A.A. 2019/2020
Analisi Complessa

Marco Abate

Appunti completi del corso

Matteo Stefanini

Questi appunti sono stati presi direttamente a lezione e non sono stati revisionati quindi è molto probabile che siano presenti degli errori. Se volete potete segnalarmi quelli presenti e vi manderò nel più breve tempo possibile la versione rimodificata. L'indice è stato creato copiandolo dal registro delle lezioni. Le registrazioni audio/video delle lezioni saranno presenti, fino a che sarò possibilitato a tenerli in questa cartella online (Link). Spero che vi siano d'aiuto e buono studio!

Indice

LEZIONE 01

Titolo nota 17/03/2020

ASSENTE

LEZIONE 02

Titolo nota 17/03/2020

ASSENTE

LEZIONE 03

Titolo nota 02/03/2020

TEOREMA (di Montel)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ t.c.: norma del sup

$\forall K \subset \Omega$ compatto $\exists M_K > 0$ t.c. $\|f\|_K \leq M_K \quad \forall f \in \mathcal{F}$

(cioè $\mathcal{F}$ è equilimitata sui compatti)

Allora $\mathcal{F}$ è rel compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$

Cor $\Omega, \Omega_1 \subset \mathbb{C}$ aperti con Ω_1 limitato

$\Rightarrow$ $\mathrm{Hol}(\Omega, \Omega_1)$ è rel compatta in $\mathcal{O}(\Omega)$

Teo + generale (forse vedremo)

Vale la stessa cosa del corollario se $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$ ha almeno 2 punti.

Dim Preso $a \in \Omega$ un $0 < r < \mathrm{dist}(a, \partial\Omega)$

$f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\qquad c_n(f) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Sappiamo che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)(z-a)^n$ in $\overline{D(a,r)}$

Inoltre sapendo che $\|f\|_{\overline{D(a,z)}} \leq M \Rightarrow |c_n(f)| \leq \dfrac{M}{r^n} \quad n \geq 0$ (dis di Cauchy)

Sia $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, Per ipotesi $\exists M > 0$

t.c. $\|f_n\|_{\overline{D(a,r)}} \leq M \quad \forall n$

$\Rightarrow \quad |c_0(f_n)| \leq M$ quindi esiste una sottosucc. convergente

$$c_0(f_{n_j^{(0)}}) \longrightarrow c_0 \in \mathbb{C}$$

Per induzione da $\{f_{n_j^{(k-1)}}\}$ posso estrarre una sottosucc.

$\{f_{n_j^{(k)}}\}$ tc $\quad c_k(f_{n_j^{(k)}}) \longrightarrow c_k \in \mathbb{C}$

consideriamo la succ. $\{f_{n_j^{(j)}}\}$ (procedimento diagonale)

$\Rightarrow \quad c_k(f_{n_j^{(j)}}) \longrightarrow c_k \in \mathbb{C} \quad \forall k$

rinomino $\quad f_{n_j^{(j)}} =: f_{\nu_j}$

Poniamo $D_a = \overline{D(a, r/2)}$ voglio far vedere che $\{f_{\nu_j}\}$

converge a $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad$ in D_a

Facciamo vedere che f_{ν_j} è di Cauchy in D_a

$$|f_{\nu_h}(z) - f_{\nu_k}(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \, |z-a|^n \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \, |z-a|^n \qquad ①$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \, |z-a|^n \qquad ②$$

$$② \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2M}{r^n} |z-a|^n \underset{z \in D_a}{\le} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2M}{2^n} = \frac{M}{2^{N-1}}$$

Dato $\varepsilon > 0$ scelgo N in modo tale che $\frac{M}{2^{N-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$① \le \sum_{n=0}^{N} |c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_k})| \left(\frac{r}{2}\right)^n < \varepsilon/2$$

Scelgo n_0 tc $\forall\ 0 \le n \le N$ e $\forall\ h, k \ge n_0$

si abbia $|c_n(f_{\nu_h}) - c_n(f_{\nu_h})| \left(\frac{r}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$

Quindi f_{ν_j} converge unif su $D_a = \overline{D(a, r/2)}$

Topologia del piano: possiamo trovare una famiglia num. di $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tc
$$\bigcup_j D_{a_j} = \Omega$$

Procedimento diagonale

$\{f_n\} \overset{\text{ne estraggo}}{\rightsquigarrow} \{f_{n_j^{(0)}}\}$ con in D_{a_0}

$\{f_{n_j^{(0)}}\} \rightsquigarrow \{f_{n_j^{(1)}}\}$ " in D_{a_1}

e così via in ogni D_{a_j}

$\Rightarrow \{f_{n_j^{(j)}}\}$ è convergente in D_{a_k}

Ma ogni compatto è ricoperta da un numero finito di D_{a_n} e questo implica che $\{f_{n_j^{(j)}}\}$ conv. unif. sui compatti.

TEOREMA DI VITALI

$\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $A \subseteq \Omega$ un insieme con almeno un punto di accumulazione in Ω. Sia $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ unif. limitata sui compatti. Supponiamo che $\forall\ a \in A$ $\{f_n(a)\}$ converge puntualmente. Allora $\exists\ f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $f_n \to f$ unif. sui cpt di Ω

Dim Supponiamo per assurdo che non sia vera
$\exists\ K \subset \Omega$ cpt $\exists \{n_k\}\ \{m_k\}$ in $\mathbb{N}$ e $\exists \{z_k\} \subset K$
$\exists \delta > 0$ tc $|f_{n_k}(z_k) - f_{m_k}(z_k)| \geq \delta$

A meno di sottosuccessione, posso supporre che $z_k \to z_0 \in K$
e per Montel posso supporre che $f_{n_k} \to g_1$ olomorfa in Ω
e sempre per Montel ho $f_{m_k} \to g_2$ " " Ω
con $|g_1(z_0) - g_2(z_0)| \geq \delta$ passando al limite nella rel.

Per ipotesi $g_1(a) = g_2(a)$ $\forall a \in A$ perché le f_n conv. punt.

$\Rightarrow$ per il principio di identità (ho 2 funzioni olomorfe che coincidono su un insieme di un punto di acc. allora coincidono) $g_1 = g_2$!! perché $g_1(z_0) \neq g_2(z_0)$

Def Dati: $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ $A(r_1, r_2) := \{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2 \}$

Teorema (Sviluppo di Laurent)
$f \in \mathcal{O}(A(r_1, r_2))$ allora
$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ e questa serie converge unif e assolutamente sui cpt di $A(r_1, r_2)$

OSS in particolare se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a \in \Omega$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{in} \quad \{0 < |z-a| < r\}$$

Cor: (Teorema di estensione di Riemann) Se $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$ si estende olomorficamente ad a

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{z \to a} f(z)(z-a) = 0$$

Dim corollario

$$\lim_{z\to a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \cdot (z-a) =$$

$$= \lim_{z \to +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+1} = 0 \Leftrightarrow c_n = 0 \quad \forall\, n \leq -1$$

TEO (i) $f \in Hol(\Omega, \Omega_1)$ bigettiva $\Rightarrow f^{-1} \in Hol(\Omega_1, \Omega)$ e f' non si annulla mai.

(ii) $f \in \mathcal{O}(\Omega)$: $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ è iniettiva vicino a z_0

Def una funzione $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ olomorfa bigettiva [con inversa olomorfa] si chiama BIOLOMORFISMO

Def $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è un biolomorfismo locale se $\forall\, a \in \Omega$ ha un intorno $a \in \mathcal{U}$ t.c. $f|_{\mathcal{U}} : U \to f(U)$ è un biolomorfismo

(ii) $\Rightarrow$ f è biolomorfismo loc $\Leftrightarrow$ f' non si annulla mai

Dim (i) f non è costante, quindi per teo App. aperta f è aperta $\Rightarrow$ f è omeo $\Rightarrow \exists\, g = f^{-1}$

Sia $w_0 \in \Omega_1$ t.c. $f'(g(w_0)) \neq 0$ allora

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\dfrac{w - w_0}{g(w) - g(w_0)}} = \frac{1}{\dfrac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)}} \to \frac{1}{f'(g(w_0))}$$

Allora g è olomorfa in $\Omega_1 \setminus f(\underbrace{\{f'=0\}})$
non è discreto in Ω

f è un omeo $\Rightarrow f(\{f'=0\})$ è discreto in Ω_1
ma g è continua, quindi loc. limitata in Ω_1
allora per il teo di estensione di Riemann allora
g è olomorfa in tutto Ω_1

$(f' \circ g)\, g' = 1$ su $\Omega_1 \setminus f(\{f'=0\})$ ma essendo
continua è $\equiv 1$ su tutto Ω_1
quindi $f' \neq 0$ sempre.

(ii) Possiamo supporre $z_0 = 0$
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

Ip $c_1 \neq 0$ $\quad f(z) - f(w) = c_1 (z-w) + (z-w) \sum_{n=2}^{\infty} c_n \sum_{k=1}^{n} w^{k-1} z^{n-k}$

$$|f(z) - f(w)| \geq |c_1|\,|z-w| - |z-w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| \sum_{k=1}^{n} |w|^{k-1} |z|^{n-k} \geq$$

prendo $z, w \in D(0,r)$ in modo che le serie convergano

$$\geq |c_1|\,|z-w| - |z-w| \sum_{n=2}^{+\infty} |c_n|\, n\, r^{n-1}$$

$$= \Big[|c_1| - \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n| n r^{n-1}} \Big] |z-w|$$

per n che parte da 1 sarebbe la serie
delle derivate, quindi so che per $r \to 0$
lei tende a 0, quindi prendo un
r abb. piccolo da far in modo che
sia $\leq |c_1|/2 \Rightarrow f(z) \neq f(w)$

Ancora nell'uso dello sviluppo di Laurent

Data $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ in $D^* = D(a,r) \setminus \{a\}$

<u>Def</u> $\operatorname{ord}_a(f) = \inf \{ n \in \mathbb{Z} \mid c_n \neq 0 \}$ <u>ORDINE</u> DI f in a

<u>OSS</u> $\operatorname{ord}_a(f) \geq 0 \iff f$ è olomorfa in a

<u>Def</u> se $0 > \operatorname{ord}_a(f) > -\infty$ diremo che a un <u>polo</u> di f

se $\operatorname{ord}_a(f) = -\infty$ diremo che a è una <u>sing. essenziale</u>

<u>Teorema</u> (Casorati - Weierstrass) Se a una sing essenziale allora $f(D^*)$ è denso in $\mathbb{C}$

<u>Def</u> $c_{-1} = \operatorname{res}_f(a)$ <u>RESIDUO</u> DI f in a

Sia $\gamma(t) = a + \rho e^{2\pi i t}$ $\quad 0 < \rho < r$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_\gamma (z-a)^n dz =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi i}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^1 \rho^{n+1} e^{2\pi n i t} e^{2\pi i t} \cancel{2\pi i}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^1 \rho^n \underbrace{e^{2\pi i t(n+1)} dt}_{0 \iff n+1 \neq 0} = c_{-1}$$

<u>PROP</u> Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \mathbb{C}$ discreto, $D \subset\subset \Omega$ disco chiuso tc $E \cap \partial D = \emptyset$, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f \, dz = \sum_{a \in D \cap E} \operatorname{res}_f(a)$$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ chiusa $\quad \gamma(0)=\gamma(1) \quad a \notin \gamma([0,1])$.

$p_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{a\} \quad p_a(z) = a + e^z$ é un rivestimento

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "p_a"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde\gamma"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{C}\setminus\{a\} \end{tikzcd}$$

$\tilde\gamma$ sollevamento di γ rispetto a p_a

$$p_a(\tilde\gamma(1)) = \gamma(1) = \gamma(0) = p_a(\tilde\gamma(0))$$

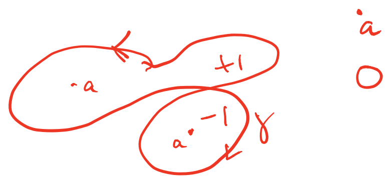
$$e^{\tilde\gamma(1)} = e^{\tilde\gamma(0)} \iff \tilde\gamma(1) - \tilde\gamma(0) \in 2\pi i\,\mathbb{Z}$$

Indice di γ rispetto ad a $\quad n(\gamma,a) = \frac{1}{2\pi i}[\tilde\gamma(1)-\tilde\gamma(0)] \in \mathbb{Z}$.

TEO: (i) $n(\gamma,a)$ dipende solo da a e da γ e non dal sollevamento scelto;

(ii) $n(\gamma,a) \in \mathbb{Z}$;

(iii) $n(\gamma,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$



(iv) $a \mapsto n(\gamma,a)$ è costante sulle comp. conn. del $\mathbb{C}\setminus\gamma([0,1])$.

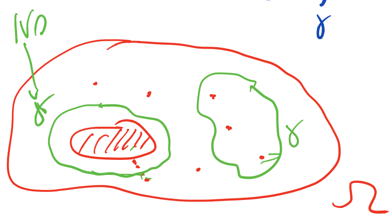
In part $n(\gamma,a)=0$ sulla comp. conn. illimitata di $\mathbb{C}\setminus\gamma([0,1])$.

(v) $\gamma(t) = a_0 + re^{2\pi i t}$ allora $n(a,\gamma) = 1 \quad \forall a \in D(a_0,r)$.

(vi) γ_1 e γ_2 chiuse con $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=p_0$ omotope (tramite omotopia che fissa pto base p_0) e $a \notin \gamma_1([0,1]) \cup \gamma_2([0,1])$ allora $n(\gamma_1,a) = n(\gamma_2,a)$ omotopia in $\mathbb{C}\setminus\{a\}$.

TEO (dei residui): $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto, chiuso in Ω, γ curva chiusa in $\Omega - E$ omotopa a una costante in Ω. Allora

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega\setminus E) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \sum_{a\in E} \mathrm{res}_f(a)\, n(\gamma,a).$$



$\Omega \subseteq \mathbb{C}$, f è meromorfa in Ω se esiste $E \subset \Omega$ discreto chiuso tc $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ e nessun punto di E è una singolarità essenziale. $f \in \mathcal{M}(\Omega)$

PROP: (i) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ è meromorfa $\Leftrightarrow$ localmente è quoziente di due funzioni olomorfe.

(ii) $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ è meromorfa $\Leftrightarrow$ $\forall a \in E$ o $|f|$ è limitato vicino ad a oppure $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$.

Idea dim: (i) Se $a \in \Omega \setminus E$ $f = \frac{f}{1}$ vicino ad a.

Se $a \in E \Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq n_0} c_n (z-a)^n = (z-a)^{n_0} [c_{n_0} + h(z)]$ ← è olom vicino ad a

$$= \frac{c_{n_0} + h(z)}{(z-a)^{-n_0}}$$ ← è olm se $n_0 < 0$

$$\Leftarrow f(z) = \frac{h_1(z)}{h_2(z)} = \frac{\sum_{n \geq n_1} b_n (z-a)^n}{\sum_{m \geq n_2} c_m (z-a)^m} = (z-a)^{n_1 - n_2} \cdot k(z)$$ ← olm. vicino ad a

(ii) $a \in E$ sing. essenziale $\Leftrightarrow$ $\lim_{z \to a} |f(z)|$ non esiste.

polo $\Leftrightarrow \lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$. □

TEO (Principio dell'argomento) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$

$Z_f = \{$zeri di $f\}$ e $P_f = \{$poli di $f\}$. γ curva chiusa in $\Omega \setminus (Z_f \cup P_f)$ omotopa a una costante in Ω. Allora

$$\sum_{a \in Z_f \cup P_f} n(\gamma, a) \operatorname{ord}_a(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} \, dz.$$

"$\frac{f'}{f} = \frac{d}{dz} (\log f)$"

$\log f = \log|f| + i \arg(f)$

Dim: $\operatorname{ord}_a(f) = \operatorname{res}_{f'/f}(a)$ Infatti:

$f(z) = (z-a)^m h(z)$ $\quad m = \operatorname{ord}_a(f)$ e $h(a) \neq 0$ h olm

$f'(z) = m(z-a)^{m-1} h(z) + (z-a)^m h'(z)$

$$\frac{f'}{f} = \frac{m}{z-a} + \underbrace{\frac{h'(z)}{h(z)}}_{\text{olm}} \qquad \operatorname{res}_{f'/f}(a) = m = \operatorname{ord}_a(f). \quad \square$$

f e g non si annullano su ∂D.

Prop: (Teorema di Rouché) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\overline{D} \subset \Omega$ D disco. Supponiamo che $\boxed{|f-g| < |g|}$ su ∂D. Allora f e g hanno lo stesso numero di zeri (contati con molt.) in D.

Dim: Per $t \in [0,1]$ poniamo $f_t = g + t(f-g)$ $\quad f_0 = g \quad f_1 = f$.

Se $z \in \partial D$ $\quad 0 < |g(z)| - |f(z)-g(z)| \leq |g(z)| - t\,|f(z)-g(z)| \leq |f_t(z)|$

Sia $a_t = \sum_{a \in \overline{D}} \mathrm{ord}_a(f_t) = \#$ zeri di f_t in $\overline{D}$. Princ. argomento:

$$\mathbb{N} \ni a_t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f_t'}{f_t}\,dz = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{g' + t(f'-g')}{g + t(f-g)}\,dz}_{\text{dipende con continuità da } t}$$

$\Rightarrow a_t$ è costante $\Rightarrow a_0 = a_1$ come volevamo. $\square$

Cor (Teorema di Ritt) Sia $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ tale che $h(\mathbb{D}) \subset\subset \mathbb{D}$. $\quad \mathbb{D} = \{|z|<1\}$

Allora h ha un punto fisso.

Dim: $\exists\ 0 < r < 1$ t.c. $|h(z)| < r \ \forall z \in \mathbb{D}$; $\mathbb{D}_r = \{|z|<r\}$

Su $\partial \mathbb{D}_r$ $\quad |z - (z - h(z))| = |h(z)| < r = |z|$

$g(z) = z$ e $f(z) = z - h(z)$. Rouché $\Rightarrow$ g e f hanno lo stesso # di 0 in $\mathbb{D}_r$. Ma g ha un unico zero $\Rightarrow$ $f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}} - h$ ha un (unico) zero z_0 in $\mathbb{D}_r$

$\Rightarrow h(z_0) = z_0$. $\square$

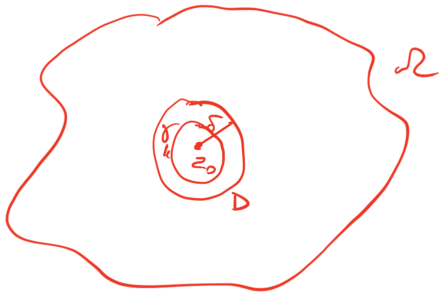
Teo (Hurwitz) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ convergente a $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ su ogni c.c. di Ω. Supponiamo che f non sia costante. Allora $\forall z_0 \in \Omega$ $\exists\ n_1 = n_1(z_0) \in \mathbb{N}$ e $\forall n \geq n_1$ $z_n \in \Omega$: $\underline{f_n(z_n) = f(z_0)}$ e $\underline{\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0}$.

$\left[\ \forall\, \overset{f(z)}{\overset{\shortparallel}{w}} \in f(\Omega)\ \ \exists\ n_1 = n_1(w) : \ w \in f_n(\Omega) \ \forall n \geq n_1 \right]$

Dim: Vogliamo applicare Rouché a $f_n - w$ e $f - w$ $\quad [w = f(z_0)]$ in dischetti centrati in z_0 di raggio arbitrariamente piccolo.

Siccome $f \not\equiv ct$, $f^{-1}(w)$ è discreto $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : 0 < |z - z_0| \leq \delta \Rightarrow z \in \Omega$
e $f(z) \neq w$. Se $D = D(z_0, \delta)$ allora $\overline{D} \cap f^{-1}(w) = \{z_0\}$.

$\forall k > 0$ $\gamma_k = \partial D(z_0, \delta/k)$. Poniamo



$\delta_k = \min\{|f(\xi) - w| \mid \xi \in \gamma_k\} > 0$

$\exists\, n_k \geq 1$:

$\forall n \geq n_k$ $\max_{\xi \in \gamma_k} |f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\delta_k}{2}$

Possiamo supp $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Fissato $k \geq 1$, se $n \geq n_k$ e $\xi \in \gamma_k$

$$|(f_n(\xi) - w) - (f(\xi) - w)| = |f_n(\xi) - f(\xi)| < \frac{\delta_k}{2} < \delta_k \leq |f(\xi) - w|$$

Rouché a $f_n - w$ e $f - w$ in $D(z_0, \delta/k)$. $\Rightarrow \forall n \geq n_k$ $f_n - w$
ha almeno uno zero in $D(z_0, \delta/k) \Rightarrow \exists\, z_n \in D(z_0, \delta/k) : f_n(z_n) = w$.

Abbiamo $z_n \to z_0$ per $n \to +\infty$. $\square$

Cor: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \to f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supponiamo che le f_n non si annullino mai [in gen, $\exists\, w_0 \in \mathbb{C} : w_0 \notin f_n(\Omega)$ $\forall n$]
Allora o $f \equiv 0$ oppure f non si annulla mai. [in gen o $f \equiv w_0$ o $w_0 \notin f(\Omega)$]

Dim: Per assurdo, che $w_0 \in f(\Omega)$. Allora o f è costante ($f \equiv w_0$) oppure $w_0 \in f_n(\Omega)$ $\forall n \gg 1$, contraddizione. $\square$

Cor: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $\{f_n\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $f_n \to f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supponiamo che le f_n siano iniettive. Allora f è costante o iniettiva.

Dim: Per assurdo, sia f né costante né iniettiva. $\exists\, z_1 \neq z_2 : f(z_1) = f(z_2)$.
Poniamo $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ e $h(z) = f(z) - f(z_2)$.
Abbiamo $h_n \to h$ e h_n non si annullano in $\Omega \setminus \{z_2\}$.
Cor $\Rightarrow$ h non si annulla in $\Omega \setminus \{z_2\}$ mentre $h(z_1) = 0$, contrd. $\square$

LEZIONE 05

Titolo nota 13/03/2020

SFERA DI RIEMANN $\hat{\mathbb{C}} = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_\infty$ (Vari simboli) $\left(= \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \right)$

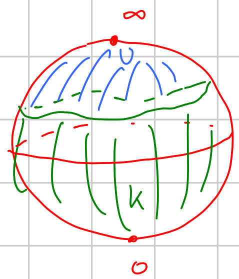
non lo vedremo così

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

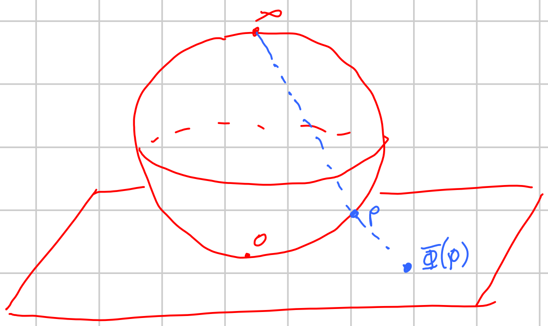
Come topologia è una sfera: in $\mathbb{C}$ topologia usuale

gli intorni aperti di $\{\infty\}$ sono

$(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ con $K \subset\subset \mathbb{C}$ compatto



U = intorno di ∞



Φ è la proiezione stereografica.

è un omeomorfismo tra la sfera e il piano

OBIETTIVO dire come si fa a dire che una funzione definita su (o a valori in) $\hat{\mathbb{C}}$ sia olomorfa.

Chiamo $U_0 = \mathbb{C}$ e qui so dire che è olomorfa.

Chiamo $U_1 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ è un intorno di $+\infty$

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Definisco $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi_1(w) = \begin{cases} \frac{1}{w} & \text{se } w \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{se } w = +\infty \end{cases}$$

φ_1 è una bigezione tra U_1 e $\mathbb{C}$, in realtà è un OMEOMORFISMO

$\varphi_0 : U_0 = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \varphi_0 = id$

è un omeomorfismo tra $U_0 = \mathbb{C}$

NOTAZIONE

φ_1, φ_0 sono carte

$U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*$

$\varphi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^* = \varphi_0(U_0 \cap U_1)$

$\Rightarrow \quad \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \qquad \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(w) = \frac{1}{w}$

$\underbrace{\varphi_0^{-1} \circ \varphi_1}_{\text{FUNZIONI DI TRANSIZIONE}} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \qquad \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \frac{1}{z}$

SONO OLOMORFE ENTRAMBE

DEF Una funzione definita (o a valori) nella sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ è olomorfa se lo è letta tramite le carte.

Sia $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ aperto e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ funzione

voglio definire quando è olomorfa.

RISPOSTA devono valere 1) $f|_{\Omega \cap \mathbb{C}}$ sia olomorfa $(\Omega \cap \mathbb{C} = \Omega \setminus \{\infty\})$

2) $f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa vicino a $0 = \varphi_1(\infty)$

OSS $\quad f \circ \varphi_1^{-1} = f\left(\frac{1}{w}\right)$

ESEMPIO Sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Quando questa è olomorfa in $\{+\infty\}$

se e soltanto se $f\left(\frac{1}{w}\right)$ è OLOMORFA in 0

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n w^{-n} \iff c_n = 0 \quad \forall n > 0$$

$\downarrow$
serie di Laurent
è olomorfa in 0 solo se
non ha esponente negativo.

OSS $f: \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ olomorfa $\iff$ è costante.

Dim $\hat{\mathbb{C}}$ è compatto, $f(\hat{\mathbb{C}})$ è limitato e chiuso in $\mathbb{C}$ PRINCIPIO del MAX
$\Rightarrow |f|$ ha max in $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$, se $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow f|_{\mathbb{C}}$ è costante
$\Rightarrow$ per continuità f è costante ovunque.
Se $z_0 = \infty \Rightarrow f\left(\frac{1}{w}\right)$ ha un max in 0 e quindi è
costante $\Rightarrow f$ costante ovunque.

- Supponiamo adesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ $f: \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ continua e ci chiediamo quando f è olomorfa

Risposta
- serve che f sia olomorfa in $\Omega \setminus f^{-1}(\infty)$
- $f(z_0) = +\infty$ occorre che
$$\varphi_1 \circ f = \frac{1}{f} \text{ sia olomorfa vicino a } z_0$$

Esempio Sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ è a valori in $\hat{\mathbb{C}}$ se 0 è un polo

Supponiamo che $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n z^n$ (cioè $c_n = 0 \quad \forall n < -k$)

$$f(z) = z^{-k} \sum_{n=-k}^{\infty} c_n z^{n+h} = z^{-k} h(z) \quad \text{con } h(0) = c_{-k} \neq 0$$
e h olomorfa

$$\Rightarrow \frac{1}{f(z)} = \frac{z^k}{h(z)} \text{ è olomorfa in 0 perché } h(0) \neq 0$$

Viceversa se è olomorfa $\Rightarrow \frac{1}{f}$ è olomorfa in 0 $\Rightarrow \frac{1}{f} = z^k \sum_{n \geq 0}^{+\infty} c_n z^n$
con $c_0 \neq 0$

$\Rightarrow \quad f(z) = \dfrac{z^{-k}}{\sum_{n\geq 0} c_n z^n}$ e questa ha un polo in 0 perché $c_0 \neq 0$

Abbiamo quindi mostrato che $f : \Omega \to \hat{\mathbb{C}}$ è olomorfa $\Leftrightarrow$ è meromorfa (che hanno solo sing. di tipo polo)

OSS Vale solo in dimensione 1

RIMANE IL CASO $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ continua è olomorfa $\Leftrightarrow$

$f(\frac{1}{w})$ è olomorfa vicino a 0

e $\dfrac{1}{f}$ è olomorfa vicino a $f^{-1}(\infty)$

Ma se $f(\infty) = \infty$? f è olomorfa $\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(\frac{1}{w})}$ è olom. in 0

Esempio tipico $\quad p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$ con $a_d \neq 0$

$p : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ con $p(\infty) = \infty$

È olo in ∞ ? $\quad \dfrac{1}{p(\frac{1}{z})} = \dfrac{1}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_d z^{-d}} =$

$= \dfrac{z^d}{(a_d + a_{d-1} z + \dots + z^d a_0)}$ è olomorfa in 0

e $\dfrac{1}{p(\frac{1}{z})}$ ha uno zero di ordine d in 0 $\Leftrightarrow$ p ha un polo di ordine d in ∞

Prop $f \in Hol(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}}) \iff f = \frac{P}{Q}$ con P e Q polinomi in $\mathbb{C}[z]$ senza fattori comuni.

$\iff f$ è una funzione razionale

Dim $\Leftarrow$) Sappiamo che i polinomi sono funzioni ol. di $\hat{\mathbb{C}}$ in sé e rapporto di funzioni olomorfe è olomorfa.

$\Rightarrow$) $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ olomorfa non costante

$Z_f = f^{-1}(0)$ chiuso discreto (perché il fatto che gli zeri sono isolati è una cond. loc. vale anche su $\hat{\mathbb{C}}$)

OSS gli z_i e w_i sono ripetuti con molteplicità

$\Rightarrow$ escludo ∞ sempre

in $\hat{\mathbb{C}}$ cpt $\Rightarrow Z_f = \{z_1, \dots, z_k\} \cap \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$

Analogamente $f^{-1}(\infty) = P_f = Z_{1/f}$ quindi $P_z = \{w_1 \dots w_n\} \cap \mathbb{C}$

(per discorso analogo a sopra)

Poniamo $g(z) = \frac{(z-w_1) \cdots (z-w_n)}{(z-z_1) \cdots (z-z_h)} f(z) \Rightarrow g \in Hol(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$

In questo modo g non ha né zeri né poli in $\mathbb{C}$

Se $g(\infty) \in \mathbb{C} \Rightarrow g \in Hol(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \Rightarrow g$ costante quindi

$$f(z) = \text{cost} \frac{(z-z_1) \cdots (z-z_n)}{(z-w_1) \cdots (z-w_n)}$$

e non ci sono fattori comuni perché z_i sono zeri e w_j sono poli.

Se $g(\infty) = \infty \Rightarrow \frac{1}{g}(\infty) = 0 \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{g} \in Hol(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \Rightarrow \frac{1}{g}$ è costante.

DEF Data $f = \frac{P}{Q} \in Hol(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ diciamo che $\deg f = \max\{\deg P, \deg Q\}$

(P, Q) non hanno fattori comuni $\Rightarrow P, Q$ sono unici a meno di molt. per costante.

Per gli zeri e i poli in $\mathbb{C}$ $\to$ ordine (lo abbiamo definito.)

$$f(\infty) = \lim_{w\to 0} \frac{P\left(\frac{1}{w}\right)}{Q\left(\frac{1}{w}\right)} = \lim_{w\to\infty} \frac{a_m\left(\frac{1}{w}\right)^m + \dots + a_0}{b_n\left(\frac{1}{w}\right)^n + \dots + b_0} =$$

con $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$

$$= \lim_{w\to 0} w^{n-m} \left(\frac{a_m + a_{m-1} w + \dots + a_0 w^m}{b_n + b_{n-1} w + \dots + b_0 w^n} \right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n > m \\ \frac{a_m}{b_m} \neq 0 & \text{se } n = m \\ \infty & \text{se } n < m \end{cases}$$

Se $n > m \Rightarrow \infty$ è uno zero di grado $n-m$

se $n < m \Rightarrow \infty$ è un polo di ordine $n-m$

$$\boxed{ord_f(\infty) = n - m = \deg Q - \deg P}$$ (cioè ordine di 0 o di polo)

Def <u>Molteplicità</u> di $f \in Hol(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ $\quad \delta_f(z_0) = $ molt di f in z_0

Se $f(z_0) = w_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_0$ è uno zero di $f - w_0 \Rightarrow \delta_f(z_0) = ord_{f-w_0}(z_0)$

Se $f(z_0) = \infty \Rightarrow z_0$ è un polo di $f \Rightarrow \delta_f(z_0) = -\,ord_f(z_0)$

Così $\delta_f(z_0) \in \mathbb{N}$

<u>Prop</u> Sia $f \in Hol(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ non costante, Allora

$$\forall q \in \hat{\mathbb{C}} \quad \underbrace{\sum_{f(p)=q} \delta_f(p)}_{\text{somma di inf. locali}} = \underbrace{\deg f}_{\text{informazione globale}}$$

Dim caso $q=0$ $\quad \sum_{f(p)=0} \delta_f(p) =$ con $f = \dfrac{P}{Q}$

$$= \sum_{\substack{f(p)=0 \\ p\in\mathbb{C}}} \delta_f(p) + \delta_f(\infty) =$$

se $f(\infty)=0 \Leftrightarrow \deg Q > \deg P$

per teo fond algebra $\longrightarrow$ "

$$= \deg P + \max\{0, \deg Q - \deg P\} =$$

$$= \max\{\deg P, \deg Q\} = \deg f$$

Se $q=\infty$ $\quad \sum_{f(p)=\infty} \delta_f(p) = \sum_{\substack{f(p)=\infty \\ p\in\mathbb{C}}} \delta_f(p) + \delta_f(\infty) =$

se $f(\infty)=\infty$

il meno deriva dalla def di δ_f in -

$$= \deg Q + \max\{0, \deg P - \deg Q\} =$$

$$= \max\{\deg P, \deg Q\} = \deg f$$

$q \in \mathbb{C}^*$ $\quad \sum_{f(p)=q} \delta_f(q) = \sum_{f(p)=q} \operatorname{ord}_{f-q}(p) = ⊛$

$$f(z) - q = \frac{P(z) - q\,Q(z)}{Q(z)} \qquad \deg\big(P(z) - q\,Q(z)\big) = \begin{cases} \max\{P, Q\} & \text{se } \deg P \neq \deg Q \\ \leq \max\{P, Q\} & \text{se } \deg P = \deg Q \end{cases}$$

ma sotto c'è sempre Q

$\deg(f-q) = \deg(f)$

$$⊛ = \sum_{f(p)-q=0} \delta_{f-q}(p) = \deg(f-q) = \deg(f)$$

Cor $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ non costante, $w_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Allora

$$1 \leq \# f^{-1}(w_0) \leq \deg f$$

Dim $\boxed{\geq 1}$ è il teo fond. dell'algebra

- Se $w_0 \neq \infty$ $f(z) - w_0 \Leftrightarrow f(z) - w_0 = 0 \Leftrightarrow P(z) - w_0 Q(z) = 0$
- Se $w_0 = \infty \Rightarrow$ stesso conto a $\frac{1}{f} = 0$

$\boxed{\leq}$ $\# f^{-1}(w_0) \leq \sum_{f(p)=w_0} \delta_f(p) = \deg f$

Vale $<$ se ci sono molteplicità $\delta_f(p) > 1$

Def $f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ è un automorfismo $\Leftrightarrow$ f è olomorfa bigettiva

Cor $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}})$, $f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \Leftrightarrow \deg f = 1 \Leftrightarrow f(z) = \dfrac{az+d}{cz+d}$

con $ad - cd \neq 0$

OSS siccome num. e den. sono definiti a meno di una cost. molt.

possiamo chiedere $ad - bc = 1$

$\Rightarrow$ (Esercizio) $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ è isomorfo $SL(2,\mathbb{C}) / \{\pm \mathrm{Id}\}$

con $SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \det A = 1 \right\}$

Dim Corollario $\left.\begin{array}{l} f \in \mathrm{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}}) \text{ è surgettiva} \\ + \deg f = 1 \Rightarrow f \text{ è iniettiva} \end{array}\right\} \Rightarrow f \in \mathrm{Aut}$

Viceversa $f \in \mathrm{Aut} \Rightarrow f$ è iniettiva $\Rightarrow \sum_{f(p)=w_0} \delta_f(p)$ contiene un unico addendo

con molt $= 1$ $\left(\Rightarrow \deg f = 1\right)$ $f(p) = w_0$

se $\underset{\substack{\| \\ k}}{\delta_f(p)} > 1$ supponiamo $p = 0$ $f(p) = 0 \Rightarrow f(z) = z^k h(z)$ con $h(0) \neq 0$

$\Rightarrow f'(z) = kz^{k-1} h(z) + z^k h'(z)$

$f'(0) = 0$ perché $k \geq 1$

OSS $\delta_f(p) > 1 \Rightarrow f'(p) = 0 \Rightarrow f$ non è costante

$\Rightarrow f'$ ha un insieme discreto di zeri C_f

se $z_0 \notin C_f \Rightarrow \delta_f(z_0) = 1$

LEZIONE 06

Titolo nota 16/03/2020

Prop $f \in Aut(\mathbb{C}) \iff f(z) = az+b$ con $a \neq 0$ $b \in \mathbb{C}$

Dim $\Leftarrow$ ovvio

$\Rightarrow$ f è iniettiva per Casorati-Weierstrass ho che ∞ è un polo (non può essere una sing. essenziale)

$\Rightarrow$ f si estende a un $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ con $f(\infty) = \infty$

$\Rightarrow$ per mandare ∞ in sé il grado del denominatore deve essere $<$ di quello del numeratore

OSS Domini studiati $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$ sono semplicemente connessi

terzo dominio semplicemente connesso semplice da studiare

è $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Lemma di Schwarz: $f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, $f(0) = 0$

Allora $\forall z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| \le |z|$ e inoltre $|f'(0)| \le 1$

$=$ (con $z \neq 0$) $=$ $\iff f(z) = e^{i\theta} z$ $\theta \in \mathbb{R}$

se vale l'uguaglianza in $z_0 \neq 0$

Dim poiché $f(0) = 0$ posso definire $g \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ con $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ (perché scrivendo lo sviluppo in serie a_0)

osservo che $g(0) = f'(0)$

fissiamo $0 < r < 1$

$\forall$ $|z| \le r$ $\quad |g(z)| \underset{\text{per il principio del max}}{\le} \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \underset{f \text{ manda il disco in sé}}{\le} \frac{1}{r}$

Vero $\forall$ $r < 1$, mandando $r \to 1$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{D} \quad |g(z)| \leq 1$

questo dà la tesi 1

in un punto esiste $z_0 \in \mathbb{D} \Rightarrow |g(z_0)| = 1 \Rightarrow$ Principio del max

$\Rightarrow g(z) = e^{i\vartheta} \rightarrow f(z) = z e^{i\vartheta}$

Cor $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tale $f(0) = 0 \Rightarrow f(z) = z e^{i\vartheta}$

Dim f è un automorfismo $\Rightarrow f^{-1}$ è un automorfismo

$$\Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)}$$

per Schwarz abbiamo $|f'(0)| \leq 1$, $|(f^{-1})'(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| = |(f^{-1})'(0)| = 1$

$\Rightarrow$ seconda parte Lemma S. $f(z) = z e^{i\vartheta}$

Lemma (Algebrico) Sia G un gruppo che agisce fedelmente ($\gamma_{g_1} = \gamma_{g_2} \Leftrightarrow g_1 = g_2$) su X

[cioè ogni $g \in G$ è associata una bigezione $\gamma_g : X \to X$ t.c. $\gamma_e = id$ e $\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1 g_2} \ \forall g_1, g_2 \in G$]

Sia G_{x_0} il gruppo di <u>ISOTROPIA</u> di $x_0 \in X$

cioè $\{ g \in G \mid \gamma_g(x_0) = x_0 \}$

Supponiamo $\forall x \in X \ \exists$ un $g_x \in G$ tale che $\gamma_{g_x}(x) = x_0$

$\Gamma = \{ g_x \mid x \in X \}$, Allora G è generato da Γ e G_{x_0}

cioè ogni elemento $g \in G$ è della forma $g = h g_x$ con $h \in G_{x_0}$, $g_x \in \Gamma$

Dim Sia $g \in$ e sia $x = \gamma_g(x_0)$ Allora

$$\underbrace{\gamma_{g_x} \circ \gamma_g}_{\gamma_{g_x g}}(x_0) = x_0 \overset{\text{per azione fedele}}{\Rightarrow} g_x g = h \in G_{x_0}$$

$\Rightarrow g = g_x^{-1} h$ [<u>Sistemazione</u> partendo da g^{-1} $\Rightarrow g^{-1} = g_x^{-1} h \Rightarrow g = h^{-1} g_x$ con $h^{-1} \in G_{x_0}$]

Prop $f \in Aut(\mathbb{D}) \iff$ esistono un $\vartheta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{D}$

$$\boxed{f(z) = e^{i\vartheta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}}$$

Dim $\boxed{\Leftarrow}$
$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}$$

$\Rightarrow$ se $a, z \in \mathbb{D} \Rightarrow e^{i\vartheta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \in \mathbb{D}$

OSS se $a \in \mathbb{D}$ $z \in \partial\mathbb{D} \Rightarrow f(z) \in \partial\mathbb{D}$

Che f sia invertibile ora perchè del tipo degli aut. della $\hat{\mathbb{C}}$
osservo che $f^{-1}(z) = e^{-i\vartheta} \frac{z + a e^{i\vartheta}}{1+\bar{a}e^{-i\vartheta}z}$ è della stessa forma

e $f(a) = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $f_{a,\vartheta} = e^{i\vartheta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ $\quad Aut(\mathbb{D})_0 = \{ f_{0,\vartheta} \mid \vartheta \in \mathbb{R} \}$

$\Gamma = \{ f_{a,0} \mid a \in \mathbb{D} \} \Rightarrow f_{a,0}(a) = 0$

Lemma $\Rightarrow$ $Aut(\mathbb{D})$ è generato da $Aut(\mathbb{D})_0$ e Γ
cioè ogni $\gamma \in Aut(\mathbb{D})$ è della forma $\gamma = f_{0,\vartheta} \circ f_{a,0} = f_{a,\vartheta}$

Cor $Aut(\mathbb{D})$ agisce in modo transitivo su $\mathbb{D}$
cioè $\forall\, z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ $\exists$ un $\gamma \in Aut(\mathbb{D})$ $\gamma(z_0) = z_1$

Dim Prendo $\gamma = \underbrace{f^{-1}_{z_1,0}}_{\text{e manda } 0 \text{ a } z_1} \circ \underbrace{f_{z_0,0}}_{\text{mando } z_0 \text{ a } 0}$

Domanda $\forall\, z_0, z_1, w_0, w_1 \in \mathbb{D}$ esiste un $\gamma \in Aut(\mathbb{D})$
tc $\gamma(z_0) = w_0$ e $\gamma(z_1) = w_1$?

Ex: $\forall\, \sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1 \in \partial\mathbb{D}$ con $\sigma_0 \neq \sigma_1$ e $\tau_0 \neq \tau_1$
$\exists\, \gamma \in Aut(\mathbb{D})$ tc $\gamma(\sigma_0) = \tau_0$ $\gamma(\sigma_1) = \tau_1$

Cor Non esiste una sorta di "distanza" in $\partial\mathbb{D}$ invariante per $Aut(\mathbb{D})$

Risposta nel disco è NO!

Dim siano $z_0 = w_0 = 0$ e $z_1, w_1 \neq 0$

$\Rightarrow \gamma(0) = 0 \Rightarrow \gamma(z) = \underbrace{e^{i\theta} z}_{\text{Rotazione}}$ ma se $|z_1| \neq |w_1|$ sono fregato.

$\Rightarrow \nexists\ \gamma \in Aut(\mathbb{D})$ $\gamma(0) = 0$ $\gamma(z_1) = w_1$

Lemma di Schwarz-Pick $f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D})$

$\forall z, w \in \mathbb{D}$ $$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right| \quad (1)$$

e $\forall z \in \mathbb{D}$ $$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \quad (2)$$

Inoltre $=$ in (i) per $z_0 \neq w_0$ accade $\Leftrightarrow$ $f \in Aut(\mathbb{D})$ allora $=$ vale sempre.

$=$ in (ii) per z_0

Dim Fissiamo $w \in \mathbb{D}$ e $\gamma_1(z) = \dfrac{z + w}{1 + \overline{w} z}$ $\gamma_2 = \dfrac{z - f(w)}{1 - \overline{f(w)} z}$

γ_1 e $\gamma_2 \in Aut(\mathbb{D})$ perché hanno la forma giusta

$\gamma_1(0) = w$ $\gamma_2(f(w)) = 0$

e $\gamma_1^{-1}(z) = \dfrac{z - w}{1 - \overline{w} z}$

Allora basta applicare Schwarz a $\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1$ (manda 0 in sé)

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{D}$ $|\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1(z)| \leq |z| \Leftrightarrow \boxed{|\gamma_2 \circ f(z)| \leq |\gamma_1^{-1}(z)| \quad (i)}$

$|(\gamma_2 \circ f \circ \gamma_1)'(0)| \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{|\gamma_2'(f(w)) \cdot f'(w) \cdot \gamma_1'(0)| \leq 1} \quad (2)$

$$\gamma_1'(z) = \left. \frac{1 + \overline{w} z - \overline{w}(z + w)}{(1 + \overline{w} z)^2} \right|_{z=0} = 1 - |w|^2$$

Scritta con w invece che z

$$\gamma_2'(f(w)) = \frac{1}{1 - |f(w)|^2}$$

Quindi se abbiamo uguaglianza in un punto abbiamo il lemma di Schwarz $\Rightarrow f \in Aut(\mathbb{D})$

Oss abbiamo una quantità $\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$ costruita da $f \in Hol(\mathbb{D},\mathbb{D})$

Distanza di Poincaré nel disco $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ data da

$$\omega(z,w) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|}{1-\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|}\right) = \operatorname{arctgh}\left(\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|\right)$$

(Versione eq del lemma S-P)

Cor $\forall f \in Hol(\mathbb{D},\mathbb{D})$ $z,w \in \mathbb{D} \Rightarrow$

$$\omega(f(z),f(w)) \le \omega(z,w)$$

con $=$ per $w_0 \neq z_0 \Leftrightarrow$ $=$ sempre $\Leftrightarrow f \in Aut(\mathbb{D})$

Dim arctgh è una funzione crescente in t e uso il Lemma S-P

oss l'unica cosa difficile da vedere che $\omega(z,w)$ è una distanza è la dis. triangolare.

Ex Verificare la dis. triangolare per $\omega(z,w)$

Hint

Step 1 $\checkmark$ (Morto) $\mu(z,w) = \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$ è una distanza

$$\mu(z_1,z_2) \le \mu(z_1,z_0) + \mu(z_0,z_2) \quad \text{applicando } \gamma \in Aut(\mathbb{D}) \text{ tc } \gamma(z_1) = 0$$

$$\mu(0,\gamma(z_2)) \le \mu(0,\gamma(z_0)) + \mu(0,\gamma(z_2)) \quad (\text{tanto sono isometrie})$$

Step 2 $\omega(z_1,z_2) = \operatorname{artgh}(\mu(z_1,z_2)) \overset{\text{è monotona}}{\le} \operatorname{artgh}(\mu(z_1,z_0)+\mu(z_0,z_2)) \overset{\text{artgh è convessa}}{\le}$

$$\le \operatorname{arctg}(\mu(z_1,z_0)) + \operatorname{artg}(\mu(z_0,z_2))$$

Domanda perché ω è meglio di μ?

Def Una geodetica è una curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ tc

$$\omega(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$$

Ex dimostrare che i raggi $t \to \tanh(t)\frac{z_0}{|z_0|}$ sono geodetiche

Quindi la geometria indotta da ω è migliore di quella di μ.

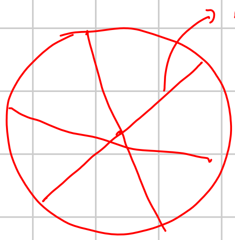
Cor $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ esiste una geodetica che collega z_1, z_2

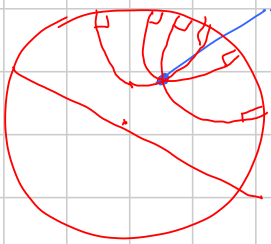
Dim mando z_1 in 0 tramite $\gamma \in Aut(\mathbb{D})$ e poi collego con una geodetica 0 a $\gamma(z_2)$ e poi ricompongo con γ^{-1}

Oss per definizione gli Automorfismi mandano geodetiche in geodetiche

Ex se $\gamma \in Aut$ e σ è un diametro (quindi una geodetica) $\Rightarrow \gamma \circ \sigma$ è un arco di circ $\perp$ al bordo del disco

sono tutte geodetiche





per questo punto passano ∞ rette parallele al diametro, quindi salta il V postulato di euclide

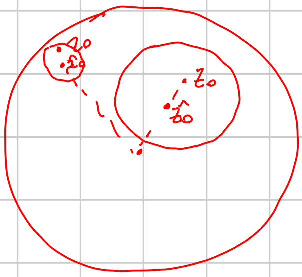
Ex Palle di Poincaré

$$B_\omega(z_0,r) = \{ z \in \mathbb{D} \mid \omega(z,z_0) < r \} = \left\{ z \in \mathbb{D} \;\middle|\; \left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right| < \tanh(r) \right\}$$

geometricamente è un disco euclideo con centro

$$\hat{z}_0 = \frac{1-(\tanh r)^2}{1-(\tanh r)^2|z_0|^2}\, z_0 \quad \text{e raggio} \quad \rho = \frac{(\tanh r)(1-|z_0|^2)}{1-(\tanh r)^2|z_0|^2} < 1 - |\hat{z}_0|$$

Graficamente



più spostato z_0 verso ∂D

$\rho \to 0$

le due palle sono in geometria iperbolica <u>identiche</u>

LEZIONE 07

Titolo nota 20/03/2020

Ricordiamo $\gamma \in Aut(\mathbb{D}) \iff \gamma(z) = e^{i\vartheta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ $a \in \mathbb{D}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$

Prop $\gamma \in Aut(\mathbb{D})$, $\gamma \neq id$. Allora vale una sola delle 3 possibilità:

(i) γ ha un solo punto fisso in $\mathbb{D}$ (caso ellittico)

(ii) γ non ha punti fissi in $\mathbb{D}$ e ha un unico punto fisso in $\partial\mathbb{D}$ (parabolico)

(iii) γ non ha p.f. in $\mathbb{D}$ e ha 2 p.f. distinti in $\partial\mathbb{D}$ (iperbolico)

Dim $\gamma(z_0) = z \iff e^{i\vartheta}(z_0 - a) = (1 - \bar{a}z_0) z_0$

$\iff a^2 z_0^2 + (e^{i\vartheta} - 1) z_0 - e^{i\vartheta} a = 0$ (eq di II grado)

essendo in $\mathbb{C}$ troviamo z_1, z_2 sol (e può essere $z_1 = z_2$)

$z_1 \cdot z_2 = -e^{i\vartheta} \frac{a}{\bar{a}} \in \partial\mathbb{D}$

$\Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = 1$ se $z_1 \neq z_2$ — caso $|z_1| < 1$ e $|z_2| > 1$ ($\notin \mathbb{D}$) $\to z_1$ p.f. caso ellittico

— $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow z_1$ e $z_2 \in \partial\mathbb{D}$ $\Rightarrow$ caso iperbolico

se $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow z_1 \in \partial\mathbb{D}$ caso parabolico.

PROP se $f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ t.c. $f(z_1) = z_1$ e $f(z_2) = z_2$ e $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f$ è l'id.

Dim a meno di Aut $z_1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ $f(z_2) = z_2$ (hanno lo stesso modulo)

$\Rightarrow$ per unicità Schwarz $\Rightarrow f(z) = \underbrace{e^{i\vartheta} z}_{\text{rotazione}}$ ma $f(z_2) = z_2 \Rightarrow \vartheta = 0$

$\Rightarrow f = id$ (perchè l'unica rotazione che fissa un punto fuori da 0 è l'id)

Esempi di Automorfismi ellittici: $\gamma_{0,\theta} = e^{i\theta} z$

Più in generale se $a \in \mathbb{D}$ $\gamma_{a,0}(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\gamma_{a,0}^{-1} \circ \gamma_{0,\theta} \circ \gamma_{a,0}}$ è ellittico con punto fisso a.

Vengono dunque rotazioni non euclidee.

(è una rotazione del cerchio di Poincaré centrato in a)

CAMBIAMO MODELLO di SPAZIO IPERBOLICO

$\mathbb{H}^+ = \{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0 \}$ SEMIPIANO SUPERIORE

Vediamo il Biolomorfismo da $\mathbb{D}$ in $\mathbb{H}^+$

Vediamo $\mathbb{H}^+ \subset \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow \partial \mathbb{H}^+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{H}^+$ TRASFORMATA DI CAYLEY

$z \to i \dfrac{1+z}{1-z}$

$$\psi^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+i}$$

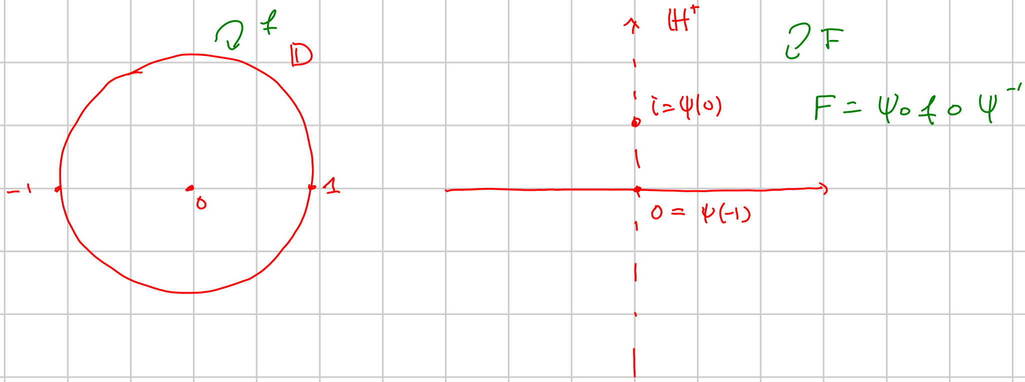
$\psi(0) = i$ $\quad \psi(1) = +\infty$.

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}\left(i \frac{1+z}{1-z} \right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{1}{|1-z|} \operatorname{Re}\left((1+z)(1-\bar{z}) \right) =$$

$$= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \iff z \in \mathbb{D}$$

$e = 0 \iff z \in \partial \mathbb{D}$

Quindi ψ è effettivamente un biolomorfismo e si estende in modo continuo da $\partial \mathbb{D}$ a $\partial \mathbb{H}^+$ (considerando $+\infty$).



<u>Cor</u> $\gamma \in Aut(\mathbb{H}^+) \Leftrightarrow \gamma(w) = \dfrac{aw+b}{cw+d}$ con $ad - bc = 1$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Ricorda su $\hat{\mathbb{C}}$ $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

<u>OSS</u> non stupisce $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ perché devono mandare la retta reale nella retta reale.

$\Rightarrow Aut(\mathbb{H}^+) \cong SL(2,\mathbb{R})/_{\pm\{Id\}} = PSL(2,\mathbb{R})$ gruppo speciale lineare proiettivo.

<u>Dim</u> $\gamma \in Aut(\mathbb{H}^+) \Leftrightarrow \psi^{-1} \circ \gamma \circ \psi \in Aut(\mathbb{D})$

$\Leftrightarrow \psi^{-1} \circ \gamma \circ \psi(z) = e^{i\theta} \dfrac{z - a}{1 - \bar{a} z}$

$\Leftrightarrow$ Chiamando $\psi(z) = w$

$$\gamma(w) = \psi\left(e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) = \psi\left(e^{i\theta} \frac{\psi^{-1}(w) - a}{1 - \bar{a}\psi^{-1}(w)}\right)$$

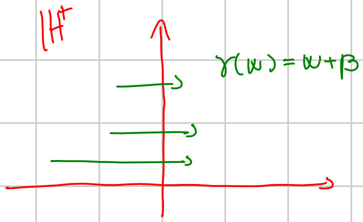
Fare il conto per avere la tesi.

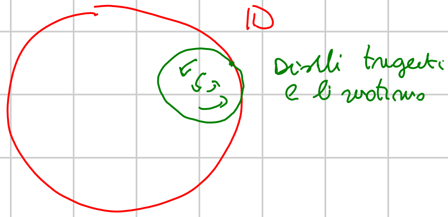
<u>Ex</u> $\gamma \in Aut(\mathbb{H}^+)$ $\gamma(i) = i \Leftrightarrow \gamma(w) = \dfrac{w\cos\theta - \sin\theta}{w\sin\theta + \cos\theta}$

<u>EX</u> $\gamma \in Aut(\mathbb{H}^+)$ $\gamma(\infty) = \infty \Leftrightarrow \gamma(w) = \alpha w + \beta$ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ $\beta \in \mathbb{R}$

γ <u>parabolico</u> non deve avere altri punti fissi in $\mathbb{C} \Leftrightarrow \alpha w + \beta = w$ non deve aver sol $\Leftrightarrow \alpha = 1, \beta \neq 0$ cioè $= w + \beta$

$\Rightarrow$ Traslazioni ORIZZONTALI





<u>Ex</u> $\tau \in \partial \mathbb{D}$ Dimostra che tutti gli automorfismi parabolici di $\mathbb{D}$ con $\gamma(\tau) = \tau$ sono $\gamma(z) = \sigma_0 \dfrac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$ $\quad z_0 = \dfrac{ic}{2 - ic}\tau$ $\quad c \in \mathbb{R}$

$$\sigma_0 = \frac{2 - ic}{2 + ic}$$

<u>Esempio</u> $\gamma \in Aut(\mathbb{H}^+)$ iperbolico $\gamma(\infty) = \infty$ e $\gamma(0) = 0$

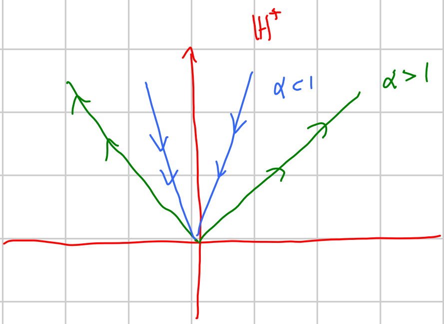
$$\Downarrow$$

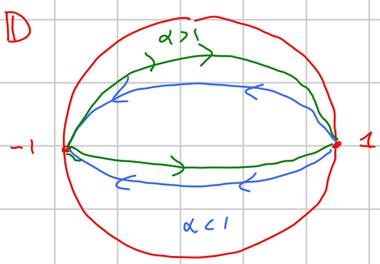
$$\gamma(w) = \alpha w + \beta \quad + \gamma(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$
$\beta \in \mathbb{R}$

quindi $\gamma(w) = \alpha w \quad \alpha > 0$

Quindi sono delle omotetie.





• <u>DINAMICA DISCRETA</u> : $f : X \longrightarrow X$ consideriamo le <u>iterate</u>

$$f^2 = f \circ f, \quad f^k = f \circ f^{k-1}$$

lo studio della dinamica è capire il comportamento asintotico di $\{f^k\}$

<u>Esempio</u> capire cosa succede all'orbita (o traiettoria) di x

$$O^+\{x\} = \{f^k(x)\} \quad \text{con } x \in X$$

Esempio $\gamma(w) = \alpha w \Rightarrow \gamma^k(w) = \alpha^k w$

Quindi se $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \gamma^k(w) \to 0 \Rightarrow \gamma^k \to 0$ costante

. se $\alpha > 1 \Rightarrow \gamma^k(w) \to \infty \Rightarrow \gamma^k \to \infty$ costante

OSS $0, +\infty$ sono i punti fissi di γ.

ESEMPIO $\gamma(w) = w + \beta \Rightarrow \gamma^k(w) = w + k\beta \Rightarrow \gamma^k(w) \to \infty \quad k \to \infty$

$\Rightarrow \gamma^k \to \infty$ come funzione costante

OSS anche in questo caso $+\infty$ è il punto fisso.

OSS

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \psi \uparrow \equiv & & \equiv \uparrow \psi \\ Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

con ψ bigezione (omeom / biolomorfismo)

$F^k = \psi^{-1} \circ f^k \circ \psi$ è coniugato f^k di

$F = \psi^{-1} \circ f \circ \psi$ cioè F è coniugato a f

In particolare la "dinamica di F" "è uguale alla "dinamica di f"

Corollario $\gamma \in Aut(\mathbb{D})$ parabolico o iperb $\Rightarrow \gamma^k$ converge a un punto fisso in $\partial\mathbb{D}$

DIM A meno di coniugio possiamo supporre $Fix(\gamma) = \{1\}$ PARABOLICO

$Fix(\gamma)\ \{1, -1\}$ IPERBOLICO

Coniughiamo con la trasformata di Caley, e otteniamo la tesi.

$\gamma \in Aut(\mathbb{D})$ ellittico, $\gamma(0) = 0$ (a meno di coniugio)

$\Rightarrow \gamma(z) = e^{i2\pi\theta} z \Rightarrow \gamma^k(z) = e^{i2k\pi\theta} z$

- Se $\theta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists k_0$ t.c. $k_0\theta \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{i2k_0\pi\theta} = 0$

  $\Rightarrow \gamma^{k_0}(z) = z \qquad \gamma^{k_0} = id$

- Se invece $\theta \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \gamma^k(z) \neq z \quad \forall z \neq 0$ e $\forall k \in \mathbb{N}^*$

  $\overset{EX}{\Rightarrow} \gamma^k(z) - \gamma^h(z) \quad \forall z \neq 0 \ \forall h \neq k$

Ex Se $\vartheta \notin \mathbb{Q}$ $\{\gamma^k(z_0) \mid k \in \mathbb{N}\}$ è denso in $\{|z| = |z_0|\}$

· STUDIAMO ADESSO la dinamica di $f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ qualunque.

Def $f \in Hol(\Omega, \Omega)$, un PUNTO LIMITE di $\{f^k\}$ è una $g \in Hol(\Omega, \mathbb{C})$ limite di una sottosuccessione $f^{k_\nu} \longrightarrow g$

Lemma $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $f \in Hol(\Omega, \Omega)$ se id_Ω è un punto limite di $\{f^k\}$ $\Rightarrow$ $f \in Aut(\Omega)$

Dim $f^{k_\nu} \longrightarrow id \Rightarrow f$ è iniettiva se $z_1 \neq z_2$ tc $f(z_1) = f(z_2)$

$$\Rightarrow f^{k_\nu}(z_1) = f^{k_\nu}(z_2)$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$z_1 \quad \neq \quad z_2 \quad !!$$

SURIETTIVITÀ: se $z_0 \in \Omega$ $z_0 = id_\Omega(z_0) \overset{\text{per Hurwitz}}{\in} f^{k_\nu}(\Omega) \subseteq f(\Omega)$ per $\nu \gg 1$

$\Rightarrow f$ è surgettivo

PROP: $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ dominio limitato, $f \in Hol(\Omega, \Omega)$
Sia $h \in Hol(\Omega, \mathbb{C})$ punto limite di $\{f^k\}$. Allora o

(1) $h \equiv c \in \overline{\Omega}$

(2) $h \in Aut(\Omega) \Rightarrow f \in Aut(\Omega)$

Dim $h = \lim\limits_{\nu \to \infty} f^{k_\nu}$ pongo $m_\nu = k_{\nu+1} - k_\nu$
possiamo a meno di ulterior successione che $m_\nu \longrightarrow +\infty$.

Per Montel a meno di una sottosucc che $f^{m_\nu} \longrightarrow g \in Hol(\Omega, \mathbb{C})$

Se $h \equiv c$, finito ($c \in \overline{\Omega}$ perché i limiti delle orbite stanno tutte in $\overline{\Omega}$)

Se $h \not\equiv c$ $\Rightarrow$ $h(\Omega)$ è aperto in Ω, Se $z \in \Omega$

$$e \quad g(h(z)) = \lim_{\nu \to \infty} f^{m_\nu}(f^{k_\nu}(z)) = \lim_{\nu \to \infty} f^{k_{\nu+1}} = h(z)$$

$$\Rightarrow g|_{h(\Omega)} = id_\Omega \Rightarrow g = id_\Omega \overset{\text{certa}}{\Rightarrow} f \in Aut(\Omega)$$

A a meno di sottosucc. (Montel) è facile vedere che $(f^{-1})^{k_\nu} = f^{-k_\nu}$ converge a h^{-1}

Prop Sia $f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ $f(z_0) = z_0$, $z_0 \in \mathbb{D}$ e supponiamo $f \notin Aut(\mathbb{D})$

Allora $f^k \to z_0$ unif. sui cpt

Dim (nelle note questa è sbagliata). A meno di coniugio possiamo supporre $z_0 = 0$. per Schwarz $\Rightarrow$ $|f(z)| < |z|$ $\forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$

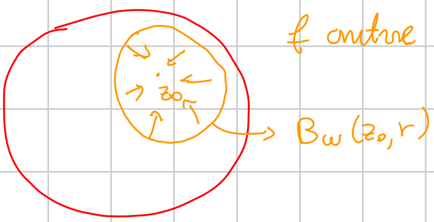
se avessi = in un punto $f \in Aut$

Fissiamo $0 < r < 1$ in $\overline{\mathbb{D}}_r$ $\frac{|f(z)|}{|z|}$ ha un max $\lambda_r < 1$

$\Rightarrow$ $\forall z \in \overline{\mathbb{D}}_r$ $|f(z)| \leq \lambda_r |z|$ $\Rightarrow$ $|f^2(z)| \leq \lambda_r |f(z)| \leq \lambda_r^2 |z|$

$z \in \mathbb{D}_r \Rightarrow f(z) \in \mathbb{D}_r$

$\Rightarrow$ $|f^k(z)| \leq \lambda_r^k |z| \to 0$ per $k \to \infty$ in modo unif sui cpt.



f contrae tutto il disco verso z_0.

Domanda: cosa accade se f non ha punti fissi interni?

RISPOSTA: Succede la stessa cosa per aut. iperbolici e parabolici quindi converge a un punto su $\partial\mathbb{D}$

Teorema (Wolff - Denjoy) $f \in Hol(\mathbb{D},\mathbb{D})$, f non abbia punti fissi in $\mathbb{D}$. Allora esiste unico $\tau_0 \in \partial\mathbb{D}$ t.c. $f^k \to \tau_0$ unif. sui cpt.

Dim: Vedi lunedì.

LEZIONE 08

Titolo nota 23/03/2020

Def (OROCICLO) $E(\tau,R)$ di centro $\tau\in\partial\mathbb{D}$ e $R>0$ è

$$E(\tau,R)=\left\{ z\in\mathbb{D} \;\middle|\; \frac{|\tau-z|^2}{1-|z|^2}<R \right\}$$

Geometricamente è un disco euclideo di raggio $\frac{R}{R+1}$ tangente a $\partial\mathbb{D}$ in τ

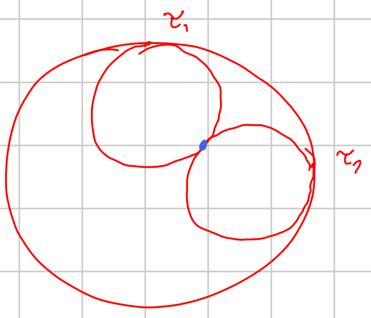
Ex $E(\tau,R)=\left\{ z\in\mathbb{D} \;\middle|\; \lim_{w\to\tau}\left[\omega(z,w)-\omega(0,w)\right]<\frac{1}{2}\log R \right\}$

Prop (Lemma di Wolff) $f\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ senza punti fissi
$\Rightarrow \exists!\ \tau\in\partial\mathbb{D}$ tc $\forall z\in\mathbb{D}$

$$\frac{|\tau-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2}\le\frac{|\tau-z|^2}{1-|z|^2} \qquad (*)$$

In altre parole $\forall R>0$ $f(E(\tau,R))\subseteq E(\tau,R)$

Dim Vedi disegno supponiamo per assurdo $\exists\ \tau_1\neq\tau_2$
prendiamo due orocicli tangenti
(come nel disegno)



Ma il punto di tangenza $\{z\}=E(\tau_1,R_1)\cap E(\tau_2,R_2)$ deve andare in sé. Assurdo perché non ci sono punti fissi interni

$\exists\ \{r_\nu\}\subset(0,1)$ $r_\nu\nearrow 1^-$ e poniamo $f_\nu=r_\nu f$
$\Rightarrow f_\nu(\mathbb{D})\subset \mathbb{D}_{r_\nu}\subset\subset\mathbb{D} \Rightarrow \exists w_\nu\in\mathbb{D}:\ f_\nu(w_\nu)=w_\nu$

A meno di sottosucc possiamo suppore $w_\nu\longrightarrow\tau\in\overline{\mathbb{D}}$

Perché se per assurdo $\tau \in \mathbb{D}$ $f(\tau) = \lim_{\nu \to +\infty} f_\nu(w_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} w_\nu = \tau$

Assurdo $\Rightarrow \tau \in \partial \mathbb{D}$

Per Schwarz-pick

$$\left| \frac{f_\nu(z) - w_\nu}{1 - \overline{w_\nu} f_\nu(z)} \right|^2 \le \left| \frac{z - w_\nu}{1 - \overline{w_\nu} z} \right|^2$$

$$1 - \left| \frac{f_\nu(z) - w_\nu}{1 - \overline{w_\nu} f_\nu(z)} \right|^2 \ge 1 - \left| \frac{z - w_\nu}{1 - \overline{w_\nu} z} \right|^2$$

$$\frac{|1 - \overline{w_\nu} f_\nu(z)|^2}{1 - |f_\nu(z)|^2} \le \frac{|1 - \overline{w_\nu} z|^2}{1 - |z|^2}$$

$\nu \to +\infty$

$$\frac{|1 - \overline{\tau} f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \le \frac{|1 - \overline{\tau} z|^2}{1 - |z|^2}$$

Moltiplicando per $|\tau|^2$ al dx entrambi i lati si ha la tesi $(\tau \overline{\tau} = |\tau| = 1)$

Ex l'uguaglianza in $(*)$ per $z_0 \in \mathbb{D} \iff f$ è automorfismo parabolico con punto fisso $\tau \in \partial \mathbb{D} \iff$ Uguaglianza vale in $(*)$ $\forall z \in \mathbb{D}$

Teorema (Wolff-Denjoy) $f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, f non abbia punti fissi. Allora esiste unico $\tau \in \partial \mathbb{D}$ tc $f^k \to \tau$ costante.

Dim se $f \in Aut(\mathbb{D})$ parabolico e iperbolico l'abbiamo visto

Supponiamo che $f \notin Aut(\mathbb{D})$. Montel $\Rightarrow \{f^k\}$ è rel cpt in $Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$

[Ex Y: X spazio topologico di Hausdorff (di topologia) $\{x_k\} \subset X$ con $\overline{\{x_k\}}$ cpt in X

supponiamo che esista unico $\bar{x} \in X$ tc ogni sottosucc. convergente di $\{x_k\}$ converga a $\bar{x}$ $\Rightarrow$ l'intera x^k converge a $\bar{x}$]

Sia $\tau \in \partial \mathbb{D}$ dato dal lemma di Wolff.

Sia $h = \lim_{\nu \to \infty} f^{k_\nu}$ un punto limite di $\{f_n\}$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $h \equiv \tau$

Dalla prop. vista la volta scorsa sappiamo che (poiché abbiamo escluso $f \in Aut$)

$\Rightarrow$ h è costante $\sigma \in \overline{\mathbb{D}}$

se $\sigma \in \mathbb{D}$ $\Rightarrow$ $f(\sigma) = \lim_{\nu \to \infty} f\left(f^{k_\nu}(\sigma)\right) =$

$= \lim f^{k_\nu}\left(f(\sigma)\right) = \sigma$ imp.

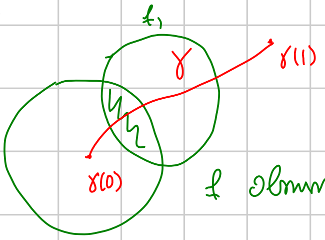
$\Rightarrow$ $h \equiv \sigma \in \partial \mathbb{D}$, ma vogliamo $\sigma = \tau$.

Ma per il lemma di Wolff $f^{k_\nu}\left(E(\tau, R)\right) \subseteq E(\tau, R)$ $\forall R > 0$

$\Rightarrow$ $\{\sigma\} = h\left(E(\tau, R)\right) \subseteq \underbrace{\overline{E(\tau, R)}}_{\text{perché limite delle } f^{k_\nu}} \cap \underbrace{\partial \mathbb{D}}_{\sigma \in \partial \mathbb{D}} = \{\tau\}$

$\Rightarrow$ $\sigma \equiv \tau$

IDEA



$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

f olomorfa f_0 in U_0 centro di centro $f(0)$

n olo

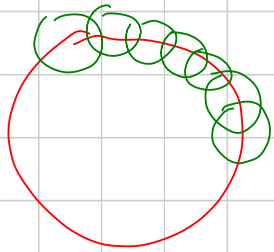
$\exists$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ e intorni U_0 U_1 ... U_r di $\gamma(t_j)$

e $f_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}$ olo tc $f_j \big|_{U_j \cap U_{j+1}} = f_{j+1} \big|_{U_j \cap U_{j+1}}$

$\Rightarrow$ f_0 si prolunga olomorficamente lungo γ.

OBIETTIVO fare la radice quadrata

Se γ è chiusa? es $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ $\quad \gamma(0) = \gamma(1) = 1$



$z = |z| e^{2\pi i \theta}$ $\quad \theta \in \mathbb{R}$

$U_0 = D(1, 1/2)$ $\quad f_0 : U_0 \to \mathbb{C}$

$f_0(z) = z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{2\pi i (\theta/2)}$ $\quad \theta \in (-\pi, \pi)$

$f_0 \in \mathcal{O}(U_0)$

Si può vedere che è possibile prolungare f olom. lungo γ

con $f(\gamma(t)) = e^{2\pi i (t/2)}$

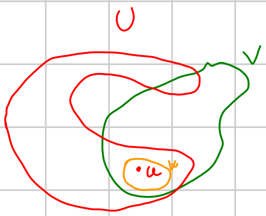
$\Rightarrow f(\gamma(1)) = e^{2\pi i/2} = e^{i\pi} = -1$

Ma $f(\gamma(0)) = 1$

Sia $a \in \mathbb{C}$ $\quad (U, f)$ $\quad U \subseteq \mathbb{C}$ è un intorno aperto di a e $f \in \mathcal{O}(U)$

$(U, f) \sim (V, g)$ se esiste un $W \subset U \cap V$ intorno aperto di a

tc $\quad f|_W = g|_W$



(Ex) è una Relazione di equivalenza

DEF $\quad \{(U, f)\}/_\sim = \mathcal{O}_a =$ Spazio dei germi di funzioni olomorfe in a

$\underline{f}_a \in \mathcal{O}_a$ è un germe di funzioni olomorfe

$(U, f) \in \underline{f}_a$ si chiamano rappresentante del germe di a

$\mathcal{O} = \bigcup_{a \in \mathbb{C}} \mathcal{O}_a$ $\quad$ fascio dei germi di funzioni olomorfe.

Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto $\quad \mathcal{O}_\Omega = \bigcup_{a \in \Omega} \mathcal{O}_a$

Ex $\mathcal{O}_a$ è una $\mathbb{C}$-algebra
$\underline{f_a} + \underline{g_a}$ è il germe rappresentato da $(W, f+g|_W)$

dove $W \subset U \cap V$ intorno aperto di a e $(U, f) \in \underline{f_a}$ $(V, g) \in \underline{g_a}$
Da verificare che è ben definita
Analogo per prodotto e prodotto per scalare.

Oss per definizione $\forall k \geq 0$ possiamo definire $\underline{f_a}^{(k)}(a) \in \mathbb{C}$
prendendo $\underline{f_a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ con $(U, f) \in \underline{f_a}$

è definita $p: \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ tc $p(\mathcal{O}_a) = \{a\}$
• Voglio definire una topologia su $\mathcal{O}$ in modo tale che p sia "quasi" un rivestimento.

Definisco chi sia un sistema fondamentale di intorni

$U \subseteq \mathbb{C}$ aperto $f \in \mathcal{O}(U)$ $N(U, f) = \{ \underline{f_z} \mid z \in U \}$
Ex esiste un'unica topologia su $\mathcal{O}$ tc gli $N(U, f)$ siano un sistema fondamentale di intorni.

Oss $p|_{N(U,f)} : N(U, f) \longrightarrow U$ è una bigezione

PROP $\mathcal{O}$ con questa topologia è uno spazio di Hausdorff.

Dim Siano $\underline{f_a} \neq \underline{g_b}$.

• Se $a \neq b \Rightarrow$ prendo $(U, f) \in \underline{f_a}$ e $(V, g) \in \underline{g_b}$ con $U \cap V = \emptyset$
perché $\mathbb{C}$ è di Hausdorff $\Rightarrow N(U, f) \cap N(V, g) = \emptyset$

- Se invece $a = b$ prendiamo $(U, f) \in f_a$ $(V, g) \in g_a$ e un $D \subset U \cap V$ disco aperto di centro a

CLAIM $N(D, f) \cap N(D, g) = \emptyset$

Per assurdo supponiamo $\exists\ h_z \in N(D, f) \cap N(D, g)$

$\Rightarrow z \in D \Rightarrow h_z = f_z$ e $f_z = g_z$

quindi esiste $W \subset D$ aperto intorno di z tc

$$f|_W = g|_W$$

$\Rightarrow$ (per identità) $f \equiv g$ in $D \Rightarrow f_a = g_a$ e questo è ASSURDO!!

- Prop $p : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua, aperta e omeo loc

Dim CONTINUA Sia $V \subset \mathbb{C}$ aperto $p^{-1}(V) = \bigcup \{ N(W, f) \mid W \subseteq V_{\text{apert}} \text{ e } f \in \mathcal{O}(W) \}$

è unione di aperti quindi è aperto

APERTA $p(N(U, f)) = U$ è aperto $\Rightarrow p$ è aperta

OMEO LOC $p|_{N(U,f)}$ è invertibile $p^{-1}(z) = f_z$ e questa è continua per la prop.

$\Rightarrow p|_{N(U,f)}$ è un omeo loc.

Def Una sezione di $\mathcal{O}$ in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto è una $f : \Omega \to \mathcal{O}$ continua tale che $p \circ f = id_\Omega$ cioè $f(z) \in \mathcal{O}_z$ $\forall z \in \Omega$

Ex L'insieme delle sezioni di $\mathcal{O}$ su Ω è in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{O}(\Omega)$ delle funzioni olomorfe su Ω

Hint $\boxed{\Rightarrow}$ $\overset{\text{FUNZIONE}}{f} \in \mathcal{O}(\Omega) \to \overset{\text{SEZIONE}}{f(z)} = f_z \in \mathcal{O}_z = p^{-1}(z) \to p \circ f = id$

$\boxed{\Leftarrow}$ se f è una sezione $\Rightarrow \underset{\text{funz}}{f(z)} = \underset{\text{sezione}}{f(z)}(z)$ resta da vedere che è olomorfa

Def $a \in \mathbb{C}$, $f_a \in \mathcal{O}_a$ $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva continua con $\gamma(0) = a$
Allora un prolungamento analitico di f_a lungo γ è un sollevamento
$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathcal{O}$ di γ (cioè $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$) tc $\tilde{\gamma}(0) = f_a$

Oss p non è un rivestimento, perchè non tutte le curve possono essere sollevate.

Es $a = 1$ $f_a = \left(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \frac{1}{z} \right)$ e $\gamma(t) = 1 - t$

Non esiste alcun sollevamento di γ che parte an f_a
perchè se ci fosse il sollevamento dovrebbe esistere una funzione g definita in $\gamma(1)$ analitica che coincide con $\frac{1}{z}$ in un intorno di $\frac{1}{z}$ ma per analiticità di $\frac{1}{z}$ fuori da 0

è prolungamento delle funzioni analitiche $g = \frac{1}{z}$ il che è assurdo che fosse analitica in 0.

LEZIONE 09

Titolo nota 27/03/2020

Def $d : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ $\quad \underline{f}_a \in \mathcal{O}_a \Rightarrow d\underline{f}_a$ è il germe in a rappresentato dalla derivata di un rapp. di $\underline{f}_a$, cioè se $(U, f) \in \underline{f}_a \Rightarrow d\underline{f}_a$ è rapp. da (U, f')

Prop $d : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ è un rivestimento

Lemma $D \subseteq \mathbb{C}$ disco aperto. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ ha una primitiva, e due primitive differiscono per una costante additiva.

Dim Se $a \in D$ è il centro $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ allora una primitiva è

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$$

Dim (Prop) Sia $\underline{f}_a \in \mathcal{O}_a$, sia $(U, f) \in \underline{f}_a$ e $D \subset U$ disco aperto centrato in a. Chiamo $\mathcal{D} = N(D, f)$ è un intorno aperto di $\underline{f}_a$

Sia F una primitiva di f su $D \Rightarrow \forall c \in \mathbb{C}$ prendiamo

$$\mathcal{D}_c = N(D, F+c)$$

Vogliamo dimostrare che

(i) $d^{-1}(\mathcal{D}) = \bigcup_{c \in \mathbb{C}} \mathcal{D}_c$

(ii) $d|_{\mathcal{D}_c} : \mathcal{D}_c \to \mathcal{D}$ è un omeomorfismo $\forall c \in \mathbb{C}$

(iii) $c_1 \neq c_2 \Rightarrow \mathcal{D}_{c_1} \cap \mathcal{D}_{c_2} = \emptyset$

Se ci riesco ho che d è un rivestimento.

(i) Sia $z \in D \Rightarrow \underline{f}_z \in \mathcal{D}$. Sia $\underline{g}_z \in \mathcal{O}_z$ tc $d\underline{g}_z = \underline{f}_z \overset{?}{\Rightarrow}$ $\exists c \in \mathbb{C}$ tc $\underline{g}_z = \underline{(F+c)}_z$

$dg_z = f_z \Rightarrow \exists\, (W, g) \in g_z$ t.c. $g' = f$, possiamo supporre che $W \subset D$ e sia un disco aperto.

$\Rightarrow$ su W ho una primitiva, e ho anche una primitiva su D

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : g|_W = F|_W + c \Rightarrow g_z \in \mathcal{D}_c$

(ii) $d(\mathcal{D}_c) = \mathcal{D}$ + (i) $\Rightarrow d$ è continua e aperta.

$\Rightarrow d|_{\mathcal{D}_c} : \mathcal{D}_c \to \mathcal{D}$ è surgettiva

è inoltre iniettiva perché $\forall z \in D$ $\mathcal{D}_c \cap \mathcal{O}_z$ e $\mathcal{D} \cap \mathcal{O}_z$ contengono un unico germe e $d(\mathcal{O}_z) \subseteq \mathcal{O}_z$

(iii) Se avessi $F_z \in \mathcal{D}_{c_1} \cap \mathcal{D}_{c_2} \Rightarrow F_z$ è rappresentato da $(D, F + c_1)$ e $(D, F + c_2)$

$\Rightarrow F + c_1 \equiv F + c_2$ vicino a $z \Rightarrow c_1 = c_2$

Teorema $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ammette una primitiva

Dim Sia $\varphi : \Omega \to \mathcal{O}$ la sezione corrispondente a f

sollevamento

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O} \arrow[d, "d"] \\ \Omega \arrow[ur, dashed, "\Phi"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{O} \end{tikzcd}$$

dalla teoria dei rivestimenti esiste $\Phi : \Omega \to \mathcal{O}$ sollevamento tale che $d \circ \Phi = \varphi$. Anche Φ è una sezione infatti: siccome $p \circ d = p$

dove $p : \mathcal{O} \to \Omega$ proiezione, $f_z \longmapsto z$

$p \circ \Phi = p \circ d \circ \Phi = p \circ \varphi = id_\Omega$

$\Rightarrow \Phi$ è una sezione.

$\Rightarrow$ la $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ associata a Φ è una primitiva di f.

Cor $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso e $f \in Hol(\Omega, \mathbb{C}^*)$ allora esiste $g \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow f = \exp g(x)$
inoltre $g(x)$ è unica a meno di costanti additive $2\pi k i$ con $k \in \mathbb{Z}$

Dim Sia g_0 una primitiva di $\frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathcal{O}(\Omega)$ perché $f(z) \neq 0 \ \forall z$

$\overset{!}{\Rightarrow} \exists c_0$ tc $\exp(c_0 + g_0) = f(x)$

Infatti $\frac{d}{dz}\left(f e^{-g_0}\right) = f' e^{-g_0} + f\Big(-e^{-g_0} \overset{g_0'}{\overset{\parallel}{\frac{f'}{f}}}\Big) = 0$

$\Rightarrow \quad f e^{-g_0} = c \neq 0 \quad \Rightarrow c = e^{c_0}$

$\Rightarrow f = e^{g_0 + c_0}$

Inoltre se $\exp(g_1) = \exp(g_2) \Rightarrow \exp(g_1 - g_2) \equiv 1 \Rightarrow$ (continua a valori in un discreto) $\underset{\text{quindi costante}}{\Rightarrow}$ $g_1 - g_2 \equiv 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$

Cor $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ semp. connesso $f \in Hol(\Omega, \mathbb{C}^*)$ mai nulla, $n \in \mathbb{Z}^*$
Allora esiste $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ $f = h^n$ Inoltre h è unica a meno di costanti moltiplicative della forma $e^{2\pi i k/n}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Dim Sia $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $f = \exp(g) \Rightarrow h = \exp(g/n)$ è come richiesto

Se $h_1^n = h_2^n \iff \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^n \equiv 1$ continua su un discreto

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : h_1 = e^{2\pi i k/n} h_2$

Teo (Osgood, Koebe) (era quello di Riemann)

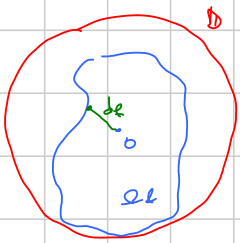
$\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ dominio limitato e $z_0 \in \Omega$. Allora esiste uno, cioè $f'(0) \in \mathbb{R}$ e $f'(0) > 0$, rivestimento olomorfo $f_0 : \mathbb{D} \to \Omega$ tc $\underbrace{f_0(0) = z_0 \text{ e } f_0'(0) > 0}_{\text{serve solo per l'unicità}}$

Dim Supponiamo (a meno di traslazione) $0 \in \Omega$ e (a meno di omotetia) che $\Omega \subset\subset \mathbb{D}$

Sia $\mathcal{F} = \{ f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D}) :$ (i) $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$
(ii) $f(\mathbb{D}) \supseteq \Omega$
(iii) se Ω_f è la componente connessa di $f^{-1}(\Omega)$ contenente 0 $\Rightarrow f|_{\Omega_f} : \Omega_f \to \Omega$ è un rivestimento $\}$

IDEA Se $\exists f_0 \in \mathcal{F}$ con $\Omega_f = \mathbb{D}$ è ok

Poniamo $\forall f \in \mathcal{F}$ $d_f = \inf_{z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_f} |z| = \min_{z \in \partial \Omega_f} |z|$



Abbiamo $d_f = 1 \iff \Omega_f = \mathbb{D}$.

quindi il nostro obbiettivo è trovare $f_0 \in \mathcal{F}$ con $d_{f_0} = 1$

Lasciamo in sospeso di dimostrare che $\mathcal{F} \neq \emptyset$

Sia $d = \sup_{f \in \mathcal{F}} d_f \leq 1$, sia $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tc $d_{f_n} \to d$
per Montel possiamo supporre che $f_n \to f_0 \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{C})$
con immagine nel $\overline{\mathbb{D}}$ vogliamo vedere che
$f_0 \in \mathcal{F}$ e $d_{f_0} = d$

e ovviamente $f(0)=0$ e $f_0'(0) \geq 0$

facciamo vedere che (a) f_0 non è costante e (b) $f_0'(0)>0$

Sia un $r>0$ tc $\mathbb{D}_r \overset{D(0,r)}{=}$ sia nel cpt in Ω

Siccome $f_n : \Omega_{f_n} \to \Omega$ rivestimento e $0 \in \Omega_{f_n}$

$\Rightarrow \exists !\, h_n : \mathbb{D}_r \to \Omega_{f_n}$ olom. $f_n \circ h_n = id_{\mathbb{D}_r}$ e $h_n(0)=0$

$\Rightarrow$ per Montel a meno di sottosuc.

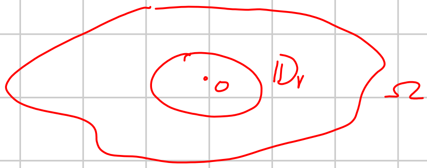
posso supporre $h_n \to h_0 \in Hol(\mathbb{D}_r, \overline{\mathbb{D}})$

tc $f_0 \circ h_0 = id_{\mathbb{D}_r}$ $\Rightarrow$ h_0 è iniettiva

$\Rightarrow$ h_0 è aperta $\Rightarrow$ $h_0(\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{D}$

$\Rightarrow$ f non costante $\Rightarrow$ $f_0(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$

$\Rightarrow$ $f_0'(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{h_0(0)}}) \cdot h_0'(0) = 1$



$\Rightarrow f_0'(0) \neq 0 \Rightarrow f_0'(0) > 0$

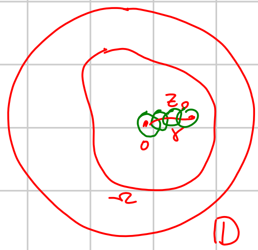
(b) $f_0(\Omega_0) = \Omega$ dove $\Omega_{f_0} =$ c.c di $f_0^{-1}(\Omega)$ contenente 0

(a primi 2) Sia $z_0 \in \Omega$ e γ una curva da 0 a z_0

Ricopriamo γ con dischi

$D_0 = \mathbb{D}_r$, $D_1 \dots D_k$

con $D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset$ e $z_0 \in D_k$



Sia $h_{n,0}$ l'inversa di f_n su D_0 tc $h_{n,0}(0)=0$

$\forall j$ sia $h_{n,j}$ l'inversa di f_n su D_j che coincide con $h_{n,j-1}$ su $D_{j-1} \cap D_j$

A meno di sottosuccessioni possiamo supporre che $h_{n,0} \to h_{0,0} \in Hol(\mathbb{D}_0, \mathbb{D})$

(stesso ragionamento di prima)

Per Vitali $\Rightarrow h_{n,1} \to h_{0,1} \in Hol(D_1, \mathbb{D}) \overset{\text{per induzione}}{\rightsquigarrow} h_{n,k} \to h_{0,k} \in Hol(D_k, \mathbb{D})$

$f_0 \circ h_{0,k} = id_{D_{r_k}}$ per come abbiamo preso le $h_{n,k}$

$\Rightarrow f_0(h_{0,k}(z_0)) = z_0 \Rightarrow z_0 \in f(\mathbb{D})$

In realtà $h_{0,k}(z_0) \in \Omega_{f_0}$

perché è immagine della curva ottenuta con γ $h_{0,j} \circ \gamma$ parte da 0

e quindi è contenuta nella c.c. di $f_0^{-1}(\Omega)$ contenente 0 (cioè Ω_0)

(c) $f_0 : \Omega_{f_0} \to \Omega$ rivestimento (lunedì)

Rimane da dimostrare che $d_{f_0} = 1$ (e che $\mathcal{F} \neq \emptyset$)

Seguiremo da un Lemma:

<u>Lemma</u> $\Omega \subset \mathbb{D}$ limitato con $0 \in \Omega$ e $\Omega \neq \mathbb{D} \Rightarrow \exists f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D})$

t.c. (i) $f(0) = 0$ e $f'(0) > 0$

$\mathcal{F} \neq \emptyset \quad \Leftarrow$ (ii) $f(\mathbb{D}) \supset \Omega$

(iii) se Ω_f è c.c. di $f^{-1}(\Omega)$ contiene $0 \Rightarrow f|_{\Omega_f} : \Omega_f \to \Omega$ rivest.

(iv) $d_f = \inf_{z \in \Omega_f} |z| > \inf_{z \notin \Omega} |z|$

Lemma $\Rightarrow \mathcal{F} \neq \emptyset$ se $d_{f_0} < 1 \Rightarrow \Omega_{f_0} \neq \mathbb{D} \Rightarrow$

il lemma ci da un rivestimento $f : \Omega_f \to \Omega_{f_0}$

e quindi $f_0 \circ f : \Omega_f \to \Omega$ con

$d_{f_0 \circ f} > d_{f_0}$ Assurdo perché d_{f_0} era il sup.

LEZIONE 10

Titolo nota 30/03/2020

Ricordiamo la def di $\mathcal{F}$

$\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ dominio $z_0 = 0 \in \Omega$

$\mathcal{F} = \{ f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \mid$ (i) $f(0) = 0$
(ii) $f(\mathbb{D}) \supset \Omega$
(iii) $f|_{\Omega_f} : \Omega_f \longrightarrow \Omega$ rivestimento,
Ω_f = Comp. connessa di $f^{-1}(\Omega)$ contenente 0 $\}$

OBIETTIVO: trovare $f_0 \in \mathcal{F}$ tc $\Omega_{f_0} = \mathbb{D}$

Abbiamo definito $d_f = \inf_{z \in \Omega_f} |z| \leq 1$, $d = \sup_{f \in \mathcal{F}} d_f$

Abbiamo scelto $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tc $d_{f_n} \to d$ e a meno di sottosucc.
per Montel possiamo supporre $f_n \to f_0$ olomorfa.
Resta ancora da far vedere che $f_0 \in \mathcal{F}$

Abbiamo visto: a) $f_0(0) = 0$, f_0 non costante e $f_0'(0) > 0$
b) $f_0(\Omega_{f_0}) = \Omega$ ($\Rightarrow f(\mathbb{D}) \supset \Omega$ dato che $\Omega_{f_0} \subset \mathbb{D}$)

Manca c) $f|_{\Omega_{f_0}} : \Omega_{f_0} \to \Omega$ è un rivestimento

Vediamo c): Sia $z_0 \in \Omega$, $D \subset \Omega$ disco di centro z_0 in Ω
Vogliamo che $\forall w_0 \in f^{-1}(z_0) \cap \Omega_{f_0}$ vogliamo un intorno
$U_{w_0} \subset \Omega_{f_0}$ tc $f_0|_{U_{w_0}} : U_{w_0} \to D$ biol. e se $w_0 \neq w_0'$
$\Rightarrow U_{w_0} \cap U_{w_0'} = \emptyset$

Applicando Hurwitz: $\forall$ FISSATO w_0 $\exists\, n_1 \geq 1$ $\forall n \geq n_1$, $\exists\, w_n \in \Omega_{f_n}$ tc

$f_n(w_n) = z_0$ e $w_n \longrightarrow w_0$

Sia $h_n \in Hol(D, D)$ l'inversa di f_n su D

con $h_n(z_0) = w_n$

Per Montel a meno di sottosucc. $h_n \longrightarrow h_0 \in Hol(D, \mathbb{D})$

tc $f_0 \circ h_0 = id_D$ (perché $f_n \circ h_n = id_D$ $\forall n \geq n_1$)

$h_0(z_0) = w_0$ pongo $U_{w_0} = h_0(D) \subset \Omega_{f_0}$

$\Rightarrow f|_{U_{w_0}}$ è un biol. tra U_{w_0} e D

Sia $w_0' \in f^{-1}(z_0) \cap \Omega_{f_0}$, costruiamo h_0', $U_{w_0'}$ come prima (con la stessa sottosuccessione) supponiamo per assurdo $\exists\, w \in U_{w_0} \cap U_{w_0'}$

$\Rightarrow \exists\, z_1, z_1' \in D$ tc $w = h_0(z_1) = h_0'(z_1')$ per def. degli U

Applicando f_0 $z_1 = f_0(h_0(z_1)) = f(w) = f(h_0'(z_1')) = z_1'$

$\Rightarrow z_1' = z_1$ è uno zero di $h_0 - h_0'$ $\Rightarrow$ per Hurwitz

$h_0 - h_0' \equiv 0$ $\Rightarrow$ $U_{w_0} = U_{w_0'}$ $\Rightarrow$ fine $w_0 = w_0'$

oppure $\forall n \gg 1$ $h_n - h_n'$ ha uno zero

ma h_n è l'inversa di f_n in D con $w_n \in h_n(D)$
h_n' " " " " con $w_n' \in h_n'(D)$

Se $w_0 \neq w_0'$ $\Rightarrow$ $w_n \neq w_n'$ $\forall n \gg 1$ $\Rightarrow h_n(D) \cap h_n'(D) = \emptyset$ assurdo.

Quindi $f_0 \in \mathcal{F}$. Se abbiamo $d_{f_0} = 1$ abbiamo vinto perché $\Omega_{f_0} = \mathbb{D}$, per concludere serve

<u>Lemma</u> $\Omega \subset \mathbb{D}$ dominio limitato con $\Omega \neq \mathbb{D}$ e $0 \in \Omega$. Allora $\exists\, f \in \mathcal{F}$ con $d_1 = \inf_{z \in \Omega_f} |z| > \inf_{z \in \Omega} |z| = d$

Questo lemma conclude perché se $d_{f_0} < 1 \Rightarrow \Omega_{f_0} \neq \mathbb{D} \Rightarrow$ posso estendere f_0

a $f' \in \mathcal{F}$ con $d_{f'} > d_{f_0}$ assurdo perché $d_{f_0} = \sup_{f \in \mathcal{F}} d_f$ (vedi video dopo dim Lemma spiegato meglio)

Dim Lemma Sia $a \in \mathbb{D} \setminus \Omega$ $b \in \mathbb{D}$ t.c. $b^2 = -a$

Siano $\varphi, \psi \in Aut(\mathbb{D})$

$$\varphi(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z} \qquad \psi(z) = \frac{z+b}{1+\bar{b}z}$$

oss. φ manda 0 in a e $-a$ in 0

ψ " 0 in b

ψ^2 " 0 in $b^2 = -a$

Prendiamo $f \in Hol(\mathbb{D}, \mathbb{D})$

$$f(z) = \frac{\bar{b}}{|b|} \varphi\left(\psi^2(z)\right) \qquad f(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \quad \text{con } f(0) = 0$$

$f'(0) \overset{\text{conti}}{=} 2|b| \dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2} > 0$ $\quad \Omega_f = $ c.c. di $f^{-1}(\Omega)$ contenente 0

Siccome $w \to w^2$ è un rivestimento doppio di $\mathbb{D} \setminus \{0\} = \mathbb{D}^*$

$a \notin \Omega \Rightarrow \varphi^{-1}(\Omega) \subseteq \mathbb{D}^*$

$\Rightarrow f$ è rivestimento da Ω_f a Ω

Per avere la dis. : se $d_1 = 1$ è vera.

Sia invece $d_1 < 1 \Rightarrow \exists\ z_1 \in \partial\Omega_f \cap \mathbb{D}$ con $|z_1| = d_1$

$\left(\text{perché } \inf_{z \notin \Omega} |z| = \min_{z \in \partial\Omega} |z|\right) \Rightarrow f(z_1) \in \Omega$

$\Rightarrow$ $|f(z_1)| \geq d$ $\Rightarrow$ Lemma di Schwarz $\quad d \leq |f(z_1)| < |z_1| = d_1$

Ex se $f_1, f_2 : \mathbb{D} \to \Omega$ sono rivestimenti con $f_1(0) = f_2(0)$
e $f_1'(0), f_2'(0) > 0 \Rightarrow f_1 \equiv f_2$

Idea

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D} \arrow[d, "f_2"] \arrow[dl, bend right, "h^{-1}"'] \\ \mathbb{D} \arrow[r, "f_1"] \arrow[ur, "h"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

h e h^{-1} unicità del soll. sono uno l'inv. dell'altro e
e aut.$(\mathbb{D})$ che fissano l'origine con $h'(0)=0$
$\Rightarrow h \equiv id_{\mathbb{D}}$

Teorema / Corollario (Uniformizzazione di Riemann) se $\Omega \subset \mathbb{C}$
dominio semplicemente connesso $\Omega \neq \mathbb{C} \Rightarrow \Omega$ è biolomorfo
al disco

Dim basta far vedere che Ω è biolomorfo a un dominio limitato.
Prendiamo $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $h^2(z) = z - a$
$\forall z \in \Omega$

- h è iniettiva, di più $h(z_1) = \pm h(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$

Infatti $h(z_1) = \pm h(z_2) \Rightarrow z_1 - a = h^2(z_1) = h(z_2)^2 = z_2 - a \Rightarrow z_1 = z_2$

$\Rightarrow h$ iniettiva e $h(\Omega) \cap (-h(\Omega)) = \emptyset$

Fissato $z_0 \in \Omega$, sia $r > 0$ $D = D(h(z_0), r) \subset h(\Omega)$
$\Rightarrow D \cap -h(\Omega) = \emptyset \Rightarrow |h(z_0) - \underbrace{(-h(z))}_{\notin D}| = |h(z_0) + h(z)| \geq r \quad \forall z \in \Omega$

$\Rightarrow 2|h(z_0)| \geq r$

Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ data da

$$f(z) = \frac{r}{4} \frac{1}{|h(z_0)|} \boxed{\frac{h(z) - h(z_0)}{h(z) + h(z_0)}}$$

$\boxed{\dots} = \varphi(h(z))$ con $\varphi(w) = \dfrac{w - h(z_0)}{w + h(z_0)}$
e $\varphi \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ quindi iniettiva

$f(z_0) = 0$ f è limitata,
f è iniettiva altrimenti $\dfrac{h(z_1) - h(z_0)}{h(z_1) + h(z_0)} = \dfrac{h(z_2) - h(z_0)}{h(z_2) + h(z_0)} \Rightarrow h(z_2) = h(z_1)$
$\Downarrow$
$z_1 = z_2$

$\Rightarrow$ f è biolomorfismo fra Ω e $f(\Omega)$ e $f(\Omega) \subseteq \mathbb{D}$

$$\left|\frac{h(z)-h(z_0)}{h(z)+h(z_0)}\right| = |h(z_0)| \left| \frac{1}{h(z_0)} - \frac{2}{h(z)+h(z_0)} \right| \leq$$

$$\leq |h(z_0)| \left[\frac{1}{|h(z_0)|} + \frac{2}{|h(z)+h(z_0)|} \right] \leq$$

$$\leq |h(z_0)| \frac{4}{r}$$

Liouville $\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ non è biolomorfo a $\mathbb{D}$

compatta $\Rightarrow$ $\hat{\mathbb{C}}$ non è " a $\mathbb{D}$ o a $\mathbb{C}$

<u>Teorema</u> (unif. di Riemann più generale possibile) (No Dim)

Se X è una sup. di Riemann (cioè struttura complessa orientabile) sempl. connessa.
$\Rightarrow$ X è biol a $\hat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{D}$. Più in generale se
X è una sup. di Riemann qualsiasi e $\pi : \tilde{X} \to X$ è il suo rivestimento universale $\Rightarrow$ $\tilde{X}$ è una sup. di Riemann semp. connessa e

(i) se $\tilde{X}$ biol $\hat{\mathbb{C}}$ $\Rightarrow$ X è biol a $\hat{\mathbb{C}}$ (ellittico)

(ii) se $\tilde{X}$ è biol $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ X è biol a $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\setminus\{P\}$ oppure un toro $T_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ con $\operatorname{Im}(\tau)>0$

(iii) in tutti gli altri casi $\tilde{X}$ è $\mathbb{D}$

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ limitato e semp. connesso $\Rightarrow$ $\exists f : \mathbb{D} \to \Omega$ biolom.

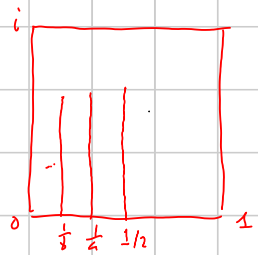
<u>Domanda</u>: possiamo estendere f omeo da $\overline{\mathbb{D}}$ a $\overline{\Omega}$?

<u>Teorema</u> (Carathéodory) una biol. $f : \mathbb{D} \to \Omega$ si estende a una funzione continua da $\overline{\mathbb{D}}$ a $\overline{\Omega}$ $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega$ è loc connesso

<u>Cor</u> f si estende a omeo $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega$ è una curva di Jordan.

<u>Esempio</u> di dominio semp connesso con ∂ non loc connesso

tolgo le linee rette: D è semp connesso
ma ∂D non è loc. connesso.



Esiste una condizione su $\partial\Omega$ ("più debole") diversa che è equivalente all'estendibilità di $f^{-1}: \Omega \to \mathbb{D}$ fino al bordo

$\longmapsto$ FINE SEZIONE.

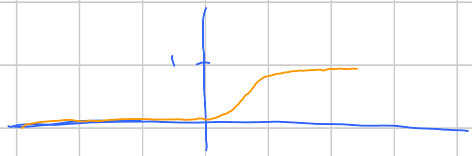
NUOVO OBBIETTIVO Approssimare funzioni olomorfe con funzioni definite su domini più grandi (tipo polinomi)

Lemma (Tecnico) $K \subset\subset \mathbb{C}$ compatto, $K \subset V$ aperto, allora $\exists\, g \in C^\infty(\mathbb{C})$ tc $g|_K \equiv 1$ e $\operatorname{supp}(g) \subset V$ ($\Rightarrow g = 0$ fuori V)

$\operatorname{Supp} g = \overline{\{z \in \mathbb{C} \mid g(z) \neq 0\}}$

Dim Sia $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$$



$h \in C^\infty(\mathbb{R})$

Sia $\eta: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ data da

$$\eta(z) = \frac{h(1-|z|^2)}{h(1-|z|^2) + h(|z|^2 - 1/4) \neq 0}$$

$\eta \in C^\infty(\mathbb{C})$ $\quad \eta(\mathbb{C}) = [0,1]$

$\eta|_{|z| \leq 1/2} \equiv 1$ e $\eta|_{|z|>1} \equiv 0$

Dato $p \in K$ prendiamo $r_p > 0$ tc $D(p, 2r_p) \subset V$

$\Rightarrow \exists\, p_1, \ldots, p_k \in K$ tc $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} D(p_j, r_{p_j}/2) \subset \bigcup_{j=1}^{k} D(p_j, r_{p_j}) = W \subset V$

Sia $g_J : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tc $g_J(z) = \begin{cases} \eta\left(\frac{z - p_J}{r_p}\right) & z \in D(p_J, 2r_{p_J}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$g_J \in C^\infty(\mathbb{C})$

$g : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \qquad g(z) = 1 - \prod_{J=1}^{k} (1 - g_J(z))$

e le verifiche sono facili.

LEZIONE 11

Titolo nota 03/04/2020

Teorema di Cauchy generalizzato

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ dominio limitato, tale che $\partial\Omega$ sia costituito da un numero finito di curve di Jordan. Sia $u \in C^1(\bar\Omega, \mathbb{C})$ cioè esiste U intorno aperto di $\bar\Omega$ su cui u si estende in modo C^1.

Allora $\forall w \in \Omega$
$$u(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{u(z)}{z-w}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega} \frac{\frac{\partial u}{\partial \bar z}}{z-w}\,d\bar z \wedge dz$$

Dim è una conseguenza della formula di Gauss-Green o del teorema di Stockes

Dim via GG GG $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f\,dx + g\,dy = \int_\Omega \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$ (in $\mathbb{R}^2$)

trasformiamolo in termini complessi

$v = f + ig \qquad dz = dx + i\,dy \qquad f = \operatorname{Re} v \qquad g = \operatorname{Im} v$

$v\,dz = (f\,dx - g\,dy) + i\,(g\,dx + f\,dy)$

$$\int_{\partial\Omega} v\,dz \underset{\substack{\downarrow \\ 2 \text{ volte GG}}}{=} \int_\Omega \underbrace{\left(-\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)} dx\,dy + i \int_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)} dx\,dy$$

alla parte reale e Img. $v\,dz$

$$\frac{\partial v}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ v = f+ig}}{=} \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)} + \frac{1}{2} i \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)}_{\text{a parte il segno}}$$

$d\bar z \wedge dz = (dx - i\,dy) \wedge (dx + i\,dy) = 2i\,dx \wedge dy$

$$\frac{\partial v}{\partial \bar z}\,d\bar z \wedge dz = \left[-\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\right] dx \wedge dy$$

Ricordo su $\mathbb{R}^n$ forme integrale $dx \wedge dy$ o Lebesgue $dx\,dy$ è lo stesso (Ist geom)

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} v\,dz = \int \frac{\partial v}{\partial \bar z}\, d\bar z \wedge dz$$

Usando Stockes $\displaystyle\int_{\partial\Omega} v\,dz \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\Omega d(v\,dz) = \int_\Omega dv\wedge dz = \int\left(\frac{\partial v}{\partial z}dz + \frac{\partial v}{\partial \bar z}d\bar z\right)\wedge dz =$

$$= \int \frac{\partial v}{\partial \bar z}\, d\bar z\wedge dz$$

Fissato $w\in\Omega$ poniamo $v(z) = \dfrac{u(z)}{z-w}$ su $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{|z-w|>\varepsilon\}$

(oss $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial D(w,\varepsilon)$)

$v\in C^1(\overline{\Omega_\varepsilon})$ quindi usando G-G

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{u(z)}{z-w}\,dz = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u/\partial\bar z\,(z)}{z-w}\, d\bar z\wedge dz$$

perchè il denominatore è olomorfo su z

tenendo conto dell'orientazione

$$\int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-w}\,dz - \int_{\partial D(w,\varepsilon)}\frac{u(z)}{z-w}\,dz = \circledast$$

Parametrizzo $\partial D(w,\varepsilon)$ con $\gamma(t) = w+\varepsilon e^{it}$ $t\in[0,2\pi]$

$$\circledast = \int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-w}\,dz - \int_0^{2\pi}\frac{u(w+\varepsilon e^{it})}{\cancel{\varepsilon e^{it}}}\, i\cancel{\varepsilon e^{it}}\,dt$$

mandiamo $\varepsilon\to 0$

$$\int_{\Omega_\varepsilon}\frac{\partial u/\partial\bar z}{z-w}\,d\bar z\wedge dz = \int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-w}\,dz - \int_0^{2\pi} u(w+\varepsilon e^{it})\,i\,dt$$

non dipende da ε — u è continua

$$\boxed{\int_{\Omega}\frac{\partial u/\partial\bar z}{z-w}\,d\bar z\wedge dz = \int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-w}\,dz - 2\pi i\, u(w)}$$

perchè $\dfrac{1}{z-w}$ è integrabile su aperti limitati di $\mathbb{C}$ è la tesi

(quindi uso convergenza dominata)

Eq di Cauchy Riemann non omogenea : $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \varphi$

Problema: La risolubilità e la regolarità del problema.

Teo Sia $\varphi \in C^k_c(\mathbb{C})$, Allora esiste una $u \in C^k(\mathbb{C})$ tc risolve $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \varphi$

oss 1) u non gunque regolarità
2) se $K = \text{supp}\, \varphi \Rightarrow u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$
3) Non è detto che u abbia supporto compatto.
4) u è unica a meno di somma di funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$

Lemma Sia $K \subset \mathbb{C}$ un compatto e μ una misura con supporto di $\mu = K$. Allora

$$u(w) = \int \frac{1}{w-z}\, d\mu(z) \text{ definisce una funzione } \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$$

Dim Lemma Ricordo una μ a supp. in K si può vedere come $\mu \in \left(C^0(K)\right)'$

quindi $\int \frac{1}{w-z}\, d\mu(z) = \mu\left(\frac{1}{w-\cdot}\right)$ che è continua se $w \notin K$.

Sia $a \notin K$, e sia $r>0$ tc $\overline{D(a,r)} \cap K = \phi$ e sia $w \in D(a,r)$

$$\Rightarrow \frac{1}{w-z} = \frac{1}{(a-z)\left(1-\frac{a-w}{a-z}\right)} = \frac{1}{(a-z)} \frac{1}{\left(1-\frac{a-w}{a-z}\right)} \overset{?}{=} \quad \left|\frac{a-w}{a-z}\right| < 1$$

se $w \in D(a,r)$ e $z \in K$

$$= \frac{1}{(a-z)} \sum_{n \geq 0} \frac{(a-w)^n}{(a-z)^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(a-w)^n}{(a-z)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow u(w) = \mu\left(\frac{1}{w-z}\right) \underset{\downarrow}{=} \sum_{n\geq 0} (a-w)^n \mu\left(\frac{1}{(a-z)^{n+1}}\right)$$ è una serie di potenze in w che converge in $D(a,r)$ $\forall a \notin K$

μ è continua

$\Rightarrow u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$

Dim teo Poniamo

$$u(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z)}{w-z} \, dz \wedge d\bar{z}$$

$\to$ questo è del lemma prendendo come $\mu = (2\pi i)^{-1} \varphi \, (dz \wedge d\bar{z}) = -\frac{1}{\pi} \varphi \, dx \wedge dy = -\frac{1}{\pi} \varphi dx dy$

vedi $d\bar{z} \wedge dz$

$\nearrow$ in realtà è solo su K perché φ è a supp cpt.

Perché $\varphi \in C^k_c(K) \Rightarrow \mu$ è nelle ipotesi del Lemma

$\Rightarrow u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ (u è ben definita su $\mathbb{C}$ perché l'integrale è convergente $\forall w$ fissato)

Cambiamento di variabile $s = w - z$ $\quad z = w - s$ $\quad ds = -dz$, $d\bar{s} = -d\bar{z}$

$$\Rightarrow u(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(w-s)}{s} \, ds \wedge d\bar{s}$$

Siccome $\frac{1}{s}$ è integrabile sui compatti di $\mathbb{C}$ e $\varphi \in C^k_c(\mathbb{C})$ possiamo derivare sotto il segno di integrale e le derivate sono continue $\Rightarrow u \in C^k(\mathbb{C})$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{w}}(w-s)}{s} \, ds \wedge d\bar{s} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z)}{z-w} \, dz \wedge d\bar{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z)}{z-w} \, d\bar{z} \wedge dz =$$

$\uparrow$ somme su $\mathbb{C}$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z)}{z-w} \, d\bar{z} \wedge dz = \varphi(w) \quad \forall w \in \Omega \text{ (quindi in } K)$$

dove $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ disco con $K \subset\subset \Omega$. $\left(\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0\right)$

dove $=_*$ deriva da Cauchy generalizzata e il pezzo su $\partial\Omega$ sparisce.

Notazioni

- $K \subset\subset \mathbb{C}$ compatto, $f \in C^0(K) \Rightarrow \|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$
- $\mathcal{O}(K) = \{ f \in C^0(K) \mid \exists \, (U, \tilde{f}), \ U \supset K$ intorno aperto, $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U), \ \tilde{f}|_K \equiv f \}$

oss U dipende da f

Esempio se $w \notin K$ $f(z) = \dfrac{1}{w-z}$ $f \in \mathcal{O}(K)$ e la $\tilde{f}$ deve essere costruita in modo che $w \notin U$

Possiamo invece avere un U che funziona indip. da f? Non sempre MA:

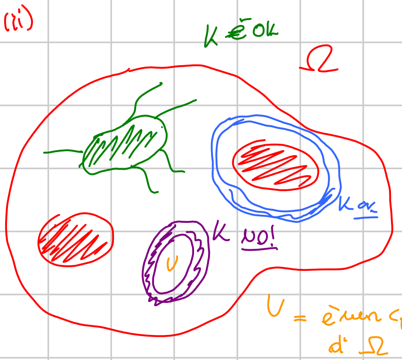
Teo (Runge 1) $K \subset\subset \mathbb{C}$ cpt, $\Omega \subset \mathbb{C}$ intorno aperto di K sono equivalenti:

(i) ogni $f \in \mathcal{O}(K)$ può essere appross. unif su K da funzioni in $\mathcal{O}(\Omega)$

(ii) $\Omega \setminus K$ non ha componenti connesse rel cpt in Ω

(iii) $\forall z \in \Omega \setminus K \ \exists \, f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $|f(z)| > \|f\|_K$

Idea di (ii)



= buchi $\notin \Omega$

U = è una cpt connessa di Ω rel. cpt. in Ω (non va a sbattere con $\partial\Omega$)

Se $w \in U$ $f(z) = \dfrac{1}{w-z} \in \mathcal{O}(K)$

Ma se $\exists \, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ per il principio del max $\forall z \in U$ $|g(z)| \le \max_{z \in \partial U} |g(z)| \underset{\partial U \subset K}{\le} \|g\|_K$ continuità in g

$\Rightarrow g$ è limitata su U da quello che succede su K cpt

MA g esplode su U.

Dim $(iii) \Rightarrow (ii)$ Se (ii) è falso esiste U cc. di $\Omega \setminus K$
con $\overline{U} \subset \Omega$ ($\Rightarrow \partial U \subset K$) $\forall g \in O(\Omega)$ e $\forall z \in U$
$|g(z)| \leq \|g\|_K$ contro l'ipotesi (iii)

$(i) \Rightarrow (ii)$ Se (ii) è falso $\exists$ U cc. di $\Omega \setminus K$ con $\overline{U} \subset \Omega$ e $\partial U \subset K$
Sia $w \in U$ e sia $f(z) = \frac{1}{w-z}$ e $f \in O(K)$
se (i) fosse vera
$\exists f_n \in O(\Omega)$ tc $\|f_n - f\|_K \longrightarrow 0$
quindi f_n è di Cauchy $\Rightarrow \|f_n - f_m\|_K \longrightarrow 0$
$\Rightarrow f_n, f_m$ sono olomorfe su Ω in particolare su U
e $\|f_n - f_m\|_K \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solito} \\ \text{discorso}}}{\geq} \sup_{z \in \overline{U}} |f_n(z) - f_m(z)| \longrightarrow 0 \Rightarrow \{f_n\}$ di Cauchy in $C^0(U \cup K)$

$\Rightarrow$ converge a una $F \in C^0(U \cup K) \subset C^0(\overline{U})$ per Weierstrass $F \in O(U)$
su K $(w-z)F(z) = 1$ $\Rightarrow$ applicando la solita considerazione $\| \|_K \geq \sup_{\overline{U}} | |$
a $(w-z)F(z) - 1$
$\|(w-z)F(z)-1\|_K = 0 \geq \sup_{\overline{U}} |(w-z)F(z) - 1| \Rightarrow (w-z)F(z) - 1 \equiv 0$ in U e $F \in O(U)$ Assurdo! non esiste nessuna funzione olomorfa in U con quella prop.

$(ii) \Rightarrow (i)$ da vedere
$(i) + (ii) \Rightarrow (iii)$ Fissiamo $z_0 \in \Omega \setminus K \overset{?}{\Rightarrow} \exists f \in O(\Omega)$ con $|f(z_0)| > \|f\|_K$
Sia $D \subset \Omega \setminus K$ disco chiuso di centro z_0 le cc. di $\Omega \setminus (K \cup D)$
sono le stesse di $\Omega \setminus K$ con una a cui è tolto tutto D
In particolare $K \cup D$ soddisfa (ii) $\Rightarrow$ per (i) la funzione
g che è 0 su K e 1 su D appartiene a $O(K \cup D)$ può essere
approssimata con funzioni in $O(\Omega)$
$\Rightarrow \exists f \in O(\Omega)$ $\|f\|_K < \frac{1}{2}$ e $\|f-1\|_D < 1$ $\Rightarrow |f(z_0)| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > \|f\|_K$

LEZIONE 12

Titolo nota 06/04/2020

Completamento dimostrazione teorema di Runge 1

Ricordiamo: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $K \subset\subset \Omega$ compatto

Manca $(ii) \Rightarrow (i)$

(ii) $\Omega \setminus K$ non ha componenti connesse nel cpt in Ω

(i) ogni funzione $\mathcal{O}(K)$ può essere approx unif su K da funzioni su $\mathcal{O}(\Omega)$

Sia $\mathcal{O}(\Omega)|_K = \{ f|_K \mid f \in \mathcal{O}(\Omega) \}$ Vogliamo che $\mathcal{O}(\Omega)|_K$

è denso in $\mathcal{O}(K)$ rispetto a $\|\cdot\|_K$

$\mathcal{O}(K)$ e $\mathcal{O}(\Omega)|_K$ sono sottospazi vettoriali topologici.

Corollario di Hahn-Banach: Se W è sottospazio di V, con W, V sp. vettoriali topologici. Allora W è denso in $V \iff$ L'unico elemento in V^* che si annulla su W è $0 \iff \forall \mu \in V^*$ t.c. $\mu|_W \equiv 0 \Rightarrow \mu \equiv 0$

Per la tesi se μ è una misura su K (cioè un elemento di $(C^0(K))'$)

(*) t.c. $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)|_K$ t.c. $\int f(z) d\mu(z) = 0$ $(\langle \mu, f \rangle = 0)$

vogliamo $\Rightarrow \forall g \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\int g(z)\, d\mu(z) = 0$

Definiamo $$\varphi(w) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z-w} d\mu(z) \overset{\mu \text{ è a supp. su } K}{=} \int_K \frac{1}{z-w} d\mu(z)$$

Abbiamo visto che $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$. Se $w \notin \Omega \Rightarrow (z-w)^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega)$

$\Rightarrow \varphi|_{\mathbb{C}\setminus\Omega} \equiv 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0$ su ogni componente connessa di $\mathbb{C} \setminus K$

che interseca $\mathbb{C} \setminus \Omega$

Se $\forall n \geq 0 \quad z^n \in \mathcal{O}(\Omega) \underset{(*)}{\Rightarrow} \int z^n \, d\mu(z) = 0$

Ma $(z-w)^{-1}$ si può sviluppare in serie di potenze in z che conv. unif su K non appena $|w| > \|z\|_K$

$\Rightarrow \varphi \equiv 0$ sulla componente conness illimitata di $\mathbb{C} \setminus K$

Mancano solo le componenti connesse limitate di $\mathbb{C} \setminus K$ con chiusura contenuta in Ω. Cioè le comp. connesse di Ω rel. compatte in Ω, ma per (ii) non ce ne sono

$$\Rightarrow \varphi\big|_{\mathbb{C} \setminus K} \equiv 0$$

Sia $g \in \mathcal{O}(K)$, e sia $U \supset K$ un intorno aperto t.c. $g \in \mathcal{O}(U)$ con ∂U regolare. Sia $\psi \in C^\infty(\mathbb{C})$ tale $\psi|_K \equiv 1$ e $\operatorname{supp}(\psi) \subset\subset U$

$$\Rightarrow \forall w \in K \Rightarrow g(w) = \psi(w) g(w) \overset{\text{Formula di Cauchy}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_U \frac{g(z)}{z-w} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z) dz \wedge d\bar{z} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(z) \overset{\overset{0 \text{ perché } \psi|_{\partial U} \equiv 0}{\shortparallel}}{\psi(z)}}{z-w} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_U \frac{g(z)}{z-w} \overset{\overset{0 \text{ su } K}{\shortparallel}}{\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}}(z) dz \wedge d\bar{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{U \setminus K} \frac{g(z)}{z-w} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z) dz \wedge d\bar{z}$$

$$\Rightarrow \int_K g(w) d\mu(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_K d\mu(w) \int_{U \setminus K} \frac{g(z)}{z-w} \frac{\partial \psi(z)}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=}$$

$$= (-) \frac{1}{2\pi i} \int_{U \setminus K} g(z) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(z) \left[\int_K \frac{1}{w-z} d\mu(w) \right] dz \wedge d\bar{z}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{U\setminus K} g(z)\,\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}(z)\,\underset{\substack{\parallel\\ 0 \text{ fuori da } K}}{\varphi(z)}\,dz\wedge d\bar z = 0$$

Ricordiamo la condizione (iii)

$\forall\, z\in\Omega\setminus K \quad \exists\, f\in\mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $|f(z)|\geq \|f\|_K$

__oss__ se $U\subset\Omega$ aperto rel compatto in Ω ($\Rightarrow \partial U\subset\Omega$) allora
$\forall f\in\mathcal{O}(\Omega) \quad \|f\|_{\bar U} = \|f\|_{\partial U}$ (principio del max)

__Def__ $\Omega\subset\mathbb{C}$ aperto e $K\subset\Omega$ compatto. L'__inviluppo olomorfo__ $\hat K_\Omega$ di K in Ω è

$$\hat K_\Omega = \{z\in\Omega \mid |f(z)|\leq\|f\|_K \quad \forall f\in(\Omega)\}$$

$\Rightarrow$ (iii) si può riscrivere come $\hat K_\Omega = K$

__Prop__ $\Omega\subset\mathbb{C}$ aperto, $K\subset\subset\Omega$ allora

(i) $\forall\, f\in\mathcal{O}(\Omega) \quad \|f\|_{\hat K_\Omega} = \|f\|_K$ (ovvio)

(ii) $K\subseteq\hat K_\Omega$ e $(\widehat{\hat K_\Omega})_\Omega = \hat K_\Omega$

(iii) $\hat K_\Omega = K \Leftrightarrow \mathcal{O}(\Omega)|_K$ è denso in $\mathcal{O}(K)$ (Teo Runge 1)

(iv) $d(w,\hat K_\Omega) = d(w,K) \quad \forall\, w\in\mathbb{C}\setminus\Omega$ in particolare
$$d(\hat K_\Omega,\mathbb{C}\setminus\Omega) = d(K,\mathbb{C}\setminus\Omega)$$

(v) $\hat K_\Omega$ è compatto

(vi) (CARATTERIZZAZIONE TOPOLOGICA) $\hat K_\Omega$ è l'unione di K e le c.c di $\Omega\setminus K$ rel compatte in Ω.

(vii) $\mathbb{C}\setminus\hat K_\Omega$ ha solo un numero finito di c.c. e nessuna contenuta in Ω

__Dim__ (i), (ii) ovvie

(iii) è Teo Runge 1

(iv) se $w\notin\Omega \Rightarrow (z-w)^{-1}\in\mathcal{O}(\Omega)$

$\Rightarrow \forall z \in \hat{K}_\Omega \qquad \frac{1}{|z-w|} \leq \sup_{s \in K} \frac{1}{|s-w|}$

$\Rightarrow |z-w| \geq \inf_{s\in K} |s-w| = d(w,K)$

facendo $\inf_{z \in \hat{K}_\Omega} |z-w| \geq d(w,K)$

RHS $= d(w, \hat{K}_\Omega) \geq d(w,K)$

$\leq$ segue da $K \subseteq \hat{K}_\Omega$

(v) Usando $f(z)=z \Rightarrow \hat{K}_\Omega$ è limitato $+$ (iv) ci assicura $\overline{\hat{K}_\Omega} \subset \Omega$

e infine $\hat{K}_\Omega$ è chiuso (è definito con una condizione chiusa)

(vi) Sia U una c.c. di $\Omega \setminus K$ rel. compatta in Ω

$\Rightarrow \partial U \subseteq K \underset{oss}{\Rightarrow} \forall f \in (\Omega) \quad \|f\|_U \leq \|f\|_K \Rightarrow U \subset K$

Sia $K_1 = K \cup$ (c.c. di $\Omega \setminus K$ rel. compatte in Ω)

Abbiamo $K_1 \subset \hat{K}_\Omega$, inoltre K è chiuso $\Rightarrow K_1$ è cpt

in quanto chiuso dentro un cpt. $\Rightarrow K_1$ è compatto

e nessuna cc di $\Omega \setminus K_1$ è rel. cpt in Ω

$\Rightarrow$ per teo di Runge 1 $\Rightarrow K_1 = (\hat{K_1})_\Omega \supseteq \hat{K}_\Omega$ perché $K \subset K_1$

(vii) $\hat{K}_\Omega$ è compatto $\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \hat{K}_\Omega$ ha una solo c.c. illimitata U_0

e $U_0 \supset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_r$

Siano $U_1, U_2, \ldots$ le altre c.c. di $\mathbb{C} \setminus \hat{K}_\Omega$ e $U_J \in \overline{\mathbb{D}}_r$

Se per assurdo $U_J \subset \Omega$ siccome $\partial U_J \subseteq \hat{K}_\Omega$

$\Rightarrow \overline{U_J} = U_J \cup \partial U_J \subset \Omega \Rightarrow$ sarebbe rel. compatto in Ω perché limitato

ma per (vi) non è possibile.

Supponiamo che le U_J siano infinite $\forall J \geq 1$ sia $z_J \in U_J \setminus \Omega \subseteq \overline{\mathbb{D}}_r$

$\Rightarrow$ a meno di sottosuc. $z_J \to z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ sia $\rho > 0$ $(D_{z_0,\rho}) \cap \hat{K}_\Omega = \emptyset$

Ma $D(z_0,\rho) \subset \mathbb{C}\setminus\hat{K}_\Omega$ è connesso $\Rightarrow \exists\, j_0$ t.c. $D(z_0,\rho)\cap U_{j_0}$

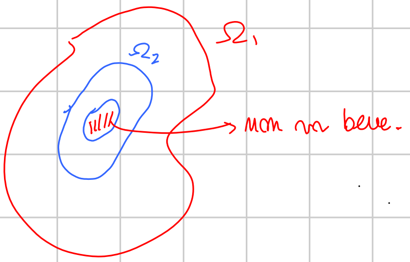
$\Rightarrow \mathcal{U}_j \cap U_{j_0}$ per $j >> 1$ $\Rightarrow U_j = \mathcal{U}_{j_0}$ assurdo erano tutte distinte.

Teorema (di Runge 2) Siano $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ aperti allora sono equivalenti:

(i) ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ può essere approssimata unif. nei cpt da funzioni $\in \mathcal{O}(\Omega_1)$

quando succede si dice che (Ω_1, Ω_2) è una coppia di Runge

(ii) Nessuna componente connessa di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ è cpt



(iii) $\forall$ cpt $K \subset \Omega_1$ $\quad \hat{K}_{\Omega_1} = \hat{K}_{\Omega_2}$

(iv) $\forall$ cpt $K \subset \Omega_2$ $\quad \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \hat{K}_{\Omega_1}$

(v) $\forall$ cpt $K \subset \Omega_1$ $\quad \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$ è cpt

Dim (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) è ovvio

(v) $\Rightarrow$ (i)

Dato un $K \subset \Omega_1$ prendiamo $K' = \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$

e $K'' = \hat{K}_{\Omega_2} \setminus \Omega_1$, $K' \cap K'' = \emptyset$ $\quad K' \supset K$ e K', K'' sono cpt

e $\hat{K}_{\Omega_2} = K' \cup K''$

Siano $\varepsilon > 0$ e $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ applichiamo Runge 1 a $\hat{K}_{\Omega_2}$

e a $\tilde{f}$ t.c. $\tilde{f}\big|_{K'} \equiv f$ e $\tilde{f} \equiv 1$ in un intorno di K'' disgiunto da K'

Runge ci dà

$\Rightarrow \exists\, g \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ t.c. $\|g - f\|_K \leq \|g - f\|_{K'} < \varepsilon \Rightarrow$ (i)

(v) $\Rightarrow$ (iii) Dato $K \subset \Omega_1$ definiamo K' e K'' come sopra.

Fissato $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e applichiamo Runge 1 a $f \equiv 0$

Se $z_0 \in K'' \Rightarrow \exists\, F \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ tc $\|F\|_K < \frac{1}{2}$ (perché approssima f)

e $\|F - 1\|_{K''} < \frac{1}{2} \Rightarrow |F(z_0)| > \frac{1}{2} > \|F\|_K \Rightarrow z_0 \in \hat{K}_{\Omega_2}$

$\Rightarrow K'' = \emptyset$

(i) $\Rightarrow$ (iv) Chiamo che $\hat{K}_{\Omega_1} \subseteq \hat{K}_{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Sia $z_0 \in \Omega_1 \setminus \hat{K}_{\Omega_1}$

$\Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ e $\varepsilon > 0$ $|f(z_0)| > \|f\|_K + \varepsilon$. Sia $F \in \mathcal{O}(\Omega_2)$

tc $\|f - F\|_{\underbrace{K \cup \{z_0\}}_{\text{è sempre cp}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |F(z_0)| > |f(z_0)| - \frac{\varepsilon}{2} > \|f\|_K + \varepsilon/2 > \|F\|_K$

$\Rightarrow z_0 \notin \hat{K}_{\Omega_2}$

Quindi (i) (iii) (iv) (v) sono tra loro equivalenti.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Sia U una c.c di $\Omega_2 \setminus K$ rel cpt in $\Omega_2 \overset{?}{\Rightarrow} U \subset \hat{K}_{\Omega_1}$

Siccome $\partial U \subseteq K \subseteq \Omega_1 \Rightarrow L = U \setminus \Omega_1$ è compatto in Ω_2
$= \overline{U} \setminus \Omega_1$

Vogliamo mostrare che $L = \emptyset$. Sia $a \in L$ per assurdo e sia

C la cc. di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ che contiene a

$\Rightarrow U \cup C$ è connesso in quanto unione di connessi che si intersecano

e U è cc. di $\Omega_2 \setminus K \supset \Omega_2 \setminus \Omega_1 \Rightarrow C \subset U$

ma U è rel cpt in $\Omega_2 \Rightarrow C$ è rel. compatto in Ω_2 contro (ii).

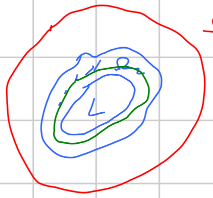
$\Rightarrow L = \emptyset \Rightarrow U \subseteq \Omega_1$. Inoltre $\partial U \subset K \Rightarrow U$ è una c.c

rel. cpt in $\Omega_1 \Rightarrow U \subset \hat{K}_{\Omega_1}$ per la prop.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sia per assurdo C una c.c di $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ cpt.

Lemma top (vedi note) Allora posso trovare $\mathcal{U}$ intorno di L rel. compatto in Ω_2 con $\partial\mathcal{U} \subset \Omega_1$

Idea



Per il principio del max $\quad \widehat{(\partial\mathcal{U})}_{\Omega_2} \supseteq \mathcal{U} \supseteq L$

$\overset{(iii)}{=} \widehat{(\partial\mathcal{U})}_{\Omega_1}$ ma L era disgiunto da Ω_1

$\Rightarrow L = \emptyset$

Oss se $\Omega_2 = \mathbb{C}$ e $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ con nessuna c.c. cpt

$\Rightarrow$ posso approssimare unif sui cpt con funzioni $\mathcal{O}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ ogni $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ si approssima con polinomi unif sui cpt, cioè vale:

Corollario Ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ è approx. unif sui cpt $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\setminus\Omega$ non ha c.c. cpt

Dim $\Leftarrow$ Runge 2 possiamo approx $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ con funzioni $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ che si approx unif con polinomi.

$\Rightarrow$ se approssimo con polinomi $\Rightarrow$ approssimo con $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ per Runge 2 non posso avere c.c. cpt di $\mathbb{C}\setminus\Omega$

Teorema (Runge 3) Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $\mathbb{C}\setminus\Omega = \bigcup_\alpha C_\alpha$ decomposizione in c.c.

Sia $E \subset \mathbb{C}$ un insieme discreto con esattamente un punto in C_α se C_α è cpt. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ può essere approx unif sui cpt da funzioni razionali con poli in E.

Dim Sia $K \Subset \Omega$ cpt e sia $L = \hat{K}_\Omega$ $\quad \mathbb{C}\setminus L$ ha unica cc illimitata $\mathcal{U}$ ed eventuali $V_1, \dots, V_p$ numero finito di cc limitate.

Inoltre $\forall j$ $W_j \not\subset \Omega$ per cui interseca $\mathbb{C} \setminus \Omega$

e quindi contiene una C_{α_j} c.c. di $\mathbb{C} \setminus \Omega$

$\Rightarrow C_{\alpha_j}$ è cpt e sia $\{a_j\} = E \cap C_{\alpha_j}$

Sia $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_p\} \supset L$ le c.c. di $\Omega_0 \setminus L$

sono U e le $W_j \setminus \{a_j\}$, Nessuna di queste è nel cpt in Ω_0

Quindi applico Runge 2 mi dice che ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists F \in \mathcal{O}(\Omega_0)$ tc $\|F - f\|_L < \varepsilon$

Sia g_j la parte principale (parte negativa) dello sviluppo di Laurent di F

in a_j $\Rightarrow F = h + g_1 + \dots + g_p$ con $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

Sia p un polinomio in $\mathbb{C}$ tc $\|P - h\|_L < \varepsilon/(p+1)$

$$g_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)} (z - a_j)^n$$ possiamo trovare $N > 0$

tc $\| \underbrace{g_j - \sum_{n=-N}^{-1} c_n^{(j)} (z - a_j)^n}_{g_{j,N}} \|_L < \varepsilon/(p+1)$ (i j sono finiti)

Prendiamo $G = P + g_{1,N} + \dots + g_{p,N}$

$$\|F - G\|_L \le \|h - P\|_L + \sum_{j=1}^{p} \|g_j - g_{j,N}\|_L \le (p+1) \cdot \frac{\varepsilon}{p+1} = \varepsilon$$

LEZIONE 13

Titolo nota 20/04/2020

Richiami $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $K \subset \Omega$ cpt, tc $\hat{K}_\Omega = K$ allora possiamo approssimare funzioni in $\mathcal{O}(K)$ con funzioni in $\mathcal{O}(\Omega)$

Lemma $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, Allora esiste una succ. crescente $\{K_\nu\}$ di cpt, $K_\nu \subset \Omega$ tali che:

(i) $K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$

(ii) $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} K_\nu = \Omega$

sinteticamente ho una succ. di compatti che invadono Ω

(iii) $(\widehat{K_\nu})_\Omega = K_\nu$

Dim Poniamo $H_\nu = \{ z \in \Omega \ , d(z, \partial\Omega) \geq \frac{1}{\nu} \ e \ |z| \leq \nu \}$

H_ν è compatto, $H_\nu \subset \mathring{H}_{\nu+1}$ e $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} H_\nu = \Omega$

Poniamo $K_1 = (\widehat{H_1})_\Omega$ è cpt e definitivamente esiste μ_1 tc $(\widehat{H_1})_\Omega \subset \mathring{H}_{\mu_1}$ e poniamo $K_2 = (\widehat{H_{\mu_1}})_\Omega$

itero induttivamente e trovo i $\{K_\nu\}$

Teorema (di Malgrange) $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ allora $\exists u \in C^\infty(\Omega)$ tc

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi \quad \text{su } \Omega$$

Dim se $K \subset \Omega$ cpt allora esiste $v \in C^\infty(\Omega)$ che risolve $(*)$ in un intorno di K. Infatti sia $\alpha \in C^\infty_c(\Omega)$ con $\alpha \equiv 1$ in un intorno di K, e applichiamo quanto sappiamo a $\alpha\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$.

Presa $\{K_\nu\}$ una succ. di compatti data dal Lemma

$\Rightarrow \forall \nu$ sia $V_\nu \in C^\infty(\Omega)$ sol. di $(*)$ in un intorno di K_ν

Oss $(V_{\nu+1} - V_\nu) \in \mathcal{O}(K_\nu)$. Per Runge trovo h_ν in $\mathcal{O}(\Omega)$

tc $\| v_{\nu+1} - v_\nu - h_\nu \|_{K_\nu} < 2^{-\nu}$

poniamo $$u_\nu = v_\nu + \sum_{\mu\geq\nu} \underbrace{(v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu)}_{\in\, \mathcal{O}(K_\nu)} - \underbrace{\sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu}_{\in\, \mathcal{O}(\Omega)} \quad \text{su } K_\nu$$

$\Rightarrow$ u_ν risolve (*) in un intorno di K_ν

Dico che u_ν non dipende da ν

$$u_{\nu+1} = v_{\nu+1} + \sum_{\mu\geq\nu+1} v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu - \sum_{\mu=1}^{\nu} h_\mu \overset{\text{sommo e sottraggo } v_\nu}{=}$$

ho messo h_ν

$$= v_\nu + \underbrace{(v_{\nu+1} - v_\nu - h_{\nu+1})}_{\text{è il termine } \mu=\nu} + \sum_{\mu\geq\nu+} v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu =$$

$$= v_\nu + \sum_{\mu\geq\nu} v_{\mu+1} - v_\mu - h_\mu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu = u_\nu \quad \text{su } K_\nu$$

$\Rightarrow$ abbiamo definito una $u \in C^\infty(\Omega)$ ponendo $u|_{\mathring{K}_\nu} = u_\nu|_{\mathring{K}_\nu}$

e $\dfrac{\partial u}{\partial \bar z} \equiv \varphi$ su Ω in quanto vale su ogni K_ν

Teo (Mittag-Leffler), $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto chiuso. $\forall a \in E$ $p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{a\})$. Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega\setminus E)$ tc $f - p_a$ sia olomorfa in $a \in E$.

In particolare, possiamo trovare $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ (MEROMORFE) con parti principali prescritte

Dim Sia $\{K_\nu\}$ succ. crescente di compatti del lemma (così $E \cap K_\nu$ è finito)

Allora $\forall \nu \geq 1$ sia $g_\nu = \sum_{a\in E\cap K_\nu} p_a$ (somma finita quindi ben posta).

Ora $g_{\nu+1} - g_\nu = \sum_{a\in E\cap(K_{\nu+1}-K_\nu)} p_a \in \mathcal{O}(K_\nu)$ (ho tolto le sing. su K_ν)

$\Rightarrow$ Runge sia $h_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $\| g_{\nu+1} - g_\nu - h_\nu \|_{K_\nu} \leq 2^{-\nu}$

Poniamo $f = g_\nu + \underbrace{\sum_{\mu \geq \nu} g_{\mu+1} - g_\mu - h_\nu}\ - \underbrace{\sum_{\mu=1}^{\nu-1} h_\mu}$

Come prima f non dipende da $\nu \Rightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$

Sia $a \in E$ e sia ν tc $a \in K_\nu$

allora $\underbrace{\quad} \in \mathcal{O}(K_\nu)$ $\underbrace{\quad} \in \mathcal{O}(\Omega)$ allora solo g_ν

ha le sing. in $a \Rightarrow f - p_a = g_\nu - p_a +$ qualcosa olomorfo in K_ν

ma g_ν ha proprio p_a come parte princ in $a \Rightarrow f - p_a$ è olomorfa in a

Cor $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto chiuso in Ω. Siano dati:

$\forall a \in E$ un intorno aperto $U_a \subset \Omega$ di a e $\varphi_a \in \mathcal{O}(U_a \setminus \{a\})$

Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ tc $f - \varphi_a$ sia olomorfa vicino a $\forall a \in E$

Dim Sia p_a la parte principale dello sviluppo di Laurent di φ_a in a

$\Rightarrow p_a \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ e $\varphi_a - p_a$ è olomorfa in un intorno di a

prendo la f data dal teorema

$f - \varphi_a = (f - p_a) - (\varphi_a - p_a)$ quindi è diff di cose olomorfe in un intorno di a.

Lemma (dim x esercizio ma la dim è nelle note)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ nella stessa componente connessa

Allora esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $e^{f(z)} = \dfrac{z-a}{z-b}$ (cioè possiamo def. il $\log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ su Ω)

Teorema (Runge 4)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $K \subset\subset \Omega$ cpt $(\hat{K})_\Omega = K$, sia $f \in \mathcal{O}(K)$ tc $f(z) \neq 0$ su K

allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $F(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ e

$$\|f - F\|_K < \varepsilon$$

Dim poiché $f \neq 0$ su K, $\delta_0 = \min_{z \in K} |f(z)| > 0$ quindi prendo $\tilde{f} \in (\Omega)$

tc $\|\tilde{f} - f\|_K < \frac{\delta_0}{2} \Rightarrow \tilde{f}(z) \neq 0 \quad \forall z \in K$

Sappiamo che (poiché $K = \hat{K}_\Omega$) $\exists$ $\mathbb{C} \setminus K$ ha una comp. connessa illimitata U_0 e un numero finito $U_1, \dots, U_p$ di c.c. limitate, con $U_J \subset \Omega$

Scegliamo $\forall J = 1, \dots, p$ $a_J \in U_J \setminus \Omega$

Possiamo approssimare f con funzione razionale $\tilde{f}$ con zeri e poli fuori da K, per l'osservazione iniziale possiamo supporre che $\tilde{f}$ non si annulli in un intorno di K. Quindi

$$\tilde{f}(z) = c \prod_{\nu=1}^{d} (z - b_\nu)^{m_\nu} \quad \text{con } c \in \mathbb{C}^*, \; m_\nu \in \mathbb{Z}^*, \; b_\nu \in \mathbb{C} \setminus K$$

Fissiamo $R > 0$ tc $K \subset\subset D(0,R)$ e $a_0 = R \in U_0$

Per $J = 0, \dots, p$ sia $A_J = \{ \nu \mid b_\nu \in U_J \}$ Scriviamo

$$\tilde{f}(z) = c \cdot G(z) (z - R)^{M_0} \prod_{J=0}^{p} \prod_{\nu \in A_J} \left(\frac{z - b_\nu}{z - a_J} \right)^{m_\nu}$$

dove $M_J = \sum_{\nu \in A_J} m_\nu$ e $G(z) = \prod_{J=1}^{p} (z - a_J)^{M_J}$

Se $\nu \in A_J \Rightarrow a_J$ e $b_\nu \in$ stessa c.c di $\mathbb{C} \setminus K$

$\Rightarrow$ per il lemma $\exists \varphi_{\nu,J} \in \mathcal{O}(K)$ tc $\dfrac{z - b_\nu}{z - a_J} = e^{\varphi_{\nu,J}(z)}$

perché $D(0,R)$ è semp. conn.

ed esiste $\exists \varphi_0 \in \mathcal{O}(D(0,R))$ tc $z - R = \exp(\varphi_0(z))$

$\Rightarrow \exists h \in \mathcal{O}(K)$ tc $\tilde{f}(z) = c\, G(z)\, e^{h(z)}$

con $G(z)$ poli e zeri fuori da Ω

quindi Runge $\forall \delta > 0 \; \exists H \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $\| H - h \|_K < \delta$

poniamo $F = c \cdot G e^H \in \mathcal{O}(\Omega)$ e mai nulla su Ω

inoltre $\| \tilde{f} - F \|_K = |c| \, \|G\|_K \, \| e^H - e^h \|_K$

a patto di prendere $\delta > 0$ suff. piccolo $\| \tilde{f} - F \|_K$ è piccolo a piacere

e quindi $\| f - F \|_K$ piccolo a piacere

Ex Sia $\{u_n\}$ succ di funzioni complesse limitate definite su un insieme S, tale che $\sum |u_n(x)|$ converge unif su S.

allora il prodotto

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z)) \quad \text{conv. unif su } S \text{ e}$$

$$f(z_0) \neq 0 \iff \exists n \geq 1 \quad u_n(z_0) = -1$$

Teo (Weierstrass)

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $E \subset \Omega$ discreto chiuso in Ω, $k: E \to \mathbb{Z}$. Allora esiste $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tc $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus E)$ senza zeri in $\Omega \setminus E$ e $(z-a)^{-k(a)} f(z)$ siano olomorfe mai nulle in un intorno di a $\forall a \in E$.

Dim Sia $\{K_\nu\}$ solita succ di cpt.

Poniamo

$$F_\nu(z) = \prod_{a \in E \cap K_\nu} (z-a)^{k(a)}$$

in particolare $F_{\nu+1}/F_\nu \in \mathcal{O}(K_\nu)$ e non si annulla mai in K_ν

sia

$$\delta_\nu = \min_{z \in K_\nu} \left| \frac{F_{\nu+1}(z)}{F_\nu(z)} \right| > 0$$

Sia $g_\nu \in \mathcal{O}(\Omega)$ mai nulla in Ω tc $\left\| \frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} - g_\nu \right\|_{K_\nu} < \frac{2^{-\nu-1} \delta_\nu}{1+2^{-\nu-1}}$

$$\Rightarrow \forall z \in K_\nu \quad |g_\nu(z)| \geq \left| \frac{F_{\nu+1}(z)}{F_\nu} \right| - \frac{2^{-\nu-1}\delta_\nu}{1+2^{-\nu-1}} \geq$$

$$\geq \delta_\nu - \frac{2^{-\nu-1}\delta_\nu}{1+2^{-\nu-1}} = \frac{\delta_\nu}{1+2^{-\nu-1}}$$

Ponendo $h_\nu = \frac{1}{g_\nu} \in \mathcal{O}(\Omega)$ mai nulla in Ω

(da vedere) $\Rightarrow$ e $\left\| \frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} \cdot h_\nu - 1 \right\|_{K_\nu} < 2^{-\nu-1}$

Poniamo allora $f = F_\nu \prod_{\mu \geq \nu} \left(\frac{F_{\nu+1}}{F_\nu} h_\mu \right) \cdot \prod_{j=1}^{\nu-1} h_j$ non dipende da ν

$f|_{K_\nu}$ ha gli stessi zeri e poli di F_ν ma f non dipende da ν

Quindi $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ come voluto

Cor $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto. Allora ogni $q \in \mathcal{M}(\Omega)$ è il quoziente di due funzioni olom. in Ω.

Dim Sia E l'insieme dei poli di q, sia $k : E \longrightarrow \mathbb{Z}$ data da $k(a) = -\operatorname{ord}_a(q)$ allora il teorema a k.
ci fornisce $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $q \cdot g \in \mathcal{O}(\Omega)$
$\Rightarrow$ $q = \frac{(gq)}{g}$ come voluto.

LEZIONE 14

Titolo nota 27/05/2020

Def $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto è il dominio di definizione di una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ se non esiste nessun aperto $\tilde{\Omega} \supsetneq \Omega$ per cui esista $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ tale che $\tilde{f}|_{\Omega} = f$

Def Se $\forall p \in \partial\Omega$ non esiste alcun $D(p,r) = D$ per cui esista una $F \in \mathcal{O}(D)$ tc $F|_U \equiv f|_U$ dove $U =$ la comp. connessa di $D \cap \Omega$ tc $p \in \partial U$, Ω è un dom. di esistenza

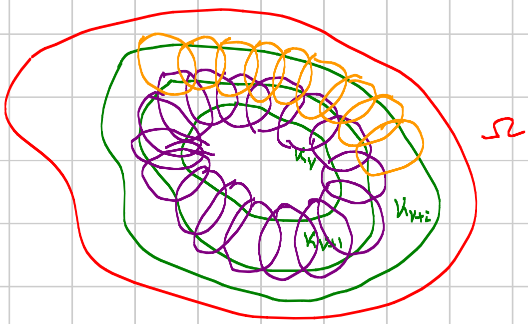
Oss Dominio di esistenza $\Rightarrow$ Dominio di def ($\not\Leftarrow$ non vale vedi $\mathbb{C}\setminus\{$semiretta$\}$ e log)

Prop Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ è un dominio, allora Ω è il dominio di esistenza (quindi di def) di una $f \in \mathcal{O}(\Omega)$

Dim Sia $\{K_\nu\}$ solita succ. di compatti che invadono Ω,

Sia $\{D_n\}$ succ. di dischi aperti tali che

- $\overline{D_n} \subset \Omega$
- $K_1 \subset D_1 \cup \dots \cup D_{n_1}$; $K_{\nu+1} \setminus \mathring{K}_\nu \subset D_{n_\nu+1} \cup \dots \cup D_{n_{\nu+1}}$
- se $n \geq n_{\nu+1}+1 \Rightarrow D_n \cap K_\nu = \emptyset$
- raggio di $D_n < \frac{1}{\nu}$ per $n_\nu + 1 \leq n \leq n_{\nu+1}$



Così facendo $\Omega = \bigcup D_n$
raggio dei $D_n \longrightarrow 0$, $\{D_n\}$ è loc. finita
cioè ogni punto ha un intorno che interseca un numero finito di D_n
(esempio prendo come intorno $\mathring{K}_\nu$)

Sia $a_n \in D_n$ una succ. di punti. $\{a_n\}$ è discreto e chiuso in quanto non ha punti di acc. in Ω (per la loc. finitezza).

Allora per Weierstrass, esiste $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i cui zeri sono $\{a_n\}$
in particolare $f \not\equiv 0$ (perché non ha altri zeri).
Vogliamo Ω dominio di esistenza di f.
Per assurdo sia $p \in \partial\Omega$, $D = D(p, \rho)$, U una componente connessa di $D \cap \Omega$ con $p \in \partial U$, e sia $F \in \mathcal{O}(D)$ tc $F|_U \equiv f|_U$.
Poniamo $D' = D(p, \rho/2)$. Si ha $p \in \partial\Omega \cap \partial(D \cap U)$
quindi $D' \cap U$ non è nel cpt in Ω
$\Rightarrow$ $D' \cap U$ interseca un numero infinito di dischi D_{n_k}
Sappiamo che raggio $D_{n_k} \to 0$ quindi è definitivamente $< \frac{\rho}{4}$
$\Rightarrow$ un numero infiniti di D_{n_k} sono contenuti in D e intersecano U $\Rightarrow$ perché U è una c.c. di $\Omega \cap D$ e D_{n_k} sono connesse
$\Rightarrow$ un numero infinito di $D_{n_k} \subset D \cap U$, più precisamente
$D_{n_k} \subset D(p, \frac{3}{4}\rho)$ $\left(\text{perché } \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{4} = \frac{3}{4}\rho\right)$ la unicità F ha infiniti zeri distinti in $D(p, \frac{3}{4}\rho) \subset\subset D(p, \rho)$ e quindi gli zeri di F hanno un punto di acc. in D $\to$ $F \not\equiv 0$ $\Rightarrow$ $f|_U \equiv 0$
principio di id $\overset{?}{\Rightarrow}$ $f \equiv 0$ su Ω !! perché f aveva un numero finito di 0

<u>Oss</u> in più variabili questo risultato è clamorosamente falso.

<u>Notazione</u> $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiindice

$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$

$z_j = x_j + i y_j$ $\quad x_j, y_j \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$dz_j = dx_j + i\,dy_j \qquad d\bar z_j = dx_j - i\,dy_j \qquad \|z\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$$

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \qquad \bar\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar z_j} d\bar z_j$$

<u>Ex</u> $$\partial f + \bar\partial f = df = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j\right)$$

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n (dz_1 \wedge d\bar{z}_1) \wedge \dots \wedge (dz_n \wedge d\bar{z}_n)$$

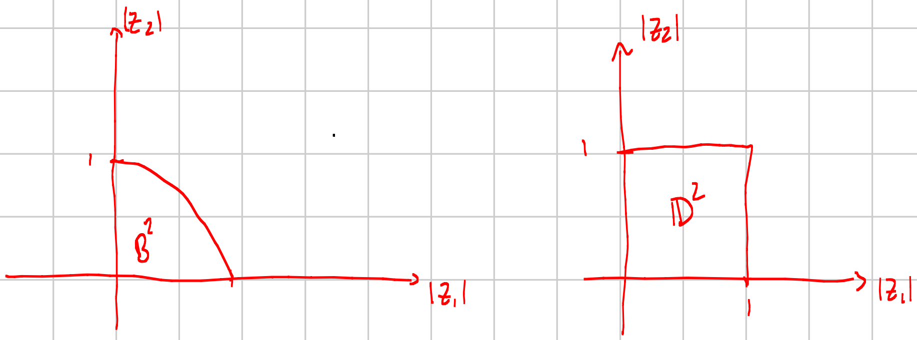
- Dominio = aperto connesso

Palle aperte $B(z^0, r) = \{ z \in \mathbb{C}^n : \| z - z^0 \| < r \}$ $\quad B^n = B(0,1)$

Polidischi di Polìraggio $r = (r_1 \dots r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ di centro z^0

$$P(z^0, \underline{r}) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j - z_j^0| < r_j \} = D(z_1^0, r_1) \times \dots \times D(z_n^0, r_n)$$

Polidisco unitario $\mathbb{D}^n = P(0,1) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \max |z_j| < 1 \}$



Def $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, una $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

(i) $\forall (z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ la funzione $\zeta \to f(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots z_n)$ è olomorfa dove definita. (olomorfa separatamente in ciascuna variabile)

(ii) Se $f \in C^1$ in ciascuna variabile e le sue derivate e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \equiv 0 \ \forall j$ (Cauchy-Riemann in più variabili)

(iii) $\forall z^0 \in \Omega \ \exists r > 0 : P(z^0, r) \subset \Omega$ dove $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (z - z^0)^\alpha$ conv. assoluta (f è analitica)

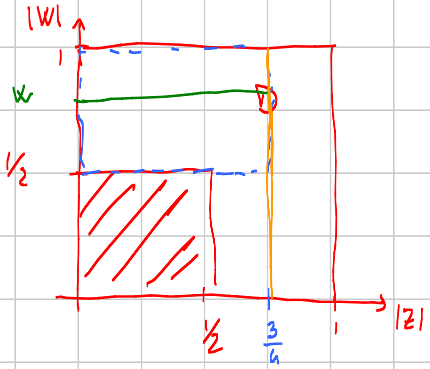
(iv) f sia continua in ciascuna variabile, loc limitata e $\forall z^0 \in \Omega \ \exists r > 0$ $\overline{P(z^0, r)} \subset \Omega$ e $f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r} \dots \int_{|\zeta_n - z_n^0| = r} \frac{f(\zeta_1 \dots \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n$

$\forall z \in P(z^0, r)$ (Formula di Cauchy)

Vedi pross. lezione per equivalenza.

• **Fenomeno di Hartogs**

Sia $D = \mathbb{D}^2 \setminus P(0,1/2)$



Prop Ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ si estende a $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^2)$

Dim Supponiamo $|z| < 3/4$ e $\frac{1}{2} < |w| < 1$ Fissato w in

Cauchy in una variabile ci dice che $\forall$

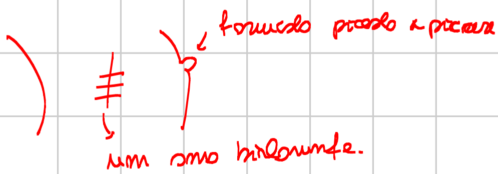
$$f(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,3/4)} \frac{f(\zeta, w)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Il lato dx è ben definito $\forall$ $|z| < \frac{3}{4}$ e $|w| < 1$
inoltre sempre nel lato destro è olomorfo in z e w (basta fare la derivata sotto il segno di integrale). e quindi estende la nostra f a tutto $\mathbb{D}^2$
perchè il bordo verde e arancione contiene $P(0,\frac{1}{2})$

Problema Caratterizzare i domini di esistenza di funzioni olomorfe in più variabili: vengono chiamati domini di olomorfia.

Esempio: Non vale nulla che assomigli al teorema di uniformizzazione di Riemann.

Per esempio B^n non è biolomorfa a $\mathbb{D}^n$ (Poincaré) (no dim)
Greene-Krantz ($\sim$'80) "formaccoli" fanno male



In particolare esiste un'infinità più che numerabile di domini omeomorfi a due a due non biolomorfi

• Es : non esistono zeri isolati. Infatti se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ con z^0 isolato
$\Rightarrow$ $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(P(z^0, r) \setminus P(z^0, \frac{r}{2}))$ non non estendibile a a $P(z^0, r)$
contro Hartogs.

• Es Domini di conv delle serie di potenze
$\sum_{n \geq 0} (z_1 + z_2)^n$ converge in $|z_1 + z_2| < 1$ non è un disco né un polidisco

$\sum_{n\geq 0} (z_1 z_2)^n$ converge in $|z_1 z_2| < 1$ è un dominio illimitato

Es: In una variabile abbiamo risolto $\bar{\partial} u = \psi$ con $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$

In generale $\nexists\ u \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ che risolva

invece se $n \geq 2$ $\psi_1 \dots \psi_n \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ $\psi = \psi_1 dz_1 + \dots + \psi_n dz_n$

con $\frac{\partial \psi_n}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}_n} \Rightarrow \exists u \in C^\infty_c(\mathbb{C}^n)$ con $\bar{\partial} u = \psi$

(Vedremo la pros volta).

Vediamo perché non si può fare in una variabile

Sia $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{C})$ e sia $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ sol di $\bar{\partial} u = \psi$.

Supponiamo che u abbia supporto cpt supp $(u) \subset D(0,R)$. Allora

$$0 = \int_{\partial D(0,R)} u(\zeta)\, d\zeta \overset{G.G}{=} \int_{D(0,R)} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = 2i \int_{D(0,R)} \psi\, dx \wedge dy \neq 0$$

in generale con ψ qualsiasi.

Quindi u potrebbe non essere a supporto compatto.

Lezione 15

Titolo nota 27/04/2020

Siano $\varphi_1 \dots \varphi_n \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ a supporto compatto, $\varphi = \varphi_1 d\bar{z}_1 + \dots + \varphi_n d\bar{z}_n$

$\bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_n} d\bar{z}_n$ quindi l'eq di Cauchy-Riemann non omogenea

è $\bar{\partial} u = \varphi \iff \forall j = 1 \dots n \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = \varphi_j$

oss Se u è soluzione $\Rightarrow \frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_l \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_l} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial \bar{z}_j}$

Quindi richiediamo sempre la condizione di compatibilità delle $\{\varphi_j\}$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi_j}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial \bar{z}_j}}$$

Teorema Se $\varphi_1 \dots \varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ e soddisfano la condizione di compatibilità allora esiste $u \in C_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ t.c. $\bar{\partial} u = \varphi$

Oss u se esiste è unica, infatti se u_1 e u_2 sono sol. a supp. cpt

$\Rightarrow \bar{\partial}(u_1 - u_2) \equiv 0 \Rightarrow u_1 - u_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ e è a supp. cpt

da vedere (esercizio)

$\Rightarrow$ per il principio di identità $u_1 - u_2 \equiv 0$ su $\mathbb{C}^n$.

da vedere dopo

Dim Fissiamo j e poniamo $u_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_j(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_n)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z_j}$

in realtà è su un cpt.

Dico che u_j verifica l'eq.

$$\frac{\partial u_J}{\partial \bar z_\ell} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \bar z_\ell}\int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_J(z_1,\dots,z_{J-1},\zeta+z_J,z_{J+1},\dots,z_n)}{\zeta}\, d\bar\zeta\wedge d\zeta =$$

cambio var. $\zeta - z_J = \zeta$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \psi_J}{\partial \bar z_\ell}\frac{\psi_J(z_1,\dots,z_{J-1},\zeta+z_J,\dots z_n)}{\zeta}\, d\bar\zeta\wedge d\zeta \overset{!}{=}$$

uso la cond. di compatibilità

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \psi_\ell}{\partial \bar z_J}(z_1\dots z_n)}{\zeta}\, d\bar\zeta\wedge d\zeta =$$

$\zeta + z_J = \zeta$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \psi_\ell}{\partial \bar z_J}\frac{(z_1,\dots,z_{J-1},\zeta,z_{J+1},\dots,z_n)}{\zeta - z_J}\, d\bar\zeta\wedge d\zeta =$$

considerando le z_ℓ, $\ell\neq J$ come costanti. Posso usare la formula di Cauchy generalizzata

$= \psi_\ell(z)$

Prendendo un disco abb. grande in modo che $\psi_\ell|_{\partial D} = 0$

Devo far vedere che u_J è a supp. cpt

Intanto ho che $\frac{\partial u_J}{\partial \bar z_\ell}(z) \equiv 0$ per $\|z\| \gg 1$

$\Rightarrow u_J(z)$ è olomorfa se $\|z\| \gg 1$

e qui si usano le $+$ var., posso far muovere una var e integrare su un'altra.

Ma $\psi_J(z) \equiv 0$ non appena $|z_i| \gg 1$ (se $i\neq 1$ altrimenti prendo z_2) $\Rightarrow u_J(z) \equiv 0$ appena $|z_i| \gg 1 \Rightarrow$ per il principio d'id. $u_J(z) \equiv 0$ se $\|z\| \gg 1 \Rightarrow$ supp u_J è cpt

Per l'osservazione precedente alla dimostrazione la scelta del J è indifferente.

Teorema (Serre, Ehrenpreis) $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $K \subset\subset \Omega$ cpt tc $\Omega \setminus K$ sia connesso. Allora ogni $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ si estende olomorficamente a tutto Ω.

Dim Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ tale che $\varphi \equiv 0$ in un intorno $\mathcal{U}$ di K e $\varphi \equiv 1$ in un intorno di $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ e con supporto di $1-\varphi$ sia $\subset\subset \Omega$

Data $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ poniamo $\tilde{f}(z) = \begin{cases} \varphi f & \text{in } \Omega \setminus K \\ 0 & \text{in } \mathcal{U} \end{cases} \Rightarrow \tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$

Poniamo $\psi = \bar{\partial} \tilde{f} = \psi_1 d\bar{z}_1 + \dots + \psi_n d\bar{z}_n$

$\psi_1, \dots \psi_n \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ perché $\tilde{f} \equiv f$ vicino a $\partial\Omega \Rightarrow \psi = \bar{\partial} f \equiv 0$ vicino a $\partial\Omega$ e quindi possiamo estenderla a zero fuori da Ω

Inoltre $\frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{z}_\ell} = \frac{\partial \psi_\ell}{\partial \bar{z}_j}$ perché sono le derivate seconde di $\tilde{f}$

Infine ψ è a supp cpt perché il suo supporto è contenuto in $\operatorname{supp}(1-\varphi)$

Per il teorema precedente esiste $u \in C^\infty_c(\mathbb{C}^n)$ tc $\bar{\partial} u = \psi$

$\Rightarrow u$ deve essere $\equiv 0$ in un intorno W della componente connessa di $\partial\Omega$ che interseca la c.c di $\mathbb{C}^n \setminus K$. Poniamo $F = \tilde{f} - u \in C^\infty(\Omega)$

Chiaramente $\bar{\partial} F \equiv 0 \Rightarrow F \in \mathcal{O}(\Omega)$ Ma $u \equiv 0$ su $W \cap \Omega$

$\Rightarrow F|_W \equiv \tilde{f}|_W = f|_W$ non appena W è abb. piccolo

Ma $\Omega \cap W \subset \Omega \setminus K$ quindi $\Rightarrow \Omega \setminus K$ è connesso $\Rightarrow F|_{\Omega \setminus K} \equiv f|_{\Omega \setminus K}$

Def $f: \Omega \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ è olomorfa se $\forall z^0 \in \Omega$ $\exists P(z^0, r) \subseteq \Omega$ tc $\forall z \in P(z^0, r)$ $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha (z - z^0)^\alpha$ conv. assoluta.

Fatto 1 (Lemma di Abel) data $\{c_\alpha\} \subseteq \mathbb{C}$ famiglia di indici; $\exists \rho_1, \dots \rho_n > 0$
(Vedi Analisi 2) $M > 0$ tc $|c_\alpha| \rho_1^{\alpha_1} \cdots \rho_n^{\alpha_n} \leq M$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ e $\underline{\rho} = (\rho_1, \dots \rho_n)$

Allora $\sum_\alpha c_\alpha (z-z^0)^\alpha$ conv. assolutamente in $P(z^0,\underline{\rho})$ e unif in $\overline{P(z^0, \theta\underline{\rho})}$ $0<\theta<1$

Inoltre lo stesso converge vale per $\sum_\alpha c_\alpha \frac{\partial}{\partial z^\beta}(z-z^0)^\alpha$ $\forall \beta\in\mathbb{N}^n$

<u>Cor 1</u> $\mathcal{O}(\Omega)\subset C^\infty(\Omega)$ e $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}(z^0)$

<u>Cor 2</u> Se $f\in\mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow \bar\partial f = 0$ / <u>Cor 3</u> $f\in\mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow$ è olomorfa in ognuna delle variabili

<u>Dim 2</u> $\underbrace{f(z)-f(z^0) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(z^0)(z_j-z_j^0)}_{\bar\partial(\quad)=0} = \underbrace{o(\|z-z^0\|^2)}_{\text{quindi derivata in } \bar z_0 \text{ vale } 0}$

<u>Prop</u> (Principio di identità) Sia $\Omega\subseteq\mathbb{C}^n$ dominio (connesso) e $f\in\mathcal{O}(\Omega)$
Se $\{z\in\Omega \mid f(z)=0\}$ ha parte interna non vuota $\Rightarrow f\equiv 0$

<u>Dim</u> $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$ $E_\alpha = \{z\in\Omega \mid \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}(z)=0\}$ $E=\bigcap_\alpha E_\alpha$ E è chiuso e aperto (per Cor 1) e non vuoto per ipotesi. $\Rightarrow$ $\Omega = E$ per connessione.

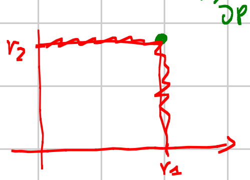
<u>Prop</u> (Formula di Cauchy) $\Omega\subseteq\mathbb{C}^n$ dominio, $f\in\mathcal{O}(\Omega)$, $\overline{P(z^0,\underline{r})}\subset\Omega$
allora $\forall z\in P_0(z^0,\underline{r})$ vale

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-z_1^0|=r_1}\cdots\int_{|\zeta_n-z_n^0|=r_n}\frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}\,d\zeta_1\dots d\zeta_n$$

$$\stackrel{\text{notazione}}{=} \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta-z^0|=\underline{r}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}\,d\zeta$$

<u>Oss</u> $\{|\zeta-z^0|=\underline{r}\}\subset \partial P(z^0,r)$ ma è più piccolo

"$\check{\partial}P$" $\rightarrow$ bordo di Šilov di $P(z^0,\underline{r})$ (si legge Scilov)



Dim Prop Per semplicità assumiamo $n=2$

Se z_2 è fissato $z_1 \to f(z_1, z_2)$ è olomorfa (per Cor 3)

in $D(z_1^0, r_1)$ allora per Cauchy 1 var

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1$$

Se $\zeta_1 \in \partial D(z_1^0, r_1)$ è fissato $\Rightarrow$ $z_2 \to f(\zeta_1, z_2)$ è olomorfa

in $D(z_2^0, r_2)$ allora per Cauchy in una var.

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \int_{|\zeta_2 - z_2^0| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2 \underset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \text{Tesi.}$$

Cor $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\overline{P(z^0, r)} \subset \Omega$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}(z) = \alpha! \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta - z^0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\alpha+1}} d\zeta \quad \text{in } P(z^0, r)$$

$$\alpha + 1 = (\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_n + 1)$$

Dim derivare la formula di Cauchy

Prop Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ C^0 in ciascuna variabile, loc. limitata e t.c.
$\forall z^0 \in \Omega$ $\exists r$ t.c. $\overline{P(z^0, r)} \subset \Omega$ e $f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta - z^0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta \Rightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega)$

Dim Abbiamo che $\displaystyle \frac{1}{(\zeta - z)} = \sum_\alpha \frac{(z - z^0)^\alpha}{(\zeta - z^0)^{\alpha+1}}$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_\alpha \Bigg[\overbrace{\frac{1}{(2\pi i)^n} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z^0)^{\alpha+1}} d\zeta}^{c_\alpha} \Bigg] (z - z^0)^\alpha$$

Cor (Osgood) Se $f:\Omega\to\mathbb{C}$ è olomorfa in ciascuna variabile e loc limitata $\Rightarrow f\in\mathcal{O}(\Omega)$ [Hartogs: la dim. che loc. limitata non serve]

Dim Sia $\overline{P(z_0,\underline{r})}\subset\Omega$ olomorfa in ciascuna direzione

f loc. limitata $\Rightarrow$ Fubini

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\zeta_1-z_1^0|=r_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}\cdots\int_{|\zeta_n-z_n^0|=r_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta_n-z_n}\,d\zeta \overset{\downarrow}{=}$$

$=$ formula di Cauchy $\Rightarrow$ tesi usando prop. precedente

Corollario $f\in C^1(\Omega)$ e $\bar\partial f\equiv 0\Rightarrow f\in\mathcal{O}(\Omega)$

Dim f è olomorfa in ciascuna variabile ☐

Prop (Disuguaglianze di Cauchy) $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ $\overline{P(z^0,\underline{r})}\subset\Omega$, $\alpha\in\mathbb{N}^n$
Allora

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}(z^0)\right|\le\frac{\alpha!}{r^\alpha}\cdot M(r)\quad\text{dove } M(r)=\sup_{|\zeta-z^0|=r}|f(\zeta)|$$

bordo di Šilov

Dim $$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}(z^0)=\alpha!\,\frac{1}{(2\pi \cancel{i})^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\frac{f(z^0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{\alpha+1}}\,\cancel{i^n\left(\prod r_j e^{i\theta_j}\right)}\,d\theta_1\ldots d\theta_n$$

$$=\alpha!\,\frac{1}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{\underline{r}^\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z^0+\underline{r}e^{i\theta})}{e^{i(\theta_1\alpha_1+\ldots+\alpha_n\theta_n)}}\,d\theta_1\ldots d\theta_n$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z^\alpha}(z^0)\right|\underset{\substack{\uparrow\\ |f|\le M(r)\\ |e^{i\theta}|^\alpha=1}}{\le}\frac{\alpha!}{r^\alpha}\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M(r)}{1}\,d\theta_1\ldots d\theta_n}_{=M(r)}$$

<u>Cor</u> (Liouville) Se $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ limitata $\Rightarrow f \equiv$ costante

<u>Dim</u> $\forall \alpha \neq 0$ $\left| \frac{\partial f}{\partial z^\alpha}(z^0) \right| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} M(r)$ $\forall \vec{r} \Rightarrow$ tutte le derivate di f sono $\equiv 0$ mandando $|r| \to \infty$

LEZIONE 16

Titolo nota 04/05/2020

Teo (applicazione aperta)

Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante $\Rightarrow$ f è aperta

Dim Basta far vedere che $f(\Omega)$ è aperto. Sia $z^0 \in \Omega$ e sia $U \subset \Omega$ aperto convesso di z^0 in Ω. Siccome f non è costante $\Rightarrow$ $f|_U \not\equiv f(z^0)$. Sia $\tilde{z}^0 \in U$ con $f(\tilde{z}^0) \neq f(z^0)$ e $D = \{ \zeta \in \mathbb{C} \mid z^0 + \zeta(\tilde{z}^0 - z^0) \in U \} \subset \mathbb{C}$ aperto

Definiamo $g(\zeta) = f(z^0 + \zeta(\tilde{z}^0 - z^0))$ abbiamo che $g \in \mathcal{O}(D)$ perché composizione di olomorfe è olomorfa e non costante perché $g(0) = f(z^0) \neq f(\tilde{z}^0) = g(1)$ $\Rightarrow$ per risultati in una variabile $g(D)$ è aperto in $\mathbb{C}$ e contiene $g(0) = f(z^0)$

Quindi $f(\Omega) \supseteq g(D)$ è un intorno di $f(z^0)$.

Teo (Principio del Massimo) $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ dominio limitato, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non costante. Sia $M = \sup_{x \in \partial\Omega} \limsup_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega}} |f(z)|$. Allora $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \Omega$

Dim Se $M = +\infty$ ovvio. Supponiamo $M < +\infty$. Sia $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^+$ data da

$$\varphi(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{se } x \in \Omega \\ \limsup_{\substack{z \to x \\ z \in \Omega}} |f(z)| & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

φ è semicontinua sup. su $\overline{\Omega}$ che è CPT $\Rightarrow$ φ è limitata, più precisamente assume max.

Sia $D = f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. D è un aperto (connesso perché lo è Ω) limitato (perché φ è limitato) di $\mathbb{C}$.

Sia $\tau \in \partial D$, $\{\zeta_\nu\} \subset D$ tc $\zeta_\nu \to \tau$ $\exists z_\nu \in \Omega$ tc $z_\nu = \zeta_\nu$

A meno di sottosuccessione $z_\nu \to z^0 \in \overline{\Omega}$. Se avessimo per assurdo $z^0 \in \Omega$

$\Rightarrow D \ni f(z^0) = \tau \in \partial D$ impossibile

$\Rightarrow z^0 \in \partial D \Rightarrow |\tau| \leq M \Rightarrow \partial D \subset \overline{D(0,M)}$

$\Rightarrow \overline{D} \subset \overline{D(0,M)}$

Siccome D è aperto $\Rightarrow D \subseteq D(0,M)$ che è la tesi.

Cor $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ Ω dominio. Se esiste uno $z^0 \in \Omega$ tale che $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ per ogni z in un intorno di z_0 $\Rightarrow f$ è costante.

Dim Se f non è costante, si applica il principio del max a un intorno di z_0 in cui vale $|f(z)| \leq |f(z_0)|$. Assurdo

Teorema (di Weierstrass) Sia $\{f_\nu\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ convergente unif sui cpt a una $f \in C^0(\Omega)$. Allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $\dfrac{\partial^{|\alpha|} f_\nu}{\partial z^\alpha} \to \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}$

Dim Identica in più variabili.

Teorema (di Montel) Una famiglia $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ è rel cpt in $\mathcal{O}(\Omega)$ se e solo se è unif. limitata sui compatti cioè
$\forall K \subset\subset \Omega$ cpt $\exists M_K$: $\|f\|_K < M_K$ $\forall f \in \mathcal{F}$

Dim Analogo a una variabile

Teo (di Vitali) $\{f_\nu\} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ $\{f_\nu\}$ unif. limitata sui cpt e sia $A \subseteq \Omega$ un insieme con $\mathring{A} \neq \emptyset$ tc $\{f_\nu(z^0)\}$ converge in $\mathbb{C}$ $\forall z^0 \in A$. Allora $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $f_\nu \to f$ unif sui cpt.

Def Sia $F = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ serie di potenze, il <u>dominio di convergenza</u> di F è

$$\mathcal{C} = \operatorname{int}\left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sum_\alpha |a_\alpha|\,|z^\alpha| < +\infty \right\}$$ (parte interna della convergenza assoluta)

Per il lemma di Abel $\mathcal{C} = \operatorname{int}\left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \sup_\alpha |a_\alpha|\,|z|^\alpha < +\infty \right\}$

Oss il dominio è invariante per prodotti sulle singole componenti per numero di modulo 1. Analogamente per numero di modulo ≤ 1 se sono nel dominio ci resto.

Def Un insieme $S \subset \mathbb{C}^n$ è

- <u>circolare</u> se $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $z \in S \Rightarrow z^{i\theta} \in S$
- <u>di Reinhardt</u> se $\forall \theta_1, \dots \theta_n \in \mathbb{R}$ $z \in S \Rightarrow (z_1 e^{i\theta_1}, \dots, z_n e^{i\theta_n}) \in S$
- <u>circolare completo</u> se $\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{D}$ $z \in Z \Rightarrow (z_1 \xi_1, \dots, z_n \xi_1) \in S$

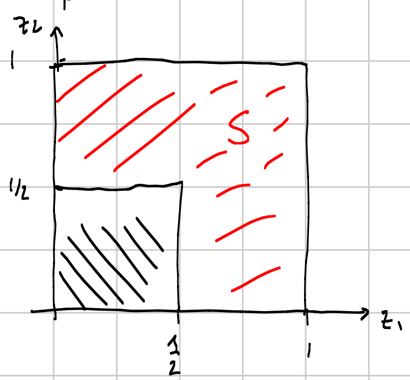
Oss S circolare completo $\Rightarrow 0 \in S$

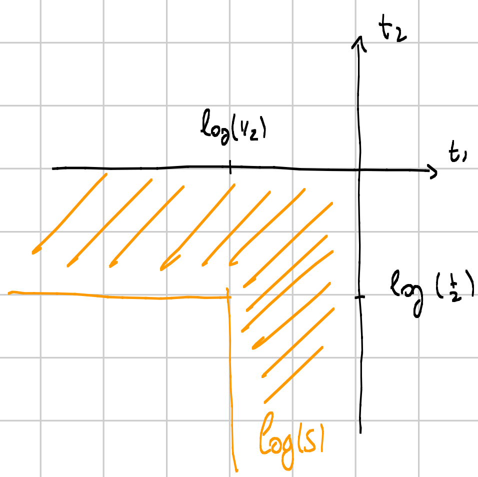
Oss di prima un dominio di convergenza di una serie di potenze è circolare completo

Def $S \subset \mathbb{C}^n$, <u>l'immagine logaritmica di S</u> è

$$\log|S| = \left\{ (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) \;\middle|\; z = (z_1 \dots z_n) \in S \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \{z_j = 0\} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

Esempio





Def diremo S è <u>logaritmicamente convesso</u> se $\log|S|$ è convesso.

Prop Il dominio di convergenza di una serie di potenze F è logaritmicamente convesso

Dim <u>Idea</u>: la funzione $t \to a^t b^{1-t}$ su $[0,1]$ è convessa $\forall a, b > 0$

Siano w e $w' \in \mathcal{C}$ e sia $\varepsilon > 0$ t $P(0, |w|+\varepsilon)$, $P(0, |w'|+\varepsilon) \subset \mathcal{C}$

dove $|w|+\varepsilon = (|w_1|+\varepsilon, \dots, |w_n|+\varepsilon)$

Vogliamo $\Rightarrow$ il segmento che congiunge $\log(|w|)$ e $\log|w'|$ è contenuto in $\log|\mathcal{C}|$ dove $\log|w| = (\log|w_1|, \dots, \log|w_n|)$

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda \log|w| + (1-\lambda)\log|w'| \in \log|\mathcal{C}|$

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in [0,1] \quad \left(\log(|w_1|^\lambda |w_1'|^{1-\lambda}), \dots, \log(|w_n|^\lambda |w_n'|^{1-\lambda})\right) \in \log|\mathcal{C}|$

$\Leftrightarrow \underbrace{\forall \lambda \in [0,1] \quad \left(|w_1|^\lambda |w_1'|^{1-\lambda}, \dots, |w_n|^\lambda |w_n'|^{1-\lambda}\right) \in \mathcal{C}}_{\text{dimostreremo questo.}}$

Sia $F = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ per le dis di Cauchy applicate a $P(0,|w|+\varepsilon)$ e $P(0,|w'|+\varepsilon)$

ci dicono che $\quad |a_\alpha| \le \dfrac{C \leftarrow \text{non dipende da } \alpha}{\max\{(|w|+\varepsilon)^\alpha, (|w'|+\varepsilon)^\alpha\}}$

$$\forall \lambda \in [0,1] \ \forall j = 1 \dots n \quad \max\{|w_j|+\varepsilon, |w_j'|+\varepsilon\} \underset{\text{per convessità}}{\ge} (|w_j|+\varepsilon)^\lambda (|w_j'|+\varepsilon)^{1-\lambda} \ge$$

$$\ge |w_j|^\lambda |w_j'|^{1-\lambda} + \varepsilon' \qquad \text{per qualche } \varepsilon' < \varepsilon$$

perché $(a+\varepsilon)^\lambda (b+\varepsilon)^{1-\lambda} - a^\lambda b^{1-\lambda}$ è continua e strettamente positiva su $\lambda \in [0,1]$ e quindi ha minimo positivo e lo chiamo ε'

$$\Rightarrow \forall \alpha_j \quad \max\{(|w_j|+\varepsilon)^{\alpha_j}, (|w_j'|+\varepsilon)^{\alpha_j}\} \ge \left(|w_j|^\lambda |w_j'|^{1-\lambda} + \varepsilon'\right)^{\alpha_j}$$

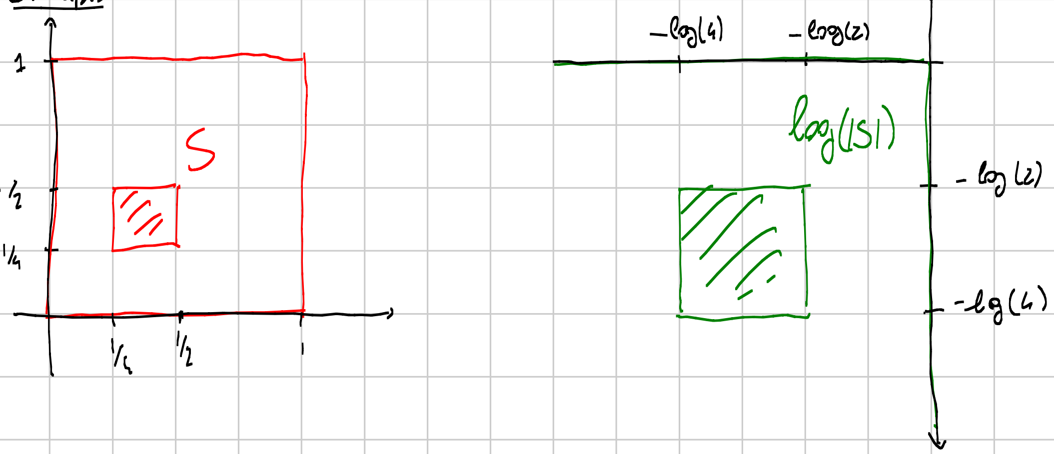
nella dis di Cauchy $\Rightarrow$ $\quad |a_\alpha| \le \dfrac{C}{\prod_{j=1}^n \left(|w_j|^\lambda |w_j'|^{1-\lambda} + \varepsilon'\right)^{\alpha_j}}$

$\Rightarrow \left(|w_1|^\lambda |w_1'| + \varepsilon', \dots, |w_n|^\lambda |w_n'|^{1-\lambda} + \varepsilon'\right) \in \mathcal{C}$ (a patto di ridurre ε')

per lemma di Abel $\Rightarrow \left(|w_1|^\lambda |w_1'|^{1-\lambda}, \dots, |w_n|^\lambda |w_n'|^{1-\lambda}\right) \in \mathcal{C}$ e questa è la tesi.

Fatto Ogni dominio circolare completo e logaritmicamente convesso è il dominio di convergenza di una serie di potenze.

Esempio



Def $S \subseteq \mathbb{C}^n$ di Reinhardt, e indichiamo con $\hat{C} \subset \mathbb{R}^n$ l'inviluppo convesso di $\log|S|$

Oss S aperto $\Rightarrow \log|S|$ aperto $\Rightarrow \hat{C}$ è aperto

Sia $\hat{S} \subseteq \mathbb{C}^n$ l'unico insieme di Reinhardt t.c. $\log|\hat{S}| = \hat{C}$
$\hat{S}$ è l'inviluppo logaritmico di S

Prop Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio di Reinhardt contenente l'origine, e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ allora lo sviluppo in serie di f in 0 converge in tutto $\hat{\Omega}$.

Dim $\forall J \geq 1 \quad \Omega_J = $ c.c. di $\{z \in \Omega \mid d(z, \partial\Omega) > \|z\|/J\}$ contenente 0
(se $J \to \infty$ ricoprono Ω)

Fissiamo J, $z \in \Omega_J$. Allora $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \to f(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n)$ è

ben definita per $|\zeta_1| = \dots = |\zeta_n| = 1 + \frac{1}{J}$. Allora

$$f_z(W) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta| = 1 + \frac{1}{J}} \frac{f(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n)}{(\zeta_1 - w_1) \dots (\zeta_n - w_n)} d\zeta \quad (*)$$

è olomorfa in $P(0, 1 + \frac{1}{J})$

Quando $\|z\| << 1$ poiché Ω è aperto di Reinhardt contenente 0.
abbiamo che $(\zeta_1 z_1, \dots \zeta_n z_n) \in \Omega$ $\forall \zeta \in \overline{P(0, 1 + \frac{1}{J})}$
$\Rightarrow$ La formula di Cauchy ci dice che x $\|z\| << 1$
$\Rightarrow$ $f_z(\underline{1}) = f(z)$ dove $\underline{1} = (1, \dots, 1)$

Allora per il principio di identità $\Rightarrow$ $f_z(1) = f(z)$ $\forall z \in \Omega_J$

Se $w \in$ compatto in $P(0, 1 + \frac{1}{J})$ possiamo espandere l'integrando in $(*)$ serie di potenze di W $\rightarrow$ questo ci dà uno sviluppo in serie di potenze di $f(z)$ nell'origine unif convergente nei cpt.

Facendo i conti si vede che il coeff di W^α è

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta| = 1 + 1/J} \frac{f(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta$$

ma da $f_z(1) = f(z)$ per $\|z\| < 1$ otteniamo che $a_\alpha = z^\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f(0)}{\partial z^\alpha}$

ma allora l'espansione in serie di potenze di f in 0 converge unif nei cpt in Ω_J. Siccome J è arbitrario $\Rightarrow$ che la serie di potenze in 0 converge unif. nei cpt di tutto Ω. $\Rightarrow$ $\Omega \subset \mathcal{C}(F)$ dominio di conv di F
ma $\mathcal{C}(F)$ è log convesso $\Rightarrow$ $\mathcal{C}(F) \supseteq \hat{\Omega}$.

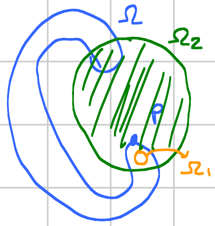
LEZIONE 17

Titolo nota 08/05/2020

· Domini di olomorfia

Def $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio, un punto $P \in \partial\Omega$ è ESSENZIALE se esiste $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che $\forall$ intorno aperto connesso Ω_2 di P e $\forall \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$ aperto con $\Omega_2 \neq \emptyset$ e $\neq \Omega$
$\nexists\ u_2 \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ con $u_2|_{\Omega_1} \equiv u|_{\Omega}$

Idea:



non esiste u_2 che che estende su /// definita su Ω_1

def Diremo che Ω è un dominio di olomorfia se $\forall P \in \partial\Omega$ è essenziale

· **Def** Un funzionale di Minkovski è una funzione $\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continua tale che:

(i) $\mu(z) = 0 \iff z = 0$

(ii) $\mu(\xi z) = |\xi|\, z \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$ e $\xi \in \mathbb{C}$

Esempi 1) $\mu(z) = \|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p\right)^{1/p} \quad p>0$

2) $\mu(z) = \max_{i=1..n} \{|z_i|\}$

Ex Se μ è un funzionale di Minkovski $\Rightarrow B_\mu = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mu(z) < 1\}$ è un dominio cerchiato completo.

Se $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ è un dominio poniamo $\mu_\Omega(z) = \inf_{w \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega} \mu(z-w) =$
$=$ "μ-distanza da $\partial\Omega$"

Se $X \subset \Omega$ poniamo $\mu_\Omega(X) = \inf_{z \in X} \mu_\Omega(z)$

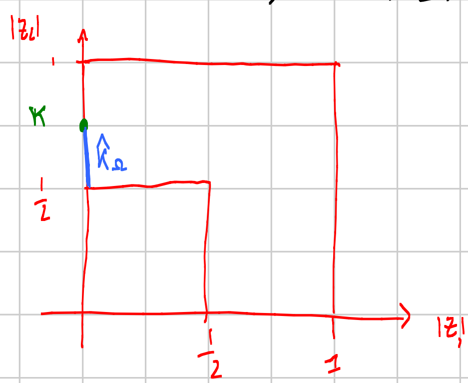
Def: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $\mathcal{F}$ famiglia di funzioni su Ω.
Sia $K \subset \Omega$. Il $\mathcal{F}$-inviluppo di K in Ω indicato con
$$\hat{K}_{\mathcal{F}} = \{ z \in \Omega \mid |f(z)| \le \|f\|_K \quad \forall f \in \mathcal{F} \}$$
Se $\mathcal{F} = \mathcal{O}(\Omega)$ $\hat{K}_{\mathcal{F}} = \hat{K}_\Omega$ è l'inviluppo olomorfo di K.

Oss In una variabile abbiamo visto che K compatto $\Rightarrow \hat{K}_\Omega$ è cpt. In più variabili non è così. Allora conviene:

Def Diremo che Ω è $\mathcal{F}$-convesso $\Leftrightarrow K \subset\subset \Omega \Rightarrow \hat{K}_{\mathcal{F}} \subset\subset \Omega \quad \forall K \subset\subset \Omega$
quindi se $\mathcal{F} = \mathcal{O}(\Omega)$ e Ω $\mathcal{F}$ convesso $\Leftrightarrow \Omega$ è olomorficamente convesso

Oss ogni aperto di $\mathbb{C}$ è olomorficamente convesso

Ex $\Omega = P^2(0,1) \setminus \overline{P^2(0,\tfrac12)}$ $\quad K = \{ (0, \tfrac34 e^{i\theta}) : \theta \in \mathbb{R} \}$



Dimostrare $\hat{K}_\Omega = \{ (0, te^{i\theta}) : \theta \in \mathbb{R}, \tfrac12 < t \le \tfrac34 \}$

Ex Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} =$ funzioni lineari su Ω, allora

$\hat{K}_{\mathcal{F}} =$ inviluppo convesso di K e Ω è $\mathcal{F}$-convesso $\Leftrightarrow \Omega$ è convesso

Lemma 1: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $K \subset \Omega$ limitato allora $\hat{K}_\Omega$ è limitato.

Dim K è limitato $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \dots, n$ $\exists M_j > 0$ tc $|z_j| \le M_j$ $\forall z \in K$
$\Rightarrow \forall z \in \hat{K}_\Omega$ $|z_j| \le M_j$ $\forall j$ $\Rightarrow$ $\hat{K}_\Omega$ è limitato.
le funzioni $z \to z_j$ sono olomorfe + def $\hat{K}_\Omega$

OSS Se $\mathcal{F} \subset C^0(\Omega) \Rightarrow \hat{K}_\mathcal{F}$ è chiuso in quanto intersezioni di chiusi.

Lemma 2 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio, $K \subset \Omega$ allora $\hat{K}_\Omega$ è contenuto nella chiusura dell'inviluppo convesso di K

Dim $\mathcal{O}(\Omega)$ contiene le funzioni $e^{L(z)}$ con $L: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ lineare
e $|e^{L(z)}| = e^{\operatorname{Re} L(z)}$
$|e^{L(z)}| \le \|e^L\|_K \Leftrightarrow \operatorname{Re} L(z) \le \sup_{w \in K} \operatorname{Re} L(w)$ $(*)$

osservo che ogni $\ell: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-lineare è la parte reale di $L: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineare
e ricordando che un convesso è contenuto nell'intersezione dei semispazi che lo contengono (vedi Anal Convessa) si ha il concl. da $(*)$

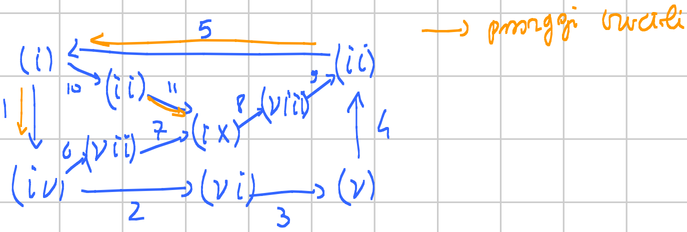
Teo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio, Sono equivalenti
(i) $\exists h \in \mathcal{O}(\Omega)$ non può essere estesa olomorficamente su un qualsiasi $\Omega' \supsetneq \Omega$
(ii) Ω è un dominio di olomorfia.
(iii) Ω è olomorficamente convesso.
(iv) $\forall \mu$ di Mink. $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\forall K \subset\subset \Omega$: $|f| \le \mu_\Omega$ su $K \Rightarrow |f| \le \mu_\Omega$ su $\hat{K}_\Omega$
(v) $\forall \mu$ di Mink e $\forall K \subset\subset \Omega$ $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) = \mu_\Omega(K)$
(vi) $\forall \mu$ di Mink, $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $\forall K \subset\subset \Omega$ $\sup_{z \in K} \frac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)} = \sup_{z \in \hat{K}_\Omega} \frac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)}$

(vii) $\exists\, \mu$ Mink tc (iv) valga

(viii) $\exists\, \mu$ Mink tc (v) valga

(ix) $\exists\, \mu$ Mink tc (vi) valga.

Schema delle dim



Dim $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ OVVIA

$\boxed{(ii) \Rightarrow (viii)}$ Poniamo $\mu = \|\cdot\|_\infty$. Supponiamo per assurdo che (viii) non valga: quindi $\exists\, K \subset\subset \Omega$ tc $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) < \mu_\Omega(K_\Omega)$

Scegliamo $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) < \delta_1 < \delta_2 < \mu_\Omega(K)$

Poiché la def di μ_Ω è un inf trovo $z^0 \in \hat{K}_\Omega$ tc $\mu_\Omega(z^0) < \delta_1$.

Poniamo $K_{\delta_2} = \overline{\bigcup_{z \in K} P(z, \delta_2)} = \{ w \in \mathbb{C}^n : \min_{z \in K} \|z - w\|_\infty \leq \delta_2 \}$ è chiuso

ovviamente limitato e $K_{\delta_2} \subset\subset \Omega$ perché $\delta_2 < \mu_\Omega(K)$

Le dis. di Cauchy ci dicono che $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}$

$$(*) \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z) \right| \leq \frac{\alpha!}{\delta_2^{|\alpha|}} \|f\|_{K_{\delta_2}} \qquad \forall z \in K$$

Siccome $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(z) \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow (*)$ vale su $\hat{K}_\Omega$ in particolare vale su z_0

Ma allora lo sviluppo in serie in z^0 converge in $P\left(z_0, \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)$ (per il lemma di Abel) perché $\delta_1 < \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} < \delta_2$ e la stima
mi dà la convergenza nei polidischi di raggio $< \delta_2$.

$\Rightarrow$ f si estende olomorficamente a $P\left(z_0, \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right)$ ma
$P\left(z^0, \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ e questo mi dice che quei punti di bordo non possono essere essenziali. Assurdo.

$\boxed{(viii) \Rightarrow (iii)}$ $K \subset\subset \Omega \iff K$ è chiuso e limitato e $\mu_\Omega(K) > 0$

Se $K \subset\subset \Omega \Rightarrow \hat{K}_\Omega$ è chiuso e limitato

$\underset{\text{per } (vii)}{\Rightarrow}$ $\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega) = \mu_\Omega(K) > 0 \Rightarrow \hat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Sia $\{w_J\}_{J \in \mathbb{N}^*} \subset \Omega$ una successione ovunque densa e che ripete ogni punto infinite volte.

$\forall J$ sia $P_J = P(w_J, r_J)$ il polidisco di centro w_J "più grande" contenuto in Ω $\left(\iff P(w_J, r_J) \subset \Omega \text{ e } \overline{P(w_J, r_J)} \cap \partial\Omega \neq \emptyset\right)$

e P_J non è rel compatto in Ω.

Sia $\{K_J\}$ una succ. di compatti che invade Ω

cioè $K_J \subset\subset \Omega$ cpt $K_J \subset \mathring{K}_{J+1}$ e $\bigcup K_J = \Omega$

(iii) ci dice che $(\hat{K}_J)_\Omega \subset\subset \Omega$ e P_J non lo sono

$\Rightarrow \exists\ z_J \in P_J \setminus (\hat{K}_J)_\Omega \Rightarrow \exists$ un' $h_J \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che

$h_J(z_J) > \|h_J\|_{K_J}$

possiamo a meno di dividere che $h_J(z_J) = 1$ a meno di sostituire h_J con $h_J^{M_J}$ con $M_J >> 1$ possiamo supporre

$\|h_J\|_{K_J} < 2^{-J}$ poniamo

$$h(z) = \prod_{J=1}^{\infty} \left(1 - h_J(z)\right)^J$$ h si annulla in z_J di ordine almeno J

$\Rightarrow h \in \mathcal{O}(\Omega)$ perché per un risultato che dice che un prodotto di quel tipo converge $\iff \sum |h_J| \leq \sum \frac{J}{2^J} < +\infty$

inoltre $h \not\equiv 0$ (ad esempio su K_1 non si annulla).

Dico che h non si estende oltre Ω. Ogni P_J contiene infiniti z_ℓ questi si accumulano ad un qualche $z_J^0 \in \overline{P_J}$

Se $z_J^0 \in \Omega \Rightarrow h$ dovrebbe annullarsi di ordine ∞ in z_J^0

$\Rightarrow h \equiv 0$ impossibile $\Rightarrow z_J^0 \in \partial\Omega\ \ \forall J$

Facciamo vedere che z_J^0 sono densi in $\partial\Omega$. Se non lo fossero esisterebbe un qualche w_{J_0} tc $\overline{P(w_{J_0}, r_{J_0})} \cap \partial\Omega$ non contiene alcun z_J^0 impossibile. Se h si estendesse a $\Omega' \supset \Omega$ allora Ω' si dovrebbe intersecare con $\partial\Omega$ e lì ci stanno gli z_J^0 quindi si estende in qualche intorno di $z_J^0 \Rightarrow h \equiv 0 \Rightarrow$ impossibile.

(iv) $\Rightarrow$ (vii) ovvio

(vii) $\Rightarrow$ (ix) ovvio perché (vii) $\Rightarrow \sup\limits_{z\in K} \dfrac{|f|}{\mu_\Omega(z)} < 1$ e $\sup\limits_{z\in \hat{K}_\Omega(z)} \leq 1$

$\Rightarrow$ se ho una f tc $\sup\limits_{z\in K} \dfrac{|f(z)|}{\mu_\Omega(z)} \leq M \Rightarrow$ applico (vii) a $\dfrac{f}{M}(z)$

(ix) $\Rightarrow$ (viii) Si applica (ix) con $f \equiv 1$

$$\begin{array}{ccc} \sup\limits_{z\in K} \dfrac{1}{\mu_\Omega(z)} & = & \sup\limits_{z\in \hat{K}_\Omega} \dfrac{1}{\mu_\Omega(z)} \\ \| & & \| \\ \dfrac{1}{\mu_\Omega(K)} & & \dfrac{1}{\mu_\Omega(\hat{K}_\Omega)} \end{array}$$

(iv) $\Rightarrow$ (vi) Come (vii) $\Rightarrow$ (ix)

(vi) $\Rightarrow$ (v) Come (ix) $\Rightarrow$ (viii)

(v) $\Rightarrow$ (iii) Come (viii) $\Rightarrow$ (iii)

Manca (i) $\Rightarrow$ (iv) che vedremo lunedì.

<u>Cor</u> Ω convesso $\Rightarrow$ Ω dominio di olomorfia

<u>Dim</u> Sia $P \in \partial\Omega$. Essendo Ω convesso $\exists\ L: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ lineare tc $\operatorname{Re} L(z) < \operatorname{Re}(L(P))$ $\forall z \in \Omega$

Sia $f(z) = \dfrac{1}{L(z) - L(P)}$ allora $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e non si estende oltre $P \Rightarrow P$ è essenziale.

Def un punto $P \in \partial\Omega$ si dice di Picco se $\exists f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tc
$f(P) = 1$ ma $\|f\|_\Omega < 1$ (Es nel cor $f(z) = e^{L(z)-L(P)}$)

Ex Se ogni punto del bordo di Ω è di Picco $\Rightarrow$ Ω è un dominio di olomorfia.

Oss Controllare se un punto di picco è una cosa difficile.

LEZIONE 18

Titolo nota 11/05/2020

Correzione ex volta precedente: $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio, $0 \in \Omega$

e circolare e stellato rispetto a 0 $(\forall \xi \in D$ e $\forall z \in \Omega$ $\xi \cdot z \in \Omega)$

$\iff \exists \mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+$ di Minkovski tc $\Omega = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \mu(z) < 1 \}$

Idea $\Leftarrow$ ovvio

$\Rightarrow$ prove $\mu(z) = \inf \{ r > 0 \mid \frac{1}{r} z \in \Omega \}$

Conclusione dimostrazione Teorema delle caratterizzazioni

Manca $(i) \Rightarrow (iv)$ dove:

(i) $\exists h \in \mathcal{O}(\Omega)$ che non può essere estesa oltre ad un aperto $\Omega' \supsetneq \Omega$

(iv) $\forall \mu$ di Mink. $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\forall K \subset\subset \Omega$ cpt $|f| \leq \mu_\Omega$ su $K \Rightarrow |f| \leq \mu_\Omega$ su $\hat{K}_\Omega$

Fissiamo un multiraggio $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ e poniamo

$$\mu^{\underline{r}}(z) = \max \left\{ \frac{|z_j|}{r_j} \right\}$$

Vogliamo verificare (iv) per $\mu^{\underline{r}}$: Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sia $K \subset\subset \Omega$ cpt tc $|f(z)| \leq \mu_\Omega^{\underline{r}}(z)$ $\forall z \in K$.

<u>Fatto</u> (dim dopo) $\forall g \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $w \in \hat{K}_\Omega$ allora g ha un'esp. in serie di potenze centrata in $P(w, |f(w)| \underline{r}) = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \mu^{\underline{r}}(z - w) < |f(w)| \}$

Usando il Fatto. Per assurdo se $\exists w \in \hat{K}_\Omega$ tc $|f(w)| > \mu_\Omega^{\underline{r}}(w)$

$\Rightarrow P(w, |f(w)| \underline{r}) \cap \partial\Omega \neq \emptyset \Rightarrow$ ogni $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ si estende oltre $P(w, |f(w)| \underline{r})$ e questo contraddice (i).

<u>Dim fatto</u> Fissiamo $0 < t < 1$ poniamo $W_t = \bigcup_{z \in K} P(z, |f(z)| t \cdot \underline{r})$

Siccome $|f(z)| \leq \mu_\Omega^{\underline{r}}(z)$ $\forall z \in K$

$\Rightarrow$ $t |f(z)| < \mu_\Omega^{\underline{r}}(z)$ $\forall z \in K \Rightarrow W_t \subset\subset \Omega$

Sia $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. $\exists M > 0 : \|g\|_{W_t} \leq M$. Allora usando le dis di Cauchy
$\forall z \in K$

$$\left| \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial z^\alpha}(z) \right| \leq \frac{\alpha! \, M}{t^{|\alpha|} |f(z)|^{|\alpha|} \cdot r^\alpha} \iff$$

$$\left| f(z)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial z^\alpha}(z) \right| \leq \frac{\alpha! \, M}{t^{|\alpha|} r^\alpha}$$

$\Rightarrow \forall w \in \hat{K}_\Omega$
$$\left| f(w)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial z^\alpha}(w) \right| \leq \frac{\alpha! \, M}{t^{|\alpha|} r^\alpha} \Rightarrow$$

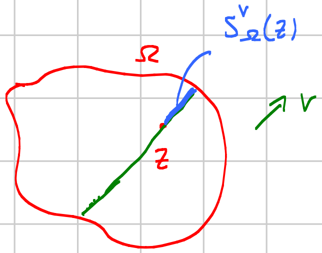
$$\Rightarrow \left| \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial z^\alpha}(w) \right| \leq \frac{\alpha! \, M}{t^{|\alpha|} r^\alpha |f(w)|^{|\alpha|}}$$

$\Rightarrow$ lo sviluppo in serie di g in W converge in $P(w, |f(w)| t \underline{r})$
mandando $t \to 1$ otteniamo il fatto.

Questo conclude la dim di (iv) per $\mu^{\underline{r}}$. Dobbiamo farlo per μ qualsiasi

Sia μ Mink qualsiasi. Dato $v \in \mathbb{C}^n$ poniamo:

$$S_\Omega^v(z) = \sup_{r>0} \{ z + \xi v \in \Omega \quad \forall |\xi| < r \}$$



Allora $\mu_\Omega(z) = \inf\limits_{\mu(v)=1} S_\Omega^v(z)$ (per ex)

Quindi basta dimostrare (iv) per ciascuna $S_\Omega^v(z)$
Chiaramente possiamo assumere $v = e_1$ (a meno di rotazione)
dato $k \in \mathbb{N}^*$ poniamo $\underline{r}^k = (1, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$ $r_\infty = (1, 0, \dots, 0) = e_1$

$$S_\Omega^{e_1} = \mu_\Omega^{r_\infty} \quad e \quad \mu_\Omega^{r_k} \overset{\text{crescendo}}{\nearrow} S_\Omega^{e_1}$$

Sia $K \subset\subset \Omega$ cpt. Teo del Dini $\mu_\Omega^{r_k} \nearrow S_\Omega^{e_1}$ unif su K.

Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ t.c. $|f(z)| \le S_\Omega^{e_1}$ su K

Fissiamo $\varepsilon > 0$ $\forall\, k \ge k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ $S_\Omega^{e_1} \le (1+\varepsilon)\mu_\Omega^{r^k}$

su K $\Rightarrow$ $|f| \le (1+\varepsilon)\mu_\Omega^{r_k}$ su K adesso usando (iv) per μ^{r_k}

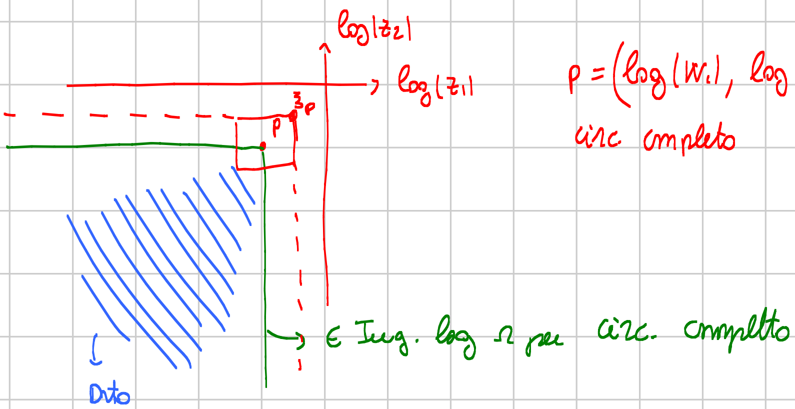
$\Rightarrow$ $|f| \le (1+\varepsilon)\mu_\Omega^{r_k} \le (1+\varepsilon) S_\Omega^{e_1}$ su $\hat{K}_\Omega$

mandando $\varepsilon \to 0$ abbiamo la tesi.

Prop Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio circolare completo, logaritmicamente convesso contenente 0 $\Rightarrow$ Ω è un dominio di olomorfia.

Dim Sia $K \subset\subset \Omega$ cpt $\overset{??}{\Rightarrow}$ $\hat{K}_\Omega \subset\subset \Omega$

$\forall\, w \in K$ esiste U_w intorno di $W \subset \Omega$ e uno $\xi^w \in \Omega$ $|z_j| \le |\xi_j^w|$ $\forall z \in U_w$ (deriva dall'essere log. convesso)



(Vedi meglio Video)

Verde per conv. log $\in$ Img log Ω

perché Ω c.c.+ log conv

Siccome K è cpt $\exists$ $\xi^1 \dots \xi^k \in \Omega$ t.c. $K \subset \underbrace{\bigcup_{l=1}^{k} \{z \mid |z_j| \le |\xi_j^l|\}}_{=W} \subset\subset \Omega$

Possiamo assumere $\xi_j^l \neq 0$ $\forall l$ e $\forall j$

Prendiamo $z \in \hat{K}_\Omega \Rightarrow z \in W$ (così abbiamo finito perché $W \subset\subset \Omega$)

a meno di permutare le coord. possiamo supporre

$z_1, \dots, z_m \neq 0$ e $z_{m+1}, \dots, z_n = 0$ per qualche $1 \le m \le n$

Per definizione di $\hat{K}_\Omega$ $|z_1^{\alpha_1} \cdots z_m^{\alpha_m}| \leq \sup_{w \in K} |w_1^{\alpha_1} \cdots w_m^{\alpha_m}| \leq$

$$\leq \max_{\ell = 1 \dots k} |(\xi_1^\ell)^{\alpha_1} \cdots (\xi_m^\ell)^{\alpha_m}|$$

Poniamo $\nu_j = \frac{\alpha_j}{|\alpha|}$ $\nu_j \in \mathbb{Q}^+$ con $\sum_{j=1}^m \nu_j = 1$

facendo il log alle dis di prima e dividendo per $|\alpha|$

$$\sum_{j=1}^m \nu_j \log |z_j| \leq \max_{1 \leq \ell \leq n} \sum_{j=1}^m \nu_j \log |\xi_j^\ell| \qquad (**)$$

Per continuità questo vale $\forall \nu_j \in \mathbb{R}^+$ tc $\sum_{j=1}^m \nu_j = 1$

$(**)$ ci dice che $(\log |z_1|, \dots, \log |z_m|)$ è nell'inviluppo convesso di

$$\bigcup_\ell \{(t_1 \dots t_m) \in \mathbb{R}^m \mid -\infty < t_j \leq \log |\xi_j^\ell| \ \forall j\}$$ (sono i quadranti in basso a sx del disegno di prima)

quindi è contenuto in $\log |\Omega|$

$\Rightarrow z \in \bigcup_{\ell=1}^k \{|z_j| \leq |\xi_j^\ell|\} = \hat{K}$ è il dominio circ completo $\subset\subset \Omega$

che ha come immagine $\log(z)$.

<u>Cor</u> $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ circ. completo, log convesso, $0 \in \Omega \Rightarrow \Omega$ è dom di convergenza di una serie di potenze.

<u>Dim</u> Poiché Ω è un dominio di olom $\Rightarrow \exists \in \mathcal{O}(\Omega)$ che non si può estendere a domini più grandi. Prendiamo l'espansione in serie di h in 0. Abbiamo visto che per circ. completo la serie di potenze converge in Ω e non può convergere in cose più grandi altrimenti sarebbe un'estensione olomorfa di g.

Funzioni armoniche

Def Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio $u \in C^2(\Omega)$ il laplaciano di u è

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Diremo che u è armonica in Ω se $\Delta u \equiv 0$ in Ω. $\Leftrightarrow u \in \mathcal{H}(\Omega)$

Oss u armonica $\Rightarrow \operatorname{Re} u$ e $\operatorname{Im} u \in \mathcal{H}(\Omega)$

Oss $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow f, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{H}(\Omega)$ $\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0\right)$

Prop $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $u \in C^2(\Omega)$ tc $\Delta u \geq 0$ in Ω allora u soddisfa il principio del max: $\forall K \subset\subset \Omega$ $\forall z \in K$

$$u(z) \leq \sup_{w \in \partial K} u(w)$$

Dim supponiamo prima che $\Delta u > 0$ per assurdo supponiamo $\exists K \subset\subset \Omega$ $\exists w_0 \in K$ e $u(w_0) > \sup_{w \in \partial\Omega} u(w)$, $\bar{K}$ è cpt perché $K \subset\subset \Omega$

$\Rightarrow u$ ha max in $K \Rightarrow \exists z_0 \in \mathring{K}$ tc $u(z_0) = \sup_{z \in K} u(z)$

Quindi z_0 è un max locale per $u \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0 \Rightarrow \Delta u(z_0) \leq 0$ assurdo.

Supponiamo $\Delta u \geq 0$ dato $\varepsilon > 0$ poniamo $u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon |z|^2$

$\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 4\varepsilon > 0$ quindi per u_ε vale il principio del max

$\forall z \in K$ $\quad u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{w \in \partial K} u_\varepsilon(w) = \sup_{w \in \partial K} u(w)$

Corollario Supponiamo $\Omega \subset \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, $K \subset\subset \Omega$ tc

$$u|_{\partial K} \equiv 0 \Rightarrow u|_K \equiv 0$$

Dim Si applica il principio del max a u e $-u$.

Def Data $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ il nucleo di Poisson $P_{a,\rho} : D(a,\rho) \times \partial D(a,\rho) \to \mathbb{R}$

è $P_{a,\rho}(z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{(\xi - a) + (z - a)}{(\xi - a) - (z - a)}\right)$

$$P_{0,1}(z,\xi) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{\xi + z}{\xi - z}\right) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{(\xi + z)(\bar{\xi} - \bar{z})}{|\xi - z|^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2}$$

$$P_{a,\rho}(z,\xi) = P_{0,1}\left(\frac{z-a}{\rho}, \frac{\xi - a}{\rho}\right)$$

Prop $P_{a,\rho} \geq 0$, $\forall \xi \in D(a,\rho)$ $P_{a,\rho}(\cdot,\xi) \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ e

$\forall h \in C^0(\partial D(a,\rho))$ $\forall \xi_0 \in \partial D(a,\rho)$

$$\lim_{z \to \xi_0} \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z, a + \rho e^{i\theta}) \, h(a + \rho e^{i\theta}) \, d\theta = h(\xi_0)$$

Dim possiamo supporre $a = 0$ $\rho = 1$. Allora $P_{0,1}(z,\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|} > 0$

$P_{0,1}(\cdot,\xi)$ è la parte reale di una funzione olomorfa $\Rightarrow$ è armonica.

$$P_{0,1}(z,\xi) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{1 + \bar{\xi} z}{1 - \bar{\xi} z}\right) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left(1 + \frac{2 z \bar{\xi}}{1 - z\bar{\xi}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left(1 + 2 \sum_{n\geq 1} z^n \zeta^{-n} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\vartheta})\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left[2\pi + 2\sum_{n\geq 1} \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta}\, d\vartheta}_{=0} \right] z^n \right] = 1$$

Sono tutti $\sin(n\vartheta)$, $\cos(n\vartheta)$

Sia $h \in C^0(\partial D)$ prima $T(z) = \int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\vartheta}) h(e^{i\vartheta})\, d\vartheta - h(\zeta_0)\cdot 1 =$

$$= \int_0^{2\pi} P_{0,1}(z, e^{i\vartheta}) \left[h(e^{i\vartheta}) - h(\zeta_0) \right] d\vartheta$$

$h(\zeta_0) = h(e^{i\vartheta_0})$

Fissato $\varepsilon > 0$ per uniforme continuità di h $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$|h(e^{i\vartheta_1}) - h(e^{i\vartheta_2})| < \varepsilon \text{ se } |e^{i\vartheta_1} - e^{i\vartheta_2}| < \delta$$

Sia $M = \sup_{\zeta \in \partial D} |h(\zeta)|$.

Allora $|T(z)| = \left| \int_{|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| < \delta} \text{---} + \int_{|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| \geq \delta} \text{---} \right| \leq$

$$\leq \varepsilon \cdot \underbrace{\int_{|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| < \delta} P_{0,1}(z, e^{i\vartheta})\, d\vartheta}_{\leq 1} + 2M \int_{|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| \geq \delta} P_{0,1}(z, e^{i\vartheta})\, d\vartheta \leq$$

$$\leq \varepsilon + 2M \int_{|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| \geq \delta} P_{0,1}(z, e^{i\vartheta})\, d\vartheta \xrightarrow[\substack{\varepsilon \to 0 \\ z \to e^{i\vartheta_0}}]{} 0$$

Se $z \to e^{i\vartheta_0} \Rightarrow \int_{|e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}| \geq \delta} P_{0,1}(z, e^{i\vartheta})\, d\vartheta \longrightarrow 0$

Perché nel nucleo di Poisson il denominatore è controllato dagli estremi di integrazione.

Cor (Formula di Poisson) $\Omega \subset \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $D(a,\rho) \subset\subset \Omega$

allora

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z, a+\rho e^{i\theta})\, u(a+\rho e^{i\theta})\, d\theta \qquad \forall z \in D(a,\rho)$$

Dim Chiamiamo u_1 il membro a dx $\Rightarrow$ $u_1 \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$
e $(u - u_1)|_{\partial D} \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u$

Cor Ogni funzione armonica è $\boxed{\text{loc}}$ $\to$ cioè su un disco. la parte reale di una funzione olm e quindi analitica reale.

Dim Il nucleo di poisson lo è

Cor Data $f \in C^0(\partial D(a,\rho))$ esiste unica $u \in C^0(\overline{D(a,\rho)})$ e $u \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ tc $u|_{\partial D} = f$

Dim $$u(z) = \int_0^{2\pi} P_{a,\rho}(z, a+\rho e^{i\theta})\, f(a+\rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

LEZIONE 19

Titolo nota 15/05/2020

Caratterizzazione funzioni armoniche tramite formula integrale

IDEA: Data $f \in \mathcal{O}$ ricordiamo la formula di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad \text{se } z = z_0$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi \qquad \begin{array}{l} \xi = z_0 + re^{i\theta} \\ d\xi = ire^{i\theta} d\theta \end{array}$$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{\cancel{re^{i\theta}}}\, \cancel{ire^{i\theta}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta}_{\text{Media integrale di } f \text{ su } \partial D(z_0,r)}$$

Def $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ha la <u>proprietà della media</u> se

$$\forall z_0 \in \Omega,\ r > 0 \text{ tc } \overline{D(z_0,r)} \subset \Omega \qquad u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

Prop $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continua ha la prop. della media se e solo se è armonica

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ è il conto fatto sopra

$\boxed{\Rightarrow}$ Fissiamo $z_0 \in \Omega$ $r > 0$ tc $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$

poniamo $f = u\big|_{\partial D(z_0,r)}$ (è continua). e

Sia $F \in C^0(\overline{D(z_0,r)}) \cap \mathcal{H}(D(z_0,r))$ estensione armonica di f (ottenuta con la formula di Poisson) tc $F|_{\partial D(z_0,r)} \equiv f$

Allora $F - u$ ha la prop. della media

e $F-u\big|_{\partial D(z_0,r)} \equiv 0$, voglio mostrare che $F-u\big|_{D(z_0,r)} \equiv 0$

Supponiamo invece vero allora $g = \pm(F-u)$ scelto in modo che possiamo assumere che $\exists\ \bar{z} \in D(z_0,r)$ tale che $g(\bar{z}) > 0$

possiamo supporre che $g(\bar{z}) = \max_{z \in D(z_0,r)} g(z)$

Per $0 \leq \rho < < 1$ poniamo $M(\rho) = \sup_{\theta} g(\bar{z} + \rho e^{i\theta})$ per ipotesi

$M(\rho) \leq g(\bar{z})$ ma per la prop. della media.

$M(\rho) \leq g(\bar{z}) \leq M(\rho) \Rightarrow g(\bar{z}) = M(\rho)\ \ \forall \rho$ tc $\overline{D(\bar{z},\rho)} \subset D(z_0,r)$

Ma allora $g(\bar{z}) - g(\bar{z} + \rho e^{i\theta}) \geq 0$ e ha media nulla su $S^1 \ni e^{i\theta}$

$\Rightarrow g(\bar{z}) - g(\bar{z} + \rho e^{i\theta}) \equiv 0$ cioè $g\big|_{D(\bar{z},\rho)} \equiv g(\bar{z})\ \ \forall \rho < < 1$

Allora l'insieme $\{z \in D(z_0,r) \mid g(z) = g(\bar{z})\}$ è aperto e chiuso in $D(z_0,r) \Rightarrow g \equiv g(\bar{z}) > 0$ in $D(z_0,r)$ contro l'ip che $g\big|_{\partial D(z_0,r)} \equiv 0$.

Oss Si possono definire le funzioni armoniche in $\mathbb{R}^n$ con $\Delta u \equiv 0$

Def Una $u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ è <u>pluriarmonica</u> se $\forall a \in \Omega\ \forall v \in \mathbb{C}^n$ la funzione $\zeta \longrightarrow u(a + \zeta v)$ è armonica dove è definita

Oss pluriarmonica $\Rightarrow$ armonica.

Fatto u è pluriarmonica $\Longleftrightarrow$ u è loc. la parte reale di una funzione olomorfa.

Ex 1 $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ una funzione semicontinua superiormente (s.c.s) limitata dall'alto. Allora esiste una succ. $\{u_j\}$ di funzioni continue in Ω, limitate dall'alto tc $u_j \downarrow u$ puntualmente

Hint per $j \geq 1$ si pone $u_j(x) = \sup_{y \in \Omega} \{u(y) - j\|x-y\|\} \geq u(x)$

Def $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ è SUBARMONICA se $\forall a \in \Omega$ $\forall r > 0 : \overline{D(a,r)} \subset \Omega$ $\forall h \in C^0(\overline{D(a,r)}) \cap \mathcal{H}(D(a,r))$ abbiamo che se $h|_{\partial D(a,r)} \geq u|_{\partial D(a,r)} \Rightarrow h|_{D(a,r)} \geq u|_{D(a,r)}$

OSS 1 armonica $\Rightarrow$ sub armonica.

OSS 2 se $\pm u$ sono sub armoniche $\Rightarrow$ u è armonica.

Dim sia h l'estensione armonica di $u|_{\partial D(a,r)}$ $\Rightarrow h|_{\partial D(a,r)} \geq u|_{D(a,r)}$ per sub. di u

inoltre $-h|_{\partial D} = -u|_{\partial D} \Rightarrow -h|_{D(a,r)} \geq -u|_{D(a,r)}$

$\Rightarrow h = u$ su $D(a,r) \Rightarrow u$ è armonica.

Teorema $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto, $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ scs. Sono equivalenti:

(i) u è sub armonica

(ii) $\forall x \in \Omega$ $\forall r > 0$ $\overline{D(x,r)} \subset \Omega \Rightarrow u(x) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D(x,r)} u(z)\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + re^{i\theta})\, d\theta$

((ii) = Prop. della sottomedia)

(iii) $\forall K \subset\subset \Omega$ compatto, $\forall h \in C^0(K) \cap \mathcal{H}(\mathring{K})$ se $h|_{\partial K} \geq u|_{\partial K} \Rightarrow h|_K \geq u|_K$

(iv) $\exists \{u_j\}$ funzioni subarmoniche tc $u_j \downarrow u$

(v) $\forall x \in \Omega$, $\forall \delta < d(x, \partial\Omega)$, $\forall \mu$ misura di Borel positiva su $[0,\delta]$ si ha $u(x) \cdot \int_0^\delta d\mu \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \left[\int_0^{2\pi} u(x + se^{i\theta})\, d\theta \right] d\mu(s)$

(vi) Come (v) ma basta che $\exists$ misura μ

(vii) $\forall x\in\Omega$ $\forall r>0$ tc $\overline{D(x,r)}\subset\Omega$ $\forall y\in D(x,r)$

$$u(y)\le\int_0^{2\pi} P_{x,r}(y,\, x+re^{i\theta})\, u(x+re^{i\theta})\, d\theta$$

(viii) $\forall x\in\Omega$, $\forall r>0$ tc $\overline{D(x,r)}\subset\Omega$ $\quad u(x)\le\dfrac{1}{\pi r^2}\displaystyle\int_{D(x,r)} u(y)\,\overbrace{dy}^{\text{mis. di Leb.}}$

Dim

$$\begin{tikzcd}
(iii) \arrow[dd] & & (vi) \arrow[ll] & (v) \arrow[l] \ \text{Partenza} \\
 & (viii) \arrow[ul] & & \\
(iv) \arrow[r, leftrightarrow] & (i) \arrow[r] & (vii) \arrow[r] & (ii) \arrow[uu] \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

(v) $\Rightarrow$ (vi) ovvio

(vi) $\Rightarrow$ (iii) Siano $K\subset\subset\Omega$ cpt e $h\in C^0(K)\cap\mathcal{H}(\mathring{K})$ tc $h|_{\partial K}\ge u|_{\partial K}$

Poniamo $f=u-h$ per ipotesi $f\le 0$ su $\partial K \overset{?}{\Longrightarrow} f\le 0$ su K

Supponiamo per assurdo che $f>0$ in K da qualche parte.

Se è scs su $K \Rightarrow \exists \max_K f>0$

Sia $L=\{y : f(y)=\max_K f\}\subset\mathring{K}$ perché $f|_{\partial K}\le 0$

e L è chiuso.

Sia $y_0\in L$ il punto più vicino a ∂K

e sia $\rho_0>0$ t $\overline{D(y_0,\rho_0)}\subset\mathring{K}$. $\forall \rho_0\ge\rho>0$ $\exists$ un arco di $\partial D(y_0,\rho)$ non contenuto in $L \Rightarrow f<M$ almeno su un arco di $\partial D(y_0,\rho)$

Ma allora $\displaystyle\int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi} f(y_0+\rho e^{i\theta})\,d\theta\, d\mu(\rho) < 2\pi M\int_0^{\rho_0} d\mu(\rho) =$

$$= 2\pi f(y_0)\int_0^{\rho_0} d\mu(\rho)$$

$$\int_0^{2\pi} f(y_0+\rho e^{i\vartheta})\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} u(y_0+\rho e^{i\vartheta})\,d\vartheta - \int_0^{2\pi} h(y_0+\rho e^{i\vartheta}) =$$

$$= \int_0^{2\pi} u(y_0+\rho e^{i\vartheta})\,d\vartheta - 2\pi\, h(y_0)$$

$$\int_0^{\rho_0}\left[\int_0^{2\pi} u(y_0+\rho e^{i\vartheta})\,d\vartheta\right] d\mu(\rho) - \cancel{2\pi h(y_0)\int_0^{\rho_0} d\mu(\rho)} <$$

$$< 2\pi f(y_0)\int_0^{\rho_0} d\mu(\rho) = 2\pi u(y_0)\int_0^{\rho_0} d\mu(\rho) - \cancel{2\pi h(y_0)\int_0^{\rho} d\mu(\rho)}$$

$$\int_0^{\rho_0}\left[\int_0^{2\pi} u(y_0+\rho e^{i\vartheta})\,d\vartheta\right] d\mu(\rho) < 2\pi u(y_0)\int_0^{\rho_0} d\mu(\rho)$$

e questo contraddice (vi)

(iii) $\Rightarrow$ (i) ovvio

(i) $\Rightarrow$ (vii) Sia $\{u_J\} \subset C^0(\overline{D(x,r)})$ con $u_J \downarrow u$ (Ex)

Sia $h_J \in C^0(\overline{D(x,r)}) \cap \mathcal{H}(D(x,r))$ che estendono u_J

data da $h_J(x) = \int_0^{2\pi} P_{x,r}(y, x+re^{i\vartheta})\, u_J(x+re^{i\vartheta})\, d\vartheta$

allora $u(y) \le u_J(y)$ su $\overline{D(x,r)}$ in particolare $u|_{\partial D(x,r)} \le u_J|_{\partial D(x,r)} = h_J|_{\partial D(x,r)}$

$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ $\forall y \in \overline{D(x,r)}$ $u(y) \le h_J(y) = \int_0^{2\pi} P_{x,r}(y+re^{i\vartheta})\, u_J(x+re^{i\vartheta})\, d\vartheta$

mandando $J \to +\infty$ si ha la tesi.

(vii) $\Rightarrow$ (ii) Basta porre $y=x$ in (vii) perché

$$P_{x,r}(x, x+re^{i\vartheta}) \equiv \frac{1}{2\pi}$$

(ii) $\Rightarrow$ (v) facile perché basta integrare in $d\mu$ (ii) e si ha (v)

(i) $\Rightarrow$ (iv) $u_J = u + \frac{1}{J}$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Fissiamo $\varepsilon>0$, $J \ge 1$, $x \in \Omega$, $r>0$: $\overline{D(x,r)} \subset \Omega$

e $h \in C^0(\overline{D(x,r)}) \cap \mathcal{H}(D(x,r))$ tc $h|_{\partial D(x,r)} \ge u|_{\partial D(x,r)}$

Sia $S_J = \{ e^{i\theta} \in S^1 : u_J(x+re^{i\theta}) \geq h(x+re^{i\theta}) + \varepsilon \}$

Ogni S_J è compatto per scs, $S_{J+1} \subseteq S_J$
e $\bigcap_J S_J = \emptyset$ perché $u_J \downarrow u$ e $u \leq h$ su ∂D

$\Rightarrow \exists J_0$ tc $S_J = \emptyset \quad \forall J \geq J_0$

Quindi $u|_{\partial D} \leq u_J|_{\partial D} < h|_{\partial D} + \varepsilon \quad \forall J \geq J_0$

$\Rightarrow \quad u|_D \leq u_J|_D \leq h|_D + \varepsilon$ perché u_J sono sub armoniche

Con $\varepsilon \to 0 \quad u|_D \leq h|_D$

(ii) $\Rightarrow$ (viii)

$$u(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x+re^{i\theta})\, d\theta$$

moltiplico per r e integro in dr

$$\int_0^{r_0} r\, u(x)\, dr \leq \int_0^{r_0} \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x+re^{i\theta})\, d\theta\, dr$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} r_0^2 u(x) \leq \frac{1}{\cancel{2}\pi} \int_{D(x,r_0)} u(y)\, dy$$

(viii) $\Rightarrow$ (iii) Come (vi) $\Rightarrow$ (iii) con $\mu = r\,dr$

Prop (Prox volta) $u \in C^2(\Omega)$ subarmonica $\iff \Delta u \geq 0$

Cor $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sub armonica. Supponiamo $\exists x_0 \in \Omega$
tc $u(x_0) = \sup_{x \in \Omega} u(x)$. Allora $u \equiv u(x_0)$ (Principio del max)

Dim $D = \{ x \in \Omega \mid u(x) = u(x_0) \}$ è chiuso perché scs e

quanto per (viii). Infatti (viii) $\Rightarrow$ $u(x_0) \leq \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(x_0,r)} u(x)\,dx \leq u(x_0)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(x_0,r)} [u(x)-u(x_0)]\,dx \quad \text{con } u(x)-u(x_0) \leq 0$$

$\Rightarrow u(x)-u(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in D(x_0,r)$

$\Rightarrow$ D è aperto e chiuso $\Rightarrow$ per connessione $\Omega = D$.

LEZIONE 20

Titolo nota 18/05/2020

Lemma (disuguaglianza di Jensen)

Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa, μ una misura di probabilità.
Allora $\forall\, g \in L^1(\mu)$ si ha

$$\varphi\left(\int g(x)\, d\mu(x)\right) \le \int \varphi \circ g(x)\, d\mu(x)$$

Dim Poniamo $x_0 = \int g(x)\, d\mu(x)$ poiché φ è convessa esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tc

$$a x_0 + b = \varphi(x_0) \quad e \quad ax + b \le \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$a\, g(x) + b \le \varphi(g(x)) \quad \forall x$ e poi integriamo e usiamo $\int 1\, d\mu(x) = 1$

$a \underbrace{\int g(x)\, d\mu x}_{\shortparallel} + b \le \int \varphi(g(x))\, d\mu(x)$ perché μ è una prob.

$$\underbrace{\varphi(x_0)}_{\shortparallel\ \varphi\left(\int g(x) d\mu(x)\right)} = a x_0 + b \le \int \varphi(g(x))\, d\mu(x)$$

Cor $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ subarmonica, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e convessa
$\Rightarrow \varphi \circ u$ è subarmonica

Dim basta fa vedere che $\varphi \circ u$ verifica la prop. della sottomedia

$$\varphi(u(x)) \underset{\substack{\downarrow \\ \varphi \text{ è crescente} \\ + u \text{ subarmonica}}}{\le} \varphi\left(\frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} u(y)\, d\,\text{leb.}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Jensen}}}{\le} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(x,r)} \varphi(u(y))\, d\,\text{leb}$$

e questo mi dice che $\varphi \circ u$ verifica la prop. della sottomedia

Prop $u : \Omega \to \mathbb{R}$ $u \in C^2(\Omega)$, u è subarmonica $\iff \Delta u \geq 0$

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ $D(x,r) \subset\subset \Omega$ $h \in C^0(\overline{D}) \cap \mathcal{H}(D)$ con $h|_{\partial D} \geq u|_{\partial D}$

Sappiamo $\Delta(u-h) \geq 0$ su D e $u-h \leq 0$ su ∂D

allora per il principio del max $u-h \leq 0$ su D e ok

$\boxed{\Rightarrow}$ Per assurdo, supp $\exists x_0 \in \Omega$ tc $\Delta u(x_0) < 0 \Rightarrow \Delta u(x) < 0$ $\forall x \in D(x_0, r)$

$\Rightarrow -u$ è sub armonica in $D(x_0, r) \Rightarrow u$ è armonica in $D(x_0, r)$

$\Rightarrow \Delta u(x_0) = 0$

Cor $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow |f|^p$ e $\log|f|$ sono subarmoniche $\forall p \geq 0$

Dim Se $f(x_0) \neq 0$

$$\Delta |f|^p = p^2 |f|^{p-2} \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 \geq 0$$

Modo facile per il conto
$|f|^p = |f|^{2(p/2)} = (f \cdot \overline{f})^{p/2}$
e usare $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ $\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$
e $\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z \partial \overline{z}}$

$$\log|f| = \operatorname{Re}(\log f) \text{ vicino a } x_0$$

Se $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ la prop. della sottomedia in x_0 è ovvia

Def $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ aperto, $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ s.c.s. diremo che u è <u>PLURISUBARMONICA</u> se $\forall z \in \Omega$ $\forall v \in \mathbb{C}^n$

$\zeta \to u(z + \zeta v)$ è subarmonica dove è definita.

Prop $u \in C^2(\Omega)$ è plurisubarmonica $\iff \forall z \in \Omega$ $\forall v \in \mathbb{C}^n$ $\boxed{\displaystyle\sum_{j,h=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_h}(z) v_j \overline{v}_h \geq 0}$

Dim Poniamo $g(\zeta) = u(z + \zeta v)$

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta}(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j}(z + \zeta v) \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta}(z_j + \zeta v_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial \bar z_j}(z+\xi v) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi}(\bar z_j + \bar\xi \bar v_j)}_{=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j}(z+\xi v)\, v_j$$

$$\Delta g(\xi) = 4 \frac{\partial^2 g}{\partial \xi \partial \bar\xi}(\xi) = 4 \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar z_k}(z+\xi v)\, v_j \bar v_k \geq 0$$

Def $u \in C^2(\Omega)$ la FORMA DI LEVI di u in $z \in \Omega$ è

$$L_{u,z} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar z_h}(z) \right)$$ è una matrice hermitiana

Oss La condizione $\boxed{\;\;}$ dice che $L_{u,z}$ è semidef positiva allora u è plurisubarmonica $\Leftrightarrow$ $L_{u,z}$ è semidef pos.

Def $u \in C^2(\Omega)$ è STRETTAMENTE PLURISUBARMONICA se

$L_{u,v}$ è strettamente definita positiva.

Se $\rho \in C^0(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ allora $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) < 0\}$ è un aperto da ρ dovrei poter ricavare le prop. di Ω (ad esempio se è di olomorfia).

C^∞ C^ω = Analitiche Reali

Def Un DOMINIO DI CLASSE C^k (o con bordo di classe C^k) con $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty, \omega\}$ è $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) < 0\}$ con $\rho \in C^k(\mathbb{C}^n)$ tc grad ρ non si annulla mai su $\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \rho(z) = 0\}$
(grad $\rho \neq 0 \Rightarrow \partial\Omega$ è una ipersuperficie reale di classe C^k)

Oss Ω di classe C^k, $x_0 \in \partial\Omega$ lo spazio tg reale a $\partial\Omega$ in x_0 è l'ortogonale al grad $\rho(x_0)$ rispetto al prodotto scalare di $\mathbb{R}^{2n}$

Ex $T^{\mathbb{R}}_{x_0}\partial\Omega = \{ v \in \mathbb{C}^n : Re\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(x_0) v_j\right) = 0 \}$

Def Ω di classe C^k, $x_0 \in \partial\Omega$ lo spazio tg complesso a $\partial\Omega$ in x_0 è

$$T^{\mathbb{C}}_{x_0}\partial\Omega = \{ v \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(x_0) v_j = 0 \}.$$

sottospazio complesso di $\mathbb{C}^n$ di dimensione complessa di dimensione $n-1$

Def Sia $\Omega = \{\rho < 0\}$ un dominio di classe C^2. Diremo che Ω è (LEVI)-PSEUDO-CONVESSO se $L_{\rho,x} \geq 0$ su $T^{\mathbb{C}}_x(\partial\Omega)$ $\forall x \in \partial\Omega$

e FORTEMENTE PSEUDOCONVESSO se $L_{\rho,x} > 0$ su $T^{\mathbb{C}}_x(\partial\Omega)$ $\forall x \in \partial\Omega$.

Oss Se ρ_1 e ρ_2 sono funzioni di definizione di Ω cioè $\Omega = \{\rho_1 < 0\} = \{\rho_2 < 0\} \Rightarrow \{\rho_1 = 0\} = \{\rho_2 = 0\}$

$\overset{ex}{\Rightarrow} \exists h > 0 : \rho_2 = h\rho_1$ vicino a $\partial\Omega$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial z_j} = \frac{\partial h}{\partial z_j}\rho_1 + h\frac{\partial \rho_1}{\partial z_j}$$

$$= \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z_j \partial \bar{z}_h} = \frac{\partial^2 h}{\partial z_j \partial \bar{z}_h}\rho_1 + \frac{\partial h}{\partial z_j}\frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{z}_h} + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_h}\frac{\partial \rho_1}{\partial z_j} + h\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_j \partial \bar{z}_h}$$

Se $x_0 \in \partial\Omega$ $\rho_1(x_0) = 0$

Se $v \in T^{\mathbb{C}}_{x_0}\partial\Omega$ $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho_1}{\partial z_j}(x_0) v_j = 0 = \sum_k \frac{\partial \rho_1}{\partial \bar{z}_j}\bar{v}_j = \overline{\sum_k \frac{\partial \rho_1}{\partial z_j}(x_0) v_j}$

$\Rightarrow$ Se $x_0 \in \partial\Omega$ $v \in T^{\mathbb{C}}_{x_0}\partial\Omega$

$$\Rightarrow \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x_0) v_j \bar{v}_k \overset{\text{tutti gli altri si annullano}}{=} h(x_0)\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x_0) v_j \bar{v}_k$$

Oss Allora la definizione di (Levi) PSEUDOCONVESSO non dipende dalla funzione di definizione.

(Fatti: senza dim)

Fatto 1 Se Ω è un dominio di classe C^2

Allora $\delta_\Omega(z) = \begin{cases} -d(z,\partial\Omega) & \text{se } z \in \Omega \\ d(z,\partial\Omega) & \text{se } z \notin \Omega \end{cases}$ $\in C^2$ in un intorno del $\partial\Omega$ con grad $\delta_\Omega \neq 0$ su $\partial\Omega$

Fatto 2 Se Ω è strettamente pseudoconvesso, allora esiste una funzione di definizione ρ di Ω, tale $L_{\rho,x} > 0$ su tutto $\mathbb{C}^n$ $\forall x \in \partial\Omega$

(per il semidef pos. non è possibile invece)

Fatto 3 (Narasimhan) Sia Ω un dominio C^2 strettamente pseudo-convesso e $x_0 \in \partial\Omega$ un punto. Allora esiste U intorno di x_0 in $\mathbb{C}^n$ e $\varphi: U \to \mathbb{C}^n$ biolomorfismo con l'immagine tc $\varphi(U \cap \Omega)$ è strettamente convesso

Esempio $\Omega = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 + |w|^{-2} < 3\}$ è strettamente pseudo convesso, ma topologicamente è $\mathbb{D} \times$ Anello

Def Diremo che $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ dominio è Hartogs-pseudoconvesso se $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$ (pseudo sub armonica) per qualche μ Minkowsky.

Teorema: Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ di classe C^2, allora sono equivalenti:

(i) Ω è Levi-pseudoconvesso

(ii) Ω è Hartogs-pseudoconvesso

(iii) Ω è $PSH(\Omega)$-convesso

vedremo che sono equi anche se Ω è un dominio qualsiasi

<u>Cor</u> Dominio di olomorfia $\Rightarrow$ pseudoconvesso (qualsiasi)

<u>Dim</u> Se $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow |f| \in PSH(\Omega) \Rightarrow \hat{K}_{PSH(\Omega)} \subseteq \hat{K}_{\Omega}$

e se $\hat{K}_{\Omega}$ è compatto $\Rightarrow \hat{K}_{PSH(\Omega)}$ è compatto

<u>Problema di Levi</u> Vale il viceversa?

LEZIONE 21

Titolo nota 22/05/2020

Def Un disco analitico è una $\varphi: \mathbb{D} \to \mathbb{C}^n$ olomorfa.
Si dice chiuso se φ si estende con continuità al $\partial \mathbb{D}$

Se $\varphi: \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}^n$ è un disco analitico chiuso
poniamo $d = \varphi(\overline{\mathbb{D}})$ $\partial d = \varphi(\partial \mathbb{D})$ e $\mathring{d} = \varphi(\mathbb{D})$

Lemma Se $d \subset \Omega$ è un disco analitico chiuso $\Rightarrow d \subset \widehat{\partial d}_\Omega$

Dim Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $d = \varphi(\overline{\mathbb{D}})$
$\Rightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}})$
per il principio del max $\forall \zeta \in \overline{\mathbb{D}}$, poiché vale $\forall f$
$|f\circ\varphi(\zeta)| \leq \max_{\zeta \in \partial \mathbb{D}} |f(\varphi(\zeta))| \Rightarrow \forall \zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ $\varphi(\zeta) \in \widehat{\partial d}_\Omega$

Lemma $u \in PSH(\Omega)$ $\varphi: \mathbb{D} \to \Omega$ olomorfa $\Rightarrow u \circ \varphi \in SH(\mathbb{D})$

Idea Dim

Supponiamo che u $PSH(\Omega) \cap C^2(\Omega)$
$\Rightarrow u\circ\varphi \in C^2(\Omega)$ quindi basta calcolare $\Delta(u\circ\varphi)$ e controllare il segno

$$\frac{\partial(u\circ\varphi)}{\partial\zeta} = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial z_h}\circ\varphi\right)\frac{\partial\varphi_h}{\partial\zeta} + \left(\frac{\partial u}{\partial \bar z_h}\circ\varphi\right)\underbrace{\frac{\partial\bar\varphi_h}{\partial\zeta}}_{=0} \quad \varphi \text{ è olm}$$

$$\frac{\partial^2(u\circ\varphi)}{\partial\bar\zeta\partial\zeta} = \sum_{h,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar z_k\partial z_h}\circ\varphi\right)\frac{\partial\varphi_h}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar\varphi_k}{\partial\bar\zeta} \geq 0 \quad \text{perché } u \in PSH(\Omega)$$

Fatto $u \in PSH(\Omega) \Rightarrow \exists\, u_\varepsilon \in PSH(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ tc $u_\varepsilon \searrow u$ (si fa per convoluzione)
(Tecnico no dim)

Concludo Lemma: Se $u \in PSH(\Omega)$ fatto + conto prec. $u_\varepsilon \circ \varphi \in SH(\mathbb{D})$
e $u_\varepsilon\circ\varphi \searrow u\circ\varphi$ e che il limite dc di SH è SH
l'abbiamo visto quindi $u\circ\varphi \in SH(\mathbb{D})$.

Teorema Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Allora sono equivalenti

(1) $\forall$ famiglia $\{d_\alpha\}$ di dischi analitici chiusi contenuti in Ω.
Se $\bigcup_\alpha \partial d_\alpha \subset\subset \Omega$ allora $\bigcup_\alpha d_\alpha \subset\subset \Omega$ (Kontinuitätsatz)

(2) $\forall \mu$ Minkowski, $\forall d$ disco analitico chiuso in Ω $\mu_\Omega(\partial d) = \mu_\Omega(d)$

(3) $\exists \mu$ " " " " " "

(4) $\exists\ \phi \in PSH(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ tc $\forall c \in \mathbb{R}$ $\Omega_c = \{z \in \Omega \mid \phi(z) < c\} \subset\subset \Omega$

[Def una $\phi \in C^0(\Omega)$ tc $\Omega_c \subset\subset \Omega$ $\forall c \in \mathbb{R}$ è un' ESAUSTIONE
la ϕ di sopra è un'esaustione PSH]

(5) $\exists$ esaustione $\phi \in C^\infty$ strettamente PSH

(6) Ω è Hartogs-pseudoconvesso: $\exists \mu$ Mink tc $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$

(7) $\forall \mu$ Mink $-\log(\mu_\Omega) \in PSH(\Omega)$

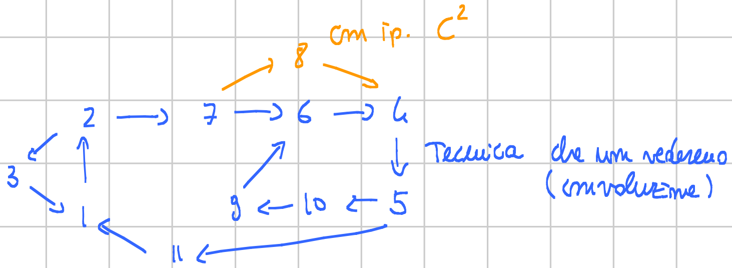
(8) [Solo se $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ è di classe C^2] Ω è di Levi pseudoconvesso

(9) Ω ammette una esaustione con sottodomini Hartogs pseudoconvessi,
cioè $\exists \{\Omega_j\}$ domini Hartogs pseudoconv. tc $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ e $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$
e $\Omega_j \subset\subset \mathbb{C}^n$

(10) Ω ammette un'esaustione con sottodomini di classe C^∞ strett. pseudoconv.

(11) Ω è $PSH(\Omega)$-convesso

Dim Schema



(5)⇒(10) Sia ϕ esaustione C^∞ strettamente PSH ⇒ $\Omega_j = \{\phi < j\}$ $j \in \mathbb{N}$

⇒ gli Ω_j sono strettamente pseudoconvessi (perché $\phi - j \in C^\infty$ e la sua forma di Levi è def pos ovunque)

e sono ovviamente un'esaustione di Ω.

[Teo (Sard): Se $\phi \in C^\infty(\Omega)$ $\Omega \in \mathbb{R}^N$ dominio, ϕ una costante, allora l'insieme dei valori critici di ϕ ha misura nulla in $\mathbb{R}$]

Usando Sard si sta tranquilli che $\nabla\phi$ non si annulli sul $\partial\Omega_j$

$(10) \Rightarrow (9)$ Segue da strettamente pseudo convesso $\Rightarrow$ Hartogs pseudoconvesso e questo seguirà da $(8) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (6)$ (ascolta audio)

$(9) \Rightarrow (6)$ Sia $\mu = \|\cdot\|$ Da $(6) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (7)$ $-\log \mu_{\Omega_j} \in PSH(\Omega_j)$ $\forall j$

$$\Omega_j \subset \Omega_{j+1} \Rightarrow \mu_{\Omega_j} \le \mu_{\Omega_{j+1}} \Rightarrow -\log \mu_j \ge -\log \mu_{j+1} \ge \ldots \ge -\log \mu_\Omega$$

$\Rightarrow \{-\log \mu_j\}$ è una succ. di funzioni PSH che $\downarrow$ verso $-\log \mu_\Omega$

$\Rightarrow -\log \mu_\Omega$ è PSH

$(6) \Rightarrow (4)$ Sia $\phi(z) = -\log \mu_\Omega(z) + \|z\|^2 \in PSH \cap C^0(\Omega)$

esaustione perché $\phi \ge -\log \mu_\Omega(z) \Rightarrow \{\phi < j\} \subset\subset \Omega \Rightarrow \mu_\Omega \ge e^{-\phi}$

e il termine $\|z\|^2 \Rightarrow \{\phi < j\} \subset\subset \mathbb{C}^n$ è limitato

$(1) \Rightarrow (2)$ Per contraddizione, supponiamo esista un disco d t.c.

$\mu_\Omega(d) < \mu_\Omega(\partial d)$. Sia $x_0 \in \partial\Omega$ t.c. $\mu_\Omega(p_0) = \mu(p_0 - x_0)$

poniamo $d_j = d + \left(1 - \frac{1}{j}\right)(x_0 - p_0)$

cioè d_j è dato da $\varphi_j = \varphi + \left(1 - \frac{1}{j}\right)(x_0 - p_0)$

Abbiamo che $\bigcup_j \partial d_j \subset\subset \Omega$ perché

$\mu_\Omega(\partial d) > \mu(x_0 - p_0)$ quindi sommando a ∂d un oggetto + piccolo di $(x_0 - p_0)$ non arriviamo a $\partial\Omega$

ma $\bigcup_j d_j \ni \{p_0 + \left(1 - \frac{1}{j}\right)(x_0 - p_0)\} \to x_0 \in \partial\Omega \Rightarrow \bigcup_j d_j \not\subset\subset \Omega$

e questo contraddice (1)

$(2) \Rightarrow (3)$ ovvio

$(3) \Rightarrow (1)$ Per assurdo $\exists\, d_j$ con $\mu_\Omega(\partial d_j) \ge \delta_0 > 0$ ma $\mu_\Omega(d_j) \to 0$ contrad(3)

$(2) \Rightarrow (7)$ Fissiamo μ Mink, $z_0 \in \Omega$, $v_0 \in \mathbb{C}^n$ Vogliamo

$\psi(\zeta) = -\log \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0)$ è subarmonica

prendendo $\|v_0\| << 1$ possiamo supporre che $\psi \in C^0(\overline{\mathbb{D}})$

Basta dimostrare per le condiz. delle sub. che

$$\psi(0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})\, d\theta \quad \text{per l'arbitrarietà di } z_0 \text{ e } v_0$$

Sia $h \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}})$ l'estensione armonica di ψ e sia $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^0(\overline{\mathbb{D}})$

tc $h = \operatorname{Re} f$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e poniamo $f_\varepsilon = f + \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad h_\varepsilon = \operatorname{Re} f_\varepsilon$

$\Rightarrow \psi < h_\varepsilon < \psi + \varepsilon$ su $\partial\mathbb{D}$

Sia $v \in \mathbb{C}^n$ con $\mu(v) = 1$ e sia d il disco

$$\zeta \longrightarrow z_0 + \zeta v_0 + e^{-f_\varepsilon(\zeta)} \cdot v$$

Vogliamo far vedere che $d \subset \Omega$. Sul ∂d

$$\mu\left(z_0 + \zeta v_0) - (z_0 + \zeta v_0 + e^{-f_\varepsilon(\zeta)} v)\right) = \mu\left(e^{-f_\varepsilon(\zeta)} v\right) \overset{\mu - \text{Mink}}{=}$$

$$= |e^{-f_\varepsilon(\zeta)}| \cdot \mu(v) = e^{-h_\varepsilon(\zeta)} \overset{\zeta \in \partial\mathbb{D}}{<} e^{-\psi(\zeta)} = \mu_\Omega(z_0 + \zeta v_0)$$

$$\Rightarrow z_0 + \zeta v_0 + e^{-f_\varepsilon(\zeta)} v \in \Omega \quad \text{cioè } \partial d \subset \Omega$$

In particolare $z_0 + e^{-f_\varepsilon(0)} v \in \Omega \quad \forall\, \mu(v) = 1$

$$\Rightarrow \mu_\Omega(z_0) \geq |e^{-f_\varepsilon(0)}| = e^{-h_\varepsilon(0)}$$

Mettendo i $-\log$!

$$\Rightarrow \psi(0) \leq -\log e^{-h_\varepsilon(0)} = h_\varepsilon(0) \overset{h_\varepsilon \text{ è armonica}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_\varepsilon(e^{i\theta})\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta})\, d\theta + \varepsilon$$

Per arbitrarietà di ε si ha la tesi.

(7) $\Rightarrow$ (6) OVVIO

(5) $\Rightarrow$ (11) Sia $K \subset\subset \Omega$ cpt, $\phi \in C^\infty$, prendo come esaustione. $\exists c > 0$

tc $K \subset \Omega_c = \{\phi < c\} \Rightarrow \hat{K}_{PSH(\Omega)} \subset \Omega_c \subset\subset \Omega$

(ii) ⇒ (i) Sia $d = \varphi(\overline{\mathbb{D}}) \subset \Omega$ disco analitico chiuso, $u \in PSH(\Omega)$

lemma $u \circ \varphi \in SH(\mathbb{D}) \Rightarrow \forall \zeta \in \overline{\mathbb{D}} \quad |u \circ \varphi(\zeta)| \leq \max\limits_{\zeta \in \partial \mathbb{D}} |u \circ \varphi(\zeta)|$

$\Rightarrow d \subseteq \widehat{\partial d}_{PSH(\Omega)} \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha} d_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha} \widehat{\partial d}_{PSH(\Omega)} \subseteq \widehat{\left(\bigcup\limits_{\alpha} \partial d_\alpha\right)}_{PSH(\Omega)} \overset{(ii)}{\subset\subset} \Omega$

e questa è la tesi

Prossima lezione pezzo con $\Omega \in \mathbb{C}^2$

$\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ dominio di classe C^2

(7) $\forall \mu$ Minkowski $-\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$

(8) Ω è Levi pseudoconvesso $\iff$ $\forall$ funzione di definizione ρ $\forall x \in \partial\Omega$

$L_{\rho,x} \geq 0$ su $T_x^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$ $\qquad$ $(7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (4)$ ok

(4) $\exists$ esaustione plurisubarmonica di Ω

Oss : in generale per vedere se Ω è pseudoconvesso basta controllare cosa succede "vicino" a $\partial\Omega$, cioè in $\Omega \setminus K$ dove $K \subset\subset \Omega$ cpt qualsiasi

(10) Ω ammette un'esaustione con domini C^∞ strettamente pseudoconvessi.

Dim: $(7) \Rightarrow (8)$ $\mu = \|\cdot\|$. $\mu_\Omega = d(\cdot, \partial\Omega)$ è di classe C^2 vicino a $\partial\Omega$

Inoltre $\rho(z) = \begin{cases} -\mu_\Omega(z) & \text{se } z \in \bar\Omega \\ d(z,\partial\Omega) & \text{se } z \notin \Omega \end{cases}$ è una funzione di definizione per Ω

Per (7) $\varphi = -\log \mu_\Omega \in PSH(\Omega)$

$$L_{\varphi,z}(v) = \sum_{j,h} \left(-\frac{1}{\mu_\Omega(z)} \frac{\partial^2 \mu_\Omega}{\partial z_j \partial \bar z_h}(z) + \frac{1}{\mu_\Omega(z)^2} \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j}(z) \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial \bar z_h}(z) \right) v_j \bar v_h \geq 0$$

se $v \in \mathbb{C}^n$ e $z \in \Omega$ abb vicino a $\partial\Omega$ in modo che μ_Ω sia C^2 in z.

Moltiplichiamo per μ_Ω e restringiamoci ai v t.c. $\left\{ \sum_j \frac{\partial \mu_\Omega}{\partial z_j}(z) v_j = 0 \right\} = T_z^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$

$\Rightarrow$ per questi v $\displaystyle\sum_{j,h} \frac{\partial^2(-\mu_\Omega)}{\partial z_j \partial \bar z_h}(z) v_j \bar v_h \geq 0$.

Mandando $z \to x \in \partial\Omega$ allora $T_z^{\mathbb{C}}(\partial\Omega) \to T_x^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$ e

$$\sum_{j,h} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar z_h}(x) v_j \bar v_h \geq 0 \quad \forall v \in T_x^{\mathbb{C}}(\partial\Omega).$$

$(8) \Rightarrow (4)$ $\mu = \|\cdot\|$, $\rho = -\mu_\Omega$ funz di definizione, $u = -\log \mu_\Omega$

Essendo Ω limitato $\Rightarrow$ u è un'esaustione. Per assurdo, supponiamo che u non sia psh. Possiamo assumere che non lo sia vicino a $\partial\Omega$, dove è C^2

Deve esistere $z_0 \in \Omega$ t.c. $L_{u,z}$ non sia semidefinita positiva, cioè $\exists v_0 \in \mathbb{C}^n$:

$$0 > L_{u,z_0}(v_0) = \sum_{j,h} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar z_h}(z) v_{0j} \bar v_{0h} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \bar\xi}\left(-\log \mu_\Omega(z_0 + \xi v_0)\right)\Big|_{\xi=0}}_{} = -\lambda \text{ con } \lambda > 0$$

Poniamo $\varphi(\xi) = \log \mu_\Omega(z_0 + \xi v_0)$. Sviluppo di Taylor in $\xi = 0$:

$$\log \mu_\Omega(z_0+\xi v_0) = \varphi(\xi) = \varphi(0) + 2\,\mathrm{Re}\Big\{ \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(0)}_{A/2}\,\xi + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}(0)}_{B/2}\,\xi^2 \Big\} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\bar\xi}(0)|\xi|^2 + o(|\xi|^2)$$

$$= \log\mu_\Omega(z_0) + \mathrm{Re}\{A\xi + B\xi^2\} + \lambda|\xi|^2 + o(|\xi|^2).$$

Sia $x_0 \in \partial\Omega$ $\mu_\Omega(z_0) = \|x_0 - z_0\|$ e poniamo $w_0 = x_0 - z_0$; $z_0 + w_0 \in \partial\Omega$ e $\|w_0\| = \mu_\Omega(z_0)$.

Poniamo $\psi(\xi) = z_0 + \xi v_0 + w_0 \exp(A\xi + B\xi^2)$. $\psi(0) = z_0 + w_0 \in \partial\Omega$. Ma

$$\mu_\Omega(\psi(\xi)) \geq \mu_\Omega(z_0 + \xi v_0) - \|w_0\|\,|\exp(A\xi+B\xi^2)|$$

$$= \mu_\Omega(z_0)\,|\exp(A\xi+B\xi^2)|\,\exp(\lambda|\xi|^2 + o(|\xi|^2)) - \|w_0\|\,|\exp(A\xi+B\xi^2)|$$

$$= \mu_\Omega(z_0)\,|\exp(A\xi+B\xi^2)|\,\big[\exp(\lambda|\xi|^2 + o(|\xi|^2)) - 1\big]$$

se $|\xi| \ll 1$ $\quad \geq \mu_\Omega(z_0)\,|\exp(A\xi+B\xi^2)|\,\big[\exp\big(\tfrac{\lambda}{2}|\xi|^2\big) - 1\big] > 0$ se $\xi \neq 0$.

$\Rightarrow \psi(\xi) \in \Omega$ per $0 < |\xi| \ll 1$.

In particolare, $\mu_\Omega \circ \psi$ ha un minimo locale in $\xi = 0$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial(\mu_\Omega\circ\psi)}{\partial\xi}(0) = \sum_j \frac{\partial\mu_\Omega}{\partial z_j}(\underset{x_0}{\psi(0)})\,\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi}(0) \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial\xi}(0) \in T^{\mathbb{C}}_{x_0}(\partial\Omega)$$

Sviluppo di Taylor di $\mu_\Omega\circ\psi$:

$$\mu_\Omega\circ\psi(\xi) = \underbrace{\mathrm{Re}\Big(\frac{\partial^2(\mu_\Omega\circ\psi)}{\partial\xi^2}(0)\,\xi^2\Big)}_{\text{non ha segno costante}} + \frac{\partial^2(\mu_\Omega\circ\psi)}{\partial\xi\partial\bar\xi}(0)\,|\xi|^2 + \underbrace{o(|\xi|^2)}_{\text{piccolo per } 0<|\xi|\ll 1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2(\mu_\Omega\circ\psi)}{\partial\xi\partial\bar\xi}(0) > 0 \qquad = \sum_{j,h} \frac{\partial^2\mu_\Omega}{\partial z_j\partial\bar z_h}(x_0)\,\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi}(0)\,\overline{\frac{\partial\psi_h}{\partial\xi}(0)} > 0$$

$$= -L_{-\mu_\Omega, x_0}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(0)\Big)$$

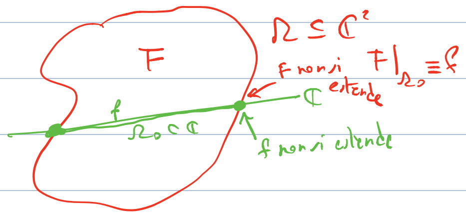
contro l'ipotesi che $L_{-\mu_\Omega, x_0}$ fosse ≥ 0 su $T^{\mathbb{C}}_{x_0}(\partial\Omega)$. $\square$

· Visto: dominio di olomorfia è pseudoconvesso.

Problema di Levi: Pseudoconvesso $\Rightarrow$ dominio di olomorfia?

TEO (Hörmander) $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ pseudoconvesso. Siano $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(\Omega)$ con la cond. di comp. $\frac{\partial f_j}{\partial \bar z_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \bar z_j}$ $\forall j,k$. Poniamo $f = \sum_j f_j \, d\bar z_j$

[cond. comp. $\Leftrightarrow \bar\partial f = 0$] Allora $\underbrace{\exists\, u \in C^\infty(\Omega)}_{\text{unica a meno di funzioni olomorfe}} : \bar\partial u = f$ $\left[\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial \bar z_j} = f_j\right]$



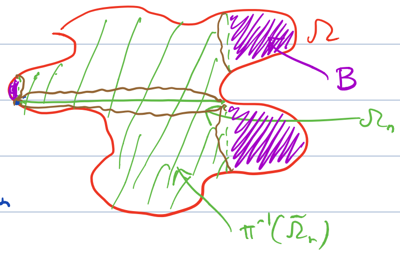
TEO: $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ pseudoconvesso. Sia $\Omega_n = \Omega \cap \{z_n = 0\}$ e $\tilde\Omega_n = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid (z', 0) \in \Omega\}$

Sia $f \in \mathcal{O}(\tilde\Omega_n)$. Allora $\exists\, F \in \mathcal{O}(\Omega)$: $F(z', 0) = f(z')$ $\forall z' \in \tilde\Omega_n$.

Dim: Sia $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ proiezione $\pi(z', z_n) = z'$ $\quad z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$

$B = \Omega \setminus \pi^{-1}(\tilde\Omega_n) = \{z \in \Omega \mid \pi(z) \notin \tilde\Omega_n\}$ chiuso in Ω $\quad \Omega_n$ chiuso in Ω

e $B \cap \Omega_n = \emptyset$. Quindi hanno int ap (in Ω) disgiunti; ci basta un intorno di Ω_n contenuto in $\pi^{-1}(\tilde\Omega_n)$ disgiunto da $\underbrace{B}_{\text{un int di } B}$



Sia $\Psi \in C^\infty(\Omega)$ con $\Psi \equiv 1$ in un intorno di Ω_n e $\Psi \equiv 0$ su B. e $0 \leq \Psi \leq 1$. Poniamo

$F(z) = \Psi(z) f(\pi(z)) + z_n u(z)$ per qualche $u \in C^\infty(\Omega)$. Se $z' \in \tilde\Omega_n$

$F(z', 0) = 1 \, f(z') + 0 = f(z') \Rightarrow F$ è un'estensione di f.

Vogliamo u in modo che F sia olomorfa.

$\Leftrightarrow 0 = \bar\partial F = f(\pi(z)) \bar\partial \Psi + z_n \bar\partial u \Leftrightarrow \bar\partial u = -\frac{f(\pi(z)) \bar\partial \Psi}{z_n}$

Ma $\bar\partial \Psi \equiv 0$ in un intorno di $\Omega_n = \{z_n = 0\} \Rightarrow -\frac{(f \circ \pi) \bar\partial \Psi}{z_n} \in C^\infty(\Omega)$

e soddisfa $\bar\partial \left(-\frac{(f \circ \pi) \bar\partial \Psi}{z_n} \right) \equiv 0$ (Schwarz)

Hörmander $\Rightarrow u$ esiste. $\square$

Cor: $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ pseudoconvesso è dominio di olomorfia.

Dim: Per induzione su n. Per $n=1$, ok. (tutti i domini di $\mathbb{C}$ sono di olom).
Sia vero per $n-1$, e $x \in \partial\Omega$; vogliamo una $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ che non si estende oltre x.
A meno di traslaz possiamo supp $x = 0$. Sia $H \subset \mathbb{C}^n$ iperpiano con $0 \in H$
e tc $0 \in \partial(H \cap \Omega)$; a meno di rotazione possiamo supp $H = \{z_n = 0\}$.
Poniamo $\Omega_n = H \cap \Omega$ e $\tilde{\Omega}_n = \{z' \in \mathbb{C}^n \mid (z', 0) \in \Omega\}$. $\tilde{\Omega}_n$ è pseudoconvesso
(per esempio perché una esaustione psh di Ω fornisce un'esa psh di $\tilde{\Omega}_n$)
Per ip. ind è dominio di olomorfia $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega}_n)$ che non si estende
oltre $0' \in \partial\tilde{\Omega}_n$. Teo $\Rightarrow \exists F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tc $F(z', 0) = f(z')$ $\forall z' \in \tilde{\Omega}_n$
e quindi F non si estende oltre $0 = x$. $\square$

LEZIONE 23

Titolo nota 29/05/2020

Data $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ olomorfa, $V = \{z \in \mathbb{C}^n, f(z) = 0\}$

esempio di SPAZIO ANALITICO (potrebbe avere singolarità)

Se $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ polinomio, allora si parla di VARIETÀ ALGEBRICA.

Idea: Associamo a $V \subseteq \mathbb{C}^n$ l'insieme $I(V) = \{g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \mid g|_V \equiv 0\}$

che è un ideale dell'Anello $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$

le proprietà geometriche di $V \leftrightsquigarrow$ prop. algebriche di $I(V)$

· Sia $\mathcal{O}_0 = \mathbb{C}\{z_1, \dots z_n\}$ lo spazio dei germi nell'origine di funzioni olomorfe. $\Leftrightarrow$ spazio delle serie di potenze convergenti in 0

Prop $\mathcal{O}_0$ è un anello LOCALE (cioè ha un unico ideale massimale)

Dim $\mathfrak{M}_0 = \{\underline{f} \in \mathcal{O}_0 \mid f_0(0) = 0\}$ è un ideale

m gotica

Se $g \notin \mathfrak{M}_0 \Rightarrow g(0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g} \in \mathcal{O}_0 \Rightarrow \underline{g}$ è un'unità di $\mathcal{O}_0$ (el. invertibile)

Quindi nessun ideale proprio può contenere elementi di $\mathcal{O}_0 \setminus \mathfrak{M}_0$

cioè $\mathfrak{M}_0$ è l'unico ideale massimale.

Def Sia $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\alpha} a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{O}_0$, l'ordine di f $\operatorname{ord} \underline{f}$ $\min\{|\alpha| \mid a_\alpha \neq 0\}$

OSS Chiaramente $\underline{f}$ è un'unità $\Leftrightarrow \operatorname{ord} \underline{f} = 0$

Diremo che $\underline{f}$ è normalizzata (rispetto a z_n) se $a_{(0,\dots,0,\operatorname{ord}\underline{f})} = 1$

cioè se

$$\underline{f} = z_n^{\operatorname{ord}\underline{f}} + \sum_{\substack{|\alpha| = \operatorname{ord}\underline{f} \\ \alpha \neq (0,\dots,0,\operatorname{ord}\underline{f})}} a_\alpha z^\alpha + O(\|z\|^{\operatorname{ord}\underline{f}+1})$$

Ex $\forall f \in \mathcal{O}_0$ $\exists A \in GL(n, \mathbb{C})$ tc $f \circ A$ sia normalizzata rispetto a z_n

Def $z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^n$ con $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ $\mathcal{O}'_0 = \mathbb{C}\{z_1 \dots z_{n-1}\}$
un polinomio di Weierstrass è polinomio monico $W \in \mathcal{O}'_0[z_n]$
della forma

$$W(z) = z_n^k + a_{k-1}(z') z_n^{k-1} + \dots + a_0(z')$$

con $a_{k-1}(0) = \dots = a_0(0) = 0$

Teo (Teorema di preparazione di Weierstrass) Sia $f \in \mathcal{O}_0$ normalizzata di ordine $k \geq 0$. Allora $\exists!$ unità $u \in \mathcal{O}_0 \setminus \mathfrak{m}_0$ e polinomio di Weierstrass W tale che $f = uW$

Dim Per $k=0$ è ovvio ($f = u$ e $W=1$ è l'unico pol. di grado 0 è 1)
Sia $k \geq 1 \Rightarrow f(0) = 0$. Essendo f normalizzata

$$f(0', z) = z_n^k + O(z_n^{k+1}) = z_n^k (1 + o(z_n))$$

e in $z_n = 0$ uno zero di ordine k ed esiste $r > 0$
tc $f(0', re^{i\theta}) \neq 0$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ (se $|\zeta| \leq r$ $f(0, \zeta) = 0 \Leftrightarrow \zeta = 0$)
(l'origine è uno zero isolato)

$\Rightarrow \exists \delta > 0$: $f(z', re^{i\theta}) \neq 0$ $\forall \|z'\| < \delta$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$.
Il principio argomento

$$z' \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)} d\zeta$$

conta il numero di zeri in $D(0,r)$ di $f(z', \cdot)$
$\Rightarrow$ dip con continuità da z'
$\Rightarrow$ è costante.

ponendo $z' = 0'$ vediamo che la costante è k.

Individuiamo con $\alpha_1(z'), \dots, \alpha_k(z') \in D(0,r)$ gli zeri di $f(z', \cdot)$

ripetuti con molteplicità. $\alpha_1 \dots \alpha_k$ non sono funzioni ben def. su $\{\|z'\| < \delta\}$. Ma $\forall \varphi \in \mathcal{O}(\overline{D(0,r)})$ la funzione

$$J_\varphi(z') = \sum_{j=1}^{k} \varphi(\alpha_j(z')) \quad \text{è ben definita}$$

è olomorfa in z' perché

$$J_\varphi(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \varphi(\zeta) \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta)}{f(z', \zeta)} d\zeta \quad \text{per teo dei residui.}$$

Poniamo $W(z', z_n) = \prod_{j=1}^{k} (z_n - \alpha_j(z')) =$

$$= z_n^k - J_1(z') z^{k-1} + \dots + (-1)^k J_k(z')$$

con $J_1(z') = \alpha_1(z') + \dots + \alpha_k(z')$

$J_k(z') = \alpha_1(z') \cdot \dots \cdot \alpha_k(z')$

$W \in \mathcal{O}_0'[z_n]$ monico, siccome $\alpha_1(0') = \dots = \alpha_k(0') = 0$

$\Rightarrow W$ è di Weierstrass. perché $J_h(0') = 0 \quad \forall h = 1, \dots, k$

poniamo $u = \frac{f}{W}$. Per ogni z' fissato

$u(z', \cdot)$ è olomorfa fuori da $\{\alpha_j(z')\}$

ma per costruzione gli zeri di f e di W (gli $\alpha_j(z')$) sono gli stessi con le stesse molteplicità quindi sono singolarità rimovibili

$\Rightarrow u(z', \cdot) \in \mathcal{O}(\overline{D(0,r)})$. Allora $u(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{u(z', \zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta$

siccome u è olomorfa in un intorno di $\{\|z'\| < \delta\} \times \{|z_n| = r\}$

$\Rightarrow u \in \mathcal{O}(\{\|z'\| < \delta\} \times \{|z_n| < r\})$ con $u(0) = 1$

$\Rightarrow u \in \mathcal{O}_0 \setminus \mathcal{M}_0$ come voluto

<u>UNICITÀ</u> Supponiamo $u_1 W_1 = u_2 W_2 \quad (*)$ ponendo $z' = 0$ si ha

$u_1(0', z_n) z_n^h = u_2(0', z_n) z_n^h \Rightarrow u_1(0', z_n) \equiv u_2(0', z_n)$

Derivando $(*)$ rispetto a z_j e ponendo $z' = 0$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_J}(0',z_n)\, z_n^h + \underbrace{u_1(0',z_n)}\,\frac{\partial W_1}{\partial z_J}(0',z_n) = \frac{\partial u_2}{\partial z_J}(0',z_n)\, z_n^h + \underbrace{u_2(0',z_n)}\,\frac{\partial W}{\partial z_J}(0',z_n)$$

inoltre $\deg \frac{\partial W_i}{\partial z_J} \leq k-1 \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial z_J}(0',z_n) = \frac{\partial u_2}{\partial z_J}(0',z_n)$

continuando a derivare si ottiene $\frac{\partial^\alpha u_1}{\partial z^\alpha}(0',z_n) = \frac{\partial^\alpha u_2}{\partial z^\alpha}(0',z_n) \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ ok

Teorema (divisione di Weierstrass)

Siano $f \in \mathcal{O}_0$ e W un polinomio di Weierstrass.
Allora esistono unici $q \in \mathcal{O}_0$ e $r \in \mathcal{O}_0'[z_n]$ (non nec. di W.)
con $\deg_{z_n} r < \deg_{z_n} W$ tali che $f = qW + r$

Dim Se $\deg W = 0$ $W = 1$ ovvio.
Sia $k = \deg_{z_n} W \geq 1$ Scegliamo $\delta > 0$ e $r > 0$ t.c.
W non si annulla in $\{\|z'\| < \delta\} \times \{|z_n| = r\}$. Poniamo

$$q(z',z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(z',\zeta)}{W(z',\zeta)(\zeta - z_n)}\, d\zeta \quad \text{e}$$

poniamo $r = f - qW$
chiaramente q e $r \in \mathcal{O}(B^{n-1}(0',\delta) \times D(0,r))$.

$$r(z',z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\left[f(z',\zeta) - W(z',z_n)\frac{f(z',\zeta)}{W(z',\zeta)}\right]\frac{d\zeta}{\zeta - z_n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(z',\zeta)}{W(z',\zeta)}\underbrace{\left[\frac{W(z',\zeta) - W(z',z_n)}{\zeta - z_n}\right]} d\zeta$$

$$\parallel$$

$$\frac{\zeta^k - z_n^k + \sum_{J=0}^{k-1} a_J(z')(\zeta^J - z_n^J)}{\zeta - z_n}$$

$J=0$ non c'è perché $a_0(z')=0$

$\parallel \to$ dividendo $\frac{\zeta^J - z_n^J}{\zeta - z_n}$

$=$ polinomio di grado $\leq k-1$ in ζ e z_n

$\Rightarrow r \in \mathcal{O}_0'[z_n]$ di grado $\leq k-1$

UNICITÀ $q_1 W + r_1 = q_2 W + r_2 \Leftrightarrow r_1 - r_2 = (q_1 - q_2) W$

$r_1 - r_2$ ha $\deg_{z_n} \leq k-1$

e W ha almeno un grado z_n almeno di $k \Rightarrow q_1 - q_2 \equiv 0 \Rightarrow r_1 - r_2 \equiv 0$

Fatto algebrico: R anello a fattorizzazione unica $\Rightarrow R[z]$ a fattorizzazione unica.

Teo: O_0 è un anello a fattorizzazione unica.

Oss: $V = \{f = 0\}$ Fatt unica $\Rightarrow f = u \cdot f_1 \dots f_k$ con $\exists!$ $f_1 \dots f_k$ irriducibili

$\Rightarrow V = \bigcup_{j=1}^{k} \{f_j = 0\}$ dec. in COMPONENTI IRRIDUCIBILI

Dim: per induzione su n

$f = z^k \cdot u$ decomposizione unica.

Supponiamo per ipotesi induttiva O_0' sia dom fatt. unica.

Sia $f \in O_0$ possiamo supporre che f sia normalizzata di ordine $k \geq 1$. per il Teo di prep. di W. $f = u \cdot W$ con u unità e W Weierstrass.

Lemma 1: f (come sopra) è irriducibile in $O_0 \Leftrightarrow W$ è irriducibile in $O_0'[z_n]$

Per ipotesi induttiva $W = W_1 \dots W_r$ fattorizzazione in irriducibili di $O_0'[z_n]$ che è a fatt. unica per ip induttiva + fatto.

Lemma 2: Presi $p_1, p_2 \in O_0'[z_n]$ tali che $W = p_1 \cdot p_2$ sia di W. allora esiste $u \in O_0'$ tali che $u p_1$ e $\frac{1}{u} p_2$ sono di W.

Quindi per il Lemma 2 possiamo scrivere $f = \tilde{u} W_1 \dots W_r$ con $W_1 \dots W_r$ Weierstrass (non sono gli stessi W_i) e irriducibili in $O_0'[z_n]$ allora per il Lemma 1 $W_1, \dots, W_r$ sono irriducibili in O_0 quindi abbiamo una decomposizione di f in irriducibili.

UNICITÀ Sia $f = W_1 \dots W_e$ un'altra dec. in irriducibili

Lemma 3: Se $f = g_1 g_2$ è normalizzata $\Rightarrow$ anche g_1 e g_2 sono normalizzati.

Quindi TPW $f = u' W_1' \cdots W_\ell'$ con $W_1', \dots, W_\ell'$ di W. e irriducibile.
(per il Lemma 1). Per unicità di TPW

$\Rightarrow W_1 \dots W_r = W_1' \dots W_\ell'$ in $\mathcal{O}_0'[z_n]$ che è a fatt. unica

quindi $\ell = r$ e i fattori sono gli stessi a meno di unità.

e questo conclude la dimostrazione.

Usando il teorema di divisione di W. è possibile dimostrare:

Teorema $\mathcal{O}_0$ è Noetheriano (ogni ideale è finitamente generato)

Questo implica $I(V)$ si possono descrivere con un numero finito di elementi

Lemma 4 Siano $f \in \mathcal{O}_0'[z_n]$ $W \in \mathcal{O}_0'[z_n]$ Weierstrass, $g \in \mathcal{O}_0$: $f = g \cdot W$

Allora $g \in \mathcal{O}_0'[z_n]$ (segue da TDW).