Seconda Consegna
Elementi
di
Topologia Algebrica

Cristian Sopio
Mat:559597

April 2020

ALGEBRAIC TOPOLOGY
Homework 2

1. Let P be a point of the topological space X. Show that the natural maps $H_i(X) \to H_i(X, \{P\})$ induce isomorphisms $\tilde{H}_i(X) \cong H_i(X, \{P\})$ for all $i \geq 0$.

2. Let X be a CW complex, and $Y \subset X$ a subcomplex (i.e. a CW complex which is a union of cells of X). Verify that

$$H_i(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}\langle \Gamma \rangle & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

where $\mathbf{Z}\langle \Gamma \rangle$ is the free abelian group generated by the set Γ of n-cells in $X \setminus Y$.

3. *a*) With notation as in the previous exercise, construct long exact homology sequences

$$\cdots \to H_i(X^n \cup Y, Y) \to H_i(X, Y) \to H_i(X, X^n \cup Y) \to H_{i-1}(X^n \cup Y, Y) \to \cdots$$

and

$$\cdots \to H_i(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \to H_i(X^p \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \to H_i(X^p \cup Y, X^n \cup Y) \to$$
$$\to H_{i-1}(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \to \cdots$$

for $p \geq n$.

b) Show that $H_i(X, X^n \cup Y) = 0$ for $i \leq n$.

c) Conclude that the map $H_i(X^n \cup Y, Y) \to H_i(X, Y)$ is an isomorphism for $i < n$.

4. *a*) Using the groups $H_n(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y)$ define a complex $C_\bullet^{CW}(X, Y)$ by analogy with the complex $C_\bullet^{CW}(X)$ defined in class and construct isomorphisms

$$H_i(C_\bullet^{CW}(X, Y)) \xrightarrow{\sim} H_i(X, Y)$$

for all i.

b) Let X/Y be the quotient space obtained from X by identifying all points of Y with a point $P \in Y$. Using *a*) and Exercises 1, 2 construct isomorphisms

$$H_i(X, Y) \xrightarrow{\sim} H_i(X/Y, \{P\}) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_i(X/Y).$$

[Do NOT use Prop. 2.22 in Hatcher's book which we did not prove in class.]

5. A connected finite graph X is a *tree* if it has no loops and for every vertex $P \in X$ the space $X \setminus \{P\}$ is disconnected. It is easy to show by induction that every connected finite graph X contains a tree T as a CW subcomplex with the same set of vertices ('spanning tree'). Note that T is contractible.

a) Show using Exercise 4 that X/T, which is topologically a bunch of circles meeting at a point, satisfies $H_i(X) \cong H_i(X/T)$ for all i.

b) Compute the homology groups of the CW complex X/T using the complex $C_\bullet^{CW}(X/T)$.

c) Using *a*) and *b*) above compute the homology groups of the finite graph X (this method is different from the one seen in class).

Nota: Indichiamo che, dati A, B gruppi abeliani, $A \longrightarrow B$ è un isomorfismo ($A \simeq B$) con

$$A \xrightarrow{\sim} B$$

Esercizio 1.

Per ogni $i > 0$, abbiamo che

$$\mathcal{H}_i(X) \simeq \tilde{\mathcal{H}}_i(X).$$

Sfruttando quindi la sequenza esatta dell'omologia relativa di X rispetto a P, si ha

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_{i+1}(P) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{i+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{i+1}(X,P) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_i(P) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \tilde{\mathcal{H}}_{i+1}(X) \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{H}_{i+1}(X,P) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

e concludiamo che $\tilde{\mathcal{H}}_{i+1}(X) \simeq \mathcal{H}_{i+1}(X, P)$
Per affrontare l'$\mathcal{H}_0(X, P)$, abbiamo visto a lezione

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_0(P) \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "id"] & \mathcal{H}_0(X) \arrow[r, "\eta"] & \mathcal{H}_0(P)
\end{tikzcd}$$

che $\eta \circ i = id_{\mathcal{H}_0(P)}$, per cui i è iniettiva. Considerando la fine della sequenza dell'omologia relativa di X rispetto a P, abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_1(P) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(X,P) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(P) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(X,P) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \tilde{\mathcal{H}}_1(X) \arrow[r] & \mathcal{H}_1(X,P) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] & \mathbb{Z} \oplus \tilde{\mathcal{H}}_0(X) \arrow[r, "f"] & \mathcal{H}_0(X,P) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

essendo quindi i iniettiva $\tilde{\mathcal{H}}_1(X) \simeq \mathcal{H}_1(X, P)$, per l'esattezza della sequenza. Sempre per esattezza f è surgettiva e $\ker f = \mathbb{Z}$ e quindi $\tilde{\mathcal{H}}_0(X) \simeq \mathcal{H}_0(X, P)$.

Esercizio 2.

Vogliamo replicare la dimostrazione fatta a lezione che

$$\mathcal{H}_i(X^n, X^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}\langle\Lambda\rangle & i = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con Λ un insieme di indici per le n celle di X.
Quindi chiamiamo Γ un insieme di indici per le n celle di X che non sono n celle di Y, e $\forall \alpha \in \Gamma$ sia $\Phi_\alpha : E^n_\alpha \longrightarrow X^n$ la mappa caratteristica di e^n_α. Sia $D^n_\alpha \subset E^n_\alpha$ una palla chiusa e definiamo $D^n = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} \Phi_\alpha(D^n_\alpha)$. Definiamo $a_\alpha = \Phi_\alpha(0_\alpha)$ con 0_α il centro di D^n_α e $A = \{a_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. Abbiamo allora

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_i(D^n, D^n \setminus A) \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{H}_i(X^n \cup Y, (X^n \cup Y) \setminus A) & \mathcal{H}_i(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \arrow[l, "k"'] \\
\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{H}_i(D^n_\alpha, D^n_\alpha \setminus \{0_\alpha\}) \arrow[r, "f_2"] \arrow[u, "\Phi_\alpha"] & \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{H}_i(E^n_\alpha, E^n_\alpha \setminus \{0_\alpha\}) \arrow[u, "\Phi_\alpha"] & \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{H}_i(E^n_\alpha, S^{n-1}_\alpha) \arrow[l, "h"'] \arrow[u, "\Phi_\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Dove f_1 e f_2 sono isomorfismi dati dal lemma di escissione e h e k sono isomorfismi ottenuti per retrazione per deformazione. A questo punto la dimostrazione è analoga a quella vista a lezione a pagina 24 delle *handwritten notes* (`http://pagine.dm.unipi.it/tamas/algtop.pdf`). Per cui

$$\mathcal{H}_i(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}\langle\Gamma\rangle & i = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 3.

a) Per il primo punto vogliamo sfruttare il

Lemma. *Una sequenza esatta corta di complessi*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \longrightarrow B_\bullet \longrightarrow C_\bullet \longrightarrow 0$$

induce una sequenza esatta lunga

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_i(A_\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}_i(B_\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}_i(C_\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}_{i-1}(A_\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}_{i-1}(B_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Per la prima sequenza usiamo

$$\begin{aligned} A_\bullet &= S_\bullet(X^n \cup Y, Y) \\ B_\bullet &= S_\bullet(X, Y) \\ C_\bullet &= S_\bullet(X, X^n \cup Y) \end{aligned}$$

Per la seconda invece

$$\begin{aligned} A_\bullet &= S_\bullet(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \\ B_\bullet &= S_\bullet(X^p \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \\ C_\bullet &= S_\bullet(X^p \cup Y, X^n \cup Y). \end{aligned}$$

Otteniamo così le sequenze esatte lunghe cercate in quanto, nel primo caso

$$C_\bullet \simeq S_\bullet(X)/S_\bullet(X^n \cup Y) \simeq \frac{S_\bullet(X)}{S_\bullet(Y)} \bigg/ \frac{S_\bullet(X^n \cup Y)}{S_\bullet(Y)} \;,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal terzo teorema di isomorfismo. La conclusione nel secondo caso è analoga.

b) Per $i < n$ osserviamo che $(X^n \cup Y)^n = X^n$ da cui, per quanto visto a lezione,

$$\mathcal{H}_i(X^n \cup Y) \simeq \mathcal{H}_i((X^n \cup Y)^n) \simeq \mathcal{H}_i(X^n) \simeq \mathcal{H}_i(X).$$

Consideriamo allora le sequenze dell'omologia relativa di X rispetto a $X^n \cup Y$ e di X rispetto a se stesso

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_i(X^n \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_i(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_i(X, X^n \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{H}_{i-1}(X^n \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{i-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_i(X) \arrow[r] & \mathcal{H}_i(X) \arrow[r] & \mathcal{H}_i(X, X) \arrow[r] & \mathcal{H}_{i-1}(X) \arrow[r] & \mathcal{H}_{i-1}(X) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

dove per il lemma dei 5, abbiamo che f è un isomorfismo e quindi $\mathcal{H}_i(X, X^n \cup Y) \simeq 0$ per $i < n$

Adesso invece sfruttando la seconda sequenza esatta del punto a) con $i = n$, e indici $n+1$ e n e $p > n$

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_n(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_n(X^p \cup Y, X^n \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_n(X^p \cup Y, X^{n+1} \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{H}_n(X, X^n \cup Y) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

dove il primo zero è dato dall'esercizio 2, il secondo segue dal fatto che $n < n+1$ e l'isomorfismo centrale dal fatto che $p > n$, sfruttando il lemma dei 5 con le sequenze dell'omologia relativa di $X^p \cup Y$ rispetto a $X^n \cup Y$ e quella di X rispetto a $X^n \cup Y$.
Quindi per esattezza $\mathcal{H}_n(X, X^n \cup Y) \simeq 0$.

c) Dalla prima sequenza del punto a) e per il punto b), abbiamo per ogni $i > n$ la sequenza esatta

$$
\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{H}_i(X^n \cup Y, Y) \xrightarrow{f} \mathcal{H}_i(X, Y) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots
$$

e per esattezza abbiamo che f è un isomorfismo.

Esercizio 4.

a) Analogamente a quanto fatto nel punto a) del terzo esercizio si trova la sequenza esatta lunga

$$
\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_n(X^{n-1} \cup Y, Y) \longrightarrow \mathcal{H}_n(X^n \cup Y, Y) \longrightarrow \mathcal{H}_n(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, Y) \longrightarrow \cdots
$$

Consideriamo allora il diagramma commutativo con le diagonali esatte

$$
\begin{tikzcd}
0 \simeq \mathcal{H}_n(X^{n-1} \cup Y, Y) \arrow[dr] & & \mathcal{H}_n(X^{n+1} \cup Y, Y) \simeq \mathcal{H}_n(X, Y) & & \\
& \mathcal{H}_n(X^n \cup Y, Y) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\mathcal{H}_{n+1}(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathcal{H}_n(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{H}_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, X^{n-2} \cup Y) \\
& & & \mathcal{H}_{n-1}(X^n \cup Y, Y) \arrow[ur] & \\
& & 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Notiamo subito che la composizione $\mathcal{H}_{n+1}(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y) \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, X^{n-2} \cup Y)$ è la mappa nulla, perché lo è già la mappa $\mathcal{H}_n(X^n \cup Y, Y) \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}(X^n \cup Y, Y)$.
Ora, $\mathcal{H}_n(X^{n+1} \cup Y, Y) \simeq \mathcal{H}_n(X, Y)$ per il punto c) del terzo esercizio e $\mathcal{H}_i(X^n \cup Y, Y) \simeq 0$ se $i > n$. Quest'ultimo fatto si può dimostrare per induzione su n.
Per $n = 0$, diventa ovvio dal fatto che $\mathcal{H}_i(X^0 \cup Y) \simeq \left(\bigoplus_{\alpha \in (X \setminus Y)^0} \mathcal{H}_i(X^0_\alpha)\right) \oplus \mathcal{H}_i(Y)$.

Se $n > 0$, per ipotesi induttiva abbiamo che $\mathcal{H}_i(X^{n-1} \cup Y, Y) \simeq 0$ se $i > n-1$. Per concludere bisogna mostrare che, se $i > n$, $\mathcal{H}_i(X^n \cup Y, Y) \simeq \mathcal{H}_i(X^{n-1} \cup Y, Y) \simeq \mathcal{H}_{i+1}(X^{n-1} \cup Y, Y)$: sfruttando la sequenza lunga definita all'inizio dell'esercizio, abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathcal{H}_{i+1}(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{i+1}(X^{n-1} \cup Y, Y) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_i(X^n \cup Y, Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_i(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{H}_{i+1}(X^{n-1} \cup Y, Y) \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{H}_i(X^n \cup Y, Y) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

dove il primo e l'ultimo isomorfismo sono dati dall'esercizio 2 essendo $i > n$ e per esattezza concludiamo che ∂ è un isomorfismo.
Abbiamo allora ottenuto un diagramma formalmente identico a quello della dimostrazione a pagina 25 delle *handwritten notes* (`http://pagine.dm.unipi.it/tamas/algtop.pdf`): procedendo allo stesso modo si conclude che

$$\mathcal{H}_n(C_\bullet^{CW}(X, Y)) \simeq \mathcal{H}_n(X, Y)$$

b) Vogliamo definire un isomorfismo di complessi tra

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y) \longrightarrow \mathcal{H}_n(X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y) \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}(X^{n-1} \cup Y, X^{n-2} \cup Y) \longrightarrow \cdots$$

e

$$\longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}((X/Y)^{n+1} \cup P, (X/Y)^n \cup P) \longrightarrow \mathcal{H}_n((X/Y)^n \cup P, (X/Y)^{n-1} \cup P) \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1}((X/Y)^{n-1} \cup P, (X/Y)^{n-2} \cup P) \longrightarrow$$

Per ogni n abbiamo la proiezione naturale da

$$(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y) \longrightarrow ((X/Y)^{n+1} \cup P, (X/Y)^n \cup P)$$

e questa mappa è funtoriale, quindi induce un morfismo tra

$$\mathcal{H}_{n+1}(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y) \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}((X/Y)^{n+1} \cup P, (X/Y)^n \cup P)$$

che fornisce un morfismo di complessi perché la proiezione è cellulare. Ora essendo $\mathcal{H}_{n+1}(X^{n+1} \cup Y, X^n \cup Y)$ e $\mathcal{H}_{n+1}((X/Y)^{n+1} \cup P, (X/Y)^n \cup P)$, per quanto visto nell'esercizio 2, $\mathbb{Z}\langle\Gamma\rangle$ con Γ un insieme di indici per il numero di n celle di X che non sono n celle di Y ed essendo la mappa cellulare, il morfismo ottenuto è un isomorfismo di complessi. Allora fare l'omologia di un complesso o dell'altro è equivalente e quindi, usando il punto a), calcolando l'omologia cellulare, abbiamo

$$\mathcal{H}_n(X, Y) \simeq \mathcal{H}_n((X/Y), P).$$

Infine

$$\mathcal{H}_n((X/Y), P) \simeq \tilde{\mathcal{H}}_n(X/Y)$$

per il primo esercizio con $X = X/T$

Esercizio 5.

a) Per ogni $i > 0$, essendo T contrattile, abbiamo la sequenza data dall'omologia relativa di X rispetto a T

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_{i+1}(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{i+1}(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_{i+1}(X,T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_i(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{H}_{i+1}(X) \arrow[r, "f"] & \mathcal{H}_{i+1}(X,T) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

e f è un isomorfismo per esattezza. Ricordando che

$$\mathcal{H}_{i+1}(X) \simeq \mathcal{H}_{i+1}(X,T) \simeq \mathcal{H}_{i+1}(X/T,\{P\}) \simeq \tilde{\mathcal{H}}_{i+1}(X/T) \simeq \mathcal{H}_{i+1}(X/T)$$

dove le uguaglianze sopra seguono dagli esercizi precedenti, e che l'omologia ridotta per $i > 0$ coincide con l'omologia, otteniamo l'isomorfismo cercato.
Se adesso $i = 0$, la tesi è vera essendo X e X/T connessi per archi. Per $i = 1$ considerando la fine della sequenza dell'omologia relativa di X rispetto a T, abbiamo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{H}_1(T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(X) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_1(X,T) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(T) \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_0(X,T) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathcal{H}_1(X) \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{H}_1(X,T) \arrow[r, "f_2"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f_3"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

e, per l'esercizio 4, abbiamo che $\mathcal{H}_0(X,T) \simeq \mathcal{H}_0(X/T,\{P\}) \simeq \tilde{\mathcal{H}}_0(X/T) \simeq 0$ essendo X/T connesso per archi.
Abbiamo allora che f_3 è surgettiva e quindi è un isomorfismo ($\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$), quindi per esattezza $\operatorname{im} f_2 \simeq \{0\}$ e quindi $\operatorname{im} f_1 \simeq \mathcal{H}_1(X,T)$ e quindi f_1 è un isomorfsmo, essendo iniettiva e surgettiva.

b) Consideriamo il seguente diagramma commutativo con le diagonali esatte, ricordando che per $i > 1$, $\mathcal{H}_i(X/T) \simeq 0$ e la sequenza esatta dell'omologia relativa di $(X/T)^1$ rispetto a $(X/T)^0$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "d_2"] & \mathcal{H}_1((X/T)^1,(X/T)^0) \simeq \mathbb{Z}^r \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, "d_1"] & & \mathcal{H}_0((X/T)^0) \arrow[r] & 0 \\
& & \mathcal{H}_0((X/T)^0) \simeq \mathbb{Z} \arrow[ur, "id"] \arrow[dr, "f"] & & \\
& 0 \arrow[ur] & & \mathcal{H}_0((X/T)^1) \simeq \mathbb{Z} \arrow[dr] & \\
& & & & 0
\end{tikzcd}$$

Abbiamo che $\mathcal{H}_0((X/T)^1) \simeq \mathbb{Z}$ perché X/T è connesso per archi e $\mathcal{H}_0((X/T)^0) \simeq \mathbb{Z}$ in quanto $(X/T)^0$ è formato da un solo punto. Abbiamo allora che $\mathcal{H}_1(C_\bullet^{CW}(X/T)) = \ker d_1$ ed essendo f surgettiva, è un isomorfismo, quindi, per esattezza, $\ker d_1 \simeq \mathcal{H}_1(C_\bullet^{CW}(X/T)) \simeq \mathbb{Z}^r$ con r il numero di 1-*celle* di X che non sono 1-*celle* di T. Per cui

$$\mathcal{H}_i(C_\bullet^{CW}(X/T)) \simeq \begin{cases} 0 & \text{se } i > 1 \\ \mathbb{Z}^r & \text{se } i = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

c) Grazie al punto a), basta trovare l'omologia di X/T; d'altra parte, per quanto visto a lezione, $\mathcal{H}_i(C_\bullet^{CW}(X/T)) \simeq Hi(X/T)$, e il punto b) conclude.