancel{W_i} \cup \dots \cup W_k \cup W_i)$
per (iv) (permutando gli indici: $W_i \cap (W_1 + \dots + \cancel{W_i} + \dots + W_k) = \{\underline{0}\}$

(iii) $\Rightarrow$ (v) $\mathcal{B}$ per def. genera $W_1 + \dots + W_k$; devo mostrare che è lin. ind.
Sia $\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i^{(1)} \underline{v}_i^{(1)} + \dots + \sum_{i=1}^{k_k} \alpha_i^{(k)} \underline{v}_i^{(k)} = \underline{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k_j} -\alpha_i^{(j)} \underline{v}_i^{(j)} = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i^{(1)} \underline{v}_i^{(1)} + \dots + \sum_{i=1}^{k_{j-1}} \alpha_i^{(j-1)} \underline{v}_i^{(j-1)} + \sum_{i=1}^{k_{j+1}} \alpha_i^{(j+1)} \underline{v}_i^{(j+1)} + \dots + \sum_{i=1}^{k_k} \alpha_i^{(k)} \underline{v}_i^{(k)} = \underline{v}$
perciò $\underline{v} \in W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_k) = \{\underline{0}\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k_j} -\alpha_i^{(j)} \underline{v}_i^{(j)} = \underline{0} \underset{\mathcal{B}_j \text{ l.ind}}{\Longrightarrow} \alpha_i^{(j)} = 0 \ \forall i, j$

(v) $\Rightarrow$ (vi) ovvio

(vi) $\Rightarrow$ (v) $\mathcal{B}$ genera. Se $\mathcal{B}$ non fosse lin. ind, potrei estrarre una base, ma allora $\dim(W_1 + \dots + W_k) < \sum_{i=1}^{k} \dim W_i$ ↯

(v) $\Rightarrow$ (i) $W_1 + \dots + W_k \ni \underline{v} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_i^{(n_j)} \underline{w}_i^{(n_j)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \beta_i^{(n_j)} \underline{w}_i^{(n_j)}$ con $\alpha_i^{(n_j)} \neq \beta_i^{(n_j)} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (\alpha_i^{(n_j)} - \beta_i^{(n_j)}) \underline{w}_i^{(n_j)} = \underline{0}$
ma $\mathcal{B}$ è base $\Rightarrow \underline{w}_i^{(n_j)}$ sono lin. ind $\Rightarrow \alpha_i^{(n_j)} - \beta_i^{(n_j)} = 0 \ \forall i, j \Rightarrow \alpha_i^{(n_j)} = \beta_i^{(n_j)} \ \forall i, j \Rightarrow$ la scrittura è unica □

corollario Gli autospazi $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta $(V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k})$

DIMOSTRAZIONE
Usiamo ad esempio la condizione (v) □

oss f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori distinti di f

$\Rightarrow$: basta dimostrare $V = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$, ma se f ha una base di autovettori questo è evidente

$\Leftarrow$: si usa ad esempio la (v)

oss $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \mu_g(\lambda_i) = \dim V$

Teorema criterio di diagonalizzabilità

Dato $f: V \longrightarrow V$ con V sp. vett su $\mathbb{K}$

Detti $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{K}$ tutti gli autovalori distinti di f,

f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$

(1) $\sum_{i=1}^{h} \mu_a(\lambda_i) = \dim V$

(2) $\mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i) \quad \forall i$

oss (1) equivale a dire che $p_f(\lambda)$ si decompone completamente in $\mathbb{K}[\lambda]$ (fattori irriducibili di grado 1)

$$p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_a(\lambda_1)} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\mu_a(\lambda_k)}$$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: f è diagonalizz $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_h} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{h} \mu_g(\lambda_i) = \dim V$

Sappiamo $\mu_a(\lambda_i) \geq \mu_g(\lambda_i) \ \forall i$, $\quad \sum \mu_a(\lambda_i) \leq \dim V$

Seguono (1) e (2)

$\Leftarrow$: Supponiamo valgano (1) e (2)

segue subito $\sum_{i=1}^{h} \mu_g(\lambda_i) = \dim V$ $\square$

Se A e B sono diagonalizzabili, allora $A \sim B \Leftrightarrow p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}$$

Se $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ i μ_j sono una permutazione dei λ_j

esempio $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sono simili

Consideriamo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ha radice in $\mathbb{C}$, ossia $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso

corollario Ogni polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ è completamente riducibile

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_k)^{m_k}$$

corollario Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ basta la condizione (2):

$f: V \to V$, sp. vett su $\mathbb{C}$, è diagonalizzabile

$\Leftrightarrow \mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i$

(lo stesso per ogni campo algebricamente chiuso)

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ non è algebricamente chiuso

esempio $\quad x^2+1$ non è riducibile

Sia $A\in M_n(\mathbb{R})$ $\quad f_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ $\quad f_A(\underline{x})=A\underline{x}$

$p_{f_A}(\lambda)=p_A(\lambda)\in\mathbb{R}[x]$

Proposizione Sia $p(x)\in\mathbb{R}[x]$. Allora α è radice di $p(x)$ $\Leftrightarrow \bar{\alpha}$ è radice di $p(x)$, e $\mu_a(\alpha)=\mu_a(\bar{\alpha})$

DIMOSTRAZIONE

$p(x)=a_0x^n+\ldots+a_n\in\mathbb{R}[x]$

$0=p(\alpha)=a_0(\alpha)^n+\ldots+a_n$

$0=\bar{0}=\overline{p(\alpha)}=\overline{a_0\alpha^n+\ldots+a_n}=\bar{a}_0\bar{\alpha}^n+\ldots+\bar{a}_n=a_0\bar{\alpha}^n+\ldots+a_n=p(\bar{\alpha})$

$(x-\alpha)$ e $(x-\bar{\alpha})$ dividono $p(x)$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$\Rightarrow p_\alpha(x)=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\bar{\alpha}=x^2-2\mathrm{Re}(\alpha)x+|\alpha|^2\in\mathbb{R}[x]$

$\Rightarrow p(x)=p_\alpha(x)\cdot q(x)$ con $q(x)\in\mathbb{R}[x]$ $\deg q=\deg p-2$

Per induzione $\mu_a(\alpha)$ in $q(x)$ è la stessa di $\mu_a(\bar{\alpha})$ in $q(x)$ $\square$

Mentre lo spettro di $A\in M_n(\mathbb{C})$ può essere qualunque n-upla di numeri complessi (contati con molteplicità) (basta prendere la matrice diagonale con quei numeri), lo spettro di $A\in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrico rispetto all'asse reale.

$f_A(\underline{x})=A\underline{x}$ $\quad f_A:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ $\quad A\in M_n(\mathbb{R})$

$\tilde{f}_A(\underline{z})=A\underline{z}$ $\quad \tilde{f}_A:\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{C}^n$

esempio $\quad A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ $\quad f_A:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $\theta\neq k\pi$ non ha autovalori

$\underline{z}\longmapsto A\underline{z}$ $\quad \underline{z}\in\mathbb{C}^2$ $\quad \tilde{f}_A$ ha autovalori complessi

$p_A(\lambda)=\lambda^2-2\cos\theta\,\lambda+1$

$\lambda_{1,2}=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm\sqrt{-\sin^2\theta}\notin\mathbb{R}$

ma su $\mathbb{C}$ $\quad \lambda_{1,2}=\cos\theta\pm i\sin\theta=e^{\pm i\theta}$

ha 2 autovalori distinti

$\tilde{f}_A:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ è diagonalizzabile

$\mathbb{K}\supset\mathbb{F}$ campi

V sp vett su $\mathbb{K}$, posso restringere ad $\mathbb{F}$ il prodotto esterno, trovando uno sp vett su $\mathbb{F}$ (eserc: $\dim_{\mathbb{F}}V=\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{K}\cdot\dim_{\mathbb{K}}V$)

Se ho $V^{\mathbb{F}}$ sp vett su $\mathbb{F}$, posso estendere gli scalari a $\mathbb{K}$ e trovare uno sp vett su $\mathbb{K}$: $V^{\mathbb{K}}\supset V^{\mathbb{F}}$

L'estensione è fatta in modo che $f^{\mathbb{F}}:V^{\mathbb{F}}\longrightarrow V^{\mathbb{F}}$ endomorfismo si estende a

$f^{\mathbb{K}}:V^{\mathbb{K}}\longrightarrow V^{\mathbb{K}}$ $\mathbb{K}$-lineare

OSS Se A è diagonalizzabile, allora $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad AP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

da cui $AP^1 = \lambda_1 P^1 \qquad AP^2 = \lambda_2 P^2 \quad . \; AP^n = \lambda_n P^n$

$\Rightarrow P^i$ è autovettore rispetto a λ_i

esempio $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - (4+6+6)\lambda + (12+4) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 16\lambda + 16$

$$p(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 8)$$

$$\lambda_1 = 2, \; \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i$$

A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$? NO

A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$? sì

$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ 1 autovettore. $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A - (2+2i)I = \begin{bmatrix} -2i & 0 & -1 \\ 0 & -2i & -1 \\ 2 & 2 & -2i \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2ix_1 + x_3 = 0 \\ 2ix_2 + x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$

$A - (2-2i)I = \begin{bmatrix} 2i & 0 & -1 \\ 0 & 2i & -1 \\ 2 & 2 & i \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2ix_1 - x_3 = 0 \\ 2ix_2 - x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$

Trovare $P \in GL_n(\mathbb{C})$ t.c. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ -1 & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ Verificare $P^{-1}AP$

OSS $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad \alpha, \bar{\alpha}$ autovalori $(\alpha \notin \mathbb{R})$ $\qquad \mu_a(\alpha) = \mu_a(\bar{\alpha})$

$\mu_g(\alpha) = \mu_g(\bar{\alpha})$, infatti

$A\underline{z} = \alpha \underline{z} \iff A\bar{\underline{z}} = \bar{\alpha}\bar{\underline{z}}$

$\underline{z} \longmapsto \bar{\underline{z}}$ induce un isomorfismo tra V_α e $V_{\bar{\alpha}}$

ATTENZIONE: questo è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali, non $\mathbb{C}$-spazi vettoriali

($\rho \cdot \underline{z} \longmapsto \overline{\rho \underline{z}} = \bar{\rho}\bar{\underline{z}}$, $\rho \in \mathbb{C}$ non è lineare su $\mathbb{C}$, solo su $\mathbb{R}$)

Questo basta però per dire che V_α e $V_{\bar{\alpha}}$ hanno la stessa dimensione anche su $\mathbb{C}$.

esempio $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ Calcolare A^{100}

Se $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$

se trovo $P \in GL_n(\mathbb{R})$ t.c. $P^{-1}AP = D$ diagonale

$\Rightarrow A = PDP^{-1} \quad \Rightarrow A^{100} = (PDP^{-1})^{100} = PD^{100}P^{-1}$

$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)$ $\qquad$ autovalori: $\lambda = 0, \lambda = -1$

$A - 0 \cdot I = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$A + 1I = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

esercizio $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & 2 & a-3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

Al variare di a, determinare autovalori, autovettori, se A è diagon.

$p_A(\lambda) = -\lambda^3+5\lambda^2-(0+4-\cancel{a}+2+\cancel{a}-3)\lambda + (2\cdot(2+a-3)-1\cdot(a-a+3)+2(-a-2)) =$

$= -\lambda^3+5\lambda^2-3\lambda+(2a-2-3-2a-4) = -\lambda^3+5\lambda^2-3\lambda-9 = -(\lambda+1)(\lambda-3)^2$

- $\lambda_1 = -1 \quad \mu_a(-1) = 1 = \mu_g(-1)$

$$A+I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & 3 & a-3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3-3R_1]{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 3 & a-3 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{4}R_3]{R_2 \to R_2 - aR_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & a+3 & -(a+3) \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3-(a+3)R_2]{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} \qquad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = 3 \quad \mu_a(3) = 2$

$$A-3I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & -1 & a-3 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3+R_1]{R_3 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ a & -1 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - aR_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & a-1 & 3(a-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \operatorname{rnk}(A-3I) = \begin{cases} 2 & \text{se } a \neq 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

$a=1 \longrightarrow A-3I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \longrightarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_g(3) = 2$

$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$a \neq -1 \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ (a-1)x_2 + 3(a-1)x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \qquad \underline{v}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mu_g(3) = 1$

$\Rightarrow A$ è diagonalizz $\Leftrightarrow a = 1$, $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$

OSS Se $W = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subset V \quad \lambda_i \neq \lambda_j$, allora è f-invariante

$W \ni \underline{w} = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_k \longrightarrow f(\underline{w}) = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k \in W$

Lemma $W = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$, $U \subset W$ sottospazio f-invariante se e solo se $U = (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (U \cap V_{\lambda_k})$

DIMOSTRAZIONE

$\Leftarrow$ Se $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ con $U_i \subset V_{\lambda_i}$

$\underline{v} = \underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_k \qquad f(\underline{v}) = \lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k$

$\Rightarrow U$ è f-invariante

$\Rightarrow$ U è f-invariante $\quad U \subset W$

$\underline{v}$ si decompone in $\underline{v} = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_k$ con $\underline{v}_i \in V_{\lambda_i}$

la tesi equivale a dire che ogni $\underline{v}_i \in U$

Per induzione su m: se $\underline{v}$ si decompone in somma di autovettori $(\neq \underline{0})$

$\underline{v} = \underline{v}_{i_1} + \dots + \underline{v}_{i_m}$ allora $\underline{v}_{i_j} \in U$

- $m=1$ ovvio
- $f(\underline{v}) = \lambda_{i_1} \underline{v}_{i_1} + \dots + \lambda_{i_m} \underline{v}_{i_m}$

Moltiplico la prima per λ_{i_m} e faccio la differenza.

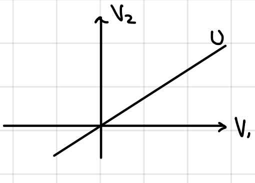
$\underline{v}' = f(\underline{v}) - \lambda_{i_m} \underline{v} = (\lambda_{i_1} - \lambda_{i_m})\underline{v}_1 + \dots + (\lambda_{i_{m-1}} - \lambda_{i_m})\underline{v}_{i_{m-1}}$

$\underline{v}' \in U$ perché U è f-invariante e sottospazio

$\Rightarrow$ per induzione $\underline{v}_{i_j} \in U$ per $i = 1, \dots, m-1$

Dalla prima si conclude che $\underline{v}_{i_m} \in U$ $\square$

esempio $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2 \qquad V_i = \operatorname{Span}(\underline{e}_i)$



non è vero $U = (U \cap V_1) + (U \cap V_2)$

esempio $f: V \to V$ diagonalizzabile $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

Supponiamo che $\mu_g(\lambda_i) = 1 \longrightarrow \dim V_{\lambda_i} = 1$

Il lemma implica che $W \subset V$ invariante, $W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_i})$

ma $W \cap V_{\lambda_i} = \begin{cases} V_{\lambda_i} \\ \{0\} \end{cases}$

Sottospazi invarianti di dim m sono $\binom{k}{m}$

Se invece $\dim V_{\lambda_i} > 1$, i sottospazi del tipo $W \cap V_{\lambda_i}$ sono infiniti (se $\mathbb{K}$ è infinito)

corollario $f: V \to V$ diagonalizzabile e $W \subset V$ f-invariante
Allora $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile

DIMOSTRAZIONE

$W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_k})$

$\Rightarrow W$ ha base di autovettori (autovettori di f in W sono anche autovettori di $f|_W$) $\square$

DIMOSTRAZIONE (alternativa)

Si basa su 2 osservazioni:

(1) Se $V = U \oplus W$, con U, W f-invarianti, f diag $\Leftrightarrow f|_U, f|_W$ diag.

(2) f diag, W f-inv $\Rightarrow \exists\, U$ suppl di W f-inv

Dimostrando (1) e (2), si ha (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow f|_W$ diag.

(1) $\Leftarrow$: $\exists\, \mathcal{C}$ base di autovettori di U, $\mathcal{D}$ base di autovettori di W

$\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ base di autovettori di $V \Rightarrow f$ diag

$\Rightarrow$: $\underline{v} \in V$ t.c. $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ $\lambda \in sp(f)$

$\exists\, \underline{w} \in W, \underline{u} \in U$ t.c. $\underline{v} = \underline{w} + \underline{u} \Rightarrow \underset{\in W}{\lambda \underline{w}} + \underset{\in U}{\lambda \underline{u}} = \lambda \underline{v} = f(\underline{v}) = \underset{\in W}{f(\underline{w})} + \underset{\in U}{f(\underline{u})}$

$\Rightarrow f(\underline{w}) = \lambda \underline{w}$, $f(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$ e $\underline{w} = pr_W(\underline{v})$, $\underline{u} = pr_U(\underline{v})$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V di autovettori per f

$pr_W : V \to W$ è surgettiva $\Rightarrow pr(v_1), \dots, pr(v_n)$ generano W

Estraendo una base $\mathcal{C}$ di W, ottengo una base di autovettori per W

$\Rightarrow f|_W$ diag. (Analogo per U)

(2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di autovettori di V

$\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W

Estraiamo una base di V da $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m, v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m, \underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_{n-m}}\}$

Sia $U = \mathrm{Span}(\underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_{n-m}})$ (autovettori di f) $\Rightarrow f(U) \subset U$ e $V = U \oplus W$ $\square$

$f, g: V \longrightarrow V$, entrambi diagonalizzabili

È possibili diagonalizzarli simultaneamente? (cioè $\exists\, \mathcal{B}$ di autovettori per entrambi?)

OSS $f \circ g = g \circ f \Rightarrow \mathrm{Ker}\, g, \mathrm{Im}\, g$ sono f-invarianti

DIMOSTRAZIONE

$g(\underline{v}) = \underline{0}$ $f(g(\underline{v})) = \underline{0} = g(f(\underline{v})) \Rightarrow f(\underline{v}) \in \mathrm{Ker}\, g$

$\underline{v} = g(\underline{u})$ $f(\underline{v}) = f(g(\underline{u})) = g(f(\underline{u})) \Rightarrow f(\underline{v}) \in \mathrm{Im}\, g$ $\square$

Teorema $f, g : V \to V$ diagonalizzabili
f, g sono simultaneamente diagonalizzabili se e solo se $f \circ g = g \circ f$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ $\exists\, \mathcal{B}$ base di autovettori per f e g

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

ma matrici diagonali commutano $\Rightarrow f \circ g = g \circ f$

$\Leftarrow$ $f \circ g = g \circ f$ siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tutti gli autovalori distinti di f

Sappiamo $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$

$V_{\lambda_j} = \ker(f - \lambda_j id)$ Anche $f - \lambda_j id$ e g commutano

$\Rightarrow V_{\lambda_j}$ è g-invariante $j = 1, \dots, k$

g diagonalizzabile $\Rightarrow g|_{V_{\lambda_j}}$ diagonalizzabile

$\Rightarrow \exists\, v_1^{(j)}, \dots, v_k^{(j)}$ base di V_{λ_j}, autovettori di g $k_j = \dim V_{\lambda_j} = \mu_g(\lambda_j)$

Mettendo insieme tutte le basi, trovo base di autovettori per g e per f $\square$

$f : V \to V$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V t.c. $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$f(v_1) = a_{11} v_1$ v_1 è autovettore

$f(v_2) = a_{22} v_2 + a_{12} v_1 \in Span(v_1, v_2)$

$f(v_3) = a_{33} v_3 + a_{23} v_2 + a_{13} v_1$

Una base di questo tipo si dice "a bandiera"

$v_1, \dots, v_n$ $f(v_i) \in Span(v_1, \dots, v_i)$ o anche $V_i = Span(v_1, \dots, v_i)$ è f-invariante

$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$ catena crescente di sottospazi invarianti

def. Una bandiera di sottospazi è data da n sottospazi non nulli di V t.c.

$\{0\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_n = V$

<u>OSS</u> $\dim W_i = i \quad \forall i = 1, \dots, n$

Ogni base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ dà una bandiera ponendo $W_i = Span(v_1, \dots, v_i)$

Con bandiera si intende anche una bandiera f-invariante, cioè:

$W_i = Span(v_1, \dots, v_i)$ è f-invariante ossia $f(v_i) \in Span(v_1, \dots, v_i)$

Avere una base $\mathcal{B}$ a bandiera equivale ad avere una base adattata a una bandiera di sottospazi invarianti

<u>OSS</u> A triangolare $p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$

quindi $p_A(\lambda)$ è completamente riducibile in $\mathbb{K}$

Teorema di triangolarizzazione $f: V \longrightarrow V$

$p_f(\lambda)$ è completamente riducibile se e solo se f è triangolabile

Equivalentemente, $A \in M_n(\mathbb{K})$, $p_A(\lambda)$ è completamente riducibile se e solo se A è triangolabile, ossia $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $P^{-1}AP$ è triangolare

DIMOSTRAZIONE

$\Leftarrow$: già visto

$\Rightarrow$: Per induzione su $n = \dim V$

$p_f(\lambda)$ riducibile $\Rightarrow p_f$ ha almeno una radice in $\mathbb{K}$

$\Rightarrow f$ ha almeno un autovalore λ_1 con autovettore $\underline{v}_1$

Completo a base B di V: $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

$$M_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & B \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right) \qquad C \in M_{n-1}(\mathbb{K})$$

$V = U \oplus W \qquad U = \mathrm{Span}(\underline{v}_1) \qquad W = \mathrm{Span}(\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$

<u>OSS</u> $pr_W \circ f|_W : W \longrightarrow W \qquad pr_W : V \longrightarrow W$

$C = M_{B'}(pr_W \circ f|_W) \qquad$ dove $B' = \{\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$

<u>OSS</u> $p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\, p_C(\lambda) \Rightarrow p_C(\lambda)$ si riduce completamente in $\mathbb{K}$

$\Rightarrow W$ ha base a bandiera per $pr_W \circ f|_W$

Quindi mettendo insieme $\underline{v}_1$ con questa base, questa è ancora a bandiera per f $\square$

corollario Se $f: V \longrightarrow V$ triangolabile, $W \subset V$ sottospazio f-invariante allora $f|_W$ è triangolabile

DIMOSTRAZIONE

f è triangolabile $\Rightarrow p_f$ è completamente riducibile in $\mathbb{K}[\lambda]$

ma $p_{f|_W} \mid p_f$ (vedi più avanti) $\Rightarrow p_{f|_W}$ è completamente riducibile

$\Rightarrow f|_W$ triangolabile $\square$

Teorema Date $f, g: V \longrightarrow V$ triangolabili

f e g sono simultaneamente triangolabili $\Leftrightarrow$ esiste B base a bandiera per f e g $\Leftarrow f \circ g = g \circ f$

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su $n = \dim V$.

f triangolabile $\Rightarrow \exists \lambda \in sp(f) \Rightarrow V_\lambda \neq \{\underline{0}\}$, e V_λ è g invariante (perché commutano)

$\Rightarrow g|_{V_\lambda}$ è triangolabile

Dunque $\exists \mu \in sp(g|_{V_\lambda}) : V_\mu(g|_{V_\lambda}) \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow \exists \underline{v} \in V_\mu(g|_{V_\lambda}) : \quad g(\underline{v}) = \mu \underline{v}$

$\Rightarrow \exists \underline{v}$ autovettore per f e per g

Estendiamo a base di V: $B = \{\underline{v}, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n\}$ e $W = \mathrm{Span}(\underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n)$

Da cui: $M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ e $M_B^B(g) = \left(\begin{array}{c|c} \mu & * \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$

Siano $f_1 = pr_W \circ f|_W$, $g_1 = pr_W \circ g|_W$, risulta $f_1 g_1 = g_1 f_1$ e $p_f = (\lambda - t)\, p_{f_1}$, $p_g = (\mu - t)\, p_{g_1}$

$\Rightarrow p_{f_1}$ e p_{g_1} sono completamente fattorizzabili in $\mathbb{K}[\lambda] \Rightarrow \exists \mathcal{C}$ base di W a bandiera per f_1 e g_1

$\Rightarrow \mathcal{D} = \{\underline{v}\} \cup \mathcal{C}$ è base a bandiera per f e g $\square$

$p_f(\lambda), p_A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$

$f: V \to V$ Dato $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$

Si pone $p(f) = a_0 \, id_V + a_1 f + \dots + a_n f^n \in \mathcal{L}(V)$

Fissando f, ho un'applicazione $\sigma_f : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ (indicata anche val_f)

anche per matrici $A \in M_n(\mathbb{K})$: $\sigma_A : \mathbb{K}[x] \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$

$\sigma_A(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n$

OSS σ_f è lineare

$\sigma_f(p(x) + q(x)) = \sigma_f(p(x)) + \sigma_f(q(x))$

$\sigma_f(\alpha p(x)) = \alpha \sigma_f(p(x))$

Inoltre $\sigma_f(p(x) q(x)) = (p(x) q(x))_{x=f} = p(f) q(f) = \sigma_f(p(x)) \, \sigma_f(q(x))$

$\longrightarrow \sigma_f$ è omomorfismo di anelli

$\exists \, p(x) \neq 0$ t.c. $p(f) = 0 \in \mathcal{L}(V)$?

$A = 0$ t.c. $p(A) = 0 \in M_n(\mathbb{K})$?

$I, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ sono lin. dip.

$\Rightarrow \exists \, a_0, \dots, a_{n^2}$ t.c. $a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$

allora $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n^2} x^{n^2}$ è annullato da A

OSS $\operatorname{Ker} \sigma_f = \{ p(x) \mid p(f) = 0 \}$ è un ideale di $\mathbb{K}[x]$

$\sigma_f(q(x) p(x)) = q(f) p(f) = 0$

def. Si dice polinomio minimo di f l'unico polinomio monico di $\operatorname{Ker} \sigma_f$ di grado minimo >0, ossia il generatore di $\operatorname{Ker} \sigma_f$: $\varphi_f(x) \in \mathbb{K}[x]$

UNICITÀ: φ_f, ψ_f monici e diversi $\Rightarrow h(x) = \varphi_f(x) - \psi_f(x)$ è $\neq 0$, di grado più basso e $h(x) \in \operatorname{Ker} \sigma_f$ $\lightning$

Quindi $\varphi_f(x)$ divide tutti i polinomi di $\operatorname{Ker} \sigma_f$

esempio $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$ $p_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$

$p_D(D) = 0$ $(D - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (D - \lambda_k I)^{m_k} = 0$

Si può vedere o guardando come sono fatte le $D - \lambda_j I$

oppure osservando che se $\underline{v}_j$ è autovettore relativo all'autovalore λ_j

$p_D(D) \, \underline{v}_j = \underline{0}$

ma c'è una base di autovettori $\Rightarrow p_D(D)$ azzera una base $\Rightarrow p_D(D) = 0$

OSS $\mathcal{B}$ base di V: $M_{\mathcal{B}}(p(f)) = p(M_{\mathcal{B}}(f))$

OSS $A \in M_n(\mathbb{K})$ $\varphi_A(x)$ è il polinomio minimo di $\operatorname{Ker} \sigma_A$

allora $\varphi_A(x)$ è invariante per similitudine

Infatti, se $A \sim B$, $B = P^{-1} A P$, allora $p(x) \in \operatorname{Ker} \sigma_A \Leftrightarrow p(x) \in \operatorname{Ker} \sigma_B$

poiché $p(B) = p(P^{-1} A P) = P^{-1} p(A) P$, quindi $p(A)$ e $p(B)$ si annullano per gli stessi valori

Teorema di Hamilton-Cayley

Data $f: V \longrightarrow V$, vale $p_f(f) = 0$
Equivalentemente: $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $p_A(A) = 0$
(dove p_f è il polinomio caratteristico di f)

DIMOSTRAZIONE

Data $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det A = \sum a_{ij} \, Cof(a_{ij})$

<u>OSS:</u> $\sum a_{ij} \, Cof(a_{i'j}) = 0$
perché è il det della matrice ottenuta da A sostituendo al posto della i'-esima riga la i-esima riga, che ha 2 righe uguali

La matrice aggiunta di A è $adj(A) = (Cof(a_{ij}))^T$
Si ha $A \cdot adj(A) = \det A \cdot I$

Quindi data $A \in M_n(\mathbb{K})$, sia $B = adj(A - \lambda I) \in M_n(\mathbb{K}[\lambda])$
$B(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) I = p_A(\lambda) \cdot I$

Ora $B = (b_{ij})$ $b_{ij} \in \mathbb{K}[\lambda]$ $gr(b_{ij}) \leq n-1$
con $b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)} \lambda + \dots + b_{ij}^{(n-1)} \lambda^{n-1}$

Pongo $B^{(h)} = (b_{ij}^{(h)})$ con $B^{(h)} \in M_n(\mathbb{K})$, $h = 0, \dots, n-1$

Perciò: $B = \sum_{h=0}^{n-1} B^{(h)} \lambda^h$

ad esempio: $\begin{pmatrix} a_0 + a_1\lambda & b_0 + b_1\lambda \\ c_0 + c_1\lambda & d_0 + d_1\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I) B = p_A(\lambda) \cdot I$ Sia $p_A(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$

ossia $(A - \lambda I) \sum_{h=1}^{n-1} B^{(h)} \lambda^h = (a_n \lambda^n + \dots + a_0) I$

Uguagliando i coefficienti si ha:

$$\begin{cases} AB^{(0)} = a_0 I \\ AB^{(1)} - B^{(0)} = a_1 I \\ \vdots \\ AB^{(n-1)} - B^{(n-2)} = a_{n-1} I \\ -B^{(n-1)} = a_n I \end{cases}$$

Moltiplichiamo le righe rispettivamente per $I, A, A^2, \dots, A^n$ e sommiamo

$0 = a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n = p_A(A)$ $\square$

corollario $\varphi_A(\lambda) \mid p_A(\lambda)$ e, equivalentemente, $\varphi_f(\lambda) \mid p_f(\lambda)$

$p_f(f) = 0 \implies \varphi_f(\lambda) \mid p_f(\lambda) \implies \deg \varphi_f(\lambda) \leq n = \dim V$

Se $p_f(\lambda)$ è completamente riducibile in $\mathbb{K}[\lambda]$

$p_f(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_n)^{m_n}$ λ_i autovalori con $\mu_a(\lambda_i) = m_i$

$\implies \varphi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdots (\lambda - \lambda_n)^{a_n}$ $a_i \leq m_i$

<u>NOTA</u>: non può essere $a_i = 0$ per nessun i
altrimenti, sia $\underline{v}_i$ un autovettore per λ_i
$\underline{0} = \varphi_f(f)(\underline{v}_i) = (f - \lambda_1 id)^{a_1} \cdots (f - \lambda_n id)^{a_n} (\underline{v}_i)$
$(f - \lambda_j id)^{a_j} (\underline{v}_i) = (\lambda_i - \lambda_j)^{a_j} (\underline{v}_i)$ $\neq \underline{0}$ se $i \neq j$
Se fosse $a_i = 0$, varrebbe $(\lambda_i - \lambda_1)^{a_1} \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})^{a_{i-1}} (\lambda_i - \lambda_{i+1})^{a_{i+1}} \cdots (\lambda_i - \lambda_n)^{a_n} (\underline{v}_i) \neq \underline{0}$

<u>NOTA</u> Se f è diagonalizzabile $\implies \varphi_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$
cioè $\varphi_f(\lambda)$ si riduce in fattori lineari distinti in $\mathbb{K}[\lambda]$
$\varphi_f(\lambda) = (f - \lambda_1 id) \cdots (f - \lambda_n id)$ applicato a un qualunque fattore dà 0
ad esempio: $f(\underline{v}_1) = \lambda_1 \underline{v}_1$
$\varphi_f(f)(\underline{v}_1) = \cdots (f - \lambda_1 id)(\underline{v}_1) = \cdots (\lambda_1 \underline{v}_1 - \lambda_1 \underline{v}_1) = \underline{0}$

Siccome V ha base di autovettori $\implies \varphi_f(f)$ annulla una base $\implies \varphi_f(f) = 0$

Sia $f : V \longrightarrow V$ con $W \subset V$ f-invariante. Allora:

(1) $p_{f|_W}(\lambda) \mid p_f(\lambda)$

Infatti prendiamo una base $\mathcal{B}$ di V che estende una base $\mathcal{B}'$ di W

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}'}(f|_W) & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

sottraendo λI e usando che il det è a blocchi, si conclude.

(2) $p_f(\lambda)$ sia completamente riducibile $\Rightarrow p_{f|_W}(\lambda)$ lo è

per cui $f|_W$ ha almeno un autovalore e i corrispondenti autovettori

In particolare, sia f sia $f|_W$ sono triangolarizzabili

(3) $\varphi_{f|_W}(x) \mid \varphi_f(x)$

Notiamo che se M è matrice a blocchi, $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$

$\forall p(x) \in \mathbb{K}[x]$, si ha

$$p(M) = \left[\begin{array}{c|c} p(A) & B' \\ \hline 0 & p(C) \end{array}\right]$$

Quindi $p(M) = 0 \Rightarrow p(A) = 0$

In particolare $\varphi_M(x)$ è annullato da $A \Rightarrow \varphi_A(x) \mid \varphi_M(x)$

Per endomorfismi si utilizza (1)

(4) (esercizio)

W f-invariante, f induce un'applicazione lineare al quoziente

$$\hat{f} : V/W \longrightarrow V/W$$
$$\hat{f}([v]_W) = [f(v)]_W$$

Allora la matrice C in (1) è $M_{\hat{\mathcal{B}}}(\hat{f})$

dove $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_k\}$ base di W

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ base di V

$\hat{\mathcal{B}} = \{[v_{k+1}], \dots, [v_n]\}$ base di V/W

$p_f(\lambda) = p_{f|_W}(\lambda)\, p_{\hat{f}}(\lambda)$

(5) Se W ha un supplementare U che è anch'esso invariante

se prendo $v_{k+1}, \dots, v_n$ in U, allora la matrice in (1) è

a blocchi diagonali $(B = 0)$

e $C = M_{\mathcal{B}''}(f|_U)$ $\qquad \mathcal{B}'' = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$

In questo caso $p_f(\lambda) = p_{f|_W}(\lambda)\, p_{f|_U}(\lambda)$

e $\varphi_f(\lambda) = \mathrm{mcm}(\varphi_{f|_W}(\lambda), \varphi_{f|_U}(\lambda))$

$p(x) \in \mathbb{K}[x]$ $\qquad p(M) = \left[\begin{array}{c|c} p(A) & 0 \\ \hline 0 & p(C) \end{array}\right]$

def. V è irriducibile se non ha sottospazi propri f-invarianti di dim ≥ 1

Dirò che un sottospazio invariante $W \subset V$ è irriducibile se lo è rispetto a $f|_W$

NOTA: se $\dim V = 1 \Rightarrow V$ è irriducibile

OSS se $p_f(\lambda)$ è completamente riducibile in $\mathbb{K}[\lambda]$ allora

gli unici sottospazi irriducibili sono quelli di dim 1 generati da un autovettore:

$W = \mathrm{Span}(v)$, $f(v) = \lambda v$

Polinomi minimi

$val_f : \mathbb{K}[t] \longrightarrow End(V)$, $\quad p(t) \longmapsto p(f)$

Si indicano: $\mathbb{K}[f] = Im\, val_f = Span(id, f, f^2, \dots)$

$I(f) = Ker\, val_f = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f) = 0 \in End(V)\}$

Si dimostra che $I(f)$ è un ideale principale di $\mathbb{K}[t]$: $I(f) = (\varphi_f(t))$

<u>OSS</u>: $p \in I(f) \iff Im\, p(f) = p(f)(V) = \{\underline{0}\} \iff Ker\, p(f) = V \iff \forall \underline{v} \in V \; p(f)(\underline{v}) = \underline{0}$

- ogni $p \in I(f)$ corrisponde a una combinazione lineare di potenze di f nulla:
  $p \in I(f) \iff p(f) = 0 \iff a_0 id + a_1 f + \dots + a_d f^d = 0$
- $\exists p \in I(f), \deg p = m \iff f^m \in Span(id, \dots, f^{m-1})$
  φ_f è la "minima" combinazione lineare nulla
- $\deg \varphi_f = d \iff id, f, \dots, f^{d-1}$ sono lin. ind. e $f^d \in Span(id, f, \dots, f^{d-1})$
- $\dim \mathbb{K}[f] = \deg \varphi_f$

Per calcolare φ_f:

- trovare minimo d t.c. $f^d \in Span(id, f, \dots, f^{d-1})$
- scrivere $f^d = a_0 id + a_1 f + \dots + a_{d-1} f^{d-1}$
- $\varphi_f = t^d - (a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_1 t + a_0)$

<u>OSS</u> se si conosce $p \in I(f)$, per trovare φ_f basta controllare i divisori di p

- $\forall p \in I(f) \qquad sp(f) \subset \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } p\}$
  Infatti, dati $\mathbb{K} \ni \lambda \in sp(f), \underline{v} \in V_\lambda(f)$, vale
  $\underline{0} = p(f)(\underline{v}) = a_0 \underline{v} + a_1 \lambda \underline{v} + \dots + a_d \lambda^d \underline{v} = p(\lambda)\underline{v} \implies p(\lambda) = 0$
- $sp(f) = \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } p_f\} = \{\text{radici in } \mathbb{K} \text{ di } \varphi_f\}$
  Infatti: $\subset$ segue da sopra, $\supset$ segue da $\varphi_f \mid p_f$ (HC)

<u>OSS</u> Dati $f, g \in End(V)$, $W \subset V$ ssp : $(g \circ f)|_W = g \circ f|_W = g|_{f(W)} \circ f|_W$

Se W è f-invariante, $f(W) \subset W$: $(g \circ f)|_W = g|_W \circ f|_W$

Quindi $\forall k \geq 0$: $(f^k)|_W = (f|_W)^k$. $\qquad$ Inoltre $|_W : End(V) \longrightarrow End(W)$ è lineare

$\implies p(f)|_W = p(f|_W) \qquad$ per $p \in \mathbb{K}[t]$

$I(f|_W) = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f|_W) = p(f)|_W = 0\} = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f)(W) = \{\underline{0}\}\} = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid Ker\, p(f) \supset W\}$

perciò $I(f) \subset I(f|_W) \implies \varphi_{f|_W} \mid \varphi_f$

Sia ora $V = U \oplus W$ con W f-invariante

Sia $g = \pi_U \circ f|_U \in End(U)$ $\qquad$ dove considero $\pi_U : V \longrightarrow V$, $\pi_U|_U = id_U$, $\pi_U|_W = 0$

$Im\, \pi_U = U \quad Ker\, \pi_U = W$

<u>OSS</u> $\pi_U \circ f \circ \pi_U = \pi_U \circ f$

Infatti: $\underline{v} \in V$, $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

$\pi_U \circ f \circ \pi_U(\underline{v}) = \pi_U \circ f(\underline{u})$

$\pi_U \circ f(\underline{v}) = \pi_U \circ f(\underline{u}) + \pi_U \circ f(\underline{w}) = \pi_U \circ f(\underline{u})$

Allora $g^k = (\pi_U \circ f|_U) \circ (\pi_U \circ f|_U) \circ \dots \circ (\pi_U \circ f|_U) = \pi_U \circ f \circ \pi_U \circ f \circ \dots \circ \pi_U \circ f|_U = \dots = \pi_U \circ f^{k-1} \circ f|_U = \pi_U \circ (f^k)|_U$

Dunque, dato $p \in \mathbb{K}[t]$: $p(g) = \pi_U \circ p(f|_U)$

$I(g) = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(g) = \pi_U \circ p(f|_U) = 0\} = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid Im(p(f)|_U) \subset Ker\, \pi_U\} = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f)(U) \subset W\}$

da cui $I(g) \supset I(f) \implies \varphi_g \mid \varphi_f$

OSS $\exists v : v, f(v), \dots, f^k(v)$ sono lin. ind. $\Rightarrow \deg \varphi_f \geq k+1$

Se $\deg \varphi_f = \dim V = \deg p_f \Rightarrow \varphi_f = \pm p_f$

poiché $\varphi_f \mid p_f$ (HC) e $\deg \varphi_f = \deg p_f \Rightarrow \varphi_f = \lambda p_f \Rightarrow \lambda = \pm 1$ (poiché entrambi monici)

OSS $\exists v \in V : v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ base di $V \Rightarrow \varphi_f = \pm p_f$

la base è ciclica (v: vettore ciclico, f ciclico)

> **proposizione** Dato $f \in End(V)$, p_f e φ_f hanno gli stessi fattori irriducibili
> Se $p_f = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ con p_i irr. $\Rightarrow \varphi_f = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ con p_i irr e $1 \leq n_i \leq m_i$

DIMOSTRAZIONE

Sia $q \in \mathbb{K}[t]$ irriducibile

Se $q \mid \varphi_f$, ma $\varphi_f \mid p_f \Rightarrow q \mid p_f$

Se $q \mid p_f$: per induzione su $n = \dim V$

- $\dim V = 1$: $p_f = \varphi_f$
- sia $v \in V, v \neq 0$, $W = \mathbb{K}[f](v) = Span(v, f(v), f^2(v), \dots)$ e W è f-invariante

  Sia U suppl. di W : $V = W \oplus U$ e $\dim U < \dim V$

  Siano $\mathcal{C}$ base di W, $\mathcal{D}$ base di U, $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ base di V. Sia $g = \pi_U \circ f|_U$

  Allora $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f|_W) & C \\ \hline 0 & M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}}(g) \end{array}\right) \Rightarrow p_f = p_g \, p_{f|_W}$

  Quindi se $q \mid p_f \Rightarrow$ o $q \mid p_g$ o $q \mid p_{f|_W}$

  Se $q \mid p_{f|_W} \underset{\uparrow}{=} \pm \varphi_{f|_W} \Rightarrow q \mid \varphi_{f|_W} \mid \varphi_f \Rightarrow q \mid \varphi_f$

  base ciclica

  se $q \mid p_g \overset{\text{hp. ind}}{\Longrightarrow} q \mid \varphi_g \mid \varphi_f \Rightarrow q \mid \varphi_f$ $\square$

Si può costruire anche:

dato $v \in V, v \neq 0$, con $val_v : End(V) \longrightarrow V$

$$val_{f,v} \quad \mathbb{K}[t] \xrightarrow[val_f]{} End(V) \xrightarrow[val_v]{} V$$

- $Im\, val_{f,v} = \mathbb{K}[f](v) = Span(v, f(v), f^2(v), \dots)$
- $Ker\, val_{f,v} = I(f,v) = (\varphi_{f,v})$ ideale di v relativo a f

  i polinomi di $I(f,v)$ corrispondono alle combinazioni lineari nulle delle potenze di $f(v)$
- $\dim \mathbb{K}[f](v) = \deg \varphi_{f,v}$
- $I(f,v) = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f)(v) = 0\} \supset I(f) \Rightarrow \varphi_{f,v} \mid \varphi_f$

> **proposizione** Dati $v_1, \dots, v_k$ generatori di V, allora
> $\varphi_f = mcm(\varphi_{f,v_1}, \dots, \varphi_{f,v_k})$

DIMOSTRAZIONE

Sia $m = mcm(\varphi_{f,v_1}, \dots, \varphi_{f,v_k})$ Si ha $\varphi_{f,v_i} \mid \varphi_f \ \forall i \Rightarrow m \mid \varphi_f$.

Voglio mostrare $m \in I(f)$ ($\Rightarrow \varphi_f \mid m$)

Sia $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$

$\exists h_i \in \mathbb{K}[t]$ t.c. $h_i \cdot \varphi_{f,v_i} = m$

Ora $m(f)(v) = \sum_{i=1}^{k} a_i m(f)(v_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i (h_i \cdot \varphi_{f,v_i})(f)(v_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, h_i(f)(v_i) \cdot \varphi_{f,v_i}(f)(v_i) = 0$

$\Rightarrow m \in I(f) \Rightarrow \varphi_f \mid m \Rightarrow m = \varphi_f$ $\square$

proposizione Sia $f \in End(V)$. Allora $\exists \underline{v} \in V$ t.c. $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$

DIMOSTRAZIONE

Se $\mathbb{K}$ è infinito:

Sia $S = \{\varphi_{f,\underline{v}} \mid \underline{v} \in V\} \subset \{\text{divisori di } \varphi_f\}$, quindi S è finito

$\Rightarrow \exists\, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ t.c. $S = \{\varphi_{f,\underline{v}_1}, \dots, \varphi_{f,\underline{v}_k}\}$

Quindi $\forall \underline{v} \in V$, $\varphi_{f,\underline{v}} \in S \Rightarrow \exists i$ t.c. $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_{f,\underline{v}_i}$

$\Rightarrow \varphi_{f,\underline{v}_i}(f)(\underline{v}) = \varphi_{f,\underline{v}}(f)(\underline{v}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \in Ker\, \varphi_{f,\underline{v}_i}$

Allora $V = \bigcup_{i=1}^{k} Ker\, \varphi_{f,\underline{v}_i} \xrightarrow{\mathbb{K} \text{ infinito}} \exists j : V = Ker\, \varphi_{f,\underline{v}_j} \Leftrightarrow \varphi_{f,\underline{v}_j}(f) = 0$

$\Rightarrow \varphi_{f,\underline{v}_j} \in I(f) \Rightarrow \varphi_f \mid \varphi_{f,\underline{v}_j}$ ma vale $\varphi_{f,\underline{v}_j} \mid \varphi_f \Rightarrow \varphi_f = \varphi_{f,\underline{v}_j}$

(Se $\mathbb{K}$ è finito, vedi Manfrespense) □

Un endomorfismo $f \in End(V)$ si dice **ciclico** se esiste una base $\mathcal{B}$ di V del tipo $\{\underline{v}, f(\underline{v}), \dots, f^{n-1}(\underline{v})\}$. La base $\mathcal{B}$ si dice **ciclica** per f e si dice che $\underline{v}$ è un **generatore ciclico**.

f ciclico $\Leftrightarrow \mathbb{K}[f](\underline{v}) = V$

La matrice di f in una base ciclica $\mathcal{B}$ generata da $\underline{v}$ ha la forma

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

dove $f^n(\underline{v}) = -a_0\underline{v} - a_1 f(\underline{v}) - \dots - a_{n-1} f^{n-1}(\underline{v})$

Si dimostra per induzione che $\pm p_f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = \varphi_f(t)$

Per questo, la matrice si dice **matrice compagna** del polinomio monico q, **$C(q)$**.

Si è visto che se f è ciclico allora $\varphi_f = \pm p_f = \varphi_{f,\underline{v}}$ per ogni generatore ciclico $\underline{v}$.

Viceversa, se $\varphi_f = \pm p_f$, allora ogni $\underline{v} \in V$ tale che $\varphi_{f,\underline{v}} = \varphi_f$ genera una base ciclica per f.

Quindi abbiamo dimostrato:

proposizione $f \in End(V)$ è ciclico se e solo se $\varphi_f = \pm p_f$

<u>OSS</u> $\forall p \in \mathbb{K}[t]$, $Ker\, p(f)$ e $Im\, p(f)$ sono f-invarianti (poiché $f \circ p(f) = p(f) \circ f$)

proposizione $Ker\, p(f) = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow p(f)$ invertibile $\Leftrightarrow p$ e φ_f sono coprimi: $(p, \varphi_f) = 1$

DIMOSTRAZIONE

$\Leftarrow$: per Bézout $\exists h_1, h_2 \in \mathbb{K}[t]$: $1 = h_1 p + h_2 \varphi_f$

$\xRightarrow{\text{vale}} id_V = h_1(f)p(f) + h_2(f)\varphi_f(f) = h_1(f)p(f) \Rightarrow p(f)$ è invertibile

$\Rightarrow$: Sia $q = (p, \varphi_f)$, sia per assurdo $\deg q > 0$

$\exists h_1, h_2 \in \mathbb{K}[t]$ t.c. $p = h_1 q \quad \varphi_f = h_2 q$

$q(f)\, h_1(f) = p(f)$ invertibile $\Rightarrow q(f)$ invertibile

$q(f)\, h_2(f) = \varphi_f(f) = 0$ ma $q(f)$ invertibile $\Rightarrow h_2(f) = 0 \Rightarrow h_2 \in I(f)$

ma $\deg h_2 < \deg \varphi_f$ ↯

$\Rightarrow \deg q = 0 \Rightarrow q = 1$ □

Forma canonica di Jordan

Per il resto della lezione assumeremo che $p_f(\lambda)$ sia completamente riducibile

Consideriamo il caso $f: V \longrightarrow V$ con un solo autovalore λ con $\mu_a(\lambda) = \dim V$

def. Un blocco di Jordan $J_{\lambda,m}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$, è una matrice $J_{\lambda,m} \in M_m(\mathbb{K})$:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \lambda & 1 & & \cdot \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & & \lambda \end{bmatrix}$$

esempio $J_{\lambda,1} = [\lambda]$ $\qquad J_{\lambda,2} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\qquad J_{\lambda,3} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

Consideriamo $\hat{f}: \underline{x} \longmapsto J_{\lambda,m}\, \underline{x}$

$p_{\hat{f}}(x) = (-1)^n (x-\lambda)^n$ $\qquad$ unica radice λ con $\mu_a(\lambda) = m$

$\varphi_{\hat{f}}(x) = (x-\lambda)^k$ $\qquad$ per qualche $k \le m$

$$M = (J_{\lambda,n} - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \mu_g(\lambda) = 1$$

$$e_n \longmapsto e_{n-1} \longmapsto e_{n-2} \longmapsto \dots \longmapsto e_2 \longmapsto e_1 \longmapsto \underline{0} \qquad \text{(stringa)}$$

$$e_n \longmapsto M e_n \longmapsto M^2 e_n \longmapsto \dots \longmapsto M^{n-2} e_n \longmapsto M^{n-1} e_n \longmapsto M^n e_n = 0$$

la minima potenza di M che fa 0 è n

Quindi $\varphi_{\hat{f}}(x) = p_{\hat{f}}(x) = (x-\lambda)^n$

def. Un'applicazione $h: V \longrightarrow V$ si dice nilpotente se $h^m = 0$ per qualche $m \geq 1$.
Il minimo di tali m si chiama ordine di nilpotenza

> **Lemma** Dato $h: V \longrightarrow V$, $n = \dim V$, sono equivalenti:
> (1) h è nilpotente
> (2) $p_h(\lambda) = \lambda^n$
> (3) $\varphi_h(\lambda) = \lambda^m$ per qualche $m \le n$

DIMOSTRAZIONE

(1) $\Rightarrow$ (2) Se α è autovalore di $h \Rightarrow h(\underline{v}) = \alpha \underline{v}$

$h^2(\underline{v}) = \alpha^2 \underline{v}, \dots, h^k(\underline{v}) = \alpha^k \underline{v}$

Se $h^m = 0 \Rightarrow \alpha^m \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \alpha = 0$

(2) $\Rightarrow$ (3) segue da $\varphi_h(\lambda) \mid p_h(\lambda)$

(3) $\Rightarrow$ (1) per def. di applicazione nilpotente,

infatti $h^m = \varphi_h(h) = 0$ $\square$

esercizio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, α autovalore di $f \Rightarrow p(\alpha)$ autovalore di $p(f)$

def. Una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_i = h^i(\underline{v}), i = 0, 1, \dots, n-1, h^n(\underline{v}) = \underline{0}\}$ si dice base ciclica; $\underline{v}$ si dice vettore ciclico
Un sottospazio $W \subset V$ si dice ciclico se contiene una base ciclica

NOTA: W ciclico $\Rightarrow W$ h-invariante

Teorema Forma canonica di Jordan

Dato un endomorfismo $f: V \to V$, con p_f completamente riducibile. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{K}$ tutti gli autovalori distinti con molteplicità algebrica $\mu_1, \dots, \mu_h$. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1, n_{11}} & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{\lambda_1, n_{1k_1}} & & & & \\ & & & J_{\lambda_2, n_{21}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & J_{\lambda_2, n_{2k_2}} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & J_{\lambda_h, n_{h1}} \\ 0 & & & & & & & & \ddots & J_{\lambda_h, n_{hk_h}} \end{bmatrix}$$

dove gli n_{ij} sono determinati da f

Vale $\sum n_{1j} = \mu_1, \dots, \sum n_{hj} = \mu_h$ e $\varphi_f = \prod_{i=1}^{h} (x - \lambda_i)^{\max_j n_{ij}}$

Due matrici di Jordan sono simili se e solo se differiscono per l'ordine dei blocchi

esempio caso diagonalizzabile $\begin{bmatrix} \alpha & & & 0 \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix}$ $\mu_g(\alpha) = 4$

$\begin{bmatrix} \alpha & & & 0 \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix}$ $(\mu_g(\alpha) = 3)$, $\begin{bmatrix} \alpha & & & 0 \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix}$ $(\mu_g(\alpha) = 2)$, $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \alpha & & \\ & & \alpha & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix}$ $(\mu_g(\alpha) = 2)$, $\begin{bmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{bmatrix}$ $(\mu_g(\alpha) = 1)$

Strategia della dimostrazione

1) $\exists$ e sono unici sottospazi invarianti $U_1, \dots, U_h$ t.c.
   - (i) $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_h$
   - (ii) U_i è il massimo sottospazio inv. su cui f ha solo l'autovalore λ_i
2) si considera $f_i = f|_{U_i}$ allora $h_i = f_i - \lambda_i \mathrm{id}$ ha solo l'autovalore 0, cioè h_i è nilpotente

   Si dimostra che U_i si decompone in somma diretta di sottospazi ciclici: $U_i = U'_{i,n_1} \oplus \dots \oplus U'_{i,n_i}$
   Prendendo base ciclica di ogni $U'_{i,j}$ la matrice di h_i viene in blocchi $J_{0,n_{ij}}$
   allora nella stessa base la matrice di f_i si decompone nei blocchi $J_{\lambda_i, n_{ij}}$

Separazione degli autovalori

Data $f: V \to V$, notiamo:

$V \supset \mathrm{Im}\, f \supset \mathrm{Im}\, f^2 \supset \dots \supset \mathrm{Im}(f^k) \supset \dots$

$\{0\} \subset \mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \dots \subset \mathrm{Ker}\, f^k \subset \dots$

Sono tutti sottospazi f-invarianti

Lemma Se per un certo k si ha $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$ allora $\mathrm{Im}(f^{k+s}) = \mathrm{Im}(f^k)$ $\forall s \geq 0$
Lo stesso vale per i nuclei
Inoltre le due successioni si stabilizzano per lo stesso indice

DIMOSTRAZIONE

Per induzione su s.

- <u>s=1</u> : $\mathrm{Im}\, f^k \overset{hp}{=} \mathrm{Im}\, f^{k+1} = f(\mathrm{Im}\, f^k)$ ($\Rightarrow f|_{\mathrm{Im} f^k}$ è surgettiva e quindi iniettiva
  $\Rightarrow \mathrm{Ker}(f|_{\mathrm{Im} f^k}) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f^k = \{0\}$)
- $\mathrm{Im}\, f^{k+s+1} = f(\mathrm{Im}\, f^{k+s}) \overset{hp.ind}{=} f(\mathrm{Im}\, f^k) = \mathrm{Im}\, f^k$

Per la formula delle dimensioni, i nuclei si stabilizzano con lo stesso indice $\square$

Proposizione Sia $k = \min\{h \mid Im(f^h) = Im(f^{h+1})\}$. Allora:
(i) $V = Ker\, f^k \oplus Im\, f^k$ (decomposizione di Fitting di V rispetto a f)
(ii) $f|_{Ker f^k}$ è nilpotente
$f|_{Im f^k}$ non ha autovalore 0
(iii) $\mu_a(0) \geq k$

DIMOSTRAZIONE
(i) Poiché $f^k(Im\, f^k) = Im\, f^{2k} = Im\, f^k$ (ossia $f^k: Im f^k \longrightarrow Im f^{2k} = Im f^k$ iniettiva)
$\Rightarrow Im\, f^k \cap Ker\, f^k = \{0\}$
(ii) Per def, $f|_{Ker f^k}$ è nilpotente (ha solo autovalore 0)
$f|_{Im f^k}$ conserva la dimensione: non ha autovalore 0 ($Ker(f|_{Im f^k}) = \{0\}$)
(iii) $f|_{Ker f^k}$ è nilpotente per (ii): ha solo autovalore 0 e $f|_{Im f^k}$ non ha autovalore 0
Ma $p_f(t) = t^{\mu_a(0)} \cdot q(t)$ con $t \nmid q(t)$
$\Rightarrow \mu_a(0) = \dim Ker\, f^k \geq k$ □

<u>OSS</u> la decomposizione è una vera decomposizione solo se f ha autovalore 0

$f: V \longrightarrow V$ α sia autovalore di f
$f - \alpha id$ ha autovalore 0
Possiamo decomporre $V = Ker(f - \alpha id)^k \oplus Im(f - \alpha id)^k = \tilde{V}_\alpha \oplus \tilde{V}'_\alpha$
$\dim \tilde{V}_\alpha = \mu_a(0, f - \alpha id) = \mu_a(\alpha, f)$

def. $\tilde{V}_\alpha = \{v \mid (f - \alpha id)^m(v) = 0$ per qualche $m \geq 1\}$ si chiama **autospazio generalizzato** di f relativo all'autovalore α
<u>NOTA</u> basta prendere $\tilde{V}_\alpha = Ker(f - \alpha id)^{\mu_a(\alpha)}$

Teorema Decomposizione in autospazi generalizzati Sia $f: V \longrightarrow V$ con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ di molteplicità algebrica $\mu_1, \dots, \mu_h$. Allora si ha la decomposizione:
$$V = \tilde{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{V}_{\lambda_h}$$
dove $\tilde{V}_{\lambda_i}$ è il minimo sottospazio f-invariante dove f ha solo l'autovalore λ_i.

DIMOSTRAZIONE
Si consideri la decomposizione di Fitting per $f - \lambda_1 id$:
$$V = \underbrace{\tilde{V}_{\lambda_1}}_{\text{solo autovalore } \lambda_1 \text{ per } f} \oplus \underbrace{\tilde{V}'_{\lambda_1}}_{\text{altri autovalori di } f}$$
Si consideri $f|_{\tilde{V}'_{\lambda_1}}$ e si proceda con λ_2, ecc. □

<u>OSS</u> $\tilde{V}_{\lambda_i}$ si trova risolvendo il sistema lineare:
$(A - \lambda_i I)^{\mu_a(\lambda_i)} \underline{x} = \underline{0}$ con $A = M_B(f)$, B base di V

$h: V \longrightarrow V$ nilpotente. Dobbiamo fare vedere che $\exists\, \mathcal{B}$ di V t.c. $M_{\mathcal{B}}(h)$ è a blocchi di Jordan

$$M_{\mathcal{B}}(h) = \begin{bmatrix} J_{0,n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{0,n_k} \end{bmatrix}$$

Il sottospazio che ha un blocco come matrice ha base ciclica

$$\underset{u_{n-1}}{\underline{u}} \longmapsto \underset{u_{n-2}}{h(\underline{u})} \longmapsto h^2(\underline{u}) \longmapsto \dots \longmapsto h^{n-1}(\underline{u}) \longmapsto h^n(\underline{u}) = \underline{0}$$

$$\underset{\dots}{} \qquad h^{n-1}(\underline{u}) = \underline{v} \in \operatorname{Ker}(h) \cap \operatorname{Im}(h^{n-1})$$

h è nilpotente $\Longrightarrow \exists\, \nu$ t.c. $h^\nu = 0$, $m := \min\{\nu \mid h^\nu = 0\}$ ordine di nilpotenza ($m \le n = \dim V$ poiché $\varphi_h(x) \mid p_h(x) = x^n$)

$$\{\underline{0}\} \subset \operatorname{Ker}(h) \cap \operatorname{Im}(h^{m-1}) \subset \operatorname{Ker}(h) \cap \operatorname{Im}(h^{m-2}) \subset \dots \subset \operatorname{Ker}(h) \cap \operatorname{Im}(h) \subset \operatorname{Ker} h$$

$$\underset{\operatorname{Im}(h^m)}{\parallel} \subset \underset{K^{m-1}}{\parallel} \subset \underset{K^{m-2}}{\parallel} \subset \dots \subset \underset{K^1}{\parallel} \subset \underset{K^0}{\parallel}$$

Non è detto che le inclusioni siano strette:

sia $j_1 = \max\{l \mid K^l \neq \{\underline{0}\}\}\ (= m-1)$, $j_2 = \max\{l \mid K^l \supsetneq K^{j_1}\}$ ... $j_p = \max\{l \mid K^l = \operatorname{Ker} h\}$

$$\{\underline{0}\} \subsetneq K^{j_1} \subsetneq K^{j_2} \subsetneq K^{j_3} \subsetneq \dots \subsetneq K^{j_p} = \operatorname{Ker} h$$

Costruiamo una base di $\operatorname{Ker} h$ adattata alla catena di sottospazi

$\{\underline{v}_{11}, \dots, \underline{v}_{1t_1}\}$ base di K^{j_1}

$\{\underline{v}_{11}, \dots, \underline{v}_{1t_1}, \underline{v}_{21}, \dots, \underline{v}_{2t_2}\}$ base di K^{j_2}

...

$\{\underline{v}_{11}, \dots, \underline{v}_{pt_p}\}$ base di $K^{j_p} = \operatorname{Ker} h$

Per ogni $\underline{v}_{rs}$ costruiamo una stringa: $\underline{v}_{rs} \in K^{j_r} = \operatorname{Ker}(h) \cap \operatorname{Im}(h^{j_r})$

Prendiamo $\underline{u}_{rs}$ t.c. $h^{j_r}(\underline{u}_{rs}) = \underline{v}_{rs}$ Ho stringa (di lunghezza $j_r + 1$)

$$\underline{u}_{rs} \longmapsto h(\underline{u}_{rs}) \longmapsto h^2(\underline{u}_{rs}) \longmapsto \dots \longmapsto h^{j_r}(\underline{u}_{rs}) = \underline{v}_{rs}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\underline{u}_{11} \longmapsto \underline{u}_{11}^{(1)} \longmapsto \dots \longmapsto \underline{u}_{11}^{(j_1-1)} \longmapsto \underline{v}_{11} \\
\vdots & & & & \vdots \\
\underline{u}_{1t_1} \longmapsto \underline{u}_{1t_1}^{(1)} \longmapsto \dots \longmapsto \underline{u}_{1t_1}^{(j_1-1)} \longmapsto \underline{v}_{1t_1} \\
\qquad \underline{u}_{21} \longmapsto \underline{u}_{21}^{(1)} \longmapsto \dots \longmapsto \underline{u}_{21}^{(j_2-1)} \longmapsto \underline{v}_{21} \\
\qquad \vdots \\
\qquad \underline{u}_{2t_2} \longmapsto \underline{u}_{2t_2}^{(1)} \longmapsto \dots \longmapsto \underline{u}_{2t_2}^{(j_2-1)} \longmapsto \underline{v}_{2t_2} \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad \underline{u}_{pt_p} \longmapsto \dots \longmapsto \underline{u}_{pt_p}^{(j_p-1)} \longmapsto \underline{v}_{pt_p}
\end{array}
\qquad \underline{u}_{rs}^{(k)} := h^k(\underline{u}_{rs})$$

proposizione I vettori nella tabella sono una base di V

DIMOSTRAZIONE

$\forall\, \underline{v} \in V \quad \exists$ un indice $l \le m$ t.c. $h^l(\underline{v}) = \underline{0}$

i) Dimostriamo per induzione su l che tutti i vettori $\underline{v}$ t.c. $h^l(\underline{v}) = \underline{0}$ stanno nello spazio generato dai vettori della tabella

Sia $h^l(\underline{v}) = \underline{0}$. Se $l = 0, 1$, chiaro ($l = 0 \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$; $l = 1 \Rightarrow \underline{v} \in \operatorname{Ker} h$)

Sia $h^l(\underline{v}) = \underline{0}$, $l \ge 2$ Se anche $h^{l-1}(\underline{v}) = \underline{0}$ si applica l'induzione

Altrimenti $h^{l-1}(\underline{v}) \neq \underline{0}$ quindi $h^{l-1}(\underline{v}) \in \operatorname{Ker}(h) \cap \operatorname{Im}(h^{l-1}) = K^{l-1} = K^{j_s}$ per qualche s ($j_s \ge l-1$)

Base di K^{j_s} è data da tutti i $\underline{v}_{r,j}$ con $r \le s$, quindi:

$$h^{l-1}(\underline{v}) = \sum_{\substack{r \le s \\ j}} \alpha_{r,j}\, \underline{v}_{r,j} = \sum_{\substack{r \le s \\ j}} \alpha_{r,j}\, h^{j_r}(\underline{u}_{r,j}) \underset{\substack{\uparrow \\ r \le s \Rightarrow j_r \ge j_s}}{=} \sum_{\substack{r \le s \\ j}} \alpha_{r,j}\, h^{l-1}(h^{j_r-(l-1)}(\underline{u}_{r,j})) \Rightarrow h^{l-1}\left(\underline{v} - \sum \alpha_{r,j}\, h^{j_r-(l-1)}(\underline{u}_{r,j})\right) = \underline{0}$$

$\Longrightarrow$ per induzione quello tra parentesi è comb. lin. di vettori della tabella $\Longrightarrow$ anche $\underline{v}$ lo è

ii) Lineare indipendenza: Supponiamo di avere una comb lin. di vettori della tabella che dà $\underline{0}$.

Applicando h^{j_1} trovo una comb lin. dei vettori $\underline{v}_{1,j}$ con gli stessi coefficienti che appaiono nella prima colonna:

$$\sum \alpha_{r,j}^{(s)}\, \underline{u}_{r,j}^{(s)} = \underline{0} \qquad (\underline{u}_{r,j}^{(j_r)} = \underline{v}_{r,j}\ ,\ \underline{u}_{r,s}^{(0)} = \underline{u}_{r,s}) \Rightarrow h^{j_1}\left(\sum \alpha_{r,j}^{(s)}\, \underline{u}_{r,j}^{(s)}\right) = \sum \alpha_{r,j}^{(s)}\, h(\underline{u}_{r,j}^{(s)}) \underset{\uparrow}{=} \sum \alpha_{1,j}^{(0)}\, \underline{v}_{1,j}$$

se $r > 1$, o $s > 0$, $h^{j_1}(\underline{u}_{r,j}^{(s)}) = \underline{0}$; mentre $h^{j_1}(\underline{u}_{1,j}^{(0)} = \underline{u}_{1,j}) = \underline{v}_{1,j}$

Poiché i $\underline{v}_{r,j}$ sono lin. ind., si trova che i coefficienti $\alpha_{1,j}^{(0)}$ relativi ai vettori della prima colonna sono 0.

Applicando successivamente $h^{j_1-1}, h^{j_1-2}, \dots, h$, trovo che i coefficienti delle colonne 2, 3, ..

sono tutti 0. $\square$

corollario V si decompone come somma diretta di sottospazi ciclici generati dalle stringhe. La matrice di h in questa base è a blocchi di Jordan (si ordina la base prendendo una stringa alla volta e i vettori di una stringa sono ordinati da destra a sinistra)

Guardiamo meglio quanti blocchi ci sono di un certo ordine

t_1 blocchi di ordine j_1+1 $(=m)$

t_2 blocchi di ordine j_2+1

$\vdots$

$\sum t_i = \dim \operatorname{Ker}(h) = \mu_g(0)$ $\qquad \sum t_i(j_i+1) = \dim V = n$

Siano $c_1, c_2, \dots, c_k$ i numeri di elementi sulle colonne

$\sum_{i=1}^{k} c_i = \dim V = n$

$\sum_{i=1}^{k-1} c_i = \operatorname{rg} h$

$\sum_{i=1}^{k-2} c_i = \operatorname{rg} h^2$

$\vdots$

$c_1 = \operatorname{rg} h^{k-1}$

Posso ricostruire le dimensioni della tabella calcolando $\operatorname{rg} h^i$

b_k = n° di blocchi di ordine k

$h^m = 0$, m minimo

$J_{0,k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad u_{k-1} \mapsto u_{k-2} \mapsto \dots \mapsto \underline{v}$

h^{m-1}: vanno a 0 tutti i blocchi di ordine $\leq m-1$ e quelli di ordine m con un 1

$J_{0,k}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$

$\vdots$

$J_{0,k}^k = 0$

$\operatorname{rg} h^{m-1} = b_m$ = n° blocchi di ordine m

h^{m-2}: vanno a 0 i blocchi di ordine $\leq m-2$
quelli di ordine $m-1$ con un 1
quelli di ordine m con due 1

$\operatorname{rg} h^{m-2} = 2b_m + b_{m-1}$

$\operatorname{rg} h^{m-3} = 3b_m + 2b_{m-1} + b_{m-2}$

$\vdots$

$\operatorname{rg} h^{m-k} = k b_m + (k-1) b_{m-1} + \dots + 2 b_{m-k+2} + b_{m-k+1}$

$\operatorname{rg} h = (m-1) b_m + (m-2) b_{m-2} + \dots + b_2 = n - \dim \operatorname{Ker} h = n - \sum b_i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ m-1 & m-2 & \cdots & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{m-1} \\ r_{m-2} \\ \vdots \\ r_1 \\ n-r_1 \end{bmatrix} \qquad r_i = \operatorname{rg}(h^i)$$

L'inversa è una matrice tridiagonale $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -2 & 1 & & & \vdots \\ 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \; 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Si calcola il n° di blocchi direttamente dai ranghi

esempio
$$A=\begin{bmatrix}0&2&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^3=0$$

$rg\, A=2 \Rightarrow \mu_g(0)=2 \Longrightarrow$ 2 blocchi
$rg\, A^2=1=$ n° 3-blocchi
$rg\, A=2=2b_3+b_2 \Rightarrow b_2=0$
$b_3+b_2+b_1=\mu_g(0)=2 \Longrightarrow b_1=1 \qquad \Longrightarrow J_A=\begin{bmatrix}0&1&0&\\&0&1&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$

$Ker\, A = Span(e_1, e_2-2e_4)$
$Im\, A = Span(e_1,e_4) \qquad Im\, A^2 = Span(e_1)$
$\{0\}\subset Ker\,A\cap Im\,A^2 \subset Ker\,A\cap Im\,A \subset Ker\,A$
$u_{11}=e_3 \longmapsto Ae_3=e_4 \longmapsto v_{11}=e_1$ Devo estendere a base di Ker A
$v_{21}=e_2-2e_4$

Se prendo $B=\{v_{21},v_{11},e_4,e_3\}$ mi viene la matrice sopra
la matrice P t.c. $P^{-1}AP=J$ è
$$P=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\-2&0&1&0\end{bmatrix}$$

esempio Determinare J_A per $A=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-1&-1&1\\-1&-2&2\end{bmatrix}$

$p_A(\lambda)=-\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1=-(\lambda-1)^3$
$\lambda=1 \quad \mu_a(1)=3$

$A-I=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&-2&1\\-1&-2&1\end{bmatrix} \quad rg(A-I)=1 \Longrightarrow \underset{\text{n° blocchi}}{\mu_g(1)=2} \qquad \Longrightarrow J_A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$(A-I)^2=0, \quad Im(A-I)=Span\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)=Span(v_{11}) \qquad v_{11}\in Ker(A-I)$
$u_{11}\longmapsto v_{11} \qquad u_{11}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$Ker(A-I)=Span\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix},\underset{v_{21}}{\underset{\shortparallel}{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}}\right)$

$B=\{v_{11},u_{11},v_{21}\} \qquad P=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

esempio $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\9&2&7\end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda)=-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+16=-(\lambda-1)(\lambda-4)^2$

autovalori: $\lambda=1 \quad \mu_a(1)=1$
$\lambda=4 \quad \mu_a(4)=2$

$A-I=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\9&2&6\end{bmatrix} \qquad v_{11}=\begin{bmatrix}-8/9\\1\\1\end{bmatrix} \quad : Ker(A-I)=Span(v_{11})$

$A-4I=\begin{bmatrix}-3&1&-1\\0&-3&0\\9&2&3\end{bmatrix} \qquad rg(A-4I)=2 \Longrightarrow \mu_g(4)=1$

$J_A=\begin{bmatrix}1&&\\&4&1\\&&4\end{bmatrix}$

$v_{21}=\begin{bmatrix}1\\0\\-3\end{bmatrix} \quad Ker(A-4I)=Span(v_{21}) \qquad \underset{-e_3}{\underset{\shortparallel}{u_{21}}}\xmapsto{A-4I} v_{21}$

$B=\{v_{11},v_{21},u_{21}\}$

esercizio $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 6-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)\big((7-\lambda)(5-\lambda)+1\big) = (6-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+36) = (6-\lambda)(\lambda-6)^2 = -(\lambda-6)^3$

$sp(A) = \{6\} \qquad \mu_a(6) = 3$

$A - 6I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad rg(A-6I) = 2 \Rightarrow \mu_g(4) = 1$

$\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$(A-6I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A-6I)^3 = 0$

$e_1 = v_{11}$

$Im((A-6I)^2) = Span(e_1) \qquad e_1 \in Ker(A-6I)$

$u_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = u_{11}^{(1)} \longmapsto e_1$

$\mathcal{B} = \{e_1, u_{11}^{(1)}, u_{11}\} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$

esercizio $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & -2 \end{bmatrix}$

$p_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 & -1 \\ -5 & -3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & -8 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda+2)\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -5 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} =$

$= -(\lambda+2)\big(-\lambda^3+2\lambda^2-(-2+6-4)\lambda+0\big) + 4(\cancel{2-2\lambda}+2) - 8\cancel{(2-\lambda)} + 4((-3-\lambda)(1-\lambda)-1) - 8(-5+3+\lambda)$

$= -(\lambda+2)(-\lambda^3+2\lambda^2) + 4(\lambda^2-2\lambda-3-1) + 16 - 8\lambda =$

$= -(-\lambda^4 + \cancel{2\lambda^3} - \cancel{2\lambda^3} + \cancel{4\lambda^2}) \cancel{+4\lambda^2} + 8\lambda \cancel{-16} \cancel{+16} - 8\lambda = \lambda^4$

autovalore $\lambda = 0 \qquad \mu_a(0) = 4$

$rg A = 2 \Longrightarrow \mu_g(0) = 2$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{0\} \subset Ker A \cap Im A \subset Ker A \qquad rg A^2 = 0 = b_3$

Ker A : $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_1]{R_4 \to R_4 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 + 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_2]{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker A \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y+6z+t=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} -2x+4z+t=0 \\ y=-x-z \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_{11}} + z\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}_{v_{12}} \qquad Ker A = Span(v_{11}, v_{12})$

$-e_4 = u_{11} \xmapsto{A} v_{11}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = u_{12} \xmapsto{A} v_{12} \qquad \mathcal{B}_J = \{v_{11}, u_{11}, v_{12}, u_{12}\}$

Abbiamo visto che il polinomio minimo:

$$\varphi_f(x) = \prod_{i=1}^{h} (x-\lambda_i)^{\max_j n_{ij}}$$

Teorema f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \varphi_f(x) \in \mathbb{K}[x]$ si decompone in fattori lineari distinti

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ già visto

$\Leftarrow$ se $p_f(x) \in \mathbb{K}[x]$ si decompone completamente in $\mathbb{K}[x]$ in fattori lineari distinti si ha che i blocchi sono tutti di ordine 1 $\Rightarrow J$ diagonale

Nel caso generale, estendiamo il campo con tutte le radici di $p_f(x) : \mathbb{K} \subset \mathbb{H}$

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice di f $\quad \varphi_A(x) = \varphi_f(x)$

Sia $\varphi_A^{\mathbb{H}}(x) \in \mathbb{H}[x]$ il polinomio minimo di A vista come matrice in $M_n(\mathbb{H})$

Ma $\varphi_A(A) = 0 \Rightarrow \varphi_A^{\mathbb{H}}(x) \mid \varphi_A(x)$ e quindi, essendo $\varphi_A(x)$ decomposto in fattori lineari $\varphi_A^{\mathbb{H}}(x) = \varphi_A(x)$ (poiché $p_A = p_A^{\mathbb{H}}$)

Per quanto visto, $\varphi_A(x)$ deve avere le stesse radici di $p_A(x)$

$\Rightarrow p_A(x)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K} \Rightarrow$ si torna al caso precedente e si conclude. $\square$

esercizio Dimostrare che se $f: V \longrightarrow V$, V sp vett su $\mathbb{C}$, e $f^n = id$ per qualche $n \geq 1$, allora f è diagonalizzabile

$p(x) = x^n - 1 \quad p(f) = 0 \Rightarrow \varphi_f(x) \mid x^n - 1 = \prod_{i=1}^{n-1} (x - \xi_n^i)$ $\quad \xi_n$ radice n-esima di 1

Quindi $\varphi_f(x)$ si decompone in fattori lineari distinti

Per il criterio, f è diagonalizzabile

Sia $p_f(\lambda)$ completamente riducibile in $\mathbb{K}$. Quindi $\exists\, \mathcal{B}$ tale che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \overbrace{J_{\lambda_1,n_{11}}}^{\mu_a(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{J_{\lambda_h,n_{hk_h}}}_{\mu_a(\lambda_h)} \end{bmatrix}$$

Dividiamo J nella parte diagonale $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\mu_a(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_h I_{\mu_a(\lambda_h)} \end{bmatrix}$ e $N = J - D = \begin{bmatrix} J_{0,n_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{0,n_{hk_h}} \end{bmatrix}$ nilpotente

Sia $\delta: V \longrightarrow V$, $\delta \in End(V)$ t.c. $M_{\mathcal{B}}(\delta) = D$

Sia $\nu: V \longrightarrow V$, $\nu \in End(V)$ t.c. $M_{\mathcal{B}}(\nu) = N$

δ è diagonalizzabile, ν è nilpotente

OSS δ e ν commutano perché i singoli blocchi commutano (perché D ha blocchi λI)

Corollario Decomposizione di Jordan	Ogni $f: V \longrightarrow V$, t.c. $p_f(\lambda)$ si decompone completamente in $\mathbb{K}[\lambda]$, si decompone in $f = \delta + \nu$ con δ diagonalizzabile, ν nilpotente t.c. $\delta\nu = \nu\delta$. Inoltre tale decomposizione è unica.

DIMOSTRAZIONE

La decomposizione esiste per quanto appena mostrato.

Supponiamo $f = \delta + \nu = \delta' + \nu'$ due decomposizioni con δ, δ' diagonalizzabili, ν, ν' nilpotenti, $\delta\nu = \nu\delta$, $\delta'\nu' = \nu'\delta'$

Basta che faccia vedere l'uguaglianza per le restrizioni a un qualunque autospazio generalizzato: $V = \tilde{V}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \tilde{V}_{\lambda_n}$ sono f-inv

$\Rightarrow$ sono δ, ν-invarianti $\quad (\delta\nu = \nu\delta \Rightarrow f\delta = (\delta+\nu)\delta = \delta(\delta+\nu) = \delta f)$

$\underline{v} \in W$ f-invariante $\Rightarrow f(\delta(\underline{v})) = \delta(f(\underline{v})) = \delta(\underline{w}')$

Se le restrizioni a ogni $\tilde{V}_{\lambda_i}$ sono uguali su tutto V

Consideriamo le restrizioni a $\tilde{V}_{\lambda_1}$: δ è diagonalizzabile su V

$\Rightarrow \delta$ è diagonalizzabile su $\tilde{V}_{\lambda_1}$

ν è nilpotente su $V \Rightarrow$ è nilpotente su $\tilde{V}_{\lambda_1}$

$\delta|_{\tilde{V}_{\lambda_1}}$ ha gli stessi autovalori di $f|_{\tilde{V}_{\lambda_1}}$ ($f = \delta + \nu$, triangolarizziamo simultaneamente e trovo sulla diagonale gli autovalori di f, che coincidono con quelli di δ; ν è nilpotente quindi ha autovalori nulli)

$f|_{\tilde{V}_{\lambda_1}}$ ha solo l'autovalore $\lambda_1 \Rightarrow \delta|_{\tilde{V}_{\lambda_1}} = \lambda_1 I$

Analogamente avrò $\delta'|_{\tilde{V}_{\lambda_1}} = \lambda_1 I \Rightarrow \delta'|_{\tilde{V}_{\lambda_1}} = \delta|_{\tilde{V}_{\lambda_1}}$

Perciò $\nu'|_{\tilde{V}_{\lambda_1}} = \nu|_{\tilde{V}_{\lambda_1}}$ $\square$

Forma canonica di Jordan reale

Sia $f: V \longrightarrow V$, V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{R})$ con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ con $\mu_a(\alpha_i) = \mu_a(\bar{\alpha}_i)$

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V $\mathbb{R}$-sp. vett.

Consideriamo il suo complessificato $V_{\mathbb{C}} = V + iV$

$V_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-sp. vett. ha base $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}$

$V_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{R}$-sp. vett. ha base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, i\underline{v}_1, \dots, i\underline{v}_n\}$

Vediamo la matrice su $\mathbb{C}$: $A \in M_n(\mathbb{C})$ e il complessificato di f: $f_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ con $f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}) = f(\underline{v}) + if(\underline{w})$

la forma di Jordan è:

$$\begin{bmatrix} J_{\lambda_1, n_{11}} & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{\lambda_h, n_{h k_h}} & & & & \\ & & & J_{\alpha_1, m_{11}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & J_{\alpha_k, m_{k h_k}} & \\ & & & & & J_{\bar{\alpha}_1, e_{11}} & \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & J_{\bar{\alpha}_k, e_{k h_k}} \end{bmatrix}$$

<u>OSS</u> $A\underline{v} = \lambda\underline{v} \longleftrightarrow A\bar{\underline{v}} = \bar{\lambda}\bar{\underline{v}}$ ossia $\overline{Ker(f - \alpha id)} = Ker(f - \bar{\alpha} id)$

Quindi la decomposizione in blocchi di $\bar{\alpha}_i$ si ottiene da quella di α_i coniugando (i blocchi si corrispondono in numero e ordine)

Ci riduciamo quindi a studiare il blocco:

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \alpha \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \bar{\alpha} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \bar{\alpha} \end{matrix} \end{array}\right)$$

con $f_{\mathbb{C}}(w_1) = \alpha w_1$ $\quad f_{\mathbb{C}}(\bar{w}_1) = \bar{\alpha} w_1$

$f_{\mathbb{C}}(w_j) = w_{j-1} + \alpha w_j$ $\quad f_{\mathbb{C}}(\bar{w}_j) = \bar{w}_{j-1} + \bar{\alpha} w_j$ $\quad$ per $j = 2, \dots, n$

Data la base complessa $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$, si può ottenere una base reale $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{Re(w_1), Im(w_1), \dots, Re(w_n), Im(w_n)\}$ con $Re(w_i) = \frac{w_i + \bar{w}_i}{2}$ e $Im(w_i) = \frac{w_i - \bar{w}_i}{2i}$

In tale base: $M_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}(f) \in M_{2n}(\mathbb{R})$ che è la forma normale di Jordan reale

Se α è autovalore $\quad (f_{\mathbb{C}}(w_1) = \alpha w_1, \ f_{\mathbb{C}}(\bar{w}_1) = \bar{\alpha} w_1)$.

$$f(Re(w_1)) = \frac{f_{\mathbb{C}}(w_1) + f_{\mathbb{C}}(\bar{w}_1)}{2} = \frac{\alpha w_1 + \bar{\alpha}\bar{w}_1}{2} = \frac{\alpha(Re(w_1) + i Im(w_1)) + \bar{\alpha}(Re(w_1) - i Im(w_1))}{2} = Re(\alpha) Re(w_1) - Im(\alpha) Im(w_1)$$

$$f(Im(w_1)) = \frac{f_{\mathbb{C}}(w_1) - f_{\mathbb{C}}(\bar{w}_1)}{2i} = \frac{\alpha w_1 - \bar{\alpha}\bar{w}_1}{2i} = \frac{\alpha(Re(w_1) + i Im(w_1)) - \bar{\alpha}(Re(w_1) - i Im(w_1))}{2i} = Im(\alpha) Re(w_1) + Re(\alpha) Im(w_1)$$

Se invece $f_{\mathbb{C}}(w_j) = w_{j-1} + \alpha w_j$, $f_{\mathbb{C}}(\bar{w}_j) = \bar{w}_{j-1} + \bar{\alpha} \bar{w}_j$, allora:

$$f(Re(w_j)) = Re(\alpha) Re(w_j) - Im(\alpha) Im(w_j) + \frac{w_{j-1} + \bar{w}_{j-1}}{2} = Re(\alpha) Re(w_j) - Im(\alpha) Im(w_j) + Re(w_{j-1})$$

$$f(Im(w_j)) = Im(\alpha) Re(w_j) + Re(\alpha) Im(w_j) + \frac{w_{j-1} - \bar{w}_{j-1}}{2i} = Im(\alpha) Re(w_j) + Re(\alpha) Im(w_j) + Im(w_{j-1})$$

Quindi complessivamente:

$$k\left\{\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \alpha & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \alpha \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \bar{\alpha} & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \bar{\alpha} \end{matrix} \end{array}\right)\right. \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \begin{matrix} Re(\alpha) & Im(\alpha) \\ -Im(\alpha) & Re(\alpha) \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ 0 & & & \begin{matrix} Re(\alpha) & Im(\alpha) \\ -Im(\alpha) & Re(\alpha) \end{matrix} \end{pmatrix} = J_{\alpha}^{\mathbb{R}} \quad (k \text{ blocchi})$$

Teorema Forma canonica di Jordan reale

Sia $f: V \longrightarrow V$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Allora la forma canonica di Jordan reale è:

$$\begin{bmatrix} J_{\lambda_1, n_{11}} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{\lambda_h, n_{h t_h}} & & & \\ & & & J_{\alpha_1, m_{11}}^{\mathbb{R}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & J_{\alpha_1, m_{1 t_1}} & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & J_{\alpha_k, m_{k t_k}} \end{bmatrix}$$

PRODOTTI SCALARI

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

def. Un prodotto scalare è una applicazione bilineare simmetrica $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$,
$\varphi \in Sym^2(V) \subset Bil(V \times V, \mathbb{K})$

Ad un prodotto scalare φ è associata una forma quadratica
$q: V \longrightarrow \mathbb{K}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$

esempio 1) $V = \mathbb{K}^n$ prodotto scalare canonico di $\mathbb{K}^n$

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2) $V = M_n(\mathbb{K})$ $\quad \varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

- $\varphi(A, B) = tr(AB)$

è bilineare

$$\varphi(A' + A'', B) = tr((A' + A'')B) = tr(A'B + A''B) = tr A'B + tr A''B = \varphi(A', B) + \varphi(A'', B)$$

è simmetrica

$$tr(AB) = tr(BA)$$

- $\psi(A, B) = tr(A^T B)$

3) $V = \mathbb{K}_n[x]$

- $\varphi(p, q) = p(0) q(0)$
- $\psi(p, q) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i) q(x_i)$ $\quad x_1, \dots, x_k$ fissi
- $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x) q(x) \, dx$

4) $V = \mathbb{K}^n$ $\quad A \in M_n(\mathbb{K})$ simmetrica

$$\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y} = [x_1 \cdots x_n] \, A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum a_{ij} x_i y_j$$

$$[x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{bmatrix} = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

la simmetria deriva dalla simmetria di A

def. Un prodotto scalare reale ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) φ si dice

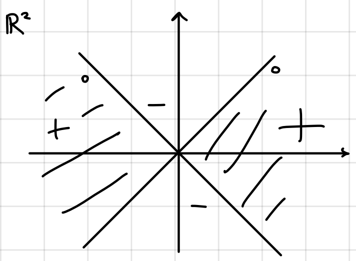
- definito positivo se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \quad \forall \underline{v} \neq \underline{0}$
- definito negativo se $q(\underline{v}) < 0 \quad \forall \underline{v} \neq \underline{0}$
- semidefinito positivo se $q(\underline{v}) \geq 0 \quad \forall \underline{v}$
- semidefinito negativo se $q(\underline{v}) \leq 0 \quad \forall \underline{v}$

esempio il prodotto canonico $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \sum x_i y_i$ è definito positivo

$$q(\underline{v}) = \varphi(\underline{x}, \underline{x}) = \sum x_i^2 > 0 \quad \text{se } \underline{x} \neq \underline{0}$$

esempio $V = \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ non è definito positivo

$$\varphi(\underline{e}_1, \underline{e}_1) = 1 \qquad \varphi(\underline{e}_2, \underline{e}_2) = -1 \qquad \varphi(\underline{e}_1 + \underline{e}_2, \underline{e}_1 + \underline{e}_2) = 0$$



$q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = x_1^2 - x_2^2$

$\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ gli associo una forma quadratica $q: V \to \mathbb{K}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$

def. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice isotropo se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0$

def. Si definisce il cono isotropo $CI(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0\}$

<u>OSS</u> $CI(\varphi)$ non è un sottospazio, ma è chiuso per prodotto scalare

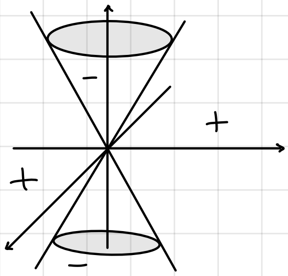
<u>OSS</u> Se φ è definito positivo, $\underline{0}$ è l'unico vettore isotropo

<u>esempio</u> In $\mathbb{R}^3$: $\varphi(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$

$q(\underline{x}) = \varphi(\underline{x},\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

vettore isotropo (x_1,x_2,x_3)

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$



Dato $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ prodotto scalare, $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ di V

$$\varphi(\underline{v},\underline{w}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{i=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \varphi(v_i,v_j) \quad (*)$$

Sia $M_\mathcal{B}(\varphi) = (a_{ij} = \varphi(v_i,v_j)) \in M_n(\mathbb{K})$

Si ha quindi da $(*)$:

$$\varphi(\underline{v},\underline{w}) = {}^t[\underline{v}]_\mathcal{B} M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B} = {}^t\underline{x} A \underline{y} \qquad \underline{x} = [v]_\mathcal{B},\ \underline{y} = [w]_\mathcal{B},\ A = M_\mathcal{B}(\varphi)$$

<u>NOTA</u>: A è simmetrica

Teorema cambiamento di base per prodotti scalari

Siano $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n\}$ due basi di V.
Siano $A = M_\mathcal{B}(\varphi)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi') = (\varphi(\underline{w}_i,\underline{w}_j))$,
$P = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(id_V)$, allora:

$$A' = {}^tPAP$$

DIMOSTRAZIONE

$$A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i,\underline{w}_j) = {}^t[\underline{w}_i]_\mathcal{B} A [\underline{w}_j]_\mathcal{B} = {}^t(P^i) A P^j = ({}^tPAP)_{ij} \quad \square$$

<u>ACHTUNG</u>: in generale non è una similitudine, a meno che ${}^tP = P^{-1}$

def. La relazione di equivalenza $B \equiv A \iff B = {}^tPAP \quad P \in GL_n(\mathbb{K})$
si definisce relazione di congruenza

Alcuni invarianti per congruenza:

- $rg\, A = rg({}^tPAP)$ posso definire $rg(\varphi) = rg(M_\mathcal{B}(\varphi))$
- $\det A = \det A (\det P)^2$ su $\mathbb{R}$ il segno non cambia

def. Il radicale di $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ è
$Rad\,\varphi = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v},\underline{w}) = 0\ \forall \underline{w}\}$ (oppure $V^\perp$)
Due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ si dicono ortogonali, $\underline{v} \perp \underline{w}$, se $\varphi(\underline{v},\underline{w}) = 0$

<u>OSS</u> Se φ è definito positivo, $V^\perp = \{\underline{0}\}$

<u>esempio</u> $\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow V^\perp = \{\underline{0}\}$

<u>esempio</u> $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 \qquad V^\perp = Span(\underline{e}_2)$

OSS $V^\perp$ è sempre un sottospazio di V

$\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V^\perp \qquad \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) = 0, \ \varphi(\underline{v}_2, \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{w}$

$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}_2, \underline{w}) = 0$

def. Un prodotto scalare $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice **degenere** se $\dim V^\perp > 0$, si dice **non degenere** se $V^\perp = \{\underline{0}\}$

Dato $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ prodotto scalare

si ha: $\alpha_\varphi : V \longrightarrow V^*$

$\alpha_\varphi(\underline{v})$ è il funzionale $\underline{w} \longmapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad : \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di $V \qquad \mathcal{B}^* = \{\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*\} \qquad \underline{v}_i^*(\underline{v}_j) = \delta_{ij}$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1) & \cdots & \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_1) & \cdots & \varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_n) \end{bmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

$\alpha_\varphi(\underline{v}_1) \qquad \underline{w} \longmapsto \varphi(\underline{v}_1, \underline{w})$

$= \alpha_1 \underline{v}_1^* + \dots + \alpha_n \underline{v}_n^* = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)\underline{v}_1^* + \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)\underline{v}_2^* + \dots + \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_n)\underline{v}_n^*$

OSS $\operatorname{Ker} \alpha_\varphi = \{\underline{v} \in V \mid \alpha_\varphi(\underline{v}) = 0(\cdot) : \underline{w} \longmapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0\} = V^\perp \Rightarrow V^\perp = \operatorname{Ker} \alpha_\varphi$

Quindi $V^\perp$ per passaggio alle coordinate corrisponde a $\operatorname{Ker} A = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$\underline{v} \in V^\perp \iff A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \underline{0} \iff [\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

- φ non degenere se $\det A \neq 0$
- $V^\perp \cong \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{rnk} \varphi = \operatorname{rnk} A$

def. Dato $W \subset V$ sottospazio, si definisce il **sottospazio ortogonale**

$W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in W\}$

OSS $W^\perp$ è un sottospazio.

Infatti, dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W^\perp, \mu \in \mathbb{K}$: $\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}_2, \underline{u}) = 0 \quad \forall \underline{u} \in W \Rightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W^\perp$

$\varphi(\mu \underline{v}_1, \underline{u}) = \mu \varphi(\underline{v}_1, \underline{u}) = 0 \quad \forall \underline{u} \in W \Rightarrow \mu \underline{v}_1 \in W^\perp$

OSS Piu' in generale, dato $S \subset V$ sottoinsieme, si definisce

$S^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in S\}$

$S^\perp$ è un sottospazio.

Infatti, dati $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in S^\perp, \mu \in \mathbb{K}$: $\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}_2, \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{w} \in S \Rightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in S^\perp$

$\varphi(\mu \underline{v}_1, \underline{w}) = \mu \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) = 0 \quad \forall \underline{w} \in S \Longrightarrow \mu \underline{v}_1 \in S^\perp$

esercizio (1) $S \subset T \Longrightarrow S^\perp \supset T^\perp$

(2) $S^\perp = (\operatorname{Span}(S))^\perp$

Dim

(1) Sia $\underline{v} \in T^\perp$: $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in T$. In particolare vale $\forall \underline{w} \in S \subset T \Rightarrow \underline{v} \in S^\perp \Rightarrow S^\perp \supset T^\perp$

(2) $S \subset \operatorname{Span} S \overset{(1)}{\Longrightarrow} S^\perp \supset (\operatorname{Span} S)^\perp$

Sia $\underline{v} \in S^\perp$: $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \ \forall \underline{w} \in S$. Sia $\underline{u} \in \operatorname{Span} S$: $\underline{u} = \sum a_i \underline{w}_i$ con $\underline{w}_i \in S$

allora $\varphi(\underline{v}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \sum a_i \underline{w}_i) = \sum a_i \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0 \quad \Rightarrow \underline{v} \in (\operatorname{Span} S)^\perp$

Analogamente:

$\underline{v}^{\perp} = \{\underline{w} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0\} = \operatorname{Ker} \varphi(\underline{v}, \cdot)$

<u>OSS</u> $\varphi(\underline{v}, \cdot) = \alpha_\varphi(\underline{v})$ con $\alpha_\varphi : V \longrightarrow V^* : \underline{v} \longmapsto \alpha_\varphi(\underline{v}) : \underline{w} \longmapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})$

$\operatorname{Ker} \alpha_\varphi = \operatorname{Rad} \varphi$ $\quad \operatorname{Im} \alpha_\varphi = \operatorname{Ann} \operatorname{Rad} \varphi$

Dato $S \subset V$, $S^{\perp} = \{\underline{v} \in V \mid \underline{v} \perp \underline{s} \ \forall \underline{s} \in S\} = \bigcap_{\underline{s} \in S} \underline{s}^{\perp}$ ed è sottospazio

- $S \subset T \subset V \implies S^{\perp} \supset T^{\perp}$
- $V^{\perp} = \operatorname{Rad} \varphi$, $\quad S \subset \operatorname{Rad} \varphi \implies S^{\perp} = V$, $\quad \operatorname{Rad} \varphi \subset S^{\perp} \ \forall S \subset V$
- $S^{\perp} = (\operatorname{Span} S)^{\perp}$

  Infatti:

  $\supset$: $S \subset \operatorname{Span} S \implies S^{\perp} \supset (\operatorname{Span} S)^{\perp}$

  $\subset$. $\underline{v} \in S^{\perp}$ $\underline{w} \in \operatorname{Span} S$: $\exists\, \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_k \in S$ $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ t.c. $\underline{w} = \alpha_1 \underline{s}_1 + \dots + \alpha_k \underline{s}_k$

  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{s}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(\underline{v}, \underline{s}_i) = 0 \implies \underline{v} \in (\operatorname{Span} S)^{\perp}$
- $S^{\perp\perp} \supset \operatorname{Span} S$
- $W^{\perp} = \alpha_\varphi^{-1}(\operatorname{Ann} W)$

  Infatti: $\underline{v} \in W^{\perp}, \underline{w} \in W$ $\quad \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \alpha_\varphi(\underline{v}) \in \operatorname{Ann} W$

  Perciò $\alpha_\varphi(W^{\perp}) = \operatorname{Ann} W \cap \operatorname{Im} \alpha_\varphi = \operatorname{Ann} W \cap \operatorname{Ann} \operatorname{Rad} \varphi = \operatorname{Ann}(W + \operatorname{Rad} \varphi)$

  $\dim W^{\perp} = \dim \operatorname{Ann}(W + \operatorname{Rad}\varphi) + \dim(W^{\perp} \cap \operatorname{Rad}\varphi) = \dim \operatorname{Ann}(W + \operatorname{Rad}\varphi) + \dim \operatorname{Rad}\varphi$

  (formula delle dimensioni applicata a $\alpha_\varphi : W^{\perp} \longrightarrow \alpha_\varphi(W^{\perp})$)
- Da qui segue: $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W + \dim(W \cap \operatorname{Rad}\varphi)$
- $W^{\perp\perp} = W + \operatorname{Rad}\varphi$

  Infatti:
  - $W^{\perp\perp} \supset W$, $W^{\perp\perp} \supset \operatorname{Rad}\varphi \overset{\text{ssp}}{\implies} W^{\perp\perp} \supset W + \operatorname{Rad}\varphi$
  - $\dim W^{\perp\perp} = \dim V - \dim W^{\perp} + \dim(W^{\perp} \cap \operatorname{Rad}\varphi) = \dim V - \dim V + \dim W - \dim(W \cap \operatorname{Rad}\varphi) + \dim \operatorname{Rad}\varphi =$
    $= \dim W + \dim \operatorname{Rad}\varphi - \dim(W \cap \operatorname{Rad}\varphi) = \dim(W + \operatorname{Rad}\varphi)$

Dati $U, W \subset V$ sottospazi, vale

$(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$ e $(U \cap W)^{\perp} \supset U^{\perp} + W^{\perp}$ e l'uguaglianza vale se e solo se φ è non degenere

DIMOSTRAZIONE

(1) $\subset$. $\begin{matrix} U \subset \\ W \subset \end{matrix} U+W \implies (U+W)^{\perp} \begin{matrix} \subset U^{\perp} \\ \subset W^{\perp} \end{matrix} \implies (U+W)^{\perp} \subset U^{\perp} \cap W^{\perp}$

$\supset$: $\underline{v} \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$, $\underline{z} \in U+W$: $\exists\, \underline{u}, \underline{w}$ t.c. $\underline{z} = \underline{u} + \underline{w} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{z}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies \underline{v} \in (U+W)^{\perp}$

(2) $U \cap W \begin{matrix} \subset U \\ \subset W \end{matrix} \implies (U \cap W)^{\perp} \begin{matrix} \supset U^{\perp} \\ \supset W^{\perp} \end{matrix} \overset{\text{ssp}}{\implies} (U \cap W)^{\perp} \supset U^{\perp} + W^{\perp}$

se φ è non degenere, $\dim(U^{\perp} + W^{\perp}) = \dim U^{\perp} + \dim W^{\perp} - \dim(U^{\perp} \cap W^{\perp}) =$

$= \dim V - \dim U + \dim V - \dim W - \dim((U+W)^{\perp}) = 2\dim V - \dim U - \dim W - \dim V + \dim(U+W) =$

$= \dim V - (\dim U + \dim W - \dim(U+W)) = \dim V - \dim(U \cap W) = \dim((U \cap W)^{\perp})$

$\square$

Teorema	Dato $W \subset V$ sottospazio, allora:
Formula della dimensione dell'ortogonale	$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W + \dim(W \cap V^{\perp})$

Ricordiamo se $f: V \longrightarrow W$, si ha l'applicazione trasposta ${}^t f: W^* \longrightarrow V^*$
$${}^t f(F) = F \circ f$$

Se $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ basi di V e W, $\mathcal{B}^*$ e $\mathcal{C}^*$ basi duali, allora
$$M^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}({}^t f) = {}^t(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f))$$

In particolare $\operatorname{rnk} f = \operatorname{rnk} {}^t f$

(seguirebbe anche dall'osservazione $\operatorname{Im} {}^t f = \operatorname{Ann} \operatorname{Ker} f = \{ F \in V^* \mid F|_{\operatorname{Ker} f} = 0 \}$
$\dim \operatorname{Im} {}^t f = \dim \operatorname{Ann} \operatorname{Ker} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$)

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo le applicazioni
$$W \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\alpha_\varphi} V^* \xrightarrow{{}^t i} W^*$$

dove $i: W \longrightarrow V$ è l'inclusione $i(\underline{w}) = \underline{w}$

Notiamo: ${}^t i$ coincide con la restrizione di un funzionale a W
$${}^t i(F) = F \circ i = F|_W : W \longrightarrow \mathbb{K}$$

Notiamo: $W^{\perp} = \operatorname{Ker}({}^t i \circ \alpha_\varphi)$

Infatti $\underline{v} \in W^{\perp} \Leftrightarrow \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in W \Leftrightarrow \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in W \Leftrightarrow \alpha_\varphi(\underline{v})|_W = {}^t i \circ \alpha_\varphi(\underline{v}) = 0$

Quindi basterà calcolare $\operatorname{rnk}({}^t i \circ \alpha_\varphi) = \dim V - \dim \operatorname{Ker}({}^t i \circ \alpha_\varphi)$

<u>OSS</u> $\operatorname{rnk}({}^t i \circ \alpha_\varphi) = \operatorname{rnk}(\alpha_\varphi \circ i)$

Questo si può fare:

1) prendendo $\mathcal{B}$ base di W, $\mathcal{C}$ di V, $\mathcal{B}^*$ di W^*, $\mathcal{C}^*$ di V^*,
poniamo $B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(i)$ allora $M^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}({}^t i) = {}^t B$

Se $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}^*}(\alpha_\varphi)$ allora
$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}^*}({}^t i \circ \alpha_\varphi) = {}^t B A$$
$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}^*}(\alpha_\varphi \circ i) = AB$$

Ma siccome A è simmetrica, le matrici sono una trasposta dell'altra:
$${}^t({}^t B A) = {}^t A B = AB \implies \operatorname{rnk}(AB) = \operatorname{rnk}({}^t B A)$$

2) oppure osserviamo
$${}^t(\alpha_\varphi) : (V^*)^* \cong V \longrightarrow V^*$$
$$(V \longrightarrow V^{**} : \underline{v} \longmapsto \psi : [F \longmapsto F(\underline{v})])$$

${}^t\alpha_\varphi = \alpha_\varphi$ poiché ${}^t\alpha_\varphi : \underset{\underline{v}}{\underset{\wr}{\mathrm{val}_{\underline{v}}}} \longmapsto \underset{\varphi(\underline{v}, \cdot)}{\underset{\wr}{\mathrm{val}_{\underline{v}} \circ \alpha_\varphi}} \quad . \ \underline{w} \longmapsto \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$

Ricordiamo $\operatorname{rnk}(g \circ f) = \operatorname{rnk} f - \dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ (formula delle dimensioni applicata a $g|_{\operatorname{Im} f}$)

$\Rightarrow \alpha_\varphi \circ i = \alpha_\varphi|_{\operatorname{Im} i} : \operatorname{Im} i \longrightarrow V^*$

$\dim \operatorname{Im}(\alpha_\varphi \circ i) = \dim \operatorname{Im} i - \dim \operatorname{Ker}(\alpha_\varphi|_{\operatorname{Im} i})$

Quindi $\dim W^{\perp} = \dim \operatorname{Ker}({}^t i \circ \alpha_\varphi) = \dim V - \operatorname{rnk}({}^t i \circ \alpha_\varphi) = \dim V - \operatorname{rnk}(\alpha_\varphi \circ i)$

$\operatorname{rnk}(\alpha_\varphi \circ i) = \operatorname{rnk} i - \dim(\operatorname{Im} i \cap \operatorname{Ker} \alpha_\varphi) = \dim W - \dim(W \cap V^{\perp})$ $\square$

corollario Se φ è non degenere $(V^\perp = \{\underline{0}\})$
$\dim W^\perp = \dim V - \dim W$

DIMOSTRAZIONE
Il caso φ non degenere $\Rightarrow \alpha_\varphi$ è un isomorfismo $(\operatorname{Ker}\alpha_\varphi = V^\perp)$
$\Rightarrow \alpha_\varphi$ conserva le dimensioni dei sottospazi
$W^\perp \ni \underline{v}$ $\quad \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{w}) \ \forall \underline{w} \in W \Rightarrow \alpha_\varphi(\underline{v}) \in \operatorname{Ann} W$
che ha dimensione $n - \dim W$ $\square$

Notiamo $t_i \circ \alpha_\varphi \circ i : W \longrightarrow W^*$ è esattamente $\alpha(\varphi_{|W})$ (non confondere $(\alpha_\varphi)_{|W}$)
Indichiamo con $\varphi_{|W} = \varphi_{|W \times W}$ la restrizione del prodotto)

def. Si definisce il radicale $\mathrm{Rad}(\varphi_{|W}) = \operatorname{Ker}(\alpha_{\varphi_{|W}}) = \{\underline{w} \in W \mid \varphi(\underline{w},\underline{w}') = 0 \ \forall \underline{w}' \in W\} = W \cap W^\perp$

proposizione $V = W \oplus W^\perp \iff W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff \varphi_{|W}$ non degenere

DIMOSTRAZIONE
Il primo $\iff$:
$\Rightarrow$: ovvio
$\Leftarrow$: deriva da $\dim W^\perp \geq \dim V - \dim W$, quindi per Grassmann deve valere l'uguaglianza
Il secondo $\iff$: visto sopra in quanto $W \cap W^\perp = \mathrm{Rad}(\varphi_{|W})$ $\square$

__NOTA__: 1) sappiamo che $\varphi_{|W}$ è non degenere $\iff B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di W, $M_B(\varphi_{|W})$ è non singolare
Quindi $\varphi_{|W}$ è non degenere $\iff (\varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j))$ è non-singolare
2) Dato $\underline{v} \in V$, $W = \operatorname{Span}(\underline{v})$
Allora $\varphi_{|W}$ è non degenere $\iff \underline{v}$ è non-isotropo $(\varphi(\underline{v},\underline{v}) \neq 0)$
$\iff V = \operatorname{Span}(\underline{v}) \oplus (\operatorname{Span}(\underline{v}))^\perp \qquad \dim(\operatorname{Span}(\underline{v}))^\perp = n-1$
Si ha che $\underline{v}$ è isotropo $\iff W \subset W^\perp$

__esempio__ $V = \mathbb{R}^3 \quad \varphi(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$
Se $\underline{x}$ è non isotropo ($\iff \underline{x}$ non sta sul cono $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$)
allora $\underline{x}^\perp = (\operatorname{Span}(\underline{x}))^\perp$ è un piano che interseca $\operatorname{Span}(\underline{x})$ solo in $\underline{0}$
se $\underline{x}$ è isotropo, $\underline{x}^\perp$ è un piano (φ non degenere) che contiene $\underline{x}$
(nei 3 casi $\varphi(\underline{x},\underline{x}) \gtreqless 0$, come sarà messo il piano $\underline{x}^\perp$ rispetto al cono dei vettori isotropi?

def. Dato V spazio vettoriale, una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si dice base ortogonale
se $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0 \ \forall i,j, i \neq j$

__OSS__ $\mathcal{B}$ è base ortogonale $\iff M_B(\varphi)$ è diagonale

__OSS__ φ è non degenere $\iff$ nessuna base ortogonale contiene vettori isotropi
$M_B(\varphi) = (a_{ij}) \quad a_{ii} = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$
non possono essere 0 altrimenti $\operatorname{rnk} M_B(\varphi) = \operatorname{rnk}\varphi$ si abbassa

OSS Sia $\mathbb{K}$ un campo con char $\mathbb{K} \neq 2$
Allora il prodotto φ si ricostruisce dalla sua forma quadratica associata $q: V \longrightarrow \mathbb{K}$ $\quad (q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v},\underline{v}))$
Infatti si ha la formula di polarizzazione:

$$\varphi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}) - \varphi(\underline{v},\underline{v}) - \varphi(\underline{w},\underline{w}) = q(\underline{v}+\underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = 2\varphi(\underline{v},\underline{w})$$

In particolare, φ è il prodotto nullo $\iff$ q è nulla
Se char $\mathbb{K} = 2$, ad esempio $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, consideriamo il prodotto su $\mathbb{K}^2$

$$\varphi(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2, y_1\underline{e}_1 + y_2\underline{e}_2) = x_1y_2 + x_2y_1 \qquad M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } B = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$$

$q(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2) = 2x_1x_2 = 0$ mentre φ non è il prodotto nullo

Assumeremo char $\mathbb{K} \neq 2$

Teorema di Lagrange Ogni spazio vettoriale V con prodotto scalare φ ha basi ortogonali.

DIMOSTRAZIONE
Sia $n = \dim V$. Per induzione su n
- $n = 0, 1$ ovvio
- sia $n \geq 2$

Se in V esiste $\underline{v}$ non isotropo, allora $V = \mathrm{Span}(\underline{v}) \oplus (\mathrm{Span}(\underline{v}))^{\perp}$
con $\dim \mathrm{Span}(\underline{v})^{\perp} = n-1$
Allora una base ortogonale di $(\mathrm{Span}(\underline{v}))^{\perp}$ (esiste per induzione) unita a $\underline{v}$ è una base ortogonale di V
Se invece tutti i vettori di V sono isotropi, allora q è nulla $\Rightarrow \varphi$ è nulla
$\Rightarrow$ qualunque base è ortogonale $\square$

corollario $A \in M_n(\mathbb{K})$ simmetrica $\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $P^TAP = D$ diagonale

DIMOSTRAZIONE
Basta considerare $\varphi: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ $\quad \varphi(\underline{x},\underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$
che ha $A = M_B(\varphi)$ rispetto alle basi canoniche (infatti $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = a_{ij}$)
Per Lagrange, esiste base ortogonale $\mathcal{C}$ per cui $M_{\mathcal{C}}(\varphi) = D$ diagonale
Per il teorema di cambiamento di base, $A \equiv D$ $\square$

esempio $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$: nell'esempio sopra non ci sono basi ortogonali..

Teorema di sylvester complesso

Dato V spazio vettoriale, $\varphi: V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ prodotto scalare di rango r.
Allora $\exists\, \mathcal{B}$ base di V t.c.

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

DIMOSTRAZIONE

Per Lagrange, $\exists\, \mathcal{B}'$ ortogonale. Quindi

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_{rr} & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

ordinando $\mathcal{B}'$ con i vettori isotropi in fondo

$\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_r', v_{r+1}', \dots, v_n'\}$ $\qquad \varphi(v_i', v_i') = a_{ii}$ per $i \leq r$

OSS $\varphi(\alpha v, \alpha v) = \alpha^2 \varphi(v,v) = 1 \longrightarrow \alpha^2 = \dfrac{1}{\varphi(v_i,v_i)}$ è risolubile su $\mathbb{C}$ e ha 2 soluzioni (opposte)

Scelgo $\alpha_i = \sqrt{\dfrac{1}{\varphi(v_i,v_i)}}$ una delle due radici

$v_i = \sqrt{\dfrac{1}{\varphi(v_i,v_i)}}\; v_i'$ $\qquad$ per $i = 1, \dots, r$

e lascio $v_{r+1} = v_{r+1}', \dots, v_n = v_n'$
Nella base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$: $\qquad M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$\square$

OSS Dato un campo $\mathbb{K}$, sia $\mathbb{K}_{*2} = \{\alpha^2 \mid \alpha \in \mathbb{K}_*\}$ (dove $\mathbb{K}_* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$) l'insieme dei quadrati di $\mathbb{K}$.
Per ridurre la matrice abbiamo usato $\mathbb{C}_{*2} = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, cioè che ogni elemento ha una radice quadrata.
Quindi il teorema è valido per qualsiasi campo $\mathbb{K}$ t.c. $\mathbb{K}_* = \mathbb{K}_{*2}$

NOTA: $\mathbb{R}_* \supsetneq \mathbb{R}_{*2} = \mathbb{R}_+$ (numeri positivi)
Il quoziente $\mathbb{R}_* / \mathbb{R}_{*2}$ ha 2 classi (numeri positivi e numeri negativi) rappresentate da 1 e -1.
Ci aspettiamo di poter ridurre per congruenza una matrice simmetrica reale a una matrice diagonale con $1, -1, 0$ sulla diagonale.

esercizio $\mathbb{K}_{*2}$ è un sottogruppo moltiplicativo di $\mathbb{K}_*$

corollario Due matrici simmetriche $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sono congruenti $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rnk} A = \operatorname{rnk} B$

Sia φ non degenere, $v_1, \dots, v_k \in V$, $W = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k)$

esercizio
1) $M = (\varphi(v_i, v_j)) \in M(k, \mathbb{K})$ è non singolare $\Longrightarrow v_1, \dots, v_k$ lin. indipendenti
2) $v_1, \dots, v_k$ lin. ind. allora: M è non singolare $\Leftrightarrow$ $\varphi|_W$ non degenere $\Leftrightarrow$ $W \cap W^\perp = \{0\}$
3) $v_1, \dots, v_k$ a 2 a 2 ortogonali. Allora M è non singolare $\Leftrightarrow$ nessun v_i è isotropo ($\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ lin. ind)
4) $v_1, \dots, v_k$ a 2 a 2 ortogonali e lin. ind. Allora $v_1, \dots, v_k$ si estendono a una base ortogonale di V $\Leftrightarrow$ $\varphi|_W$ non degenere ($\Leftrightarrow M$ non singolare $\Leftrightarrow$ nessun v_i isotropo)
5) se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\varphi > 0$ allora
(i) $v_1, \dots, v_k$ lin. ind $\Leftrightarrow$ M non singolare
(ii) $v_1, \dots, v_k$ a 2 a 2 ortogonali $\Longrightarrow v_1, \dots, v_k$ lin. ind.

def. Si definisce **indice di positività** di φ

$$\boxed{\iota_+(\varphi)} = \max\{\dim W \mid W \subset V \text{ ssp t.c. } \varphi|_W > 0\}$$

Si definisce **indice di negatività** di φ:

$$\boxed{\iota_-(\varphi)} = \max\{\dim W \mid W \subset V \text{ ssp t.c. } \varphi|_W < 0\}$$

Si definisce **indice di nullità** di φ

$$\boxed{\iota_0(\varphi)} = \dim V^\perp$$

esempio $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$

$\iota_+(\varphi) = 2 \quad W = \text{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_2) \quad \varphi|_W > 0$

non può essere 3 perché $\varphi \not> 0$

$\iota_-(\varphi) = 1 \quad W = \text{Span}(\underline{e}_3) \quad \varphi|_W < 0$

non può essere 2 perché un piano "esce" dal cono, cioè contiene vettori $\underline{v}$ t.c. $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$

W non è unico

$\iota_0(\varphi) = 0$ perché φ è non degenere $\quad M(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

Teorema di Sylvester reale

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

Allora $\exists \mathcal{B}$ base ortogonale t.c.

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{\iota_+(\varphi)} & & \\ & \overbrace{-1 \cdots -1}^{\iota_-(\varphi)} & \\ & & \overbrace{0 \cdots 0}^{\iota_0(\varphi)} \end{pmatrix}$$

Inoltre $\forall$ base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si ha

$\#\{i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0\} = \iota_+(\varphi)$, $\#\{i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) < 0\} = \iota_-(\varphi)$, $\#\{i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 0\} = \iota_0(\varphi)$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base ortogonale (esiste per th. Lagrange)

Ordiniamola in modo che per i primi a vettori si abbia $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0$, per i successivi b si abbia $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) < 0$ e per gli ultimi $n-a-b$ si abbia $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 0$

Dobbiamo mostrare $\iota_+ = a \quad \iota_- = b \quad \iota_0 = n-a-b = c$

L'ultima è chiara: deriva dal fatto che $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è diagonale con c zeri, quindi $c = \dim \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \dim V^\perp$

Per le altre, consideriamo:

$W_+ = \text{Span}\{\underline{v}_i \mid i = 1, \dots, a\} \quad W_- = \{\underline{v}_i \mid i = a+1, \dots, b\} \quad W_0 = \text{Span}\{\underline{v}_i \mid i = b+1, \dots, n\} \Rightarrow V = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$

Notiamo che $\varphi|_{W_+} > 0$ perché se $\underline{v} = \sum_{i=1}^{a} x_i \underline{v}_i \neq \underline{0}$

allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{a} x_i \underline{v}_i, \sum_{j=1}^{a} x_j \underline{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{a} x_i^2 \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0$ allora $\iota_+(\varphi) \geq \dim W_+ = a$

Analogamente $\varphi|_{W_-} < 0$ perché $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=a+1}^{b} x_i^2 \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) < 0$ allora $\iota_-(\varphi) \geq \dim W_- = b$

e anche $\varphi|_{W_0} = 0$ (in particolare $W_0 = V^\perp$ perché $\subset$ (esercizio) e $\supset$ per dimensioni)

Devo dimostrare che non può esistere W di $\dim > \dim W_+ = a$ su cui $\varphi|_W > 0$

Se $\dim W > \dim W_+ \Rightarrow W \cap (W_- \oplus W_0)$ ha $\dim > 0$ per Grassmann

Questo darebbe un assurdo perché se $\underline{v} \in W \cap (W_- \oplus W_0)$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ perché $\underline{v} \in W$ e $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0$ perché $\underline{v} \in W_- \oplus W_0$.

Quindi $\iota_+(\varphi) = a$. Allo stesso modo, $\iota_-(\varphi) = b$

In questa base ortogonale, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \overset{>0}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \overset{>0}{\varphi(\underline{v}_a, \underline{v}_a)} & & & & \\ & & & \overset{<0}{\varphi(\underline{v}_{a+1}, \underline{v}_{a+1})} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \overset{<0}{\varphi(\underline{v}_{a+b}, \underline{v}_{a+b})} & \\ & & & & & & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$

Sostituiamo $\underline{v}_i' = \dfrac{1}{\sqrt{|\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)|}} \underline{v}_i \qquad i = 1, \dots, \iota_+(\varphi) + \iota_-(\varphi) = \operatorname{rnk}(\varphi)$

$\underline{v}_i' = \underline{v}_i$ per gli ultimi $\iota_0(\varphi)$ vettori $\quad \square$

Una base ortogonale $\mathcal{B}$ che dà la matrice del teorema si dice la base di Sylvester e $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ si dice matrice di Sylvester.

def. La segnatura del prodotto φ è la terna
$$\sigma(\varphi) = (i_+(\varphi), i_-(\varphi), i_0(\varphi))$$

OSS $i_+(\varphi) + i_-(\varphi) + i_0(\varphi) = \dim V$

$i_+(\varphi) + i_-(\varphi) = \operatorname{rnk}\varphi \qquad i_0(\varphi) = \dim V^\perp$

φ non degenere $\iff i_0(\varphi) = 0$

def. Dati due spazi vettoriali con prodotti $(V,\varphi), (V',\varphi')$ sullo stesso campo $\mathbb{K}$ diremo che V e V' sono isometrici se $\exists f: V \to V'$ isomorfismo lineare che preserva i prodotti, cioè $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$

f si dice isometria

esercizio $f: V \to V'$ isometria $\iff \forall \mathcal{B}$ di V si ha $\mathcal{B}' = \{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è base di V' e $\varphi(v_i, v_j) = \varphi'(f(v_i), f(v_j)) \quad \forall i,j$

$\iff \exists \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V t.c. $\mathcal{B}' = \{f(v_i)\}$ base di V' e $\varphi(v_i, v_j) = \varphi'(f(v_i), f(v_j))$

Proposizione 1 Per $(V,\varphi), (V',\varphi')$ sono equivalenti:
(i) (V,φ) e (V',φ') sono isometrici
(ii) $\forall \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V, V' vale $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$
(iii) $\exists \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V, V' t.c. $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$

DIMOSTRAZIONE

(i) $\Rightarrow$ (ii) $f: V \longrightarrow V'$ isometria. Sia $\mathcal{B}'' = f(\mathcal{B})$, che è base di V'

Si ha $M_{\mathcal{B}''}(\varphi') = (\varphi'(f(v_i), f(v_j))) = (\varphi(v_i, v_j)) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

Per la formula di cambiamento di base, $M_{\mathcal{B}'}(\varphi') \equiv M_{\mathcal{B}''}(\varphi') = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = P^T B P$ dove $B = M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$

Allora $a_{ij} = \varphi(v_i, v_j) = \sum_{h,k} p_{ki}\, \varphi'(v'_k, v'_h)\, p_{hj} = \varphi'(\sum_k p_{ki} v'_k, \sum_h p_{hj} v'_h) =$
$= \varphi(v''_i, v''_j)$ dove $v''_i = \sum_k p_{ki} v'_k \quad i = 1, \dots, n$ che è base perché $P \in GL_n(\mathbb{K})$

Allora l'unica applicazione $f: V \longrightarrow V'$ che manda $v_i \longmapsto v''_i$ è un'isometria (per l'es. sopra)

(ii) $\iff$ (iii)

$\Rightarrow$: ovvio

$\Leftarrow$: $\exists \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V e V' t.c. $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$

Siano $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ due altre basi di V e V'

Per il teorema di cambiamento di base, $M_{\mathcal{C}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $M_{\mathcal{C}'}(\varphi') \equiv M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$.

Allora $M_{\mathcal{C}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{B}}(\varphi) \equiv M_{\mathcal{B}'}(\varphi') \equiv M_{\mathcal{C}'}(\varphi') \quad \forall \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ □

proposizione 2 $(V,\varphi),(V',\varphi')$ spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ sono isometrici se e solo se φ e φ' hanno la stessa segnatura

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: Sia $f: V \to V'$ isometria e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortogonale di V
Allora $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è base ortogonale di V
e siccome $\varphi(v_i, v_i) = \varphi'(f(v_i), f(v_i))$
Per il teorema di Sylvester, la segnatura è la stessa

$\Leftarrow$: siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di Sylvester di V e V'
Allora definisco $f: V \to V'$ t.c. $f(v_i) = v_i'$ è un'isometria $\square$

NOTA: $i_+(A) = i_+(\varphi_A)$ dove $\varphi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è il prodotto scalare $\varphi_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^T A \underline{y}$
analogo per $i_-(A)$, $i_0(A)$, $\sigma(A)$

corollario Due matrici simmetriche $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo $V = \mathbb{R}^n$ e prodotto φ_A e $V' = \mathbb{R}^n$ con prodotto φ_B
Si ha: $A \equiv B \overset{\text{Prop. 1}}{\Longleftrightarrow} \exists$ isometria tra (V, φ_A) e $(V', \varphi_B) \overset{\text{Prop 2}}{\Longleftrightarrow} \varphi_A$ e φ_B hanno la stessa segnatura $\square$

corollario La segnatura è un invariante completo per la congruenza di matrici simmetriche reali

esempio $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\sigma = (2,0,0)$: $\varphi > 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma = (0,2,0)$: $\varphi < 0$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\sigma = (1,1,0)$: indefinito (non degenere e non definito) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

casi degeneri:

$\sigma = (1,0,1)$ semidefinito positivo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma = (0,1,1)$ semidefinito negativo $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma = (0,0,2)$ $\varphi = 0$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

esempio $V = \mathbb{R}^3$

- non degeneri
  - $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $(3,0,0)$
  - $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $(0,3,0)$
  - $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $(2,1,0)$ } indefiniti
  - $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $(1,2,0)$ } indefiniti
- degeneri:
  - rk 2
    - $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $(2,0,1)$ } semidefiniti
    - $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $(0,2,1)$ } semidefiniti
    - $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $(1,1,0)$
  - rk 1
    - $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $(1,0,2)$
    - $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $(0,1,2)$
  - rk 0
    - $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $(0,0,3)$

<u>OSS</u> $V = U \overset{\perp}{\oplus} W$ (somma diretta ortogonale: $\varphi(\underline{u},\underline{w})=0 \ \forall \underline{u}\in U, \underline{w}\in W$)

allora $L_+(\varphi) = L_+(\varphi|_U) + L_+(\varphi|_W)$

$L_-(\varphi) = L_-(\varphi|_U) + L_-(\varphi|_W)$

$L_0(\varphi) = L_0(\varphi|_U) + L_0(\varphi|_W)$

Basta prendere basi ortogonali di U e W; l'unione è base ortogonale di V: quindi si usa Sylvester usando gli indici i t.c. $\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)>0$ ecc.

esempio $\varphi(\underline{x},\underline{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B$ base canonica $\quad \sigma = (2,1,0)$

(i) Sia $\underline{x}\in\mathbb{R}^3$ t.c. $\varphi(\underline{x},\underline{x})>0$ ($\underline{x}$ sta fuori dal cono)

$\varphi|_{\text{span}(\underline{x})}$ non degenere

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \text{Span}(\underline{x}) \overset{\perp}{\oplus} (\text{Span}(\underline{x}))^\perp$

$$\underset{2}{\underset{\shortparallel}{L_+(\varphi)}} = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{L_+(\varphi|_{\text{span}(\underline{x})})}} + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{L_+(\varphi|_{(\text{span}(\underline{x}))^\perp})}} \quad \Rightarrow$$

$$\underset{1}{\underset{\shortparallel}{L_-(\varphi)}} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{L_-(\varphi|_{\text{span}(\underline{x})})}} + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{L_-(\varphi|_{(\text{span}(\underline{x}))^\perp})}} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $(\text{Span}(\underline{x}))^\perp$ contiene sia vettori "positivi" che vettori "negativi"

$\Rightarrow$ è un piano che seca il cono

(ii) $\varphi(\underline{x},\underline{x})<0$ ancora $\mathbb{R}^3 = \text{Span}(\underline{x}) \overset{\perp}{\oplus} (\text{span}(\underline{x}))^\perp$

$$\underset{2}{\underset{\shortparallel}{L_+(\varphi)}} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{L_+(\varphi|_{\text{span}(\underline{x})})}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{L_+(\varphi|_{(\text{span}(\underline{x}))^\perp})}} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow L_-(\varphi|_{(\text{span}(\underline{x}))^\perp}) = L_0(\varphi|_{(\text{span}(\underline{x}))^\perp}) = 0$

$\Rightarrow$ $(\text{Span}(\underline{x}))^\perp$ "seca" il cono solo nell'origine

(iii) $\varphi(\underline{x},\underline{x})=0$ $\quad \underline{x}$ isotropo $\in$ cono

Allora $\text{Span}(\underline{x}) \subset (\text{Span}(\underline{x}))^\perp$ $\leftarrow$ che è ancora un piano

Vorrei dire che $(\text{Span}(\underline{x}))^\perp$ è tangente al cono, cioè è l'unico che non contiene vettori "negativi"

Altrimenti, $(\text{Span}(\underline{x}))^\perp$ conterrebbe sia vettori "negativi" sia "positivi"

$\Rightarrow L_+(\varphi|_{(\text{span}(\underline{x}))^\perp}) = 1 = L_-(\varphi|_{(\text{span}(\underline{x}))^\perp})$ e $L_0(\varphi|_{(\text{span}(\underline{x}))^\perp}) = 0$

$\Rightarrow \varphi|_{(\text{span}(\underline{x}))^\perp}$ non degenere, ma allora $(\text{Span}(\underline{x}))^\perp$ sarebbe in somma diretta con il suo ortogonale $((\text{Span}(\underline{x}))^\perp)^\perp = \text{Span}(\underline{x})$

(<u>es.</u> φ non degenere $\Rightarrow (W^\perp)^\perp = W$)

def. $\mathbb{K}$ qualunque, definiamo $W\subset V$ **sottospazio isotropo** se $\varphi|_W = 0$, cioè $\varphi(\underline{w},\underline{w}')=0 \ \ \forall \underline{w},\underline{w}'\in W$

esempio 1) $V^\perp$ è isotropo

2) $\underline{v}$ è vettore isotropo $\Leftrightarrow$ $\text{Span}(\underline{v})$ è isotropo

<u>OSS</u> $W\subset V$ è isotropo $\Leftrightarrow W\subset W^\perp$

Proposizione Dato φ non degenere, $W \subset V$ isotropo, allora $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$

DIMOSTRAZIONE

$W \subset W^\perp \Rightarrow \dim W \leq \dim W^\perp = \dim V - \dim W$

$\Rightarrow \dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$ $\square$

def. Si definisce **indice di Witt** $w(\varphi)$ di (V, φ) come la massima dimensione di un sottospazio isotropo

esempio Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\varphi > 0$, allora $w(\varphi) = 0$

Proposizione Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\sigma(\varphi) = (i_+(\varphi), i_-(\varphi), i_0(\varphi))$, φ non degenere
Si ha $w(\varphi) = \min\{i_+(\varphi), i_-(\varphi)\}$

DIMOSTRAZIONE

Sia ad es. $i_-(\varphi) \leq i_+(\varphi)$.

Se W è sottospazio con $\dim W > i_-(\varphi)$ e W_+ è uno spazio con $\dim W_+ = i_+(\varphi)$ e $\varphi|_{W_+} > 0$

$\Rightarrow \dim(W \cap W_+) > 0$ (Grassmann) $\Rightarrow W$ non è isotropo $\Rightarrow w(\varphi) \leq i_-(\varphi)$

Se $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}$ è una base di Sylvester $(p = i_+(\varphi) \geq q = i_-(\varphi))$

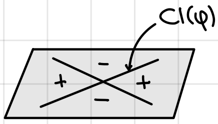
Prendo $w_i = v_i + v_{p+i}$, $i = 1, \dots, q$

Si vede subito che $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_q)$ è isotropo:

$\varphi(w_i, w_i) = \varphi(v_i + v_{p+i}, v_i + v_{p+i}) = \varphi(v_i, v_i) + \varphi(v_{p+i}, v_{p+i}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, q$ $\square$

def. Un **piano iperbolico** è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione 2 munito di un prodotto scalare φ non degenere con $CI(\varphi) \neq \{0\}$

Un sottospazio $H \subset V$ è un **piano iperbolico** se $(H, \varphi|_H)$ lo è, cioè se $\dim H = 2$, $\varphi|_H$ è non degenere e $CI(\varphi|_H) \neq \{0\}$



<u>OSS</u> tutti i piani iperbolici sono isometrici, poiché ammettono una base $\mathcal{B}$, base iperbolica, per cui $M_\mathcal{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Se $v_0 \notin CI(\varphi) \Rightarrow V = \mathrm{Span}\, v_0 \overset{\perp}{\oplus} v_0^\perp$

Dato $v \in V$, $\frac{\varphi(v, v_0)}{\varphi(v_0, v_0)} v_0 \in \mathrm{Span}(v_0)$ dove $c(v, v_0) = \frac{\varphi(v, v_0)}{\varphi(v_0, v_0)}$ è il **coefficiente di Fourier di v lungo v_0**

$w = v - c(v, v_0) v_0 \in v_0^\perp \quad \Rightarrow v = c(v, v_0) v_0 + w$

Infatti $\varphi(w, v_0) = \varphi(v, v_0) - c(v, v_0)\varphi(v_0, v_0) = \varphi(v, v_0) - \varphi(v, v_0) = 0$

<u>PROCEDURA</u>: sia $v_1, \dots, v_n$ base di V

Se $v_1 \notin CI(\varphi)$: $v_1^{(1)} = v_1$, $v_2^{(1)} = v_2 - c(v_2, v_1) v_1, \dots, v_n^{(1)} = v_n - c(v_n, v_1) v_1$ è base

Si ottiene $v_1^{(1)} \perp v_j^{(1)} \quad \forall j = 2, \dots, n$

Se $v_2^{(1)} \notin CI(\varphi)$: $v_1^{(2)} = v_1^{(1)}$, $v_2^{(2)} = v_2^{(1)}$, $v_3^{(2)} = v_3^{(1)} - c(v_3^{(1)}, v_2^{(1)}) v_2^{(1)}, \dots, v_n^{(2)} = v_n^{(1)} - c(v_n^{(1)}, v_2^{(1)}) v_2^{(1)}$ è base

Si ottiene $v_1^{(2)}, v_2^{(2)} \perp v_j^{(2)} \quad \forall j = 3, \dots, n$ e $v_1^{(2)} \perp v_2^{(2)}$

Se ad ogni passo $v_i^{(i-1)}$ non è isotropo, si ottiene $v_1^{(n)}, \dots, v_n^{(n)}$ base ortogonale, e tutte le basi hanno la stessa bandiera.

In particolare, l'algoritmo si applica se $CI(\varphi) = \{0\}$

proposizione $V = U + U^{\perp} \iff \mathrm{Rad}\,\varphi|_U \subset \mathrm{Rad}\,\varphi$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$: $u \in \mathrm{Rad}\,\varphi|_U = U \cap U^{\perp}$, $v \in V : v = w + w'$ con $w \in U, w' \in U^{\perp}$

$$\varphi(v,u) = \overset{=0}{\varphi(w,u)} + \overset{=0}{\varphi(w',u)} = 0 \implies u \in \mathrm{Rad}\,\varphi$$

$\Leftarrow$: $\mathrm{Rad}\,\varphi|_U \overset{\subset \mathrm{Rad}\,\varphi}{\subset U} \implies \mathrm{Rad}\,\varphi|_U \subset \mathrm{Rad}\,\varphi \cap U$

$$\dim(U+U^{\perp}) = \dim U + \dim U^{\perp} - \dim(U \cap U^{\perp}) = \dim U + \dim V - \dim U + \dim(U \cap \mathrm{Rad}\,\varphi) - \dim \mathrm{Rad}\,\varphi|_U =$$
$$= \dim V + \dim U \cap \mathrm{Rad}\,\varphi - \dim \mathrm{Rad}\,\varphi|_U \geq \dim V \implies \dim(U+U^{\perp}) = \dim V$$ □

proposizione Se $V = U \oplus W$, $U \perp W \implies \mathrm{Rad}\,\varphi = \mathrm{Rad}\,\varphi|_U \oplus \mathrm{Rad}\,\varphi|_W$

DIMOSTRAZIONE

$\subset$: $v \in \mathrm{Rad}\,\varphi$: $\exists\, u \in U, w \in W$ t.c. $v = u + w$

Sia $u' \in U$: $0 = \varphi(v,u') = \varphi(u,u') + \overset{=0}{\varphi(w,u')} = \varphi(u,u') \implies u \in \mathrm{Rad}\,\varphi|_U$

Analogamente $w \in \mathrm{Rad}\,\varphi|_W$

$\supset$: sia $v \in \mathrm{Rad}\,\varphi|_U \oplus \mathrm{Rad}\,\varphi|_W$: $\exists\, u \in \mathrm{Rad}\,\varphi|_U, w \in \mathrm{Rad}\,\varphi|_W$ t.c. $v = u + w$

sia $z \in V$: $z = u' + w'$ con $u' \in U, w' \in W$: $\varphi(z,v) = \varphi(u'+w', u+w) = \overset{=0}{\varphi(u',u)} + \overset{=0}{\varphi(u',w)} + \overset{=0}{\varphi(w',u)} + \overset{=0}{\varphi(w',w)} = 0$

$\implies v \in \mathrm{Rad}\,\varphi$ □

proposizione φ definito $\iff \mathrm{Cl}(\varphi) = \{0\}$

DIMOSTRAZIONE

$\Rightarrow$ per definizione

$\Leftarrow$ per assurdo φ non definito:

$\exists\, v \in V, v \neq 0$, $\varphi(v,v) \leq 0$ $\quad \exists\, w \in V, w \neq 0$, $\varphi(w,w) \geq 0$

Voglio mostrare che in $\mathrm{Span}(v,w)$ ci sono vettori isotropi, che è un assurdo

se $\varphi(v,v) = 0$ o $\varphi(w,w) = 0$ ↯

se $\varphi(v,v) < 0$ e $\varphi(w,w) > 0 \implies v, w$ lin. ind.

Sia $\overset{\neq 0}{\lambda w + v} \in \mathrm{Span}(v,w)$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda w + v, \lambda w + v) = \lambda^2 \varphi(w,w) + 2\lambda \varphi(v,w) + \varphi(v,v) \overset{?}{=} 0$

$\frac{\Delta}{4} = \underbrace{(\varphi(v,w))^2}_{\geq 0} - \varphi(v,v)\underbrace{\varphi(w,w)}_{>0} > 0 \implies \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda w + v$ è isotropo ↯

(Span(v,w) è un piano iperbolico) □

proposizione φ semidefinito $\iff \mathrm{Cl}(\varphi) = \mathrm{Rad}(\varphi)$

DIMOSTRAZIONE

Il contenimento $\mathrm{Rad}\,\varphi \subset \mathrm{Cl}(\varphi)$ è sempre vero

$\Rightarrow$: per assurdo, $\mathrm{Rad}\,\varphi \subsetneq \mathrm{Cl}(\varphi)$: $\exists\, v \in V, v \neq 0$ $\varphi(v,v) = 0$; $\exists\, w \in W$ t.c. $\varphi(v,w) \neq 0$

$\implies v, w$ sono lin. ind. ($\implies \mathrm{Span}(v,w)$ è un piano iperbolico)

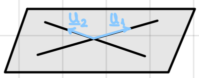
$\varphi(\lambda v + w, \lambda v + w) = \lambda^2 \overset{=0}{\varphi(v,v)} + 2\lambda \varphi(v,w) + \varphi(w,w)$

se $\varphi(v,w) > 0$. $2\lambda\varphi(v,w) + \varphi(w,w) > 0 \iff \lambda > -\frac{\varphi(w,w)}{\varphi(v,w)} \implies \varphi$ non è semidef. ↯

$\Leftarrow$: se φ non è semidefinito:

$\exists\, v \in V, v \neq 0 : \varphi(v,v) < 0$ $\quad \exists\, w \in V, w \neq 0 . \varphi(w,w) > 0$

$\implies \mathrm{Span}(v,w)$ è un piano iperbolico



$M_{\{u_1,u_2\}}(\varphi|_{\mathrm{Span}(v,w)}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ma $a = \varphi(u_1,u_2) \neq 0 \implies u_1 \not\perp u_2$

$\implies u_1, u_2 \in \mathrm{Cl}(\varphi)$ ma $u_1, u_2 \notin \mathrm{Rad}\,\varphi$ ↯ □

Prodotti hermitiani

def. Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, $\varphi: V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

(i) φ è $\mathbb{C}$-lineare nella 2° componente

$$\varphi(\underline{v},\underline{u}+\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{u}) + \varphi(\underline{v},\underline{w})$$
$$\varphi(\underline{v},\alpha\underline{w}) = \alpha\varphi(\underline{v},\underline{w})$$

(ii) $\varphi(\underline{v},\underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w},\underline{v})}$

(nella convenzione dei fisici; per i matematici è lineare nella 1° comp. e anti-lineare nella 2°)
(si chiama anche forma sesquilineare)

Segue che nella 1° componente φ è antilineare:

$$\varphi(\underline{v}+\underline{u},\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{u},\underline{w})$$
$$\varphi(\alpha\underline{v},\underline{w}) = \overline{\alpha}\varphi(\underline{v},\underline{w})$$

Infatti $\varphi(\underline{v}+\underline{u},\underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w},\underline{v}+\underline{u})} = \overline{\varphi(\underline{w},\underline{v})+\varphi(\underline{w},\underline{u})} = \overline{\varphi(\underline{w},\underline{v})} + \overline{\varphi(\underline{w},\underline{u})} = \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{u},\underline{w})$

$\varphi(\alpha\underline{v},\underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w},\alpha\underline{v})} = \overline{\alpha\,\varphi(\underline{w},\underline{v})} = \overline{\alpha}\cdot\overline{\varphi(\underline{w},\underline{v})} = \overline{\alpha}\,\varphi(\underline{v},\underline{w})$

<u>OSS</u> $\varphi(\underline{v},\underline{v}) \in \mathbb{R}$ $\forall \underline{v}\in V$ perché $\varphi(\underline{v},\underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v},\underline{v})}$

la forma quadratica associata $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v},\underline{v})$ determina ancora $\varphi(\underline{v},\underline{w})$

$z = \mathrm{Re}\,z + i\,\mathrm{Im}\,z = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) + \frac{1}{2}(z-\overline{z})$

$$\varphi(\underline{v},\underline{w}) = \tfrac{1}{2}\left(\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\varphi(\underline{v},\underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v})\right) + \tfrac{1}{2}\left(\varphi(\underline{v},\underline{w}) - \varphi(\underline{w},\underline{v})\right)$$

$$q(\underline{v}+\underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}+\underline{w},\underline{v}+\underline{w}) - \varphi(\underline{v},\underline{v}) - \varphi(\underline{w},\underline{w}) = \cancel{\varphi(\underline{v},\underline{v})} + \cancel{\varphi(\underline{w},\underline{w})} + \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v}) - \cancel{\varphi(\underline{v},\underline{v})} - \cancel{\varphi(\underline{w},\underline{w})} =$$
$$= \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})} = 2\,\mathrm{Re}\,\varphi(\underline{v},\underline{w})$$

$$q(i\underline{v}+\underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(i\underline{v}+\underline{w}, i\underline{v}+\underline{w}) - \varphi(\underline{v},\underline{v}) - \varphi(\underline{w},\underline{w}) = \varphi(i\underline{v},i\underline{v}) + \cancel{\varphi(\underline{w},\underline{w})} + \varphi(i\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},i\underline{v}) - \varphi(\underline{v},\underline{v}) - \cancel{\varphi(\underline{w},\underline{w})} =$$
$$= \cancel{-i\cdot i\,\varphi(\underline{v},\underline{v})} - i\varphi(\underline{v},\underline{w}) + i\varphi(\underline{w},\underline{v}) - \cancel{\varphi(\underline{v},\underline{v})} = -i\varphi(\underline{v},\underline{w}) + i\varphi(\underline{w},\underline{v}) = 2\,\mathrm{Im}\,\varphi(\underline{v},\underline{w})$$

<u>esempio</u> 1) Prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$

$$\varphi(\underline{z},\underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i w_i$$

<u>NOTA</u> $\varphi(\underline{z},\underline{z}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i z_i = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \in \mathbb{R}$

2) $V = \mathbb{C}_n[z]$ $\quad \varphi(p(z),q(z)) = \overline{p(0)}\,q(0)$

3) $V = M_n(\mathbb{C})$ $\quad \varphi(A,B) = \mathrm{tr}(\overline{A}^T B)$

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ base di V, $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{v}_i$, $\underline{w} = \sum_{j=1}^{n} y_j \underline{v}_j$

$$\varphi(\underline{v},\underline{w}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\underline{v}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\underline{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{x}_i y_j\, \varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_j) = \overline{\underline{x}}^T A\, \underline{y}$$

dove $A = (\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_j)) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$\overline{a_{ji}} = \overline{\varphi(\underline{v}_j,\underline{v}_i)} = a_{ij}$ $\qquad$ <u>NOTA</u>: $a_{ii} = \overline{a}_{ii} \in \mathbb{R}$

def. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ t.c. $\overline{A}^T = A$ si dice **matrice hermitiana**

Si scrive $\overline{A}^T = A^*$, **matrice aggiunta di A**

> **Teorema cambiamento di base per prodotti hermitiani**
>
> Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n\}$ due basi di V.
> Siano $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = (\varphi(\underline{w}_i,\underline{w}_j))$,
> $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$, allora:
> $$A' = P^* A P$$

DIMOSTRAZIONE

$$\varphi(\underline{w}_i,\underline{w}_j) = \overline{[\underline{w}_i]}_{\mathcal{B}}^T\, A\, [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = \overline{P}_i^T A P^j = (P^* A P)_{ij} \quad \square$$

Oss $\varphi(\underline{v},\underline{w})=0 \iff \varphi(\underline{w},\underline{v})=0$

Si definiscono nello stesso modo i radicali e l'ortogonale

Si ha ancora:

- $V^{\perp} \longleftrightarrow \operatorname{Ker} M_B(\varphi)$

  $\varphi|_W$ non degenere $\iff V = W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp}$
- si hanno basi ortogonali
- si definiscono $\sigma = (i_+(\varphi), i_-(\varphi), i_0(\varphi))$ e vale l'analogo di Sylvester
- si definisce φ hermitiano definito positivo se $\varphi(\underline{v},\underline{v})>0 \ \forall \underline{v}\neq \underline{0}$

Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, possiamo restringere gli scalari a $\mathbb{R}$.
Troviamo così $V_{\mathbb{R}}$, lo stesso insieme di vettori, ma con moltiplicazione esterna solo per $\mathbb{R}$.
Se $B=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n\}$ è base di V, allora $B_{\mathbb{R}}=\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n, i\underline{v}_1,\dots,i\underline{v}_n\}$ è base di $V_{\mathbb{R}}$
e vale $2\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$

esercizio $f: V\longrightarrow V$ $\mathbb{C}$ lineare, $A = M_B(f)$
Definiamo $f_{\mathbb{R}}: V_{\mathbb{R}}\longrightarrow V_{\mathbb{R}}$, $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$ come applicazione $\mathbb{R}$-lineare

Allora $$M_{B_{\mathbb{R}}}(f_{\mathbb{R}}) = \begin{bmatrix} A' & -A'' \\ A'' & A' \end{bmatrix}$$ dove $A = A' + iA''$

Si può anche fare l'operazione inversa.
Partendo da V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, vogliamo estendere gli scalari a $\mathbb{C}$
per trovare $V_{\mathbb{C}}$ che contiene V ($(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \supset V$ come sottospazio)
Imitiamo la costruzione di $\mathbb{C}$ a partire da $\mathbb{R}$.
Definiamo $V_{\mathbb{C}} = V\times V$ con somma componente per componente e
prodotto esterno $(a+ib)(\underline{v},\underline{w}) = (a\underline{v}-b\underline{w}, b\underline{v}+a\underline{w})$
Identifichiamo V con $V\times\{\underline{0}\}$; allora il secondo fattore $\{\underline{0}\}\times V$ si identifica con iV
Quindi $V_{\mathbb{C}} = V + iV$; un vettore in $V_{\mathbb{C}}$ si scrive $\underline{z} = \underline{v}+i\underline{w}$ con $\underline{v},\underline{w}\in V$
Si verificano gli assiomi di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

def. $V_{\mathbb{C}}$ si dice complessificazione dello spazio vettoriale reale V

Data $f: V\longrightarrow V$ $\mathbb{R}$-lineare, indichiamo con $f_{\mathbb{C}}: V_{\mathbb{C}}\longrightarrow V_{\mathbb{C}}$
l'applicazione $f_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w}) = f(\underline{v}) + i f(\underline{w})$ $\mathbb{C}$-lineare

Proposizione
(1) $f_{\mathbb{C}}$ è l'unico endomorfismo $\mathbb{C}$-lineare di $V_{\mathbb{C}}$ che estende f (ossia $f_{\mathbb{C}}|_V = f$)
(2) Si ha $M_B(f_{\mathbb{C}}) = M_B(f) \in M_n(\mathbb{R})$
(3) Un endomorfismo $\tilde{g}: V_{\mathbb{C}}\longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ estende un endomorfismo $g: V\longrightarrow V \iff M_B(\tilde{g}) \in M_n(\mathbb{R})$

DIMOSTRAZIONE

1),2) B è anche base di $V_{\mathbb{C}}$ e $f_{\mathbb{C}}$ è determinata su B

3) $\Rightarrow$ B base di V è anche base di $V_{\mathbb{C}}$, e poiché $\tilde{g}$ estende g,
$M_B(\tilde{g}) = M_B(g) \in M_n(\mathbb{R})$

$\Leftarrow$ $M_B(\tilde{g})\in M_n(\mathbb{R})$ ma $\tilde{g}$ estende la g t.c. $M_B(g) = M_B(\tilde{g})$ □

esercizio $M_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}) = \begin{bmatrix} M_{\mathcal{B}}(f) & 0 \\ 0 & M_{\mathcal{B}}(f) \end{bmatrix}$

OSS $sp(f_{\mathbb{C}}) = sp(f)$
Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di f con autospazio $V_\lambda^{(f)} \subset V$, allora $V_\lambda^{(f_{\mathbb{C}})}$ di $f_{\mathbb{C}}$ è la complessificazione di $V_\lambda^{(f)}$: $V_\lambda^{(f_{\mathbb{C}})} = V_\lambda^{(f)} + i V_\lambda^{(f)}$ $\quad (\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda^{(f_{\mathbb{C}})} = \dim_{\mathbb{R}} V_\lambda^{(f)})$

Infatti $f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{v}') = f(\underline{v}) + i f(\underline{v}') = \lambda(\underline{v} + i\underline{v}) = \lambda\underline{v} + \lambda i \underline{v}' \Leftrightarrow f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$, $f(\underline{v}') = \lambda\underline{v}'$

Proposizione Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, φ prodotto scalare
Allora esiste un unico $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ hermitiano che estende φ $(\varphi_{\mathbb{C}}|_{V\times V} = \varphi)$. Inoltre φ e $\varphi_{\mathbb{C}}$ hanno la stessa segnatura.

DIMOSTRAZIONE
$\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}+i\underline{w}, \underline{v}'+i\underline{w}') := \varphi(\underline{v},\underline{v}') + \varphi(\underline{w},\underline{w}') + i(\varphi(\underline{v},\underline{w}') - \varphi(\underline{w},\underline{v}'))$
Verificare che $f_{\mathbb{C}}$ è hermitiano
È chiaro che $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v},\underline{v}) = \varphi(\underline{v},\underline{v})$
Sia $\mathcal{B}$ base ortogonale di $\varphi \Rightarrow$ è base ortogonale di $\varphi_{\mathbb{C}}$
$\Rightarrow$ per Sylvester la segnatura è la stessa $\square$

Teorema di rappresentazione di Riesz Sia V sp. vett su $\mathbb{K}$, φ prodotto scalare non degenere
$\forall$ funzionale $F: V \to \mathbb{K}$ $\exists!$ $\underline{w}_F \in V$ t.c. $F(\underline{v}) = \varphi(\underline{w}_F, \underline{v})$

DIMOSTRAZIONE
φ non degenere $\Leftrightarrow V^\perp = \operatorname{Ker} \alpha_\varphi = \{\underline{0}\} \Rightarrow \alpha_\varphi$ è un isomorfismo
$\Rightarrow \forall F \in V^* \quad \exists! \, \underline{w}_F \in V$ t.c. $F = \alpha_\varphi(\underline{w}_F)$
dove $\alpha_\varphi(\underline{w}_F)(\underline{v}) = \varphi(\underline{w}_F, \underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$ $\square$

DIMOSTRAZIONE (costruttiva)
$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base ortogonale di V; $\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*$ base duale di V^*
Il vettore $\underline{w}_i = \underline{w}_{\underline{v}_i^*}$ che rappresenta il funzionale $\underline{v}_i^*$ è dato da $\underline{w}_i = \frac{\underline{v}_i}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)}$
$(\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i) \neq 0$ perché φ non degenere$)$ infatti $\varphi(\underline{w}_i, \underline{v}_j) = \delta_{ij} = \underline{v}_i^*(\underline{v}_j)$
Allora $F \in V^*$, si ha $F = \sum_{i=1}^n F(\underline{v}_i)\, \underline{v}_i^*$
$\Rightarrow \underline{w}_F = \sum_{i=1}^n F(\underline{v}_i) \frac{\underline{v}_i}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)}$

L'unicità deriva da $\varphi(\underline{w},\underline{v}) = \varphi(\underline{w}',\underline{v}) \; \forall \underline{v} \in V \Rightarrow \underline{w} - \underline{w} \in V^\perp = \{\underline{0}\} \Rightarrow \underline{w} = \underline{w}'$ $\square$

Teorema V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, φ prodotto hermitiano non degenere
$\forall$ funzionale $F \in V^*$ $\exists!$ $\underline{w}_F \in V$ t.c. $F(\underline{v}) = \varphi(\underline{w}_F, \underline{v}) \; \forall \underline{v} \in V$

DIMOSTRAZIONE
Si prende $\underline{w}_F = \sum_{i=1}^n \overline{F(\underline{v}_i)} \frac{\underline{v}_i}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)}$
L'unicità deriva da $\varphi(\underline{w},\underline{v}) = \varphi(\underline{w}',\underline{v}) \; \forall \underline{v} \in V \Rightarrow \underline{w} - \underline{w} \in V^\perp = \{\underline{0}\} \Rightarrow \underline{w} = \underline{w}'$ $\square$

def. Un operatore $f \in V^*$ si dice rappresentabile tramite φ se $f \in \operatorname{Im}\alpha_\varphi$:

$\exists\, \underline{v} \in V$ t.c. $f(\underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) \quad \forall\, \underline{w} \in V$

ossia, poiché $\operatorname{Im}\alpha_\varphi = \operatorname{Ann}\operatorname{Rad}\varphi$, f φ-rappresentabile $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Rad}\varphi$

Date $\mathcal{B}$ base di V e $\mathcal{B}^*$ base di V^*, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M$, allora

f φ-rappresentabile $\Longleftrightarrow$ $M\underline{x} = [f]_{\mathcal{B}^*}$ è risolubile, dove $[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(\underline{v}_1) \\ \vdots \\ f(\underline{v}_n) \end{pmatrix}$

OSS $\quad \underline{v} \longmapsto \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}$ è $\mathbb{C}$-lineare

$\underline{v} \longmapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ è anti-lineare

OSS $\quad \varphi$ non degenere dà un'identificazione di V con V^*

Come applicazione, ricordiamo $f: V \longrightarrow V$, si ha $f^T: V^* \longrightarrow V^*$, $f^T(F)(\underline{v}) = (F \circ f)(\underline{v})$

Proposizione Sia φ un prodotto scalare non degenere.
Allora esiste un unico endomorfismo $f^T_{(\varphi)}: V \longrightarrow V$ t.c.

$$f^T \circ \alpha_\varphi = \alpha_\varphi \circ f^T_{(\varphi)}$$

Cioè $\forall\, \underline{v} \in V$: $f^T(\alpha_\varphi(\underline{v})) = \alpha_\varphi(f^T_{(\varphi)}(\underline{v})) \Longleftrightarrow \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^T_{(\varphi)}(\underline{v}), \underline{w})$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_\varphi"'] & V \arrow[l, bend left, "f^T_{(\varphi)}"] \arrow[d, "\alpha_\varphi"] \\ V^* & V^* \arrow[l, "f^T"] \end{tikzcd}$$

Proposizione Se V è spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e φ è hermitiano non degenere,
data $f: V \longrightarrow V$, $\exists!\, f^*: V \longrightarrow V$ t.c. $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w})$

DIMOSTRAZIONE

Rappresentiamo il funzionale $\underline{w} \longmapsto \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$

Allora per Riesz $\exists!\, \underline{v}'$ t.c. $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \quad \forall\, \underline{w} \in V$

L'applicazione $\underline{v} \longmapsto \underline{v}'$ (che dipende da f) è lineare, infatti:

siano $\underline{v}_1 \longmapsto \underline{v}_1'$, $\underline{v}_2 \longmapsto \underline{v}_2'$, $\varphi(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2, f(\underline{w})) = \lambda_1 \varphi(\underline{v}_1, f(\underline{w})) + \lambda_2 \varphi(\underline{v}_2, f(\underline{w})) =$

$= \lambda_1 \varphi(\underline{v}_1', \underline{w}) + \lambda_2 \varphi(\underline{v}_2', \underline{w}) = \varphi(\lambda_1 \underline{v}_1' + \lambda_2 \underline{v}_2', \underline{w})$

Poiché $\operatorname{Rad}\varphi = \{\underline{0}\}$, segue $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 \longmapsto \lambda_1 \underline{v}_1' + \lambda_2 \underline{v}_2'$ $\square$

Equivalentemente, in forma matriciale:

Se $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{B}^*$ base duale di V^*

$$M_{\mathcal{B}}(f^T_{(\varphi)}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}\, M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{B}^*}(f^T)\, M_{\mathcal{B}}(\varphi) = A^{-1} B^T A$$

dove $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $B = M_{\mathcal{B}}(f)$

Nel caso hermitiano

$$M_{\mathcal{B}}(f^*_{(\varphi)}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)^*\, M_{\mathcal{B}}(\varphi) = A^{-1} B^* A$$

dove $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $B = M_{\mathcal{B}}(f)$

def. Una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si dice ortonormale se $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \delta_{ij}$

corollario Se $\varphi > 0$ e $\mathcal{B}$ ortonormale, allora

$M_{\mathcal{B}}(f^T_{(\varphi)}) = (M_{\mathcal{B}}(f))^T$ e $M_{\mathcal{B}}(f^*) = (M_{\mathcal{B}}(f))^*$

DIMOSTRAZIONE

In questo caso $A = I$. $\square$

esercizio Dimostrarlo con le coordinate

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \underline{x}^T A B \underline{y} = (C\underline{x})^T A \underline{y} \quad \forall \underline{y} \in K^n$$
$$\Rightarrow AB = C^T A \Rightarrow C = A^{-1} B^T A$$

esercizio $(f^T)^T = f \qquad (f^*)^* = f$

def. L'applicazione $f^T_{(\varphi)}$ o $f^*_{(\varphi)}$ $(\alpha_\varphi^{-1} \circ f^T \circ \alpha_\varphi)$ si dice operatore aggiunto

$*: \operatorname{End}(V) \longrightarrow \operatorname{End}(V)$ è un isomorfismo lineare e valgono:
- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $*^2 = id_{\operatorname{End}(V)}$
- $id_V^* = id_V$
- f invertibile $\Rightarrow f^*$ invertibile e $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$
- $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ e $\operatorname{Im} f^* = (\operatorname{Ker} f)^\perp$

DIMOSTRAZIONE

(1) $\subset$: $\underline{w} \in \operatorname{Ker} f^*$ $\quad 0 = \varphi(f^*(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{w}, f(\underline{v})) \ \forall \underline{v} \in V \Rightarrow \underline{w} \in (\operatorname{Im} f)^\perp$

$\supset$: $\underline{w} \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ $\quad 0 = \varphi(\underline{w}, f(\underline{v})) = \varphi(f^*(\underline{w}), \underline{v}) \ \forall \underline{v} \in V \Rightarrow f^*(\underline{w}) \in \operatorname{Rad}\varphi = \{0\} \Rightarrow \underline{w} \in \operatorname{Ker} f^*$

(2) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^{**} = (\operatorname{Im} f^*)^\perp$

$(\operatorname{Ker} f)^\perp = (\operatorname{Im} f^*)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} f^* + \overset{\{0\}}{\operatorname{Rad}\varphi}$ $\square$

- $W \subset V$ ssp f-invariante $\Rightarrow W^\perp$ è f^* invariante

DIMOSTRAZIONE

$\underline{w} \in W^\perp, \underline{v} \in W$: $\varphi(f^*(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{w}, \overset{W}{f(\underline{v})}) = 0 \Rightarrow f^*(\underline{w}) \in W^\perp$ $\square$

- $*$ è diagonalizzabile con $sp(*) = \{1, -1\}$:

$V_1(*)$: $f = f^*$ si dice autoaggiunto o simmetrico

$V_{-1}(*)$: $f = -f^*$ si dice antiautoaggiunto o antisimmetrico

def. Uno spazio euclideo è uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare $\varphi > 0$ oppure uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ con prodotto hermitiano $\varphi > 0$.

def. Dato (V, φ) spazio euclideo reale,
$f: V \longrightarrow V$ si dice simmetrico se $f^T = f$, cioè $\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$

def. Dato (V, φ) spazio euclideo reale,
$f: V \longrightarrow V$ si dice ortogonale se f è un'isometria, cioè $\varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$

def. Dato (V, φ) spazio euclideo complesso,
$f: V \rightarrow V$ si dice hermitiano o autoaggiunto se $f = f^*$, cioè $\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$

def. Dato (V, φ) spazio euclideo complesso,
$f: V \rightarrow V$ si dice unitario se f è isometria, cioè $\varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$

def. Una matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ si dice **ortogonale** se $M^T = M^{-1}$
cioè $M^T M = M M^T = I$

<u>OSS</u> Le matrici ortogonali formano il **gruppo ortogonale** $O_n(\mathbb{R})$, sottogruppo moltiplicativo di $GL_n(\mathbb{R})$
Infatti, date $M_1, M_2 \in O_n(\mathbb{R})$, allora $(M_1M_2)^T = M_2^T M_1^T = M_2^{-1}M_1^{-1} = (M_1M_2)^{-1} \Rightarrow M_1M_2 \in O_n(\mathbb{R})$

def. Una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ si dice **unitaria** se $M^* = M^{-1}$
cioè $M^* M = M M^* = I$

<u>OSS</u> Le matrici unitarie formano il **gruppo unitario** $U_n(\mathbb{C})$, sottogruppo moltiplicativo di $GL_n(\mathbb{C})$
Infatti, date $M_1, M_2 \in U_n(\mathbb{C})$, allora $(M_1M_2)^* = (\overline{M_1M_2})^T = \overline{M}_2^T \overline{M}_1^T = M_2^* M_1^* = M_2^{-1}M_1^{-1} = (M_1M_2)^{-1} \Rightarrow M_1M_2 \in U_n(\mathbb{C})$

corollario Data $\mathcal{B}$ base ortonormale di V euclideo, vale:
- caso reale: f è simmetrica $\iff M_\mathcal{B}(f)$ è simmetrica
  f è ortogonale $\iff M_\mathcal{B}(f)$ è ortogonale
- caso complesso: f è hermitiana $\iff M_\mathcal{B}(f)$ è hermitiana
  f è unitaria $\iff M_\mathcal{B}(f)$ è unitaria

DIMOSTRAZIONE
$\mathcal{B}$ base ortonormale $\Leftrightarrow M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n$. Sia $B = M_\mathcal{B}(f)$
Nel caso reale si ha:
f simmetrico $\iff \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = (B\underline{x})^T \underline{y} = \underline{x}^T B^T \underline{y} = \underline{x}^T B \underline{y} = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))\ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \iff B = B^T$
Infatti $\underline{x}^T M \underline{y} = \underline{x}^T N \underline{y}\ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow m_{ij} = \underline{e}_i^T M \underline{e}_j = \underline{e}_i^T N \underline{e}_j = n_{ij}$
f ortogonale $\iff \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (B\underline{x})^T B\underline{y} = \underline{x}^T B^T B \underline{y} = \underline{x}^T \underline{y} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \iff B^T = B^{-1}$
Nel caso complesso:
f hermitiano $\iff \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = (B\underline{x})^* \underline{y} = \underline{x}^* B^* \underline{y} = \underline{x}^* B \underline{y} = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))\ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n \iff B = B^*$
f unitario $\iff \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (B\underline{x})^* B\underline{y} = \underline{x}^* B^* B \underline{y} = \underline{x}^* \underline{y} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \iff B^* = B^{-1}$ □

proposizione Dato (V, φ) euclideo reale, allora $(V_\mathbb{C}, \varphi_\mathbb{C})$ è euclideo complesso.
Se $f: V \to V$ è simmetrica, allora $f_\mathbb{C}: V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$ è hermitiana

DIMOSTRAZIONE
Si è già visto che $\varphi_\mathbb{C}$ ha la stessa segnatura di φ, quindi $\varphi_\mathbb{C} > 0$
Sia f simmetrico. Allora $\varphi_\mathbb{C}(f_\mathbb{C}(\underline{v} + i\underline{w}), \underline{v}' + i\underline{w}') = \varphi_\mathbb{C}(f(\underline{v}) + i f(\underline{w}), \underline{v}' + i\underline{w}') =$
$= \varphi(f(\underline{v}), \underline{v}') + \varphi(f(\underline{w}), \underline{w}') + i(\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}') - \varphi(f(\underline{w}), \underline{v}')) =$
$= \varphi(\underline{v}, f(\underline{v}')) + \varphi(\underline{w}, f(\underline{w}')) + i(\varphi(\underline{v}, f(\underline{w}')) - \varphi(\underline{w}, f(\underline{v}'))) = \varphi_\mathbb{C}(\underline{v} + i\underline{w}, f(\underline{v}') + i f(\underline{w}')) =$
$= \varphi_\mathbb{C}(\underline{v} + i\underline{w}, f_\mathbb{C}(\underline{v}' + i\underline{w}')) \Longrightarrow f_\mathbb{C}$ è hermitiano □

<u>OSS</u> Si poteva usare il corollario sopra:
prendendo una base ortonormale di φ, che lo è anche per $\varphi_\mathbb{C}$,
la matrice di $f_\mathbb{C}$ viene simmetrica reale, quindi hermitiana.

Proposizione Sia $V=\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare canonico $\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \underline{x}^T\underline{y}$

Sono equivalenti:

(i) $A\in O_n$

(ii) $f_A : V\to V,\ \underline{x}\longmapsto A\underline{x}$ è ortogonale

(iii) le colonne (e le righe) di A formano una base ortonormale di V

DIMOSTRAZIONE

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\langle f_A(\underline{x}), f_A(\underline{y})\rangle = (A\underline{x})^T A\underline{y} = \underline{x}^T A^T A\,\underline{y} = \underline{x}^T\underline{y} = \langle \underline{x},\underline{y}\rangle$ poiché $A^TA=I$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) f_A manda basi ortonormali in basi ortonormali

In particolare la base canonica è ortonormale e va nelle colonne di A, che quindi formano una base ortonormale

Quindi $A^TA=I$. Ma allora $A^T=A^{-1} \Rightarrow AA^T=I \Rightarrow$ le righe sono ortonormali

(iii) $\Rightarrow$ (i) Segue da $A^TA=AA^T=I$ $\square$

Proposizione Sia $V=\mathbb{C}^n$ con prodotto hermitiano canonico $\langle \underline{z},\underline{w}\rangle = \underline{z}^*\underline{w}$

Sono equivalenti:

(i) $A\in U_n$

(ii) $f_A : V\to V,\ \underline{z}\longmapsto A\underline{z}$ è unitaria

(iii) le colonne (e le righe) di A formano una base ortonormale di V

DIMOSTRAZIONE

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\langle f_A(\underline{x}), f_A(\underline{y})\rangle = (A\underline{x})^* A\underline{y} = \underline{x}^* A^* A\,\underline{y} = \underline{x}^*\underline{y} = \langle \underline{x},\underline{y}\rangle$ poiché $A^*A=I$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) f_A manda basi ortonormali in basi ortonormali

In particolare la base canonica è ortonormale e va nelle colonne di A, che quindi formano una base ortonormale

Quindi $A^*A=I$. Ma allora $A^*=A^{-1} \Rightarrow AA^*=I \Rightarrow$ le righe sono ortonormali

(iii) $\Rightarrow$ (i) Segue da $A^*A=AA^*=I$ $\square$

esempio $\underline{n=1}$ $O_1(\mathbb{R})$: $A=(a)$ t.c. $AA^T=I \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm1$

$O_1(\mathbb{R})=\{(1),(-1)\}\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$U_1(\mathbb{C})$: $A=(a)$ t.c. $AA^*=I \Rightarrow a\bar{a}=1 \Rightarrow |a|^2=1 \Leftrightarrow |a|=1$

$U_1(\mathbb{C})=\{(e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta)\mid \theta\in\mathbb{R}\}\cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$\underline{n=2}$ $O_2(\mathbb{R})$: $\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}_{\det=1}$ oppure $\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}}_{\det=-1}$

$\underline{\text{OSS}}$ 1) $A\in O_n \Rightarrow \det A=\pm1$

Infatti $\det(A^TA)=(\det A)^2=1$

Le matrici A in O_n con $\det A=1$ formano un sottogruppo SO_n

2) $A\in U_n \Rightarrow |\det A|=1$

Infatti $1=\det(A^*A)=\det\bar{A}^T\cdot\det A=\overline{\det A}\,\det A=|\det A|^2$

Le matrici A in U_n con $\det A=1$ formano un sottogruppo SU_n

esempio $\underline{n=2}$ $SU_2=\left\{\begin{pmatrix}a & -\bar{b}\\ b & \bar{a}\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{C},\ |a|^2+|b|^2=1\right\}$

Dato (V, φ) euclideo, si possono introdurre:

- NORMA $\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v},\underline{v})}$ con $\|\underline{v}\| \geq 0$ e $\|\underline{v}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = \underline{0}$
- DISTANZA $d(\underline{v},\underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$

Proposizione
(i) $\|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$ (disuguaglianza triangolare)
(ii) $\|\alpha \underline{v}\| = |\alpha| \, \|\underline{v}\|$
(iii) $|\varphi(\underline{v},\underline{w})| \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|$ (disuguaglianza di Schwarz)

DIMOSTRAZIONE

Caso $\mathbb{R}$:

(iii) $\|\underline{v}+t\underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v}+t\underline{w}, \underline{v}+t\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{v}) + 2t\,\varphi(\underline{v},\underline{w}) + t^2 \varphi(\underline{w},\underline{w}) =$
$= \|\underline{v}\|^2 + 2t\,\varphi(\underline{v},\underline{w}) + t^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0$

Segue $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v},\underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0$ (si ha l'uguaglianza solo se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono multipli)

(i) Ponendo $t=1$
$\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 + 2\varphi(\underline{v},\underline{w}) \leq \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 + 2\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2$

(ii) segue dalla def.

Caso $\mathbb{C}$:

(iii) $\|\underline{v}-t\underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v}-t\underline{w}, \underline{v}-t\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{v}) - \bar{t}\varphi(\underline{w},\underline{v}) - t\varphi(\underline{v},\underline{w}) + |t|^2 \varphi(\underline{w},\underline{w}) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{C}$

scelgo $t = \frac{\varphi(\underline{w},\underline{v})}{\varphi(\underline{w},\underline{w})}$, allora: $0 \leq \varphi(\underline{v},\underline{v}) - \overline{\left(\frac{\varphi(\underline{w},\underline{v})}{\varphi(\underline{w},\underline{w})}\right)} \varphi(\underline{w},\underline{v}) - \frac{\varphi(\underline{w},\underline{v})}{\varphi(\underline{w},\underline{w})} \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \frac{\varphi(\underline{w},\underline{v})}{\varphi(\underline{w},\underline{w})} \overline{\left(\frac{\varphi(\underline{w},\underline{v})}{\varphi(\underline{w},\underline{w})}\right)} \varphi(\underline{w},\underline{w}) =$

$= \varphi(\underline{v},\underline{v}) - \overline{\varphi(\underline{w},\underline{v})}\varphi(\underline{w},\underline{v}) \cdot (\varphi(\underline{w},\underline{w}))^{-1} - \overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})}\varphi(\underline{v},\underline{w})(\varphi(\underline{w},\underline{w}))^{-1} + \overline{\varphi(\underline{w},\underline{v})}\varphi(\underline{w},\underline{v})\varphi(\underline{w},\underline{w})^{-1} =$
$= \varphi(\underline{v},\underline{v}) - |\varphi(\underline{v},\underline{w})|^2 (\varphi(\underline{w},\underline{w}))^{-1} - |\varphi(\underline{v},\underline{w})|^2 \varphi(\underline{w},\underline{w})^{-1} + |\varphi(\underline{v},\underline{w})|^2 \varphi(\underline{w},\underline{w})^{-1}$

che vale se e solo se $|\varphi(\underline{v},\underline{w})|^2 \leq \varphi(\underline{v},\underline{v}) \cdot \varphi(\underline{w},\underline{w})$, cioè $|\varphi(\underline{v},\underline{w})| \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|$

(i) $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v}+\underline{w},\underline{v}+\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{v}) + \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})} + \varphi(\underline{w},\underline{w}) = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 + 2\mathrm{Re}(\varphi(\underline{v},\underline{w})) \leq \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 + 2|\varphi(\underline{v},\underline{w})| \overset{(iii)}{\leq}$
$\leq \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 + 2\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\| = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2 \implies \|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$

(ii) $\|\alpha \underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\alpha\underline{v},\alpha\underline{v})} = \sqrt{|\alpha|^2 \varphi(\underline{v},\underline{v})} = |\alpha| \, \|\underline{v}\|$ $\square$

esercizio Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
1) Se $\underline{v} \perp \underline{w} \implies \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}+\underline{w}\|^2$ (teorema di Pitagora)
2) Se $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\| \implies \varphi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}-\underline{w}) = 0$ (le diagonali di un rombo sono ortogonali)

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base ortonormale di V. Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{v}_i$.
Si ha $x_i = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}) \implies \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\underline{v}_i,\underline{v})\,\underline{v}_i$

Infatti $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}) = \varphi\left(\underline{v}_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{ij} = x_i$

Vale: $\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(\underline{v}_i, \underline{v})|^2$

Disuguaglianza di Bessel: $\|\underline{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |\varphi(\underline{v}_i,\underline{v})|^2 \quad \forall k \leq n$

Se $\mathcal{B}$ è solo ortogonale
$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v})}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)} \underline{v}_i$ dove $\frac{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v})}{\varphi(\underline{v}_i,\underline{v}_i)}$ è il coefficiente di Fourier di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{v}_i$

Sia (V,φ) euclideo e $W \subset V$ sottospazio.
Vale $\varphi > 0 \implies \varphi|_W > 0 \implies V = W \overset{\perp}{\oplus} W^\perp$
Quindi $\forall \underline{v} \in V$ si decompone $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$ con $\underline{w} \in W, \underline{w}' \in W^\perp$

def. La **proiezione ortogonale** di V su W è l'applicazione $pr_W : V \longrightarrow V$ dove, dato $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$ con $\underline{w} \in W, \underline{w}' \in W^\perp$, vale $pr_W(\underline{v}) = \underline{w}$

OSS (i) pr_W è lineare
Infatti, dati $\underline{v}_1 = \underline{w}_1 + \underline{w}_1'$ e $\underline{v}_2 = \underline{w}_2 + \underline{w}_2'$, $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$pr_W(\underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2) = pr_W((\underline{w}_1 + \lambda \underline{w}_2) + (\underline{w}_1' + \lambda \underline{w}_2')) = \underline{w}_1 + \lambda \underline{w}_2 = pr_W(\underline{v}_1) + \lambda pr_W(\underline{v}_2)$$
(ii) $\mathrm{Ker}\, pr_W = W^\perp$
Infatti $\underline{v} \in \mathrm{Ker}\, pr_W \iff pr_W(\underline{v}) = \underline{0} \iff \underline{v} = \underline{0} + \underline{w}'$ con $\underline{w}' \in W^\perp \iff \underline{v} \in W^\perp$
(iii) $pr_W|_W = id_W$
(iv) pr_W ha solo 2 autovalori, 0 e 1: $V_0 = W^\perp, V_1 = W$
(v) $(pr_W)^2 = pr_W$
(vi) $\underline{v} = pr_W(\underline{v}) + pr_{W^\perp}(\underline{v})$
(vii) pr_W è simmetrico su $\mathbb{R}$ / hermitiano su $\mathbb{C}$
Infatti $\varphi(pr_W(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(pr_W(\underline{v}), pr_W(\underline{w}) + pr_{W^\perp}(\underline{w})) =$
$$= \varphi(pr_W(\underline{v}), pr_W(\underline{w})) + \underbrace{\varphi(pr_W(\underline{v}), pr_{W^\perp}(\underline{w}))}_{=0} = \varphi(pr_W(\underline{v}) + pr_{W^\perp}(\underline{v}), pr_W(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, pr_W(\underline{w}))$$

Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ è base ortogonale di W, allora
$$pr_W(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v})}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \underline{v}_i$$
Infatti $\underline{v} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v})}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \underline{v}_i \in W^\perp$

Proposizione (i) Siano $U, W \subset V$ sottospazi. Allora $U \perp W \iff pr_U \circ pr_W = pr_W \circ pr_U = 0$
(ii) Sia $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. Allora $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} pr_{W_i}(\underline{v}) \iff W_i \perp W_j \;\; \forall i,j, i \neq j$

DIMOSTRAZIONE
(i) $\implies$: $U \perp W \implies U \subset W^\perp$. Sia ora $\underline{v} \in V$: $\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}'$ con $\underline{u} \in U, \underline{u}' \in U^\perp$ (perché V è euclideo)
$$pr_W \circ pr_U(\underline{v}) = pr_W \circ pr_U(\underline{u} + \underline{u}') = pr_W(\overset{\in W^\perp}{\underline{u}}) = \underline{0}$$
Analogo per $pr_U \circ pr_W$
$\impliedby$: Sia $\underline{v} \in V$: $\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}'$ con $\underline{u} \in U, \underline{u}' \in U^\perp$
$\underline{0} = pr_W \circ pr_U(\underline{v}) = pr_W \circ pr_U(\underline{u} + \underline{u}') = pr_W(\underline{u}) \implies \underline{u} \in W^\perp \implies U \subset W^\perp$
Analogamente $W \subset U^\perp \implies U \perp W$
(ii) $\implies$: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} pr_{W_i}(\underline{v}) = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_k$ con $\underline{v}_i \in W_i$
Sia $\underline{u}_j \in W_j$. $pr(\underline{u}_j) = \sum_{i=1}^{k} pr_{W_i}(\underline{u}_j) = \sum_{i \neq j} pr_{W_i}(\underline{u}_j) + pr_{W_j}(\underline{u}_j) = \sum_{i \neq j} pr_{W_i}(\underline{u}_j) + \underline{u}_j$
$\implies \sum_{i \neq j} \underset{\in W_i}{pr_{W_i}(\underline{u}_j)} = \underline{0}$ ma la somma dei W_i è diretta $\implies pr_{W_i}(\underline{u}_j) = \underline{0} \implies \underline{u}_j \in W_i^\perp$
$\implies W_j \subset W_i^\perp \;\; \forall i \neq j$, quindi $W_i \perp W_j \;\; \forall i \neq j$
$\impliedby$: $W_i \perp W_j \;\; \forall i \neq j$ e $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \implies W_i^\perp = W_1 \oplus \dots \oplus \cancel{W_i} \oplus \dots \oplus W_k$ (contenimento e dimensioni)
Allora, se $\underline{v} = \underset{\in W_1}{\underline{v}_1} + \dots + \underset{\in W_k}{\underline{v}_k} \implies \underline{v}_i = pr_{W_i}(\underline{v}) \implies \underline{v} = \sum_{i=1}^{k} pr_{W_i}(\underline{v})$ □

def. Dato $W \subset V$ sottospazio, l'**inversione ortogonale** rispetto a W è l'applicazione $\rho_W : V \to V$ dove, se $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$ con $\underline{w} \in W, \underline{w}' \in W^\perp$, vale $\rho_W(\underline{v}) = \underline{w} - \underline{w}'$

<u>OSS</u> (i) ρ_W è lineare

Infatti, dati $\underline{v}_1 = \underline{w}_1 + \underline{w}_1'$ e $\underline{v}_2 = \underline{w}_2 + \underline{w}_2'$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\rho_W(\underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2) = \rho_W((\underline{w}_1 + \lambda \underline{w}_2) + (\underline{w}_1' + \lambda \underline{w}_2')) = \underline{w}_1 + \lambda \underline{w}_2 - (\underline{w}_1' + \lambda \underline{w}_2') = \rho_W(\underline{v}_1) + \lambda \rho_W(\underline{v}_2)$$

(ii) $\rho_W^2 = id_V$ quindi ρ_W è invertibile con autovalori ± 1 e $V_1 = W$, $V_{-1} = W^\perp$

(iii) ρ_W è ortogonale su $\mathbb{R}$ / unitaria su $\mathbb{C}$

Infatti $\varphi(\rho_W(\underline{v}), \rho_W(\tilde{\underline{v}})) = \varphi(\underline{w} - \underline{w}', \tilde{\underline{w}} - \tilde{\underline{w}}') = \varphi(\underline{w}, \tilde{\underline{w}}) + \varphi(\underline{w}', \tilde{\underline{w}}') =$

$= \varphi(\underline{w} + \underline{w}', \tilde{\underline{w}} + \tilde{\underline{w}}') = \varphi(\underline{v}, \tilde{\underline{v}})$

Se $\dim W = n-1$ (W è un iperpiano), ρ_W si dice **riflessione ortogonale**

> **Lemma** Se $\underline{v}, \underline{w} \in V$, $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$, allora esiste una riflessione ρ_W t.c. $\rho_W(\underline{v}) = \underline{w}$

DIMOSTRAZIONE

<u>oss</u> si è già visto che se $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\| \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \perp \underline{v} - \underline{w}$, e quindi $\frac{1}{2}(\underline{v} + \underline{w}) \perp \frac{1}{2}(\underline{v} - \underline{w})$

Consideriamo l'identità $\underline{v} = \frac{1}{2}(\underline{v} + \underline{w}) + \frac{1}{2}(\underline{v} - \underline{w})$

Poniamo $U = \mathrm{Span}(\underline{v} - \underline{w})$ e $W = U^\perp$. Poiché V è euclideo, $W^\perp = U$.

Dall'osservazione segue che $\frac{1}{2}(\underline{v} + \underline{w}) \in U^\perp = W$, quindi considerando la riflessione ortogonale ρ_W, vale che $\rho_W(\underline{v}) = \frac{1}{2}(\underline{v} + \underline{w}) - \frac{1}{2}(\underline{v} - \underline{w}) = \underline{w}$ □

> **Teorema di Cartan-Dieudonné** Ogni isometria di uno spazio euclideo (V, φ) è prodotto di al più n riflessioni

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{B}$ una base ortogonale di V: allora $f(\mathcal{B})$ è base ortogonale.

Mostriamo che esistono al più n riflessioni ortogonali che mandano $\mathcal{B}$ in $f(\mathcal{B})$.

- $n=1$: segue dal lemma, infatti $\|\underline{v}_1\| = \|f(\underline{v}_1)\|$ perché f è isometria.
- $n>1$: per ipotesi induttiva, data $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V, esistono al più $n-1$ riflessioni ortogonali $\rho_1, \dots, \rho_k$ t.c. $f' = \rho_k \circ \dots \circ \rho_1$ soddisfa: $f'|_{\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1})}$ è isometria t.c. $f'(\mathcal{B} \setminus \{\underline{v}_n\}) = f(\mathcal{B}) \setminus \{f(\underline{v}_n)\}$

Poniamo: $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_n = f(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{B}_i = \{\underline{v}_1^{(i)}, \dots, \underline{v}_n^{(i)}\}$ la base ottenuta all'i-esimo passaggio

Se $\underline{v}_n^{(n)} = \underline{v}_n^{(n-1)}$, si conclude.

Altrimenti, sia $W = \mathrm{Span}(\underline{v}_n^{(n)} - \underline{v}_n^{(n-1)})^\perp$ (similmente alla dimostrazione del lemma)

Allora, per il lemma, $\rho_W(\underline{v}_n^{(n-1)}) = \underline{v}_n^{(n)}$.

Resta da verificare che $\rho_W(\underline{v}_i^{(n-1)}) = \underline{v}_i^{(n)}$ $\forall i = 1, \dots, n-1$

Per farlo, verifichiamo che $\underline{v}_i^{(n-1)} \in W$ (così $\underline{v}_i^{(n-1)} = \underbrace{\underline{v}_i^{(n-1)}}_{W} + \underbrace{\underline{0}}_{W^\perp}$, quindi è un punto fisso di ρ_W)

Dal momento che f' è composizione di riflessioni ortogonali, è un'isometria

e quindi $\underline{v}_i^{(n-1)} \overset{\text{hp. ind}}{=} \underline{v}_i^{(n)}$, ma allora $\underline{v}_i^{(n-1)} \perp \underline{v}_n^{(n-1)}$ perché f' è isometria

e $\underline{v}_i^{(n-1)} = \underline{v}_i^{(n)} \perp \underline{v}_n^{(n)}$ perché f isometria

Quindi $\underline{v}_i^{(n-1)} \perp \underline{v}_n^{(n)} - \underline{v}_n^{(n-1)}$, cioè $\underline{v}_i^{(n-1)} \in W$, e quindi $\rho_W(\underline{v}_i^{(n-1)}) = \underline{v}_i^{(n-1)}$ □

<u>OSS</u> il teorema può essere dimostrato costruttivamente (sostituendo $n-1$ con j)

Teorema spettrale Sia (V,φ) spazio euclideo reale, $f: V \longrightarrow V$ simmetrico. Allora V ha una base ortonormale di autovettori per f.
Sia (V,φ) spazio euclideo complesso, $f: V \longrightarrow V$ hermitiano. Allora V ha una base ortonormale di autovettori per f e tutti gli autovalori sono reali.

Equivale a :
(i) $V = V_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}$ in somma diretta ortogonale, con $\lambda_i \in \mathbb{R}$
(ii) $\sum_{i=1}^{k} pr_{V_{\lambda_i}} = id_V$
(iii) $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, pr_{V_{\lambda_i}}$ poiché $\underline{v} = \underline{v}_1 + \dots + \underline{v}_k$

<u>Oss</u> (V,φ) su $\mathbb{C}$ euclideo, f hermitiano. Allora $\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) \in \mathbb{R}$
Infatti $\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))}$

Lemma 1 Sia (V,φ) euclideo, f simmetrico su $\mathbb{R}$ / hermitiano su $\mathbb{C}$. Allora f ha tutti autovalori reali.

DIMOSTRAZIONE
<u>Caso $\mathbb{C}$</u>: Sia λ autovalore di f, $\underline{v}$ autovettore relativo a λ
Allora $\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi(\underline{v}, \lambda\underline{v}) = \lambda\varphi(\underline{v},\underline{v})$
Poiché $\varphi(\underline{v},\underline{v}) \neq 0$ se $\underline{v} \neq \underline{0}$ e sia $\varphi(\underline{v},\underline{v})$ che $\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))$ sono reali $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
<u>Caso $\mathbb{R}$</u>: abbiamo visto che se f è simmetrico, $f_{\mathbb{C}}$ è hermitiano e ha gli stessi autovalori quindi si riapplica il caso $\mathbb{C}$. □

corollario Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica / $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitiana, allora A ha tutti autovalori reali.

DIMOSTRAZIONE
Sia $f_A : \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$, $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$ è simmetrico/hermitiano rispetto al prodotto canonico scalare/hermitiano.
$A = M_{\mathcal{B}}(f_A)$ se $\mathcal{B}$ è la base canonica
per il lemma ha tutti autovalori reali. □

Lemma 2 Sia $f: V \longrightarrow V$ simmetrica su $\mathbb{R}$ / hermitiana su $\mathbb{C}$. Allora se $\lambda \neq \mu$ sono autovalori, si ha $V_\lambda \perp V_\mu$

DIMOSTRAZIONE
$f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ $\quad f(\underline{w}) = \mu\underline{w}$
Allora $\lambda\varphi(\underline{v},\underline{w}) \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mu\underline{w}) = \mu\varphi(\underline{v},\underline{w})$
$\Rightarrow (\lambda - \mu)\varphi(\underline{v},\underline{w}) = 0$ ma $\lambda \neq \mu \Rightarrow \varphi(\underline{v},\underline{w}) = 0$ □

Lemma 3 Sia $f: V \to V$ simmetrico su $\mathbb{R}$ / hermitiano su $\mathbb{C}$.
Se il sottospazio $W \subset V$ è f-invariante, allora $W^\perp$ è f-invariante.

DIMOSTRAZIONE

$\underline{v} \in W, \underline{v}' \in W^\perp \Rightarrow \varphi(\underline{v}, f(\underline{v}')) = \varphi(\underbrace{f(\underline{v})}_{\in W}, \underline{v}') = 0 \Rightarrow f(\underline{v}') \in W^\perp$
cioè $W^\perp$ è f-invariante $\square$

DIMOSTRAZIONE (teorema spettrale)

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori f
Rimane da fare vedere che f è diagonalizzabile

$$W = V_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k} \Rightarrow W = V$$

Osserviamo che W è f-invariante (somma di sottospazi invarianti è invariante)
Se fosse $W \neq V$, avrei $V = W \overset{\perp}{\oplus} W^\perp$ con $\dim W^\perp > 0$ e $W^\perp$ f-invariante
Ma $f|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ è ancora simmetrico / hermitiano
Quindi $f|_{W^\perp}$ avrebbe autovalori reali e in $W^\perp$ ci sarebbero altri autovettori $\lightning$ $\square$

Corollario Teorema spettrale per matrici Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica / $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitiana.
Allora A si diagonalizza tramite una matrice ortogonale / unitaria, cioè $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ / $\exists U \in U_n(\mathbb{C})$ t.c.

$$O^{-1} A O = O^T A O = D \in M_n(\mathbb{R})$$
$$U^{-1} A U = U^* A U = D \in M_n(\mathbb{R})$$

DIMOSTRAZIONE

$f_A : \underline{x} \mapsto A\underline{x}$ simmetrico / hermitiano
Quindi per il teorema spettrale esiste base ortonormale di autovettori $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$
Poniamo $P = (\underline{x}_1 | \dots | \underline{x}_n) \in O_n$ / U_n
Per costruzione vale: $AP = PD$ con $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = D$
Nel caso hermitiano: $P^*AP = D \Rightarrow D^* = (P^*AP)^* = P^*A^*P = P^*AP = D \Rightarrow D \in M_n(\mathbb{R})$ $\square$

<u>Conseguenza</u>: calcolo della segnatura

Data $A = M_B(\varphi)$, si ha: $i_+(\varphi) = \sum_{\substack{\lambda \in sp(f) \\ \lambda > 0}} \mu_a(\lambda)$, $i_-(\varphi) = \sum_{\substack{\lambda \in sp(f) \\ \lambda < 0}} \mu_a(\lambda_i)$, $i_0(\varphi) = \mu_a(0)$

Per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale di autovettori $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ rispetto al prodotto canonico
Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ t.c. $[\underline{v}_i]_B = \underline{x}_i$

$$\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \underline{x}_i^T A \underline{x}_j = \underline{x}_i^T \lambda_j \underline{x}_j = \lambda_j \underline{x}_i^T \underline{x}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \lambda_j & \text{se } i = j \end{cases}$$

Per Sylvester, $i_+(\varphi) = n°$ di indici t.c. $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = \lambda_i > 0$
analogo per $i_-(\varphi), i_0(\varphi)$

Calcolo della segnatura

Sia $W \subset V$ ssp con $W \neq \{0\}$

Allora $i_+(\varphi|_W) \leq i_+(\varphi)$ e $i_-(\varphi|_W) \leq i_-(\varphi)$

Dati $W_1, W_2 \subset V$ ssp t.c. $V = W_1 \oplus W_2$, allora

$$\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi|_{W_1}) + \sigma(\varphi|_{W_2})$$

Metodo di Jacobi

Siano $W \subset W' \subset V$ ssp, con $\dim W' = \dim W + 1$ e $\varphi|_W$ non degenere con segnatura $\sigma(\varphi|_W) = (p, q, 0)$

Allora $i_+(\varphi|_{W'}) \geq i_+(\varphi|_W)$ e $i_-(\varphi|_{W'}) \geq i_-(\varphi|_W)$, quindi:

$$\sigma(\varphi|_{W'}) = \begin{cases} (p+1, q, 0) \\ (p, q+1, 0) \\ (p, q, 1) \end{cases}$$

Sia $\mathcal{B}$ base di W e $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi|_W)$. Sia $\mathcal{B}'$ base di W' e $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_{W'})$. Allora

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_q \end{array}\right) \text{ e } \operatorname{sgn}(\det A) = (-1)^q \Longrightarrow A' = \begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} I_{p+1} & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right) & \text{con } \operatorname{sgn}(\det A') = (-1)^q \\ \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & I_{q+1} \end{array}\right) & \text{con } \operatorname{sgn}(\det A') = (-1)^{q+1} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_q & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) & \text{con } \operatorname{sgn}(\det A) = 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\text{se } \frac{\det A'}{\det A} = \begin{cases} >0 \\ <0 \\ =0 \end{cases} \Longrightarrow \sigma(\varphi|_{W'}) = \begin{cases} (p+1, q, 0) \\ (p, q+1, 0) \\ (p, q, 1) \end{cases}$$

Sia $W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_n = V$ bandiera di sottospazi ($\dim W_i = i$), con $\varphi|_{W_i}$ non degenere, $i = 1, \dots, n$

Sia A_i una matrice che rappresenta $\varphi|_{W_i}$.

Consideriamo la successione

$$1, \quad \det A_1, \quad \det A_2, \quad \dots, \quad \det A_n$$

Allora $i_+(\varphi) = \#$permanenze di segno, $i_-(\varphi) = \#$variazioni di segno

Teorema di triangolazione forte

Sia (V,φ) uno spazio euclideo.
Se $f: V \longrightarrow V$ ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$,
allora V ha base a bandiera ortonormale

DIMOSTRAZIONE

Abbiamo visto V ha base a bandiera $\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n$
In particolare $W_i = \text{Span}(v'_1, \dots, v'_i)$ è f-invariante
Allora una base a bandiera si trova applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt
Si trova base ortonormale con la proprietà: $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) = \text{Span}(\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_i)$ □

corollario Data $A \in M_n(\mathbb{K})$ con tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$,
allora esiste $O \in O_n$ / $U \in U_n$ t.c.

$$O^{-1} A O = O^T A O = T$$
$$U^{-1} A U = U^* A U = T \quad \text{con } T \text{ triangolare}$$

def. Dato (V,φ) euclideo reale, $f: V \longrightarrow V$ si dice **normale** se commuta con il suo trasposto: $f^T f = f f^T$

def. Dato (V,φ) euclideo complesso, $f: V \longrightarrow V$ si dice **normale** se commuta con il suo aggiunto: $f^* f = f f^*$

def. Una matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ si dice **normale** se commuta con la sua trasposta $M^T M = M M^T$

def. Una matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ si dice **normale** se commuta con la sua aggiunta: $M^* M = M M^*$

<u>OSS</u> 1) f è normale $\Leftrightarrow$ $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ è normale, $\mathcal{B}$ ortonormale
2) A è normale $\Leftrightarrow$ $f_A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ è normale rispetto al prodotto hermitiano canonico
Nel caso reale, f è normale $\Leftrightarrow$ $f_{\mathbb{C}}$ è normale
(si usi che se $\mathcal{B}$ base di V, $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)$; oppure che se $f, g: V \longrightarrow V$ commutano, allora $f_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}$ commutano e inoltre $({}^t f)_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{C}}^*$)

<u>esempio</u> A diagonale, A hermitiana / simmetrica
A anti-hermitiana / anti-simmetrica, A unitaria / ortogonale

Lemma Una matrice triangolare superiore T è normale $\Leftrightarrow$ T è diagonale

DIMOSTRAZIONE

$\Leftarrow$: ovvio

$\Rightarrow$: Sia $T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$. Allora

$$(T^* T)_{11} = \overline{t_{11}} \cdot t_{11} = |t_{11}|^2$$
$$\shortparallel$$
$$(T T^*)_{11} = t_{11} \cdot \overline{t_{11}} + \dots + t_{1n} \cdot \overline{t_{1n}} = \sum_{i=1}^{n} |t_{1i}|^2$$
$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{n} |t_{1i}|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1i} = 0 \text{ per } i = 2, \dots, n$$

Procedendo per le altre righe si conclude. □

Teorema Sia (V,φ) euclideo su $\mathbb{C}$.
Allora $f: V \to V$ è normale $\Leftrightarrow$ esiste una base ortonormale di autovettori

DIMOSTRAZIONE

$\Leftarrow$: Se $\mathcal{B}$ è base ortonormale di autovettori, $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale e quindi normale. Per l'oss. 1, f è normale.

$\Rightarrow$: Sia $\mathcal{B}$ ortonormale a bandiera per f. Allora $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ è normale per l'oss 1 e triangolare superiore. Per il lemma A è diagonale e quindi $\mathcal{B}$ è una base di autovettori.

$\square$

corollario $A \in M_n(\mathbb{C})$ normale $\Leftrightarrow \exists\, U \in U_n$ t.c. $U^* A U = D$ diagonale

NOTA A hermitiana $(A = A^*) \Rightarrow U^* A U = D$ allora D è reale
Infatti $D^* = (U^* A U)^* = U^* A^* U = U^* A U = D$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ normale; A ha tutti autovalori reali
$\Leftrightarrow \exists\, O \in O_n : O^T A O = D$ diagonale
$\Leftrightarrow A = A^T$
Infatti $O^T A O = D = D^T = O^T A^T O \Rightarrow A = A^T$
($\Rightarrow$ teorema spettrale)

esercizio (complementi)

1) (V,φ) φ non degenere, $W \subset V$ ssp
$\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ base di W. Allora $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, k\}$
2) Dedurre da (1): se $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{w}_{k+1}, \dots, \underline{w}_n\}$ base di V
allora $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^T A [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0 \quad i = 1, \dots, k\} = \{\underline{v} \in V \mid A_{1,k} [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0\}$
dove $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $A_{1,k} \in M_{k,n}(\mathbb{K})$ è la matrice formata dalle prime k righe di A
Se φ è non degenere, A è non singolare, quindi $\operatorname{rk} A_{1,k} = k$
$\Rightarrow \dim W^\perp = n - \dim W$
3) Sia $U \subset V$ ssp. Dimostrare che nel quoziente V/U il prodotto φ induce il prodotto $\overline{\varphi}([\underline{v}], [\underline{v}']) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') \Leftrightarrow U \subset V^\perp$
4) Dimostrare che $\overline{\varphi} : V/\operatorname{Rad}\varphi \times V/\operatorname{Rad}\varphi \longrightarrow \mathbb{K}$ è non degenere
5) Sia $\pi : V \longrightarrow V/\operatorname{Rad}\varphi$ la proiezione al quoziente.
Sia $W \subset V$ ssp. Dimostrare che
$$W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \overline{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{w})) = 0 \quad \forall \underline{w} \in W\} = \pi^{-1}(\pi(W)^\perp)$$
6) Dedurre da (5) e (2) la formula della dim dell'ortogonale
($\dim \pi(W) = \dim W - \dim(W \cap \operatorname{Rad}\varphi)$
$\dim(\pi(W))^\perp = \dim V/_{\operatorname{Rad}\varphi} - \dim \pi(W)$ perché $\overline{\varphi}$ non degenere
$= \dim V - \dim \operatorname{Rad}\varphi - \dim W + \dim(W \cap \operatorname{Rad}\varphi)$
$\dim \pi^{-1}(\pi(W)^\perp) = \dim \pi(W)^\perp + \dim \operatorname{Rad}\varphi$)
7) Dimostrare $W^{\perp\perp} = W + \operatorname{Rad}\varphi$
($\supset$: ovvio; $\subset$: calcolare $\dim W^{\perp\perp} = n - \dim W^\perp + \dim(\underbrace{W^\perp \cap \operatorname{Rad}\varphi}_{\operatorname{Rad}\varphi}) =$
$= n - n + \dim W - \dim W \cap \operatorname{Rad}\varphi + \dim \operatorname{Rad}\varphi = \dim W + \dim \operatorname{Rad}\varphi - \dim(W \cap \operatorname{Rad}\varphi) =$
$= \dim(W + \operatorname{Rad}\varphi)$
8) A anti-hermitiana è normale e ha tutti autovalori immaginari

esempio **RADICE QUADRATA DEFINITA POSITIVA**

Data $A \in S_n(\mathbb{R})$ definita positiva,

$\exists!\ S \in S_n(\mathbb{R})$ definita positiva t.c. $S^2 = A$

DIMOSTRAZIONE

- Per il teorema spettrale, $\exists P \in O(n)$ t.c. $P^T A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$

  dove $sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$ con $\lambda_i > 0\ \forall i = 1, \dots, h$

  Sia $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_h} \end{pmatrix}$: vale $D'^2 = D$ e D' definita positiva

  Sia ora $S = PD'P^T$

  Vale
  - $S^T = PD'^T P^T = PD'P^T = S \implies S \in S_n(\mathbb{R})$
  - $S \equiv D' \implies \sigma(S) = \sigma(D') \implies S$ è definita positiva
  - $S^2 = PD'^2 P^T = PDP^T = A$

OSS $S|_{V_\lambda(A)} = \sqrt{\lambda}\, id_{V_\lambda(A)}$

- Sia $S' \in S_n(\mathbb{R})$ def. pos. t.c. $S'^2 = A$

  $\implies S'A = S'^3 = AS' \implies S'$ e A sono simultaneamente diagonalizzabili

  Sia $\mathcal{B}$ base di autovettori comuni

  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_h I \end{pmatrix}$ $\qquad S' \sim \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_h \end{pmatrix}$ $\qquad$ con D_i diagonale

  $S'^2 = A \implies D_i^2 = \lambda_i I$

  $D_i = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_k \end{pmatrix}$ $\quad D_i^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} \implies \mu_j = \pm\sqrt{\lambda_i}$

  ma S' è def. pos. $\implies \mu_j = \sqrt{\lambda_i}$

  $\implies S'|_{V_\lambda(A)} = \sqrt{\lambda}\, id_{V_\lambda(A)} = S|_{V_\lambda(A)}$

  Inoltre $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in sp(A)} V_\lambda(A) \implies S = S'$ $\qquad \square$

esempio **DECOMPOSIZIONE POLARE**

Data $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $\exists!\ S \in S_n(\mathbb{R})$ def. pos., $P \in O(n)$ t.c. $A = PS$

DIMOSTRAZIONE

$A = PS \implies A^T = S^T P^T = SP^T \qquad \implies A^T A = SP^T PS = S^2$

$(A^T A)^T = A^T A \implies A^T A$ simmetrica

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq \underline{0} \qquad \underline{x}^T A^T A \underline{x} \overset{?}{>} 0$

$\qquad\qquad (A\underline{x})^T A\underline{x} = \langle A\underline{x}, A\underline{x} \rangle \geq 0$ e $= 0 \iff A\underline{x} = 0 \overset{A \text{ inv.}}{\iff} \underline{x} = \underline{0}$

$\implies A^T A$ def. pos.

$\exists S \in S_n(\mathbb{R})$ def. pos. t.c. $S^2 = A^T A$

se funziona, l'unica è S

$A = PS \implies P = AS^{-1} \qquad P^T = (S^{-1})^T A^T = S^{-1} A^T$

$PP^T = AS^{-1}S^{-1}A^T = A(S^{-1})^2 A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = I \implies P \in O(n)$ $\qquad \square$

GEOMETRIA AFFINE

def. Siano G un gruppo, X un insieme.
Un'azione di G su X a sinistra è un'applicazione
$$G \times X \longrightarrow X : (g,x) \longmapsto g.x$$
con (i) $e.x = x \ \forall x \in X$, dove e è l'identità di G
(ii) $g.(h.x) = (gh).x \quad \forall g,h \in G, \forall x \in X$

La definizione equivale a dare un omomorfismo di gruppi:
$$G \longrightarrow S_X : g \longmapsto f_g$$
dove S_X è il gruppo delle bigezioni di X con la composizione

Segue $g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = (gg^{-1}).x = g.(g^{-1}.x) = e.x = x$
quindi l'applicazione $f_g : X \longrightarrow X$, $f_g(x) = g.x$ è bigettiva
perché ha un'inversa a dx e a sx

OSS un'azione destra è analoga con $(g,x) \longmapsto x.g$
con $x.e = x$, $(x.g).h = x.(gh)$

esercizio Se $g.x$ è un'azione a sinistra, si ottiene un'azione a destra
definendo $(x,g) \longmapsto x.g := g^{-1}x$

def. L'azione di G si dice fedele se $g \longmapsto f_g$ è iniettiva
cioè $f_g(x) = x \ \forall x \in X \Rightarrow g = e$

esempio (1) $\forall$ insieme X, $G = S_X$ opera su X tramite
$$g.x = g(x)$$
(2) $\forall$ gruppo G, G opera su $X = G$ tramite
$$g.g' = gg'$$

def. X con un'azione di G si dice G-insieme

Introduciamo la relazione
$$x \underset{G}{\sim} y \iff \exists g \in G \text{ t.c. } g.x = y$$
$\underset{G}{\sim}$ è una relazione d'equivalenza:
- $x \underset{G}{\sim} x$: $e.x = x$
- $x \underset{G}{\sim} y$: $y = g.x \iff g^{-1}.y = x \Rightarrow y \underset{G}{\sim} x$
- $x \underset{G}{\sim} y, y \underset{G}{\sim} z$: $y = g.x, z = h.y \Rightarrow z = h.(g.x) = (hg).x \Rightarrow x \underset{G}{\sim} z$

def. Le classi di equivalenza si dicono orbite di G
$O_x = \{g.x \mid g \in G\}$
x e y sono coniugati tramite G se $y = g.x$

esempio (1) $G = GL_n(\mathbb{K})$ opera su $M_n(\mathbb{K})$: $P.M = P^{-1}MP$ è un'azione
le orbite sono le classi di similitudine delle matrici
(2) $G = GL_n(\mathbb{K})$ opera su $S_n(\mathbb{K})$: $P.M = P^TMP$ è un'azione
le orbite sono le classi di congruenza delle matrici
(3) $G = O_n$ opera su $X = \mathbb{R}^n$
l'orbita di $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ è la sfera di raggio $\|\underline{x}\|$

def. Lo stabilizzatore di un punto $x \in X$ è
$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

OSS $\text{Stab}_G(x)$ è un sottogruppo di G, infatti:
- $g, h \in \text{Stab}_G(x) \Rightarrow (gh).x = g.(h.x) = g.x = x$
- $g \in \text{Stab}_G(x)$: $g.x = x \Leftrightarrow g^{-1}.(g.x) = g^{-1}.x \Leftrightarrow x = g^{-1}.x$

esempio $H < G$, $X = G/H = \{gH, g \in G\}$
X è un G-insieme con l'azione $g'.(gH) = g'gH$
lo stabilizzatore $\text{stab}_G(eH) = H$

> **proposizione** Siano X un G-insieme, $x \in X$, $H = \text{stab}_G(x)$, O_x l'orbita di x.
> Allora esiste un'applicazione bigettiva naturale
> $$G/H \xrightarrow{\varphi} O_x$$
> data da $gH \longmapsto g.x$

DIMOSTRAZIONE
φ è ben definita: $g' = gh$ con $h \in H$
$\Rightarrow g'.x = (gh).x = g.(h.x) = g.x$
è surgettiva chiaramente
è iniettiva: $g.x = g'.x \Rightarrow (g^{-1}g').x = x \Rightarrow g^{-1}g' \in H \Rightarrow g' = gh$ $\square$

def. G opera liberamente su X se $\forall x \in X$
$G \longrightarrow O_x : g \longmapsto g.x$ è iniettiva

OSS G opera liberamente $\Leftrightarrow \forall x \in X$ $\text{stab}_G(x) = \{e\}$
Infatti $g \longmapsto g.x$ iniettiva $\Rightarrow \text{stab}_G(x) = \{e\}$ perché $e.x = x$
Viceversa $g.x = h.x \Rightarrow (g^{-1}h).x = x \Rightarrow g^{-1}h \in \text{Stab}_G(x) = \{e\} \Rightarrow g = h$

def. G opera transitivamente su X se $x \underset{G}{\sim} y$ $\forall x, y \in X$,
cioè c'è un'unica orbita, che coincide con X
$(\forall x, y \in X \ \exists g \in G \text{ t.c. } g.x = y)$
X si dice omogeneo per l'azione di G

esempio (1) O_n opera su $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ transitivamente
$P \in S^{n-1}$ polo nord $P \equiv (0, \dots, 0, 1)$
$$\text{Stab}_{O_n}(P) = \left\{M \in O_n \mid M\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\} \cong O_{n-1}$$
$$M = \left(\begin{array}{c|c} M' & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\sim} M'$$
quindi S^{n-1} lo vedo come O_n/O_{n-1}

(2) $Gr_k(\mathbb{R}^n) = \{W \subset \mathbb{R}^n \mid \dim W = k\}$ Grassmanniana
O_n opera transitivamente su $Gr_k(\mathbb{R}^n)$

def. G opera in maniera semplicemente transitiva se
$\exists x \in X$ t.c. $G \to X: g \mapsto g.x$ è bigezione

In altri termini, G opera transitivamente e liberamente;
equivalentemente $\forall x,y \in X \ \exists! \ g \in G$ t.c. $g.x = y$

def. Un insieme X con un'azione semplicemente transitiva di G è detto G-insieme omogeneo principale

esempio $X = G$, azione di G su X per moltiplicazione è semplicemente transitiva
$g, g' \in G \ \exists! \ h \in G$ t.c. $hg = g'$ $\quad h = g'g^{-1}$

esercizio X G-omogeneo principale, allora l'azione è fedele
Viceversa: X omogeneo per un gruppo G commutativo.
Se G agisce fedelmente su X, allora G è omogeneo principale

def. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (in particolare V gruppo commutativo con $+$)
Uno spazio affine E associato allo spazio vettoriale V è un qualunque V-insieme omogeneo principale
Quindi $\forall P, Q \in E \ \exists! \ \underline{v} \in V$ t.c. $Q = \underline{v} + P = P + \underline{v}$

NOTAZIONE $\underline{v}.P = Q \equiv Q = \underline{v} + P = P + \underline{v}$
Se $Q = P + \underline{v}$, $\underline{v}$ si indica $\underline{v} = Q - P$

Si nota: $\underline{v} + (\underline{w} + P) = (\underline{v} + \underline{w}) + P$

OSS $P - P = \underline{0} \in V$
$P - Q = -(Q - P)$
$(P_3 - P_2) + (P_2 - P_1) = P_3 - P_1$

OSS (1) Fissato $\underline{v} \in V$, l'applicazione
$E \to E . P \mapsto P + \underline{v}$ è una bigezione
i) iniettiva: $P + \underline{v} = Q + \underline{v} \Rightarrow P = Q$
ii) surgettiva: $P = (P - \underline{v}) + \underline{v} = P + (-\underline{v} + \underline{v}) = P + 0 = P$
(2) Fissiamo $O \in E$, l'applicazione
$V \to E : \underline{v} \mapsto \underline{v} + O$ è una bigezione
i) $\underline{v}_1 + O = \underline{v}_2 + O \Rightarrow \underline{v}_1 = \underline{v}_2$ per la semplice transitività
ii) $P = \underline{v} + O$ per un unico vettore $P - O$
(3) $O \in E$ l'applicazione $E \to V : P \mapsto P - O$ è una bigezione

Sia E spazio affine su V, spazio vettoriale su $\mathbb{K}$
Fissato un punto $O \in E$, si hanno due bigezioni

$$i: V \longrightarrow E \; : \; \underline{v} \longmapsto O + \underline{v}$$
$$j: E \longrightarrow V \; : \; P \longmapsto P - O$$

$$(j \circ i)(\underline{v}) = (O + \underline{v}) - O = \underline{v}$$
$$(i \circ j)(P) = O + (P - O) = P$$

$E = V$, V spazio vettoriale, con azione $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
Se si prende $O = \underline{v}_0 \in E = V$, le bigezioni sono:

$$i(\underline{v}) = \underline{v}_0 + \underline{v}, \quad j(\underline{w}) = \underline{w} - \underline{v}_0$$

Siano $P_1, \dots, P_k \in E$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $\forall O \in E$
Possiamo trovare il punto

$$P = O + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - O)$$

Se cambio O in O', si trova: $P' = O' + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - O')$

$$P = P' \iff O + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - O) = O' + \sum \lambda_i (P_i - O')$$
$$\iff O + \sum \lambda_i [(P_i - O) - (P_i - O')] = O' \iff O + \sum \lambda_i (O' - O) = O'$$
$$\iff O + (\sum \lambda_i)(O' - O) = O' \iff O' - O = (\sum \lambda_i)(O' - O)$$
$$\iff \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

def. Un punto $P \in E$ è combinazione affine dei punti $P_1, \dots, P_k$ se

$$P = O + \sum_{i=1}^{k} (P_i - O) \qquad e \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Si scrive semplicemente $P = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$

esempio $P_1 \neq P_2$

$$P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2 = O + \lambda (P_1 - O) + (1 - \lambda)(P_2 - O)$$

Se $O = P_1$: $P = P_1 + (1 - \lambda)(P_2 - P_1)$
Al variare di λ, trovo la retta che contiene P_1, P_2

OSS $P = \sum \lambda_i P_i \quad \sum \lambda_i = 1 \iff P - P_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i (P_i - P_j)$

Nel caso $E = V$ $\quad \sum \lambda_i \underline{w}_i, \quad \sum \lambda_i = 1$

$$= \underline{v}_0 + \sum \lambda_i (\underline{w}_i - \underline{v}_0) = \sum \lambda_i \underline{w}_i$$

In questo caso, la combinazione affine è una particolare combinazione lineare

Se $V = \mathbb{K}^n$, $E = V$, questo spazio affine si indica $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ o $\mathbb{A}^n(\mathbb{K})$
Se E è affine su V di dim n su $\mathbb{K}$, allora ogni scelta di un punto $O \in E$ e di una base $\mathcal{B}$ di V dà una bigezione

$$\varphi_{O,\mathcal{B}} : E \longrightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$
$$O + \underline{v} \longmapsto [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$$

def. Un sottoinsieme $D \subset E$ si dice **sottospazio affine** se è chiuso per combinazioni affini (finite)

def. Il **sottospazio $D \subset E$ generato** da un sottoinsieme $S \subset E$ è l'insieme delle combinazioni affini (finite) dei punti di S (è il più piccolo sottospazio affine che contiene S):

$$D = \mathrm{Aff}(S)$$

__OSS__ $\mathrm{Aff}(S)$ è chiuso per combinazioni affini

siano $Q_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} P_j \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} = 1$

$$\sum_{i=1}^{h} \mu_i Q_i = \sum_{i=1}^{h} \mu_i \sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} P_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{h} \mu_i \lambda_{ij} \right) P_j \quad \text{combinazione dei } P_j$$

con $\sum_{i=1}^{h} \mu_i = 1$

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{h} \mu_i \lambda_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{h} \mu_i \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1 \quad \text{combinazione affine}$$

proposizione Un sottoinsieme $D \subset E$ è un sottospazio affine
$\Leftrightarrow \forall P_0 \in D$ l'insieme dei vettori $D_0 = \{P - P_0 \mid P \in D\} \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V

DIMOSTRAZIONE

$P = \sum \lambda_i P_i \in D$ combinazione affine di $P_i \in D$

$\Leftrightarrow \forall P_0 \in D \quad P - P_0 = \sum \lambda_i (P_i - P_0) \in D_0$

$\Rightarrow$: sia $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - P_0)$ comb. lineare di vettori di D_0, ma $v = (v + P_0) - P_0 = P - P_0$ per un certo P

$\Rightarrow P = P_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - P_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i + (1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i) P_0 \quad$ comb. affine di $P_0, P_1, \dots, P_k \in D$

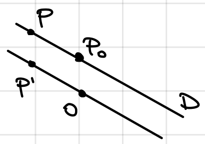
quindi $P \in D$ perché D è chiuso per comb. aff. $\Rightarrow P - P_0 \in D_0$

$\Leftarrow$: $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i = P_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{(P_i - P_0)}_{\in D_0} = P_0 + (P - P_0) = P \in D$

con $\sum \lambda_i = 1$

$\square$

Segue che $D = P_0 + D_0 \quad \forall P_0 \in D$



Se $O \in E$ è un punto base, allora

$P - P_0 = P' - O \qquad$ per un unico P' $(P' = O + (P - P_0))$

$P - O = (P - P_0) + (P_0 - O) = (P' - O) + (P_0 - O)$

$\Rightarrow D$ è il traslato di D_0 per $P_0 - O$. $\quad D = P_0 + D_0 = O + (P_0 - O) + D_0$

D_0 si dice **direzione del sottospazio affine**

In $A_n(\mathbb{K})$, i sottospazi affini corrispondono esattamente ai traslati dei sottospazi vettoriali.

__esercizio__ 1) D_0 è unico: se $D = P_0 + D_0 = P_0 + D_0' \Rightarrow D_0 = D_0'$

2) $D_0 = \{Q - P \mid P, Q \in D\}$

def. Sia D sottospazio affine di E

Si dice **dimensione di D**, $\dim D$, la dimensione della sua direzione:

$$\dim D = \dim D_0$$

In particolare $\dim E = \dim V$

esempio I sottospazi affini di dim 0: tutti i punti di E

I sottospazi affini di dim 1: $P \neq Q$, $\{\lambda P + (1-\lambda)Q \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \{P + (1-\lambda)(Q-P) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ si dice retta affine

I sottospazi affini di dim 2: si dicono piani affini

I sottospazi affini di codimensione 1 sono gli iperpiani affini

def. I punti $P_1, \dots, P_k \in E$ si dicono **affinemente indipendenti** se l'espressione $P = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$, $\sum \lambda_i = 1$, è unica, $\forall P \in \mathrm{Aff}(\{P_1, \dots, P_k\})$

Un sottoinsieme infinito $S \subset E$ si dice **affinemente indipendente** se ogni suo sottoinsieme finito è affinemente indipendente

proposizione Sono equivalenti:

(i) $P_1, \dots, P_k$ sono affinementi indipendenti

(ii) $\forall i = 1, \dots, k$, i vettori $P_j - P_i$, $j \neq i$, sono linearmente indipendenti

(iii) $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ t.c. $P_j - P_i$, $j \neq i$, sono linearmente indipendenti

(iv) $\forall i$ $P_i \notin \mathrm{Aff}(\{P_1, \dots, \cancel{P_i}, \dots, P_k\})$

DIMOSTRAZIONE

$$P = \sum \lambda_j P_j \iff P - P_i = \sum \lambda_j (P_j - P_i) \quad \forall i$$

(i)$\Leftrightarrow$(ii) $\forall i$ $P = P_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j (P_j - P_i)$ scrittura unica $\iff$ $P - P_0 = \sum_{j \neq i} \lambda_j (P_j - P_i)$ sce. unica $\iff$ $P_j - P_i$ lin. ind $\forall i, j \neq i$

(ii)$\Rightarrow$(iii) ovvio

(iii)$\Rightarrow$(i) Per assurdo $\sum a_i P_i = \sum b_i P_i$ con $a_k \neq b_k$ (a meno di riordinarli) e $\sum a_i = \sum b_i = 1$

Prendo P_1 come polo: $P_1 + \sum_{i=2}^{k} a_i (P_i - P_1) = P_1 + \sum_{i=2}^{k} b_i (P_i - P_1) \Rightarrow \sum_{i=2} (a_i - b_i)(P_i - P_1) = 0$ ↯

(iv)$\Rightarrow$(i) Per assurdo $P = \sum a_i P_i = \sum b_i P_i$ con almeno un j t.c. $a_j \neq b_j$, $\sum a_i = \sum b_i = 1$

$$\Rightarrow (a_j - b_j) P_j = \sum_{i \neq j} (b_i - a_i) P_i \Rightarrow P_j = \sum_{i \neq j} \frac{b_i - a_i}{a_j - b_j} P_i$$

Osservo che $\sum_{i \neq j} \frac{b_i - a_i}{a_j - b_j} = \frac{1 - b_j - (1 - a_j)}{a_j - b_j} = \frac{a_j - b_j}{a_j - b_j} = 1 \Rightarrow P_j \in \mathrm{Aff}(\{P_1, \dots, \cancel{P_j}, \dots, P_k\})$ ↯

(i)$\Rightarrow$(iv) $P_1, \dots, P_k$ sono affinemente indipendenti, ma $P_i = 1 \cdot P_i$ e la scrittura è unica $\Rightarrow P_i \notin \mathrm{Aff}(\{P_1, \dots, \cancel{P_i}, \dots, P_k\})$ □

proposizione Sia $E = \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$. Allora $w_1, \dots, w_n \in E$ sono affinemente indipendenti $\iff$ i vettori $\hat{w}_1 = \binom{w_1}{1}, \dots, \hat{w}_n = \binom{w_n}{1} \in \mathbb{K}^{n+1}$ sono linearmente indipendenti

Si sta usando l'inclusione: $E \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$

DIMOSTRAZIONE

ultima coordinata

$\Rightarrow$: $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{w}_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i = 0$

$\lambda_1 = -\sum_{i>1} \lambda_i \Rightarrow (-\sum_{i>1} \lambda_i) w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_k w_k = 0$

$\Rightarrow \lambda_2 (w_2 - w_1) + \lambda_3 (w_3 - w_1) + \dots + \lambda_k (w_k - w_1) = 0 \overset{\text{prop}}{\Rightarrow} \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Leftarrow$: usando la prop. precedente: $\sum_{i>1} \lambda_i (w_i - w_1) = 0 \Rightarrow (-\sum_{i>1} \lambda_i) w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_k w_k = 0$

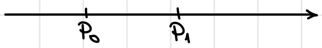
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{w}_i = 0$ con $\lambda_1 = -\sum_{i>1} \lambda_i \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, k$ □

corollario In $E = \mathbb{K}^n$ ci sono al massimo $n+1$ vettori affinemente indipendenti

coordinate affini

Sia E spazio affine su V di dim n
Si scelgono $n+1$ punti affinemente indipendenti: $P_0, \dots, P_n$
Allora $Aff(\{P_0,\dots,P_n\}) = E$ (altrimenti $\exists P \notin Aff(\{P_0,\dots,P_n\})$ e avrei $n+2$ punti aff ind. ↯)
Quindi $P \in E$ si scrive in modo unico come $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$ con $\sum \lambda_i = 1$
le λ_j si dicono coordinate affini di P nel riferimento $P_0, \dots, P_n$

esempio $E = \mathcal{A}_1(\mathbb{R})$ $\quad P_0 \neq P_1$



$P \in E$ si scrive $P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 = P_0 + \lambda_1 (P_1 - P_0)$ con $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$

def. Una combinazione convessa dei punti $P_1, \dots, P_k$ è una combinazione affine di $P_1, \dots, P_k$ $P = \sum \lambda_i P_i$, $\sum \lambda_i = 1$ con $\lambda_i \geq 0$

def. L'inviluppo convesso $IC(S)$ di $S \subset E$ è l'insieme delle combinazioni convesse finite di S

esempio $P = \frac{1}{2} P_0 + \frac{1}{2} P_1 = P_0 + \frac{1}{2}(P_1 - P_0)$ è il punto di mezzo del segmento
Se imponiamo $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$, $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ allora P è interno al segmento
$P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 = P_0 + \lambda_1 (P_1 - P_0)$ con $0 \leq \lambda_1 \leq 1$

esempio $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ P_0, P_1, P_2 affinemente indipendenti (non allineati)
$P \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. $P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ con $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$
$G = \frac{1}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{3} P_3$ è il baricentro

OSS $\forall S \subset E$, $IC(S)$ è convesso (cioè se $P, Q \in IC(S)$, il segmento $\overline{PQ}$ è contenuto in $IC(S)$)

$IC(P_0, P_1, P_2)$ è il triangolo di vertici P_0, P_1, P_2
$P = P_0 + \lambda_1 (P_1 - P_0) + \lambda_2 (P_2 - P_0)$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$

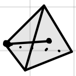
esercizio 1) G è l'intersezione delle mediane del triangolo $\overset{\triangle}{P_0 P_1 P_2}$
$G = \frac{1}{3} P_0 + \frac{1}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} P_i + \frac{1}{2} P_j\right) + \frac{1}{3} P_k$
Inoltre G divide la mediana in 2 parti, di cui una è doppia dell'altra
$\frac{2}{3} P + \frac{1}{3} Q$ $\quad P \vdash\!\!-\!\bullet\!-\!-\!\dashv Q$

2) Pensiamo $P = \sum \lambda_i P_i$, $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, come baricentro di punti di massa λ_i con massa totale 1
In generale, se P_i ha massa m_i, il baricentro è la combinazione convessa $\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{M} P_i$ con $M = \sum m_i$
Il baricentro geometrico dei P_i: $G = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} P_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_i$
i P_i di massa uguale a 1

$A \subset E$ finito, chiamiamo G_A il baricentro geometrico dei punti
Allora se $A = B \sqcup C$ $(A = B \cup C,\ B \cap C = \emptyset)$
si ha $G_A = \frac{|B|}{|A|} G_B + \frac{|C|}{|A|} G_C$

DIMOSTRAZIONE
$$G_A = \sum_{P \in A} \frac{1}{|A|} P = \frac{1}{|A|} \left(|B| \sum_{P \in B} \frac{1}{|B|} P + |C| \sum_{P \in C} \frac{1}{|C|} P \right) \quad \square$$

esercizio P_0, P_1, P_2, P_3 affinemente indipendenti in $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$



$$G = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3$$

Dividendo in $B=\{P_0\}$, $C=\{P_1, P_2, P_3\}$:
G è l'incontro delle mediane (segmento da P_i al baricentro della faccia opposta)

$$\left[\, G = \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3\right) \right]$$

Dividendo in $B=\{P_0, P_1\}$, $C=\{P_2, P_3\}$:
G è l'incontro dei segmenti che congiungono i punti medi

$$\left[\, G = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3\right) \right]$$

def. Sia E spazio affine su V, E' spazio affine su V', su $\mathbb{K}$
Un'applicazione $f: E \longrightarrow E'$ si dice **applicazione affine**
se conserva le combinazioni affini, cioè $f(\sum \lambda_i P_i) = \sum \lambda_i f(P_i)$ con $\sum \lambda_i = 1$

Teorema Sia $f: E \longrightarrow E'$ affine.
Allora esiste unica applicazione lineare $g: V \longrightarrow V'$ t.c.
$$f(O+\underline{v}) = f(O) + g(\underline{v}) \qquad \forall \text{ scelta di } O \in E,\ \forall \underline{v} \in V$$

DIMOSTRAZIONE
$O \in E$, l'applicazione $g_0: V \longrightarrow V'$ data da $g_0(\underline{v}) = f(O+\underline{v}) - f(O)$
è lineare: $O + (\underline{v}+\underline{w}) = (O+\underline{v}) + \underline{w} = (O+\underline{v}) + ((O+\underline{w}) - O) = (O+\underline{v}) + (O+\underline{w}) - O$ è una comb. affine

$$\Rightarrow f(O+(\underline{v}+\underline{w})) = f(O+\underline{v}) + f(O+\underline{w}) - f(O)$$
$$f(O+(\underline{v}+\underline{w})) - f(O) = f(O+\underline{v}) - f(O) + f(O+\underline{w}) - f(O) = g_0(\underline{v}) + g_0(\underline{w})$$
$$g_0(\lambda\underline{v}) = f(O+\lambda\underline{v}) - f(O) = \lambda f(O+\underline{v}) + (1-\lambda) f(O) - f(O) = \lambda\left(f(O+\underline{v}) - f(O)\right) = \lambda g_0(\underline{v})$$
$$O + \lambda\underline{v} = \lambda(O+\underline{v}) + (1-\lambda)O \Rightarrow f(O+\lambda\underline{v}) = \lambda f(O+\underline{v}) + (1-\lambda) f(O)$$

L'unicità deriva da $g_0(\underline{v}) = f(O+\underline{v}) - f(O)$ □

g si chiama applicazione lineare associata all'applicazione affine f
oppure differenziale di f: $g = df$ con $g(\underline{v}) = f(P+\underline{v}) - f(P)$ (non dipende da P)

Viceversa, $g: V \longrightarrow V'$ lineare, trovo $f: E \longrightarrow E'$ affine
$\forall$ scelta di $O \in E$, $O' \in E'$, definita da
$$f(P) = O' + g(P-O) \qquad O' = f(O)$$
esercizio f è affine

Nel caso $E = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $E' = \mathcal{A}_m(\mathbb{K})$
$$f(\underline{x}) = f(\underline{0}) + g(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b} \quad \text{con } A \in M_{m,n}(\mathbb{K}),\ \underline{b} \in \mathbb{K}^m$$
La stessa cosa si trova scegliendo una base in V e V' e esprimendo f tramite le coordinate.

Se E'' è un altro spazio affine, associato a V'', e $f': E' \longrightarrow E''$ è affine,
con applicazione lineare associata $g': V' \longrightarrow V''$, allora chiaramente
$f' \circ f: E \longrightarrow E''$ è affine $\left(f'(f(\sum \lambda_i P_i)) = f'(\sum \lambda_i f(P_i)) = \sum \lambda_i f'(f(P_i)) \right)$
e vale $f'(f(O+\underline{v})) = f'(f(O) + g(\underline{v})) = f'(f(O)) + g'(g(\underline{v}))$
per cui l'applicazione lineare associata a $f' \circ f$ è $g' \circ g$.

def. Una **affinità** di E è una $f: E \to E$ affine bigettiva

Per essere bigettiva e quindi invertibile, è necessario e sufficiente che l'applicazione lineare associata $g: V \to V$ sia invertibile. In questo caso $f^{-1}: E \to E$ è una trasformazione affine con applicazione lineare associata $g^{-1}: V \to V$.

$$f^{-1}(f(O+\underline{v})) = f^{-1}(f(O)+g(\underline{v})) = f^{-1}(f(O)) + g^{-1}(g(\underline{v})) = O+\underline{v}$$

Prendendo lo stesso O per f^{-1}:

$$f^{-1}(O+\underline{w}) = f^{-1}(f(O)+(O-f(O))+\underline{w}) = O+g^{-1}(O-f(O))+g^{-1}(\underline{w}) = O-g^{-1}(f(O)-O)+g^{-1}(\underline{w})$$

In coordinate $f^{-1}: \underline{x} \longmapsto A^{-1}\underline{x} - A^{-1}\underline{b}$

def. Il **gruppo affine** di E, $A(E)$, è il gruppo delle affinità di E.

L'applicazione $A(E) \longrightarrow GL(V): f \longmapsto g$ è un omomorfismo surgettivo.
Il nucleo è dato dalle f t.c. $f(O+\underline{v}) = f(O)+\underline{v} = O+(f(O)-O)+\underline{v} = O+\underline{v}+(f(O)-O)$
cioè dalle traslazioni, che formano un sottogruppo normale.

$$\mathbb{K}^n = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{A}_{n+1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} : \underline{x} \longmapsto \begin{bmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ι è un'applicazione affine:

$$\sum \lambda_i \underline{x}_i \longmapsto \sum \lambda_i \hat{\underline{x}}_i$$

cioè ι è un isomorfismo affine tra $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ e l'iperpiano $H_{n+1} = \{x_{n+1} = 1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$

> **proposizione** Sia f un'affinità di $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, data da $f(\underline{x}) = A\underline{x}+\underline{b}$ con $A \in GL(n,\mathbb{K})$.
> Allora l'affinità f' di H_{n+1} che corrisponde a f tramite $\iota: \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} H_{n+1}$
> ($f'(\hat{\underline{x}}) = \widehat{f(\underline{x})} = \begin{bmatrix} f(\underline{x}) \\ 1 \end{bmatrix}$) si estende a un'applicazione lineare invertibile $\hat{f}: \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$
> Viceversa, se ho una $g: \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ lineare invertibile che manda H_{n+1} in sé, allora $g|_{H_{n+1}}$ è affine e quindi induce un'affinità f di $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ (che ha g come estensione). La $\hat{f}$ è data dalla matrice:
> $$\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in GL(n+1,\mathbb{K}) \qquad (A \in GL(n,\mathbb{K}))$$
> Le matrici di questa forma formano un sottogruppo di $GL(n+1,\mathbb{K})$ isomorfo al gruppo $A_n(\mathbb{K})$, che sono gli endomorfismi che preservano l'iperpiano H_{n+1}.

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo $\underline{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$, $\underline{x}' = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ dove $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

Definiamo $\hat{f}: \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ come $\hat{f}\left(\begin{pmatrix} \underline{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} A\underline{x}+x_{n+1}\underline{b} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \hat{A}\underline{x}'$ con $\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

Allora $\hat{f}(\iota(\underline{x})) = \hat{f}(\hat{\underline{x}}) = \hat{f}\left(\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} A\underline{x}+\underline{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\underline{x}) \\ 1 \end{pmatrix} = \widehat{f(\underline{x})} = \iota(f(\underline{x})) = f'(\hat{\underline{x}})$

Quindi $\hat{f}$ preserva H_{n+1} e estende f'.

Viceversa, $g: \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ preserva H_{n+1}. Sia $B\underline{x}' = g(\underline{x}')$

Allora $B\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \underline{x}$. Allora $(B)_{n+1,j} = 0$ se $j<n+1$ e $B_{n+1,n+1} = 1$

(Se prendo $\underline{x} = \underline{0}$ deduco che $(B)_{n+1,n+1} = 1$
Se $(B)_{n+1,j} \neq 0$ con $j<n+1$, $x_j = -\frac{1}{B_{n+1,j}}$, $x_k = 0$ se $k \neq j$, trovo $\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$ ↯)

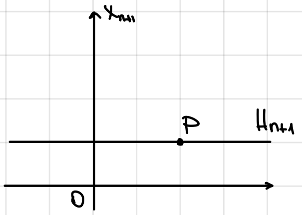
Quindi $B = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \hat{A}$

$g|_{H_{n+1}}$ è affine e $g = \hat{f}$ dove $f(\underline{x}) = A\underline{x}+\underline{b}$ □

esercizio $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ isomorfismo, $E \subset \mathbb{K}^n$ ssp affine $(E = W + \underline{v})$

Se $f(E) \subset E$, allora $f|_E : E \to E$ è affine

OSS



Consideriamo in $\mathbb{K}^{n+1}$ l'insieme dei sottospazi di dim 1:
si chiama lo spazio proiettivo associato a $\mathbb{K}^{n+1}$
e si denota con $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

Ogni punto $\binom{\underline{x}}{1} \in H_{n+1}$ individua uno e un solo sottospazio ℓ di dim 1 di $\mathbb{K}^{n+1}$: $\ell = \mathrm{Span}\left(\binom{\underline{x}}{1}\right)$, cioè un punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

cioè $\mathcal{Q}_n(\mathbb{K})$ si identifica con un sottoinsieme di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

La differenza $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus \mathcal{Q}_n(\mathbb{K})$ consiste nelle rette $\ell \subset \mathbb{K}^{n+1}$ t.c. $\ell \subset \{x_{n+1} = 0\} \cong \mathbb{K}^n$,
cioè corrispondono a un $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

Tali rette (o direzioni) in più si possono vedere come punti aggiunti allo spazio affine $\mathcal{Q}_n(\mathbb{K})$,
i "punti all'infinito" di $\mathcal{Q}_n(\mathbb{K})$.

Intuitivamente un punto all'infinito è il limite di un punto $P \in \mathcal{Q}_n(\mathbb{K})$
che si allontana all'infinito in direzione ℓ

Si può ricoprire $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ con insiemi affini analoghi a H_{n+1}:
basta considerare gli iperpiani $H_i = \{x_i = 1\} \subset \mathbb{K}^{n+1}$.
È chiaro che ogni 1-ssp $\ell \subset \mathbb{K}^{n+1}$ interseca almeno uno degli H_i (in un punto)

Nel caso $E = \mathcal{Q}_n(\mathbb{K})$

$$A(E) = A_n(\mathbb{K}) = \{ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \mid f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b},\ A \in GL(n, \mathbb{K}),\ \underline{b} \in \mathbb{K}^n \} \cong \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in GL(n+1, \mathbb{K}) \right\}$$

Teorema Sia E spazio affine di dimensione n.

(1) Se $f \in A(E)$ e $P_0, \dots, P_k$ sono affinemente indipendenti
$\Longrightarrow f(P_0), \dots, f(P_k)$ sono affinemente indipendenti

(2) Se $P_0, \dots, P_n$ sono affinemente indipendenti e $Q_0, \dots, Q_n$ sono affinemente indipendenti
$\exists$ un'unica affinità $f: E \to E$ t.c. $f(P_i) = Q_i$, $i = 1, \dots, n$

DIMOSTRAZIONE

1) Scelgo $O = P_0$ $f(P_i) = f(P_0) + g(P_i - P_0)$
Quindi $f(P_i) - f(P_0) = g(P_i - P_0)$, che sono lin. ind. perché g è invertibile
($P_i - P_0$ $i = 1, \dots, k$ sono lin. ind per hp)

2) Si deve avere $f(P_0) = Q_0$ e $f(P_i) = f(P_0 + (P_i - P_0)) = f(P_0) + g(P_i - P_0) =$
$= Q_0 + Q_i - Q_0 = Q_i$

Una tale g esiste ed è unica perché $P_i - P_0$ $i = 1, \dots, n$ sono una base di V

OSS 1) $A_n(\mathbb{K})$ dipende da n^2+n parametri

2) Dato D ssp affine di dim k di $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

$\{f\in A_k(\mathbb{K}) \mid f(D)=D\}$ è un sottogruppo di $A_n(\mathbb{K})$ che dipende da $(k+1)k+(n-k)n$

Proposizione $f\in A(E)$, $D\subset E$ ssp affine $\Rightarrow$ $f(D)$ è un ssp affine della stessa dim

DIMOSTRAZIONE

$P_0\in D \Rightarrow f(P_0+v)=f(P_0)+g(v)$ $\forall v\in D_0$, direzione di D

Quindi $f(D)=f(P_0)+g(D_0)$

In particolare $(f(D))_0=g(D_0)$ ha la stessa dim di D perché g è invertibile □

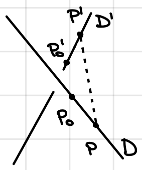
esercizio (1) D, D' ssp affini $\Rightarrow$ o $D\cap D'=\emptyset$ o $D\cap D'$ è ssp affine

(2) • Se $D\cap D'\neq\emptyset$ allora la direzione di $Aff(D\cup D')$ è la somma delle direzioni: $(Aff(D\cup D'))_0 = D_0+D_0'$

e $(Aff(D\cap D_0))_0 = D_0\cap D_0'$

Quindi $\dim(Aff(D\cup D')) = \dim D + \dim D' - \dim(D\cap D')$

• Se $D\cap D'=\emptyset$, $\dim(Aff(D\cup D'))_0 = \dim(D_0+D_0')+1$



Infatti, indicata con $\ell_{P,Q}=\{(1-\lambda)P+\lambda Q \mid \lambda\in\mathbb{K}\}$ la retta per P e Q, si ha

$$Aff(D\cup D') = \underset{Aff(D)}{D}\cup \underset{Aff(D')}{D'} \cup \bigcup_{\substack{P\in D\\ P'\in D'}} \ell_{PQ}$$

Infatti le combinazioni affini in $D\cup D'$ sono o combinazioni di punti di D ($\in D$) o di punti di D' ($\in D'$) oppure del tipo

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i + \sum_{i=1}^h \lambda_i' P_i' \quad (*) \quad \text{con } \sum\lambda_i+\sum\lambda_i'=1,\ e\ P_1,\dots,P_k\in D,\ P_1',\dots,P_k'\in D'$$

Scriviamo $\lambda=\sum\lambda_i$, $\lambda'=\sum\lambda_i'$ $(\lambda+\lambda'=1,\ \lambda\neq0,\ \lambda'\neq0)$

$$(*) = \lambda\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda}P_i + \lambda'\sum_{i=1}^h\frac{\lambda_i'}{\lambda'}P_i' = \lambda P+\lambda'P'\in \ell_{PQ} \quad \text{con } P=\sum\frac{\lambda_i}{\lambda}P_i \ e\ P'=\sum\frac{\lambda_i'}{\lambda'}P_i'$$

Fissato $P_0\in D$, $P_0'\in D'$, $\forall P\in D, \forall P'\in D'$ si ha:

$$P'-P = \underset{\substack{\cap\\ D_0'}}{(P'-P_0')} + (P_0'-P_0) + \underset{\substack{\cap\\ D_0}}{(P_0-P)} \qquad \text{con } P_0'-P_0\notin D_0+D_0'$$

segue che $(Aff(D\cup D'))_0 = D_0+D_0'+Span(P_0'-P_0)$

Quindi $\dim(Aff(D\cup D')) = \dim D + \dim D' - \dim(D_0\cap D_0') + 1$

esempio Consideriamo $A_n(\mathbb{K})$

n=1 $f: A_1(\mathbb{K})\longrightarrow A_1(\mathbb{K})$ $f(x)=ax+b$ $x\in\mathbb{K}$, $a\in\mathbb{K}^*$, $b\in\mathbb{K}$

$A_1(\mathbb{K})\cong\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&1\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{K})\right\}$

La composizione è $\begin{pmatrix}a&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&b'\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'&ab'+b\\0&1\end{pmatrix}$ struttura di gruppo su $\mathbb{K}^*\times\mathbb{K}$

$A_1(\mathbb{K})$ agisce transitivamente su $\mathcal{A}_1(\mathbb{K})$: già le traslazioni agiscono transitivamente

Non agisce liberamente: se $x_0\in\mathcal{A}_1(\mathbb{K})$

Stab$(x_0)=\{f\mid f(x_0)=x_0\}\cong GL(1,\mathbb{K})$

$f(x_0+x)=f(x_0)+g(x)=x_0+g(x)$

esercizio 1) $\# Fix(f) = \# \{x \in \mathbb{A}_1(\mathbb{K}) \mid f(x) = x\} \leq 1$

$\# Fix(f) = 0 \iff f$ è una traslazione

$f(x) = x \iff ax+b = x \iff (a-1)x + b = 0$

se $a \neq 1$, $x_0 = -\frac{b}{a-1}$

2) Sulle coppie di punti (P_1, P_2) $P_1 \neq P_2$, $A_1(\mathbb{K})$ agisce in maniera semplicemente transitiva

Se P_1, P_2, P_3 $\quad Q_1, Q_2, Q_3$ terne di punti distinti

Allora $\exists f \in A_1(\mathbb{K})$ t.c. $f(P_i) = Q_i$

$\iff$ il RAPPORTO SEMPLICE $\lambda = \lambda(P_1, P_2, P_3)$ definito come

$P_3 - P_1 = \lambda(P_2 - P_1) \iff P_3 = (1-\lambda) P_1 + \lambda P_2$

è uguale a $\lambda(Q_1, Q_2, Q_3)$

Infatti: f conserva le combinazioni affini, $\exists ! f$ t.c. $f(P_1) = Q_1$, $f(P_2) = Q_2$

$\Rightarrow f(Q_3) = (1-\lambda) Q_1 + \lambda Q_2$

esempio $n=2$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \cong \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

punto fisso $\quad A\underline{x} + \underline{b} = \underline{x} \iff (A - I)\underline{x} + \underline{b} = \underline{0} \iff \underline{b} \in Im(A-I)$

se A non ha autovalore $1 \iff A - I$ invertibile $\Rightarrow Im(A-I)$ tutto

$\Rightarrow \underline{b} \in Im(A-I)$

$Stab(\underline{x_0}) \cong GL(2, \mathbb{K})$

OSS $\quad$ Sia $Gr_k^{(aff)}(E) = \{$ssp affini di dim k di $E\}$ la Grassmanniana affine

esercizio 1) $A_2(\mathbb{K})$ agisce transitivamente su $Gr_1^{(aff)}(\mathbb{A}_2(\mathbb{K}))$

se ℓ, ℓ' sono rette affini, $\mathcal{F} = \{f \in A_2(\mathbb{K}) \mid f(\ell) = \ell'\}$

dipende 4 parametri

$f(P_0), f(P_1)$ variano in ℓ', $f(P_2)$ varia nel piano

2) (i) Date rette ℓ, ℓ', punti P, P', $P \notin \ell$, $P' \notin \ell'$

$\exists f \in A_2(\mathbb{K})$ t.c. $f(\ell) = \ell'$, $f(P) = P'$, tali f dipendono da 2 parametri

[Scegliamo $P_0 = P$ e $P_1, P_2 \in \ell$, $P_1 \neq P_2$. Analogamente $Q = P'$ e $Q_1, Q_2 \in \ell'$

Allora i P_i sono affinemente indipendenti (dimostrare) così come i Q_i.

Quindi per il teorema $\exists f \in A_2(\mathbb{K})$ t.c. $f(P_i) = Q_i$, $i = 1,2,3$. Come sopra,

f porta ℓ in ℓ'. I parametri: Q_0 e Q_1 variano in ℓ.]

(ii) Se $P \in \ell$, $P' \in \ell'$, $\exists f \in A_2(\mathbb{K})$ t.c. $f(\ell) = \ell'$, $f(P) = P'$,

tali f dipendono da 3 parametri.

[Scegliamo $P_0 = P$, $P_1 \in \ell$, $P_1 \neq P_0$, $P_2 \notin \ell$ e similmente $Q_0 = P'$, $Q_1 \in \ell'$, $Q_1 \neq Q_0$, $Q_2 \notin \ell'$.

I P_i e i Q_i sono affinemente indipendenti (dimostrare), quindi $\exists f \in A_2(\mathbb{K})$ t.c.

$f(P_i) = Q_i$ per $i = 1,2,3$. Tale f porta ℓ in ℓ'. Possiamo far variare

Q_1 in ℓ' (1 parametro) e Q_2 in $\mathbb{A}_2(\mathbb{K}) \setminus \ell'$ (2 parametri)]

3) Siano $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{A}_2(\mathbb{K})$ rette distinte. Allora ℓ_1, ℓ_2 sono parallele

(cioè hanno la stessa direzione) $\iff \ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$

4) Se ℓ_1, ℓ_2 sono rette parallele e $f \in A_2(\mathbb{K}) \Rightarrow \ell_1' = f(\ell_1)$, $\ell_2' = f(\ell_2)$ sono parallele

5) (i) Date coppie di rette ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_1', ℓ_2' non parallele, $\exists f \in A_2(\mathbb{K})$ t.c. $f(\ell_i) = \ell_i'$, $i=1,2$

Tali f dipendono da 2 parametri

[$P_0 = \ell_1 \cap \ell_2$, $P_i \in \ell_i \setminus \{P_0\}$, $i=1,2$; $Q_0 = \ell_1' \cap \ell_2'$, $Q_i \in \ell_i' \setminus \{Q_0\}$, $i=1,2$

la f t.c. $f(P_i) = Q_i$ manda ℓ_i in ℓ_i'. Posso variare Q_i in $\ell_i' \setminus \{Q_0\}$ (2 parametri)]

(ii) se $\ell_1 \parallel \ell_2$, $\ell_1' \parallel \ell_2'$, $\exists f \in A_2(\mathbb{K})$ t.c. $f(\ell_i) = \ell_i'$, $i=1,2$

Tali f dipendono da 3 parametri.

[$P_0, P_1 \in \ell_1$, $P_2 \in \ell_2$; $Q_0, Q_1 \in \ell_1'$, $Q_2 \in \ell_2'$. la f t.c. $f(P_i) = Q_i$

manda ℓ_1 in ℓ_1' e ℓ_2 in una retta parallela a ℓ_1' che interseca ℓ_2' in Q_2:

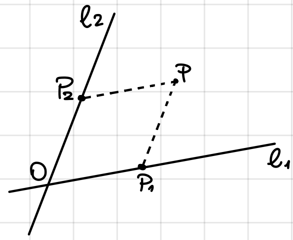
ma anche ℓ_2' è parallela a ℓ_1', quindi $f(\ell_2)$ e ℓ_2' hanno la stessa direzione.

Avendo un punto in comune, coincidono. Per i parametri: ogni Q_i varia in una retta]

6) Studiare il caso di triple di rette

7) Date ℓ_1, ℓ_2, P ; ℓ_1', ℓ_2', P' con $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset$, $\ell_1' \cap \ell_2' \neq \emptyset$, $P \notin \ell_1 \cup \ell_2$, $P' \notin \ell_1' \cup \ell_2'$

$\exists!$ f t.c. $f(\ell_i) = \ell_i'$, $f(P) = P'$



[$\exists$ unici $P_i \in \ell_i$ t.c., se $O = \ell_1 \cap \ell_2$, $P - O = (P_1 - O) + (P_2 - O)$

Similmente scegliamo $P_i' \in \ell_i'$, $\exists f$ t.c.

$f(O) = O' = \ell_1' \cap \ell_2'$, $f(P_i) = P_i'$, $i=1,2$

Segue $f(P) = f(O + (P_1 - O) + (P_2 - O)) = P_1 + P_2 - O) =$

$= f(P_1) + f(P_2) - f(O) = P_1' + P_2' - O' =$

$= O' + (P_1' - O') + (P_2' - O') = P'$

Inoltre $f(P) = P'$, $f(\ell_i) = \ell_i'$, $i=1,2$ implica $f(P_i) = P_i'$, $i=1,2$,

quindi f è unica.

<u>OSS</u> un riferimento affine O, P_1, P_2 si può quindi determinare scegliendo due rette ℓ_1, ℓ_2 con $O = \ell_1 \cap \ell_2$ e un punto $P \notin \ell_1 \cup \ell_2$ (che determina P_1 e P_2)

Questa costruzione si generalizza in $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

8) Studiare il caso ℓ, P_1, P_2 ; ℓ', P_1', P_2'

(nei vari sottocasi in cui $P_i \notin \ell$, $i=1,2$, oppure uno o entrambi i punti $\in \ell$)

9) Studiare il caso di $A_3(\mathbb{K})$, considerando varie collezioni di punti, rette e piani in $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$.

CONICHE

def. Una conica in $\mathcal{A}_2(\mathbb{K})$ è il luogo di zeri di un polinomio di 2° grado in 2 variabili $p \in \mathbb{K}[x,y]$.

$$C = Z(p) = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{K}^2 \mid p(x,y) = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0 \right\}$$

NOTA (i) può non avere soluzioni

esempio $x^2+y^2+1=0 \quad \mathbb{K}=\mathbb{R}$

(ii) la conica non cambia se si moltiplicano tutti i coefficienti per un numero $\neq 0$: $Z(p) = Z(\lambda p)$ $(\lambda \neq 0)$

OSS Il gruppo affine $A_2(\mathbb{K})$ agisce sull'insieme delle coniche: se $f \in A_2(\mathbb{K})$ e $\binom{x}{y} = f\left(\binom{x'}{y'}\right)$ allora $p(x',y')=0$ per qualche polinomio di 2° grado p
$A_2(\mathbb{K})$ agisce sui polinomi (di grado qualunque)

def. Più in generale, una quadrica in $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ è il luogo di zeri di un polinomio di 2° grado $p \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$:

$$Q = Z(p) = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid p(\underline{x}) = p(x_1,\dots,x_n) = 0 \right\}$$

Si ha $p(x_1,\dots,x_n) = p_2(x_1,\dots,x_n) + p_1(x_1,\dots,x_n) + p_0(x_1,\dots,x_n)$ dove i p_i sono omogenei di grado i

p_2 è una forma quadratica: $p_2(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ (char $\mathbb{K} \neq 2$)

si può simmetrizzare supponendo $a_{ij} = a_{ji}$ $\left[(a_{ij}+a_{ji}) x_i x_j = \frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}) x_i x_j + \frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}) x_j x_i \right]$

Quindi $p_2(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j = \underline{x}^T A \underline{x}$ con $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $A = (a_{ij})$ simmetrica

- $p_1(x_1,\dots,x_n) = 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 2\underline{b}^T \cdot \underline{x}$ con $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
- $p_0(x_1,\dots,x_n) = c \in \mathbb{K}$

Quindi $p(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \cdot \underline{x} + c$

Sia $f \in A_n(\mathbb{K})$: $f(\underline{x}') = M\underline{x}' + \underline{t}$ con $M \in GL(n,\mathbb{K})$, $\underline{t} \in \mathbb{K}^n$

Allora $p'(\underline{x}') = p(M\underline{x}'+\underline{t}) = (M\underline{x}'+\underline{t})^T A (M\underline{x}'+\underline{t}) + 2\underline{b}^T \cdot \underline{x} + c =$

$= \underline{x}'^T M^T A M \underline{x} + \underline{t}^T A M \underline{x}' + \underline{x}'^T M^T A \underline{t} + 2\underline{b}^T M \underline{x} + \underline{t}^T A \underline{t} + 2\underline{b}^T \underline{t} + c =$

$= \underline{x}'^T M^T A M \underline{x} + 2(A\underline{t}+\underline{b})^T M \underline{x} + p(\underline{t})$

Quindi $p(\underline{x})$ si trasforma in $p'(\underline{x}') = \underline{x}'^T A' \underline{x}' + 2\underline{b}'^T \underline{x}' + c'$

con $A' = M^T A M$, $\underline{b}' = M^T(A\underline{t}+\underline{b})$, $c' = p(\underline{t})$

Nella notazione $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathcal{A}_{n+1}(\mathbb{K}): \underline{x} \longmapsto \hat{\underline{x}} = \binom{\underline{x}}{1}$, $A_n(\mathbb{K}) \cong \left\{ \left(\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), M \in GL(n,\mathbb{K}) \right\}$

Poniamo $\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{b}^T & c \end{array} \right)$, allora $p(\underline{x}) = \hat{\underline{x}}^T \tilde{A} \hat{\underline{x}}$

Se $f \in A_n(\mathbb{K})$ è data da $f(\underline{x}') = M\underline{x}' + \underline{t}$, allora se $\hat{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$ si ha $p'(\underline{x}') = \hat{\underline{x}}'^T \tilde{A}' \hat{\underline{x}}'$ con $\tilde{A}' = \hat{M}^T \tilde{A} \hat{M} = \left(\begin{array}{c|c} M^T A M & M^T(A\underline{t}+\underline{b}) \\ \hline (A\underline{t}+\underline{b})^T M & p(\underline{t}) \end{array} \right)$

esempio f traslazione: $f(\underline{x}) = \underline{x}+\underline{t}$. Allora si ha:

$$p'(\underline{x}') = \underline{x}'^T A \underline{x}' + 2(A\underline{t}+\underline{b})^T \underline{x}' + p(\underline{t}) = \hat{\underline{x}}'^T \left(\begin{array}{c|c} A & A\underline{t}+\underline{b} \\ \hline (A\underline{t}+\underline{b})^T & p(\underline{t}) \end{array} \right) \hat{\underline{x}}'$$

OSS $p = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = (x\ y\ 1) \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{\underline{x}}^T M_p \hat{\underline{x}}$ con M_p matrice associata a p

Allora $C = Z(p) = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathcal{A}_2(\mathbb{K}) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in Cl(\varphi_{M_p}) \right\} = Cl(\varphi_{M_p}) \cap H$ dove $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid z=1 \right\}$

Per questo, sono definite sezioni coniche

classificazione delle quadriche

- **affine**: si trova una "forma canonica" nelle orbite del gruppo affine $A_n(\mathbb{K})$
- **isometrica**: se V è euclideo (con prodotto $\varphi > 0$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), su E si può introdurre la distanza $d(P,Q) = \|P - Q\|$

Le isometrie di E sono quelle affinità che preservano la distanza, e formano un gruppo $\mathrm{Iso}(E)$. Se $E = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ con prodotto canonico, allora $f \in \mathrm{Iso}(E) \Leftrightarrow f(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$ $A \in O(n)$. Infatti $\|\underline{y} - \underline{x}\| = \|f(\underline{y}) - f(\underline{x})\| =$
$= \|A\underline{y} + \underline{b} - (A\underline{x} + \underline{b})\| = \|A(\underline{y} - \underline{x})\|$ $\forall \underline{x}, \underline{y} \Leftrightarrow A \in O(n)$.

Quindi $\mathrm{Iso}(E) \cong \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), A \in O(n) \right\}$

Classificazione isometrica: si trovano forme canoniche nelle orbite rispetto a $\mathrm{Iso}(E)$

Sia $C = \{ \underline{x} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \mid p(\underline{x}) = 0 \}$ una quadrica

def. C si dice **a centro** se $\exists\, \underline{x}_0 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ t.c.
$p(\underline{x}_0 + \underline{x}) = p(\underline{x}_0 - \underline{x})$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$
In tal caso $\underline{x}_0$ si dice un **centro (di simmetria)**

OSS $\underline{0}$ è un centro di simmetria di $p(\underline{x})$ $\Leftrightarrow p(\underline{x}) = p(-\underline{x})$
$\Leftrightarrow p(\underline{x})$ non ha termini di grado 1

Infatti $p(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + c$
$p(-\underline{x}) = (-\underline{x})^T A (-\underline{x}) + 2\underline{b}^T(-\underline{x}) + c = \underline{x}^T A \underline{x} - 2\underline{b}^T \underline{x} + c$
$p(\underline{x}) = p(-\underline{x}) \Leftrightarrow \underline{b}^T \underline{x} = -\underline{b}^T \cdot \underline{x} \Leftrightarrow 2\underline{b}^T \cdot \underline{x} = 0$ $\forall \underline{x} \Leftrightarrow \underline{b} = \underline{0}$ $(\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2)$

OSS Se $\underline{x}_0$ è un centro di simmetria, traslando $\underline{x}_0$ in $\underline{0}$, la nuova quadrica ha $\underline{0}$ come centro
cioè la traslazione $\underline{x} = \underline{x}' + \underline{x}_0$
$p'(\underline{x}') = p(\underline{x}' + \underline{x}_0) = p(-\underline{x}' + \underline{x}_0) = p'(-\underline{x}')$

Quindi se rispetto alle coordinate $\underline{x}$ la quadrica ha centro $\underline{x}_0$, rispetto alle $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$ ha centro $\underline{0}$

Riassumendo: C è a centro $\underline{x}_0 \Leftrightarrow$ la traslazione $\underline{x} = \underline{x}' + \underline{x}_0$ annulla i termini di grado 1, cioè la nuova matrice diventa $\tilde{A}' = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{0} \\ \hline 0 & c \end{array}\right)$
$\Leftrightarrow \underline{x}_0$ risolve $A\underline{x}_0 + \underline{b} = \underline{0}$

corollario C è a centro $\Leftrightarrow A\underline{t} + \underline{b} = \underline{0}$ è risolubile
$(\Leftrightarrow \underline{b} \in \mathrm{Im}A \Leftrightarrow \mathrm{rk}(A|\underline{b}) = \mathrm{rk}A)$

I centri della quadrica (quando ci sono) risolvono il sistema, quindi formano un ssp affine di dim $n - \mathrm{rk}A$
Se A è non singolare, C ha uno e un solo centro

coniche

Cerchiamo quali sono gli invarianti (per l'azione di gruppo e per il prodotto per scalare)
Osserviamo che $\tilde{A}' = \hat{M}^T \tilde{A} \hat{M}$ è una congruenza
Notiamo che $\text{rnk}\, A$ e $\text{rnk}\, \tilde{A} = \text{rnk}\begin{pmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^T & c \end{pmatrix}$ sono invarianti

def. Una conica C si dice non degenere se $\text{rnk}\, \tilde{A} = 3$, cioè se $\det \tilde{A} \neq 0$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(1) $\text{rnk}\, A = 2$

Con un'affinità $f(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}$ scegliamo M e $\underline{t}$ in modo che
$M^T A M = I$, $\underline{t} = -A^{-1}\underline{b}$

da C diventa $x_1^2 + x_2^2 + c' = 0$ con $c' = p(\underline{t})$

$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & p(\underline{t}) \end{pmatrix}$

Se $\text{rnk}(\tilde{A}) = 3$, cioè $c' \neq 0$, allora
Sostituendo $x_i = \sqrt{-c'}\, x_i$ e divido per c':

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Se invece $\text{rnk}\, \tilde{A} = 2$, cioè $c' = 0$, allora diventa

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

(2) $\text{rnk}\, A = 1$

Si prende $f(\underline{x}) = M\underline{x}$ con $M^T A M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1' \\ 0 & 0 & b_2' \\ b_1' & b_2' & c \end{pmatrix} \qquad \underline{b}' = M^T \underline{b}$$

- Se $\text{rnk}\, \tilde{A} = 3$ (C non degenere), $\det \tilde{A} \neq 0$, allora $b_2' \neq 0$
  Scegliamo la traslazione $\underline{t} = -\begin{pmatrix} b_1' \\ 0 \end{pmatrix}$, allora la conica assume la forma

  $$\tilde{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2' \\ 0 & b_2' & c' \end{pmatrix} \qquad c' = p'(\underline{t})$$

  Scegliamo $\underline{t}' = \begin{pmatrix} 0 \\ t_2 \end{pmatrix}$ con $t_2 = -\frac{c'}{2b_2'}$
  che annulla il termine noto $(p''(\underline{t}') = 0 = 2b_2' t_2 + c')$
  diventa

  $$x_1^2 + 2b_2' x_2 = 0$$

  e sostituendo $x_2 = -\frac{1}{2b_2'} x_2'$, diventa
  $x_2 = x_1^2$ (conica non al centro)

- Se C è degenere ($\text{rnk}\, A' < 3$), allora $b_2' = 0$
  Se $\text{rnk}\, \tilde{A} = 2$, allora

  $$x_1^2 = 1$$

  Se invece $\text{rnk}\, \tilde{A} = 1$ allora $c' = 0$ e diventa

  $$x_1^2 = 0$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$

forma canonica	$\text{rnk}\, \tilde{A}$	$\text{rnk}\, A$
$x_1^2 + x_2^2 = 1$	3	2
$x_2 = x_1^2$	3	1
$x_1^2 + x_2^2 = 0$	2	2
$x_1^2 = 1$	2	1
$x_1^2 = 0$	1	1

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

La segnatura è invariante per congruenza

Moltiplicando per $\alpha \neq 0$ la conica non cambia

- se $\alpha > 0$, la segnatura non cambia
- se $\alpha < 0$, $(i_+, i_-, i_0) \longmapsto (i_-, i_+, i_0)$

Invariante: $|i_+ - i_-|$

Data una matrice simmetrica M, $S(M) = i_+(M) - i_-(M)$

Allora $|S(\tilde{A})|$ e $|S(A)|$ sono invarianti

La moltiplicazione per $\alpha < 0$ cambia il segno di $\det \tilde{A}$, ma non cambia il segno di $\det A$ ($\operatorname{sgn}(\det A)$ invariante)

Forme canoniche affini delle coniche reali		$\operatorname{rk} \tilde{A}$	$\lvert S(\tilde{A})\rvert$	$\operatorname{rk} A$	$\operatorname{sgn}(\det A)$	$\lvert S(A)\rvert$
$\mathcal{C}_1: x^2+y^2-1=0$	ellisse	3	1	2	>0	2
$\mathcal{C}_2: x^2-y^2-1=0$	iperbole	3	1	2	<0	0
$\mathcal{C}_3: x^2-y=0$	parabola	3	1	1	0	1
$\mathcal{C}_4: x^2-y^2=0$	2 rette reali incidenti	2	0	2	<0	0
$\mathcal{C}_5: x^2-1=0$	2 rette reali parallele distinte	2	0	1	0	1
$\mathcal{C}_6: x^2=0$	2 rette reali coincidenti	1	1	1	0	1
$\mathcal{C}_7: x^2+y^2+1=0$	ellisse immaginaria	3	3	2	>0	2
$\mathcal{C}_8: x^2+y^2=0$	2 rette complesse coniugate incidenti in 1 punto reale	2	2	2	>0	2
$\mathcal{C}_9: x^2+1=0$	2 rette complesse coniugate parallele distinte	2	2	1	0	1

Teorema Ogni conica in $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ è affinemente equivalente a una e una sola conica della tabella

DIMOSTRAZIONE

Unicità: 2 coniche della tabella hanno almeno un invariante diverso

Vediamo come una conica $\mathcal{C}$ si riduce a una della tabella

(1) Si vede prima se $\mathcal{C}$ è a centro o no, cioè se è risolubile $A\underline{t}+\underline{b}=0$

(2) Supponiamo sia a centro

Allora con una traslazione $\underline{t}$ che risolve $A\underline{t}+\underline{b}=\underline{0}$ si eliminano i termini di grado 1

$$\underline{x}^T A \underline{x} + c' = 0$$

Con un cambiamento lineare $\underline{x} \longmapsto M\underline{x}$

diagonalizziamo A : $A' = M^T A M$ diag.

e trovo una tra

I, $-I$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

I e $-I$ sono equivalenti moltiplicando per -1, come 3°-4°, 5°-6°

Se ci si riduce a I : $x^2+y^2+c=0$

Se $c<0$, ci si riduce all'ellisse reale $(x=\sqrt{|c|}x', y=\sqrt{|c|}y'$, dividendo per $|c|)$ (e_1)

Se $c>0$, ci si riduce all'ellisse immaginaria (e_7)

Se $c=0$ $\operatorname{rnk}\tilde{A}=2$, C degenere, ci si riduce $x^2+y^2=0$ (e_8)

Se ci si riduce alla 3°/4°, viene $x^2-y^2+c=0$

se $c\neq 0$ iperbole reale (e_2)

se $c=0$ coppia di rette reali incidenti (e_4)

Se $\operatorname{rnk} A=1$, si trova la 5°/6° : $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{A}'=\begin{pmatrix}1&0&b_1'\\0&0&b_2'\\b_1'&b_2'&c\end{pmatrix}$

se a centro $b_2'=0$, posso annullare b_1': $x^2+c=0$

Se $c<0$: $x^2=1$ due rette reali parallele (e_5)

$c>0$: $x^2+1=0$ due rette complesse parallele (e_9)

$c=0$: $x^2=0$ due rette coincidenti (e_6)

(3) non a centro $\operatorname{rnk}A<2$

allora $A\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ (se fosse $\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$ si moltiplica per -1)

Allora $\tilde{A}'=\left(\begin{array}{cc|c}1&0&b_1'\\0&0&b_2'\\\hline b_1'&b_2'&c\end{array}\right)$ con $\underline{b}'=M^T\underline{b}$

Una traslazione $\underline{x}\longmapsto\underline{x}+\underline{t}$ modifica la matrice in:

$$\tilde{\tilde{A}}''=\begin{pmatrix}1&0&t_1+b_1'\\0&0&b_2'\\t_1+b_1'&b_2'&c'\end{pmatrix} \qquad \text{dove } \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1'\\b_2'\end{pmatrix}$$

$$c'=t_1^2+2(b_1't_1+b_2't_2)+c$$

Prendiamo $t_1=-b_1'$ e notiamo che $b_2'\neq 0$, altrimenti si annullerebbero i termini di 1° grado e C sarebbe a centro. In particolare, C è non degenere.

Allora $c'=b_1'^2+2(-b_1'^2+b_2't_2)+c=-b_1'^2+2b_2't_2+c$

Scegliamo $t_2=\frac{b_1'^2-c}{2b_2}$ da cui $c'=0$

Ne segue l'equazione $x_1^2+2b_2x_2=0$.

Con la trasformazione $x_2=-\frac{1}{2b_2}x_2'$, si ricava

$x_1^2-x_2=0$, che è una parabola (e_3) $\square$

esempio Classificare e trovare un'affinità che porta in forma canonica $x^2+4xy+2y^2-x+y+1=0$

$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}$ $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&-\frac{1}{2}\\2&2&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$

$\operatorname{rk}A=2$: è a centro

$\det\tilde{A}=?$ $\operatorname{rk}\tilde{A}=3$. conica non degenere

$\det A=-2<0$ $\Longrightarrow$ iperbole $x^2-y^2=1$

$|S(\tilde{A})|=|i_+(\tilde{A})-i_-(\tilde{A})|=|2-1|=1$

$|S(A)|=0$

Centro : $At=-b=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&\frac{1}{2}\\2&2&-1/2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1/2\\0&-2&-3/2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&-3/2\end{pmatrix}$

$t_1=-1$ $t_2=\frac{3}{4}$ $\underline{x}^TA\underline{x}+p(\underline{t})=0$

$p(\underline{t})=c'$ $x^2+4xy+2y^2+c'=0$

$M^TAM=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}$ $\underline{e}_1$

$\underline{e}_2'=\underline{e}_2-\frac{\varphi(\underline{e}_2,\underline{e}_1)}{\varphi(\underline{e}_1,\underline{e}_1)}\underline{e}_1=$ $\varphi(\underline{x},\underline{y})=\underline{x}^TA\underline{y}$

$=\underline{e}_2-2\underline{e}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$\underline{e}_2''=\frac{\underline{e}_2'}{\sqrt{\|\underline{e}_2'\|}}$

$M=(\underline{e}_1|\underline{e}_2'')=\begin{pmatrix}1&-2/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $M^TAM=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$\longrightarrow x^2-y^2+\frac{23}{8}=0\longrightarrow x^2-y^2+1=0$ con $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{23}{8}}\,x'\\y=\sqrt{\frac{23}{8}}\,y'\end{cases}$

esercizio Classificare e trovare affinità:

$x^2+2xy+y^2+3x+3y=0$

$x^2-3xy+y^2-2x+4y=0$

$xy+x-3y+4=0$