ESERCIZI 29/09

$\mathcal{G} \subseteq X \neq \phi$ $\quad \mathcal{G} \neq \phi$ $\quad \mathcal{G}$ ha la FIP allora

$\mathcal{F} = \{A \mid A \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n, A_i \in \mathcal{G}\}$ è un filtro su X

dim:

① $\phi \notin \mathcal{F}$: altrimenti $\phi \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$ ma $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \phi$ per $\mathcal{G}$ ha la FIP

$I \in \mathcal{F}$: ovvio, $\forall A \in \mathcal{G}$, $I \supseteq A \Rightarrow I \in \mathcal{F}$

② $A, B \in \mathcal{F}$, $A \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n$, $B \supseteq B_1 \cap \dots \cap B_m$, $A_i, B_i \in \mathcal{G}$,

dunque $A \cap B \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n \cap B_1 \cap \dots \cap B_m$, $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

③ $B \supseteq A \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n \Rightarrow B \supseteq A_1 \cap \dots \cap A_n \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

ES. $\mathcal{G}$ filtro

$A \notin \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ ha la FIP, $\Rightarrow \{A^c\} \cup \mathcal{G}$ ha la FIP

dim se per assurdo $A_1 \cap \dots \cap A_n = \phi$ con $A_i \in \{A^c\} \cup \mathcal{G}$

se $\nexists i$ $A_i = A^c$ allora $A_i \in \mathcal{G}$ che ha la FIP, assurdo

se $\exists i$ $A_i = A^c$, S.P.G. $A_n = A^c$, $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A^c = \phi$ cioè

$A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \subseteq A$ ma $A \in \mathcal{G}$ e $\mathcal{G}$ filtro ↯

ES

$\mathcal{U}$ ultrafiltro su I infinito se e solo se valgono le seguenti:

① $A \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{U}$ $\qquad$ ② $A \cup B \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$

dim se valgono ① e ② allora:

- $\mathcal{U}$ chiuso per sovrainsieme: siano $A \in \mathcal{U}$ e $B \supseteq A$ chiamando $C = B \setminus A$ per la due si ha $A \cup C \in \mathcal{U}$.
- $\phi \notin \mathcal{U}$, altrimenti $\mathcal{U} = \mathcal{P}(I)$ poiché chiuso per sovrainsiemi dunque la ① è falsa ↯ Dunque per la ① $I \in \mathcal{U}$
- $A, B \in \mathcal{U}$, $A = A \setminus B \cup (A \cap B)$ dunque per la ② $(A \cap B) \in \mathcal{U} \vee A \setminus B \in \mathcal{U}$, se per assurdo $A \cap B \notin \mathcal{U}$ allora $A \setminus B \in \mathcal{U}$ e per chiusura per sovrainsiemi $I \setminus B \in \mathcal{U}$ assurdo perché $B \in \mathcal{U}$ ↯

Viceversa se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro allora ① è vera per definizione, ② $\Leftarrow$ è vera per chiusa per sovrainsieme, dimostriamo allora ② $\Rightarrow$

$A \cup B \in \mathcal{U}$, se $B \in \mathcal{U}$ ok, altrimenti $B^c \in \mathcal{U}$ dunque

$(A \cup B) \cap B^c = A \setminus B \in \mathcal{U}$ e per chiusura per sovrainsieme $A \in \mathcal{U}$

ES: $\mathcal{U}$ ultrafiltro se e solo se
- $(A\cap B)^c \in \mathcal{U} \iff A\notin \mathcal{U}$ o $B\notin \mathcal{U}$

dim:
sostituendo A con B si ottiene la ① dell'es precedente
sostituendo A con A^c e B con B^c si ottiene la ② dell'es prec. usando la ②

ES: $\mathcal{U}$ ultrafiltro su $I \iff$ "$A_1\sqcup A_2\sqcup A_3 = I \Rightarrow \exists!\, i\ A_i\in\mathcal{U}$"

dim:
($\Longrightarrow$)

$A_1\sqcup A_2 \notin \mathcal{U} \Rightarrow A_1, A_2\notin\mathcal{U}$ e $A_3=(A_1\sqcup A_2)^c\in\mathcal{U}$ ok

$A_1\sqcup A_2 \in \mathcal{U}$, $A_2\sqcup A_3\in\mathcal{U} \Rightarrow (A_1\sqcup A_2)\cap(A_2\sqcup A_3)=A_2\in\mathcal{U}$ e $A_3, A_1\notin\mathcal{U}$ altrimenti
$A_2\cap A_3=\emptyset\in\mathcal{U}$

($\Longleftarrow$)
- $\emptyset\notin\mathcal{U}$ altrimenti scegliendo $A_1=A_2=A_3=\emptyset$ si ha $\forall i\ A_i\in\mathcal{U}$
  $I=I\sqcup\emptyset\sqcup\emptyset \Rightarrow I\in\mathcal{U}$
- $\emptyset\sqcup A\sqcup A^c = I \Rightarrow (A^c \in\mathcal{U} \iff A\notin\mathcal{U})$
- $A\in\mathcal{U}$, $B\supseteq A$, se per assurdo $B\notin\mathcal{U}\Rightarrow B^c\in\mathcal{U}$ ma $I = A\sqcup B\setminus A\sqcup B^c$ ↯
- Siano $A,B\in\mathcal{U}$ $\quad I=A^c\sqcup(A\setminus B)\sqcup(A\cap B)$, se per assurdo
  $A\cap B\notin\mathcal{U}$ allora $A\setminus B\in\mathcal{U}$ ma $I=\underbrace{}_{(B\cup A)^c}\sqcup(A\setminus B)\sqcup B$ ↯

ES. trovare un $\mathcal{G}$ non filtro t.c.
① $A\in\mathcal{G}$, $B\supset A \Rightarrow B\in\mathcal{G}$ ② $A\notin\mathcal{G}\iff A^c\in\mathcal{G}$

- Sia $\mathcal{G}\doteq\{A\subseteq\mathbb{N} \mid 0\in A$ e $\exists d$ dispari $d\in A\}\cup\{A\subseteq\mathbb{N}\mid\forall d$ dispari $d\in A\}$

① • $A\in\mathcal{G}$, $B\supseteq A$, se $0,d\in A\Rightarrow 0,d\in B$ se $\forall d\ d\in A \Rightarrow \forall d\in B \Rightarrow$ cioè $B\in\mathcal{G}$

② sia $A\notin\mathcal{G}$ se $0\notin A$ allora $0\in A^c$ e almeno un dispari d sta in A^c altrimenti tutti i dispari starebbero in A e $A\in\mathcal{G}$. se $0\in A$ allora tutti i dispari stanno in A^c altrimenti un dispari starebbe in A e $A\in\mathcal{G}$.

ES

$\mathcal{F}$ filtro allora $\mathcal{F}=\cap\,\mathcal{U}$
$\mathcal{U}\supseteq\mathcal{F}$
$\mathcal{U}$ ultrafilt.

dim:

Sia $\mathcal{F}' = \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F} \\ \mathcal{U} \text{ ultrafiltro}}} \mathcal{U}$, $\mathcal{F}'$ filtro in quanto intersezione di filtri

e ovviamento $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$

Sia $A \notin \mathcal{F}$ allora $\{A^c\} \cup \mathcal{F}$ ha la FIP e per ultrafilterlemma si estende a un filtro e poi a un ultrafiltro $\mathcal{U}$, poiché $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{U}$ $A \notin \mathcal{F}'$ $\Longrightarrow \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tesi.

Es:

Es:

Dimostrare il ultrafilter lemma per induzione transfinita.

Dim:

Fissiamo un insieme I e un filtro $\mathcal{F}$ su I.

Denotiamo con $F(\mathcal{G})$ il filtro generato da $\mathcal{G}$ (con $\mathcal{G}$ con FIP)

Sia $\alpha \in \mathrm{Ord}$ t.c. $|\mathcal{P}(I) \setminus \mathcal{F}| = |\alpha|$. E sia $f : \alpha \to \mathcal{P}(I) \setminus \mathcal{F}$ una bigezione.

Costruiamo per ricorsione transfinita $\mathcal{U} : \alpha+1 \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(I))$ così definita:

$\mathcal{U}(0) = \mathcal{F}$

$$\forall \beta < \alpha \quad \mathcal{U}(\beta+1) = \begin{cases} \mathcal{U}(\beta) & \text{se } f(\beta)^c \in \mathcal{U}(\beta) \\ F(\mathcal{U}(\beta) \cup f(\beta)) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha sicuramente la FIP e per formalità estendiamo $f(\alpha) = \emptyset$

$$\forall \lambda \leq \alpha \text{ limite} \quad \mathcal{U}(\lambda) = \bigcup_{\beta < \lambda} \mathcal{U}(\beta)$$

Verifichiamo per induzione transfinita su β che $\forall \beta \leq \alpha+1$ $\mathcal{U}(\beta)$ è un filtro e $\forall \beta' \leq \beta$ $\mathcal{U}(\beta') \subseteq \mathcal{U}(\beta)$:

- $\beta = 0$ ok
- $\beta = \gamma+1$ ~~$\mathcal{U}(\beta)$~~ se $f(\gamma)^c \in \mathcal{U}(\gamma)$ allora $\mathcal{U}(\beta) = \mathcal{U}(\gamma)$ che è un filtro per ipotesi induttiva e $\forall \beta' \leq \beta$ $\mathcal{U}(\beta') \subseteq \mathcal{U}(\gamma)$ " " "
- $\beta = \lambda$ ordinale limite

  $\mathcal{P} \doteq \{\mathcal{U}(\gamma) \mid \gamma < \lambda\}$ è Poset di filtri per ipotesi induttiva dunque $\mathcal{U}(\lambda)$ è unione di un poset di filtri quindi un filtro maggiorante di $\mathcal{P}$.

Adesso dimostriamo che $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\alpha+1)$ è un ultrafiltro

Sicuramente è un filtro per quanto appena detto.

Sia $A \notin \mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}(0) = \mathcal{F} \Rightarrow A \notin \mathcal{F} \Rightarrow \exists \beta < \alpha \quad A = f(\beta)$

Se poiché $A \notin \mathcal{U}(\beta+1) \subseteq \mathcal{U}$

$A^c = f(\beta)^c \in \mathcal{U}(\beta) \subseteq \mathcal{U}$

Sia $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \notin \mathcal{U}$ perché $\mathcal{U}$ filtro.

ES.

Se $\mu : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ μ misura con $\mu(I)=1$ finitamente additiva allora $\mathcal{U}_\mu = \{A \subseteq I \mid \mu(A) = 1\}$ è un ultrafiltro e $\forall i \; \mu(\{i\}) = 0 \iff \mathcal{U}_\mu$ non princ.

dim:

- $\mu(I) = 1 \Rightarrow I \in \mathcal{U}_\mu \qquad \mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset) = 0 \Rightarrow \emptyset \notin \mathcal{U}_\mu$
- $A \in \mathcal{U}_\mu \quad B \supseteq A \quad 1 \geq \mu(B) \geq \mu(A) = 1 \Rightarrow B \in \mathcal{U}_\mu$
- per $A, B \in \mathcal{U}_\mu \qquad \cancel{\mu(A\cap B)}\, 1 = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(B \setminus A) = 0$

$$1 = \mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) \Rightarrow \mu(B \cap A) = 1$$

$$B \cap A \in \mathcal{U}_\mu$$

ES:

X sp. top. Hausdorff $(x_i)_{i \in I}$ I-sequenza, $\mathcal{F}$ filtro su I allora esiste al più un limite $\mathcal{F}\text{-}\lim\limits_{i \in I} x_i$

dim:

Se per assurdo $y_1 \neq y_2$ sono due $\mathcal{F}$-lim della x_i sequenza allora, poiché X Hausdorff, $\exists\, U_1, U_2$ intorni rispettivamente di y_1, y_2 disgiunti t.c. $j = 1,2$

$J_j \doteq \{i \in I \mid x_i \in U_j\} \in \mathcal{F}$ ma poiché U_j disgiunti anche J_j disgiunti e $\emptyset \in \mathcal{F}$ ↯

ES:

$X \in \mathcal{T}op \quad Y \subseteq X \quad (y_i)_{i\in I} \subseteq Y$, $\mathcal{F}$ filtro su I

$y = \mathcal{F}\text{-}\lim_{i\in I} y_i$ allora $y \in \overline{Y}$

dim

$\forall U$ intorno di $y \quad J_U \doteq \{ i \in I \mid x_i \in U \} \subseteq |U \cap Y|$

ma $J_U \in \mathcal{F} \Rightarrow J_U \neq \emptyset \Rightarrow U \cap Y \neq \emptyset$

06/10/23

ES.

"Ponendo $(a,(b,c)) = ((a,b),c)$" dimostrare "l'associatività" del prodotto di ultrafiltri. Siano $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ ultrafiltri rispettivamente di I, J, K. $\forall X \subseteq A \times B$ $\forall a \in A$ si indica con X_a la sezione di X lungo a: $\{b \in B \mid (a,b) \in X\} = X_a$

Dato $X \subseteq A \times (B \times C)$ si indica con $\overline{X} \in (A \times B) \times C$ un insieme che soddisfa la seguente proprietà:

$$((a,b),c) \in \overline{X} \iff (a,(b,c)) \in X$$

dimostriamo un risultato preliminare: dato $X \subset A \times (B \times C)$ si ha che $\forall \alpha \in A$ $\forall Y \subset C$

$$\{b \in B \mid (X_\alpha)_b \in Y\} = \{(a,b) \in A \times B \mid \overline{X}_{(a,b)} \in Y\}_\alpha$$

infatti $\beta \in \{b \in B \mid (X_\alpha)_b \in Y\} \iff (X_\alpha)_\beta \in Y \iff$

$\{c \in C \mid (\alpha,(\beta,c)) \in X\} \in Y \iff$

$\{c \in C \mid ((\alpha,\beta),c) \in \overline{X}\} \in Y \iff \overline{X}_{(\alpha,\beta)} \in Y \iff$

$\beta \in \{b \in B \mid \overline{X}_{(\alpha,b)} \in Y\}$

Per dimostrare "l'associatività" di $\otimes$ dobbiamo dire che

$$X \in \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) \iff \overline{X} \in (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W},$$

dunque $X \in \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) \iff$

$\{i \in I \mid X_i \in (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})\} \in \mathcal{U} \iff$

$\{i \in I \mid \{j \in J \mid (X_i)_j \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \iff$ (per quanto detto sopra) $\{i \in I \mid \{(j_1,j_2) \in I \times J \mid \overline{X}_{(j_1,j_2)} \in \mathcal{W}\}_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \iff$

$\{(j_1,j_2) \in I \times J \mid \overline{X}_{(i,j)} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$

$\overline{X} \in (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W}$

ES

$\mathcal{U}\otimes V$ è un filtro con $\mathcal{U}$ e V filtri rispettivamente su I e J.

- $I\times J\in \mathcal{U}\otimes V$ $\phi \notin \mathcal{U}\otimes V$
- $A,B\in \mathcal{U}\otimes V \Rightarrow \{i\in I \mid (A\cap B)_i\in V\} = \{i\in I\mid A_i\in V\}\cap\{i\in I\mid B_i\in V\}\in \mathcal{U}$ poiché intersezione di elementi di $\mathcal{U}$
- $A\in \mathcal{U}\otimes V$, $A\subset B \Rightarrow$ poiché $\forall i\in I$ $A_i\subset B_i$ si ha $A_i\in V\to B_i\in V$ allora $\{i\in I\mid A_i\in V\}\subset\{i\in I\mid B_i\in V\}\in \mathcal{U}$ poiché $\mathcal{U}$ chiuso per sovra insieme

9/10 ULTRA

ES

Ogni insieme infinito parzialmente ordinato contiene una catena o un'anticatena infinite:

$(X,\dot{<})$ p.o. con $|X|=+\infty$ $\mathbb{N}\subseteq X$ WLOG

$(\mathbb{N},\dot{<})$ p.o. $[\mathbb{N}]^2 = C_1\sqcup C_2$ con $C_1=\left\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 \mid \begin{array}{l} a\dot{<}b \text{ oppure} \\ b\dot{<}a\end{array}\right\}$

per Ramsey esiste $H\subseteq\mathbb{N}$ $|H|=+\infty$ t.c. $[H]^2\subseteq C_1$ o $[H]^2\subseteq C_2$ il che conclude, H è una catena se $[H]^2\subseteq C_1$ un anticatena altrimenti.

ULTRAFILTRI RAMSEY

$\forall X\in\mathcal{U}^k=\mathcal{U}\otimes\cdots\otimes\mathcal{U}$ k volte con $\mathcal{U}$ ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$ $\exists\, H\subseteq\mathbb{N}$ $|H|=+\infty$ $[H]^k\subseteq X$.

Dim:

Indichiamo $\forall\, Y\in\mathcal{U}^i$ $\forall j\in\mathbb{N}$ $Y_i=\left\{(a_1,\dots,a_{i-1})\subseteq\mathbb{N}^{i-1}\mid \begin{array}{l}(i,a_1,\dots,a_{i-1})\\ \in Y\end{array}\right\}$

" con $\hat{Y}=\{a\in\mathbb{N}\mid Y_a\in\mathcal{U}^{i-1}\}$

Costruiamo H in questo modo

$h_0\in\hat{X}$

$$h_{n+1}\in\bigcap_{0\le j\le k-2}\ \bigcap_{0\le i_1<i_2<\dots<i_j\le n}\hat{X}_{h_{i_1},h_{i_2},\dots,h_{i_j}}\cap\bigcap_{0\le i_1<\dots<i_{k-1}\le n}X_{h_{i_1},h_{i_2},\dots,h_{i_{k-1}}}\cap(h_n,+\infty)$$

Dimostriamo per induzione su n che l'insieme fra cui scegliere h_{n+1} non è mai vuoto, anzi dimostriamo per induzione su n che gli insieme $X_{h_{i_1},h_{i_2},\dots,h_{i_j}}$ per $0\le i_1<i_2<\dots<i_j\le n$ con $j\le k-1$

appartiene a $\mathcal{U}^{k-j}$

se $i_j < n$ allora è vero per ipotesi induttiva

se $i_j = n$ allora per ipotesi induttiva si ha

$X_{h_{i_1},\dots,h_{i_{j-1}}} \in \mathcal{U}^{k-j-1}$ e poiché $h_n \in \hat{X}_{h_{i_1},\dots,h_{i_{j-1}}} \in \mathcal{U}$

allora $X_{h_{i_1},\dots,h_{i_j}} \in \mathcal{U}^{k-j}$ da cui l'insieme tra cui scegliere h_{n+1} e intersezione finita di elementi di $\mathcal{U}$ quindi non è vuoto.

Inoltre, $\forall (h_{i_1},\dots,h_{i_k}) \in [H]^k$ $i_1 < \dots < i_k$ si ha che $h_{i_k} \in X_{h_{i_1},\dots,h_{i_{k-1}}}$ dunque $(h_{i_1},\dots,h_{i_k}) \in X$ $\square$

ES

Trovare $X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ t.c. $X \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ per ogni $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ultrafiltri non principali su $\mathbb{N}$ ma t.c. $X \notin Fr \otimes Fr$

Si considerino gli insiemi $n\mathbb{N} = \{nx \mid x \in \mathbb{N}\}$ e $A_i = p_1\mathbb{N} \cup p_2\mathbb{N} \cup \dots \cup p_{i-1}\mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \setminus p_i\mathbb{N})$ dove p_i è l'i-esimo numero primo $(p_1 = 2 \;\; p_2 = 3 \;\; p_3 = 5 \dots)$. Allora dico che $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{i\} \times A_i$ ha le proprietà cercate, infatti

$\hat{X}_{Fr} = \{i \mid A_i \in Fr\} = \emptyset \notin Fr$ tuttavia $\hat{X}_{\mathcal{V}} = \{i \mid A_i \in \mathcal{V}\} \in Fr$

infatti se $\hat{X}_{\mathcal{V}} = \mathbb{N}$ ok altrimenti $\exists i$ $A_i \notin \mathcal{V}$ allora $\forall j > i$ in quanto $\forall j > i$

$A_i^c \in \mathcal{V}$ e $A_j \supseteq A_i^c$ $\quad$ $A_i \cup A_j = A_i \cup (A_j \setminus A_i) = \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \setminus p_i\mathbb{N} \subseteq A_i$ e $p_i\mathbb{N} \subseteq A_j$ quindi

$\Rightarrow A_j \setminus A_i = A_i^c$

ES

Dati $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ultrafiltri non principali su $\mathbb{N}$ dimostra che $\forall X \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ $\exists a_n, b_n$ cresc. t.c. $(a_n, b_m) \in X$ $\forall n < m$

Sia $a_0 = \min \hat{X} = \{x \mid X_x \in \mathcal{V}\}$ dove $X_x = \{y \mid (x,y) \in X\}$

$a_{n+1} = \min\left[\hat{X} \cap (a_n, +\infty)\right]$ osserviamo che $\hat{X}, (a_n, +\infty) \in \mathcal{U}$.

sia $b_0 \in X_{a_0}$ $\qquad b_{n+1} = \bigcap_{0 \le i \le n} X_{a_i} \in \mathcal{V}$ poiché intersezione finita di elementi di $\mathcal{V}$.

$\forall n < m$ $\qquad b_m \in X_{a_n}$ dunque $(a_n, b_m) \in X$

ES

] Δ_{fin}-set sono SPR.

Sia $X = C_1 \cup \cdots \cup C_2$ un Δ_{fin}-set

Dimostriamo che $\forall n \exists i \exists H \subseteq \mathbb{N}$ $|H| = n$ t.c. $H \ominus H \subseteq C_i$, questo implica che $\exists i \forall n \exists H \subseteq \mathbb{N}$ $|H| = n$ t.c. $H \ominus H \subseteq C_i$ perché 2 è finito, cioè la tesi.

Sia N t.c. $[\{1, \dots, N\}]^2 = D_1 \cup \cdots \cup D_2$ $\exists H \subseteq \{1, \dots, N\}$ con $|H| = n$ t.c. $\exists i$ $[H]^2 \subseteq D_i$ che esiste per Ramsey finito. Si considerino ora $x_1 < \cdots < x_N$ t.c.

$x_m - x_{m'} \in X$ $\forall m < m'$ che esistono per ipotesi.

Si consideri la partizione $[\{1, \dots, N\}]^2 = D_1 \cup \cdots \cup D_2$ t.c.

$\{m, m'\} \in D_i \Longleftrightarrow |x_m - x_{m'}| \in C_i$

Siano ora i e $K \subseteq \{1, \dots, N\}$ con $|K| = n$ t.c. $[K]^2 \subseteq D_i$ che esistono per la scelta di N. $K = \{i_1, \dots, i_n\}$

Dunque $\{i_j, i_{j'}\} \in D_i$ $\forall j, j \in K$ cioè $|x_{i_j} - x_{i_{j'}}| \in C_i$

cioè $H = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$ è l'insieme cercato.

ES

$\bar{d}$

La densità asintotica superiore non è additiva

Infatti $\exists A, B \subseteq \mathbb{N}$ disgiunti t.c. $\bar{d}(A) = \bar{d}(B) = \bar{d}(\mathbb{N}) = 1$

Definiamo una successione n_i che useremo per definire A e B tramite le funzioni caratteristica

$$\chi_A = \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{[n_{2i}, n_{2i+1})} \qquad \chi_B = \sum \chi_{[n_{2i+1}, n_{2i+2})}$$

Sia n_i t.c. $n_0 = 0$ e

$$n_{2i+1} = \min\left\{ n > n_{2i} \,\middle|\, \left[\sum_{k=0}^{i-1}(n_{2k+1} - n_{2k}) + n - n_{2i}\right]\frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{i}\right\}$$

$$n_{2i+2} = \min\left\{ n > n_{2i+1} \,\middle|\, \left[n - n_{2i+1} + \sum_{k=0}^{i-1}(n_{2k+2} - n_{2k+1})\right]\frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{i}\right\}$$

Dalle definizione segue che

$$\limsup_n \frac{|A \cap [0,n]|}{n} \geq \limsup_i \frac{|A \cap [0, n_{2i+1})|}{n_{2i+1}} =$$

$$= \limsup_i \sum_{k=0}^{i} \frac{n_{2k+1} - n_{2k}}{n_{2i+1}} \geq \limsup_i 1 - \frac{1}{i} = 1$$

analogamente $\bar{d}(B) = 1$

ES.

A è Δ^* $\Longrightarrow$ A è sindedico

dim: supponiamo per assurdo che A non sia sindedico allora costruiamo una succ. cresc. x_n t.c. chiamato $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ si ha $(X_n \ominus X_n) \cap A = \phi$, da questo segue che, chiamato $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \{x_i\}$, $(X \ominus X) \cap A = \phi$, il che contraddice che A sia Δ^*.

$x_1 = 0$ $\quad X_1 \ominus X_1 = \phi$ quindi P.B. OK

P.I. Supponiamo che $\exists x_1 > \dots > x_n$ t.c. $(X_n \ominus X_n) \cap A = \phi$, allora sia $x > 0$ t.c. $[x, x + x_n] \cap A = \phi$ che esiste perché A sindedico. Si chiami $x_{n+1} = x + x_n$.

$(X_{n+1} \ominus X_{n+1}) \cap A = (X_n \ominus X_n) \cap A \cup \{x_{n+1} - x' \mid x' \in X_n\} \cap A)$

$= \{x_{n+1} - x' \mid x' \in X_n\} \cap A \underset{\downarrow}{\subseteq} [x, x + x_n] \cap A = \phi$

poiché $\forall x_i \in X \quad i \leq n$ quindi $x_i \leq x_n \quad x \leq x_{n+1} - x_i \leq x + x_n$

$\square$

ES.

Sia (X, μ) spazio di probabilità. $A_n \subseteq X$ t.c. $\mu(A_n) \geq \varepsilon > 0$

Allora $\exists n_k$ t.c. A_{n_k} ha la FIP, cioè $\mu(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{n_k}) > 0$

Dimostriamo dapprima che

(*) Dato B e B_n t.c. $\mu(B \cap B_n) \geq \varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon_1 > 0$ n_k e $\bar{n}$ t.c.
$\mu(B_{\bar{n}} \cap B_{n_k} \cap B) \geq \varepsilon_1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Se per assurdo (*) fosse falso allora esisterebbero $\tilde{n}_1$ e $n_k^{(1)} \subseteq n_k$ t.c. $\mu(B \cap B_{\tilde{n}_1} \cap B_{n_k^1}) \leq \frac{1}{4}\varepsilon$. Ora, supponendo di avere

$\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_h$ t.c. $\mu(B \cap (B_{\tilde{n}_1} \cup B_{\tilde{n}_2} \cup \cdots \cup B_{\tilde{n}_h})) \geq h \cdot \frac{2}{3}\varepsilon$ e $n_k^{(h)}$ t.c. $\mu(B \cap (B_{\tilde{n}_1} \cup \cdots \cup B_{\tilde{n}_h}) \cap B_{n_k^{(h)}}) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{h} (\frac{1}{4})^i$, poiché avevamo supposto (*) falso, esisterebbero $\tilde{n}_{h+1} \in \{n_k^{(h)}\}_k$ e $n_k^{(h+1)}$ sottosucc. di $n_k^{(h)}$ t.c., ricordando che $\mu(B \cap B_n) \geq \varepsilon$, $\mu(B \cap (B_{\tilde{n}_1} \cup \cdots \cup B_{\tilde{n}_{h+1}}) \geq h \cdot \frac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon - \varepsilon \sum_{i=1}^{h} (\frac{1}{4})^i \geq (h+1)\frac{2}{3}\varepsilon$

e $\mu(B \cap (B_{\tilde{n}_1} \cup \cdots \cup B_{\tilde{n}_{h+1}}) \cap B_{n_k^{(h+1)}}) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{h+1} (\frac{1}{4})^i$. Ovvero per ricorsione avremmo N t.c. $\mu(B \cap (B_{\tilde{n}_1} \cup \cdots \cup B_{\tilde{n}_N}) > 1$ ↯

Dunque usando (*) possiamo costruire a partire da A_n una succ. $A_{\bar{n}_k}$ t.c.

$\mu(A_{\bar{n}_1} \cap \cdots \cap A_{\bar{n}_k}) \geq \varepsilon_k > 0$

$\square$

ES A Δ-set allora $\exists N \forall n \geq N \exists i$ t.c. $\{a \in A \mid a \equiv i \ (n)\}$ è infinito

dim $x_n \uparrow$ $\quad X = \{x_n\}$ $\quad X \ominus X \subset A$ prendiamo $x_0 \neq 0$

per ogni $n \geq N = x_1$ esiste $0 < j \leq n$ t.c. $\{x \in X \mid x \equiv j \ (n)\}$ è infinito. Se $j \equiv x_1 (n)$ allora si pone $i = x_1 - x_0 (n)$ e si verifica che $X \ominus \{x_0\} \cap \{a \in A \mid a \equiv i \ (n)\}$ è infinito

altrimenti si pone $i \equiv j - x_1$ e si verifica che $X \ominus \{x_1\} \cap \{a \in A \mid a \equiv i \ (n)\}$ è ugualmente infinito

ES A è Δ-set allora $\forall n$ $A/n = \{k \mid kn \in A\}$ è Δ-set

dim Sia $x \uparrow$ $\quad X = \{x\}$ e A t.c. $X \ominus X \subset A$. Poiché unione di finiti è finita e X è infinito si ha $\forall n \exists i$ $0 \leq i < n$ t.c. $\{j \mid x_j \equiv i \ (n)\}$ è infinito. A meno di passare a sotto successioni si può supporre $x_k = y_k \cdot n + i$ da cui

$$\{y_k \cdot n\}_k \ominus \{y_k \cdot n\}_k = \{y_k \cdot n + i\}_k \ominus \{y_k \cdot n + i\}_k \subset A \quad \text{da cui}$$

$$\{y_k\}_k \ominus \{y_k\}_k \subset A/n$$ cioè la tesi.

ES

Ramsey infinito $\Rightarrow$ Ramsey finito dim:

Dobbiamo dimostrare che $\forall k \forall r \forall m \exists N \forall [\{1, \dots, N\}]^k = C_1 \cup \dots \cup C_r$ $\exists H \subseteq \{1, \dots, N\}$ $|H| = m$ $\exists i$ $[H]^k \subseteq C_i$

fissiamo k, r, m. Si considerino $\mathcal{A}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}^*$ di cardinalità m, questa per Ramsey infinito è, in particolare, r-regolare. Dunque $\exists Y \subseteq \mathbb{N}$ finito, che possiamo assumere essere un segmento iniziale, t.c. $\mathcal{A}$ è r-regolare su Y. Si prenda come N la cardinalità di Y. L'esistenza di Y è garantita dal teorema di compattezza combinatoria

ES $\mathcal{A}$ famiglia di insiemi finiti, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{A}$ r-regolare su X. Allora $\exists\, \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito r-regolare su X

dim Sia $Y \subset X$ finito garantito dalla compattezza combinatoria tale per cui $\mathcal{A}$ è r-regolare su Y. Si consideri il sottoinsieme di $\mathcal{A}$ finito $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{A}_0$ è r-regolare su X. Infatti se

$X = \bigsqcup_{i=1}^{r} C_i$ si ha $Y = \bigsqcup_{i=1}^{r} C_i \cap Y$ quindi

$\exists\, a \in \mathcal{A}$ t.c. $a \in C_i$ per qualche i. Dunque

$a \subset Y \cap C_i \in \mathcal{P}(Y) \Rightarrow a \in \mathcal{A}_0$ e $a \subset C_i$