Indice

Capitolo 1
Moduli graduati

1.1 Moduli su anelli noetheriani

In questa parte, vogliamo studiare i moduli finitamente generati su anelli noetheriani. In particolare, vogliamo definire la dimensione di un modulo e vedere che questa si può ricondurre alla dimensione di un certo anello. Iniziamo allora a richiamare alcuni risultati noti.

Definizione 1.1 *Sia A un anello noetheriano e sia M un modulo finitamente generato. Definiamo i primi associati a M come*

$$\mathrm{Ass}(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(A) \mid \exists m \in M \ t.c. \ (0 : m) = p\}$$

La nozione di primo associato nasce naturalmente dallo studio della struttura di un modulo. Infatti:

Proposizione 1.2 *Sia $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Allora esiste un omomorfismo iniettivo $A/p \to M$.*

Dimostrazione. Sia $p \in \mathrm{Ass}(M)$ e sia $m \in M$ tale che $p = (0 : m)$. Allora la mappa

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow M \\ a &\longmapsto am \end{aligned}$$

ha come nucleo p, da cui la tesi.

Inoltre un primo associato esiste sempre:

Proposizione 1.3 *Sia A un anello noetheriano e sia M un A-modulo non nullo. Allora l'insieme $\mathrm{Ass}(M)$ è non vuoto.*

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \{I = (0 : m) \mid m \neq 0, \ m \in M\}$$

Per noetherianità, esiste un elemento massimale di $\mathcal{F}$ e tale elemento è un ideale primo. Questo mostra che l'insieme dei primi associati è non vuoto.

Corollario 1.4 *Se $M \neq 0$ è un A-modulo finitamente generato, esiste una catena di sottomoduli*

$$M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq M_0 = 0$$

e dei primi $p_1, \ldots, p_n \in \operatorname{Spec}(A)$ tali che $M_i/M_{i-1} \simeq A/p_i$.

Dimostrazione. Sia $m_1 \in M$ tale che $p_1 = (0 : m_1)$ sia un primo associato a M. Consideriamo $M_1 = \langle m_1 \rangle$; per il punto 1 sappiamo che $M_1 \simeq A/p_1$. Se $M_1 = M$ abbiamo finito. Altrimenti $M/M_1 \neq 0$ e dunque esiste un primo $p_2 = (0 : \bar{n})$ associato a M/M_1. Allora $p_2 = (0 : \bar{n}) = (M_1 : n)$ e $A/p_2 \to M/M_1$. Allora $M_2 = \langle m_1, m_2 \rangle$ e così via. Per noetherianità tale procedimento termina.

Vediamo ora come si comportano i primi associati rispetto alle successioni esatte:

Proposizione 1.5 *Consideriamo una successione esatta corta di A-moduli*

$$0 \to M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\pi} P \to 0$$

Allora $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Ass} N \subseteq \operatorname{Ass}(M) \cup \operatorname{Ass}(P)$.

Dimostrazione. Sia $p \in \operatorname{Ass}(M)$; per definizione $p = (0 : m)$ con $m \in M$. Allora $p = (0 : i(m))$ da cui il primo contenimento.

Sia ora $p = (0 : n) \in \operatorname{Ass}(N)$. Supponiamo che $p \notin \operatorname{Ass}(M)$ e mostriamo che $p \in \operatorname{Ass}(P)$. Dato che $p \notin \operatorname{Ass}(M)$, deve valere $n \notin i(M)$. Consideriamo allora l'elemento $a = \pi(n) \neq 0$. Possiamo distinguere due casi:

1. Se $(0 : n) = (0 : a)$, allora $p \in \operatorname{Ass}(P)$ da cui la tesi.
2. Se $(0 : n) \subsetneq (0 : a)$, esiste $x \in A$ tale che $xa = 0$ in P e $xn \neq 0$ in M. Allora $\pi(xn) = xa = 0$ e $xn \in \operatorname{Ker}(\pi) = \operatorname{Im}(i)$; mostriamo che questo implica che $(0 : n) = (0 : xn)$, da cui discende la tesi. Chiaramente $(0 : n) \subseteq (0 : xn)$; viceversa se $y \in (0 : xn)$ allora $xy \in (0 : n) = p$. x non appartiene a p e dunque per primalità $y \in p$, da cui la tesi.

Corollario 1.6 *Sia M un A-modulo finitamente generato e non nullo. Allora* $\operatorname{Ass}(M)$ *è finito.*

Dimostrazione. Per il lemma 1.4, possiamo trovare una filtrazione M_i di M tale che $M_i/M_{i-1} \simeq A/p_i$ Consideriamo le successioni esatte corte

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to {}^{M_i}\!/_{M_{i-1}} \to 0$$

Dato che vi è un solo primo associato a M_i/M_{i-1}, ossia p_i, per la proposizione sui primi associati in una successione esatta corta abbiamo che

$$\mathrm{Ass}(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}(A/p_i) = \{p_1, \ldots, p_n\}$$

da cui la tesi.

In totale analogia con la decomposizione primaria, questo ci permette di caratterizzare gli zero divisori di un modulo.

Proposizione 1.7 *L'insieme degli zero divisori $Z(M)$ di M è uguale all'unione dei primi associati di M.*

Dimostrazione. Mostriamo la tesi per doppia inclusione. Chiaramente se un elemento appartiene a un primo associato, è annullatore di un elemento di M. Viceversa, sia $x \in Z(M)$. Allora esiste $m \neq 0$ tale che $xm = 0$. Il sottomodulo generato da m è diverso da 0, dunque l'insieme dei suoi associati è $\neq \emptyset$. Detto p uno di questi, esiste $y \in A$ tale che $p = (0 : ym)$ con $p \in \mathrm{Ass}(\langle m \rangle)$. Chiaramente, $x \in p$ e $p \in \mathrm{Ass}(mA) \subseteq \mathrm{Ass}(M)$, da cui l'uguaglianza.

I primi associati si comportano bene anche rispetto alla localizzazione:

Proposizione 1.8 *Sia M un A-modulo finitamente generato e sia S un sottoinsieme moltiplicativo di A. Allora esiste una corrispondenza naturale tra*

$$\mathrm{Ass}_{A_S}(M_S) \longleftrightarrow \mathrm{Ass}_A(M) \cap \{p \in \mathrm{Spec}(A) \mid p \cap S = \emptyset\}$$

Dimostrazione. Chiaramente, se $pA_S \in \mathrm{Ass}_{A_S}(M_S)$, allora $p \in \mathrm{Ass}_A(M)$. Mostriamo il viceversa: sia $p \in \mathrm{Ass}(M)$ tale che $p \cap S = \emptyset$. Allora $p = (0 : m)$ per un certo $m \in M$. Basta mostrare che $pA_S = (0 : m/1)$. Notiamo che per ipotesi $sm \neq 0$ per ogni $s \in S$. Dato che A è noetheriano, p è finitamente generato, ossia $p = (x_1, \ldots, x_n)$. Per ogni indice $i = 1, \ldots, n$, esiste quindi $s_i \in S$ tale che $s_i x_i m = 0$. Detto $s = \prod s_i \neq 0$, $s x_i m = 0$ per ogni i, e dunque $p = (0 : sm)$. Dunque $pA_S = (0 : sm/s) = (0 : m/1)$.

Vediamo ora come i primi associati sono correlati ai primi minimali e ai primi del supporto:

Definizione 1.9 *Sia A un anello noetheriano e sia M un A-modulo finitamente generato. Il supporto di un modulo M è*

$$\mathrm{Supp}(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(A) \mid M_p \neq 0\}$$

Proposizione 1.10 $\mathrm{Min}(0 : M) \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$

Dimostrazione. Mostriamo prima che $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$. Sia $p \in \mathrm{Ass}(M)$. Abbiamo allora un'immersione

$$0 \to {}^{A}\!/_{p} \to M$$

e tensorizzando per $\otimes A_p$ (che è piatto) otteniamo la mappa iniettiva

$$0 \to {}^{A}\!/_{p} \otimes_A A_p \to M_p$$

Basta allora mostrare che $(A/p)_p \neq 0$; ma questo è ovvio perché localizzazione e quoziente commutano.
Mostriamo ora che $\mathrm{Min}(0 : M) \subseteq \mathrm{Ass}(M)$. Sia $p \in \mathrm{Min}(0 : M)$ un primo minimale dell'annullatore di M; mostriamo che questo è un primo associato di M. Tramite localizzazione, possiamo ridurci a mostrare che $pA_p \in \mathrm{Ass}(M_p)$. Dato che p è minimale per ipotesi, vale $M_q = 0$ per ogni $q \subsetneq p$. Allora $\mathrm{Ass}(M_p) \subseteq \mathrm{Supp}(M_p) = \{p\}$; dato che però $M_p \neq 0$, $\mathrm{Ass}\, M \neq \emptyset$ da cui la tesi.

Teorema 1.11 *Sia M un A-modulo finitamente generato. Allora*

1. $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{Ann}(M))$
2. $\mathrm{Supp}(M) = \bigcup_{p \in \mathrm{Ass}(M)} V(p)$

Dimostrazione.

1. Mostriamo la tesi con una serie di equivalenze. Per definizione, $p \notin \mathrm{Supp}(M)$ significa che $M_p = 0$ e questo è vero se e solo se per ogni $m \in M$ esiste $s \in A \setminus p$ tale che $sm = 0$. Dato che M è noetheriano, possiamo scegliere $t \in A \setminus p$ tale che $tm = 0$ per ogni $m \in M$. Dato che $t \in \mathrm{Ann}(M)$, $p \not\supseteq \mathrm{Ann}(M)$.
2. Se $p \in \mathrm{Ass}(M)$, $p = (0 : m) = \mathrm{Ann}(m) \supseteq \mathrm{Ann}(M)$. Passando al luogo degli zeri, $V(\mathrm{Ann}(M)) \supseteq V(\mathrm{Ann}(m)) = V(p)$. Viceversa, sia $q \in V(\mathrm{Ann}\, M)$. Per quanto mostrato, $M_q \neq 0$ e dunque esiste pA_q tale che $pA_q \in \mathrm{Ass}\, M_q$. In particolare, $p \subseteq q$.

Definizione 1.12 *Definiamo la dimensione di M come*

$$\dim M = \sup\{n \mid p_0 \supsetneq p_1 \supsetneq \cdots \supsetneq p_n, p_i \in \mathrm{Supp}(M)\}$$

Chiaramente trovare tale dimensione tramite la definizione non è semplice, ma per quanto visto i primi minimali di $\mathrm{Ann}(M)$ sono proprio gli elementi minimali di $\mathrm{Supp}(M)$ e dunque

Corollario 1.13 *Sia M un modulo finitamente generato. Vale*

$$\dim(M) = \dim {}^{A}\!/_{\mathrm{Ann}(M)}$$

Corollario 1.14 *Sia M un A-modulo finitamente generato. Sono equivalenti:*

1. *M ha lunghezza finita*
2. *$A/(0 : M)$ è un anello artiniano*
3. $\dim M = 0$

Dimostrazione.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Segue direttamente dal corollario precedente.
(2) $\Rightarrow$ (1) Per il teorema 1.4, esiste una filtrazione $(M_i)_i$ di M tale che i quozienti successivi siano isomorfi a A/p_i. Tali quozienti sono semplici per artinianità (sono campi) e dunque M ha lunghezza finita.
(1) $\Rightarrow$ (2) Supponiamo per assurdo che $\dim A/(0 : M) > 0$. Allora esiste p minimale su $(0 : M)$ e non massimale. Dato che p è minimale, è anche associato e dunque abbiamo una mappa iniettiva $A/p \to M$ da cui un assurdo, perchè $\dim A/p > 0$.

Osservazione 1.15 *Sia* $p \in \mathrm{Ass}(M)$, *allora* $\dim(A/p) \le \dim M$.

Example 1.1.

1. Se consideriamo $A = k[x, y]$ e l'ideale $I = (x^2, xy)$, questo ha due primi associati, (x) e (x, y), uno minimale e l'altro no.
2. Se consideriamo $A = k[x, y, z]$ e $I = (xz - y^2, x^3 - yz)$, è più complicato capire quali siano i minimali. Calcolando un S-polinomio, otteniamo

$$x^2y^2 + yz^2 = y(z^2 - x^2y)$$

Un primo minimale allora deve contenere uno dei due fattori. Se $y \in p$, allora $x \in p$ e dunque $p = (x, y)$. Se invece $p \supseteq (z^2 - x^2y)$, consideriamo l'ideale $J = (I, z^2 - x^2y)$ e l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ k[x, y, z] &\longrightarrow k[t] \\ x &\longmapsto t^3 \\ y &\longmapsto t^4 \\ z &\longmapsto t^5 \end{aligned}$$

Chiaramente $\mathrm{Ker}\,\varphi \supseteq J$ e svolgendo i conti si può vedere che vale l'uguaglianza, da cui la primalità di J.

Nucleo di una mappa polinomiale

In realtà c'è un metodo algoritmico per il calcolo del nucleo di un omomorfismo tra anelli di polinomi. Consideriamo una mappa

$$\begin{aligned} f\colon\ K[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow K[y_1, \dots, y_m] \\ x_i &\longmapsto f_i(y) \end{aligned}$$

Possiamo vedere f come la composizione

$$\begin{array}{ccccc} K[x] & \xrightarrow{i} & K[x, y] & \xrightarrow{g} & K[y] \\ & & y_i & \longmapsto & y_i \\ & & x_i & \longmapsto & f_i(y) \end{array}$$

e dunque è sufficiente studiare il nucleo di g dato che i è iniettiva. Notiamo che l'ideale $I = (x_1 - f_1(y), \ldots, x_n - f_n(y))$ è contenuto nel nucleo di g. Viceversa, sia $h \in \mathrm{Ker}(g)$; dividendo h per $x_1 - f_1(y), \ldots, x_n - f_n(y)$ con l'ordinamento lex otteniamo

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{m} c_i(x, y)(x_i - f_i(y)) + r(y)$$

Quindi $0 = g(h) = r(y)$ da cui l'altro contenimento. Per trovare il nucleo basta quindi calcolare l'ideale di eliminazione.

Osservazione 1.16 *Possiamo adattare questo algoritmo nel caso che la mappa sia a valori in un quoziente $K[y]/J$. In questo caso basta infatti considerare $I = (x_1 - f_1(y), \ldots, x_n - f_n(y), J)$.*

1.2 Dimensione

Vediamo ora come la teoria della dimensione per anelli noetheriani si può utilizzare per lo studio della dimensione dei moduli. Innanzitutto, mostriamo che partendo dal teorema dell'ideale principale di Krull (Hauptidealsatz) si possono ritrovare tutti i risultati visti nei corsi precedenti tramite la serie di Hilbert-Poincarè.

Teorema 1.17 (Hauptidealsatz) *Sia I un ideale principale di un anello noetheriano A e sia p un primo minimale di I. Allora* $\mathrm{ht}(p) \leq 1$.

Il caso di altezza zero è in un certo senso degenere. Infatti, se $ht(p) = 0$, allora $p \in \mathrm{Min}(A) \subseteq \mathrm{Ass}(A)$. Di conseguenza p è un ideale costituito da 0-divisori. Dunque l'altezza di un primo minimale è 1 se x non è uno zero divisore.
Applicando induttivamente il teorema dell'ideale principale si ottiene il seguente:

Corollario 1.18 *Sia $I = (x_1, \ldots, x_n)$ un ideale di un anello noetheriano A e sia p un primo minimale di I. Allora* $\mathrm{ht}(p) \leq n$.

Di conseguenza,

Corollario 1.19 *Sia A un anello noetheriano e sia I un ideale. Allora I ha altezza finita. In particolare, se A è un anello noetheriano locale, ha dimensione finita.*

È possibile legare l'altezza di un ideale con il numero di generatori di un ideale contenuto in J. Infatti:

Corollario 1.20 *Sia I un ideale di un anello noetheriano di altezza n. Allora esistono $x_1, \ldots, x_n \in I$ tali che* $\mathrm{ht}(x_1, \ldots, x_n) = n$.

Dimostrazione. Diamo un procedimento induttivo per la costruzione di tale ideale. Per trovare x_1, consideriamo l'insieme dei primi minimali di 0 $\mathrm{Min}(0)$. Per il lemma di scansamento, esiste $x_1 \in I \setminus \cup_{p \in \mathrm{Min}(0)} p$ (altrimenti I avrebbe dimensione 0 perché contenuto in un ideale minimale) e $\mathrm{ht}(x_1) = 1$ per il teorema di Krull. Consideriamo ora $x_2 \in I \setminus \cup_{p \in \mathrm{Min}(x_1)} p$; questo esiste ancora una volta per il lemma di scansamento e $\mathrm{ht}(x_1, x_2) = 2$. Iterando, otteniamo la tesi.

Se applichiamo il procedimento dimostrativo del corollario a un ideale primo I di altezza n, all'ultimo passo otteniamo che I è un primo minimale di $(x_1, \dots, x_n)$. Dunque, se I è primo di altezza n, è primo minimale di un ideale generato da n elementi. Dunque vale

$$\mathrm{ht}(p) = \min\{\mu(I) \mid I \text{ tale che } p \in \mathrm{Min}(I)\}$$

dove con μ abbiamo indicato il minimo numero di generatori di I. In particolare, se A è locale, per Nakayama vale $\dim A = \mathrm{ht}(m) \leq \mu(m) = \dim_k m/m^2$. Quest'ultima viene detta embedding dimension di A.

Teorema 1.21 (della dimensione) *Sia A un anello locale noetheriano con ideale massimale m. Sono equivalenti:*

1. $\dim A = n$
2. $\mathrm{ht}(m) = n$
3. $n = \inf\{k \mid \exists x_1, \dots, x_k \in m$ *tali che* $\sqrt{(x_1, \dots, x_k)} = m\} = \delta(A)$
4. $n = \inf\{k \mid \exists x_1, \dots, x_k \in m$ *tali che* $A/(x_1, \dots, x_k)$ *sia artiniano*$\}$

Dimostrazione.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Ovvio.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) $A/(x_1, \dots, x_m)$ è artiniano se e solo se tutti i primi di A che contengono $x_1, \dots, x_n$ sono massimali. Dato che A è locale, questo è equivalente a dire che $\sqrt{(x_1, \dots, x_n)} = m$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Se $\mathrm{ht}(m) = n$, abbiamo mostrato che esistono $x_1, \dots, x_n \in m$ tali che $\mathrm{ht}(x_1, \dots, x_n) = n$ e dunque $\sqrt{(x_1, \dots, x_n)} = m$ (m è l'unico primo di altezza n) da cui $\mathrm{ht}(m) \geq \delta(A)$. Viceversa, sia $I = (x_1, \dots, x_r)$ un ideale che realizza $\delta(A)$. Dato che m è l'unico primo minimale di $(x_1, \dots, x_r)$, per il corollario 1.18 deve valere $n = \mathrm{ht}(m) \leq r$ da cui l'uguaglianza.

Il fatto che esista una successione di elementi che abbia radicale massimale è dunque un fatto legato strettamente alle proprietà dell'anello:

Definizione 1.22 *Sia A un anello locale noetheriano. Un sistema di parametri per A è un insieme di elementi $x_1, \dots, x_n \in A$ tali che $\sqrt{(x_1, \dots, x_n)} = m$ e $n = \dim A$.*
Se M è un A-modulo finitamente generato e $\dim M = n$, *chiamiamo sistema di parametri per M un insieme $x_1, \dots, x_n \in A$ tale che $M/(x_1, \dots, x_n)M$ sia 0-dimensionale.*

Mentre abbiamo visto che per gli anelli un sistema di parametri esiste sempre, dobbiamo ancora mostrare che lo stesso vale per i moduli.

Proposizione 1.23 *Sia I un ideale di A e M un A-modulo. Allora*

$$\dim {}^{M}\!\big/_{IM} = \dim {}^{A}\!\big/_{I + (0 : M)} = \dim {}^{A/\operatorname{Ann}(M)}\!\big/_{I^{A}\!/_{\operatorname{Ann}(M)}}$$

Dimostrazione. La tesi segue dalle seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \dim M/IM &= \dim A/(0 : M/IM) \\ &= \dim A/\sqrt{0 : M/IM} \\ &= \dim A/\sqrt{I + (0 : M)} \\ &= \dim A/(0 : M)/I(A/(0 : M)) \end{aligned}$$

L'unica uguaglianza non ovvia è quella in cui utilizziamo $\sqrt{0 : M/IM} = \sqrt{I + (0 : M)}$. Basta allora mostrare che ogni primo minimale per $(0 : M/IM)$ è minimale $(I + (0 : M))$ e viceversa. Se $p \in \operatorname{Min}(0 : M/IM)$, allora $(M/IM)_p \neq 0$, ossia $M_p/IM_p \neq 0$ e questo è vero se e solo se $IA_p \subseteq pA_p$ e $p \in \operatorname{Supp}(M)$. Dunque $p \supseteq (0 : M)$ e questo se e solo se $p \supseteq I + (0 : M)$.

Corollario 1.24 *Sia A un anello noetheriano e sia M un A-modulo finitamente generato. Allora esiste un sistema di parametri per M.*

Dimostrazione. Basta scegliere un sistema di parametri per $A/\operatorname{Ann}(M)$.

Proposizione 1.25 *Sia A un anello locale noetheriano e sia M un A-modulo finitamente generato di dimensione d. Siano $x_1, \ldots, x_r \in m$. Allora*

$$\dim {}^{M}\!\big/_{(x_1, \ldots, x_r)M} \geq d - r$$

Vale l'uguaglianza se e solo se $x_1, \ldots, x_r$ è parte di un sistema di parametri di M.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, basta provare la tesi nel caso in cui si lavori con un anello. Sia $\dim A/(x_1, \ldots, x_r) = p$. Vogliamo mostrare che $p \geq d - r$. Sappiamo che esiste un sistema di parametri $y_1, \ldots, y_p$ per $A/(x_1, \ldots, x_r)$ e il quoziente deve essere 0-dimensionale. Dunque per corrispondenza abbiamo una sequenza di $p + r$ elementi di A che hanno radicale massimale, da cui $d \leq p + r$. La seconda parte della proposizione segue banalmente.

Example 1.2. Sia $I = (x^2, xy, y^2) \subseteq k[x, y]$. Consideriamo $A = k[x, y]_{(x,y)}$ e $J = IA$. $\sqrt{J} = (x, y)$ che è il massimale di A e dunque $\operatorname{ht}(J) = \operatorname{ht}(m) = 2$. Invece, $\mu(J) = \dim J/mJ$ che ha dimensione 3.

Example 1.3. Sia (A, m) un anello locale noetheriano di dimensione d e sia $x_1, \ldots, x_d$ un sistema di parametri di A. Non è detto che $\mathrm{ht}(x_1, \ldots, x_i) = i$. Consideriamo infatti

$$A = {K[[x,y,z]]} \big/ {(x) \cap (y,z)}$$

e dunque $\mathrm{Min}(A) = \{(x), (y, z)\}$. La dimensione di A è 2 (basta calcolare il quoziente). $y, x + z$ è un sistema di parametri di A perché il quoziente è artiniano ma $\mathrm{ht}(y) = \mathrm{ht}(y, z) = 0$.

1.3 Anelli e moduli graduati

Definizione 1.26 *Un anello A si dice graduato su $\mathbb{Z}$ se esiste una famiglia A_i di $\mathbb{Z}$-moduli di $(A, +)$ tali che*

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$$

tali che $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$.

Chiaramente $0 \in A_i$ per ogni i; chiamiamo A_i parte omogenea di A di grado i. A_0 è un sottoanello di A e gli A_i sono A_0-moduli per ogni i. Infatti $1 \in A_0$ perché se $1 = x_1 + \cdots + x_n$ è somma di elementi omogenei, allora $x_i = x_i x_1 + \cdots + x_i x_n$ da cui $1 = x_0$ per motivi di grado.

Invece di $\mathbb{Z}$, è possibile graduare rispetto a un qualsiasi gruppo abeliano $(G, +)$. In questo caso, si richiede che A si scrive come

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

e $A_g A_h = A_{gh}$.

Example 1.4. Se $G = \mathbb{Z}$ e $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ con la gradazione standard, $R_i = 0$ per ogni $i < 0$, $R_0 = k$ e R_i è data dai polinomi omogenei di grado i.

Example 1.5. $G = \mathbb{Z}^n$ e $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ e $\deg x_i = e_i$. Allora $R_\alpha = 0$ ogniqualvolta vi è una componente negativa in α, $R_0 = k$ e

$$R_\alpha = \{\sum \alpha_m x^m \mid \alpha_m \in R_0 \ \ \deg x^m = \alpha\}$$

Proposizione 1.27 *Sia $A = \oplus A_i$ un anello graduato. Un sottoanello B è graduato se $B = \oplus(B \cap A_i)$. In particolare, se $f_1, \ldots, f_k$ sono elementi omogenei di grado $\deg f_i = d_i$, il sottoanello $B = A_0[f_1, \ldots, f_d]$ è graduato e*

$$B_i = \{\sum \alpha_m f_1^{m_1} \ldots f_k^{\alpha_k} \mid \alpha_m \in A_0 \ \ \sum m_i d_i = n\}$$

Definizione 1.28 *Sia $A = \oplus A_i$ un anello graduato. Un A-modulo M si dice graduato se $M = \sum M_i$ e $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$.*

Ogni elemento ammette un'unica scrittura come somma di elementi omogenei. Inoltre, è immediato notare che somma diretta di moduli graduati è graduata.

Definizione 1.29 *Sia $g \in G$ e sia M un modulo graduato su G. Definiamo lo shift $M(g)$ come*

$$M(g)_h = M_{g+h}$$

Definizione 1.30 *Un A-modulo graduato è libero se esiste $r \geq 1$ tali che $M \simeq \oplus_{i=1}^{r} A(d_i)$.*

Se $M = \oplus A(d_i)$, la componente di grado n è

$$M_n = \oplus A_{d_i+n}$$

Example 1.6. Se $A = k[x, y]$ e $M = A(-2) \oplus A(3) \oplus A(-5)$, un elemento di grado 13 è (x^{11}, x^{16}, x^8).

Definizione 1.31 *Siano M, N A-moduli graduati. $\varphi \colon M \to N$ è omogeneo di grado t se $\varphi(M_i) \subseteq N_{i+t}$.*

Chiaramente possiamo falsare il grado di una mappa tramite lo shift:

Example 1.7. Se M è un A-modulo graduato e $a \in A$ ha grado t, $\varphi(m) = am$ è un omomorfismo graduato di grado t. Shiftando, $\varphi_a \colon M \to M(t)$ ha grado 0.

Considereremo quindi la categoria $M_0(A)$ dei moduli graduati con i morfismi di grado 0.

Example 1.8. Nel caso in cui si munisca l'anello dei polinomi di una gradazione non standard, la dimensione delle componenti omogenee può variare in maniera (apparentemente) caotica. Consideriamo l'anello $A = k[x, y]$ con $\deg(x) = 3$ e $\deg(y) = 2$. Allora

$$\begin{array}{lll} \dim A_0 = 1 & \dim A_1 = 0 & \dim A_2 = 1 \\ \dim A_3 = 1 & \dim A_4 = 1 & \dim A_6 = 2 \end{array}$$

Vediamo ora come si comporta la gradazione di un modulo sui suoi sottomoduli:

Proposizione 1.32 *Sia N un sottomodulo di un modulo graduato M. Sono equivalenti:*

1. $N \in M_0(A)$
2. $N = \oplus(N \cap M_i)$

3. *Tutte le componenti omogenee di grado n di un elemento di N appartengono a N*
4. *N ha un sistema di generatori omogeneo*

Se vale una di queste condizioni, l'immersione $N \to M$ è un omomorfismo omogeneo di grado 0*.*

Chiaramente, data una famiglia di sottomoduli graduati N_λ di M, vale che

1. la loro somma è graduata
2. la loro intersezione è graduata

Se $N \supseteq M$, l'ideale di A

$$M : N = \{x \in A \mid xN \subseteq M\}$$

è omogeneo.

Definizione 1.33 *Sia I un ideale di un anello graduato A. Definiamo I^* come l'ideale generato da tutti gli elementi omogenei di I.*
Sia N un sottomodulo di un modulo graduato M. Definiamo N^* come il sottomodulo generato dagli elementi omogenei di N.

Vale che I^* è un ideale omogeneo di A e $I = I^*$ se e solo se I è omogeneo. Inoltre, I^* è il più grande ideale omogeneo contenuto in I.

Example 1.9. Consideriamo $I = (x + y^2, y)$. Anche se non è evidente dai generatori, questo è un ideale omogeneo. In generale non è banale determinare se un ideale sia omogeneo.

Una gradazione può anche passare al quoziente. Sia infatti M un modulo graduato e sia N un suo sottomodulo graduato. Allora M/N è naturalmente graduato e la componente omogenea di grado i è data da:

$$\left({}^{M}\!\diagup_{N}\right)_i = {}^{M_i}\!\diagup_{N_i}$$

Gli elementi di gradi i del quoziente sono esattamente le classi degli elementi di grado i. Segue direttamente dalla definizione che la proiezione $\pi\colon M \to M/N$ è graduata di grado 0.

Osservazione 1.34 *Se $\varphi\colon M \to N$ è un omomorfismo omogeneo, allora* $\mathrm{Ker}(\varphi)$*,* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *e* $\mathrm{Coker}(\varphi)$ *sono naturalmente moduli graduati.*

Dopo aver studiato come si comporta una gradazione rispetto a sottoanelli, sottomoduli, omomorfismi e quozienti, vediamo sotto quali condizioni abbiamo l'ipotesi di noetherianità.

Definizione 1.35 *Sia A un anello graduato. A è una A_0-algebra positivamente graduata se è generata da elementi omogenei di grado positivo. Un anello graduato è standard se è generato in grado* 1 *come A_0-algebra.*

In un'algebra positivamente graduata, il sottoinsieme $A_+ = \oplus_{i>1} A_i$ è sempre un ideale omogeneo di A. Chiaramente è chiuso per somma (somma diretta di sottogruppi additivi) e dato che A è positivamente generato il prodotto tra un elemento di A_+ e un'altro qualsiasi elemento omogeneo ha ancora grado positivo; ragionando sulle componenti omogenee di due elementi qualsiasi si ottiene la chiusura rispetto al prodotto. Il quoziente A/A_+ è isomorfo ad A_0. Da questo si deduce la seguente

Proposizione 1.36 *Sia A una A_0-algebra positivamente graduata. Siano $x_1, \ldots, x_n$ elementi omogenei di grado positivo. Sono fatti equivalenti:*

1. $(x_1, \ldots, x_n) = A_+$
2. $x_1, \ldots, x_n$ *generano A come A_0-algebra, ossia $A = A_0[x_1, \ldots x_n]$.*

In particolare, A è noetheriano se e solo se A_0 è noetheriano e A è una A_0-algebra finitamente generata.

Dimostrazione. L'implicazione (2) $\Rightarrow$ (1) è ovvia; infatti, dato $x \in A_+$ omogeneo, possiamo scriverlo come combinazione di A_0 e di $x_1, \ldots, x_n$:

$$x = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

e dunque $x \in (x_1, \ldots, x_n)$.
Mostriamo (1) $\Rightarrow$ (2). Dato che A è graduato, basta mostrare che $A_i \subseteq A_0[x_1, \ldots, x_n]$ per ogni i. Sia allora $x \in A_i$ un elemento omogeneo di grado i. Dato che $x \in (x_1, \ldots, x_n)$, vale

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$$

Possiamo supporre, a meno di considerarne le componenti omogenee e riordinare la somma, che $\alpha_j \in A_{i-d_j}$, da cui l'equivalenza.
Supponiamo ora che A_0 sia noetheriano e che A_0 sia una A_0-algebra finitamente generata. In questo caso, dal teorema della base di Hilbert, segue che A è noetheriano, in quanto isomorfo a un quoziente di un anello di polinomi. Viceversa, basta notare che $A_0 \simeq A/A_+$ e che A_+ è finitamente generato ed usare l'equivalenza appena mostrata.

Ora che abbiamo studiato il caso di algebre positivamente graduate, proviamo a generalizzare quanto visto ad algebre qualsiasi. Abbiamo bisogno prima di qualche lemma:

Lemma 1.37 *Sia A un anello graduato e I un ideale di A_0. Allora $I = IA \cap A_0$.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che IA è omogeneo perché generato da elementi di grado 0. Dunque ogni elemento omogeneo x di grado d di IA si scrive come

$$x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i s_i$$

con $s_i \in I$ e $\alpha_i \in A_d$ (a meno di riordinare la somma). Dunque la contrazione ad A_0 coincide con I, perché ogni elemento di grado 0 si può scrivere come sopra con $\alpha_i \in A_0$.

Lemma 1.38 *Sia A un anello graduato, sia M un A-modulo graduato e sia N un sottomodulo di M_n. Allora $NA \cap M_n = N$.*

Corollario 1.39 *Sia A un anello graduato e sia M un A-modulo graduato e noetheriano. Allora M_n è un A_0-modulo noetheriano.*

Dimostrazione. Consideriamo una catena di sottomoduli $N_i \subseteq M_n$. Possiamo estenderli a una catena di A-sottomoduli di M; dato che M è noetheriano, necessariamente tale catena staziona. Per il lemma precedente, dato che la contrazione coincide con N_i, si ha che anche questa deve stazionare, come voluto.

Teorema 1.40 *Sia $A = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ un anello graduato. Sono equivalenti:*

1. *A è noetheriano*
2. *Ogni ideale omogeneo J di A è finitamente generato*
3. *A_0 è noetheriano e $S_1 = \oplus_{i \geq 0} A_i$ e $S_2 = \oplus_{i \leq 0} A_i$ sono A_0-algebre finitamente generate.*
4. *A_0 è noetheriano e A è una A_0-algebra finitamente generata*

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2) Ovvio.

(2) $\Rightarrow$ (3) Notiamo preliminarmente che l'ipotesi di finita generatezza di ogni ideale omogeneo di A è equivalente al fatto che da ogni insieme di generatori omogenei di un ideale è possibile estrarne uno finito.
Per dimostrare che A_0 è noetheriano, basta notare che ogni ideale di A_0 esteso ad A è graduato. Data allora una catena di ideali I_k di A_0, possiamo estenderli ad $I_k A$. Dato che in A tale catena staziona e per il lemma $I_k A \cap A_0 = I_k$, si ottiene che la catena deve stazionare anche in A_0, da cui la noetherianità. Con lo stesso ragionamento, utilizzando il lemma relativo ai moduli, si ottiene anche che ogni A_i è un A_0-modulo finitamente generato.
Vogliamo ora dimostrare che $S_1 = A_0 \oplus A_+$ (per S_2 il ragionamento è uguale) e dunque è sufficiente far vedere che A_+ è finitamente generato come S_1-modulo. $A_+ A$ è un ideale omogeneo di A e dunque è finitamente generato. Per l'osservazione preliminare, possiamo scegliere dei generatori $x_1, \ldots, x_k \in A_+$ e sia $d = \max_i d_i$, dove $d_i = \deg(x_i)$. Il modulo $A_0 \oplus \cdots \oplus A_{d-1}$ è un A_0-modulo finitamente generato e possiamo sceglierne dei generatori $y_1, \ldots, y_m$. Mostriamo allora che $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$ sono un insieme di generatori per A_+ come S_1-modulo. Chiaramente, possiamo

mostrare che ciò vale per ogni elemento omogeneo. Sia $x \in A_+$ omogeneo. Se $\deg(x) \leq d-1$, allora $x \in (y_1, \dots, y_m)$. Se invece $\deg(x) = l \geq d$, possiamo scriverlo come combinazione degli x_i:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

con $\alpha_i \in A$. Per motivi di grado, deve valere (a meno di riordinamento) $\alpha_i \in A_{l-d_i}$ e $l - d_i \geq 0$, da cui la tesi.

(3) ⇒ (4) Sappiamo che $S_1 = A_0[y_1, \dots, y_m]$ e $S_2 = A_0[x_1, \dots, x_n]$ da cui $A = A_0[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$.

(4) ⇒ (1) Segue come nella proposizione precedente dal teorema della base di Hilbert.

Lemma 1.41 *Sia A un anello graduato. Se m è un ideale massimale ed è omogeneo, allora $m = A_- \oplus m_0 \oplus A_+$, con m_0 massimale di A_0.*

Dimostrazione. Sicuramente se m ha quella forma è un ideale massimale, perché

$$A/m \simeq A_0/m_0$$

Sia ora m un generico ideale massimale omogeneo. Abbiamo allora la proiezione

$$\pi \colon A \longrightarrow A/m$$

e il quoziente è graduato ed è un campo. Se per assurdo esistesse un elemento di grado positivo x, allora calcolando l'inverso di $1 + x$ si arriverebbe a un assurdo. Di conseguenza la graduazione su A/m è banale e dunque $A_+ \subseteq m$, $A_- \subseteq m$, da cui la tesi.

Corollario 1.42 *Sia M un A-modulo graduato. M è un A-modulo semplice se e solo se M è semplice come A_0-modulo.*

Dimostrazione. Se M è semplice come A_0-modulo, lo è chiaramente anche come A-modulo. Viceversa, se M è semplice come A-modulo, M è isomorfo a A/m, con m massimale di A. Per il lemma precedente, $M \simeq A/m \simeq A_0/m_0$ e dunque M è anche un A_0-modulo semplice.

Corollario 1.43 *Sia M un A-modulo graduato di lunghezza n. Allora esiste una catena di sottomoduli*

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_n = \{0\}$$

tale che ogni M_i sia graduato e M_i/M_{i+1} sia semplice.

Corollario 1.44 *Sia M un A-modulo graduato e consideriamo una catena di sottomoduli graduati*

$$M = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \dots \supsetneq N_n = \{0\}$$

tale che ogni quoziente sia semplice. Allora detta $\lambda_A(M)$ *la lunghezza di* M *come* A*-modulo, si ha*

$$\lambda_A(M) = \lambda_{A_0}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{A_0}(M_i)$$

dove M_i *è l'*i*-esima componente omogenea di* M.

Dimostrazione. Basta considerare le successioni esatte corte (sia di A-moduli che di A_0-moduli)

$$0 \to N_{i+1} \longrightarrow N_i \longrightarrow {}^{N_i}\!/_{N_{i+1}} \to 0$$

Otteniamo allora che $\lambda(N_i) = \lambda(N_{i+1}) + \lambda(N_i/N_{i+1})$. Dato che il quoziente è semplice, otteniamo

$$\lambda(N_i) = \lambda(N_{i+1}) + 1$$

sia come A-moduli che come A_0-moduli, da cui la prima uguaglianza. Per la seconda, basta notare che come A_0-modulo vale $M = \oplus M_i$ e che la lunghezza si comporta bene rispetto alla somma diretta.

Corollario 1.45 *Un anello artiniano è graduato se e solo se* A_i *è artiniano come* A_0 *modulo per ogni* i *e* $A_i \neq 0$ *solo per un numero finito di indici.*

Nel caso di ideali omogenei, si può riformulare il lemma di scansamento:

Lemma 1.46 (Lemma di Scansamento) *Sia* A *un anello graduato e sia* I *un ideale omogeneo generato da elementi di grado positivo. Siano* $p_1, \ldots, p_n$ *ideali primi omogenei. Se* $I \not\subseteq p_i$*, allora* $I \not\subseteq \cup p_i$.

Proposizione 1.47 *Sia* A *un anello locale con massimale* m *e campo residuo* k *infinito. Sia* M *un* A*-modulo e siano* $N, M_1, \ldots, M_n$ *sottomoduli tali che* $N \not\subseteq M_i$ *per ogni* i*. Allora* $N \not\subseteq \cup M_i$.

Dimostrazione. Deriva da Nakayama e dal fatto che uno spazio vettoriale non si scrive come unione finita di sottospazi su un campo infinito.

Corollario 1.48 *Sia* A *un anello graduato positivamente e sia* A_0 *locale con campo residuo infinito. Siano* $I, J_1, \ldots, J_n$ *omogenei tali che* $I \subseteq J_i$ *per ogni* i*. Allora* $I \not\subseteq \cup J_i$*. Inoltre, se* I *è generato in grado* s*, esiste* $x \in I \setminus \cup J_i$ *di grado* s.

Proposizione 1.49 *Sia* p *un primo di* A*. Allora* p^* *è primo.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che p^* non sia primo; esistono allora $a, b \notin p^*$ tali che $ab \in p^*$. Possiamo scriverli come somma di componenti omogenee

$$a = \sum_{i=k_1}^{k_2} a_i \qquad\qquad b = \sum_{j=h_1}^{h_2} b_j$$

Dato che $a, b \notin p^*$, esistono componenti omogenee a_d e b_q che non appartengono a p^*. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $a_i \in p^*$ per ogni $i < d$ e $b_j \in p^*$ per ogni $j < q$. La componente omogenea di ab di grado $d+q$ deve appartenere a p^* per omogeneità dell'ideale e dunque $a_d b_q \in p^* \subseteq p$, da cui la tesi per la primalità di p.

Proposizione 1.50 *Sia I un ideale p-primario. Allora I^* è p^*-primario.*

Proposizione 1.51 *Sia M un modulo graduato e sia $p \in \operatorname{Ass}(M)$. Allora p è omogeneo e $p = (0 : x)$ con x omogeneo.*

Dimostrazione. Dato che $p \in \operatorname{Ass}(M)$, esiste $x \in M$ tale che $p = (0 : x)$; scriviamo $x = \sum_{i \in I} x_i$ come somma delle sue componenti omogenee. Sia ora $a = \sum_{i \in J} a_i$ un elemento di p; dato che $ax = 0$, si può mostrare che $a_j x = 0$ per ogni j tramite induzione. Di conseguenza, p è omogeneo perché ogni componente omogenea di a appartiene a p e a è stato scelto in maniera arbitraria. Sia ora $a \in p$ un elemento omogeneo. Allora $a \in \cap(0 : x_i) \subseteq p$, da cui la tesi.

Corollario 1.52 *Sia I un ideale omogeneo di un anello graduato. Allora i primi minimali di I sono omogenei. In particolare, i primi minimali di A sono omogenei.*

Vediamo ora cosa si può dire sulla decomposizione primaria. Ricordiamo che un sottomodulo N di un modulo M si dice primario se ogni zero divisore di M/N è nilpotente. Questo significa che ogniqualvolta esiste $m \in M/N$ tale che $am = 0$, allora $a^n M/N = 0$.

Proposizione 1.53 *Sia A un anello noetheriano graduato e sia N un sottomodulo graduato di un modulo graduato M. Allora N ammette una decomposizione primaria irridondante di sottomoduli graduati.*

Proposizione 1.54 *Sia $p \in \operatorname{Supp}(M)$. Allora $p^* \in \operatorname{Supp} M$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $M_{p^*} = 0$. Questo significa che per ogni elemento $x \in M$ omogeneo esiste $t \notin p^*$ tale che $tx = 0$. Scriviamo $t = \sum t_i$ come somma di componenti omogenee; dato che x è omogeneo, necessariamente $t_i x = 0$ per ogni i e visto che $t \notin p^*$ esiste i tale che $t_i \notin p^*$. t_i è però un elemento omogeneo e dunque deve valere anche $t_i \notin p$; di conseguenza per ogni $x \in M$ omogeneo, $x/1 = 0/1$ in M_p e $M_p = 0$, da cui un assurdo.

Localizzazione omogenea

Siano A un anello graduato e M un A-modulo graduato. Consideriamo un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso S di elementi omogenei. Allora $S^{-1}M = M_S$ eredita in maniera naturale una gradazione; infatti se $x \in M$ è omogeneo,

$$\deg \frac{x}{a} = \deg x - \deg a$$

Dunque la componente omogenea di M_S di grado i è data da

$$(M_S)_i = \left\{ \frac{x}{a} \middle| \deg \frac{x}{a} = i \right\}$$

In particolare, se S è l'insieme degli elementi omogenei che non appartengono a un primo p, denotiamo i localizzati come $A_{(p)}$ e $M_{(p)}$. Notiamo che l'ideale esteso $p^* A_{(p)}$ è omogeneo e in $A_{(p)}/p^* A_{(p)}$ ogni elemento omogeneo non nullo è invertibile, in quanto ogni elemento omogeneo non appartenente a p appartiene a S. Questa condizione può essere però meglio reinterpretata:

Proposizione 1.55 *Sia A un anello graduato. Sono equivalenti:*

1. *Gli unici ideali omogenei di A sono (0) e A.*
2. *Ogni elemento omogeneo non nullo è invertibile.*
3. *$A_0 = k$ e $A = A_0$ oppure $A = k[t, t^{-1}]$ con t omogeneo di grado positivo e trascendente su A_0.*

Dimostrazione.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Ovvio, perché ogni elemento omogeneo genera un ideale omogeneo e ogni elemento non invertibile è contenuto in un ideale proprio.

(3) $\Rightarrow$ (2) Ovvio.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supponiamo che A non sia un campo. Allora sicuramente A_0 è un campo perché ogni elemento di grado 0 è invertibile e il suo inverso ha ancora grado 0. Dunque deve esistere un elemento di grado positivo; senza perdita di generalità, possiamo supporre che esiste un elemento x di grado 1 (a meno di riscalare la gradazione). Allora $A = A_0[x, x^{-1}]$: se α è un elemento di grado n, vale infatti $\alpha x^{-n} \in A_0$. La trascendenza di x deriva dal fatto che se esistesse una relazione di dipendenza algebrica di x su A_0, allora $x^n + \sum a_i x^i = 0$ con gli $a_i \in A_0$. Dato che $\deg(x^i) = i$, questo significa che $a_i x^i = 0$ per ogni i; ma questi sono elementi omogenei e dunque sono invertibili, da cui un assurdo.

Corollario 1.56 *Sia p un primo. Allora vale una e una sola delle seguenti:*

1. *$p = p^*$*
2. *p è minimale su p^**

Corollario 1.57 *Sia M un A-modulo graduato e finitamente generato e sia $p \in \operatorname{Supp} M$. Supponiamo che $\dim M_p = d$. Allora esiste una catena*

$$p_0 \subseteq \cdots \subseteq p_d = p$$

con $p_0, \ldots, p_{d-1}$ omogenei. In particolare, se p è omogeneo $\dim M_p = \dim M_{p^*}$, altrimenti $\dim M_p = \dim M_{p^*} + 1$.

Definizione 1.58 *Sia A un anello graduato. Un ideale m di A si dice *-massimale se è massimale tra gli ideali omogenei di A. A si dice *-locale se ha un unico ideale *-massimale.*

Se A è *-locale e m è il suo *-massimale, A_0 è locale con ideale massimale con $m_0 = m \cap A_0$. Infatti il quoziente A/m è graduato e ogni elemento omogeneo deve essere invertibile (altrimenti genererebbe un ideale omogeneo, contro la massimalità di m). Di conseguenza $A_0 = k$ per la caratterizzazione esibita in precedenza.

Example 1.10. Se p è omogeneo, la sua localizzazione omogenea è *-locale con *-massimale dato da p^*.

Se A è un'algebra positivamente graduata, allora $\dim A = \sup\{\operatorname{ht}(m) \mid m \text{ massimale omogeneo}\}$. Se A è anche noetheriano, $\dim A = {}^*\dim A = \sup\{p_0 \subsetneq \cdots \subsetneq p_d \mid p_i \text{ primo omogeneo}\}$. Se inoltre A_0 è locale, A è *-locale con *-massimale $m = m_0 \oplus A_+$ e

$$\dim A = \operatorname{ht}(m) = \inf\{k \mid \exists x_1, \ldots, x_k \text{omogenei} \mid \sqrt{(x_1, \ldots, x_k)} = m\}$$

e dunque possiamo definire anche un sistema omogeneo di parametri.

Example 1.11. Sia $R = k[x_1, \ldots, x_r]$ e sia $\deg x_i = a_i$. Quando è vero che R è *-locale? Se gli $a_i > 0$ è ovvio per quanto detto. Idem se sono tutti negativi. I casi misti sono meno banali e non sono *-locali.

Proposizione 1.59 (Nakayama) *Sia (A, m) un anello *-locale, sia M un modulo graduato e sia N un sottomodulo graduato. Supponiamo che M sia finitamente generato. Se $M = mM + N$, allora $M = N$.*

Proposizione 1.60 (Lemma di Normalizzazione di Noether omogeneo) *Sia k un campo e sia A una k-algebra finitamente generata positivamente graduata. Supponiamo $\dim A = n$ e siano $x_1, \ldots, x_n$ elementi omogenei di A. Sono equivalenti:*

1. *$x_1, \ldots, x_n$ è un sistema di parametri per A*
2. *A è un'estensione intera di $k[x_1, \ldots, x_n]$*
3. *A è un $k[x_1, \ldots, x_n]$-modulo finitamente generato*

Inoltre, esistono sempre $x_1, \ldots, x_n$ con questa proprietà e sono algebricamente indipendenti. Se A è graduato in maniera standard e k è infinito, gli x_i possono essere scelti di grado 1.

1.4 Funzioni e Serie di Hilbert

Definizione 1.61 *Sia A un anello graduato e sia M un A-modulo graduato. Se la lunghezza $\lambda_{A_0}(M_n)$ è finita per ogni n, definiamo*

$$\begin{aligned} H_M \colon \ \mathbb{Z} &\longrightarrow \quad \mathbb{Z} \\ t &\longmapsto \lambda_{A_0}(M_t) \end{aligned}$$

la funzione di Hilbert di M.

Definizione 1.62 *Se A è positivamente graduato, A_0 è artiniano e M è finitamente generato, la funzione generatrice*

$$\mathrm{HP}_M(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} H_M(i) z^i \in \mathbb{Z}[\![z, z^{-1}]\!]$$

è detta serie di Hilbert di M.

Dato che A è positivamente graduato, $M_i = 0$ per $i \ll 0$ e dunque gli indici sono limitati inferiormente. Inoltre, la serie di Hilbert è a termini positivi in quanto ogni coefficiente coincide con la dimensione di una parte omogenea di M. La funzione di Hilbert si comporta bene con lo shift, perché

$$H_{M(d)}(t) = H_M(t + d)$$

Questo permette di supporre che anche il modulo sia positivamente graduato e quindi di avere una gradazione su $\mathbb{N}$.

Example 1.12.

1. Se $A = M = k[x_1, \ldots, x_n]$ con $\deg(x_i) = 1$,

$$H_A(t) = \begin{cases} \binom{n+t-1}{t} \text{ se } t \geq 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

   In particolare,

$$\mathrm{HP}_A(z) = \sum_{i \in \mathbb{N}} H_A(t) z^t = \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{n + t - 1}{t} z^t = \frac{1}{(1 - z)^n}$$

   L'ultima uguaglianza si può verificare per induzione su n.

L'ultima scrittura della serie è sicuramente più compatta e ha lo svantaggio che ricavarne la funzione di Hilbert non è immediato.

Example 1.13. Per determinare i coefficienti della serie

$$\frac{1 + 2z}{(1 - z)^2} = (1 + 2z)\Big(\sum z^t\Big)^2$$

bisogna svolgere i prodotti e isolare i termini dello stesso grado. Si ottiene

$$H(t) = \begin{cases} 1 + 3t \text{ se } t \geq 0 \\ 0 \;\; \text{altrimenti} \end{cases}$$

È interessante capire quali siano le serie realizzabili come serie di Hilbert di un modulo; questo non è in generale un problema semplice.

La serie di Hilbert è additiva; se infatti consideriamo una successione esatta corta

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

di moduli omogenei, allora è esatta anche la successione tra le componenti omogenee di questi

$$0 \to M_t \to N_t \to P_t \to 0$$

e dunque basta sfruttare l'additività della funzione lunghezza. In particolare, se abbiamo una successione esatta lunga di moduli graduati

$$0 \to M_r \xrightarrow{f_r} M_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} \dots \xrightarrow{f_1} M_0 \to 0$$

si dimostra che

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{HP}(M_j) = 0$$

Infatti, è sufficiente spezzare la successione nelle successioni esatte corte

$$0 \to \operatorname{Im}(f_i) \to M_{i-1} \to \operatorname{Im}(f_{i-1}) \to 0$$

e utilizzare quanto visto per le successioni esatte corte.

Osservazione 1.63 *Se R è graduato standard e I è un ideale omogeneo, se $\operatorname{HP}_{R/I}(t_0) = 0$ allora $\operatorname{HP}_{R/I}(t) = 0$ per ogni $t \geq t_0$. Infatti, dalla successione esatta corta $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ si ottiene*

$$H_{R/I}(n) = H_R(n) - H_I(n)$$

e dunque questa è uguale a 0 se e solo se $I_n = R_n$. Ma se questo succede, la stessa relazione vale per i successivi n dato che la gradazione è standard.

Example 1.14. Sia $A = k[x, y, z, t]$ con $\deg(x) = 1$, $\deg(y) = 6$, $\deg(z) = 10$, $\deg(t) = 15$. Allora xy^4zt ha grado 60 ma non è multiplo di alcun monomio di grado 3. Questo mostra come in generale non sia possibile applicare il ragionamento dell'osservazione a una gradazione non standard.

Example 1.15. Consideriamo il $A = k[x, y]$-modulo

$$M = {k[x_1, x_2]} \big/ {(x_1^2, x_2^2)}$$

Troviamone la serie di Hilbert tramite quello che abbiamo visto per le successioni esatte. Abbiamo la successione

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0$$

Dato che $I = (x_1^2, x_2^2)$, abbiamo anche la successione esatta graduata

$$0 \to R(-4) \to R^2(-2) \xrightarrow{\varphi} I \to 0$$

dove $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{(p,q) \in R^2(-2) \mid px_1^2 = qx_2^2\} = \langle (x_2^2, -x_1^2) \rangle \simeq R(-4)$. Si ottiene dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{HP}(R/I) &= \mathrm{HP}(R) - \mathrm{HP}(I) \\ &= \mathrm{HP}(R) - \mathrm{HP}(R(-2)^2) + \mathrm{HP}(R(-4)) \\ &= \mathrm{HP}(R) - 2t^2\,\mathrm{HP}(R) + t^4\,\mathrm{HP}(R) \\ &= \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{(1-t)^2} \\ &= (1+t)^2 \end{aligned}$$

Teorema 1.64 (Hilbert-Serre) *Sia $R = R_0[x_1, \dots x_n]$ un anello noetheriano graduato con R_0 artiniano e $\deg(x_i) = d_i > 0$. Sia M un modulo graduato e finitamente generato. Allora*

$$\mathrm{HP}_M(z) = \frac{h(z)}{\prod(1 - z^{d_i})}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$, allora $R = R_0$ e $M_i \neq 0$ per un numero finito di indici i. Di conseguenza la funzione di Hilbert è negativamente nulla e dunque

$$\mathrm{HP}_M(z) = h(z) \in \mathbb{Q}[x]$$

Se $n > 0$, consideriamo la successione esatta indotta dalla moltiplicazione per x_n:

$$0 \to K \to M(-d_n) \xrightarrow{\cdot x_n} M \to C \to 0$$

dove $C = \mathrm{Coker}(\cdot x_n)$ e $K = (0 : x_n)(-d_n)$. Dato che x_n annulla K e C, questi sono $A_0[x_1, \dots, x_{n-1}]$-moduli in maniera naturale. Per ipotesi induttiva

$$\mathrm{HP}_K(z) = \frac{h'(z)}{\prod_{i=1}^{n-1}(1 - z^{d_i})} \qquad \mathrm{HP}_C(z) = \frac{h''(z)}{\prod_{i=1}^{n-1}(1 - z^{d_i})}$$

da cui

$$(1 - z^{d_n})\,\mathrm{HP}_M(z) = \frac{h''(z) - h'(z)}{\prod_{i=1}^{n-1}(1 - z^{d_i})}$$

ossia la tesi.

Nel caso particolare in cui $d_i = 1$ per ogni i, la serie di Hilbert diventa

$$\mathrm{HP}_M(z) = \frac{h(z)}{(1-z)^d}$$

con $h(1) \neq 0$ e $0 \leq d \leq n$. Notiamo che se $d = 0$, i coefficienti di h sono positivi.

Nel caso di una gradazione standard, la funzione di Hilbert è di tipo polinomiale, ossia $H_M(n)$ è definitivamente un polinomio in n. Infatti, se

$$h(z) = \sum_{k=0}^{s} h_k z^k$$

con $h(1) \neq 0$, allora

$$H_M(n) = \sum_{k=0}^{s} h_k \binom{d+n-k-1}{d-1}$$

è un polinomio in n di grado $d-1$, dove d è l'ordine del polo, con termine di testa $\sum_{i=0}^{s} h_i/(d-1)!n^{d-1}$. In generale, nel caso graduato non standard e dunque $\deg(x_i) = d_i > 0$,

$$\mathrm{HP}_{R/I} = \frac{h(z)}{\prod_{i=1}^{n}(1-z^{d_i})}$$

esistono d polinomi (con $d = mcm(d_i)$) $p_0, \ldots, p_{d-1}$ tali che definitivamente

$$H_{R/I}(n) = p_j(n)$$

se $n \equiv j \pmod d$.

La serie di Hilbert è un utile strumento per ricavare informazione sui moduli. Abbiamo visto nei corsi precedenti che può essere utilizzata per determinare la dimensione di un anello locale noetheriano. Con la nozione di dimensione di un modulo che abbiamo introdotto, tale risultato si generalizza:

Teorema 1.65 (Hilbert) *Sia R_0 un anello artiniano locale e sia $R = R_0[x_1, \ldots, x_n]$ un'algebra noetheriana graduata standard. Sia M un A-modulo finitamente generato. Allora la dimensione del modulo $d = \dim M$ coincide con l'ordine del polo della serie di Hilbert di M.*

Prima di dimostrare questo risultato, abbiamo necessità di alcuni lemmi.

Lemma 1.66 *Consideriamo una successione esatta corta di A-moduli*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

Allora $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} M' \cup \operatorname{Supp} M''$.

Dimostrazione. La localizzazione mantiene l'esattezza.

Lemma 1.67 *Nella dimostrazione del teorema di Hilbert, è sufficiente verificare la tesi nel caso in cui $M = R/p$ con $p \in \operatorname{Spec} R$.*

Dimostrazione. Consideriamo la filtrazione ottenuta dal teorema 1.4

$$M = M_r \supseteq \cdots \supseteq M_0 = (0)$$

tale che i quozienti successivi siano isomorfi a $R/p_i(-d_i)$ con $p_i \in \operatorname{Spec}(R)$ omogeneo. Notiamo che, utilizzando il lemma precedente,

$$\begin{aligned}\operatorname{Supp} M &= \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Supp} {}^{M_i}\!/_{M_{i+1}} \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Supp} {}^{R}\!/_{p_i} \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} V(p_i)\end{aligned}$$

Di conseguenza, $\dim M = \max_i \dim R/p_i$. D'altra parte, per additività $H_M = \sum_i H_{R/p_i(-d_i)}$ (basta considerare le successioni esatte corte indotte dalla filtrazione). Se il teorema è vero per R/p_i per ogni i, le funzioni di Hilbert di R/p_i sono definitivamente polinomiali di grado $d_i = \dim R/p_i - 1$. Detto f_i il polinomio relativo alla funzione di Hilbert di R/p_i, si ha che il polinomio $f(x)$ relativo a M coincide definitivamente con la somma degli f_i e il grado non cala perché i coefficienti direttivi dei singoli polinomi di Hilbert sono positivi. Dunque la funzione di Hilbert di M è polinomiale di grado $\max_i \deg f_i$, da cui la tesi.

Lemma 1.68 *Sia $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio di grado $d-1$. Sono equivalenti:*

1. *Per n sufficientemente grade, p è a valori in $\mathbb{Z}$.*
2. *Esistono $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{Z}$ tali che $p(x) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \binom{x+i}{i}$.*
3. *p è a valori in $\mathbb{Z}$ per ogni i.*

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2) Procediamo per induzione su d. Se $d - 1 = 0$, allora $p(x) = c$ è una costante ed è a valori in $\mathbb{Z}$, e dunque $c \in \mathbb{Z}$. Supponiamo ora che $d-1 > 0$ e procediamo al passo induttivo. Definiamo il polinomio $\Delta p = p(x) - p(x-1)$; questo è un polinomio in $\mathbb{Q}[x]$ di grado $d-2$. Dato che l'insieme $\{\binom{x+i}{i} \mid i \in \mathbb{N}\}$ è una base di $\mathbb{Q}[x]$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale, possiamo scrivere $p(x) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \binom{x+i}{i}$. Scriviamo ora i coefficienti di Δp:

$$\begin{aligned}\Delta p &= \sum_{i=0}^{d-1} a_i\Big[\binom{x+i}{i} - \binom{x+i-1}{i}\Big]\\ &= \sum_{i=1}^{d-1} a_i\binom{x+i-1}{i-1}\\ &= \sum_{i=0}^{d-2} a_{i+1}\binom{x+i}{i}\end{aligned}$$

Per ipotesi induttiva, $a_1, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{Z}$. Inoltre, i binomiali assumono valori in $\mathbb{Z}$ e dunque lo stesso deve valere per a_0.

(2) ⇒ (3) Segue dal fatto che i binomiali sono a valori in $\mathbb{Z}$.

(3) ⇒ (1) Ovvio.

Lemma 1.69 *Sia $F\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione e sia $d \geq 0$. Sono equivalenti:*

1. *$\Delta^d F(n) = c \neq 0$ con $c \in \mathbb{Z}$.*
2. *F è di tipo polinomiale di grado d*

dove $\Delta^0 F = F$, $\Delta^1 F(n) = F(n+1) - F(n)$ e $\Delta^n F = \Delta(\Delta^{n-1}F)$.

Dimostrazione.

(1) ⇒ (2) Per $d = 0$, F è costante e non nulla, e dunque è polinomiale di grado 0. Se $d > 0$, $\Delta^{d-1}(\Delta F) = c \neq 0$ e dunque ΔF è polinomiale di grado $d-1$. Per il lemma precedente, ΔF coincide definitivamente con un polinomio $Q(n)$ della forma

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i\binom{x+i}{i}$$

Sia $p(x) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i\binom{x+i}{i+1}$. Allora $\Delta p = Q$ e $\Delta(F-p) = \Delta F - \Delta p = 0$ definitivamente in n. Dunque $F - p$ è definitiviamente costante, ossia $F = P + a_d$ definitivamente in n.

(2) ⇒ (1) Se $d = 0$, F è costante e dunque $F = c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ e dunque $\Delta F = 0$. Se $d > 0$, per $n >> 0$ vale $\Delta F = F(n) - F(n-1)$ che è polinomiale di grado $d-1$. Di conseguenza, $\Delta^d(F) = \Delta^{d-1}(\Delta(F))$ è una costante per $n >> 0$.

Dimostrazione (Dimostrazione del teorema di Hilbert). Per il lemma, basta mostrare la tesi per $M = R/p$ con p primo omogeneo. Procediamo per induzione su $d = \dim R/p$. Se $d = 0$, p è un ideale massimale e omogeneo e $H_{R/p}$ è nullo per $n \geq 1$ (un massimale omogeneo è della forma $m_0 \oplus A_+$), da cui la tesi in quanto il polinomio nullo ha grado -1. Supponiamo ora che $d > 0$ e mostriamo che $\Delta^{d-1}H_{R/p} = c \neq 0$ definitivamente in n. Notiamo che esiste $x \in R_1 \setminus p$; se infatti $p \supseteq R_1$, allora $p \supseteq R_+$ e dunque R/p sarebbe 0-dimensionale, contro quanto supposto. Consideriamo allora la successione esatta corta indotta dalla moltiplicazione per x:

$$0 \to {}^{R}\!/_{p}(-1) \xrightarrow{\cdot x} {}^{R}\!/_{p} \to {}^{R}\!/_{p+(x)} \to 0$$

Dato che gli omomorfismi sono omogenei, possiamo considerare le funzioni di Hilbert:

$$\begin{aligned} H_{R/p+(x)}(n+1) &= H_{R/p}(n+1) - H_{R/p(-1)}(n+1) \\ &= H_{R/p}(n+1) - H_{R/p}(n) \\ &= \Delta H_{R/p}(n) \end{aligned}$$

Notiamo che $\dim R/(p+(x)) = (\dim R/p)-1$. Infatti $\dim R/(p+(x)) \geq d-1$ per la proposizione 1.25 e vale l'uguaglianza perché x può essere completato a un sistema di parametri, in quanto non è uno zero divisore e dunque $\mathrm{ht}(p) = 1$ per ogni p primo minimale di x. Distinguiamo ora due casi:

1. Se $d = 1$, $\dim R/p+(x) = 0$ e dunque $H_{R/p+(x)}(i) = 0$ per i sufficientemente grande. In questo caso, dobbiamo mostrare che $H_{R/p}(n)$ è definitivamente costante e non nulla. Dall'equazione ottenuta sopra, definitivamente $H_{R/p}(n+1) = H_{R/p}(n)$ e dunque è costante. Inoltre, è non nulla in quanto se lo fosse R/p sarebbe artiniano, contro le ipotesi.
2. Se $d > 1$, per ipotesi induttiva, $H_{R/(p+(x))}$ è definitivamente un polinomio di grado $d-1$ e quindi $\Delta H_{R/p}$ è polinomiale di grado $d-2$. Per il lemma precedente, $\Delta^{d-1} H_{R/p} = \Delta^{d-2}(\Delta H_{R/p}) = c \neq 0$.

Possiamo fornire l'insieme delle serie di Hilbert di un ordinamento parziale: diciamo che $\mathrm{HP}_M \leq \mathrm{HP}_N$ se la disuguaglianza vale termine a termine.

Cerchiamo ora di capire come sono correlate la serie di Hilbert di un modulo con quella di un quoziente per un elemento omogeneo di grado t. Consideriamo la successione esatta

$$0 \to {}^{M}\!\big/_{(0:f)}(-t) \xrightarrow{\cdot f} M \to {}^{M}\!\big/_{fM} \to 0$$

Per additività della serie di Hilbert, otteniamo la relazione

$$\mathrm{HP}_{M/fM}(x) = \mathrm{HP}_M(x) - \mathrm{HP}_{M/(0:f)(-t)}(x)$$

e dunque $\mathrm{HP}_{M/fM}(x) \leq \mathrm{HP}_M(x)$ e vale l'uguale se e solo se $M/(0:f) = 0$. Abbiamo dunque il seguente:

Corollario 1.70 *Sia M un modulo graduato e sia $f \in A$ un elemento omogeneo. Allora $\dim M/fM \leq \dim M$ e vale l'uguaglianza se e solo se $M/(0:f) = 0$.*

Inoltre, svolgendo ancora i conti,

$$\begin{aligned} \mathrm{HP}_M(x) &= \mathrm{HP}_{M/fM}(x) + \mathrm{HP}_{M/(0:f)(-t)}(x) \\ &= \mathrm{HP}_{M/fM}(x) + x^t(\mathrm{HP}_M(x) - \mathrm{HP}_{(0:f)}(x)) \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$(1-x^t)\,\mathrm{HP}_M(x) = \mathrm{HP}_{M/fM}(x) - x^t\,\mathrm{HP}_{(0:f)}(x)$$

cioè $(1-x^t)\,\mathrm{HP}_M(x) \leq \mathrm{HP}_{M/fM}(x)$ e vale l'uguaglianza se e solo se $f \notin Z(M)$. Di conseguenza, dato che la molteplicità di 1 come radice di $(1-x^t)$ è 1, arriviamo al seguente risultato:

Corollario 1.71 *Sia M un A-modulo graduato e sia $f \in A$ un elemento omogeneo. Allora*

$$\dim M \geq \dim {}^{M}\!/_{fM} \geq \dim M - 1$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $f \notin Z(M)$.

Definizione 1.72 *Sia M un A-modulo graduato. Una M-successione o sequenza regolare per M è un insieme di elementi omogenei $f_1, \dots, f_t$ di A tali che f_i non sia uno zero divisore di $M/(f_1, \dots, f_{i-1})M$ per ogni $i = 1, \dots, t$.*

Example 1.16. Se $M = R = k[x_1, \dots, x_n]$ è una R-successione se e solo se $f \neq 0$. f, g è una R-successione se e solo se f, g sono coprimi tra loro.

Teorema 1.73 *Sia M un R-modulo graduato e siano $f_1, \dots, f_r \in R$ elementi omogenei con $\deg f_i = d_i$. Detto $f = (f_1, \dots, f_r)$, si ha*

$$\mathrm{HP}_M(z) \leq \frac{\mathrm{HP}_{M/fM}(z)}{\prod_{i=1}^{r}(1-z^{d_i})}$$

Vale l'uguaglianza se e solo se f è una sequenza regolare per M.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero di elementi r. Per $r = 1$ abbiamo già mostrato che il risultato vale nei precedenti corollari. Supponiamo quindi la tesi vera per $r-1$ elementi e dimostriamo la tesi per r. Detto $J = (f_1, \dots, f_{r-1})$ e $I = (f_1, \dots, f_r)$, chiamiamo $N = M/IM$ e $T = M/JM$. Allora

$$N \simeq {}^{T}\!/_{f_r T}$$

e dunque per ipotesi induttiva

$$\mathrm{HP}_M(z) \leq \frac{\mathrm{HP}_T(z)}{\prod_{i=1}^{r-1}(1-z^{d_i})}$$

Inoltre,

$$\mathrm{HP}_T(z) \leq \frac{\mathrm{HP}_N(z)}{(1-z^{d_r})}$$

e dato che le serie di $1/(1-z^{d_i})$ sono a termini positivi, segue la tesi.

Corollario 1.74 *Se $f_1, \dots, f_r$ sono una M-successione, allora per ogni $\sigma \in S_r$ $f_{\sigma_1}, \dots, f_{\sigma_r}$ sono ancora una M-successione.*

Dimostrazione. Il precedente teorema fornisce una definizione equivalente di successione regolare, indipendente dall'ordine degli elementi.

Example 1.17.

1. Se gli f_i non sono omogenei, il corollario è falso. Per esempio, consideriamo $R = k[x,y,z]$ e i polinomi x, $y(x+1)$, $z(x+1)$. Questi formano una sequenza regolare ma permutati non lo sono, perché $y(x+1)$ è un divisore dello zero in $k[x,y,z]/(z(x+1))$.
2. Consideriamo $I = (xy, xz, y^2) \subseteq R = k[x,y,z]$. I generatori forniti di I non formano una R-successione. Calcolando le rispettive serie di Hilbert, otteniamo
$$\mathrm{HP}_R(z) = \frac{1}{(1-z)^3} \qquad \mathrm{HP}_{R/I}(z) = \frac{1+2z}{1-z}$$
Effettivamente, vale
$$\frac{1}{(1-z^3)} < \frac{1+2z}{(1-z)(1-z^2)^3}$$

Una dimostrazione alternativa di Hilbert-Serre

Discutiamo ora una dimostrazione alternativa del teorema di Hilbert-Serre nel caso di un anello di polinomi su un campo con la gradazione standard. Per prima cosa, studiamo il caso di un modulo graduato della forma $M = R/I$. Muniamo R di un ordinamento monomiale e studiamo l'ideale dei termini di testa $Lt(I)$. Il seguente lemma ci permette di ricondurci allo studio di quest'ultimo:

Proposizione 1.75 (Lemma di Macaulay)

$$H_{R/I}(t) = H_{R/lt(I)}(t)$$

Dimostrazione. Fissato l'ordinamento, possiamo considerare una base di Gröbner G dell'ideale. Allora una base di R/I è data dai monomi che stanno sotto l'escalier dell'ideale (sono i resti della divisione per G) e tali monomi sono una base anche di $R/lt(I)$, da cui la tesi.

Possiamo quindi ridurci a considerare un ideale monomiale I. Per la dimostrazione del teorema di Hilbert-Serre in questo caso, procediamo per induzione sulla cardinalità dell'insieme minimale di generatori $G(I)$. Se $I = (m)$, allora
$$\mathrm{HP}_{R/I} = \frac{1-z^d}{(1-z)^n}$$
e dunque la serie di Hilbert ha la forma razionale voluta. Per il passo induttivo, supponiamo che $J = (m_1, \ldots, m_k, m)$. Detto $K = (m_1, \ldots, m_k)$, si ha
$$\mathrm{HP}_{R/K}(z) = \mathrm{HP}_{R/J}(z) + z^d\, \mathrm{HP}_{R/K/(0:m)}(z)$$

e l'ultimo dei moduli in questione ha almeno un generatore in meno. Si conclude allora per ipotesi induttiva. A questo punto, dobbiamo dimostrare la tesi per un qualsiasi modulo M. Per il teorema 1.4, possiamo trovare una filtrazione del modulo

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = (0)$$

tale che ogni quoziente sia isomorfo a R/p_i, con $p_i \in \operatorname{Spec}(R)$ omogeneo. Per additività della serie di Hilbert, vale

$$\mathrm{HP}_M = \sum \mathrm{HP}_{M_i/M_{i+1}}$$

da cui la tesi.

Example 1.18. Consideriamo $I = (f_1, \ldots, f_r)$. Studiamo la dimensione di R/I. Chiaramente vale $\geq n-r$. Sia $f \in R_t$ e sia J omogeneo. Detto $A = R/J$, mostriamo che

$$\dim \frac{A}{fA} = x \geq \underbrace{\dim A}_{=d} - 1$$

Sappiamo che

$$\frac{\mathrm{HP}_{A/fA}(z)}{(1-z^t)} = \frac{g(z)}{(1-z)^x(1-z^t)} \geq \mathrm{HP}_A(z) = \frac{h(z)}{(1-z)^d}$$

Dunque

$$\frac{g(z)}{(1-z)^x} \geq \frac{h(z)(1-z^t)}{(1-z)^d}$$

Definizione 1.76 *Sia M un R-modulo finitamente generato e supponiamo*

$$\mathrm{HP}_M(z) = \frac{h(z)}{(1-z)^d}$$

con $h(1) \neq 0$. Definiamo $e(M) \coloneqq h(1)$ come la molteplicità di M.

Legami con la geometria algebrica

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ una varietà proiettiva $X = \operatorname{Proj} A$ con

$$A = {}^{k[x_0, \ldots, x_n]}\!\big/_{I}$$

Allora vale

1. $\dim A = \dim X + 1$
2. $\deg(X) = e(A)$
3. il genere di X è $g(X) = (-1)^{\dim X}(c-1)$, dove c termine noto del polinomio di Hilbert.

Consideriamo per esempio un'ipersuperficie $V = V(f)$ con f omogeneo di grado d in $R = k[x_0, \dots, x_n]$. Detto $A = R/(f)$, si ha

$$\mathrm{HP}_A(z) = \mathrm{HP}_R(z)(1 - z^d) = \frac{\sum_{i=0}^{d-1} z^i}{(1-z)^n}$$

Allora $\deg f = \deg V$, $\dim V = n - 1$. Il polinomio di Hilbert è

$$p_A(t) = H_R(t) - H_R(t-d) = \binom{t+n}{n} - \binom{t-d+n}{n}$$

Valutando per $t = 0$, otteniamo

$$p_A(0) = \binom{n}{n} - \binom{n-d}{n} = 1 - (-1)^n \binom{d-1}{n}$$

da cui

$$g(V) = (-1)^{n-1}(-1)(-1)^n \binom{d-1}{n} = \binom{d-1}{n}$$

In generale, per trovare il polinomio di Hilbert si usa il seguente teorema:

Teorema 1.77 *Sia M un R-modulo graduato e sia $h_M(z)$ è l'h-vettore di M (ossia il numeratore della serie di Hilbert in forma razionale ridotta). Detti*

$$e_i = \frac{h_M^{(i)}(1)}{i!}$$

si ha

$$p_M(x) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{x+i}{i}$$

Disponendo di una risoluzione libera, si può calcolare in maniera semplice:

Proposizione 1.78 *Se M è finitamente generato con una risoluzione libera graduata finita*

$$0 \to \oplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{hj}} \to \cdots \to \oplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{0j}} \to M \to 0$$

allora

$$\mathrm{HP}_M(z) = S_m(z)\, \mathrm{HP}_R(z)$$

con $S_M(z) = \sum_{i,j} (-1)^i \beta_{ij} z^j$. Se $R = k[x_1, \dots, x_n]$, allora

$$\mathrm{HP}_M(z) = \frac{S_M(z)}{(1-z)^n}$$

Anticipiamo ora alcuni teoremi che (probabilmente) dimostreremo:

Teorema 1.79 (Auslander-Buchsbaum-Serre) *Sia R un anello locale noetheriano. Sono equivalenti:*

1. *R regolare*
2. $\operatorname{projdim} R < \infty$ *per ogni M finitamente generato*
3. $\operatorname{projdim} k < \infty$

Teorema 1.80 (Sizigie di Hilbert) *Sia M un $R = k[x_1, \ldots, x_n]$-modulo graduato. Allora M ammette una risoluzione libera graduata di lunghezza $\leq n$. In particolare* $\operatorname{projdim} \leq n$ *per ogni R-modulo finitamente generato e ogni R-modulo finitamente generato ha una risoluzione libera di lunghezza $\leq n$.*

Teorema 1.81 (Quillen-Suslin) *Sia M un $k[x_1, \ldots, x_n]$-modulo proiettivo finitamente generato. Allora M è libero.*

Example 1.19. L'ipotesi di regolarità è essenziale per disporre di una risoluzione libera graduata finita. Per esempio, se consideriamo l'anello

$$A = {}^{k[X,Y]}\!\big/_{(X^2 - Y^3)}$$

sappiamo che questo non è regolare in 0. Consideriamo allora $M = (x, y) \subseteq A$. Calcolando la risoluzione libera minimale, si ha che questa non è limitata ed è ciclica.

Il teorema generalizzato di Krull assicura che $\operatorname{ht}(I) \leq \mu(I)$. Studiamo la classe estremale:

Definizione 1.82 *Un ideale I si dice intersezione completa (CI) se vale* $\operatorname{ht}(I) = \mu(I)$*. I si dice intersezione completa insiemistica se esistono $a_1, \ldots, a_n \in I$ tali che $\sqrt{I} = \sqrt{(a_1, \ldots, a_n)}$ e $n = \operatorname{ht}(I)$*

La stessa nozione può essere data in termini di varietà:

Definizione 1.83 *Sia K un campo algebricamente chiuso e sia V una varietà di dimensione d. Allora V è intersezione completa se $\mu(I(V)) = n - d$. V è intersezione completa insiemistica se*

$$V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-d}$$

dove ogni V_i è una ipersuperficie.

Notiamo che se I è intersezione completa, allora tutti i primi minimali di I hanno la stessa altezza. Infatti, dato un primo minimale p, vale $\operatorname{ht}(p) \leq \mu(I) = \operatorname{ht}(I) \leq \operatorname{ht}(p)$, dove la prima disuguaglianza vale per il teorema di Krull e l'altra per definizione di altezza di un ideale. Di conseguenza, gli ideali intersezione completa si comportano bene rispetto alla dimensione. In generale, vale $\operatorname{ht}(I) + \dim A/I \leq \dim A$ per ogni ideale I. Nel caso di un anello di polinomi su un campo, per catenarietà, vale l'uguaglianza nel caso di ideali primi, ma non in generale per ideali qualsiasi. Se I è intersezione completa, vale l'uguaglianza, in quanto questa vale per ogni primo minimale su I e questi hanno tutti la stessa altezza e profondità.

Example 1.20. Consideriamo la curva affine data in forma parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$

e la sua chiusura proiettiva $C \subseteq \mathbb{P}^3$. Vale che $I(C) = (x^2 - wy, y^2 - xz, xy - zw)$ (attenzione, non basta omogeneizzare un insieme di generatori dell'ideale della varietà affine). Notiamo che $I(C)$ è generato dai determinanti dei minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} w & x & y \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Sicuramente $\mu(I(C)) = 3$ e $I(C)$ è primo, in quanto $I(C) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ dove φ è la mappa

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ K[w, x, y, z] &\longrightarrow K[t, u] \\ w &\longmapsto t^3 \\ x &\longmapsto t^2u \\ y &\longmapsto tu^2 \\ z &\longmapsto u^3 \end{aligned}$$

Calcoliamo la funzione di Hilbert di $M = A/I(C)$.

$$H_M(n) = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 0 \\ \#\text{monomi di grado } 3n \text{ in } t, u = 3n + 1 \end{cases}$$

e dunque il polinomio di Hilbert è $p_C(x) = 3x + 1$. La varietà ha quindi genere 0. La serie di Hilbert risulta essere

$$\mathrm{HP}_M = \frac{1 + 2x}{(1 - z)^2}$$

Di conseguenza $\dim M = 2$ e questo basta per dire che $I(C)$ non è intersezione completa. Se infatti lo fosse, allora $\mathrm{ht}(I(C)) = \mu(I(C)) = 3$ da cui otterremmo $\dim k[w, x, y, z] \geq 5$, assurdo.
Studiamo ora la proprietà di intersezione completa insiemistica. Notiamo che

$$V(I(C)) = V(x^2 - wy) \cap V(y^3 - 2xyz + wz^2)$$

e detto $J = (x^2 - wy, y^3 - 2xyz + wz^2)$ si ha $\sqrt{J} = I(C)$ e J ha solo due generatori. Di conseguenza $I(C)$ è intersezione completa insiemistica.

In $A/I(C)$ riusciamo anche a trovare una successione regolare di lunghezza 2. Consideriamo w, z; questa è una successione regolare perché $\mathrm{HP}_{A/I(C)+(w,z)} =$

$1 + 2w$. Infatti

$$k[w,x,y,z]\big/(w,z,f_1,f_2,f_3) = k[x,y]\big/(x^2,y^2,xy)$$

da cui quanto voluto.

Example 1.21. Consideriamo la superficie definita da equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^3 u \\ z = tu^3 \\ w = u^4 \end{cases}$$

L'ideale associato a tale varietà è l'ideale primo

$$I(C) = (x_0x_3 - x_1x_2, x_1^3 - x_0^2x_2, x_2^3 - x_1x_3^2, x_0x_2^2 - x_1^2x_2)$$

Vediamo se riusciamo a trovare una successione regolare lunga 2. Dato che $A/I(C)$ è un dominio, x_0 è regolare. Andiamo nel quoziente

$$k[x_0,\dots,x_3]\big/(g_1,g_2,g_3,g_4,x_0) \simeq k[x_1,x_2,x_3]\big/(x_1x_2, x_1^3, x_2^3 - x_1x_3^2, x_1^2x_3)$$

Notiamo che $(0 : x_1) = (x_1, x_2, x_3)$ che è massimale; l'ideale massimale appartiene allora agli associati e dunque non ci sono altri elementi regolari. Studiamo la serie di Hilbert.

$$H_{A/I(C)}(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 4 & n = 1 \\ 4n+1 & n > 1 \end{cases} \qquad \mathrm{HP}_{A/I(C)}(z) = \frac{1 + 2z + 2z^2 - z^3}{(1-z)^2}$$

Cerchiamo ora di caratterizzare le funzioni che possono essere funzioni di Hilbert di un modulo.

Lemma 1.84 *Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $k > 0$. Allora n si scrive in maniera unica come*

$$n = \sum_{i=1}^{k} \binom{h(i)}{i}$$

con $h(k) > h(k-1) > \cdots > h(1) \geq 0$.

Dimostrazione. Scegliamo $h(k)$ massimale rispetto alla proprietà $\binom{h(k)}{k} \leq n$. Se vale l'uguaglianza, allora

$$n = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{i-1}{i} + \binom{h(k)}{k}$$

Altrimenti, per induzione

$$n' = n - \binom{h(k)}{k} = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{h(i)}{i}$$

Rimane da verificare che $h(k) > h(k-1)$. Questo segue da

$$\binom{h(k)}{k-1} = \binom{h(k)+1}{k} - \binom{h(k)}{k} > n' \geq \binom{h(k-1)}{k-1}$$

Mostriamo ora l'unicità. Basta mostrare che data una scrittura di questo tipo, $h(k)$ è il più grande tale che $\binom{h(k)}{k} \leq n$. Se $n = 1$ è ovvio. Se $n > 1$, supponiamo per assurdo che $\binom{h(k)+1}{k} \leq n$.

$$\sum_{i=1}^{k-1} \binom{h(i)}{i} \geq \binom{h(k)+1}{k} - \binom{h(k)}{k} = \binom{h(k)}{k-1} \geq \binom{h(k-1)+1}{k-1}$$

e per ipotesi induttiva questa è $> n'$, da cui un assurdo.

Example 1.22.

1. Se $n = 8$ e $k = 3$,
$$8 = \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{1}{1}$$
2. Se $n = 3$ e $k = 8$,
$$3 = \binom{8}{8} + \binom{7}{7} + \binom{6}{6}$$
3. Se $n = 20$ e $k = 3$,
$$20 = \binom{6}{3}$$
4. Se $n = 20$ e $k = 4$
$$20 = \binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2}$$

Definizione 1.85 *Nelle notazioni introdotte in precedenza, definiamo l'espansione binomiale di $n \in \mathbb{N}$ rispetto a $k > 0$ come*

$$n^{\langle k \rangle} = \binom{h(k)+1}{k+1} + \binom{h(k-1)+1}{k} + \cdots + \binom{h(1)+1}{2}$$

Teorema 1.86 (Macaulay) *Sia k un campo e sia $H\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione. Sono equivalenti:*

1. *Esiste una k-algebra standard R/I tale che $H_{R/I}(n) = H(n)$ per ogni n*
2. *Esiste una k-algebra standard monomiale R/I tale che $H_{R/I}(n) = H(n)$ per ogni n*

3. $H(0) = 1$ *e* $H(n+1) \leq H(n)^{\langle n \rangle}$ *per ogni* $n > 0$

Dimostrazione. Diamo l'idea della dimostrazione di (3) $\Rightarrow$ (2). Se $H(1) = n$, scegliamo $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Ordiniamo i monomi di R con deglex indotto da $x_1 > \cdots > x_n$ e li enumeriamo, scrivendoli dal più grande al più piccolo grado per grado. In ogni grado, cancelliamo gli ultimi $H(j)$ monomi e definiamo I_j come il k-spazio vettoriale generato dai monomi non cancellati. Allora $I = \oplus_j I_j$ è un ideale con la funzione di Hilbert voluta. Bisogna mostrare che questo sia effettivamente un ideale; consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F}_{j,k} = \{T \mid T \text{ è un insieme di monomi du grado } j, \ |T| = k\}$$

Dato $L \subseteq R_j$, diciamo che L è un lex segmento se esiste $v \in R_j$ tale che $L = \{u \geq v \mid \deg(u) = j\}$. Esiste un unico $L \in \mathcal{F}_{j,k}$ che sia un lex segmento. Detta $Shad(T) = \{x_i m \mid i = 1, \dots, n, \ m \in T\}$. Notiamo che per ogni $T \in \mathcal{F}_{j,k}$ vale $|Shad(T)| \geq |Shad(L)|$.

Example 1.23. Consideriamo la funzione H con valori $1, 2, 3, 3, 4$. Questa dovrebbe essere realizzabilecome quoziente di $R = k[x, y]$; seguendo l'idea della dimostrazione del teorema, si vede che la costruzioe fallisce. Effettivamente la funzione data non soddisfa la condizione del teorema.

Osservazione 1.87 *Se $\mathcal{F}$ è la famiglia di ideali omogenei di R con funzione di Hilbert H assegnata, esiste un unico ideale L lessicografico in $\mathcal{F}$. Quindi, dato un ideale omogeneo I, possiamo assegnargli un ideale I^{lex}.*

Example 1.24. Sia $I = (xy, x^2z, yz^2)$. Dato che $I_2 = \langle xy \rangle$, $x^2 \in I^{lex}$ e dunque possiamo individuare la sua ombra $I_3^{lex} \supseteq (x^3, x^2y, x^2z)$. Considerando $I_3 =< x^2y, xy^2, xyz, x^2z, yz^2 >$, dobbiamo aggiungere 2 monomi all'ombra:

$$I_3^{lex} =< x^3, x^2y, x^2z, xy^2, xyz >$$

In I_4, non ci sono nuovi generatori e dunque c'è solo l'ombra di I_3:

$$I_4 =< x^3y, x^3z, x^2y^2, x^2yz, x^2z^2, xy^3, xy^2z, xyz^2, y^2z^2, yz^3 >$$

Invece, l'ombra di I_3^{lex} è

$$R_1 I_3^{lex} =< x^4, x^3y, x^3z, x^2y^2, x^2yz, x^2z^2, xy^3, xy^2z, xyz^2 >$$

e dunque bisogna aggiungere un monomio, xz^3. Lo stesso in grado 5, dove bisogna aggiungere all'ombra y^5. Nei gradi successivi invece le dimensioni coincidono e dunque abbiamo trovato

$$I^{lex} = (x^2, xy^2, xyz, xz^3, y^5)$$

Il fatto che le dimensioni coincidano segue da un teorema che mostra che il procedimento può terminare in grado $\geq D(I)$, dove $D(I)$ è il massimo grado di un generatore in un insieme di generatori minimale.

Il teorema di Macaulay ha aperto la possibilità di individuare proprietà di una k-algebra graduata tramite la sua funzione di Hilbert:

Teorema 1.88 *Sia $H\colon \mathbb{N} \to N$ una funzione. Sono equivalenti:*

1. *Esiste una k-algebra standard ridotta A tale che $H = H_A$*
2. *$H(n) = 1$ per ogni n oppure ΔH è ammissibile nel senso del teorema di Macaulay.*

Dimostrazione.

(1) ⇒ (2) Procediamo per induzione sulla dimensione di A. Se $\dim A = 0$, A è artiniano e ridotto e dunque campo. Dunque $A = k$ e la funzione di Hilbert è banale. Supponiamo ora che $\dim A \geq 0$. Allora $(x_1, \dots, x_n)$ non può essere tra gli associati perché I è ridotto. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che k sia infinito a meno di considerare $A \otimes_k K$. Per il lemma di scansamento omogeneo, esiste allora $l \in A_1$ regolare (che non appartiene ai primi associati) e

$$\mathrm{HP}_A(z) = \frac{\mathrm{HP}_{A/(l)}(z)}{1 - z}$$

Dunque $H_{A/l}(0) = 1$ e $H_{A/l}(n) = H_A(n) - H_A(n-1) = \Delta H$, come voluto.

(2) ⇒ (1) Chiaramente $k = k[x]/(x)$ realizza la funzione banale. Supponiamo allora che ΔH sia ammissibile. Per il teorema di Macaulay, esiste una k-algebra standard $S = k[x_1, \dots, x_n]/J$ monomiale tale che $\Delta H = H_S$. Solleviamo un monomio all'anello di polinomi $R = k[x_0, \dots, x_n]$ tramite la mappa l[1]:

$$l(x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{p=0}^{a_i - 1} (x_j - p x_0)$$

Detto $I = (l(m) \mid m \in G(J))$, si ha che I è radicale[2]. Inoltre, x_0 è regolare e $S/J \simeq R/I/(x_0)$ e vale la relazione voluta tra le funzioni di Hilbert.

La nozione di successione regolare fornisce un'invariante:

Definizione 1.89 *Sia M un A-modulo graduato. Definiamo la profondità di M, e la indichiamo con* $\operatorname{depth} M$*, come la massima lunghezza di una successione M-regolare.*

Chiaramente, dato un modulo M, vale $\dim M \geq \operatorname{depth} M$. Anche stavolta, risulta interessante studiare la classe estremale, che studieremo avanti con più dettagli:

Definizione 1.90 *Un modulo graduato M si dice Cohen-Macaulay se* $\dim M = \operatorname{depth} M$.

---

[1] Stiamo supponendo che la caratteristica del campo sia 0. Chiaramente si può supporre che il campo sia infinito e fare in modo che la dimostrazione sia comunque corretta, ma allungherebbe la trattazione.

[2] Boh. Non so.

Example 1.25.

1. Se A è un anello artiniano, allora A è di Cohen-Macaulay, in quanto $0 = \dim A \geq \operatorname{depth} A$ e dunque deve valere l'uguaglianza.
2. Se A ha dimensione 1, non è detto che A sia di Cohen-Macaulay. Consideriamo per esempio
$$A = {k[x,y]}\big/{(x^2, xy)}$$
Allora (x, y) appartiene ai primi associati e dunque non vi può essere un elemento regolare. D'altronde $\dim A = 1$ e dunque A non è Cohen-Macaulay.
3. Se $A = k[x_1, \dots, x_n]$ e I è un ideale radicale tale che $\dim A/I = 1$, allora A/I è Cohen-Macaulay, in quanto esiste nel quoziente un elemento regolare.

Proposizione 1.91 *Sia $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ un anello di Cohen-Macaulay di dimensione d. Allora esiste una successione regolare $f_1, \dots, f_d$ di cardinalità massima tale che $\deg f_i = 1$ per ogni i.*

Proposizione 1.92 *Se $A = k[x_0, \dots, x_n]/I$ è Cohen-Macaulay, l'h-vettore di A ha tutti i coefficienti positivi.*

Dimostrazione. Sia $f_1, \dots, f_d$ una successione regolare di elementi di A, dove $\dim A = d$. Il quoziente per questi è un anello artiniano e la serie di Hilbert coincide con l'h-vettore. Inoltre, l'h-vettore di $A/(f_1, \dots, f_d)$ coincide con la funzione di Hilbert di $A/(f_1, \dots, f_d)$; in particolare è a coefficienti positivi. D'altronde,
$$\mathrm{HP}_A(z) = \frac{\mathrm{HP}_{A/(f_1,\dots,f_d)}(z)}{(1-z)^d}$$
da cui la tesi.

Example 1.26. Il viceversa è falso. Consideriamo $I = (x, y^4) \cap (x^2, y, z^2)$. Allora $(x, y, z) \in \operatorname{Ass}(R/I)$ e dunque la profondità di R/I è 0. Calcoliamo la serie di Hilbert. Dato che $I = (x^2, xy, xz^2, y^4)$, è lessicografico e la funzione di Hilbert è $1, 3, 4, 4, \dots$. L'h-vettore è allora $1, 2, 1, 0, \dots$ che ha tutti i coefficienti positivi.

Studiamo ora le possibili funzioni di Hilbert di una k-algebra standard integra. Questo è un problema aperto, ma vi sono alcuni risultati parziali.

Lemma 1.93 (Lemma di polarizzazione) *Sia J un ideale monomiale e sia $S = k[x_1, \dots, x_n]/J$. Esiste allora un anello di polinomi $R = S[y_1, \dots, y_s]$, un ideale $I \subseteq R$ generato da monomi squarefree e una sequenza regolare Y di elementi di grado 1 tale che $R/(I + Y) \simeq S$.*

Dimostrazione. Sia $J = (u_1, \dots, u_m)$ e supponiamo $u_i = x_1^{a_{i1}} \dots x_n^{a_{in}}$. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $a_{i1} > 1$ per qualche i. Chiamiamo $R = S[y]$ e definiamo

$$v_k = \begin{cases} u_k \text{ se } a_{k1} = 1 \\ Y^{a_{k1}-1} x_1 x_2^{a_{k2}} \dots x_n^{a_{kn}} \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Consideriamo allora l'ideale $J' = (v_1, \dots, v_m) \subseteq R$. Chiaramente $R/J' \simeq S$; mostriamo che l'elemento $y - x_1$ è regolare nel quoziente. Se per assurdo non lo fosse, esisterebbe un primo associato $p = (0 : v) \in \mathrm{Ass}(R/J')$ tale che $y - x_1 \in p$. J' è monomiale e dunque dalla relazione $(y - x_1)v \in J'$ otteniamo $yv, x_1 v \in J' = (v_1, \dots, v_m)$. Abbiamo le relazioni

$$x_1 v = \alpha_1 v_i \qquad\qquad yv = \alpha_2 v_j$$

da cui si ha $y \nmid \alpha_2$, $x_1 \nmid \alpha_1$, $y \mid v_j$ e $x_1 \mid v_i$. Se $y \mid v_j$, allora per il procedimento attuato deve valere $x_1 \mid v_j$ e di conseguenza $x_1 \mid v$, ossia $x_1^2 \mid v_i$, da cui un assurdo. Dunque $y - x_1$ è regolare, come voluto.
Iterando la procedura, si ottiene alla fine un ideale monomiale con monomi liberi da quadrati.

Teorema 1.94 *Sia k un campo e sia $h_0, \dots, h_s$ una successione di elementi positivi. Allora sono equivalenti:*

1. *Esiste una k-algebra standard Cohen-Macaulay $A = R/I$ tale che*
$$\mathrm{HP}_A(z) = \frac{\sum h_i z^i}{(1-z)^d}$$
2. *$h_0 = 1$ e $h_{i+1} \leq h_i^{\langle i \rangle}$ per ogni $i = 1, \dots, s-1$.*

Dimostrazione.

(1) ⇒ (2) Sia $f_1, \dots, f_d$ una successione regolare. Allora
$$(1-z)^d \,\mathrm{HP}_A(z) = \mathrm{HP}_{A/(f_1,\dots,f_d)}(z)$$
$A/(f_1, \dots, f_d)$ è artiniano e dunque l'h-vettore coincide con la funzione di Hilbert. Per il teorema di Macaulay, questa deve rispettare le condizioni richieste, da cui la tesi.

(2) ⇒ (1) Per il teorema di Macaulay, possiamo trovare una k-algebra monomiale A che soddisfi $H(i) = h_i$ per ogni i. In particolare, questa è artiniana. Per il lemma di polarizzazione, possiamo trovare una k-algebra monomiale S che soddisfi
$$(1-z)^d \,\mathrm{HP}_S(z) = \mathrm{HP}_A(z)$$
da cui la tesi.

Vale anche il seguente, che non dimostriamo:

Teorema 1.95 *Stanley Sia R/I Gorenstein. Allora l'h-vettore di R/I è simmetrico ($h_i = h_{s-i}$ per $i = 0, \dots, s/2$).*

Un problema aperto legato a questa teoria è il seguente: se A è un anello di Cohen-Macaulay e integro, allora è vero che l'h-vettore è unimodale?

Capitolo 2
Algebra Omologica

2.1 Richiami

Definizione 2.1 *Un complesso è una successione di A-moduli*

$$\to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \dots$$

tale che $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$. Un omomorfismo di complessi $f\colon C_\bullet \to D_\bullet$ è una famiglia di mappe $f_i\colon C_i \to D_i$ tale che $f_n \circ \delta_n = \delta_n \circ \delta_{n-1}$ per ogni n.

Definizione 2.2 *Sia C un complesso. Definiamo*

$$H_n(C_\bullet) = {}^{\operatorname{Ker}\delta_n}\!/\!_{\operatorname{Im}\delta_{n+1}}$$

Un esempio sono le risoluzioni proiettive, ossia una successione esatta lunga tale che $H_n(F_\bullet) = 0$ per ogni $n > 0$ e $H_0(F_\bullet) = M$ e F_i è proiettivo, o quelle iniettive, in cui i moduli sono iniettivi e $H_0(I_\bullet) = M$, $H_n(I_\bullet) = 0$.

Osservazione 2.3 *Un morfismo di complessi induce una mappa in omologia. Se φ è il morfismo di complessi, $H_n(\varphi)\colon H_n(C) \to H_n(D)$ è una mappa indotta naturalmente.*

Definizione 2.4 *Un morfismo di complessi φ è omotopo a 0 se esistono mappe $h_i\colon C_i \to D_{n+i}$ tali che $\varphi_n = \delta_{n+1}h_n + h_{n-1}\delta_n$ φ è omotopo a ψ se $\varphi - \psi$ è omotopo a 0.*

Definizione 2.5 *Una successione di complessi*

$$0 \to C_\bullet \to D_\bullet \to E_\bullet \to 0$$

è esatta se per ogni i

$$0 \to C_i \to D_i \to E_i \to 0$$

è esatta.

Teorema 2.6 *Sia $0 \to C_\bullet \to D_\bullet \to E_\bullet \to 0$ una successione esatta di complessi. Allora esiste una successione esatta lunga*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+2}(C_\bullet) \arrow[r] & H_{n+2}(D_\bullet) \arrow[r] & H_{n+2}(E_\bullet) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
 & H_{n+1}(C_\bullet) \arrow[r] & H_{n+1}(D_\bullet) \arrow[r] & H_{n+1}(E_\bullet) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
 & H_n(C_\bullet) \arrow[r] & H_n(D_\bullet) \arrow[r] & H_n(E_\bullet) \arrow[dll, dashed, out=0, in=180] \\
 & H_0(C_\bullet) \arrow[r] & H_0(D_\bullet) \arrow[r] & H_0(E_\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.7 *Sia C un complesso positivo aciclico proiettivo e D un complesso positivo e aciclico. Data $\phi \colon H_0(C) \to H_0(D)$ esiste una mappa di complessi $\bar{\phi} = \{\phi_n\}$ che solleva ϕ. Due tali mappe sono omotope.*

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & & H_0(C) \arrow[dr] \arrow[dd, "\phi"] & \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, dashed, "\phi_n"] \arrow[dl, "\Sigma_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d, dashed, "\phi_{n-1}"] \arrow[dl, "\Sigma_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & C_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, dashed] & C_0 \arrow[rr, "\delta_0"] \arrow[d, dashed, "\phi_0"] \arrow[ur, "\mu"] & & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\delta'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\delta'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta'_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & D_1 \arrow[r, "\delta'_1"'] & D_0 \arrow[rr, "\delta'_0"'] \arrow[dr, "\theta"'] & & 0 \\
 & & & & & & H_0(D) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione. ϕ_0 esiste per proiettività di C_0.

$$\begin{tikzcd}
 & C_0 \arrow[dl, dashed, "\phi_0"'] \arrow[d, "\phi \circ \mu"] & \\
D_0 \arrow[r, "\theta"'] & H_0(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Per il passo induttivo, supponiamo di avere costruito $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\delta_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta'_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\delta'_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta'_{n-1}"'] & D_{n-2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per commutatività abbiamo $\delta'_{n-1} \circ \phi_{n-1} \circ \delta_n = \phi_{n-2} \circ \delta_{n-1} \circ \delta_n = 0$ e usando l'aciclicità ne segue $\mathrm{Im}(\phi_{n-1} \circ \delta_n) \subseteq \mathrm{Ker}\, \delta'_{n-1} = \mathrm{Im}\, \delta'_n$. A questo punto possiamo ottenere ϕ_n per la proiettività di C_n sul diagramma

$$\begin{tikzcd} & C_n \arrow[dl, dashed, "\phi_n"'] \arrow[d, "\phi_{n-1} \circ \delta_n"] & \\ D_n \arrow[r, "\delta'_n"'] & \mathrm{Im}\, \delta'_n \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vediamo l'unicità a meno di omotopia. Supponiamo di avere due sollevamenti ψ e ξ. Vogliamo che per ogni n valga

$$\psi_n - \xi_n = \delta'_{n+1} \circ \Sigma_n + \Sigma_{n-1} \circ \delta_n$$

Poniamo $\Sigma_{-1} = 0$. Per commutatività del diagramma $\mathrm{Im}(\psi_0 - \xi_0) \subseteq \mathrm{Im}\, \delta'_1 \subseteq \mathrm{Ker}\, \delta'_0$, dunque Σ_0 esiste per proiettività di C_0 e abbiamo $\psi_0 - \xi_0 = \delta'_1 \circ \Sigma_0$. Per il passo induttivo supponiamo di avere costruito le mappe fino alla Σ_{n-1} e costruiamo la Σ_n. Si può vedere che

$$\delta'_n(\underbrace{(\psi_n - \xi_n) - \Sigma_{n-1} \circ \delta_n}_{\eta}) = 0$$

e dunque $\mathrm{Im}\, \eta \subseteq \mathrm{Ker}\, \delta'_n = \mathrm{Im}\, \delta'_{n+1}$; di conseguenza Σ_n esiste per proiettività di C_n. Quindi, $\delta'_{n+1} \circ \Sigma_n = \eta$, che scritta per esteso è proprio l'equazione richiesta dall'omotopia.

Teorema 2.8 (Lemma del Ferro di Cavallo) *Consideriamo una successione esatta corta*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

di A-moduli e siano $S_\bullet$ e $T_\bullet$ risoluzioni libere rispettivamente di A e di C. Allora esiste una risoluzione libera $R_\bullet$ di B tale che $0 \to S_\bullet \to R_\bullet \to T_\bullet \to 0$ sia una successione esatta di complessi.

Dimostrazione. Mostriamo, per induzione, che possiamo costruire $R_\bullet$ per somma diretta:

$$\cdots \to S_2 \oplus T_2 \to S_1 \oplus T_1 \to S_0 \oplus T_0 \to B \to 0$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & S_1 \arrow[r] & S_0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "\tilde{\alpha}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
 & & S_0 \oplus T_0 \arrow[r, "u"] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & T_1 \arrow[r] & T_0 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Mostriamo quindi che esiste $u\colon S_0 \oplus T_0 \to B$ come nel diagramma. Dato che T_0 è libero, è in particolare proiettivo e dunque esiste $\tilde{\gamma}$ come nel diagramma. Per composizione troviamo $\tilde{\alpha} = \varphi \circ \alpha$. Per la proprietà universale della somma diretta, troviamo allora la $u = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\gamma}$. Tale u fa commutare il diagramma e questo completa il passo base.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
S_i \arrow[r] & \operatorname{Ker} \alpha_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & S_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \alpha_{i-2} \arrow[d, "\phi"] \\
S_i \oplus T_i \arrow[r] & \operatorname{Ker} u_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & S_{i-1} \oplus T_{i-1} \arrow[r, "u_{i-1}"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} u_{i-2} \arrow[d, "\psi"] \\
T_i \arrow[r] & \operatorname{Ker} \gamma_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & T_{i-1} \arrow[r, "\gamma_{i-1}"] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \gamma_{i-2} \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Per il passo induttivo, notiamo che per il Lemma del Serpente la mappa g è surgettiva in quanto lo è la mappa α_{i-1} su $\operatorname{Ker}(\alpha_{i-2})$. Ripetendo quanto fatto nel passo base, troviamo allora una mappa $u_i\colon S_i \oplus T_i \to \operatorname{Ker}(u_{i-1})$ surgettiva che quindi rende esatta la successione e fa commutare il diagramma. Induttivamente troviamo così la risoluzione cercata.

Considereremo funtori additivi della categoria degli A-moduli. Dato un funtore T covariante e una mappa $\varphi \colon M \to N$, avremo una mappa $T(\varphi) \colon T(M) \to T(N)$. Chiediamo che T rispetti composizione e somma e che mandi l'identità nell'identità. I funtori che useremo saranno principalmente tre:

1. $\cdot \otimes N$, che è additivo, covariante, esatto a destra ed è esatto se e solo se N è piatto.
2. $\mathrm{Hom}(M, \cdot)$, che è additivo, covariante, esatto a sinistra ed è esatto se e solo se N è proiettivo.
3. $\mathrm{Hom}(\cdot, M)$, che è additivo, controvariante, esatto a sinistra ed è esatto se e solo se N è iniettivo.

2.1.1 Risoluzioni iniettive e proiettive

Definizione 2.9 *Definiamo la dimensione piatta, proiettiva, libera e iniettiva di M come il minimo delle lunghezze di una risoluzione rispettivamente piatta, proiettiva, libera e iniettiva.*

Definizione 2.10 *Sia A un anello. Definiamo la dimensione globale di A come il sup delle dimensioni proiettive di un A-moduli, che coincide con il sup delle dimensioni iniettive.*

Questa non è una buona definizione, perché a priori non coincidono. La buona definizione discende dal teorema di Auslander, che vedremo. Sappiamo che vale il seguente:

Teorema 2.11 *Sia (A, m) un anello locale e sia M un modulo finitamente generato. Allora M ammette un'unica risoluzione libera minimale.*

Nel caso duale, invece,

Teorema 2.12 *Sia M un A-modulo. Allora M ammette un'unica risoluzione iniettiva minimale.*

Vediamo ora nel dettagli come costruire queste risoluzioni. Partiamo dallo studio dei moduli iniettivi:

Definizione 2.13 *Un A-modulo I si dice iniettivo se esiste una mappa β che fa commutare il seguente diagramma:*

$$\begin{tikzcd}
& I & \\
B \arrow[ur, dashed, "\beta"] & A \arrow[l, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Definizione 2.14 *Un A-modulo M è divisibile se per ogni $a \in A \setminus Z(A)$ la moltiplicazione per A è surgettiva.*

Proposizione 2.15 *Se E è iniettivo, allora E è divisibile. Se A è un PID, vale anche il viceversa. La categoria degli $\mathbb{Z}$-moduli ha abbastanza iniettivi.*

Corollario 2.16 *La categoria dei moduli ha abbastanza iniettivi per ogni A.*

Definizione 2.17 *Sia M un R-modulo. E si dice estensione essenziale di M se $M \subseteq E$ e ogni sottomodulo di E interseca M in modo non banale.*

Equivalentemente, si può mostrare che un modulo E è essenziale se per ogni $e \in E$ esiste $r \in R$ tale che $re \in M$.

Example 2.1. Se R è un dominio, allora $R \subseteq Q(R)$ è un'estensione essenziale.

Proposizione 2.18 *Sia M un R-modulo. Sono equivalenti:*

1. *M è iniettivo*
2. *M non ha estensioni essenziali non banali*

Dimostrazione.

(1) ⇒ (2) Sia E un'estensione essenziale di M. Vogliamo mostrare che $M = E$. Dato che M è iniettivo, la mappa $0 \to M \to E$ fornisce l'isomorfismo

$$E \simeq M \oplus N$$

dove N è un opportuno sottomodulo di E. Per definizione di somma diretta, N non interseca M e dunque per definizione di estensione essenziale $N = 0$, da cui la tesi.

(2) ⇒ (1) Consideriamo una mappa iniettiva $0 \to M \to E$, dove E è un modulo qualsiasi, e la famiglia F dei sottomoduli di E che non intersecano M. Per il lemma di Zorn, esiste $N \in F$ massimale tale che $N \cap M = 0$. Abbiamo allora una mappa iniettiva sul quoziente

$$0 \to M \to {}^{E}\!/_{N}$$

Per definizione, E/N è un'estensione essenziale di M e dunque $M = E/N$. Di conseguenza, esiste una mappa $\alpha\colon E \to M$ e dunque l'inclusione spezza, mostrando l'iniettività.

Teorema 2.19 *Sia $M \subseteq E$. Sono fatti equivalenti:*

1. *E è un'estensione essenziale massimale di M*
2. *E è un'estensione essenziale di M e E è iniettivo*
3. *E è iniettivo ed è il più piccolo iniettivo che contiene M*

Tale estensione esiste sempre.

Dimostrazione. Preliminarmente, notiamo che l'enunciato ha senso, perché tra due iniettivi che contengono M esiste sempre un contenimento (dalla proprietà universale).

(1) $\Rightarrow$ (2) Per la proposizione precedente, è sufficiente mostrare che E non ammette estensioni essenziali proprie. Se E' è un'estensione essenziale di E, allora E' è un'estensione essenziale di M; per massimalità di E, $E' = E$ e dunque E è iniettivo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sia E' un iniettivo contenuto in E che contiene M. Dato che E' è iniettivo, l'inclusione $0 \to E' \to E$ spezza e dunque

$$E = E' \oplus N$$

per un opportuno sottomodulo N. D'altronde, dato che $M \subseteq E'$, si ha $N \cap M = 0$, mentre avevamo supposto che E fosse un'estensione essenziale di M, da cui un assurdo.

(3) $\Rightarrow$ (1) Per ipotesi, sappiamo che E è il più piccolo iniettivo che contiene M. Utilizzando la proposizione precedente, basta quindi mostrare che tale E è un'estensione essenziale di M. Per il lemma di Zorn, esiste E' un'estensione essenziale massimale di M contenuta in E; questa è iniettiva per la proposizione precedente e dunque per ipotesi contiene E, da cui la tesi.

Per mostrare l'esistenza, basta considerare un'immersione di M in un modulo iniettivo E e prendere l'estensione essenziale massimale di M in E, che esiste per il lemma di Zorn.

Definizione 2.20 *Un modulo E che verifica una delle condizioni equivalenti del teorema precedente si dice guscio o inviluppo iniettivo e lo indicheremo con $E(M)$.*

Corollario 2.21 *Il guscio iniettivo $E(M)$ è unico.*

Dimostrazione. Per abstract nonsense.

Come conseguenza di quanto detto, otteniamo che un R-modulo M ammette una risoluzione iniettiva minimale $E^\bullet$, unica a meno di isomorfismo di complessi. Questa risoluzione si ottiene considerando il guscio iniettivo di M e i conuclei delle mappa indotte ad ogni passo. Inoltre, se $I^\bullet$ è una qualsiasi risoluzione iniettiva di M, allora $E^\bullet$ è isomorfo ad un addendo diretto di $I^\bullet$.

Osservazione 2.22 *Nel caso duale, vedremo che se R è un anello locale noetheriano con massimale $\mathfrak{m}$ e M è finitamente generato, allora M ammette una risoluzione libera minimale $F_\bullet$, unica a meno di isomorfismi e se $P_\bullet$ è una risoluzione proiettiva di M, allora $F_\bullet$ è isomorfo a un addendo diretto di $P_\bullet$.*

2.1.2 Funtori Derivati

Sia T un funtore covariante esatto a destra. Allora esiste la famiglia dei funtori $L_nT(M)$ derivati sinistri, covarianti e definiti come l'omologia di T applicata a una risoluzione proiettiva P di M. È una buona definizione per il teorema del confronto.

Allo stesso modo, se T è controvariante ed esatto a sinistra, esistono i funtori derivati $R_nT(M)$, ottenuto calcolando la coomologia del complesso $T(P)$, dove P è una risoluzione proiettiva di M.

Teorema 2.23 (Successione esatta lunga dei funtori derivati) *Sia T un funtore covariante esatto a destra e consideriamo una successione esatta corta*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} U \to 0$$

Allora esiste una successione esatta lunga

$$\dots \to L_nT(U) \to L_{n-1}T(M) \to L_{n-1}T(N) \to \dots$$

Dimostrazione. Basta applicare il funtore al diagramma ottenuto dal lemma del ferro di cavallo.

Proposizione 2.24 *Siano M, N R moduli e sia $n \in \mathbb{N}$. Sono fatti equivalenti:*

1. projdim $M \leq n$
2. $\mathrm{Ext}^i(M, N) = 0$ *per ogni* $i > n$ *e per ogni modulo* N
3. $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = 0$ *per ogni modulo* N
4. *Ogni n-esima sizigia di M è proiettiva*

Dimostrazione.

(1) ⇒ (2) Basta considerare la risoluzione proiettiva di minima lunghezza e applicare il funtore; la successione così ottenuta è nulla per $i \geq n$.

(2) ⇒ (3) Ovvio.

(3) ⇒ (4) Sia K_n l'n-esima sizigia di una risoluzione proiettiva $P_\bullet$. Vale

$$\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = \mathrm{Ext}^1(K_n, N)$$

e dato che la prima è nulla per ipotesi, lo è anche la seconda. D'altronde, discende dalla definizione che $\mathrm{Ext}^1(K_n, N) = 0$ per ogni N se e solo se K_n è proiettivo.

(4) ⇒ (1) Sia $F_\bullet$ una risoluzione proiettiva di M. Se l'n-esima sizigia è proiettiva, possiamo allora considerare la successione $P_\bullet$ in cui $P_i = F_i$ per $i < n$, $P_n = K_n$ e $P_i = 0$ per $i \geq n{+}1$. In questo modo, otteniamo una risoluzione proiettiva lunga n, da cui la tesi.

Chiaramente, lo stesso vale nel caso duale delle risoluzioni iniettive e possiamo anche dire qualcosa di più notando che

Osservazione 2.25 *Sia R un anello e M un R-modulo. Sono equivalenti:*

- *M è iniettivo*
- $\mathrm{Ext}^1(R/I, M) = 0$ *per ogni ideale I di R*

Infatti, se M è iniettivo è ovvio che gli Ext *si annullino (*$\operatorname{injdim} M = 0$ *e dunque applicando il funtore* Hom *in posizione coomologica* 1 *il modulo è nullo). Supponiamo allora che* $\mathrm{Ext}^1(R/I, M) = 0$ *per ogni ideale. Per il criterio di Baer, basta testare l'iniettività sugli ideali di R, ossia che esiste β come nel diagramma*

$$\begin{tikzcd}
 & M & \\
R \arrow[ur, dashed, "\beta"] & I \arrow[l, "\gamma"] \arrow[u, "\alpha"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Consideriamo la successione esatta corta

$$0 \to I \longrightarrow R \longrightarrow {}^{R}\!/_{I} \to 0$$

Applicando $\mathrm{Hom}(-, M)$*, per ipotesi otteniamo la successione esatta corta*

$$0 \to \mathrm{Hom}(R/I, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(I, M) \to 0$$

Questo significa che ogni mappa $I \to M$ si estende a una mappa $R \to M$ (per la surgettività), da cui la tesi.

Grazie a questa osservazione, il seguente teorema diventa immediato (basta utilizzare le dimostrazioni duali della proposizione precedente):

Proposizione 2.26 *Siano M, N R moduli e sia $n \in \mathbb{N}$. Sono fatti equivalenti:*

1. $\operatorname{injdim} M \leq n$
2. *Ogni n-esima cosizigia di M è iniettiva*
3. $\mathrm{Ext}^i(N, M) = 0$ *per ogni $i > n$ e per ogni modulo N.*
4. $\mathrm{Ext}^{n+1}(N, M) = 0$ *per ogni modulo N*
5. $\mathrm{Ext}^{n+1}(R/I, M) = 0$ *per ogni ideale I*

Come conseguenza di queste due proposizioni, detta $C(R)$ la categoria degli R-moduli, otteniamo le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
\sup_{M \in C(R)} \operatorname{projdim} M &= \sup_{M \in C(R)} \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ext}^n(M, N) \neq 0 \ \forall N\} \\
&= \sup_{N \in C(R)} \operatorname{injdim} N
\end{aligned}$$

Definizione 2.27 *Sia A un anello. Definiamo la dimensione globale come* $\operatorname{globdim}(A) = \sup\{\operatorname{projdim} M \mid M \in C(A)\}$

Notiamo che come conseguenza delle proposizioni, questa coincide anche con il sup delle dimensioni iniettive di un modulo. Per il criterio di Baer, nella forma del punto 5 della proposizione precedente, vale

$$\operatorname{globdim}(A) = \sup\{\operatorname{projdim} A/I \mid I \text{ ideale di } A\}$$

Corollario 2.28 *Sia $n \in \mathbb{N}$. Sono equivalenti:*

1. $\operatorname{projdim} M \leq n$ *per ogni* M
2. $\operatorname{projdim} M \leq n$ *per ogni* M *finitamente generato.*

Dimostrazione. Per quanto appena detto, basta verificare le condizioni sui moduli della forma R/I, che sono moduli finitamente generati.

Proposizione 2.29 *Sia $\varphi\colon R \to S$ un omomorfismo piatto di anelli. Siano M, N R-moduli. Allora*

$$\operatorname{Tor}_i(M,N) \otimes_R S \simeq \operatorname{Tor}_i(M \otimes_R S, N \otimes_R S)$$

Se R è noetheriano e M finitamente generato, lo stesso vale per Ext.

Dimostrazione. Mostriamo che vale per Ext. Sia $F_\bullet$ una risoluzione libera di M; allora

$$\operatorname{Ext}^i(M,N) = H^i(\operatorname{Hom}(F_\bullet, N)) \simeq N^{b_i}$$

dove b_i sono i numeri di Betti. Allora

$$N^{b_i} \otimes_R S \simeq \operatorname{Hom}_S(S, S \otimes N)^{b_i} \simeq \operatorname{Hom}_S(S^{b_i}, S \otimes N) \simeq \operatorname{Hom}(S \otimes_R R^{b_i}, S \otimes N)$$

Di conseguenza

$$\operatorname{Ext}^i(M,N) \otimes S = H^i(\operatorname{Hom}(F_\bullet, N)) \otimes S \simeq H^i(\operatorname{Hom}(S \otimes F_\bullet, S \otimes N))$$

2.2 Sequenze regolari, grado e profondità

Cerchiamo ora di correlare le sequenze regolari con le proprietà omologiche di un modulo M. Intanto, generalizziamo la nozione regolare al caso di un anello noetheriano, senza supporre l'esistenza di una gradazione:

Definizione 2.30 *Sia R un anello, sia M un R-modulo e siano $x_1, \ldots, x_n \in R$. Diciamo che $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ formano una sequenza M-regolare se*

$$x_i \notin Z\left({}^{M}\!\diagup_{(x_1, \ldots, x_{i-1})M} \right)$$

per ogni i e $M/\boldsymbol{x}M \neq 0$. Se vale solo la prima delle due condizioni, si dice weak regolare.

Notiamo che per un elemento $x \in R$, non essere uno zero-divisore significa che la mappa di moltiplicazione

$$\begin{aligned} \varphi_x \colon \; M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto xm \end{aligned}$$

è iniettiva. Dunque una sequenza $\mathbf{x}$ è weak regolare se, detto s il prodotto dei suoi elementi, la mappa φ_s è iniettiva. Se tale mappa non è surgettiva, la sequenza è regolare. Da questa interpretazione deriva immediatamente il buon comportamento delle sequenze regolari per estensioni piatte:

Proposizione 2.31 *Sia $\varphi \colon R \to S$ un omomorfismo di anelli, sia M un R-modulo e sia N un S-modulo R-piatto. Se $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ è una successione weak regolare per M, allora $\varphi(\boldsymbol{x})$ è weak $M \otimes N$-regolare.*

Dimostrazione. Basta notare che la mappa

$$\varphi_{x_1 \dots x_n} \colon M \longrightarrow M$$

è iniettiva per ipotesi e per piattezza rimane iniettiva anche dopo aver tensorizzato per N.

Corollario 2.32 *Sia R un anello noetheriano e sia M un R-modulo finitamente generato. Sia $\boldsymbol{x}$ una sequenza M-regolare. Se $\boldsymbol{x} \subseteq p \in \operatorname{Supp}(M)$, allora $\boldsymbol{x/1} \in pR_p$ è M_p-regolare. Se R è locale con massimale m, $x \subseteq \hat{R}$ è $\hat{M}$-regolare.*

Dimostrazione. Basta notare che questi sono casi particolari del precedente teorema, in quanto completamento e localizzazione sono piatti.

Proposizione 2.33 *Sia $N_2 \to N_1 \to N_0 \to M \to 0$ una successione esatta di R-moduli e sia $\boldsymbol{x}$ una M-sequenza regolare. Allora esiste una successione esatta*

$$N_2/\boldsymbol{x}N_2 \xrightarrow{f_2} N_1/\boldsymbol{x}N_1 \xrightarrow{f_1} N_0/\boldsymbol{x}N_0 \xrightarrow{f_0} M/\boldsymbol{x}M \to 0$$

Dimostrazione. Basta verificare l'enunciato nel caso di un elemento $x \in R$ non zero divisore per M. Notiamo che il tensore $\otimes_R R/(x)$ è esatto a destra e dunque basta mostrare che vale l'uguaglianza tra nucleo e immagine ad ogni livello. Sia $y \in N_1$ tale che $\bar{f}_1(\bar{y}) = 0$. Allora $f_1(y) = xn_0$ per un certo $n_0 \in N_0$. Per esattezza della successione, $f_0(xn_0) = xf_0(n_0) = 0$, da cui $f_0(n_0) = 0$. Dunque esiste $n_1 \in N_1$ tale che $f_1(n_1) = n_0$ e $f_1(y - xn_1) = 0$, ossia $y - xn_1 = f_2(n_2)$, che significa proprio che

$$\overline{y - xn_1} = \bar{y} = \bar{f}_2(\bar{n}_2)$$

da cui la tesi.

Corollario 2.34 *Sia $\cdots \to N_i \to N_{i+1} \to N_{i+2} \to N_{i+2} \to \cdots$ una successione esatta lunga di R-moduli. Sia $\boldsymbol{x}$ una sequenza regolare per ogni N_i. Allora esiste una successione esatta lunga*

$$\cdots \to {}^{N_i}\!/\!{}_{\boldsymbol{x}N_i} \to {}^{N_{i+1}}\!/\!{}_{\boldsymbol{x}N_{i+1}} \to {}^{N_{i+2}}\!/\!{}_{\boldsymbol{x}N_{i+2}} \to \cdots$$

Dalla definizione non è evidente che permutando una sequenza M-regolare questa rimanga tale e in generale questo è falso. In analogia al caso graduato, un tale enunciato vale nel caso di un anello noetheriano locale:

Proposizione 2.35 *Sia R un anello noetheriano locale e sia M un R-modulo finitamente generato. Sia $\boldsymbol{x} = x_1, \dots x_n \subseteq R$ una sequenza M-regolare. Allora per ogni permutazione $\sigma \in S_n$, $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ è regolare.*

Dimostrazione. Dato che S_n è generato dalle trasposizioni di elementi adiacenti, basta mostrare la tesi nel caso di una di queste e per $n = 2$. Supponiamo dunque che x, y sia M-regolare e mostriamo che y, x è M-regolare. Sia $m \in M$ tale che $y \cdot m = 0$. Allora, riducendo modulo xM, otteniamo $y\bar{m} = 0$, ossia $\bar{m} = 0$ per regolarità. Questo significa che $m = xn$ per un certo $n \in M$, ossia $xyn = 0$. Per regolarità di x, $yn = 0$, da cui otteniamo l'uguaglianza di sottomoduli

$$(0 :_M y) = x(0 :_M y)$$

D'altronde, $x \in m$ per regolarità della sequenza e dunque per Nakayama vale $(0 :_M y) = 0$, come voluto.
Rimane da mostrare che x non è un divisore di zero di M/yM. Sia $\bar{m} \in M/yM$ tale che $x\bar{m} = 0$. Allora esiste $n \in M$ tale che $xm = yn$. Questo significa che, modulo xM, $y\bar{n} = 0$ da cui per ipotesi $\bar{n} = 0$. Allora $n = xs$ e dunque $xm = xys$, da cui $x(m - ys) = 0$. Allora $m = ys$ per regolarità di x e dunque $\bar{m} = 0$ in M/yM.

Proposizione 2.36 *Sia $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ una M-sequenza weak regolare. Allora esistono $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{N}$ tali che $\boldsymbol{x}^v = x_1^{v_1}, \dots, x_n^{v_n}$ sia ancora una M-sequenza weak regolare.*

Definizione 2.37 *Sia R un anello noetheriano, sia I un ideale di R e sia M un R-modulo. Una M-sequenza $\boldsymbol{x} = x_1, \dots, x_n$ si dice massimale se massimale per ogni $x_{n+1} \in I$ la sequenza $x_1, \dots, x_{n+1}$ non è M-regolare.*

Osservazione 2.38 *Sia $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \subseteq R$ e sia M un R-modulo. Possiamo costruire il complesso di Koszul $K_\bullet(x)$ da cui otteniamo un complesso $K_\bullet(x) \otimes M$; indichiamo con $H_i(K_\bullet(x), M)$ la sua omologia. Analogamente, possiamo passare al duale $K^\bullet(x) = \mathrm{Hom}(K_\bullet(x), R)$ e tensorizzare; denotiamo con $H^{n-i}(K^\bullet(x), M)$ la coomologia di tale complesso. Allora vale*

$$H_i(K_\bullet(x), M) = H^{n-i}(K^\bullet(x), M)$$

Inoltre, se x è M-regolare, allora $H_\bullet(K_\bullet(x), M) = 0$. Se x è R-regolare, $H_\bullet(K_\bullet(x)) = 0$ e $K_\bullet(x)$ è una risoluzione libera di $R/(x)$.

Dopo aver visto le prime proprietà delle successioni regolari, cerchiamo ora una correlazione con le proprietà omologiche e in particolare con Ext:

Teorema 2.39 (Rees) *Sia R un anello noetheriano e sia M un modulo finitamente generato. Sia I un ideale di R. Allora* $\mathrm{Hom}(R/I, M) = 0$ *se e solo se esiste un elemento $f \in I$ M-regolare.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $\mathrm{Hom}(R/I, M) = 0$ e mostriamo che in queste ipotesi esiste $f \in I$ M-regolare. Supponiamo per assurdo che $I \subseteq Z(M)$: allora I è contenuto in un primo associato p per il lemma di scansamento. Ne segue che esiste una mappa iniettiva $R/p \to M$ e dunque per composizione

$$R/I \to R/p \to M$$

troviamo una mappa non nulla, da cui un assurdo.

Viceversa, sia $f \in I$ M-regolare e consideriamo una mappa $\varphi\colon R/I \to M$; vogliamo mostrare che tale mappa è nulla. Dato che per ipotesi $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, $\varphi(f) = 0$ e dunque

$$0 = \varphi(f) = f \cdot \varphi(1)$$

Per ipotesi, f è regolare e dunque deve valere $\varphi(1) = 0$, ossia la mappa è nulla.

Proposizione 2.40 (Rees) *Sia R un anello e siano M, N R-moduli. Sia $I = \mathrm{Ann}(N)$. Se I contiene un elemento che è M-regolare, allora* $\mathrm{Hom}(N, M) = 0$. *Se inoltre R è noetheriano e M, N sono finitamente generati, allora se* $\mathrm{Hom}(N, M) = 0$ *allora I contiene un elemento M-regolare.*

Dimostrazione. La prima parte segue direttamente dalla proposizione precedente. Verifichiamo la seconda parte. Supponiamo per assurdo che $I \subseteq Z(M)$. Allora I è contenuto in un primo associato p; localizzando per p, pR_p appartiene agli associati di M_p e dunque in particolare al supporto. D'altronde, dato che $I = \mathrm{Ann}(N)$ vale $p \in \mathrm{Supp}(N)$. Costruiamo allora una mappa non nulla. Consideriamo lo spazio vettoriale $N_p \otimes k(p) \simeq k(p)^\alpha$; abbiamo la mappa

$$N \to N/pN \to 0$$

e dunque, tensorizzando,

$$N_p \to N_p/pN_p \simeq k(p)^\alpha \to 0$$

Componendo con una mappa surgettiva $k(p)^\alpha \to k(p)$, otteniamo allora una mappa non nulla

$$N_p \to R_p/pR_p \simeq k(p) \to M_p$$

Di conseguenza $\mathrm{Hom}_{R_p}(N_p, M_p) \neq 0$; d'altronde questo è isomorfo a $(\mathrm{Hom}_R(N, M))_p$ e dunque $\mathrm{Hom}(N, M) \neq 0$, da cui un assurdo.

Lemma 2.41 *Sia R un anello e sia M un R-modulo. Sia $I = \mathrm{Ann}(M)$ e sia $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_h$ una sequenza regolare in I. Allora* $\mathrm{Ext}^h(N, M) \simeq \mathrm{Hom}(N, M/\boldsymbol{x}M)$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su h. Se $h = 0$, è ovvio. Supponiamo $h \geq 1$. Sia $\mathbf{x'} = x_1, \ldots, x_{h-1}$. Per ipotesi induttiva vale

$$\mathrm{Ext}^{h-1}(N, M) \simeq \mathrm{Hom}(N, {}^{M}\!/_{\mathbf{x'}M})$$

e per il lemma di Rees, dato che x_h è regolare, $\mathrm{Ext}^{h-1}(N, M) = 0$. Consideriamo la successione esatta corta indotta dalla moltiplicazione per x_1

$$0 \to M \xrightarrow{x_1} M \to {}^{M}\!/_{x_1 M} \to 0$$

Passando alla successione esatta lunga, otteniamo

$$0 \to \mathrm{Ext}^{h-1}(N, M/x_1 M) \to \mathrm{Ext}^{h}(N, M) \xrightarrow{x_1} \mathrm{Ext}^{h}(N, M)$$

La mappa di moltiplicazione per x_1 tra gli Ext è nulla, in quanto $x_1 \in I = \mathrm{Ann}(M)$. Di conseguenza,

$$\mathrm{Ext}^{h}(N, M) \simeq \mathrm{Ext}^{h-1}(N, M/x_1 M) \simeq \mathrm{Hom}(N, M/\mathbf{x}M)$$

dove l'ultimo isomorfismo si ottiene per ipotesi induttiva.

Proposizione 2.42 *Sia R un anello noetheriano, sia I un ideale di R e sia M un modulo finitamente generato tale che $IM \neq M$. Allora*

$$\mathrm{Ext}^{i}(R/I, M) = 0$$

per ogni $i < h$ se e solo se esistono $f_1, \ldots, f_h \in I$ M-regolari.

Dimostrazione. Per quanto mostrato in precedenza, è ovvio che se esistono $f_1, \ldots, f_h \in I$ M-regolari, allora $\mathrm{Ext}^{i}(R/I, M) = 0$ per ogni $i < h$. Viceversa, supponiamo che $\mathrm{Ext}^{i}(R/I, M) = 0$ per $i < h$. Se $h = 1$, l'enunciato coincide con il teorema di Rees. Supponiamo quindi che $h > 1$ e consideriamo la mappa di moltiplicazione per f_1 e la successione esatta corta indotta:

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot f_1} M \to {}^{M}\!/_{f_1 M} \to 0$$

Passando alla successione esatta lunga dei funtori derivati,

$$0 \to \mathrm{Ext}^{i}(R/I, M) \to \mathrm{Ext}^{i}(R/I, M) \to \mathrm{Ext}^{i}(R/I, M/f_1 M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(R/I, M)$$

si ha per ipotesi che per $i \leq h - 2$ $\mathrm{Ext}^{i}(R/I, M) = 0$ e $\mathrm{Ext}^{i}(R/I, M) = 0$ da cui per ogni $i \leq h - 2$ vale $\mathrm{Ext}^{i}(R/I, M/f_1 M) = 0$. Per ipotesi induttiva, esistono $f_2, \ldots, f_h$ regolari per $M/f_1 M$ e dunque $f_1, \ldots, f_h$ sono M-regolari, come voluto.

Corollario 2.43 *Tutte le sequenze regolari massimali di I hanno la stessa lunghezza.*

Dimostrazione. L'annullarsi di Ext è indipendente da ogni scelta.

Definizione 2.44 *Sia R un anello noetheriano, sia I un suo ideale e sia M un R-modulo finitamente generato. Chiamiamo grado di M rispetto a I il numero*

$$\operatorname{grade}(I, M) = \begin{cases} \min\{h \mid \operatorname{Ext}^h(R/I, M) \neq 0\} & \textit{se } IM \neq M \\ \infty & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione 2.45 *Sia R un anello locale noetheriano con ideale massimale m e sia M un R-modulo finitamente generato. Definiamo la profondità di M come*

$$\operatorname{depth} M = \operatorname{grade}(m, M)$$

Proposizione 2.46 *Sia R noetheriano e siano M, N finitamente generati e I,J ideali di R. Allora:*

1. $\operatorname{grade}(I, M) = \inf\{\operatorname{depth} M_p \mid p \in V(I)\}$
2. $\operatorname{grade}(I, M) = \operatorname{grade}(\sqrt{I}, M)$
3. Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ è una sequenza M-regolare contenuta in I, allora

$$\operatorname{grade}(I/(x)), M/xM) = \operatorname{grade}(I, M) - n$$

Dimostrazione.

1. Chiaramente $\operatorname{grade}(I, M) \leq \operatorname{depth} M_p$ per ogni $p \in V(I)$, in quanto abbiamo visto che la localizzazione si comporta bene con le successioni regolari. Possiamo supporre $M \neq IM$. Sia $\mathbf{x}$ una M-sequenza massimale in I. Allora nel quoziente $M/\mathbf{x}M$ tutti gli elementi di I sono zero-divisori, ossia esiste un primo associato $p \supseteq I$. Di conseguenza pR_p è un primo associato di $M_p/\mathbf{x}M_p$ e dunque $\mathbf{x}$ è una sequenza M_p-massimale in pR_p, da cui l'uguaglianza.
2. Segue dal punto 1, in quanto $V(I) = V(\sqrt{I})$.
3. È sufficiente utilizzare il lemma di Rees. Infatti,

$$\operatorname{grade}(I, M) = \min_i\{\operatorname{Ext}^i(R/I, M) = 0\}$$

e se $x \in I$ è un elemento regolare,

$$\operatorname{Ext}^i(R/I, M) \simeq \operatorname{Ext}^{i-1}(R/I, M/xM)$$

e dunque il grado decresce di 1.

Definizione 2.47 *Sia R un anello noetheriano locale e sia M un R-modulo finitamente generato. Definiamo lo zoccolo di M come*

$$Soc(M) = (0 :_M m) = \operatorname{Hom}(k, M)$$

Indicando con $r(M)$ la dimensione su k di $\operatorname{Ext}^t(k, M)$ dove $\operatorname{depth} M = t$, data una successione M-regolare x si ha

$$r(M) = \dim_k \operatorname{Hom}\left(k, {}^{M}\!\!\diagup_{xM}\right) = \dim_k Soc\left({}^{M}\!\!\diagup_{xM}\right)$$

Definizione 2.48 *Sia R un anello noetheriano locale e sia M un modulo finitamente generato. Definiamo il tipo di M come il numero naturale $r(M)$, ossia la dimensione dello zoccolo.*

Definizione 2.49 *Sia R un anello locale con massimale m e sia k il campo residuo. Una risoluzione proiettiva $(F_\bullet, \varphi)$ di M si dice minimale se il complesso ottenuto tensorizzando per k ha mappe nulle.*

Data una risoluzione proiettiva minimale con M finitamente generato, definiamo $b_i(M) = \dim_k H_i(F_0 \otimes k) = \dim_k \operatorname{Tor}_i(M, k)$. Questi vengono detti numeri di Betti.

Per calcolare la dimensione proiettiva di un modulo basta allora guardare il primo numero di Betti nullo.

Lemma 2.50 *I numeri di Betti coincidono con*

$$b_i(M) = \dim_K \operatorname{Ext}^i(M, k)$$

Dimostrazione. Consideriamo la risoluzione libera minimale

$$F_\bullet \to M \to 0$$

Allora

$$\operatorname{Ext}^i(M, k) = H^i(\operatorname{Hom}(F_\bullet, k))$$

Basta allora mostrare che $\operatorname{Hom}(F_i, k) \simeq H^i(\operatorname{Hom}(F_\bullet, k))$. Applichiamo al complesso $F_\bullet \otimes k$ il funtore $\operatorname{Hom}(\cdot, k)$ e otteniamo

$$\cdots \to \operatorname{Hom}(F_i \otimes k, k) \to \operatorname{Hom}(F_{i+1} \otimes k, k)$$

Dunque

$$\operatorname{Hom}_k(F_i \otimes k, k) \simeq \operatorname{Hom}_R(F_i, \operatorname{Hom}_k(k, k)) \simeq \operatorname{Hom}_R(F_i, k)$$

da cui la tesi.

Proposizione 2.51 *Sia R un anello locale noetheriano e sia M un R-modulo finitamente generato. Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \subseteq m$ è una successione regolare per R e M, allora*

1. $\operatorname{projdim}_R M = \operatorname{projdim}_{R/xR} {}^{M}\!\!\diagup_{xM}$
2. $\operatorname{Ext}^n(M, N) \simeq \operatorname{Ext}^n_{R/xR}(M/xM, N)$ *per ogni* $n \geq 0$
3. $\operatorname{Tor}^R_n(M, N) \simeq \operatorname{Tor}^{R/xR}_n(M/xM, N)$ *per ogni* $n \geq 0$

Dimostrazione. Consideriamo una risoluzione libera minimale di M

$$F_\bullet \to M \to 0$$

e tensorizziamo per R/xR:

$$F_\bullet \otimes {}^{R}\!/_{xR} \to {}^{M}\!/_{xM} \to 0$$

Mostriamo che questa è una risoluzione libera di M/xM come R/xR-modulo. Chiaramente è libera; inoltre è una risoluzione perchè se x è R-regolare, lo è anche per ogni modulo libero della risoluzione. Di conseguenza

$$\operatorname{projdim}_R M \geq \operatorname{projdim}_{R/_{xR}} {}^{M}\!/_{xM}$$

Per l'uguaglianza, notiamo che

$$\operatorname{Tor}_n^R(M,N) = \operatorname{Tor}_n^{R/xR}(M/xM,N)$$

Sia $F_\bullet$ una risoluzione libera di M. Allora

$$F_i \otimes_R N \simeq (F_i \otimes_R R/xR) \otimes_{R/xR} N$$

dunque la risoluzione tensorizzata è la stessa, da cui l'uguaglianza dei Tor. Allora, se k è il campo residuo di R,

$$\begin{aligned} \operatorname{projdim} M &= \sup\{n \mid \operatorname{Tor}_n(M,k) \neq 0\} \\ &= \sup\{n \mid \operatorname{Tor}_n^{R/xR}(M/xM,k) \neq 0\} \\ &= \operatorname{projdim}_{R/xR} M/xM \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo punto, sia $F_\bullet$ una risoluzione libera di M. Vogliamo mostrare che

$$H^i(\operatorname{Hom}(F_\bullet,N)) \simeq H^i(\operatorname{Hom}_{R/xR}(F_\bullet \otimes R/xR, N))$$

Notiamo che

$$\operatorname{Hom}_R(F_i,N) \simeq \operatorname{Hom}_{R/xR}(F_i \otimes_R R/xR, N)$$

da cui la tesi.

Teorema 2.52 (Formula di Auslander-Buchsbaum) *Sia A un anello noetheriano locale e M un modulo finitamente generato di dimensione proiettiva finita. Allora*

$$\operatorname{projdim} M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R$$

Dimostrazione. Sia $F_\bullet$ una risoluzione libera minimale di M. Procediamo per induzione su depth R.

- Se $\operatorname{depth} R = 0$, allora $m \in \operatorname{Ass} R$ e dunque abbiamo una mappa iniettiva

$$0 \to k \to R$$

Chiamiamo C il conucleo di tale mappa e sia n la dimensione proiettiva di M. Passando alla successione esatta lunga (tensorizzando per M)

$$\mathrm{Tor}_{i+1}(C, M) \to \mathrm{Tor}_i(k, M) \to \mathrm{Tor}_i(R, M)$$

Se $i = n$, il primo e l'ultimo termine sono nulli mentre il secondo è non nullo. Questo genera un assurdo e di conseguenza $n = 0$, ossia M è proiettivo. Un modulo proiettivo finitamente generato su un anello locale è libero e dato che $\operatorname{depth} R = \operatorname{depth} R^n$ e la prima è 0, vale $\operatorname{depth} M = 0$.

- Supponiamo che $\operatorname{depth} R > 0$ e procediamo per induzione su $\operatorname{depth} M$.
  - Se $\operatorname{depth} M = 0$, abbiamo una successione esatta corta

    $$0 \to K \to R^t \to M \to 0$$

    e $\operatorname{depth} K = 1$. Infatti, tramite la successione esatta lunghe del fun

    $$\begin{aligned} \operatorname{depth} K &\geq \min\{\operatorname{depth} R^t, \operatorname{depth} M + 1\} \\ \operatorname{depth} M &\geq \min\{\operatorname{depth} K - 1, \operatorname{depth} R^t\} \end{aligned}$$

    La prima relazione ci dice che $\operatorname{depth} K \geq 1$, la seconda che $\operatorname{depth} K \leq 1$. Sappiamo allora che $\operatorname{projdim} M = \operatorname{projdim} K + 1$, $\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} K - 1$ e dunque per ipotesi induttiva la tesi.
  - Supponiamo che $\operatorname{depth} M > 0$. Di conseguenza, $m \notin \operatorname{Ass} M \cup \operatorname{Ass} R$ ed esiste $x \in m$ tale che x è R e M-regolare. Allora

    $$\operatorname{projdim}_R M = \operatorname{projdim}_{R/xR} M/xM$$

    per il lemma e

    $$\operatorname{depth} R = \operatorname{depth} R/xR + 1 \qquad \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} M/xM + 1$$

    da cui la tesi.

Vediamo ora qualche conseguenza diretta della formula. Sia R un anello locale noetheriano con campo residuo k. Se $\operatorname{projdim} k < \infty$, per la formula vale

$$\operatorname{projdim} k + \operatorname{depth} k = \operatorname{depth} R$$

e dato che la seconda è nulla, vale $\operatorname{depth} R = \operatorname{projdim} k$. Di conseguenza, se M è un R-modulo finitamente generato

$$\operatorname{projdim} M = \sup\{i \mid \mathrm{Tor}_i(M, k) \neq 0\} \leq \operatorname{projdim} k$$

e in particolare ha dimensione proiettiva finita. Se R è regolare, la risoluzione di Koszul fornisce una risoluzione libera minimale di k. Allora

$$\operatorname{globdim} R = \operatorname{projdim} k = \operatorname{depth} R$$

D'altronde, per regolarità vale $\operatorname{depth} R = \dim R$ da cui $\operatorname{globdim} R = \dim R$:

Corollario 2.53 *Sia R un anello locale regolare. Allora*

$$\operatorname{globdim} R = \dim R$$

Sia R un anello locale noetheriano e supponiamo che esista un R-modulo M finitamente generato tale che $\operatorname{projdim} M = \dim R$. Per la formula di Auslander-Buchsbaum, vale allora che R è Cohen-Macaulay. Infatti, $\operatorname{depth} R \geq \operatorname{projdim} M = \dim R$ e l'altra disuguaglianza è sempre vera. Inoltre, se R è Cohen-Macaulay ed esiste un modulo M finitamente generato di dimensione proiettiva finita, allora $\operatorname{projdim} M = \dim R$ se e solo se $m \in \operatorname{Ass} M$, perché la formula forza $\operatorname{depth} M = 0$.

2.3 Anelli di Cohen-Macaulay

Teorema 2.54 *Sia (R, m) locale noetheriano e sia $M \neq 0$ un modulo finitamente generato. Allora $\operatorname{depth} M \leq \dim R/p$ per ogni $p \in \operatorname{Ass} M$. Se M è Cohen-Macaulay, vale l'uguaglianza.*

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\dim M = \inf\{\dim R/p \mid p \in \operatorname{Supp} M\} = \inf\{\dim R/p \mid p \in \operatorname{Ass} M\}$$

Dunque la disuguaglianza è immediata:

$$\operatorname{depth} M \leq \dim R/p$$

dove $p \in \operatorname{Ass} M$. Se M è Cohen-Macaulay, vale

$$\operatorname{depth} M \leq \dim R/p \leq \dim M = \operatorname{depth} M$$

da cui l'uguaglianza.

Proposizione 2.55 *Sia R un anello locale noetheriano e sia M Cohen-Macaulay. Allora*

$$\operatorname{grade}(I, M) = \dim M - \dim M/IM$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul grado. Se $\operatorname{grade}(I, M) = 0$, non ci sono elementi regolari per M in I e dunque $I \subseteq \cup \operatorname{Ass} M$. In particolare, esiste $p \in \operatorname{Ass} M$ tale che $I \subseteq p$. Per la proposizione precedente,

$$\dim M = \operatorname{depth} M = \dim R/p$$

se $p \in \operatorname{Ass} M$. Inoltre,

$$\dim M \geq \dim M/IM = \dim {}^{R}\!\diagup_{(0:M/IM)} = \dim {}^{R}\!\diagup_{I+(0:M)}$$

D'altronde, se $p \in \operatorname{Ass} M$, allora $p \supseteq (0:M)$ da cui

$$\dim {}^{R}\!\diagup_{I+(0:M)} \leq \dim R/p$$

Confrontando le relazioni, devono valere tutte le uguaglianze da cui il passo base.
Supponiamo ora che $\operatorname{grade}(I,M) > 0$ e sia $x \in I$ un elemento M-regolare. Allora

$$\operatorname{grade}(I/(x), M/xM) = \operatorname{grade}(I, M/xM) = \operatorname{grade}(I,M) - 1$$

Inoltre, M/xM è Cohen-Macaulay perché

$$\operatorname{depth} M/xM = \operatorname{depth} M - 1 \qquad \dim M/xM = \dim M - 1$$

Per ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}\operatorname{grade}(I,M) - 1 &= \operatorname{grade}(I/(x), M/xM) \\ &= \dim M/xM - \dim M/IM \\ &= \dim M - 1 - \dim M/IM\end{aligned}$$

da cui la tesi.

Proposizione 2.56 *Sia R un anello locale noetheriano e sia $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n \subseteq m$. Allora $\boldsymbol{x}$ è una sequenza M-regolare se e solo se* $\dim M/xM = \dim M - n$ *se e solo se $x_1, \ldots, x_n$ è parte di un sistema di parametri.*

Dimostrazione. Sia I l'ideale generato da x. Questa è M-regolare se e solo se $\operatorname{grade}(I,M) = n = \dim M - \dim M/IM$ (Koszul).

Osservazione 2.57 *La proprietà di essere Cohen-Macaulay si comporta bene sulle estensioni piatte: queste infatti conservano la profondità (abbiamo già visto che le successioni regolari si comportano bene) e sappiamo che se (R,m) è un anello locale noetheriano e M è un R-modulo finitamente generato, allora*

$$\dim M = \dim \hat{M} \qquad \operatorname{depth} \hat{M} = \operatorname{depth} M$$

In particolare, M è Cohen-Macaulay se e solo se $\hat{M}$ è Cohen-Macaulay.

Definizione 2.58 *Sia R è un anello noetheriano e M un modulo finitamente generato. M è Cohen-Macaulay se e solo se M_m è Cohen-Macaulay per ogni $m \in \operatorname{Spec} M(R) \cap \operatorname{Supp} M$.*

Teorema 2.59 *Sia R un anello noetheriano e sia M un R-modulo finitamente generato. Sia $S = R[x_1, \ldots, x_n]$ o $S = R[[x_1, \ldots, x_n]]$. Allora $M \otimes_R S$ è CM se e solo se M è Cohen-Macaulay.*

Dimostrazione. Basta notare che in entrambi i casi si tratta di estensioni piatte.

Proposizione 2.60 *Sia R noetheriano una k-algebra finitamente generata. Sia $k \subseteq K$ un'estensione di campi. Allora R è Cohen-Macaulay se e solo se $R \otimes_k K$ è Cohen-Macaulay.*

Dimostrazione. Anche in questo caso, si tratta di estensioni piatte.

Proposizione 2.61 *Sia R un anello Cohen-Macaulay e sia $I \subsetneq R$ un ideale. Allora*

$$\operatorname{grade} I = \operatorname{ht} I$$

Se R è anche locale, vale

$$\operatorname{ht}(I) + \dim R/I = \dim R$$

Dimostrazione. Notiamo che

$$\operatorname{ht} I = \min\{\dim R_p \mid p \in V(I)\} \quad \operatorname{grade}(I, R) = \min\{\operatorname{depth} R_p \mid p \in V(I)\}$$

Per definizione, R_p è Cohen-Macaulay per ogni $p \in \operatorname{Spec}(R)$ e dunque $\operatorname{depth} R_p = \dim R_p$, da cui $\operatorname{ht}(I) = \operatorname{grade}(I, R)$. A questo punto basta notare che

$$\operatorname{ht}(I) = \operatorname{grade}(I, R) = \dim R - \dim R/I$$

per la proposizione dimostrata precedentemente.

2.4 Anelli universalmente catenari

Definizione 2.62 *Sia R un anello noetheriano. R si dice catenario se per ogni coppia di ideali primi $p' \subseteq p$ tutte le catene massimali tra p e p' hanno la stessa lunghezza.*

Definizione 2.63 *Sia R un anello noetheriano. R si dice universalmente catenario se ogni R-algebra finitamente generata è catenaria.*

Teorema 2.64 *Se R è noetheriano e $I \subseteq R$ è un ideale, vale $\operatorname{grade}(I) \leq \operatorname{ht}(I)$ e $\operatorname{ht}(I) + \dim R/I \leq \dim R$.*

Teorema 2.65 (Ratliff) *Sia (R, m) dominio locale e catenario. Allora*

$$\operatorname{ht} p + \dim R/p = \dim R$$

Il viceversa vale se R è noetheriano.

Teorema 2.66 *Sia R Cohen-Macaulay. Allora R è universalmente catenario.*

Dimostrazione. Sia S una R-algebra finitamente generata, allora

$$S = R[x_1, \ldots, x_n]/I$$

ossia è una immagine omomorfa di $R[x_1, \ldots, x_n]$. Basta allora mostrare che $R[x_1, \ldots, x_n]$ è catenario per corrispondenza di primi. D'altronde, R è Cohen-Macaulay se e solo se $R[x_1, \ldots, x_n]$ è Cohen-Macaulay. Basta allora mostrare che un anello di Cohen-Macaulay è catenario. Siano $p \subseteq q$ due primi in $\operatorname{Spec} R$. Allora R_q è locale e Cohen-Macaulay e dunque

$$\operatorname{ht} q = \dim R_q = \operatorname{ht} pR_q + \dim R_q/pR_q = \operatorname{ht} p + \operatorname{ht} q/p$$

Basta allora procedere per induzione su $\operatorname{ht} q/p$ per ottenere la tesi.

Teorema 2.67 *Se R è locale, noetheriano e completo allora R è universalmente catenario.*

2.5 Grado di Rees

Definizione 2.68 (Grado di Rees) *Sia R un anello e sia M un R-modulo. Definiamo il grado di Rees come*

$$\widetilde{\operatorname{grade}} M = \min\{i \mid \operatorname{Ext}^i(M, R) \neq 0\}$$

Notiamo che, per definizione,

$$\widetilde{\operatorname{grade}} R/I = \operatorname{grade}(I, R)$$

Analogamente, vale

$$\widetilde{\operatorname{grade}} M = \operatorname{grade}(\operatorname{Ann}(M), R)$$

Inoltre, vale sempre che $\widetilde{\operatorname{grade}} M \leq \operatorname{projdim} M$.

Definizione 2.69 *Sia R un anello noetheriano e sia M un R-modulo finitamente generato. Se $\widetilde{\operatorname{grade}} M = \operatorname{projdim} M$, M si dice perfetto.*

Proposizione 2.70 *Sia R un anello noetheriano, sia M un R-modulo perfetto e finitamente generato. Dato $p \in \operatorname{Spec} M$, sono equivalenti:*

1. $p \in \operatorname{Ass} M$
2. $\operatorname{depth} R_p = \widetilde{\operatorname{grade}} M$

Dimostrazione. Notiamo preliminarmente che vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$\widetilde{\operatorname{grade}} M \leq \widetilde{\operatorname{grade}} M_p \leq \operatorname{projdim} M_p \leq \operatorname{projdim} M$$

L'ultima disuguaglianza è ovvia, perché la localizzazione di un modulo proiettivo è proiettiva e la localizzazione è un funtore esatto. La disuguaglianza centrale discende direttamente dalla definizione di $\widetilde{\operatorname{grade}}$, come notato sopra. Per la prima disuguaglianza, basta ricordare che la localizzazione passa dentro Hom. Di conseguenza possiamo supporre che R sia locale.
Dato che per ipotesi M è perfetto, dalla catena di disuguaglianze sopra vale che M_p è perfetto per ogni $p \in \operatorname{Supp} M$ e $\widetilde{\operatorname{grade}} M = \widetilde{\operatorname{grade}} M_p$. Notiamo che, dato che siamo in un anello locale noetheriano e per ipotesi $\operatorname{projdim} M < \infty$, vale la formula di Auslander-Buchsbaum. Di conseguenza $\operatorname{depth} M_p = 0$ se e solo se $\operatorname{depth} R_p = \operatorname{projdim} M_p = \widetilde{\operatorname{grade}} M_p$. D'altronde, se $\operatorname{depth} M_p = 0$, $pA_p \in \operatorname{Ass} M_p$ e dunque la tesi.

Proposizione 2.71 *Sia R un anello noetheriano e sia M un R-modulo perfetto. Allora* $\operatorname{grade}(p, R) = \widetilde{\operatorname{grade}} M$ *per ogni* $p \in \operatorname{Ass} M$.

Dimostrazione. Chiaramente vale $\operatorname{grade}(p, R) \leq \operatorname{depth} R_p = \widetilde{\operatorname{grade}} M$ per la proposizione precedente. Viceversa, sappiamo che $p \supseteq (0 : M)$ (i primi associati sono contenuti nel supporto di un modulo) e dunque $\operatorname{grade}(p, R) \geq \operatorname{grade}((0 : M), R) = \widetilde{\operatorname{grade}}(M)$, da cui la tesi.

Teorema 2.72 *Sia R un anello di Cohen-Macaulay e sia M un modulo finitamente generato di dimensione proiettiva finita. Se M è perfetto, M è Cohen-Macaulay. Il viceversa vale se R è locale.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che M sia prefetto e sia $p \in \operatorname{Supp} M$ un massimale di R. Per la proposizione sopra, M_p è perfetto se e solo se M_p è Cohen-Macaulay su R_p. Dunque M_p è Cohen-Macaulay per ogni $p \in \operatorname{Supp} M$ e dunque è Cohen-Macaulay. Viceversa, supponiamo che M sia Cohen-Macaulay su un anello locale R Cohen-Macaulay. Per la formula di Auslander-Buchsbaum, vale

$$\operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R - \operatorname{projdim} M = \dim R - \operatorname{projdim} M$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}
\dim M &= \dim R/(0 : M) \\
&= \dim R - \operatorname{ht}(0 : M) \\
&= \dim R - \operatorname{grade}((0 : M), R) \\
&= \dim R - \widetilde{\operatorname{grade}} M
\end{aligned}$$

Dato che M è Cohen-Macaulay, $\dim M = \operatorname{depth} M$ e dunque $\operatorname{projdim} M = \operatorname{grade} M$, da cui la tesi.

Definizione 2.73 *Sia R un anello noetheriano e sia I un ideale di R. I si dice unmixed se ogni primo associato a I è un primo minimale.*

Teorema 2.74 *Sia R un anello noetheriano. Allora R è Cohen-Macaulay se e solo se ogni ideale generato da $\operatorname{ht} I$ elementi è unmixed.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che R sia Cohen-Macaulay e sia $I = (x_1, \dots, x_n)$. Siano $p, q \in \operatorname{Ass} R/I$ con $p \subseteq q$. Vogliamo mostrare che $p = q$. Sia m un massimale che contiene q e localizziamo per m. Allora R_m è Cohen-Macaulay e pR_m e qR_m sono ancora associati. Mostriamo che R_m/IR_m è Cohen-Macaulay; basta mostrare che $x_1, \dots, x_n$ è regolare. Questo segue dal fatto che

$$\dim R_m/IR_m = \dim R_m - \operatorname{ht} IR_m = \dim R_m - n$$

Dato che R_m/IR_m è Cohen-Macaulay, la sua dimensione è uguale a quella di R_m/p_m un qualsiasi primo associato p_m, ossia

$$\dim R_m/qR_m = \operatorname{depth} R_m/IR_m = \dim R/pR_m$$

da cui una implicazione.
Viceversa, supponiamo che ogni ideale I generato da $\operatorname{ht} I$ elementi sia unmixed. Mostriamo che $\operatorname{ht} I = \operatorname{grade}(I, R)$. Sia $I \subseteq R$ un ideale di altezza n generato da n elementi. Sappiamo che esistono $x_1, \dots, x_n \in I$ tali che $\operatorname{ht}(x_1, \dots, x_i) = i$ per ogni i con $x_i \notin \operatorname{Min}(x_1, \dots, x_{i-1})$. Per ipotesi di unmixedness, $x_{i+1} \notin p$ per ogni $p \in \operatorname{Ass}(R/(x_1, \dots, x_i))$ e dunque è una successione regolare. Dunque $x_1, \dots, x_n$ è R-regolare da cui $\operatorname{ht} I \geq \operatorname{grade}(I, R)$; l'altra disuguaglianza è sempre vera. Passando alle localizzazioni per i massimali m si verifica la tesi; infatti

$$\operatorname{depth} R_m = \operatorname{ht}(mR_m) = \dim R_m$$

2.6 Caso graduato

Nel caso graduato, la categoria dei moduli graduati su un anello graduato ha abbastanza iniettivi e proiettivi. Se abbiamo M, N graduati positivamente, possiamo definire una struttura graduata sul tensore

$$(M \otimes N)_i = \oplus_{j+k=i} M_j \otimes N_k$$

e dunque possiamo definire anche in questo caso i moduli Tor

$$\operatorname{Tor}_i(M, N) = \oplus_n \operatorname{Tor}_i(M, N)_n$$

Se R è *-locale con massimale m e noetheriano, allora possiamo trovare una risoluzione libera graduata minimale. Ogni modulo della risoluzione possiamo scriverla come

$$F_i = \oplus_{n \geq 0} R(-n)^{\beta_{in}}$$

e $\beta_i = \sum \beta_{ij}$, dove i $\beta_{ij} = \dim_k \operatorname{Tor}_i(M,k)_j$. Infatti, tensorizzando per k la risoluzione libera minimale,

$$\operatorname{Tor}_i(M,k) = F_i \otimes k = \oplus (R(-n) \otimes k)^{\beta_{ij}} = \oplus k(-n)^{\beta_{in}}$$

In particolare,

$$\dim \operatorname{Tor}_i(M,k)_j = \beta_{ij}$$

Con $\operatorname{Hom}(M,N)$, possiamo fare altrettanto. Infatti

$$^* \operatorname{Hom}(M,N) = \oplus_i \operatorname{Hom}_i(M,N) = \oplus \{\operatorname{Hom}(M(-i),N)\}$$

Otteniamo allora gli $^* \operatorname{Ext}$.

Consideriamo allora una R-algebra positivamente graduata e noetheriana su un campo k con massimale omogeneo m. Se M è graduato finitamente generato con $\operatorname{projdim} M < \infty$, vale l'analogo della formula di Auslander-Buchsbaum

$$\operatorname{projdim} M + \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} R$$

Osservazione 2.75 *Sia R un anello graduato noetheriano e sia I un ideale omogeneo tale che R/I sia Cohen-Macaulay, ossia* $\operatorname{depth} R/I = \dim R/I$*. Allora*

$$\operatorname{projdim} R/I = \dim R - \dim R/I$$

Dunque, negli anelli di polinomi, per testare se R/I è Cohen-Macaulay basta disporre di una risoluzione per testare dimensione e dimensione proiettiva.

Sia $\varphi\colon F \to G$ con $F = \oplus A(a_i)$ e $G = \oplus A(c_j)$ e φ omogenea di grado 0. Allora φ è individuata da una matrice $s \times r$ $M = (f_{ij})$. Gli f_{ij} sono omogenei con $\deg f_{ij} = c_i - a_j$ e tutti i minori di M sono omogenei. Per esempio, se $A = k[x,y]$, consideriamo la mappa

$$\begin{array}{ccc} A(-2) \oplus A(3) & \longrightarrow & A(4) \oplus A(-7) \\ e_1 & \longmapsto & (x^6, y^9) \\ e_2 & \longmapsto & (y, x^4) \end{array}$$

Questa ha grado 0 e

$$c_1 - a_1 = 6 \qquad c_2 - a_1 = 9 c_2 - a_2 = 4 \qquad c_1 - a_2 = 1$$

ed effettivamente tutti i minori sono omogenei.

2.7 Complesso di Koszul

Siano $f_1, \dots, f_t$ omogenei in $k[x_1, \dots, x_n]$ e sia $L = R^t$. Possiamo definire l'algebra tensoriale

$$T(L) = \oplus_{i \geq 0} L^{\otimes i}$$

che è un anello graduato, e di conseguenza l'algebra esterna

$$\Lambda(L) = {T(L)}\diagup{\langle l \otimes l \mid l \in L \rangle}$$

che è un'R algebra graduata, associativa ma non commutativa. In particolare, $\Lambda L = \oplus_{i=0}^{t} R^{\binom{t}{i}}$.

Sia A un anello commutativo e siano $x_1, \dots, x_n$ elementi di A. Il complesso di Koszul

$$K_\bullet(x_1, \dots, x_n)$$

è l'algebra $\oplus_{i=0}^{n} \Lambda^i A^n$ con $\delta(e_i) = x_i$.

Example 2.2. Consideriamo $f_1 = x^2$ e $f_2 = y^3$ in $A = k[x, y]$. Costruiamo il complesso di Koszul.

$$0 \to \Lambda^2 L \to \Lambda^1 L \to \Lambda^0 L \to 0$$

Con mappe $e_1 \wedge e_2 \to x^2 e_2 - y^3 e_1$ e $e_1 \to x^2$, $e_2 \to y^3$. Allora, detto $H_i = H_i(K_\bullet(f_1, f_2), M)$, si ha

$$H_0 = {A}\diagup{(x^2, y^3)} \qquad H_1 = 0 \qquad H_2 = 0$$

come ci aspettavamo, perché questa è una sequenza regolare.

Example 2.3. Se consideriamo invece $f_1 = x^2$ e $f_2 = xy$,

$$H_0 = {A}\diagup{(x^2, xy)} \qquad H_1 \neq 0 \qquad H_2 = 0$$

Non è un caso; se una sequenza non è regolare, fallisce sempre l'H_1.

Il complesso di Koszul può anche essere graduato.

Osservazione 2.76 *Sia $I = (x_1, \dots, x_n) \in A$ e sia M un A-modulo. Allora*

$$H_0(x_1, \dots, x_n, M) \simeq {M}\diagup{IM} \qquad H_n(x_1, \dots, x_n, M) \simeq (0 :_M I)$$

Sia $M = R/I$ Cohen-Macaulay con I omogeneo Calcoliamo $\mathrm{Tor}_h^R(R/I, k)$. Possiamo assumere che $|k| = \infty$. Allora per il lemma di scansamento esistono $l_1, \dots, l_d \in R_1$ R e R/I regolari. Allora

$$\mathrm{Tor}_k(R/I, k) = \mathrm{Tor}_k(S/IS, k)$$

dove $S = R/(l_1, \dots, l_d)$. Consideriamo allora la risoluzione di Koszul di k con $k \simeq S/(x_1, \dots, x_{n-d})$. Tramite questa,

$$\mathrm{Tor}_h(S/IS, k) = (0 :_{S/IS} (x_1, \dots, x_n))(-h)$$

Questo è sicuramente non nullo, perché essendo artiniano le componenti omogenee di S/IS sono finite

Sia M un R-modulo graduato finitamente generato. Consideriamo la risoluzione minimale con i moduli liberi

$$F_i = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} R(-j)^{\beta_{hk}}$$

Sappiamo che

$$HP_M(z) = \frac{\sum_{i=0}^{h} (-1)^i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_{ij} Z^j}{(1-z)^n}$$

In particolare, la somma a segni alterni dei numeri di Betti sono nulli se $\dim M < n$.

Teorema 2.77 (Serre) *Sia $M = R/I$ con I di codimensione 2. Se R/I è Gorenstein, allora I è intersezione completa.*

Dimostrazione. Dato che Gorenstein implica Cohen-Macaulay, $\operatorname{depth} R/I = \dim R/I = d$ e dunque $n - d = 2$. In particolare, la risoluzione graduata libera minimale di R/I è lunga 2. Vogliamo mostrare che I è generato da due elementi regolari.

$$0 \to R^b \to R^a \to R \to R/I \to 0$$

Dato che R/I è di tipo 1, $b = 1$ e dunque $a = 2$. Di conseguenza abbiamo trovato f, g che generano I. Mostriamo che generano una successione regolare. Basta mostrare che se $R^b \simeq R(-c)$, $c = \deg f + \deg g$. Sappiamo che

$$\mathrm{HP}_{R/I}(z) = \frac{1 - z^{\deg f} - z^{\deg g} + z^c}{(1-z)^n}$$

e con i conti si vede.

Example 2.4. I numeri di Betti dipendono dalla caratteristica del campo base. Consideriamo per esempio l'ideale I generato da tutti i monomi di grado 3 squarefree in $k[x_1, \dots, x_6] = R$. Se $\operatorname{char} k \neq 2$, i numeri di Betti sono $6, 15, 10$ con shift $5, 4, 3$. Se $\operatorname{char} K = 2$, allora i numeri di Betti sono $1, (1, 6), 15, 10$ con shift $-6, (-6, -5), -4, -3$.

Consideriamo $M = R/I$ e siano $F_i = \oplus_{\lambda=1}^{\beta_i} R(-d_{ij})$ e $F_{i-1} = \oplus_{\lambda=1}^{\beta_{i-1}} R(-d_{i-1,j})$. Allora per ogni $j = 1, \dots, \beta_i$ esiste q tale che $d_{i-1,q} < d_{ij}$. Infatti, il grado in R dell'elemento nella matrice associata a φ_i in posizione (q, j) è $-d_{i-1,q} + d_{ij}$. Se vale $d_{i-1,q} = d_{ij}$ allora la matrice deve avere una colonna di zeri, in quanto devono avere elementi in m di grado 0. Questo va contro la minimalità della risoluzione, da cui un assurdo.

Sia ora $m_i(M)$ il minimo degli indici j tali che $\beta_{ij}(M) \neq 0$. Allora F_{i-1} non è zero in grado $m_i(M)-1$, da cui $m_{i-1}(M) \leq m_i(M)-1$.

Se $M = R/I$ è Cohen-Macaulay, per ogni $i < h = n-d$ e per ogni j esiste q tale che $d_{i+1,q} > d_{ij}$. Notiamo che $\operatorname{grade}(I,R) = n-d$. Infatti, prendiamo $l_1, \dots, l_d \in R_1$ che siano R e R/I regolari e sia $S = R/(l_1, \dots, l_d)$. Allora S/IS è una riduzione artiniana di R/I. Possiamo pensare $S \simeq k[x_1, \dots, x_{n-d}]$ e $x_1, \dots, x_{n-d}$ sono S regolari e lo sono anche delle loro potenze $x_1^{a_1}, \dots, x_{n-d}^{a_{n-d}}$. Chiamiamo queste $f_1, \dots, f_{n-d}$. Allora

$$l_1, \dots, l_d, f_1, \dots, f_{n-d}$$

sono una R-successione. Dunque $\operatorname{grade}(I,R) \geq n-d$. L'altra disuguaglianza vale sempre, da cui l'uguaglianza. Consideriamo la risoluzione libera minimale e tronchiamola. Applichiamo Hom; l'informazione dimostrata sul grado implica poi che l'omologia del complesso così ottenuto è 0 per $i < h$. Dunque è una risoluzione di $\operatorname{Ext}^h(R/I,R)$ e le mappe sono date dalle trasposte delle matrici precedenti.

Sia M un modulo fg. Definiamo

$$t_i(M) = \max\{j \mid \beta_{ij}(M) \neq 0\}$$

Se t_i è il massimo grado di un generatore minimale di F_i, allora $-t_i$ è il minimo grado in cui $\operatorname{Hom}(F_i,R) \neq 0$. Dunque $t_i > t_{i-1}$ per ogni $i \leq n - \dim M$.

Si può costruire una tabella con ascissa posizione omologica e ordinata grado dello shift dei numeri di Betti. Vale che $m_i(M) \geq m_{i-1}(M)+1 \geq m_0(M)+i$. Dunque si possono saltare alcune righe (che sarebbero nulle).

Detto $r = \max\{i-j \mid \beta_{i,j} \neq 0\}$, $r = reg(M)$ è la regolarità di Castelnuovo-Mumford di M.

Example 2.5. Sia C la curva razionale normale di $\mathbb{P}^n$ e sia I l'ideale di definizione. Cerchiamo di capire se R/I è CM e come è fatta una risoluzione.

$$\begin{cases} t^n \\ t^{n-1}u \\ \vdots \\ u^n \end{cases}$$

I è generato dai minori 2×2 della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Allora

$$\operatorname{HP}_{R/I}(z) = \frac{1+(n-1)z}{(1-z)^2}$$

Inoltre,

$$I + (x_0, x_n) = (x_1 x_2 \dots x_n)^2 + (x_0, x_n)$$

La serie di Hilber risulta essere

$$\mathrm{HP}_{R/I+(x_0,x_n)} = 1 + (n-1)z$$

da cui M è Cohen-Macaulay. Vediamo come è fatta la risoluzione libera minimale graduata di R/I. Notiamo che la riduzione artiniana $B = R/(I + (x_0, x_n))$ è tale che $B = k \oplus B_1$ (dalla serie di Hilbert) e dunque $(0 : B_1) = B_1$. Di conseguenza il grado più alto nello zoccolo di B è 1.

Corollario 2.78 *Sia $A = R/I$ Cohen-Macaulay e siano $r = m_0(I) = \min\{d \mid I_d \neq 0\} = indeg(A)$ e $s = \min\{\deg a \mid a \in (0 : B_1)\}$ dove B è una riduzione artiniana di A. Allora*

$$r + i - 1 \leq d_{ij} \leq i + s$$

Osservazione 2.79 *Nel caso $r = 2$ e $s = 1$, $d_{ij} = i + 1$. Dunque nell'esempio,*

$$0 \to R^{b_{n-1}}(-n) \to \cdots \to R^{b_2}(-3) \to R^{\binom{n}{2}}(-2) \to R \to R/I \to 0$$

Dato che $\sum(-1)^i b_i = 0$, sappiamo anche che $b_j = j\binom{n}{j+1}$.

2.8 Anelli di Gorenstein

Definizione 2.80 *Un anello locale regolare si dice di Gorenstein se ha dimensione iniettiva finita, ossia*

$$\operatorname{injdim}_R R < \infty$$

Vale che un anello locale regolare è Gorenstein se e solo se è Cohen-Macaulay di tipo 1.

Teorema 2.81 *Sia R, m un anello locale noetheriano e sia M finitamente generato. Se* $\operatorname{injdim} M < \infty$, *allora* $\dim M \leq \operatorname{injdim} M = \operatorname{depth} M$.

Corollario 2.82 *Se R è Gorenstein, allora è Cohen-Macaulay.*

Sia R un anello e consideriamo un ideale primo p di R. Vale che il guscio iniettivo $E(R/p)$ è indecomponibile (non si scrive come somma diretta di sottomoduli) e due primi sono uguali se e solo se i loro gusci iniettivi sono uguali. Inoltre, $\operatorname{Ass} M = \operatorname{Ass} E(M)$ e

$$E^i(M) = \oplus_{p \in \operatorname{Spec} R} E(R/p)^{\mu_i}$$

Definizione 2.83 *Sia (R, m, k) un anello locale e sia M un modulo finitamente generato. Definiamo il duale di Matlis come*

$$M' = \mathrm{Hom}_R(M, E)$$

dove E è il guscio iniettivo di k.

Se N è un R-modulo di lunghezza finita, N' ha lunghezza finita e $\lambda(N) = \lambda(N')$. Inoltre, esiste un isomorfismo canonico tra N e N'' e $r(N) = \mu(N')$ e $\mu(N) = r(N')$.

Teorema 2.84 (Dualità di Matlis) *Sia (R, m, k) locale noetheriano e completo. Consideriamo la categoria dei moduli artiniani $A(R)$ e dei moduli finitamente generati $F(R)$ su R. Il funtore controvariante dato dal duale di Matlis*

$$\begin{aligned} T\colon\ C(R) &\longrightarrow C(R) \\ M &\longmapsto \mathrm{Hom}_R(M, E) \end{aligned}$$

è esatto e $T(R) = E$, $T(E) = R$, se M è finitamente generato $T(M) \in A(R)$ e se M è artiniano $T(M) \in F(R)$.

Definizione 2.85 *Sia R un anello locale con massimale m e sia M un R-modulo. Definiamo*

$$\Gamma_m(M) = \{x \in M \mid \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m^k x = 0\}$$

Proposizione 2.86 *Γ_m è un funtore R-lineare, additivo, covariante, esatto a sinistra.*

Dunque possiamo calcolarne i funtori derivati $R^i\Gamma_m(\cdot)$ che indichiamo con $H^i_m(\cdot)$. Ovviamente $H^i_m(G) = 0$ per ogni $i > 0$ se e solo se G è iniettivo.

Teorema 2.87 (Grothendieck's Vanishing Theorem) *Sia R un anello noetheriano e sia M un R-modulo finitamente generato. Allora $H^i_m(M) = 0$ per ogni $i < \operatorname{depth} M$ e per ogni $i > \dim M$. Inoltre, $H_m^{\operatorname{depth} M}(M) \neq 0$ e $H_m^{\dim M}(M) \neq 0$.*

Teorema 2.88 (Dualità di Grothendieck) *Sia R, m, k un anello locale noetheriano completo. Sia $d = \dim R$ e sia M un modulo finitamente generato. Allora*

$$H^i_m(M) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^{d-1}(M, \omega_R), E$$

e

$$\mathrm{Ext}^i(M, \omega_R) \simeq \mathrm{Hom}_R(H_m^{d-1}(M), E)$$

dove ω_R è il modulo canonico di R.

Un anello come quello della dualità è immagine omomorfa di un anello regolare, che in particolare è Gorenstein. Il modulo canonico ω_R è un R-modulo

CM massimale (ossia tale che la sua dimensione è uguale a quella dell'anello) di tipo 1 con dimensione iniettiva finita.

2.9 Anelli Regolari

Definizione 2.89 *Un anello locale regolare è un anello noetheriano locale tale che*
$$\mu(m) = \mathrm{ht}(m) = \dim R$$

Dato che
$$\operatorname{depth} R \leq \dim R \leq \mu(m)$$
negli anelli regolari si hanno le uguaglianze e dunque gli anelli locali regolari sono Cohen-Macaulay.

Proposizione 2.90 *Se R è regolare, allora è un dominio.*

Questo dimostra anche che Cohen-Macaulay non implica regolare. Ma vale di più: infatti
$$K[[t^2, t^3]] \subseteq K[[t]]$$
sono entrambi domini, Cohen-Macaulay ma $\mathrm{ht}(t^2, t^3) = 2$ e dunque non è regolare.

Definizione 2.91 *Se (R, m) è regolare di dimensione n e $m = (x_1, \ldots, x_n)$, allora $x_1, \ldots, x_n$ si dice sistema di parametri regolare.*

Osservazione 2.92 *$x_1, \ldots, x_n$ è un sistema di parametri regolare se e solo se $x_1, \ldots, x_n$ sono linearmente indipendenti in m/m^2. In particolare, i quozienti per una parte di un sistema di parametri regolare sono ancora regolari. Infatti, se i quozienti sono regolari, se $x_{i+1}, \ldots, x_n$ sono un sistema di parametri regolare per $R/(x_1, \ldots, x_i)$, allora $x_1, \ldots, x_n$ è un sistema di parametri per R (sono nel numero giusto e generano il massimale).*

Proposizione 2.93 *Sia R un anello locale regolare e sia I un ideale. I generato da un sottoinsieme di un sistema regolare di parametri se e solo se R/I è regolare.*

Proposizione 2.94 *Sia R noetheriano locale e sia $m = (x_1, \ldots, x_n)$ un sistema di generatori minimale. Sono equivalenti:*

1. *R regolare*
2. *$x_1, \ldots, x_n$ è una R-sequenza*

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2) Una R-sequenza è parte di un sistema di parametri e dunque $\dim R \geq n$

(2) $\Rightarrow$ (1) Se $I = (x_1, \dots, x_i)$ è ancora regolare e dunque R/I è un dominio. In particolare, x_{i+1} è $R/(x_1, \dots, x-i)$-regolare.

Proposizione 2.95 *Siano $x_1, \dots, x_r$ elementi R-regolari e sia I l'ideale da loro generato. Allora esiste una mappa*

$$\begin{array}{ccc} R/I[y_1, \dots, y_n] & \longrightarrow & G_I(R) \\ y_i & \longmapsto & \bar{x}_i \end{array}$$

Proposizione 2.96 *R è regolare se e solo se $\hat{R}$ è regolare*

Proposizione 2.97 (Auslander-Buchsbaum-Nagata) *Sia R un anello locale regolare. Allora R è un UFD.*

Sia $R = k[R_1]$ una k-algebra graduata noetheriana standard con massimale m. Allora $G_{mR_m}(R_m)$ è isomorfo a R. Se R è regolare, allora R_m è regolare ed è isomorfo a un anello di polinomi.

Teorema 2.98 (di struttura di Cohen) *Sia R un anello locale noetheriano completo. Allora*

$$R \simeq {R_0[[x_1, \dots, x_n]]}\big/{I}$$

con R_0 campo o R_0 è regolare.

Teorema 2.99 *Sia R un anello noetheriano locale e completo. Allora R è universalmente catenario.*

Dimostrazione. Per il teorema di struttura di Cohen, R è immagine omomorfa di $R_0[[x_1, \dots, x_n]]$, che è un anello regolare (R_0 è regolare). Ma regolare implica Cohen-Macaulay e sappiamo che questo è universalmente catenario.

Sia (R, m) locale di Cohen-Macaulay. Ci chiediamo cosa succede se passiamo al graduato associato.

Proposizione 2.100 (Abhyankar) *Se $\operatorname{depth} R = \dim R = d$, allora $\mu(R) \leq e(R) + d - 1$, dove $e(R)$ è il coefficiente direttivo del polinomio di Hilbert del graduato.*

Proposizione 2.101 (Sally) *Vale l'uguaglianza nella formula sopra se e solo se il graduato è di Cohen-Macaulay.*

Sia $M = R/I$ con I omogeneo in un anello di polinomi R. Fissato un ordinamento monomiale τ, possiamo considerare l'ideale iniziale $in_\tau(I)$ e l'ideale lessicografico I^{lex}. Cosa succede alla proprietà di essere Cohen-Macaulay se si passa a tali ideali?

Proposizione 2.102 (Bigatti-Hulett) *Per ogni i, j,*

$$\beta_{ij} R/I \leq \beta_{ij}(R/in_\tau(I)) \leq \beta_{ij}(R/L)$$

Definizione 2.103 *Sia $R = k[x_1, \dots, x_n]$ e sia τ un ordinamento monomiale. Sia $Y = (y_{ij})$ una matrice di indeterminate di taglia $n \times n$. Consideriamo la mappa*

$$\begin{array}{ccc} k[x_1, \dots, x_n] & \longrightarrow & S = k(y_{ij})[x_1, \dots, x_n] \\ x_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_j \end{array}$$

Dato I un ideale omogeneo di R. Detto $\gamma(I)$ l'immagine di I tramite tale mappe, consideriamo $in_\tau(\gamma(I))$ e lo contraiamo a R. Tale contrazione la definiamo come $gin_\tau(I)$.

Teorema 2.104 (Bayer-Stillman) *Sia K un campo infinito e sia R l'anello di polinomi. Sia $GL_n(K) \subseteq M_n(K) \simeq k^{n^2}$, con quest'ultimo munito della topologia di Zariski. Per ogni $\alpha \in GL_n(K)$ consideriamo l'omomorfismo indotto da α su R per azione sulle indeterminate. Fissiamo un ordinamento monomiale tale che $x_1 > x_2 > \dots x_n$. Allora esiste un aperto non vuoto $U \subseteq GL_n(K)$ tale che $in_\tau(\alpha(I)) =\in_\tau (\alpha'(I))$ per ogni $\alpha, \alpha' \in U$.*

Notiamo che in particolare le funzioni di Hilbert sono invarianti.
Denotiamo con $Gin(I)$ il gin ottenuto con il degrevlex.

Teorema 2.105 (Bayer-Stillman)

$$\text{projdim}\, R/I = \text{projdim}\, R/Gin(I)$$

e

$$reg(R/I) = reg(R/Gin(I))$$

Corollario 2.106 *R/I è Cohen-Macaulay se e solo se lo è $R/Gin(I)$.*

Teorema 2.107 (Bayer-Popescu) *Nel passaggio da I a $Gin(I)$ si conservano i numeri di Betti estremali.*

Teorema 2.108 (Clements-Lindstrom) *Sia $R = k[x_1, \dots, x_n]$ e consideriamo una successione $d_1 \leq \dots \leq d_n$. Detto*

$$A = R/(x_1^{d_1}, \dots, x_n^{d_n})$$

per ogni $J \subseteq A$ esiste un ideale lessicografico avente la stessa funzione di Hilbert di J.