Terza Consegna
Elementi
di
Topologia Algebrica

Cristian Sopio
Mat:559597

May 2020

ALGEBRAIC TOPOLOGY
Homework 3

1. Let X be a topological space such that the homology groups $H_i(X)$ are finitely generated free abelian groups for all i.

Show that the Eilenberg–Zilber map

$$S_\bullet(X \times X) \to S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)$$

induces isomorphisms

$$\alpha_n : \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, \mathbf{Z}) \otimes H^j(X, \mathbf{Z}) \cong H^n(X \times X, \mathbf{Z})$$

for all $n \geq 0$. (Special case of the Künneth formula.)

2. Consider elements $x_i \otimes x_j \in H^i(X, \mathbf{Z}) \otimes H^j(X, \mathbf{Z})$ and $x_p \otimes x_q \in H^p(X, \mathbf{Z}) \otimes H^q(X, \mathbf{Z})$. With notation as in the previous exercise, verify that

$$\alpha_{i+j}(x_i \otimes x_j) \cup \alpha_{p+q}(x_p \otimes x_q) = (-1)^{jp} \alpha_{i+j+p+q}((x_i \cup x_p) \otimes (x_j \cup x_q)).$$

3. Using the previous two exercises, compute the cohomology ring $H^*(S^1 \times S^1)$.

[*Bonus question:* Can you generalize your answer to $(S^1)^{\times n}$ (n-th direct power)?]

4. *a*) Let $\pi : Y \to X$ be a covering space of X, where both X and Y are connected n-dimensional manifolds. Show that if X is orientable, then Y is also orientable. Moreover, we may find orientations in such a way that $\mu_{\pi(y)} = \mu_y$ for local orientations at every point $y \in Y$.

b) Using the covering space $S^n \to \mathbf{RP}^n$, deduce that $\mathbf{RP}^n$ is orientable if and only if n is odd.

5. Show that if X is a connected n-dimensional *noncompact* orientable manifold, then $H_n(X) = 0$.

Nota: Indichiamo che, dati A, B gruppi abeliani, $A \longrightarrow B$ è un isomorfismo ($A \simeq B$) con

$$A \xrightarrow{\sim} B$$

Esercizio 1.(Risolto con Federico Butori)

Consideriamo la sequenza esatta corta di complessi

$$0 \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes Z_\bullet \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X) \otimes B_{\bullet_{[-1]}} \longrightarrow 0$$

dove indichiamo con $Z_\bullet = \ker d_\bullet$, con $d_\bullet$ i differenziali del complesso $S_\bullet(X)$ e $B_{\bullet_{[-1]}} = \operatorname{im} d_{\bullet_{[-1]}}$
Allora, usando la proposizione 2.1 delle dispense sul sito del corso (`http://pagine.dm.unipi.it/tamas/mw.pdf`), otteniamo in omologia la sequenza esatta lunga

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}_n(S_\bullet \otimes Z_\bullet) \longrightarrow \mathcal{H}_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)) \longrightarrow \mathcal{H}_n(S_\bullet(X) \otimes B_{\bullet_{[-1]}}) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{H}_{n-1}(S_\bullet \otimes Z_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Ora seguendo la costruzione di tale sequenza si verifica facilmente che le mappe ∂_n sono iniettive.
Inoltre i complessi $Z_\bullet$ e $B_{\bullet_{[-1]}}$, hanno i differenziali banali, essendo tali le restrizioni dei differenziali di $S_\bullet(X)$ e quindi, ad esempio per $S_\bullet \otimes Z_\bullet$, abbiamo che

$$\mathcal{H}_n(S_\bullet \otimes Z_\bullet) \simeq \frac{\ker\left(\bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes S_j(X) \to \bigoplus_{i+j=n-1} Z_i \otimes S_j(X)\right)}{\operatorname{im}\left(\bigoplus_{i+j=n+1} Z_i \otimes S_j(X) \to \bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes S_j(X)\right)}$$

ma

$$\ker\left(\bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes S_j(X) \to \bigoplus_{i+j=n-1} Z_i \otimes S_j(X)\right) \simeq \bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes Z_j$$

e

$$\operatorname{im}\left(\bigoplus_{i+j=n+1} Z_i \otimes S_j(X) \to \bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes S_j(X)\right) \simeq \bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes B_j$$

e quindi

$$\mathcal{H}_n(S_\bullet \otimes Z_\bullet) \simeq \frac{\bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes Z_j}{\bigoplus_{i+j=n} Z_i \otimes B_j} \simeq \bigoplus_{i+j=n} \frac{Z_i \otimes Z_j}{Z_i \otimes B_j}$$

Consideriamo ora la sequenza esatta corta

$$0 \longrightarrow B_j \longrightarrow Z_j \longrightarrow \mathcal{H}_n(X) \longrightarrow 0 :$$

tensorizzando con Z_i, e sfruttando il fatto che Z_i è libero, si ottiene che

$$\mathcal{H}_n(S_\bullet \otimes Z_\bullet) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{H}_n(S_\bullet) \otimes Z_j \simeq \mathcal{H}_n(S_\bullet) \otimes Z_\bullet$$

analogamente vale

$$\mathcal{H}_n(S_\bullet \otimes B_{\bullet_{[-1]}}) \simeq \mathcal{H}_n(S_\bullet) \otimes B_{\bullet_{[-1]}}.$$

Ora, dalla sequenza esatta lunga in omologia possiamo estrapolare la sequenza esatta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} \partial_n \longrightarrow \mathcal{H}_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)) \longrightarrow \ker \partial_{n-1} \longrightarrow 0$$

ed essendo $\ker \partial_{n-1} \simeq 0$, perché ∂_{n-1} è iniettiva, abbiamo

$$\operatorname{coker} \partial_n \simeq \mathcal{H}_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X))$$

Seguendo la costruzione della mappa ∂_n, si vede che essa è indotta dall'inclusione di $\bigoplus_{i+j=n-1} \mathcal{H}_i(X) \otimes B_j$ in $\bigoplus_{i+j=n-1} \mathcal{H}_i(X) \otimes Z_j$.
Di conseguenza,

$$\operatorname{coker} \partial_n \simeq \frac{\bigoplus\limits_{i+j=n} \mathcal{H}_i(X) \otimes Z_j}{\bigoplus\limits_{i+j=n} \mathcal{H}_i(X) \otimes B_j} \simeq \bigoplus_{i+j=n} \frac{\mathcal{H}_i(X) \otimes Z_j}{\mathcal{H}_i(X) \otimes B_j}$$

e analogamente a quanto fatto prima considerando

$$0 \longrightarrow B_i \longrightarrow Z_i \longrightarrow \mathcal{H}_i(X) \longrightarrow 0$$

e tensorizzando per $\mathcal{H}_j(X)$, che è libero, otteniamo

$$\mathcal{H}_i(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X)) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{H}_i(X) \otimes \mathcal{H}_j(X).$$

Allora essendo *EZ* una *chain homotopy*, abbiamo che la mappa indotta in omologia induce l'isomorfismo

$$\mathcal{H}_n(X \times X) \simeq \mathcal{H}_n(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(X))$$

Infine sfruttando il fatto che gli $\mathcal{H}_n(X)$ sono liberi e finitamente generati, il che implica che possiamo usare il teorema dei coefficienti universali, ci resta da mostrare che

$$\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{i+j=n} \mathcal{H}_i(X) \otimes \mathcal{H}_j(X), \mathbb{Z}\right) \overset{1}{\simeq} \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Hom}\left(\mathcal{H}_i(X) \otimes \mathcal{H}_j(X), \mathbb{Z}\right) \overset{2}{\simeq} \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{H}^i(X) \otimes \mathcal{H}^j(X)$$

L'isomorfismo *1* segue dalle proprietà di Hom
Per *2* invece, usando il fatto che gli $\mathcal{H}_i(X) \simeq \mathbb{Z}^{r_i}$ sono finitamente generati, abbiamo

$$\bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Hom}\left(\mathcal{H}_i(X) \otimes \mathcal{H}_j(X), \mathbb{Z}\right) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathbb{Z}^{r_i r_j} \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathbb{Z}^{r_i} \otimes \mathbb{Z}^{r_j} \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{H}^i(X) \otimes \mathcal{H}^j(X)$$

e grazie al teorema dei coefficienti universali, questo conclude la dimostrazione.

Esercizio 2.

Usando la notazione del libro di Hatcher, denotiamo con

$$(\sigma|v_1,\dots,v_i) = (\sigma\circ\lambda_i)$$
$$(\sigma|v_{n-i},\dots,v_n) = (\sigma\circ\mu_i)$$

dove $\sigma \in \mathcal{H}^n(X\times X;\mathbb{Z})$, λ_i la front face e μ_i la back face.
Sviluppando entrambi i membri della seguente

$$(\alpha_{i+j}(x_i\otimes x_j)\smile\alpha_{p+q}(x_p\otimes x_q))\,(\sigma|v_1,\dots,v_n) = \Big((-1)^{jp}\alpha_{i+j+p+q}\left((x_i\smile x_p)\otimes(x_j\smile x_q)\right)\Big)\,(\sigma|v_1,\dots,v_n)$$

Abbiamo per il LHS

$$\begin{aligned}LHS &= \alpha_{i+j}(x_i\otimes x_j)(\sigma|v_1,\dots v_{i+j})\alpha_{p+q}(x_p\otimes x_q)(\sigma|v_{i+j},\dots v_{i+j+p+q})\\ &= x_i(\sigma|v_1,\dots,v_i)x_j(\sigma|v_i,\dots,v_{i+j})x_p(\sigma|v_{i+j+p},\dots,v_{i+j+p})x_q(\sigma|v_{i+j+p},\dots v_{i+j+p+q})\end{aligned}$$

Per il RHS

$$\begin{aligned}RHS =&(-1)^{jp}\alpha_{i+j+p+q}\left((x_i\smile x_p)\otimes(x_j\smile x_q)\right)\\ =&(-1)^{jp}(x_i\smile x_p)(\sigma|v_1,\dots,v_{i+p})(x_j\smile x_q)(\sigma|v_{i+p},\dots,v_{i+j+p+q})\\ =&(-1)^{jp}x_i(\sigma|v_1,\dots,v_i)x_p(\sigma|v_i,\dots,v_{i+p})x_j(\sigma|v_{i+p},\dots,v_{i+p+j})x_q(\sigma|v_{i+p+j},\dots,v_{i+p+j+q})\end{aligned}$$

Osservando che

$$\begin{aligned}(\sigma|v_1,\dots,v_{i+j})(\sigma|v_1,\dots,v_i) &= (\sigma|v_1,\dots,v_i)\\ (\sigma|v_1,\dots,v_{i+j})(\sigma|v_i,\dots,v_{i+j}) &= (\sigma|v_i,\dots,v_{i+j})\\ (\sigma|v_{i+j},\dots,v_{i+j+p+q})(\sigma|v_{i+j},\dots,v_{i+j+p}) &= (\sigma|v_{i+j},\dots,v_{i+j+p})\\ (\sigma|v_{i+j},\dots,v_{i+j+p+q})(\sigma|v_{i+j+p},\dots,v_{i+j+p+q}) &= ((\sigma|v_{i+j+p},\dots,v_{i+j+p+q})\\ (\sigma|v_1,\dots,v_{i+p})(\sigma|v_1,\dots,v_i) &= (\sigma|v_1,\dots,v_i)\\ (\sigma|v_1,\dots,v_{i+p})(\sigma|v_i,\dots,v_{i+p}) &= (\sigma|v_i,\dots,v_{i+p})\\ (\sigma|v_{i+p},\dots,v_{i+p+j+q})(\sigma|v_{i+p},\dots,v_{i+p+j}) &= (\sigma|v_{i+p},\dots,v_{i+p+j})\\ (\sigma|v_{i+p},\dots,v_{i+p+j+q})(\sigma|v_{i+p+j},\dots,v_{i+p+j+q}) &= (\sigma|v_{i+p+j},\dots,v_{i+p+j+q}).\end{aligned}$$

Ora i termini esterni dell'uguaglianza sono identici, invece per i termini centrali, osserviamo che deve valere

$$x_j(\sigma|v_i,\dots,v_{i+j})x_p(\sigma|v_{i+j},\dots,v_{i+j+p}) = (-1)^{jp}x_j(\sigma|v_{i+p},\dots,v_{i+p+j})x_p(\sigma|v_i,\dots,v_{i+p})$$

$$(x_j\smile x_p)(\sigma|v_i,\dots,v_{i+j+p}) = (-1)^{jp}(x_p\smile x_j)(\sigma|v_i,\dots,v_{i+j+p})$$

E abbiamo l'uguaglianza per quanto dimostrato in classe.

Esercizio 3.

Per gli esercizi precedenti abbiamo che

$$\mathcal{H}^n(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \simeq = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

Come somma di $\mathbb{Z}-$moduli $\mathcal{H}^*(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$ è pertanto $\mathbb{Z}^4$, bisogna esplicitare la struttura del prodotto. Come prima cosa osserviamo che non essendoci elementi di grado maggiore di 2, il prodotto di un elemento in $\mathcal{H}^2(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$ con un elemento di grado maggiore di zero, deve essere zero.
Come visto in classe possiamo identificare $\mathcal{H}^0(X; \mathbb{Z})$ con $\mathbb{Z}$ e quindi la moltiplicazione

$$\mathcal{H}^0(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \times \mathcal{H}^n(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{H}^n(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$$

induce una struttura di $\mathbb{Z}$ modulo su $\mathcal{H}^n(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$.
Consideriamo ora il prodotto sull'$\mathcal{H}^1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$, abbiamo per gli esercizi precedenti

$$\mathcal{H}^1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathcal{H}^0(S^1; \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}^1(S^1; \mathbb{Z}) \oplus \mathcal{H}^1(S^1; \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}^0(S^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \otimes \mathcal{H}^1(S^1; \mathbb{Z}) \oplus \mathcal{H}^1(S^1; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}.$$

Prendiamo due generatori di $(\mathcal{H}^*(S^1; \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}^*(S^1; \mathbb{Z}))_1$, $1 \otimes x_1$ e $x_1 \otimes 1$, con le notazioni precedenti, $x = \alpha_1(1 \otimes x_1)$ e $y = \alpha_1(x_1 \otimes 1)$ che generano $\mathcal{H}^1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$.
Usando l'esercizio precedente e il fatto che i gruppi di coomologia di S^1 sono $\mathbb{Z}$ solo per $i = 0, 1$, abbiamo $x_1 \smile x_1 = 0$ e

$$x \smile x = \alpha_1(1 \otimes x_1) \smile \alpha_1(x_1 \otimes 1) = \alpha_2((1 \smile 1) \otimes (x_1 \smile x_1)) = \alpha_2(1 \otimes 0) = 0$$

e similmente $y \smile y = 0$. Analogamente si svolgono i due rimanenti prodotti e osserviamo che $z = \alpha_2(x_1 \otimes x_1)$ è il generatore di $\mathcal{H}^2(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$, dato che $(\mathcal{H}^*(S^1; \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{H}^*(S^1; \mathbb{Z}))_2 \simeq \mathcal{H}^1(S^1; \mathbb{Z})^{\otimes 2}$, abbiamo $x \smile y = \alpha_1(1 \otimes x_1) \smile \alpha_1(x_1 \otimes 1) = -\alpha_2((1 \smile x_1) \otimes (1 \smile x_1)) = -\alpha_2(x_1 \otimes x_1) = -z$ e analogamente $y \smile x = z$

Esercizio 4.

a) Essendo X connessa e orientabile, esiste un'orientazione $\mu : X \longrightarrow \{\pm 1\}$. Vogliamo dire che $\mu \circ \pi : Y \longrightarrow \{\pm 1\}$ è un orientazione per Y.
Per fare ciò, vogliamo usare che π è un omeomorfismo locale. Preso $x \in X$, sia U un aperto banalizzante intorno ad x omeomorfo ad una palla di $\mathbb{R}^n$.
Per definizione di orientazione, esiste un compatto K, che possiamo supporre incluso in U, in cui l'orientazione resta coerente a quella in x; in particolare,

$$\pi^{-1}(K) = \sqcup L_i$$

con L_i compatti di Y omeomorfi a K, per ogni i.
Allora per ogni $y \in Y$ esiste un aperto W_y intorno a y, omeomorfo a un aperto U_y

intorno a $\pi(y)$, che contiene un L_i compatto.
Se coerente, abbiamo così definito un'orientazione tale che $\mu_{\pi(y)} = \mu_y$.
Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_n(W_y, W_y \smallsetminus L_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{H}_n(Y, Y \smallsetminus L_i) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{H}_n(Y, Y \smallsetminus \{y\}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{H}_n(W_y, W_y \smallsetminus \{y\}) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathcal{H}_n(U_y, U_y \smallsetminus K) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}_n(X, X \smallsetminus K) \arrow[r] & \mathcal{H}_n(X, X \smallsetminus \{\pi(y)\}) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}_n(U_y, U_y \smallsetminus \{\pi(y)\})
\end{tikzcd}$$

dove gli isomorfismi orizzontali sono dati dal lemma di *Excision*, invece quelli verticali sono indotti da π, la cui restrizione a W_y è un omeomorfismo ($W_y \longrightarrow U_y$). Quindi seguendo il diagramma, otteniamo che h e g sono isomorfismi, e $f : \mu_{L_i} \mapsto \mu_y$ e quindi l'orientazione definita è coerente e Y è orientabile.

b) Per il caso n dispari, per dimostrare che $\mathbb{RP}^n$ è orientabile, osserviamo che $\mathbb{RP}^n$ è ottenuto come quoziente di S^n per il gruppo di isomorfismi generato dall'antipodale. Essendo n dispari, per quanto visto a lezione, l'antipodale ha grado 1 e quindi preserva l'orientazione. Possiamo allora definire per ogni punto $x \in X$

$$\mu_x = \mu_y$$

con y un qualsiasi punto nella preimmagine di x. Questa definizione è ben posta, infatti, avendo l'antipodale grado 1, tutti i punti nella preimmagine di x hanno la stessa orientazione.
Per il caso di n pari abbiamo invece, come visto a lezione, che $\mathcal{H}_n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}) \simeq 0$ e quindi non può essere orientabile per la dualità di Poincaré.

Esercizio 5.

Usando la dualità di Poincaré, abbiamo che

$$\mathcal{H}_n(X) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{H}^0_c(X) = 0$$

e per definizione vale

$$\mathcal{H}^0_c(X) = \varinjlim \mathcal{H}^0(X, X \smallsetminus K)$$

con $K \subset X$ compatto. Ora, grazie alla sequenza della coomologia relativa abbiamo, per ogni K compatto

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0(X, X \smallsetminus K) \xrightarrow{f} \mathcal{H}^0(X) \xrightarrow{g} \mathcal{H}^0(X \smallsetminus K) \longrightarrow \cdots$$

vale che g è iniettiva in quanto è indotta da una mappa surgettiva in omologia.
Allora $\ker g \simeq \operatorname{im} f \simeq 0$, ma essendo f iniettiva, per esattezza della sequenza, abbiamo che $\mathcal{H}^0(X, X \smallsetminus K) \simeq 0$.
Allora segue la tesi facendo il limite.