

Coomologia Locale e Dualità

La coomologia locale è nata per risolvere molteplici problemi in ambito della geometria algebrica e dell'algebra commutativa, riguardanti per esempio la connessione di varietà ottenute come intersezioni e il minimo numero di generatori di un ideale. Può essere definita in diversi modi, ognuno dei quali presenta alcuni vantaggi a livello dimostrativo; un possibile modo di vederlo è come funtore coomologico; questa è anche la prima definizione che è stata data. Per questo studiamo dapprima le proprietà delle risoluzioni iniettive di un modulo nell'ambito in cui siamo interessati, ossia quello di un anello noetheriano.

Numeri di Bass e risoluzioni iniettive

In questa sezione, studieremo la struttura dei moduli iniettivi su un anello noetheriano R e cercheremo di capire come siano fatte le risoluzioni iniettive di un modulo. In particolare, vogliamo studiarne una decomposizione in moduli iniettivi indecomponibili, ossia che non possono essere scritti in maniera non banale come somma diretta di sottomoduli. Ricordiamo la definizione di estensione essenziale

Definizione 1 *Sia M un R -modulo. Un'estensione essenziale di M è un modulo E tale che $M \subseteq E$ e M interseca ogni sottomodulo di E .*

e quella di guscio iniettivo

Definizione 2 *Sia M un R -modulo. Il guscio iniettivo di M è la massima estensione essenziale di M*

Si dimostra che il guscio iniettivo di un modulo è effettivamente iniettivo e che la precedente è una buona definizione. Indicheremo nel seguito con $E_R(M)$ il guscio iniettivo di M come R -modulo.

Osservazione 3 In generale, se $\{M_i\}$ è una famiglia infinita di moduli iniettivi, allora il prodotto $\prod M_i$ è ancora un modulo iniettivo. Lo stesso non vale per la somma diretta. Se però R è un anello noetheriano, allora somma diretta (arbitraria) di moduli iniettivi è iniettiva. Infatti, per il criterio di Baer basta mostrare che esiste un'estensione

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R \\ & & \downarrow & \swarrow & \\ & & \sum E_i & & \end{array}$$

Per noetherianità, I è finitamente generato e dunque l'immagine dei generatori di I è contenuta in un numero finito di addendi diretti di $\sum E_i$. D'altronde, la somma diretta finita di moduli iniettivi è iniettiva, come voluto.

Proposizione 4 Sia R un anello noetheriano e sia E un R -modulo. Allora:

1. Il guscio iniettivo $E_R(R/p)$ è indecomponibile per ogni primo $p \in \text{Spec}(R)$
2. p è l'unico primo associato di $E(R/p)$
3. Ogni sottomodulo di $E_R(R/p)$ ha un solo primo associato.
4. Ogni modulo iniettivo e indecomponibile è guscio iniettivo di R/p per qualche $p \in \text{Spec } R$.
5. Ogni modulo iniettivo è somma diretta di moduli iniettivi indecomponibili.

Dimostrazione.

1. Mostriamo che $E = E_R(R/P)$ è indecomponibile. Supponiamo per assurdo che $E = E_1 \oplus E_2$. Dato che E è un'estensione essenziale di R/p , $E_1 \cap R/p \neq 0$ e $E_2 \cap R/p \neq 0$. In particolare, questi saranno sottomoduli di R/p e dunque ideali I_1, I_2 . Dato che R/p è un dominio, $I_1 I_2 \neq 0$ e lo stesso deve accadere per $I_1 \cap I_2$ (perché contiene $I_1 I_2$). Questo significa che $E_1 \cap E_2 \neq 0$, negando quindi la possibilità che questi siano in somma diretta.
2. Mostriamo che p è l'unico primo associato di $E = E_R(R/p)$. Mostriamo cioè che se q è un altro primo associato di E , allora $q = p$. Per definizione di primo associato, esiste un'immersione $R/q \rightarrow E$ e dunque E deve contenere il guscio iniettivo di R/q . Per iniettività, $E(R/q)$ è addendo diretto di E e dunque devono coincidere, perché quest'ultimo è iniettivo. Di conseguenza $E(R/p) = E(R/q)$. L'intersezione tra R/p e R/q è non banale (perché E è estensione essenziale di entrambi) ed è annullata da $p + q$. Dato che R/p è un dominio, l'annullatore di un elemento non nullo è p , da cui $q \subseteq p$. Lo stesso vale per ogni elemento di R/q , da cui $p = q$. Di conseguenza, p è l'unico primo associato di E .
3. Sia M un sottomodulo finitamente generato di $E = E(R/p)$ e sia q un primo associato di M diverso da p . Allora R/q si immerge in M e dunque in E ; come nel punto precedente vale allora $p = q$, da cui un assurdo.
4. Sia M un modulo iniettivo e indecomponibile e sia p un primo associato di M . Allora $E(R/p)$ si immerge in M ed è un suo addendo diretto per iniettività, da cui $M = E(R/p)$.

5. Utilizziamo il lemma di Zorn. Consideriamo l'insieme A di insiemi Σ di sottomoduli iniettivi E_i di E che sono indecomponibili e in somma diretta tra loro. Per il lemma di Zorn, esiste un elemento massimale $\tilde{\Sigma}$. Sia N il sottomodulo ottenuto come somma (diretta) degli elementi di $\tilde{\Sigma}$. Per l'osservazione preliminare, N è iniettivo e dunque l'inclusione di N in E spezza, $E = N \oplus N'$. Dato che E è iniettivo, N' è iniettivo. Sia q un primo associato di N' ; allora esiste un sottomodulo P di N' isomorfo a $E(R/q)$ e dunque indecomponibile. Ciò nega la massimalità di $\tilde{\Sigma}$, da cui la tesi.

Definizione 5 Una risoluzione iniettiva $E^\bullet$ si dice *minimale* se E^0 è un guscio iniettivo di M e per ogni $i \geq 0$ E^{i+1} è un guscio iniettivo di $\text{Ker}(\varphi_{i+1}) = \text{Im}(\varphi_i)$.

Proposizione 6 Sia $f: M \rightarrow N$ una mappa iniettiva di R -moduli. N è un'estensione essenziale di $f(M)$ se e solo se per ogni primo $p \in \text{Spec}(R)$ la mappa

$$f_p: \text{Hom}_{R_p}(k(p), M_p) \longrightarrow \text{Hom}_{R_p}(k(p), N_p)$$

è un isomorfismo, dove $k(p)$ è il campo residuo di p .

Dimostrazione. Notiamo preliminarmente che f_p è sempre iniettiva se f lo è. Supponiamo che N sia essenziale su $f(M)$ e sia $\gamma \in \text{Hom}(k(p), N_p)$. Vogliamo mostrare che esiste $\delta \in \text{Hom}_{R_p}(k(p), M_p)$ tale che $\gamma = f_p \circ \delta$. Dato che R/p è finitamente presentato, γ è indotto da un omomorfismo $\varphi \in \text{Hom}(R/p, N)$, in quanto vale

$$(\text{Hom}_R(R/p, N))_p \simeq \text{Hom}_{R_p}(k(p), N_p)$$

Sia $x = \varphi(1)$. Dato che N è essenziale su $f(M)$, esiste $r \in R$ tale che $0 \neq rx \in f(M)$. Notiamo che $r \notin p$, perché $px = 0$ e dunque $\gamma(1) \in f(M)_p$. Detto $y \in M_p$ tale che $f(y) = \gamma(1)$, definiamo $\delta \in \text{Hom}_{R_p}(k(p), M_p)$ tale che $\delta(1) = y$. Per costruzione, $f_p(\delta) = \gamma$, da cui una implicazione.

Viceversa, supponiamo che f_p sia un isomorfismo per ogni primo $p \in \text{Spec}(R)$ e sia $x \in N$. Vogliamo mostrare che il sottomodulo generato da x interseca non banalmente $f(M)$. Sia p un primo associato al sottomodulo generato da x ; questo significa che esiste un'immersione $\gamma: R/p \rightarrow \langle x \rangle \subseteq N$. La mappa indotta dalla localizzazione $\gamma_p \in \text{Hom}(k(p), N_p)$ è, per ipotesi, indotta da un omomorfismo $\delta \in \text{Hom}(k(p), M_p)$. Di conseguenza, $\gamma_p(1) \in f(M_p)$ ed è un elemento non nullo nel generato di x . Dunque N è essenziale su $f(M)$.

Corollario 7 Sia R un anello noetheriano e sia M un modulo con una risoluzione iniettiva $E^\bullet$. $E^\bullet$ è *minimale* se e solo se per ogni $p \in \text{Spec}(A)$ la mappa $\text{Hom}(k(p), E_p^i) \rightarrow \text{Hom}(k(p), E_p^{i+1})$ è nulla.

Dimostrazione. Sia Z^i il nucleo di φ_{i+1} . Per definizione, $E^\bullet$ è *minimale* se e solo se E^i è l'involuppo convesso di Z^i . Dato che E^i è iniettivo, questo accade se e solo se E^i è un'estensione essenziale di Z^i . Per la proposizione precedente, E^i è un'estensione essenziale di Z^i se e solo se le mappe indotte

$\text{Hom}(k(p), (Z^i)_p) \rightarrow \text{Hom}(k(p), E_p^i)$ sono isomorfismi. Per definizione di Z^i , abbiamo le successioni esatte

$$0 \rightarrow Z^i \rightarrow E^i \rightarrow E^{i+1}$$

e dato che la prima mappa induce un isomorfismo, la seconda deve essere la mappa nulla, come voluto.

Corollario 8 *Sia R un anello noetheriano e sia M un R -modulo avente una risoluzione iniettiva minimale $E^\bullet$. Per ogni $p \in \text{Spec}(R)$, $E_p^\bullet$ è una risoluzione iniettiva minimale di M_p .*

Dimostrazione. Sappiamo che la localizzazione di moduli iniettivi è iniettiva. Possiamo allora applicare il corollario precedente; dobbiamo quindi mostrare che per ogni $q \subseteq p$ l'omomorfismo $\text{Hom}(k(q), (E_p^i)_q) \rightarrow \text{Hom}(k(q), (E_p^{i+1})_q)$ sia nullo e questo è ovvio per le proprietà della localizzazione.

Definizione 9 *Sia R un anello noetheriano e sia M un R -modulo con una risoluzione libera minimale $E^\bullet$. Definiamo i numeri di Bass $\mu_i(p, M)$ come il numero di copie di $E_R(R/p)$ in una decomposizione di E^i in somma diretta di moduli iniettivi indecomponibili. Se R è locale con massimale m , definiamo $\mu_i(M) = \mu_i(m, M)$.*

Per il corollario, i numeri di Bass si comportano bene rispetto alla localizzazione e dunque è sufficiente studiare il caso locale.

Lemma 10 *Sia R un anello locale noetheriano e sia I un suo ideale. Consideriamo la proiezione $\varphi: R \rightarrow S = R/I$ e sia k il loro campo residuo. Detto $E = E_R(k)$, allora l'insieme degli elementi annullati da I $\text{Hom}_R(S, E)$ è il guscio iniettivo di k come S -modulo.*

Dimostrazione. Sia E'' il guscio iniettivo di k come S -modulo. Allora in particolare, come R -modulo, E'' è un'estensione essenziale di k e dunque possiamo immergerlo in E . Notiamo che come R -modulo, E' viene annullato da I e dunque $E' \subseteq \text{Hom}_R(S, E)$. D'altronde, $\text{Hom}_R(S, E)$ è essenziale su k perché lo è come R -modulo, da cui la tesi.

Teorema 11 *Sia R un anello noetheriano e sia M un R -modulo. Allora*

$$\mu_i(p, M) = \dim_{k(p)}(\text{Ext}^i(k(p), M_p))$$

In particolare i numeri di Bass sono finiti se M è finitamente generato.

Dimostrazione. Possiamo ridurci a considerare il caso locale noetheriano e $p = m$. Consideriamo una risoluzione iniettiva minimale. Dato che le mappe indotte dopo aver applicato $\text{Hom}(k, -)$ sono nulle, vale $\text{Ext}^i(k, M) = \text{Hom}(k, E^i)$. Basta allora mostrare che $\text{Hom}(k, E_R(R/p)) = 0$ se $p \neq m$ e $\text{Hom}(k, E_R(k)) = k$. La seconda affermazione è immediata, in quanto

$\text{Hom}(k, E_R(k)) \simeq E_k(k) = k$. Se invece $p \neq m$, sia $x \in m \setminus p$. Allora, per ogni $\varphi \in \text{Hom}(k, E_R(R/p))$, vale $x \cdot \varphi(1) = \varphi(x) = 0$ perché $x \in m$. D'altronde, x non appartiene all'unico primo associato di $E_R(R/p)$ e dunque la moltiplicazione per x è iniettiva. Di conseguenza $\varphi(1) = 0$.

Definizione 12 Definiamo *dimensione iniettiva* $\text{injd} M$ di M come la lunghezza di una risoluzione iniettiva minimale di M .

Lemma 13 Sia R un anello noetheriano e M un modulo finitamente generato. Siano $p, q \in \text{Spec}(R)$ tali che $p \subseteq q$ e $\text{ht}(q/p) = s$. Se $\mu_i(p, M) \neq 0$, allora $\mu_{i+s}(q, M) \neq 0$.

Dimostrazione. Per induzione, possiamo supporre che $s = 1$. Localizzando in q , possiamo anche assumere che R sia locale e $q = m$. Supponiamo che $\mu_{i+1}(m, M) = 0$. Per quanto visto, $\text{Ext}^{i+1}(k, M) = 0$. Questo implica che per ogni modulo L di lunghezza finita, $\text{Ext}^{i+1}(L, M) = 0$. Infatti, se $\lambda(L) = 1$, allora $L \simeq k$ e dunque la tesi è ovvia. Supponiamo la tesi vera per lunghezza $\leq n$ e mostriamo che vale per $\lambda(L) = n + 1$. Per definizione di lunghezza, esiste un sottomodulo S di L di lunghezza $n - 1$. Abbiamo allora la successione esatta corta

$$0 \rightarrow S \rightarrow L \rightarrow L/S \rightarrow 0$$

La lunghezza è additiva e dunque $\lambda(L/S) = 1$ e $\lambda(L/S) \simeq k$. Passando alla successione esatta lunga, otteniamo

$$\underbrace{\text{Ext}^{i+1}(k, M)}_{=0} \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(L, M) \rightarrow \underbrace{\text{Ext}^{i+1}(S, M)}_{=0}$$

e dunque $\text{Ext}^{i+1}(L, M) = 0$; come voluto.

Sia ora $x \notin p$ e consideriamo la successione esatta corta

$$0 \rightarrow R/p \xrightarrow{\varphi_x} R/p \rightarrow R/(p, x) \rightarrow 0$$

Notiamo che $R/(p, x)$ ha lunghezza finita, in quanto il radicale di (p, x) è m e l'anello è artiniano. In particolare, $\text{Ext}^{i+1}(R/(p, x), M) = 0$. Passando alla successione esatta lunga, otteniamo quindi $\text{Ext}^i(R/p, M) \simeq x \cdot \text{Ext}^i(R/p, M)$. Per Nakayama, deve allora essere 0 e dunque $\mu_i(p, M) = 0$.

Lemma 14 Sia R un anello noetheriano locale, sia M un R -modulo finitamente generato e sia $x \in R$ un elemento R e M -regolare. Sia $E^\bullet$ una risoluzione iniettiva minimale di M . Allora $\text{Hom}(R/(x), E^\bullet)$ è una risoluzione iniettiva minimale di M/xM .

Dimostrazione. Applichiamo $\text{Hom}_R(R/xR, -)$ alla risoluzione iniettiva minimale $E^\bullet$ e definiamo $C^{i-1} = \text{Hom}_R(R/(x), E^i)$; questi sono iniettivi come R/xR -moduli per la formula di agguinzione Hom-tensor. Mostriamo che $\text{Hom}(R/(x), E^0) = 0$. Per questo, basta mostrare che x non è uno zero divisore in E^0 . In tal caso infatti $\varphi(x) = \varphi(1) \cdot x = 0$ da cui segue che $\varphi(1) = 0$

per ogni $\varphi \in \text{Hom}(R/(x), E^0)$. Sia $m \in E^0$ un elemento non nullo tale che $xm = 0$. Dato che E^0 è un'estensione essenziale di M , esiste $r \in R$ tale che $0 \neq rm \in M$. Allora

$$0 = r(xm) = x(rm)$$

da cui x è uno zero divisore di M , assurdo per regolarità.

Notiamo ora che la coomologia del complesso ottenuto è dato esattamente dai gruppi $\text{Ext}^i(R/(x), M)$. Dato che $\text{Hom}(R/(x), E^0) = 0$, si ha che il nucleo della mappa tra C_0 e C_1 è esattamente $\text{Ext}^1(R/(x), M) \simeq M/xM$. Notiamo ora che $\text{projdim}_R(R/(x)) = 1$ e dunque $\text{Ext}^i(R/(x), M) = 0$ per $i \geq 2$. Di conseguenza la successione

$$0 \rightarrow M/xM \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots$$

è una risoluzione iniettiva di M/xM . Rimane da mostrare la minimalità. Sia $p \in \text{Spec}(R/(x))$. Vogliamo mostrare che la mappa

$$\text{Hom}_{R/(x)_p}(k(p), C_p^i) \rightarrow \text{Hom}_{R/(x)_p}(k(p), C_p^{i+1})$$

è nulla. Notiamo però che

$$\text{Hom}(k(p), C_p^i) \simeq \text{Hom}(k(p), \text{Hom}((R/(x))_p, E_p^{i+1})) \simeq \text{Hom}(k(p), E_p^{i+1})$$

e dunque sappiamo già che questa mappa è nulla per minimalità di $E^\bullet$.

Corollario 15 *Sia R un anello noetheriano locale e sia $x \in m$ un non zero-divisore. Allora*

$$\text{injdim}_R(R) = \text{injdim}_{R/(x)}(R/(x)) + 1$$

Dimostrazione. Se $\text{injdim}_R(R) < \infty$, in base al lemma precedente basta mostrare che $C^{n-1} \neq 0$ (nelle stesse notazioni del lemma). Notiamo però che E^n è somma diretta di r copie di $E_R(k)$ per il lemma ancora precedente. Di conseguenza,

$$\text{Hom}_R(R/(x), E^n) \simeq \text{Hom}_R(R/(x), E_R(k))^r \simeq E_{R/(x)}(k)^r$$

In particolare è non nullo e dunque nella formula deve valere l'uguaglianza. Nel caso in cui la risoluzione sia infinita, si può ragionare allo stesso modo, mostrando che esistono infiniti indici in cui il modulo è diverso da 0.

Corollario 16 *Sia R un anello locale noetheriano e sia $x \in m$ un non-zero divisore di R tale che $xM = 0$. Vale*

$$\text{Ext}^i(R, M) \simeq \text{Ext}^{i-1}(R/xR, M)$$

Dimostrazione. Basta considerare la risoluzione esatta lunga.

Lemma 17 *Sia R un anello locale noetheriano e sia M un R -modulo finitamente generato e di dimensione iniettiva finita n . Allora $n \leq \text{depth}(R)$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $t = \text{depth}(R) < n$, sia $x_1, \dots, x_t$ una sequenza R -regolare massimale e sia J l'ideale da loro generato. Sappiamo che $\text{projdim}_R(R/J) < \infty$ perché J è generato da una sequenza R -regolare e per Auslander-Buchsbaum vale $\text{projdim } R/J = t < n$ e dunque $\text{Ext}^n(R/J, M) = 0$. D'altra parte, dato che $\text{depth}(R/J) = 0$, R/J ha il massimale m come associato e dunque abbiamo una successione esatta corta

$$0 \rightarrow k \rightarrow R/J \rightarrow N \rightarrow 0$$

dove con N abbiamo indicato il conucleo dell'inclusione. Applicando il funtore $\text{Hom}(-, M)$ e guardando la successione esatta lunga degli Ext , abbiamo

$$\text{Ext}^n(R/J, M) \rightarrow \text{Ext}^n(k, M) \rightarrow \text{Ext}^{n+1}(N, M)$$

Dato che $\text{injd} M = n$, $\text{Ext}^{n+1}(N, M) = 0$ e dunque lo stesso deve valere per $\text{Ext}^n(k, M)$. Ma $\dim \text{Ext}^n(k, M) = \mu_n(M)$ che è diverso da zero per il lemma che lega altezza e numeri di Bass da cui un assurdo.

Osservazione 18 *Notiamo che valgono le seguenti:*

$$\text{injd}(R) = \max\{i \mid \text{Ext}^i(k, R) \neq 0\} \quad \text{depth}(R) = \min\{i \mid \text{Ext}^i(k, R) \neq 0\}$$

Dunque $\text{injd}(R) \geq \text{depth}(R)$.

Coomologia locale: definizione

Consideriamo un anello commutativo R , I un suo ideale e M un R -modulo. Possiamo associare a M il suo sottomodulo

$$\Gamma_I(M) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 :_M I^n)$$

e inoltre, data una mappa $f: M \rightarrow N$, la restrizione $\Gamma_I(f): \Gamma_I(M) \rightarrow \Gamma_I(N)$ è una ben definita mappa di R -moduli. Infatti, se $m \in \Gamma_I(M)$, allora esiste un indice $n \in \mathbb{N}$ e un elemento $a \in I^n$ tale che $am = 0$. Di conseguenza, $a \cdot f(m) = f(am) = 0$ da cui $f(m) \in \Gamma_I(N)$. Dunque possiamo guardare Γ_I come un funtore dai moduli su R in se stessi. Tale funtore è covariante (per definizione), additivo ed esatto a sinistra. Consideriamo infatti una successione esatta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

Dopo aver, applicato il funtore, dobbiamo mostrare che

$$0 \rightarrow \Gamma_I(M) \xrightarrow{\Gamma_I(f)} \Gamma_I(N) \xrightarrow{\Gamma_I(g)} \Gamma_I(P)$$

è ancora esatta. L'iniettività è chiara perché la mappa è restrizione di una mappa iniettiva. Per lo stesso motivo, la composizione è ancora la mappa nulla e dunque basta mostrare che $\text{Im}(\Gamma_I(f)) \supseteq \text{Ker}(\Gamma_I(g))$. Sia $a \in \Gamma_I(N)$ tale che $\Gamma_I(g)(a) = g(a) = 0$. Per ipotesi, esiste $b \in M$ tale che $f(b) = a$. Dato che esiste $i \in I^n$ tale che $ia = 0$, si ha $f(ib) = ia = 0$; per iniettività $ib = 0$, ossia $b \in \Gamma_I(M)$, come voluto.

Example 0.1. La surgettività non viene conservata. Consideriamo per esempio l'anello $\mathbb{Z}$, l'ideale $I = (2)$ e la successione esatta corta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Applicando il funtore, otteniamo

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

ed effettivamente la mappa non è surgettiva.

Il funtore rispetta le proprietà richieste per poter definire i funtori derivati:

Definizione 19 Definiamo l' i -esimo modulo di coomologia locale $H_I^i(M)$ di M rispetto all'ideale I come l' i -esimo funtore derivato di Γ_I .

Alcune proprietà di questa coomologia sono banali. Per esempio, dati due ideali I, J con lo stesso radicale, si ha banalmente $\Gamma_I = \Gamma_J$ e dunque si può calcolare la coomologia scegliendo l'ideale più conveniente a meno di radicale. Inoltre, i moduli di coomologia hanno la proprietà che, per definizione, ogni elemento di $H_I^i(M)$ è annullato da una potenza di I . Come al solito, risulta poi definita una successione esatta lunga in coomologia.

In realtà esistono alcune definizioni equivalenti di coomologia locale. Per mostrare l'equivalenza, utilizzeremo il seguente teorema:

Teorema 20 Siano F_1, F_2 due funtori coomologici. Supponiamo che vi sia una equivalenza naturale tra F_1^0 e F_2^0 e che per ogni modulo iniettivo E valga $F_1^i(E) = F_2^i(E) = 0$ per $i > 0$. Allora F_1 è naturalmente equivalente a F_2 .

Dimostrazione. Sia M un modulo e consideriamone una risoluzione iniettiva

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{f_0} E^1 \xrightarrow{f_1} E^2 \xrightarrow{f_2} \dots$$

Spezziamo tale risoluzione in successioni esatte corte; detto $C^i = \text{Ker}(f_i)$, abbiamo

$$0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow C^0 \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow C^i \rightarrow E^{i+1} \rightarrow C^{i+1} \rightarrow 0$$

Consideriamo la successione esatta lunga sulla prima successione esatta corta. Otteniamo allora

$$0 \rightarrow F_i^0(M) \rightarrow F_i^0(E^0) \rightarrow F_i^0(C^0) \rightarrow F_i^1(M) \rightarrow 0$$

e anche $F_i^{j+1}(M) \simeq F_i^j(C^0)$ per ogni $j \geq 1$. Di conseguenza, vale $F_0^1(M) = F_1^1(M)$ per il lemma dei cinque. Per induzione, consideriamo la successione esatta lunga applicata all' j -esima successione esatta corta. Otteniamo

$$0 \rightarrow F_i^0(C^j) \rightarrow F_i^0(E^{j+1}) \rightarrow F_i^0(C^{j+1}) \rightarrow F_i^1(C^j) \rightarrow 0$$

Dunque vale $F_0^1(C^j) \simeq F_1^1(C^j)$ e induttivamente $F_i^1(C_j) \simeq F_i^j(M)$, come voluto.

Descriviamo quindi la prima delle possibili definizioni equivalenti. Consideriamo gli isomorfismi

$$\begin{array}{ccc} f_n: \operatorname{Hom}\left(\frac{R}{I^n}, M\right) & \longrightarrow & (0 :_M I^n) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(1) \end{array}$$

Tali mappe inducono diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}(R/I^{n-1}, M) & \xleftarrow{f_{n-1}} & (0 : I^{n-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Hom}(R/I^n, M) & \xleftarrow{f_n} & (0 : I^n) \end{array}$$

Di conseguenza abbiamo un isomorfismo $\varinjlim \operatorname{Hom}(R/I^n, M) \simeq \varinjlim (0 : I^n)$. D'altronde, $\varinjlim (0 : I^n) = \cup (0 : I^n)$. Di conseguenza vale

$$\varinjlim \operatorname{Hom}(R/I^n, M) = \varinjlim \operatorname{Ext}^0(R/I^n, M) \simeq \Gamma_I(M)$$

e tale isomorfismo è funtoriale. Inoltre, se E è un modulo iniettivo, $H_I^i(E) = 0$ per $i > 0$ (ovvio, una sua ovvia risoluzione iniettiva è lunga 0...) e $\operatorname{Ext}^i(R/I^n, E) = 0$ per $i > 0$. Dunque, per il teorema, otteniamo

$$H_I^i(M) \simeq \varinjlim \operatorname{Ext}^i\left(\frac{R}{I^n}, M\right)$$

La seconda definizione equivalente è di natura diversa ed è l'equivalente della coomologia di Čech. Siano $x_1, \dots, x_n \in R$. Possiamo definire i moduli

$$C^p = \bigoplus_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} R_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}}$$

Tra C^p e C^{p+1} esiste chiaramente una mappa, che deriva dalle mappe $R_{x_i} \rightarrow R_{x_i x_j}$. Dato che vogliamo rendere questo un complesso, abbiamo però necessità di introdurre dei segni. Definiamo allora la mappa sulle componenti di C^p e C^{p+1} come

$$\begin{aligned} R_{x_{i_1} \dots x_{i_p}} &\rightarrow (R_{x_{i_1} \dots x_{i_p}})_{x_j} \\ x &\mapsto (-1)^s x \end{aligned}$$

dove s è 1 se riordinando gli indici in arrivo x_j è in posizione pari e 0 altrimenti. Abbiamo allora il complesso

$$0 \rightarrow R \rightarrow \oplus_i R_{x_i} \rightarrow \oplus_{i < j} R_{x_i x_j} \rightarrow \dots \rightarrow R_{x_1 x_2 \dots x_n} \rightarrow 0$$

Sia M un R -modulo. Definiamo l' i -esimo gruppo di coomologia

$$H^i(x_1, \dots, x_n, M)$$

come l' i -esimo gruppo di coomologia del complesso appena descritto dopo averlo tensorizzato per M . Se R è un anello noetheriano e $I = (x_1, \dots, x_n)$, allora si ha $H_I^i(M) \simeq H^i(x_1, \dots, x_n, M)$. Per mostrare questo, utilizziamo ancora una volta il teorema di sopra. Intanto, notiamo che data una successione esatta corta $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$, esiste una successione esatta lunga per la coomologia appena introdotta. Infatti, se denotiamo con $C(M)$ il complesso di Čech tensorizzato per M , abbiamo una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow C(M) \rightarrow C(N) \rightarrow C(P) \rightarrow 0$$

e tramite il lemma del serpente otteniamo la successione esatta lunga. Mostriamo allora che $H^0(x_1, \dots, x_n, M) = H_I^0(M)$. Per definizione, il modulo $H^0(x_1, \dots, x_n, M)$ è la coomologia del complesso

$$0 \rightarrow M \rightarrow M_{x_1} \oplus \dots \oplus M_{x_n}$$

Sia $y \in M$. Per le proprietà della localizzazione, tale elemento va a zero se e solo se esistono n_i tale che $yx_i^{n_i} = 0$ per ogni i . Scelto N sufficientemente grande, questo è equivalente a richiedere che $yI^N = 0$, ossia che $y \in H_I^0(M)$. Rimane da mostrare che, se E è un modulo iniettivo, $H^i(x_1, \dots, x_n, E) = 0$ per $i > 0$. Per questo, abbiamo prima necessità di alcuni lemmi e osservazioni preliminari.

Osservazione 21 Sia $\varphi: R \rightarrow S$ un omomorfismo di anelli. Consideriamo degli elementi $x_1, \dots, x_n \in R$ e siano $y_1, \dots, y_n$ le loro immagini in R . Dato M un S -modulo,

$$H^i(x_1, \dots, x_n, M) = H^i(y_1, \dots, y_n, M)$$

come S -moduli. Infatti, l'azione di x_i su M è per definizione la stessa di y_i su M e dunque i complessi sono uguali.

Lemma 22 Sia R un anello noetheriano, $x_1, \dots, x_n \in R$ e sia M un modulo di lunghezza finita su R . Allora $H^i(x_1, \dots, x_n, M) = 0$ per ogni $i \geq 1$.

Dimostrazione. Mostriamo per prima cosa che possiamo supporre $M = k$, dove k è il quoziente di R per un suo massimale. Dato che M ha lunghezza

finita, possiamo trovare una catena di sottomoduli

$$(0) \subseteq M_0 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$$

tali che $M_i/M_{i-1} \simeq R/m_i$, dove gli m_i sono massimali di R . Abbiamo allora le successioni esatte corte

$$0 \rightarrow M_{i-1} \rightarrow M_i \rightarrow R/m_i \rightarrow 0$$

Tramite la successione esatta lunga e per induzione, si mostra allora che se vale per R/m_i per ogni i , allora vale anche per M .

Consideriamo allora $M = k = R/m$ con m massimale di R . Per l'osservazione, possiamo considerare allora $H^i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, K)$. Notiamo che se $\bar{x}_i = 0$, chiaramente possiamo ignorarlo. Altrimenti $\bar{x}_i$ è invertibile e in questo caso la tesi segue dal teorema di Kunneth, che nel caso di spazi vettoriali su campi assicura che la coomologia del complesso tensore si ottiene dai singoli complessi.

Grazie a questo lemma, possiamo dimostrare che se E è iniettivo, allora $H^i(x_1, \dots, x_n, E) = 0$ per $i \geq 1$. Possiamo supporre che E sia indecomponibile, ossia $E = E_R(R/P)$ e ricondurci al caso di R locale (localizzando per p). Allora E è limite diretto dei suoi sottomoduli finitamente generati $E_n = (0 : P^n)$ sui quali vale il lemma precedente. Basta allora notare che la coomologia commuta con il limite diretto (perchè vi commutano tensore e calcolo della coomologia).

Le tre definizioni di coomologia locale possono essere utilizzate a piacimento e si dimostrano particolarmente duttili. Per esempio:

Proposizione 23 *Siano R, S un anello noetheriano, sia I un ideale di R e siano M, N rispettivamente un R -modulo e un S -modulo. Sia $\varphi: R \rightarrow S$ un omomorfismo. Allora*

1. *Se φ è piatto, allora $H_I^j(M) \otimes_R S \simeq H_{IS}^j(M \otimes S)$. In particolare, la coomologia locale commuta con localizzazioni e completamenti.*
2. *$H_I^j(N) \simeq H_{IS}^j(N)$.*

Dimostrazione. Per il punto 1, basta notare che la piatezza conserva la coomologia del complesso dopo il tensore. Per il secondo punto,

$$\begin{aligned} C(x_1, \dots, x_n, N) &= C(x_1, \dots, x_n, R) \otimes_R N \\ &= C(x_1, \dots, x_n, R) \otimes_R S \otimes_S N \\ &= C(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n), S) \otimes_S N \\ &= C(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n), N) \end{aligned}$$

Corollario 24 *Sia R un anello locale noetheriano e sia M un R -modulo finitamente generato. Allora $H_m^i(M) = H_{\hat{m}}^i(\hat{M})$.*

Dimostrazione. Sappiamo che, nelle ipotesi date, $\hat{m} = m \otimes_R \hat{R}$ e dunque

$$H_{m\hat{R}}^i(\hat{M}) \simeq H_{\hat{m}}^i(\hat{M})$$

Dato che $\hat{R}$ è R -piatto,

$$\begin{aligned} H_{m\hat{R}}^i(\hat{M}) &\simeq H_{m\hat{R}}^i(\hat{R} \otimes_R M) \\ &\simeq H_m^i(M) \otimes_R \hat{R} \\ &\simeq \varinjlim \text{Ext}^i(R/m^n, M) \otimes_R S \\ &\simeq \varinjlim \text{Ext}^i(R/m^n, M) \\ &\simeq H_m^i(M) \end{aligned}$$

Definizione 25 Sia R un anello noetheriano e sia I un ideale di R . Definiamo $\text{ara}(I)$ come il numero minimo di generatori di un ideale con lo stesso radicale di I .

Teorema 26 Siano R un anello noetheriano, I un ideale di R e M un R -modulo. Allora $H_I^i(M) = 0$ per ogni $i > \text{ara}(I)$.

Dimostrazione. Questa è una conseguenza diretta della definizione di coomologia locale tramite complesso di Čech. Infatti, siano $x_1, \dots, x_r$ elementi che realizzano $\text{ara}(I)$. Allora sappiamo che la coomologia locale di M coincide con la coomologia del complesso di Čech indotto da $x_1, \dots, x_r$ e tensorizzato per M . Questo complesso è però lungo r e dunque la coomologia locale deve svanire per $i > \text{ara}(I)$, come voluto.

Lemma 27 Sia R un anello noetheriano e sia M un modulo finitamente generato. Sia I un ideale di R , $x \in R$ un elemento e chiamiamo $J = (I, x)$. Esiste una successione esatta lunga

$$\dots \rightarrow H_J^i(M) \rightarrow H_I^i(M) \rightarrow H_I^i(M_x) \rightarrow \dots$$

Dimostrazione. Per il teorema di struttura dei moduli iniettivi su un anello artiniano, sappiamo che x agisce o in modo nilpotente o come unità su tali moduli. Di conseguenza, data $E^\bullet$ una risoluzione di M , esiste una successione esatta corta di complessi

$$0 \rightarrow \Gamma_x(E^\bullet) \rightarrow E^\bullet \rightarrow E_x^\bullet \rightarrow 0$$

Tale sequenza spezza, in quanto su ogni addendo indecomponibile la successione risulta banale, e dunque il funtore Γ_I mantiene l'esattezza. Applicando il funtore Γ_I , otteniamo allora la successione esatta lunga voluta, a meno di notare che $\Gamma_I(\Gamma_x) = \Gamma_J$.

Definizione 28 Sia R un anello noetheriano e sia $I \subseteq R$ un ideale. Indichiamo con $\text{depth}_I(M)$ la cardinalità di una successione regolare massimale di M contenuta in I .

Teorema 29 *Siano R un anello noetheriano, I un ideale di R e M un R -modulo finitamente generato. Allora $H_I^i(M) = 0$ per $i < \text{depth}_I(M)$ e per $i > \dim M$.*

Dimostrazione. Mostriamo dapprima che $H_I^i(M) = 0$ per $i < \text{depth}_I(M)$. Procediamo per induzione sulla profondità. Se $\text{depth}_I(M) = 0$ la tesi è vuota. Supponiamo allora $\text{depth}_I(M) = d > 1$. Allora esiste $x \in I$ non zero divisore di M e abbiamo la successione esatta

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi_x} M \longrightarrow M/xM \rightarrow 0$$

Passando alla successione esatta lunga, otteniamo

$$H^{i-1}(M/xM) \rightarrow H^i(M) \xrightarrow{\varphi_x} H^i(M)$$

Per ipotesi induttiva, dato che $\text{depth}_I(M/xM) = \text{depth}_I(M) - 1$, se $i < \text{depth}_I(M)$, la moltiplicazione per x induce una mappa iniettiva tra i moduli di coomologia. Questo può succedere se e solo se sono nulli, da cui la tesi.

Per la parte dell'enunciato sulla dimensione, notiamo che, dato che M è finitamente generato su un anello noetheriano, esiste una filtrazione

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$$

con quozienti isomorfi a R/p_i , con $p_i \in \text{Spec}(R)$. Abbiamo allora la successione esatta

$$0 \rightarrow M_i \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow R/p_i \rightarrow 0$$

Se mostriamo che la tesi vale per R/p_i , allora induttivamente vale per M . Infatti ogni R/p_i ha dimensione minore di M e $M_1 \simeq R/p_1$; dunque la prima successione esatta è

$$0 \rightarrow R/p_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow R/p_2 \rightarrow 0$$

Dunque dalla successione esatta lunga in coomologia, se la tesi vale per il primo e il terzo termine, allora vale anche per il secondo. Iterando, vale per M . Ci siamo allora ricondotti a mostrare la tesi per un modulo del tipo R/p ; vogliamo mostrare allora che se $i > \dim R/p$, allora $H_I^i(R/p) = 0$. Possiamo quindi supporre che $R = R/p$ e vedere I come ideale di R/p e considerare la localizzazione di R/p .

Sia quindi R un dominio noetheriano locale di dimensione d ; vogliamo mostrare che $H_I^i(R) = 0$ per ogni $i > \dim R$. Procediamo per induzione sulla dimensione di R . Supponiamo quindi $\dim R = 0$. Allora $\sqrt{I} = m$ e per il teorema della dimensione $\text{ara}(I) = \text{ara}(m) = \dim R = 0$. Dunque per il vanishing theorem già dimostrato, $H_I^i(R) = 0$ per $i \geq 1$.

Supponiamo allora $\dim R = d > 0$. Per questo caso, procediamo per induzione su $\dim R/I$. Se $\dim R/I = 0$, allora $\sqrt{I} = m$ e dunque possiamo concludere come sopra. Supponiamo allora che $\dim R/I > 0$; allora $\sqrt{I} \subsetneq m$ ed esiste

$x \in m$ che non appartiene a nessuno dei primi minimali di I . Per la scelta di x , vale $\dim R/(I, x) < \dim R/I$ e dunque per ipotesi induttiva vale, detto $J = (I, x)$, che $H_J^i(R) = 0$ per ogni $i > \dim R$. Per la successione esatta lunga del lemma precedente,

$$\dots \longrightarrow H_J^i(R) \longrightarrow H_I^i(R) \longrightarrow H_I^i(R_x) \longrightarrow \dots$$

Per località della coomologia locale, vale $H_I^i(R_x) = 0$ per l'ipotesi induttiva applicata a ogni localizzazione. Per ipotesi induttiva, il primo termine è nullo, da cui la tesi.

Dualità di Matlis

Definizione 30 Sia R un anello locale noetheriano, sia k il suo campo residuo e sia $E = E_R(k)$ il guscio iniettivo di k . Definiamo il duale di Matlis di un R -modulo M come $M^\vee = \text{Hom}_R(M, E)$.

Il teorema che vogliamo dimostrare è il seguente:

Teorema 31 (Dualità di Matlis) Sia R un anello locale noetheriano completo con campo residuo k e sia E il guscio iniettivo di k . Allora

1. Ogni modulo artiniano T si immerge in E^r per qualche $r \in \mathbb{N}$.
2. Se M è un R -modulo noetheriano, $M^\vee$ è artiniano.
3. Se M è un R -modulo artiniano, $M^\vee$ è noetheriano su $\hat{R}$.
4. Per ogni modulo N finitamente generato su $\hat{R}$, vale $N \simeq N^{\vee\vee}$.
5. Il duale di Matlis fornisce una corrispondenza tra i moduli artiniani e i moduli noetheriani.
6. E e $\hat{R}$ sono duali di Matlis.

Per dimostrare il teorema, abbiamo bisogno di diversi lemmi. Per prima cosa, abbiamo necessità di chiarire la struttura di $\hat{R}$ -modulo di $E = E_R(k)$. Sia $x \in E$. Per quanto visto, x viene annullato da una potenza di m , che è l'unico primo associato del sottomodulo generato da x . Sia n il massimo naturale tale che $m^n x \neq 0$. Dato $a \in \hat{R}$, sia $b \in R$ tale che $a - b \in m^n$. Definiamo allora $a \cdot x := b \cdot x$.

Lemma 32 $E_R(k) = E_{\hat{R}}(k)$.

Dimostrazione. Chiaramente, $E_R(k)$ è un'estensione essenziale di k come $\hat{R}$ -modulo e dunque $E_R(k) \subseteq E_{\hat{R}}(k)$. Se mostriamo che $E_{\hat{R}}(k)$ è un'estensione essenziale di k anche come R -modulo, abbiamo finito. Sia $x \in E_{\hat{R}}(k)$; sappiamo che esiste $r \in \hat{R}$ tale che $rx \in K$. Dato che x viene annullato dalla potenza n -esima di $\hat{m}$, possiamo trovare $r' \in R$ tale che $r - r' \in \hat{m}^n$. Di conseguenza, $rx = r'x \in K$, come voluto.

Proposizione 33 *Sia R un anello locale noetheriano di dimensione 0 e indichiamo con λ la funzione lunghezza di un modulo. Allora*

1. $\lambda(M) = \lambda(M^\vee)$ per ogni R -modulo finitamente generato M
2. $E^\vee = \text{Hom}_R(E, E) \simeq R$.

Dimostrazione.

1. Procediamo per induzione su $\lambda(M)$. Se $\lambda(M) = 1$, allora deve valere necessariamente che $M \simeq k$. Infatti, M ha almeno un primo associato p ; se questo fosse diverso da m , allora avremmo almeno una catena $0 \subseteq R/m \subseteq R/p$ che ha lunghezza 2. Dunque M ha un unico primo associato m e $R/m \simeq M$, altrimenti avremmo la catena $0 \subseteq R/m \subseteq M$ di lunghezza 2. Per il lemma, vale

$$k^\vee \simeq \text{Hom}_R(k, E) \simeq \text{Hom}_R(k, E_R(k)) \simeq E_k(k) \simeq k$$

e questo mostra il caso base. Per induzione, supponiamo $\lambda(M) = n$ e consideriamo una catena

$$0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$$

Abbiamo allora la successione esatta

$$0 \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M \rightarrow M/M_{n-1} \rightarrow 0$$

Passando al duale di Matlis, la successione rimane esatta perché E è iniettivo e dunque

$$0 \rightarrow \left(M/M_{n-1}\right)^\vee \rightarrow M^\vee \rightarrow M_{n-1}^\vee \rightarrow 0$$

Dato che la lunghezza è una funzione additiva, $\lambda(M^\vee) = \lambda(M_{n-1}^\vee) + \lambda(M/M_{n-1}^\vee)$. Per ipotesi induttiva, vale allora

$$\lambda(M^\vee) = n - 1 + 1 = n = \lambda(M)$$

da cui il primo punto.

2. Notiamo che $R^\vee \simeq E$ e per il punto 1 hanno la stessa lunghezza (R è un anello artiniano e dunque ha lunghezza finita). Per mostrare l'isomorfismo, basta dunque dimostrare che la mappa

$$\begin{aligned} \varphi: R &\longrightarrow E^\vee = \text{Hom}_R(E, E) \\ r &\longmapsto \varphi_r: m \mapsto rm \end{aligned}$$

è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista $r \in R$ tale che $rE = 0$. Allora

$$E = \text{Hom}_R(R, E) \simeq \text{Hom}_R(R/rR, E) \simeq E_{R/rR}(k)$$

per il lemma precedente. Se guardiamo le lunghezze, dal punto 1 otteniamo

$$\lambda(E) = \lambda(E_{R/rR}(k)) = \lambda(R/rR) < \lambda(R)$$

da cui un assurdo. Di conseguenza la mappa è iniettiva e dunque otteniamo l'isomorfismo richiesto.

Teorema 34 *Sia R un anello noetheriano locale. Allora $E^\vee \simeq \hat{R}$.*

Dimostrazione. Dato che ogni elemento di E viene annullato da una potenza di m , possiamo considerare i sottoinsiemi $E_n = \{x \in E \mid m^n x = 0\}$ e $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$. Vogliamo mostrare che $E^\vee \simeq \varprojlim \text{Hom}_R(E_n, E_n)$. Sia ora $f \in E^\vee = \text{Hom}_R(E, E)$ e sia f_n la restrizione di f a E_n . Allora vale $f(E_n) \subseteq E_n$ e dunque $f_n \in \text{Hom}_R(E_n, E_n)$. D'altra parte, data un elemento $\{g_n\}$ del limite degli $\text{Hom}_R(E_n, E_n)$, possiamo definire una mappa

$$\begin{aligned} g: E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto g_n(x) \text{ se } x \in E_n \end{aligned}$$

Per la coerenza delle mappe, g risulta essere ben definita. Questa mostrata risulta essere una corrispondenza tra $E^\vee$ e $\varprojlim \text{Hom}_R(E_n, E_n)$, che dunque sono isomorfi. Notiamo ora che, detto $R_n = R/m^n$, si ha $\text{Hom}_R(E_n, E_n) = \text{Hom}_{R_n}(E_n, E_n)$. Inoltre, $\text{Hom}_{R_n}(E_n, E_n) \simeq R_n$ per la proposizione precedente, che possiamo applicare in quanto R_n è artiniiano. Riassumendo,

$$E^\vee \simeq \varprojlim \text{Hom}_R(E_n, E_n) \simeq \varprojlim \text{Hom}_{R_n}(E_n, E_n) \simeq \varprojlim R_n \simeq \hat{R}$$

da cui la tesi.

Lemma 35 *Sia R un anello locale noetheriano e sia $f: M \rightarrow N$ un omomorfismo di R -moduli. Se $f^\vee: N^\vee \rightarrow M^\vee$ è un isomorfismo, allora lo è anche f .*

Dimostrazione. Innanzitutto, mostriamo che se $M^\vee = 0$ allora $M = 0$. Sia N un sottomodulo finitamente generato di M e consideriamo l'iniezione $N \rightarrow M$. Dato che E è iniettivo, abbiamo una mappa surgettiva $M^\vee \rightarrow N^\vee$. Basta allora mostrare che $N^\vee \neq 0$. Questo segue per Nakayama; infatti N/mN è non nullo ed è uno spazio vettoriale di dimensione finita su k . In particolare, ammette una mappa non nulla su k (che è contenuto in E) e per composizione troviamo una mappa non nulla da N in E .

Sia ora $K = \text{Ker}(f)$ e consideriamo la successione esatta

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N$$

Dualizzando, otteniamo

$$N^\vee \rightarrow M^\vee \rightarrow K^\vee \rightarrow 0$$

Dato che la prima mappa è un isomorfismo, $K^\vee = 0$ e dunque per il lemma precedente $K = 0$, cioè f è iniettiva. Per mostrare la surgettività, consideriamo la successione esatta corta

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow C \rightarrow 0$$

dove C è il conucleo di f . Dualizzando, $C^\vee = 0$, ossia $C = 0$.

Proposizione 36 *Sia R un anello locale noetheriano e sia E il guscio iniettivo di k . Allora E è un R -modulo artiniano.*

Dimostrazione. Sia $\{M_n\}$ una catena discendente in E ; vogliamo mostrare che si stabilizza. Dato che $M_n \subseteq E$, esiste tra i duali una mappa surgettiva $E^\vee \rightarrow M_n^\vee$. Identifichiamo $E^\vee$ con $\hat{R}$ e chiamiamo I_n il nucleo di tale mappa. Dato che la catena degli I_n è ascendente e $\hat{R}$ è noetheriano, deve stabilizzarsi, ossia esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $I_n = I_{n+k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza, esiste $M_n^\vee \simeq M_{n+k}^\vee$ e per il lemma, $M_n \simeq M_{n+1}$, come voluto.

Siamo pronti per mostrare la dualità di Matlis:

Dimostrazione (Dimostrazione della Dualità di Matlis). Sia T un modulo artiniano e consideriamo lo zoccolo di T

$$V = \text{soc}(T) = \{x \in T \mid mx = 0\}$$

Dato che V è un sottomodulo di T , è artiniano ed è un k -spazio vettoriale di dimensione finita. Mostriamo che T è un'estensione essenziale di V . Sia $x \in T$; il sottomodulo da lui generato è chiaramente artiniano ed è noetheriano perché finitamente generato. Di conseguenza, detto $N = \langle x \rangle$, la catena

$$N \supseteq mN \supseteq m^2N \supseteq \dots$$

deve stazionare, ossia esiste $n \in \mathbb{N}$ (che supponiamo essere minimo) tale che $m^n N = m^{n+1} N$. Chiamiamo $S = m^n N$; dato che la successione staziona, $S = mS$ e per Nakayama $S = 0$. Dunque $m^n N = 0$ e l'unico associato a N è l'ideale massimale m . Ne segue che $0 \neq m^{n-1}x \subseteq N \cap V$ e dunque T è un'estensione essenziale di V .

Sia ora $r = \dim V$. Dato che $E_R(V) = E^r$ e per definizione questa è la massima estensione essenziale, ne segue che T si immerge in E^r , da cui il primo punto.

Sia ora N un $\hat{R}$ -modulo finitamente generato e consideriamone una presentazione

$$\hat{R}^q \rightarrow \hat{R}^p \rightarrow N \rightarrow 0$$

che esiste perché $\hat{R}$ è noetheriano. Passando ai duali,

$$0 \rightarrow N^\vee \rightarrow (\hat{R}^\vee)^p \rightarrow (\hat{R}^\vee)^q$$

e in particolare, dato che $(\hat{R}^\vee)^p \simeq E^p$, $N^\vee$ è artiniano perché sottomodulo di un modulo artiniano (vedi proposizione precedente). Dualizzando nuovamente, otteniamo

$$\begin{array}{ccccccc}
\hat{R}^q & \longrightarrow & \hat{R}^p & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(\hat{R}^q)^{\vee\vee} & \longrightarrow & (\hat{R}^p)^{\vee\vee} & \longrightarrow & N^{\vee\vee} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Per quanto visto, $\hat{R}^{\vee\vee} = \hat{R}$ e per il lemma dei 5 vale $N \simeq N^{\vee\vee}$.

Sia ora T un R -modulo artiniano. Per quanto mostrato, possiamo immergere T in E^r e il conucleo dell'inclusione è ancora artiniano e dunque possiamo immergerlo in E^s per un certo $s \in \mathbb{N}$. Abbiamo allora la successione esatta

$$0 \rightarrow T \rightarrow E^r \rightarrow E^s$$

Ripetendo lo stesso procedimento di prima, otteniamo $T \simeq T^{\vee\vee}$ e questo termina la dimostrazione.

Un primo corollario banale della dualità di Matlis è il seguente:

Corollario 37 *Sia R un anello locale noetheriano e siano M, N R -moduli. Allora*

$$\mathrm{Tor}_i(M, N)^\vee \simeq \mathrm{Ext}^i(M, N^\vee)$$

Se M è finitamente generato, vale anche

$$\mathrm{Tor}_i(M, N^\vee) \simeq \mathrm{Ext}^i(M, N)^\vee$$

Dimostrazione. Sia F una risoluzione libera di M . Tensorizzando per M , la catena che otteniamo ha come omologia i gruppi $\mathrm{Tor}_i(M, N)$. Dato che l'involuppo iniettivo E di k è iniettivo, applicando a questa risoluzione $\mathrm{Hom}_R(-, E)$ i gruppi di coomologia sono isomorfi a $\mathrm{Tor}_i(M, N)^\vee$. D'altronde, $(F \otimes N)^\vee \simeq \mathrm{Hom}(F, N^\vee)$ per aggiunta di Hom e tensore.

Supponiamo ora che M sia finitamente generato. Consideriamo una risoluzione libera minimale di M e applichiamo $- \otimes N^\vee$. L'omologia del complesso così ottenuto è proprio $\mathrm{Tor}(M, N^\vee)$. Notiamo ora che

$$(F_i \otimes N^\vee)^\vee = \mathrm{Hom}(F_i \otimes N^\vee, E) \simeq \mathrm{Hom}(F_i, \mathrm{Hom}(N^\vee, E)) = \mathrm{Hom}(F_i, N)$$

e dunque per dualità di Matlis vale $F_i \otimes N^\vee \simeq \mathrm{Hom}(F_i, N)^\vee$. Di conseguenza, dualizzando il complesso, otteniamo il complesso $\mathrm{Hom}(F_i, N)^\vee$, che ha come omologia proprio $\mathrm{Ext}(M, N)^\vee$.

Anelli di Gorenstein e dualità locale

Definizione 38 *Sia R un anello locale. R si dice di Cohen-Macaulay se $\mathrm{depth}(R) = \mathrm{dim}(R)$.*

Nel caso degli anelli Cohen-Macaulay, vale la seguente caratterizzazione tramite la coomologia locale:

Proposizione 39 *Sia R un anello locale. R è Cohen-Macaulay se e solo se $H_m^i(R) = 0$ per ogni $i < \dim R$.*

Dimostrazione. Per definizione e per quanto visto fino ad ora, se R è di Cohen-Macaulay i gruppi di coomologia locale sono nulli.

Viceversa, procediamo per induzione sulla dimensione dell'anello. Se $\dim R = 0$, allora è ovvio (ogni anello artiniano è Cohen-Macaulay). Supponiamo allora $\dim R = d > 1$. Dato che $H_m^0(R) = 0$, m non è un primo associato di R in quanto $H_m^0(R) = \cup(0 : m^n)$. Di conseguenza esiste $x \in m$ non zero divisore e abbiamo la successione esatta

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\varphi_x} R \rightarrow R/(x) \rightarrow 0$$

Passando alla successione esatta lunga, otteniamo

$$H^{i-1}(R) \rightarrow H^{i-1}(R/(x)) \rightarrow H^i(R)$$

Se $i < d$, il primo e l'ultimo termine sono nulli, e dunque $H^i(R/(x)) = 0$ per $i \leq d - 1$. Notiamo che $\dim R/(x) = d - 1$ e dunque, per ipotesi induttiva, esiste una successione $y_1, \dots, y_{d-1}$ $R/(x)$ -regolare, da cui $x, y_1, \dots, y_{d-1}$ è una successione R -regolare. Allora R è Cohen-Macaulay, come voluto.

Cerchiamo ora di capire se possiamo trovare una simile caratterizzazione per gli anelli di Gorenstein:

Definizione 40 *Un anello locale noetheriano si dice Gorenstein se ha dimensione iniettiva finita su sè stesso.*

Osservazione 41 *Se R è un anello di Gorenstein, $\text{injdim } R = \text{depth } R$ per quanto visto nella parte sui moduli iniettivi.*

Proposizione 42 *Sia R un anello locale artiniano. Sono equivalenti:*

1. R è di Gorenstein
2. R ha dimensione iniettiva 0
3. $R \simeq E_R(k)$
4. $\dim_k(\text{Hom}_R(k, R)) = 1$.

Dimostrazione.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Notiamo che $\text{depth } R \leq \dim R$ e dunque sono entrambi nulli. D'altronde, $\text{depth } R = \text{injdim } R$ da cui la tesi.
- (2) $\Rightarrow$ (3) R è iniettivo per ipotesi e dato che l'unico iniettivo indecomponibile è $E = E_R(k)$, vale $R \simeq E_R(k)^s$. Notiamo che R è completo e dunque vale la dualità di Matlis. Di conseguenza

$$R^\vee \simeq E \simeq R^s \simeq (E^s)^\vee$$

da cui $s = 1$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Chiaramente la risoluzione iniettiva minimale di R è data da

$$0 \rightarrow E_R(k) \rightarrow 0$$

e dunque l'unico numero di Bass non nullo è $\mu_0(m, R) = 1$, che coincide con $\dim_k \operatorname{Hom}_R(k, R)$, da cui la tesi.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sia $I^\bullet$ una risoluzione iniettiva minimale di R . Notiamo che per l'ipotesi di artinianità, ogni modulo iniettivo su R è somma diretta di $E_R(k)$. Dunque il funtore Γ_m agisce in maniera banale e per ipotesi

$$\Gamma_m(R) \simeq I^0 \simeq E_R(k)$$

dove il secondo isomorfismo deriva dall'ipotesi sul numero di Bass, da cui la tesi.

Teorema 43 *Sia R un anello locale noetheriano di dimensione d . Sono equivalenti:*

1. R è Gorenstein
2. $\operatorname{injdim}_R(R) = d$
3. R è Cohen-Macaulay e $\dim_k \operatorname{Ext}^d(k, R) = 1$

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sia $t = \operatorname{depth} R$ e sia $x_1, \dots, x_t$ una successione R -regolare. Per quanto visto sulla dimensione iniettiva del quoziente per una successione regolare, detto $S = R/(x_1, \dots, x_t)$,

$$\operatorname{injdim}(S) = \operatorname{injdim}(R) - t = 0$$

Dunque S è iniettivo. Inoltre, S contiene una copia di k perché $\operatorname{depth} S = 0$ e dunque S deve contenere una copia di $E_S(k)$ per iniettività. Ma S è locale e dunque indecomponibile, da cui $S = E_S(k)$. Sappiamo però che $E_S(k)$ è artiniano e dunque lo è anche S . Ma allora $\dim S = 0$ e $\dim R = t = \operatorname{injdim} R$, come voluto.

(2) $\Rightarrow$ (3) Per ipotesi, $\operatorname{injdim} R = \operatorname{depth} R = \dim R$ e dunque R è Cohen-Macaulay. Sia $x_1, \dots, x_d$ una successione R -regolare e sia S la corrispondente riduzione artiniana. Allora S è Gorenstein e artiniano e dunque vale

$$\dim_k \operatorname{Ext}^d(k, R) = \dim_k(\operatorname{Hom}(k, S)) = 1$$

per la proposizione sui Gorenstein artiniani.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sia S la riduzione artiniana data dal quoziente per una successione R -regolare massimale. Allora S è Gorenstein (per la proposizione sugli artiniani) e dunque lo è anche R per la proposizione che riguarda la dimensione iniettiva per un elemento regolare.

Osservazione 44 Sia R un anello di Gorenstein di dimensione d . La teoria vista sui numeri di Bass permette di caratterizzare la risoluzione iniettiva minimale di R . Sappiamo infatti che la localizzazione di una risoluzione iniettiva minimale è ancora minimale; in particolare la localizzazione di anello di Gorenstein è ancora Gorenstein. Per la caratterizzazione dei numeri di Bass in termini di dimensione dello zoccolo di un modulo, vale allora che l' i -esimo modulo iniettivo della risoluzione libera minimale è dato da

$$I^s = \bigoplus_{\substack{p \in \text{Spec}(R) \\ \text{ht}(p)=s}} E_R(R/p)$$

Teorema 45 Sia R un anello locale di dimensione d . Allora R è di Gorenstein se e solo se R è Cohen-Macaulay e $H_m^d(R) \simeq E_R(k)$.

Dimostrazione. Supponiamo che R sia Cohen-Macaulay e $H_m^d(R) \simeq E_R(k)$. Possiamo supporre senza perdita di generalità che R sia completo. Procediamo per induzione su $d = \dim R$. Dato che R è Cohen-Macaulay, dato $x \in R$ non zero-divisore, abbiamo la successione esatta corta

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\varphi_x} R \rightarrow R/(x) \rightarrow 0$$

Passando alla successione esatta lunga della coomologia locale, otteniamo

$$0 \rightarrow H_m^{d-1}(R/xR) \rightarrow H_m^d(R) \xrightarrow{\varphi_x} H_m^d(R) \rightarrow 0$$

dove gli zeri sono dovuti al fatto che R è Cohen-Macaulay e al vanishing theorem. Dunque $H_m^{d-1}(R/xR)$ coincide con gli elementi annullati da x in $H_m^d(R)$, che per ipotesi è isomorfo a $E_R(k)$. Tali elementi possono anche essere identificati con

$$\text{Hom}_R(R/xR, E_R(k)) \simeq E_{R/xR}(k)$$

Per ipotesi induttiva, R/xR è di Gorenstein e dunque lo è anche R . Supponiamo ora che R sia di Gorenstein. Sappiamo già che R è di Cohen-Macaulay e dunque basta mostrare la condizione su $H_m^d(R)$. Procediamo tramite calcolo della coomologia come funtore derivato di Γ_m . Consideriamo la risoluzione iniettiva minimale $I^\bullet$ di R come descritta nell'osservazione e lavoriamo su un indecomponibile $E_R(R/p)$. Se $p \nmid m$, allora $\Gamma_m(E_R(R/p)) = 0$, in quanto per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste $r_i \in m^i/p^i$ che dunque non è un divisore di zero di $E_R(R/p)$. Dunque $(0 : m^i) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Se invece $p = m$, sappiamo che $\Gamma_m(E_R(R/p)) = E_R(R/p)$ (ogni elemento è annullato da una potenza di m) e dunque abbiamo mostrato quanto voluto.

Teorema 46 (Dualità locale) Sia R un anello di Gorenstein locale di dimensione d e sia M un modulo finitamente generato. Allora per ogni $0 \leq i \leq d$, vale $H_m^{d-i}(M) \simeq \text{Ext}_R^i(M, R)^\vee$. In particolare, se R è completo, sono duali di Matlis.

Dimostrazione. Dato che R è Cohen-Macaulay, vale necessariamente che i moduli di coomologia locale $H_m^i(R)$ sono nulli per ogni $i < d$. Sia $x_1, \dots, x_d$ una successione R -regolare. Il complesso di Čech $C(x_1, \dots, x_d, R)$ può essere visto come una risoluzione piatta di $H_m^d(R)$. Abbiamo visto che $\text{Ext}^i(M, R) \simeq \text{Tor}_i(M, E)$ e questo Tor può essere calcolato con la risoluzione fornita di $H_m^d(R)$, in quanto per il teorema precedente questo coincide con E . Notiamo però che in un caso dobbiamo considerare la coomologia e nell'altro l'omologia del complesso, da cui la tesi.

-