A.A. 2019/2020
Analisi Convessa

Claudio Saccon

Appunti completi del corso

Matteo Stefanini

Questi appunti sono stati presi direttamente a lezione e non sono stati revisionati quindi è molto probabile che siano presenti degli errori. Se volete potete segnalarmi quelli presenti e vi manderò nel più breve tempo possibile la versione rimodificata. L'indice è stato creato copiandolo dal registro delle lezioni. Le registrazioni audio/video delle lezioni saranno presenti, fino a che sarò possibilitato a tenerli in questa cartella online (Link). Spero che vi siano d'aiuto e buono studio!

Indice

LEZIONE 01

Titolo nota 17/03/2020

ASSENTE

LEZIONE 02

Titolo nota 17/03/2020

ASSENTE

LEZIONE 03

Titolo nota 04/03/2020

Claudio saccon@unipi.it

PROP

Se $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{X}$ convesso $\mathring{K} \neq \emptyset$

Allora $\forall x \in \partial K$

$N_K(x) \neq \{0\}$ cioè $\exists\, \nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu \neq 0$

tc $\langle \nu, x-y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$

Def $f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n \text{ convesso}}{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, dico che $\alpha \in \mathbb{R}^n$ è un SOTTODIFFERENZIALE per f in $x_0 \in K$ se

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \alpha, x - x_0 \rangle \quad \forall x \in K$$

Pongo $\partial f(x_0) = \{ \alpha \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \text{ è sottodiff. in } x_0 \text{ per } f \}$

OSS 1) $\partial f(x_0)$ può essere vuoto.

2) $\partial f(x_0)$ è un convesso chiuso

Lo chiamo il sottodifferenziale (anche lui)

Def Dico che f è sottodifferenziabile in x_0 in x_0 se $\partial f(x_0) \neq \emptyset$

Fatto se f è sottodifferenziabile in ogni $x_0 \in K$, K convesso allora f è convessa

Dim presi $x_1, x_2 \in K$, $t \in [0,1]$ $tx_1 + (1-t)x_2 = x(t)$

So che $\partial f(x_t) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, \alpha$ t.c.

$$f(x_1) \geq f(x_t) + \langle \alpha, x_1 - x_t \rangle$$
$$f(x_2) \geq f(x_t) + \langle \alpha, x_2 - x_t \rangle$$

faccio la comb. convessa e salta fuori la convessità.

Viceversa Se K è convesso di $\mathbb{R}^n$ con $\mathring{K} \neq \emptyset$ e $f: K \to \mathbb{R}$ convessa $\Rightarrow \forall x_0 \in \mathring{K}$ si ha

$$\partial f(x_0) \neq \emptyset$$

Dim pongo $\mathcal{K} = epi(f) = \{(x,y) : x \in K,\ y \in \mathbb{R},\ f(x) \leq y\}$

$\mathcal{K}$ è un convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$, dico $\mathring{\mathcal{K}} \neq \emptyset$

Se $x_0 \in \mathring{K}$ se $y_0 > f(x) \Rightarrow (x_0, y_0) \in \mathring{\mathcal{K}}$

Prendo $x_0 \in \mathring{K}$ e $y_0 = f(x_0)$

$\Rightarrow \forall (x_0, y_0) \in \partial \mathcal{K}$ esiste $(\nu_0, w_0) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\langle (\nu_0, w_0), (x,y) - (x_0, y_0) \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathcal{K}$$

$$\langle \nu_0, x - x_0 \rangle + w_0 (y - y_0) \leq 0 \quad \forall x \in K \quad \forall y \geq f(x)$$

dico che $w_0 \neq 0$, se lo fosse

$\langle \nu_0, x - x_0 \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K$

Dato $x_0 \in \mathring{K} \Rightarrow \exists \rho \geq 0$ tc $x_0 + B(0,\rho) \subset K$

$x = x_0 + h$ con $|h| < \rho$

(Basta prendere h e $-h$)

$\Rightarrow \quad \langle \nu_0, h \rangle \leq 0 \quad \forall h \in B(0,\rho) \Rightarrow \langle \nu_0, h \rangle = 0 \quad \forall h \in B(0,\rho)$

$\Rightarrow$ vero $\forall h \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \nu_0 = 0$!! perché $(\nu_0, w_0) \neq 0$

Quindi w_0 non è zero

dico che $w_0 < 0$

Preso $x = x_0$ e $y > f(x_0) = y_0$

trovo $w_0 \left(y - f(x_0) \right) \leq 0 \Rightarrow w_0 < 0$

Divido per w_0

$$y - f(x_0) \geq \left\langle \frac{\nu_0}{-w_0}, x - x_0 \right\rangle \qquad \begin{array}{l} \forall x \in K \\ \forall y \geq f(x) \end{array}$$

in particolare $y = f(x)$

$$f(x) \geq f(x_0) + \left\langle \frac{\nu_0}{-w_0}, x - x_0 \right\rangle \quad \forall x \in K$$

$$\frac{\nu_0}{-w_0} \in \partial f(x_0) \Rightarrow \partial f(x_0) \neq \emptyset$$

OSS Se f è convessa $f: K \to \mathbb{R}$
allora $x \to \partial f(x)$ è un "operatore multivoco" e monotono.

MONOTONO: $\forall x_1, x_2 \in K \quad \forall \alpha_1 \in \partial f(x_1) \quad \alpha_2 \in \partial f(x_2)$

$$\langle \alpha_2 - \alpha_1 , x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

Dim infatti: $f(x_2) \geq f(x_1) + \langle \alpha_1 , x_2 - x_1 \rangle$
$f(x_1) \geq f(x_2) + \langle \alpha_2 , x_1 - x_2 \rangle$

Fare la somma si ottiene la tesi.

Def $\mathcal{X}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si dice $(\mathcal{X}, \tau)$ è uno SPAZIO VETTORIALE TOPOLOGICO, se τ è una topologia tale che somma e prodotto per scalare sono continue.

Def Chiamo $\mathcal{I}(x_0)$ gli intorni di $x_0 \subseteq \mathcal{X}$

OSS τ è invariante per traslazione

$$U \in \mathcal{I}(x_0) \quad v \in \mathcal{X} \Leftrightarrow U + v \in \mathcal{I}(x_0 + v)$$

Segue dalla continuità della somma.

Dunque basta conoscere gli in $\mathcal{I}(0)$

$$U \in \mathcal{I}(x_0) \Leftrightarrow \exists\, U_0 \in \mathcal{I}(0) \text{ tc } U = U_0 + x_0$$

FATTI SEMPLICI (no dim)

(i) Se $x_0 \in \mathcal{X}$ e $\lambda \neq 0 \Rightarrow x \to x_0 + \lambda x$ è un omeomorfismo.

(ii) Se $A, B \subset \mathcal{X}$, A aperto $\Rightarrow A+B$ è aperto

(iii) Se A è cpt, B chiuso $\Rightarrow A+B$ è chiuso

(iv) Se $A \subseteq \mathcal{X} \Rightarrow \overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{J}(0)} (A+U)$

(v) Se A è un insieme, $x_0 \in A$, $\lambda \neq 0$

$$\overline{x_0 + \lambda A} = x_0 + \lambda \overline{A}$$
$$\overset{\circ}{\overline{x_0 + \lambda A}} = x_0 + \lambda \mathring{A}$$
$$\partial(x_0 + \lambda A) = x_0 + \lambda \partial A$$

Def $A, B \subset \mathcal{X}$ SVT dico che

(i) A è BILANCIATO se $\lambda A \subset A$ $\forall -1 < \lambda < 1$

(ii) A ASSORBE B se $\exists \alpha_0 > 0$ tc $B \subset \alpha A$ $\forall |\alpha| > \alpha_0$

(iii) Un insieme è assorbente se $\forall x \in \mathcal{X}$ A assorbe $\{x\}$

$$(\forall x \in \mathcal{X} \; \exists \alpha_x > 0 \text{ tc } x \in \alpha A \; \forall |\alpha| \geq \alpha_x$$

OSS A ASSORBENTE $\Rightarrow 0 \in A$

PROP A è assorbente $\Leftrightarrow \forall x \; \exists \, \varepsilon_x$ tc $[-\varepsilon_x, \varepsilon_x] \cdot x \subset A$

Basta considerare $\alpha_x = \frac{1}{\varepsilon_x}$

(4) A assorbe positivamente B se $\exists \alpha_0 > 0$ tc $\forall \alpha \geq \alpha_0$ $\alpha B \subset A$

(5) A è positivamente assorbente se $\forall x \; \exists \alpha_x$ tc $x \in \alpha A \;\; \forall \alpha \geq \alpha_x$

$\Leftrightarrow \forall x \; \exists \varepsilon_x$ tc $[0, \varepsilon_x] \cdot x \subset A$

(6) è simmetrico se $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A \qquad (A = -A)$

(7) A limitato se $\forall \mathcal{U} \; \mathcal{J}_0$, $\mathcal{U}$ assorbe A

Oss Se $V \in \mathcal{J}_0 \quad \exists \; \mathcal{U} \in \mathcal{J}_0$ tc $\mathcal{U} + \mathcal{U} \subset V$

FATTI

(1) Se $\mathcal{U} \in \mathcal{J}_0 \Rightarrow \mathcal{U}$ è assorbente

$(\Rightarrow x \in \mathcal{X} \Rightarrow \{x\}$ è limitato$\}$

(Si usa la continuità di $\lambda \to \lambda x$ nel punto $\lambda = 0$)

(2) se $V \in \mathcal{J}_0$ esiste $\mathcal{U}$ bilanciato con $\mathcal{U} \subset V$

Infatti so che $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ è continua in $(0,0)$

Dato $V \quad \exists \; \mathcal{U}' \in \mathcal{J}_0$ e un $\varepsilon > 0$ tc $x \in U' \quad |\lambda| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lambda x \in V$

$$\Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_{|\lambda| < \varepsilon} \lambda \mathcal{U}'$$

PROP Sia $\mathcal{X}$ uno spazio vett. e τ una top. sono equivalenti:

(i) $(\mathcal{X}, \tau)$ è SPAZIO VETT. TOPOLOGICO

(ii) τ è invariante per traslazioni

ed esiste una base degli intorni dello zero $\hat{\mathcal{J}}_0$ tale che

- Se $V \in \hat{\mathcal{J}}_0 \quad \exists \; U \in \hat{\mathcal{J}}_0$ tc $U + U \subset V$
- Se $\mathcal{U} \in \hat{\mathcal{J}}_0 \quad \mathcal{U}$ è bilanciato ed assorbente

Dim (i) => (ii) già visto

(ii) => (i) Dato $\hat{\mathcal{J}}_0$ con le proprietà sopra.

Chiamo $\mathcal{J}_0 = \{ V : \exists\, U \in \hat{\mathcal{J}}_0 \text{ con } U \subset V \}$

e $\tau = \{ x_0 + \mathcal{J}_0 ,\ x_0 \in \mathcal{X} \}$ è una topologia

(inv. per traslazioni ovvio per costruzione) che rende continue somma e prodotto.

Somma: Fisso $x_0, y_0 \in \mathcal{X}$ sia $V \in \mathcal{J}_{x_0+y_0}$ in τ

cioè $\exists\, V' \in \mathcal{J}_0 \quad V = V' + (x_0+y_0)$

quindi $\exists\, U \in \hat{\mathcal{J}}_0$ tc $U \subset V'$

trovo $U' \in \hat{\mathcal{J}}_0$ tc $U' + U' \subseteq V'$

Se $x \in U' + x_0 \quad y \in U' + y_0 \Rightarrow x+y \in x_0+y_0+U'+U' \subseteq$
$\subset x_0+y_0+V' = V$

Prodotto preso $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{X}$ $V \in \mathcal{J}_{\lambda_0 x_0}$

$\exists\, V' \in \mathcal{J}_0 \quad V = \lambda_0 x_0 + V'$

$\Rightarrow$ esiste $U' \in \hat{\mathcal{J}}_0 \quad U' \subset V'$

Sia $n \in \mathbb{N}$ tc $2^n > |\lambda_0| + 1$

prendo $U_1 \in \hat{\mathcal{J}}$ tc $U_1 + U_1 \subset U'$ U_1 assorbente

$\exists\ 1 > \varepsilon > 0$ tc $[-\varepsilon, \varepsilon]\, x_0 \subset U_1$

Posso trovare $\mathcal{U} \in \hat{\mathfrak{J}}_0$ tc $\underbrace{U + \dots + U}_{2^n \text{ volte}} \subset \mathcal{U}_1$ e U è bilanciato

Sia $x \in x_0 + \mathcal{U}$ e $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0 =$$

$$= \underbrace{\lambda (x - x_0)}_{\substack{\in \\ \text{vorrei stesse} \\ \text{in } \mathcal{U}_1}} + \underbrace{(\lambda - \lambda_0) x_0}_{\substack{\cap \\ \mathcal{U}_1}}$$

$$\lambda (x - x_0) = 2^n \boxed{\lambda \frac{(x - x_0)}{2^n}} \in U$$

perché $x - x_0 \in U$ e $\left|\frac{\lambda}{2^n}\right| < 1$ e U è bilanciata

$$\left| \frac{\lambda}{2^n} \right| = \left| \frac{\lambda_0 + \lambda - \lambda_0}{2^n} \right| \leq \frac{\varepsilon + |\lambda_0|}{2^n} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \lambda (x - x_0) \in U_1$$

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 \in U_1 + U_1 \subset U' \subset V'$$

Def X spazio vettoriale, $E \subset X$ sottoinsieme.
Il funzionale di Minkowsky di E è

$$P_E(x) := \inf \{ \lambda > 0 : x \in \rho E \ \ \forall \rho \geq \lambda \}$$

$$P_E(x) : X \to [0, +\infty]$$

Prop (a) $P_E(x) < +\infty \iff E$ è positivamente assorbente
(b) $P_E(x) = 0 \iff tx \in E \ \ \forall t > 0$
in particolare $P_E(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \in E \\ +\infty & \text{se } 0 \notin E \end{cases}$

(c) $E = -E \iff p_E(-x) = p_E(x) \quad \forall x$

(d) $p_E(x)$ è positivamente omogenea
$$p_E(tx) = t\,p_E(x) \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad \forall t > 0$$

(e) Se E convesso $\Rightarrow p_E(x)$ è sub additiva
$$p_E(x+y) \leq p_E(x) + p_E(y)$$

Dim (e) Siano x e $y \in \mathcal{X}$, suppongo $p_E(x) < +\infty$ $p_E(y) < +\infty$ altrimenti la tesi è banalmente vera.

Trovo $\lambda_x > p_E(x)$ $\lambda_y > p_E(y)$ tc $\lambda_x + \lambda_y = \lambda > p_E(x) + p_E(y)$

$$\Rightarrow \frac{x}{\lambda_x} \in E \quad \text{e} \quad \frac{y}{\lambda_y} \in E$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{\lambda} = \frac{\lambda_x}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda_x}\right) + \frac{\lambda_y}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda_y}\right) \in E$$ perché comb convessa di $\frac{x}{\lambda_x}$ e $\frac{y}{\lambda_y}$

$\Rightarrow p_E(x+y) \leq \lambda$ siccome è vero $\forall \lambda \geq p_E(x) + p_E(y)$

vale la tesi.

Def una funzione $p : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una seminorma se

(1) $p(x) \geq 0 \quad \forall x$

(2) $p(tx) = |t|\,p(x)$

(3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Prop 1) se E è convesso, simmetrico e positivamente assorbente
$\Rightarrow p_E(x)$ è una seminorma.

2) Viceversa se p è una seminorma, posto $E = \{x \in \mathcal{H} \mid p(x) < 1\}$ si ha che E è pos. assorbente, simmetrico convesso e $p(x) = p_E(x)$.

LEZIONE 04

Titolo nota 10/03/2020

SPAZI TOPOLOGICI LOC CONVESSI

Def $\mathcal{X}$ spazio vettoriale topologico, si dice LOC. CONVESSO se esiste una base di intorni di 0 che sono tutti loc. convessi.

OSS posso supporre che questa base sia fatta di aperti simmetrici

SCRIVEREMO $(\mathcal{X}, \mathcal{I}_0)$ per indicare che $\mathcal{X}$ è loc. convesso con $\mathcal{I}_0$ base di intorni.

Prop Supponiamo che $\mathcal{X}$ SPT LOC. CONVESSO, prendiamo $\mathcal{U} \subset \mathcal{I}_0$ e consideriamo il funzionale di MINKOWSKI

$$P_u : \mathcal{X} \longrightarrow [0, +\infty[\text{ , è una seminorma}$$

$$\text{e} \quad \mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{X} \ : \ P_\mathcal{U}(x) < 1 \}$$

Dato $(\mathcal{X}, \mathcal{I}_0)$ loc convesso $\Rightarrow$ risulta definita una famiglia $(P_\mathcal{U})$ di seminorme tale che $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{I}_0$ $\mathcal{U} = \{ P_\mathcal{U} < 1 \}$

Vogliamo vedere che è possibile fare il viceversa

Def Supponiamo dunque che $\mathcal{X}$ spazio vettoriale e $(P_i)_{i\in I}$ (I insieme di indici) P_i una seminorma su $\mathcal{X}$

- $\forall\, i\in I$ e $\forall \varepsilon>0$ pongo

$$U_i(\varepsilon)=\{x\in\mathcal{X},\ p_i(x)<\varepsilon\}$$

- Più in generale se $J=\{i_1,\dots,i_k\}\subset I$

$$U_J(\varepsilon)=\{x\in\mathcal{X}:\ p_i(x)<\varepsilon\quad \forall i\in J\}$$

TEO Dico che $\{U_J(\varepsilon),\ \varepsilon>0,\ J \text{ sottoinsieme finito di } I\}=\mathcal{U}$ è una base di intorni convessi di zero che rende continua somma e prodotto.

Dim Si vede che la famiglia è una base di intorni infatti se $U_1\ U_2\in\mathcal{U}\Rightarrow\exists\, U\in\mathcal{U}\quad U\subseteq U_1\cap U_2$

Dato $J=J_1\cup J_2$ e $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}=\varepsilon_1\wedge\varepsilon_2$

$$U_J(\varepsilon)\subset U_{J_1}(\varepsilon_1)\cap U_{J_2}(\varepsilon_2)$$

Vediamo che la topologia generata da $\mathcal{U}$ rende continua somma e prodotto.

SOMMA $x_0,y_0\in\mathcal{X}$ U intorno di x_0+y_0

$\Rightarrow\ \exists\ J=\{i_1,\dots,i_k\}\subset I\quad \varepsilon>0\quad$ tc

$$U-x_0-y_0\supset U_J(\varepsilon)$$

prendo $\varepsilon/2$ e $x \in x_0 + U_J(\varepsilon/2)$ $y \in y_0 + U_J(\varepsilon/2)$

e calcolo $\quad p_i\big((x+y)-(x_0+y_0)\big) =$
$i \in J$
$$= p_i\big((x-x_0)+(y-y_0)\big) \leq p_i(x-x_0) + p_i(x-x_0) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

cioè se $x \in x_0 + U_J(\varepsilon/2)$ e $y \in y_0 + U_J(\varepsilon/2)$

$\Rightarrow \; x+y \in x_0+y_0 + U_J(\varepsilon) \subset U$

quindi la somma è continua.

<u>PRODOTTO PER SCALARE</u> $\quad x_0 \in H$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ $\quad U$ intorno di $\lambda_0 x_0$

$\Leftrightarrow \; \exists\; \varepsilon > 0 \;\; J = \{i_1 \ldots i_k\} \subset I$ tc $U_J \subset U - \lambda_0 x_0$

Scelgo $\delta > 0$ in modo che $\displaystyle \delta \cdot \max_{i \in J}\{p_i(x_0)\} < \frac{\varepsilon}{2}$

e $\varepsilon_1 > 0$ in modo che $\displaystyle (|\lambda_0| + \delta)\,\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$

Siano $\lambda \in \,]\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta[$ e $x \in x_0 + U_J(\varepsilon_1)$

Sia $i \in J$ si ha $\quad$ (Voglio mostrare che $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + U_J(\varepsilon)$)

$$p_i(\lambda x - \lambda_0 x_0) = p_i\big(\lambda(x-x_0) + (\lambda-\lambda_0)x_0\big) \leq$$
$$\leq |\lambda|\, p_i(x-x_0) + |\lambda - \lambda_0|\, p_i(x_0) \leq$$
$$\leq (|\lambda_0| + \delta)\,\varepsilon_1 + \delta\, p_i(x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

quindi anche il prodotto è continuo

Teorema $\mathcal{X}$ spazio vettoriale topologico loc. convesso $\Leftrightarrow$ esiste una famiglia di seminorme $(p_i)_{i \in I}$ tali che gli insiemi

$$\{ U_J(\varepsilon) \ , \ J = \{i_1 - - i_k\} \subset I \ , \varepsilon > 0 \}$$

è una base di intorni dello 0 dello spazio $\mathcal{X}$.

dove. $U_J(\varepsilon) = \bigcap_{h=1}^{k} \{ p_{i_h}(x) < \varepsilon \}$

NOTAZIONE Possiamo denotare S.V.T.L.C. con $(\mathcal{X}, (p_i)_{i \in I})$

Prop $(\mathcal{X}, (p_i)_{i \in I})$ è di Hausdorff $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in \mathcal{X} \ , x \neq 0 \quad \exists \ i \in I \ \text{ tc } \ p_i(x) \neq 0$$

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ Dato $x \neq 0 \Rightarrow U$ intorno di 0 tc

$$U \cap (x + U) = \emptyset$$

$\Rightarrow \exists \ J = \{i_1 - - - i_k\} \ \exists \varepsilon > 0$ tc $U_J(\varepsilon) \subset U$

$\Rightarrow$ in particolare $x \notin U_{i_h}(\varepsilon) \Rightarrow p_{i_h}(x) \geq \varepsilon > 0 \quad (\neq 0)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Devo mostrare che $\forall x \neq 0 \ \exists \ U \in \mathcal{J}_0$ tc $U \cap (x + U) \neq \emptyset$

prendo i tc $p_i(x) > 0$ chiamo $\varepsilon = p_i(x)$

considero $U = U_i(\varepsilon/2) = \{ x \mid p_i(x) < \varepsilon/2 \}$

Dico che $U \cap (x+U) = \emptyset$ se per assurdo

$y \in U \cap (x+U)$

$\Rightarrow \quad p_i(y) < \varepsilon/2 \quad$ e $\quad p_i(y-x) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\varepsilon = p_i(x) = p_i(x-y+y) \le p_i(x-y) + p_i(y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

<u>Teorema</u> Sia $\mathcal{X}$ S.V.T.L.C. , $\mathcal{X}$ di Hausdorff, allora sono equivalenti

(i) $\mathcal{X}$ è metrizzabile

(ii) $\exists\ \mathcal{B}_0$ base di intorni (convessi) numerabile

(iii) $\exists\ (p_i)_{i \in I}$ con $I \subseteq \mathbb{N}$ famiglia numerabile di seminorme che genera la topologia come detto prima.

<u>Dim</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) <u>ovvio</u> $\{x \mid d(x,0) < \frac{1}{n}\}$ è una famiglia numerabile di intorni di 0

Se d è una distanza che genera la topologia

(ii) $\Rightarrow$ (iii) è quanto visto prima. prese con $p_{U_i}(x)$ le seminorme associate alla base

(iii) $\Rightarrow$ (i) Definisco la metrica d

$$d(x,y) = \sum_{i \in I} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)} \in \mathbb{R}$$

uno i + ∞

d è una distanza. $d \ge 0 \quad d = 0 \Leftrightarrow p_i(x-y) = 0 \quad \forall i$

$\Downarrow \to$ uso $\mathcal{X}$ di Hausdorff.

$x = y$

DIS TRIANGOLARE $\quad \chi(t) = \frac{t}{1+t} \quad t \geq 0$

$$\chi(t_1+t_2) = \frac{t_1+t_2}{1+t_1+t_2} = \frac{t_1}{1+t_1+t_2} + \frac{t_2}{1+t_1+t_2} \leq \frac{t_1}{1+t_1} + \frac{t_2}{1+t_2}$$

$$= \chi(t_1) + \chi(t_2)$$

$\Rightarrow$ χ è sub additiva e questo implica la dis. triangolare.

d è una metrica $\quad$ Vediamo che d induce la stessa topologia.

(i) Gli intorni originali $U_J(\varepsilon)$ sono intorni di d

Cioè $\quad U_J(\varepsilon) \supset$ palla nella metrica d

Scelgo ρ in modo che $\forall i \in J$

$$\frac{2^i \rho}{1-2^i \rho} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Supponiamo che $\quad d(0,x) < \rho \quad x \in \mathcal{X}$

$$\Rightarrow \sum_{i \in J} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} < \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} < \rho$$

$$\chi(p_i(x)) = \frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} < 2^i \rho$$

$$\Rightarrow \quad p_i(x) < \chi^{-1}(2^i \rho) = \frac{2^i \rho}{1-2^i \rho} < \varepsilon \quad \forall i \in J$$

Dunque se $x \in B_d(0,\rho) \Rightarrow x \in U_J(\varepsilon)$

quindi ho trovato $U_I(\varepsilon)$ è un intorno rispetto a ρ

<u>Viceversa</u> Dato $\rho > 0$ mostro che $\exists\, \varepsilon > 0$ $J = \{i_1 \dots i_k\}$ tale che $U_J(\varepsilon) \subset B_d(0,\rho)$ (sto usando che d è invariante per traslazione e faccio tutto nell'origine)

Dato $\rho > 0$ scelgo $k \in \mathbb{N}$ tc $\sum_{i > k} \frac{1}{2^i} < \frac{\rho}{2}$

Sia $J = \{i \in I : i < k\}$ e prendiamo $\varepsilon = \frac{\rho}{4}$

Se $x \in U_J(\varepsilon) \Rightarrow d(0,x) = \sum_{i \in I} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} =$

$$\leq \sum_{i \in J} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} + \sum_{i \geq k} \frac{1}{2^i}\, 1 <$$

stimo tutta la serie

$$< \sum_{i \in J} \frac{1}{2^i} \underbrace{p_i(x)}_{\substack{\wedge \\ \frac{\rho}{4}}} + \frac{\rho}{2} \leq \frac{\rho}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \frac{\rho}{2} = \rho$$

<u>Def</u> X è uno spazio di Fréchet se

X è uno spazio vettoriale topologico loc. convesso tale che la topologia è indotta da una metrica ($\Rightarrow X$ Hausdorff) d invariante per traslazione e (X,d) è completo

<u>oss/prop</u> in virtù di quanto detto prima (X,τ) di Fréchet

$\Longleftrightarrow$ $(X,\tau) = (X, (p_i)_{i \in I})$ dove p_i è una famiglia numerabile di seminorme e

- $\forall x \neq 0$ $\exists\, i \in I$ $p_i(x) \neq 0$ (Hausdorff)
- se $\{x_n\}$ è "di Cauchy ad ogni (p_i)"

$\Rightarrow \exists x$ tc $p_i(x - x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall i \in I$

Essere di Cauchy rispetto a p_i si traduce con

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n, m \geq \bar{n} \qquad p_i(x_n - x_m) < \varepsilon \quad \forall i \in I$

Dim resta da dimostrare che se d è una metrica inv. per traslazioni, che genera la traslazione, Allora

(i) $\{x_n\}$ è di Cauchy in $(X, d) \Leftrightarrow$
$\forall i \in I$ $\{x_n\}$ è di Cauchy per p_i

(ii) $x_n \to x \Leftrightarrow \forall i \in I \quad p_i(x_n - x) \to 0$

Dimostriamo (i) (ii si fa in modo analogo)

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $\{x_n\}$ di Cauchy in d

Sia $\varepsilon > 0$ prendo $\forall i$ $U_i = \{p_i(x) < \varepsilon\}$ è un intorno $\Rightarrow$
$\exists r > 0$ tc $B_d(0, r) \subset U_i$

Dato che $\{x_n\}$ di Cauchy in d $\exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n}$
$d(x_n, x_m) < r \Leftrightarrow d(x_n - x_m, 0) < r \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n - x_m \in B_d(0, r) \subset U_i \Rightarrow p_i(x_n - x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\{x_n\}$ di Cauchy rispetto ad ogni (p_i)

Sia $\varepsilon > 0$ Dato $B_d(0, \varepsilon)$ è un intorno di 0

$\Rightarrow \exists J = \{i_1 \dots i_k\}$ $\exists \delta > 0$ tc $U_J(\delta) = \bigcap_{h=1}^{k} U_{i_h}(\delta) \subset B_d(0, \varepsilon)$

poiché $\{x_n\}$ è di Cauchy $\forall p_i$ e $\# J < +\infty$ trovo un $\bar{n}$ che accontenta $p_{i_1} \dots p_{i_k}$ tc $\forall n, m \geq \bar{n}$

$$\Rightarrow \quad p_{i_n}(x_n - x_m) < \delta \Rightarrow x_n - x_m \in U_J(\delta) \subset B_d(0, \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad d(x_n - x_m, 0) < \varepsilon \iff d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

invarianza per traslazione della distanza

Def $\mathcal{X}$ è uno spazio di Banach se $\mathcal{X}$ è normato e completo.

$\boxed{\text{APPLICAZIONI LINEARI TRA SPAZI LOCALMENTE CONVESSI}}$

Teorema Siano $(\mathcal{X}, (p_i)_{i \in I})$ e $(\mathcal{Y}, (p'_h)_{h \in H})$ due SVTLC e sia $L : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ lineare

sono equivalenti:

(i) L è continua

(ii) L è continua in 0

(iii) $\forall h \in H \; \exists \; J_h = \{i_1 \dots i_k\} \subset I$ ed $\exists \, K_h > 0$ tc

$$\forall x \in \mathcal{X} \qquad p'_h(Lx) \leq K_h \max_{i \in I_h} (p_i(x))$$

(cioè ogni seminorma in arrivo si maggiora con un numero finito di seminorme in partenza)

No dim (Vedi Note per la dimostrazione)

Prop $(\mathcal{X}, (P_i)_{i\in I})$ SVTLC $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|)$

Data $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineare allora sono equiv.

(i) L è continua

(ii) L è continua in 0

(iii) $\exists$ U intorno di 0 in $\mathcal{X}$ tale che $L(U)$ è limitato

INOLTRE se $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ abbiamo anche

(iv) $L^{-1}\{0\}$ è chiuso

(v) $L^{-1}(\{0\})$ o è tutto $\mathcal{X}$ oppure, $L^{-1}\{0\}$ non è denso

Dim (ii) $\Rightarrow$ (iii)

per il teo precedente $\exists k>0$ $\exists J = \{i_1 \dots i_n\}$

$$\|Lx\| \leq K \max_{i\in J} (P_i(x))$$

Allora $U = U_J(1) \Rightarrow$ se $x \in U \Rightarrow \|Lx\| \leq K$

allora è limitato

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

$$\forall x \in U \Rightarrow \|Lx\| \leq R$$

se $\varepsilon > 0$

$$x \in \frac{\varepsilon}{R} U \Rightarrow \|Lx\| < \varepsilon$$

(ii) $\Rightarrow$ (iv) ovvio $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ e L continua

$\Rightarrow L^{-1}\{0\}$ è chiuso

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Se che $L^{-1}\{0\} = H$ è chiuso

se $H = \mathcal{X}$ allora L è la funzione nulla

quindi tutto è banalmente vero

Se $\mathcal{X} \neq H \Rightarrow \exists x_0 \in H \Rightarrow \exists U \in \mathcal{I}_0$ tc $(x_0+U) \cap H \neq \emptyset$

Posso supporre U bilanciato (forse basta convesso)

dico che $L(x)$ ha segno costante in x_0+U

se non fosse vero ci sarebbe un $x \in x_0+U$

con $L(x) \cdot L(x_0) < 0$ ma allora nel segmento

tra x e x_0 c'è y con $Ly = 0 \Rightarrow y \in L^{-1}\{0\}$ assurdo

Supponiamo che $Lx > 0$ $\quad x \in x_0+U$

$\forall h \in U \qquad L(x_0+h) > 0 \Rightarrow L(h) > -Lx_0$

$\qquad\qquad L(x_0+h) < 0 \Rightarrow L(h) < Lx_0$

$\Rightarrow \quad -Lx_0 < Lh < Lx_0 \qquad \forall h \in U$

dunque Lh è limitato $\forall h \in U \Rightarrow LU$ è limitato

$(iv) \Rightarrow (v)$ ovvio se $L^{-1}\{0\}$ è chiuso $\Rightarrow$

$H = \mathcal{X}$ o H non è denso

$(v) \Rightarrow (iv)$ So che $H = L^{-1}\{0\}$ non è denso (se è $\mathcal{X}$ è ovvio)

devo dire che è CHIUSO RAGIONO PER ASSURDO

e suppongo che H non sia chiuso $(H \neq \mathcal{X})$

$\Rightarrow x_0 \in \bar{H} \setminus H$ cioè $\exists x_0 \in \mathcal{X} \setminus H$ $(Lx_0 \neq 0$ tc$)$

$\forall U \subset \mathcal{I}_0 \qquad (x_0+U) \cap H \neq \emptyset$

Sia $x \in \mathcal{X} \setminus H$ $(Lx \neq 0)$ e sia $U \in \mathcal{I}_0$

se definisco $U' = \dfrac{L(x_0)}{L(x)} U \in \mathcal{I}_0 \Rightarrow \exists y' \in H \cap (x_0+U')$

cioè $L(y') = 0$ ma $y' - x_0 \in U'$

Allora $y' \in x+U$ infatti:

$$x+U = \left(x + \frac{L(x)}{L(x_0)} U'\right) = x - \frac{L(x)}{L(x_0)} x_0 + \frac{L(x)}{L(x_0)} \left(\underset{\substack{\cup \\ y'}}{x_0 + U'}\right)$$

$$x - \frac{L(x)}{L(x_0)} x_0 + \frac{L(x)}{L(x_0)} y' = y$$

Dico che $y \in H$

$$L(y) = \cancel{L(x)} - \frac{\cancel{L(x)}}{\cancel{L(x_0)}} \cancel{L(x_0)} + \frac{L(x)}{L(x_0)} L(y') = 0$$

$\forall x \in X$ ho trovato U intorno di 0 e $y \in H$ tale che $y \in x + U \Rightarrow H$ è denso.

LEZIONE 05

Titolo nota 14/03/2020

Teorema di Hahn-Banach

Se X è uno sp. vettoriale, e una $p : X \to [0, +\infty)$

tale che (i) p è pos. omogenea $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda \geq 0$

(ii) p è sub additiva $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Supponiamo che $M \subseteq X$ un sottospazio lineare

e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\varphi(x) \leq p(x) \quad \forall x \in M \quad (*)$$

Tesi $\exists\ \tilde{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ che estende φ e preserva l'orientazione

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in M$$
$$\tilde{\varphi}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

Dim Passo 1 prendo $x_0 \in X \setminus M$ e facciamo vedere

che posso estendere φ a $M_1 = \mathrm{Span}\{M, x_0\} =$

$= \{x + t x_0,\ x \in M \text{ e } t \in \mathbb{R}\}$

Voglio estendere a una $\varphi_1 : M_1 \to \mathbb{R}$

e deve essere $\varphi_1(x + t x_0) = \varphi(x) + \varphi_1(x_0)\, t = \varphi(x) + a t$

con $a \in \mathbb{R}$

Deve valere $\forall t \in \mathbb{R}$ che

$$\varphi(x) + a t \leq p(x + x_0 t)$$
$$\Updownarrow$$

(i) $\varphi(x) + a t \leq p(x + x_0 t) \quad \forall t > 0$

(ii) $\varphi(x) - a t \leq p(x - t x_0)$

(i) $\quad at \leq p(x + x_0 t) - \varphi(x)$

(ii) $\quad at \geq \varphi(x) - p(x - x_0 t)$

Dividendo per t

$$a \leq p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) - \varphi\left(\frac{x}{t}\right) = p(x' + x_0) - \varphi(x')$$

$$a \geq \varphi\left(\frac{x}{t}\right) - p\left(\frac{x}{t} - x_0\right) = \varphi(x'') - p(x'' - x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi(x'') - p(x'' - x_0) \leq a \leq p(x' + x_0) - \varphi(x') \quad \forall x', x'' \in M$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi(x') + \varphi(x'') \leq p(x' + x_0) + p(x'' - x_0)$$

Ma questa è vera perché

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \varphi \text{ è lin su } M}}{\varphi(x') + \varphi(x'') =} \varphi(x' + x'') \underset{\substack{\downarrow \\ (*) \text{ vale} \\ \text{su } M}}{\leq} p(x' + x'') = p\big((x' + x_0) + (x'' - x_0)\big) \leq$$

$$\leq p(x' + x_0) + p(x'' - x_0)$$

per sub additivo su $\mathcal{H}$

<u>Passo 2</u> Per estendere a tutto $\mathcal{H}$ uso il lemma di Zorn

introduco un ordinamento su

$$\mathcal{F} = \left\{ (\varphi', M') : M \subset M' \subset \mathcal{H} \text{ sp lineare}, \ \varphi' : M' \to \mathbb{R} \text{ lineare}, \ \varphi' = \varphi \text{ su } M \text{ e } \varphi' \leq p \text{ su } M' \right\}$$

dico che $(\varphi', M') < (\varphi'', M'')$ se $M' \subset M''$ e $\varphi'' = \varphi'$ su M'

Mostriamo che ogni catena ammette un elemento massimale

C è una catena è un sottoinsieme di $\mathcal{F}$, tot. ordinato di coppie $(\varphi^i, M^i)_{i\in I}$

dico che l'elemento massimale è $\overline{M} = \bigcup_{i\in I} M^i$

e $\overline{\varphi} : \overline{M} \to \mathbb{R}$ dove $\overline{\varphi}(x) = \varphi_i(x)$ dove $x \in M_i$ per qualche i

$\Rightarrow (\overline{\varphi}, \overline{M})$ è massimale per la catena

$\Rightarrow$ per Zorn esiste un elemento massimale per $\mathcal{F}$

Così esiste $(\tilde{\varphi}, \tilde{M}) \in \mathcal{F}$ tc non esistono (φ', M')

$(\varphi', M') > (\tilde{\varphi}, \tilde{M})$ e $(\varphi', M') \neq (\tilde{\varphi}, \tilde{M})$

dico che $\tilde{M} = \mathcal{X}$ perché sennò usando il passo I riuscirei a estendere a $\hat{M} = \mathrm{Span}\{\tilde{M}, x_0\}$

__Def__ Dato $\mathcal{X}$ SVT indico con $\mathcal{X}^* = \{\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : \varphi \text{ è lineare e continua}\}$ $\to$ DUALE TOPOLOGICO

$\left(\mathcal{X}' = \{\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : \varphi \text{ è lineare}\} \right)$

__OSS__ $\mathcal{X}^*$ è uno SPAZIO VETTORIALE.

__NOTA__ Se $\mathcal{X}$ S.V.T.L.C. e $(P_i)_{i\in\mathcal{J}}$ seminorme. Allora
$\varphi \in \mathcal{X}^* \iff \exists\, i_1, \dots, i_k \in \mathcal{J}$ e $\exists\, k > 0$ tale che
$|\varphi(x)| \le k \max\left(P_{i_1}(x), \dots, P_{i_k}(x)\right) \quad \forall x \in \mathcal{X}$

Se inoltre $\mathcal{X}$ è normato Allora
$$\varphi(x) \in \mathcal{X}^* \iff \exists k > 0 \text{ tc } |\varphi(x)| \le k \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Def Nell'ultimo caso considero
$$\|\varphi\|_{\mathcal{X}^*} = \inf \{ k \mid |\varphi(x)| \le k \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{X} \}$$

Teorema (estensione di funzionale lineare e continuo)
Sia $\mathcal{X}$ SVTLC $\quad M \subseteq \mathcal{X}$ sottospazio chiuso
e $\varphi : M \to \mathbb{R}$ lineare e continuo (con la top. indotta da $\mathcal{X}$ su M)

$\Rightarrow \exists \tilde{\varphi} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ lineare e continuo tc
$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \quad \forall x \in M.$$

Inoltre se $\mathcal{X}$ è normato allora $\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{X}^*} = \|\varphi\|_{M^*}$

Dim Se la continuità di φ su M che è anche
lui uno SVTLC con la top indotta, allora
$\exists\, \mathcal{U}$ intorno di 0 in M tale $\varphi(U)$ è limitato
in $\mathbb{R}$ $\iff \exists\, \mathcal{U}$ intorno di 0 in $\mathcal{X}$ tc $\varphi(U \cap M)$
è limitato in $\mathcal{X}$ cioè $|\varphi(U \cap M)| \le C$

Poiché $\mathcal{X}$ loc. convesso, posso supporre $\mathcal{U}$ convesso, aperto, simmetrico

Se considero $p = P_{\mathcal{U}}$ (funzionale di Mink)
$p(tx) = |t|\, p(x)$
$p(x+y) \le p(x+y)$
inoltre $\mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{X} \mid p(x) < 1 \}$

Sia $x \in \mathcal{X}$ e $\lambda > p(x)$ so che $\frac{x}{\lambda} \in \mathcal{U}$

Se $x \in M$ e $\lambda > p(x) \Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in U \cap M$

$\Rightarrow \left|\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right| \leq C$

Quindi $|\varphi(x)| = \lambda \left|\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right| \leq C \cdot \lambda \quad \forall \lambda > p(x)$

faccio tendere $\lambda \to p(x)$ e ottengo

$|\varphi(x)| \leq p(x) \cdot C \quad \forall x \in M$

Per Hahn-Banach $\exists\, \tilde{\varphi} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ lineare $\tilde{\varphi} = \varphi$ su M

e $\tilde{\varphi}(x) \leq C\, p(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$

per simmetria $|\tilde{\varphi}(x)| \leq C\, p(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} \in \mathcal{X}^*$ perché se $x \in U$ $|\tilde{\varphi}(x)| \leq C\, p(x) < C$

Se poi $\mathcal{X}$ è normato $U = B(0,1) \Rightarrow \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$

<u>TEOREMI DI SEPARAZIONE DI CONVESSI</u>

<u>Teorema</u> 1 (sep. debole) Sia $\mathcal{X}$ S.V.T. supponiamo di avere $C, K \subset \mathcal{X}$ due convessi non vuoti con $C \cap K = \emptyset$ se C è aperto, esiste $\varphi \in \mathcal{X}^*$ tc

$\varphi(x') < \varphi(x'') \quad \forall x' \in C$ e $\forall x'' \in K$

Teorema 2 (Separazione Forte) $\mathcal{X}$ S.V.T.L.C. $C, K \subseteq \mathcal{X}$ convessi non vuoti, $K \cap C = \emptyset$, C chiuso e K compatto. Allora $\exists\, \varphi \in \mathcal{X}^*$ tc

$$\sup_{x' \in K} \varphi(x') \leq \inf_{x'' \in C} \varphi(x'')$$

Dim PASSO 1 considero $K = \{x_0\}$ $x_0 \notin C$

posso anche supporre $0 \in C \Rightarrow x_0 \neq 0$

posso definire $\varphi(t x_0) = t$ φ è lineare su $\{t x_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$

$\varphi(x_0) = 1$

Sia $p(x) = P_C(x)$ funzionale di Mink.

$$\varphi(tx) = t\,\varphi(x_0) \underset{\substack{p(x_0) \geq 1 \\ \text{perché } x_0 \notin C}}{\leq} t\, p(x_0) \overset{t \geq 0}{=} p(t x_0)$$

per $t < 0$ $\quad \underset{\wedge \atop 0}{t\,\varphi(x_0)} \leq \underset{\vee\!/ \atop 0}{p(t x_0)}$ quindi ok.

$\Rightarrow \exists\, \tilde{\varphi} \in \mathcal{X}'$ tc $\quad \tilde{\varphi}(t x_0) = t$

$\tilde{\varphi}(x) \leq p(x) \;\forall\, x \in \mathcal{X}$

Se $x \in C$ $\quad \tilde{\varphi}(x) \leq p(x) < 1 = \varphi(x_0) = \tilde{\varphi}(x_0)$

Rimane da vedere che $\tilde{\varphi} \in \mathcal{X}^*$

Ma dato che C è aperto $\Rightarrow \exists\, U \in \mathfrak{I}_0$ con $U \subset C$

$\mathcal{U}$ aperto convesso simmetrico

se $x \in \mathcal{U}$ $\quad \tilde{\varphi}(x) \le p(x) < 1$

per simmetria $\quad \tilde{\varphi}(-x) \le p(-x) < 1$

$\Rightarrow |\tilde{\varphi}(x)| < 1 \Rightarrow \tilde{\varphi}(\mathcal{U})$ limitato $\Rightarrow \tilde{\varphi}_0$ continua

(Stiamo usando in arrivo ho $\mathbb{R}$)

<u>Passo 2</u> $\quad K = \{x_0\}$ ma senza l'ipotesi $0 \in C$

Dato che $C \neq 0 \Rightarrow \exists x_1 \in C \Rightarrow$ definisco $C_1 = C - x_1$

$C_1 =$ convesso aperto $0 \in C_1$

$K = \{x_0 - x_1\}$ uso Passo 1 a C_1 e K_1 esiste

$\tilde{\varphi} \in \mathcal{X}^*$ $\quad \tilde{\varphi}(x) < \tilde{\varphi}(x_0 - x_1) \quad \forall x \in C_1$

$\Rightarrow \forall x \in C_1 \Rightarrow x = y - x_1 \quad y \in C$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}(y) - \cancel{\tilde{\varphi}(x_1)} < \tilde{\varphi}(x_0) - \cancel{\tilde{\varphi}(x_1)} \quad \forall y \in C$

<u>Passo 3</u> $\quad$ Pongo $C_1 = C - K$ è facile vedere che

C_1 è convesso, aperto e $0 \notin C_1$

Applico Passo 2 a C_1 e $\{0\}$

$\Rightarrow \exists\, \tilde{\varphi} \in \mathcal{X}$ t.c. $\quad \tilde{\varphi}(x) < \tilde{\varphi}(0) = 0 \quad \forall x \in C$

Ma ogni $x \in C$ $\quad x = x' - x'' \quad x' \in C$ e $x'' \in K$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}(x') - \tilde{\varphi}(x'') < 0$

$\tilde{\varphi}(x') < \tilde{\varphi}(x'') \quad \forall x' \in C$ e $\forall x'' \in K$

Lemma (preliminare teo 2)

Supponiamo $\mathcal{X}$ s.v.t di Hausdorff $C, K \subseteq \mathcal{X}$

C chiuso, K compatto $C \neq \emptyset$ $K \neq \emptyset$ $C \cap K \neq 0$

dico che $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{I}_0$ tc $(K + \mathcal{U}) \cap C = \emptyset$

Dim Dato $x \in K$ $\exists\, \mathcal{U}_x$ tc $(x + U_x) \cap C = \emptyset$ (qui uso C chiuso)

$$\exists\, W_x \in \mathcal{I}_0 \quad \text{tc} \quad W_x + W_x \subset U_x$$

per la compattezza di K esistono $x_1 \dots x_n \in K$ tali che $(x_i + W_{x_i})$ ricoprono K

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + W_{x_i})$$

Pongo $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{x_i} \in \mathcal{I}_0$

$$K + W \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + W_{x_i}) + W = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + W_{x_i} + W_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U_i)$$

OGNI $(x_i + U_i) \cap C = \emptyset \Rightarrow (K + W) \cap C = \emptyset$

Dim Teorema 2 Trovo intorno $U \in \mathcal{I}_0$ $(K + U) \cap C = \emptyset$

posso supporre inoltre $\mathcal{U}$ aperto, $\boxed{\text{convesso}}$, simmetrico

$\Rightarrow$ $K + U$ è convesso e aperto

per il Teorema 1 esiste $\tilde{\varphi} \in \mathcal{X}^*$ tc

$$\tilde{\varphi}(x') < \tilde{\varphi}(x'') \quad \forall x' \in K + U \quad \forall x'' \in C$$

Ma $x' = x + z$ $x \in K$ e $z \in U$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(z) < \tilde{\varphi}(x'') \quad \forall x \in K \;\; z \in U \;\; x'' \in C$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{K} \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(z) \leq \inf_{C} \tilde{\varphi}(x'') \qquad \forall z \in U$$

se prendo un $\tilde{\varphi}(z) > 0$ concludo che

$$\sup_{K} \tilde{\varphi}(x) < \inf_{C} \tilde{\varphi}(x'')$$

Prop X normato, $x_0 \in X$ $x_0 \neq 0$ $\Rightarrow$ esiste $\varphi \in X^*$ tc $\varphi(x_0) = \|x_0\|_X$ e $\|\varphi\|_{X^*}$

Dim Sia $p(x) = \|x\|$ Definisco
$\varphi : \mathrm{Span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(t x_0) = t\|x_0\|$

se $x \in M \Rightarrow \quad \varphi(x) \leq p(x) = \|x\|$

$t \geq 0$ vale $=0$
se $t < 0$ con minore $<$ $\leq$ di con ≥ 0

Posso applicare H-B esiste $\tilde{\varphi} \in X^*$ che estende φ

tc $\quad \tilde{\varphi}(x) \leq \|x\| \quad \left(\Rightarrow \|\tilde{\varphi}\|_{X^*} \leq 1\right)$

$$\tilde{\varphi}(t x_0) = \varphi(t x_0) = t\|x_0\|$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi}(x_0) = \|x_0\| \quad \Rightarrow \|\tilde{\varphi}\|_{X^*} \geq 1$$

$$\Rightarrow \|\tilde{\varphi}\|_{X^*} = 1$$

Def Dico che M è un piano CHIUSO se $\exists\, \varphi \in X^*$, $\varphi \neq 0$
tc $M = \{\varphi^{-1}(c)\}$

Def Dico che S è un SEMISPAZIO CHIUSO se $\exists\, \varphi \in \mathcal{X}^*$ $\varphi \neq 0$

$$S = \{x : \varphi(x) \leq c\} \quad \text{per } c \in \mathbb{R}$$

Prop Se $\mathcal{X}$ SVTLC $E \subset \mathcal{X}$. Allora

$$\overline{co}(E) = \underset{\text{chiuso di } E}{\text{inviluppo convesso}} = \bigcap_{\substack{S \text{ semispazio chiuso} \\ E \subset S}} S$$

Dim chiamo $K = \bigcap_{\substack{S \text{ s.s.c.} \\ E \subset S}} S$

$\overline{co}(E) \subset K$

perché $\overline{co}(E) = \bigcap_{\substack{C \text{ convesso chiuso} \\ E \subset C}} C$ e i semispazi sono convessi chiusi

per assurdo supponiamo $\overline{co}(E) \neq K$ $\exists\, x_0 \in K \setminus \overline{co}(E)$

Posso separare $\overset{\text{forte}}{\vee}$ x_0 da $\overline{co}(E)$

dunque esiste $\varphi \in \mathcal{X}^*$ tale che

$$c = \sup_{x \in \overline{co}(E)} \varphi(x) < \varphi(x_0)$$

prendo $S = \{\varphi(x) \leq c\}$ semispazio chiuso.

$E \subset \overline{co}(E) \subset S$ perché $\forall x \in \overline{co}(E)$ $\varphi(x) \leq c$

$x_0 \notin S$ $\varphi(x_0) > c$

MA! $x_0 \in K \subset S \not\ni x_0$ ASSURDO!!

Topologie su $\mathcal{X}^*$

Def se $\mathcal{X}_1$ S.V.T $\mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}_1'$ (DUALE ALGEBRICO)

$\sigma(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ = la topologia meno fine su $\mathcal{X}_1$ che rende continui tutti gli elementi di $\mathcal{X}_2$

Prop $\mathcal{X}_1$ SVT $\mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{X}_1'$ e $\sigma(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

$\Rightarrow (\mathcal{X}_1, \sigma)$ è loc convesso e σ è indotta dalla famiglia di seminorme

$$P_\varphi(x) = |\varphi(x)| \quad \varphi \in \mathcal{X}_2$$

Dim È chiaro che se φ è lineare $P_\varphi(x)$ è una seminorma (dis triangolare)

Chiamo σ' la topologia indotta dalle seminorme.
Voglio mostrare che $\sigma = \sigma'$

PASSO 1 $\boxed{\subseteq}$ Se $\varphi \in \mathcal{X}_2 \Rightarrow |\varphi(x)| = P_\varphi(x)$ $(\leq)$
quindi φ è continua nella topologia σ'
per la caratterizzazione delle funz. lineari e continue su SVT con immersione in spazio normato.
Dunque $\sigma \subset \sigma'$

PASSO 2 $\boxed{\supseteq}$ Siano $\varphi_1 \dots \varphi_k$ elementi di $\mathcal{X}_2$ e sia $\varepsilon > 0$.

Sia $U_{\varphi_1 \dots \varphi_k}(\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x : \varphi_i(x) < \varepsilon\} = U$

è un intorno di 0 in σ perché ogni φ_i è continua in σ $\Rightarrow$ $\{x : \varphi_i(x) < \varepsilon\}$ è un intorno di 0 $\Rightarrow$ la loro int. è intorno dello 0.

Dunque σ contiene tutti gli $U_{\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}}(\varepsilon)$ al variare di $\varepsilon > 0$ e $i_1 \dots i_k$ insieme finito di indici
ma questi insiemi sono una base per σ' $\Rightarrow$ $\sigma' \subset \sigma$

Def Se $\mathcal{X}$ è SVT $\quad \mathcal{X}^* = \{\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, lineari e continui$\}$

chiamo topologia in $\mathcal{X}$ la topologia

$$w = \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$$

chiamo topologia debole $*$ la topologia

$$w^* = (\mathcal{X}^*, J(\mathcal{X}))$$

dove se $x \in \mathcal{X}$ $\quad J_x[\varphi] = \varphi(x) \quad J : \mathcal{X} \to (\mathcal{X}^*)'$

cioè w^* è la minima top. che rende continue tutte le $\varphi \to \varphi(x)$ al variare di x in $\mathcal{X}$

Dalla prop. precedente si ha $(\mathcal{X}, w)$ è uno SVTLC la cui topologia è indotta dalle seminorme $(p_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{X}^*}$

dove $\quad p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$

$(\mathcal{X}^*, w^*)$ è uno SVTLC la cui topologia è indotta dalle seminorme $\quad (p_x^*)_{x \in \mathcal{X}} \quad p_x^*(\varphi) = |\varphi(x)|$

OSS 1 Se $\mathcal{X}$ è munito per generare le topologie w e w^* bastano

$(P_\varphi)_{\|\varphi\|\leq 1}$ (per omogeneità)

$(P^*_x)_{\|x\|\leq 1}$

OSS 2 $(\mathcal{X}^*, w^*)$ è di Hausdorff

Dim se $\varphi \in \mathcal{X}^*$ $\varphi \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \mathcal{X}$ per cui $\varphi(x) \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ $\exists P^*_x$ tc $P^*_x(\varphi) \neq 0$

quindi è di Hausdorff perché esiste una seminorma su cui φ non si annulla.

Achtung $(\mathcal{X}, w)$ a priori non è di Hausdorff MA!

OSS 3 $(\mathcal{X}, w)$ è di Hausdorff se $\mathcal{X}$ è loc conv ed è Hausdorff

con la topologia iniziale ?

Dim se $x \neq 0$, uso il teo di separazione tra gli insiemi $\{x\}$ e $\{0\}$ (dove uso $\mathcal{X}$ Hausdorff)

$\Rightarrow$ trovo $\varphi(x) \neq \varphi(0) = 0$

$\Rightarrow$ trovo la seminorma P_φ tc $P_\varphi(x) = \varphi(x) \neq 0$

e quindi per lo stesso discorso è di Hausdorff con w.

OSS Se ho una succ $\{x_n\}$ in $\mathcal{X}$ allora $x_n \xrightarrow{w} x$

$\Longleftrightarrow$ $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ $\forall \varphi \in \mathcal{X}^*$

(in generale $(\mathcal{X}, (P_i))$, $x_n \to x \Longleftrightarrow P_i(x - x_n) \to 0$ $\forall P_i$)

OSS Analogamente $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi \Longleftrightarrow \varphi_n(x) \to \varphi(x)$ $\forall x \in \mathcal{X}$

Prop Se $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ S.V.T $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineare e continua.

Allora L è continua in $(\mathcal{X}, w_x) \to (\mathcal{Y}, w_y)$

Dim Sia $U \in \mathcal{I}_0$ in $(\mathcal{Y}, w_y) \Leftrightarrow U_I(\varepsilon) \subset U$

$I = \{\varphi_1 \dots \varphi_k\} \subset \mathcal{Y}^*$ $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ $U_I(\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{y : |\varphi_i(y)| < \varepsilon\}$

Sia $W_I(\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{k} \{x : |\varphi_i(L(x))| < \varepsilon\}$

è un intorno di 0 in $(\mathcal{X}, w)$ perché $\varphi_i \circ L \in \mathcal{X}^*$

perché composizione di app. lineari e continue.

per costruzione $L(W_I(\varepsilon)) \subseteq U_I(\varepsilon) \subset U$

quindi L è continua da $(\mathcal{X}, w_x)$ in $(\mathcal{Y}, w_I)$

Prop $(\mathcal{X}, \tau)$ S.V.T.L.C. $K \subset \mathcal{X}$ CONVESSO

K è CHIUSO in $\mathcal{X}$ $\Leftrightarrow$ K è CHIUSO $(\mathcal{X}, w)$

(con la top. iniziale)

Dim $\Leftarrow$ vero perché $w \subset \tau$ (qui non serve la convessità)

$\Rightarrow$ Dato che K è convesso $\Rightarrow$ $K = \overline{co}(K) = \bigcap S$

dove $S = \{x : \varphi(x) \leq c\}$ $c \in \mathbb{R}$ $\varphi \in \mathcal{X}^*$

Dato che φ è continua in w S è chiuso in w

$\Rightarrow$ $\bigcap S$ è chiuso in w (essendo int. di chiusi)

ALCUNI RISULTATI FONDAMENTALI (no DIM)

TEO (BANACH - ALAOGLU)

Se $\mathcal{X}$ è NORMATO $\Rightarrow$ $\mathcal{B}^* = \{ \varphi \in \mathcal{X}^* : \|\varphi\| \leq 1 \}$ è compatto in $(\mathcal{X}^*, w^*)$

Def $\mathcal{X}$ S.V.T si dice SEPARABILE se $\exists$ un sottoinsieme F F numerabile e denso $(\overline{F} = \mathcal{X})$

PROP Se $\mathcal{X}$ è NORMATO e se $\mathcal{X}^*$ è separabile $\Rightarrow$ $\mathcal{X}$ è separabile.

Def $\mathcal{X}$ SVT. è RIFLESSIVO se l'applicazione

$$J : \mathcal{X} \longrightarrow (\mathcal{X}^*)^* \quad \text{definita da} \quad J(x)\varphi = \varphi(x)$$

è un isomorfismo tra $\mathcal{X}$ e $(\mathcal{X}^*)^*$

se $\mathcal{X}$ è NORMATO è equivalente a dire che J è surgettivo

(perché se $\mathcal{X}$ è normato $\Rightarrow$ $\mathcal{X}^*$ e $(\mathcal{X}^*)^*$ sono normati e J è un'isometria)

OSS Se $\mathcal{X}$ è normato e riflessivo $\Rightarrow$ $\mathcal{X}$ è completo (cioè un Banach)

Segue dal fatto che $\mathcal{X} \cong (\mathcal{X}^*)^*$ ed è facile vedere che il duale di uno spazio normato è sempre completo.

TEOREMA (DI KAKUTANI) sia $\mathcal{X}$ NORMATO, Allora

$\mathcal{X}$ è RIFLESSIVO $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B} = \{ x : \|x\| \leq 1 \}$ è COMPATTA in w

TEOREMA $\mathcal{X}$ sp. NORMATO Allora

$\mathcal{X}$ è SEPARABILE $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{B}^*, w^*)$ è METRIZZABILE.

LEZIONE 06

Titolo nota 17/03/2020

Def $\mathcal{X}$ spazio vettoriale, $K \subseteq \mathcal{X}$ $f : K \longrightarrow [-\infty, \infty]$

$$epi(f) = \{(x,y) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$$

Def Dico che f è convessa se $epi(f)$ è convessa in $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$

Fatti f è convessa $\Leftrightarrow$ $\tilde{D}(f) = \{x \in K : f(x) < +\infty\}$ è convesso

e $\forall x_1, x_2 \in \tilde{D}(f)$ $\forall \lambda \in]0,1[$

(*) $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

Dim semplice da verificare

Def f è strettamente convessa se nella relazione vale $<$

se $x_1 \neq x_2$

Def Dominio $\mathcal{D}(f) = \{x \in K : f(x) \in \mathbb{R}\}$

Def f si dice PROPRIA se $f(x) > -\infty$ e f non è sempre $+\infty$

OSS 1 se f è PROPRIA $\mathcal{D}(f) = \tilde{\mathcal{D}}(f)$

OSS 2 Se f è propria $\mathcal{D}(f)$ è convesso

(K a priori può non essere convesso)

PROP f è convessa. Se $f(x_0) = -\infty$ e $f(x) < +\infty$

$\Rightarrow$ $f(x_t) = -\infty$ per $t \in [0, 1[$

dove $x_t = x_0 + (1-t) x$

Dim segue da (*)

$$f(x_t) \le t\, f(x) + \underbrace{(1-t)\, f(x_0)}_{-\infty} \underset{t\neq 1}{=} -\infty$$

__Cor__ Se $\mathcal{X}$ SPT e $\overset{\circ}{\overline{D(f)}} \neq \emptyset$ allora f è propria

__Dim__ $\exists$ x_1, e un intorno $\mathcal{U}$ tc $x_1 \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \subset D(f)$

Quindi $f(x_1) < +\infty$, se ci fosse $x_0 \in \mathcal{U}$

con $f(x_0) = -\infty \Rightarrow f(x_t) = -\infty$ per $t \in [0, 1[$

Ma $x_t \in U$ per t vicino a 1 quindi è impossibile.

__Def__ Se $A \subseteq \mathcal{X}$ insieme chiamo __indicatrice__ di A

$$\chi_A : \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \notin A \end{cases}$$

__Oss__ A è CONVESSO $\Longleftrightarrow$ χ_A è CONVESSA.

__Oss__ Se $f : K \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è convessa $\Longleftrightarrow$ $\overline{f} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x) & x \in K \\ +\infty & x \notin K \end{cases}$$

è convessa.

Di fatto conviene pensare sempre funzioni definite soltanto su $\mathcal{X}$ a valori in $[-\infty, +\infty]$ estese a $+\infty$ fuori da K.

Di qui in avanti: $\mathcal{X}$ S.P.T.

__SEMICONTINUITÀ__ $f : \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ f è __semi-continua inf__ in x_0

se $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \ge f(x_0)$

$\Updownarrow$ lim inf classico

$$\boxed{\sup_{U \in \mathcal{I}_{x_0}} \inf_{x \in U \setminus \{x_0\}} f(x)} \ge f(x_0) \iff \boxed{\sup_{U \in \mathcal{I}_{x_0}} \inf_{x \in U} f(x)} = f(x_0)$$

$\liminf{}^{*} = \liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \wedge f(x_0)$

Fatto Sono equivalenti

a) f è sci

b) $f^c = \{x \in X, f(x) \leq c\}$ è CHIUSO

c) epi(f) è chiuso

Dim a) $\Rightarrow$ b) sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $x_0 \notin f^c$

$f(x_0) > c$ poiché f è semi continua

$\Rightarrow$ trovo U intorno di x_0 tc $f(x) > c \quad \forall x \in U$

$\Rightarrow$ il complementare di f^c è aperto $\Rightarrow$ f^c è chiuso

b) $\Rightarrow$ c) $(x_0, y_0) \notin$ epi(f) $\quad y_0 < f(x_0)$

Prendo $\varepsilon > 0 \quad y_0 < \underbrace{y_0 + \varepsilon}_{= c} < f(x_0)$

f^c è chiuso e dato che $x_0 \notin f^c$

esiste un intorno U di x_0 tc $U \cap f^c = \emptyset$

Sia $W = U \times]y_0+\varepsilon, y_0-\varepsilon[$ è un intorno di (x_0, y_0)

tc $W \cap$ epi(f) $\Rightarrow$ (epi(f))^c è aperto $\Rightarrow$ epi(f) è chiuso

c) $\Rightarrow$ a) Voglio dimostrare che f è sci

$\Leftrightarrow \forall c < f(x_0)$ esiste $U \in \mathcal{I}_{x_0}$: $f(x) > c \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$

$c \in \mathbb{R}$ perché $c < +\infty$ (se $c = -\infty$ è ovvio)

So che $(x_0, c) \notin$ epi $\Rightarrow$ poiché epi(f) è chiuso esiste

W intorno di (x_0, c) tc $W \cap (\text{epi}(f)) = \emptyset$

$\Rightarrow$ esistono U intorno di x_0 e $\varepsilon > 0$ tc $U \times]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset W$

$\Rightarrow$ se $x \in U \Rightarrow f(x) > c+\varepsilon \Rightarrow f$ è sci

Def Data $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ definito $\overline{f} : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{f}(x) = \liminf_{y \to x}{}^{*} f(y) = \sup_{U \in \mathcal{I}_x} \inf_{y \in U} f(y)$$

Prop Valgono i seguenti fatti

(a) $\overline{f}$ è sci

(b) $\overline{f} \leq f$

(c) Se f è sci in $x_0 \Rightarrow \overline{f}(x_0) = f(x_0)$

Dim (b) ovvio dalla def di $\liminf^{*}$

(c) segue dalle equivalenti def di sci

(a) Sia $x_0 \in \mathcal{X}$ sia $c < \overline{f}(x_0)$

Voglio mostrare che esiste un intorno di x_0 U tc $\inf_{U} f > c$, posso supporre U aperto

Se $x' \in U \Rightarrow U \in \mathcal{I}_{x'}$

Dato che $\inf_{U} f > c \Rightarrow \sup_{U \in \mathcal{I}_{x'}} \inf_{U} f > c$

$\Rightarrow \forall c < \overline{f}(x_0) \quad \exists U \in \mathcal{I}(x_0) :$

$\forall x' \in U \quad \overline{f}(x') > c$

$\Leftrightarrow \overline{f}$ è sci in x_0

oss 1 $\overline{f} = \sup \{ g \text{ è sci} : g \leq f \}$

D'ora in poi prendo $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa e $\mathcal{X}$ SVTLC

oss 2 $\overline{f}$ è convessa

Prop Se $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ è sci e convessa e $D(f) \neq \emptyset$

$\Rightarrow f$ è propria.

Dim. Se esiste $x_1 \in D(f)$ con $f(x_1) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ dico che $\nexists\, x_0$ tc $f(x_0) > -\infty$

Se ci fosse $\Rightarrow f(x_t) = -\infty \quad \forall t \in [0,1[$

ma per sci $f(x_1) = -\infty$ perché $x_t \to x_1$, $t \to 1^-$

Prop $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ sci, convessa, con $D(f) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x^* \in \mathcal{X}^*$, $c \in \mathbb{R}$ tc

$$f(x) \geq c + \underbrace{{}_{\mathcal{X}}\langle x, x^* \rangle_{\mathcal{X}^*}}_{= x^*(x)}$$

Dim. f convessa $\Rightarrow$ epi(f) CONVESSO

f chiusa $\Rightarrow$ epi(f) CHIUSO

Poiché $D(f) \neq \emptyset \Rightarrow f$ è propria e epi$(f) \neq \emptyset$

prendo $x_0 \in \mathcal{X}$ $f(x_0) \in \mathbb{R}$ prendo $y_0 < f(x_0)$

$\Rightarrow (x_0, y_0) \notin$ epi(f) uso Hahn-Banach e trovo

$\varphi \in (\mathcal{X} \times \mathbb{R})^*_{\setminus\{0\}}$ tc (separa) epi(f) da $\{(x_0, y_0)\}$

$$\varphi(x, y) \geq \varphi(x_0, y_0) \qquad \forall x, y \in \text{epi}(f)$$

$\Leftrightarrow \exists\, x^* \in \mathcal{X}$ e $w \in \mathbb{R}$ tc

$$\langle x, x^* \rangle + w\, y \geq \langle x_0, x^* \rangle + w\, y_0 \qquad \begin{matrix} \forall x \in \mathcal{X} \\ \forall y \geq f(x) \end{matrix}$$

Con $(x^*, w) \neq (0,0)$ dico che $w \neq 0$

Altrimenti $\langle x, x^* \rangle \geq \langle x_0, x^* \rangle \quad \forall x \in \mathcal{X}$ ASSURDO

perché una funz lineare non può essere limitata inf

a meno che non sia nulla.

$$\Rightarrow \underbrace{\langle x, \tfrac{x^*}{w} \rangle + y}_{\geq\ \langle x, \frac{x^*}{w} \rangle + f(x)} \geq \langle x_0, \tfrac{x^*}{w} \rangle + y_0 \qquad \forall y \geq f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \varphi(x_0, c_0) - \langle x, \tfrac{x^*}{w} \rangle$$

Def Data $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ definisco $\overline{co}(f) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

$$\overline{co}(f) = \sup \underbrace{\left\{ g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}} \mid g \text{ convessa, sci e } g \le f \right\}}_{\Gamma(f)}$$

Fatti
(1) $\overline{co}(f)$ è sci
(2) $\overline{co}(f) \le f$
(3) $\overline{co}(f)$ è convessa.

Prop se $(g_i)_{i \in I}$ g_i è sci $\forall i \in I$

$\Rightarrow \overline{g} = \sup_{i \in I} g_i$ è sci

Dim Se $c \in \mathbb{R}$ $\overline{g}^c = \bigcap_{i \in I} g_i^c \leftarrow$ è chiuso

Prop Sia $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ Allora

$$epi\left(\overline{co}(f)\right) = \overline{co}\left(epi(f)\right)$$

Dim se $f \equiv +\infty$ ovvio perché entrambi gli insiemi sono vuoti.
suppongo $\exists\, x_0$ tc $f(x_0) < +\infty$
Mostriamo che se K è convesso chiuso in $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ e $epi(f) \subset K$
$\Rightarrow (x, y) \in K \Rightarrow_x y' \ge y \Rightarrow (x, y') \in K$
Sia $\eta \in \mathbb{R}$ tc $\eta \ge f(x_0)$ $(x_0, \eta) \in epi\, f$
Sia $t_\eta = \dfrac{y' - y}{\eta - y} \in \mathbb{R}$ $t_\eta \to 0$ se $\eta \to +\infty$

se $\eta > y' \Rightarrow 0 \le t_\eta < 1$, per la convessità di K
$(x_0, \eta) \in K$ e $(x, y) \in K$

$$(x,y) + t_\eta\big((x_0,\eta) - (x,y)\big) \in K \quad \text{perché } K \text{ è convesso } \forall \eta > y$$

$$\left(x + t_\eta(x_0 - x),\ y'\right) \quad \text{se } \eta \to +\infty \Rightarrow t_\eta \to 0$$

$$(x, y') \in K \text{ perché } K \text{ è CHIUSO}$$

Da questa proprietà si ricava che $K = epi(g_K)$

dove $g_K(x) = \inf \{ y \in \mathbb{R} : (x,y) \in K \}$

g_K è convessa, SCI e $g_K \leq f$

- g_K convessa perché K è CONVESSO
- g_K è SCI perché K è CHIUSO
- $g_K \leq f$ perché $epi(f) \subset K$

trovo g_K convessa, SCI $g_K \leq f$ tale che

$epi(g_K) = K \supset epi(f)$

$$\Rightarrow \quad \overline{co}(epi(f)) \subset epi(\overline{co}(f))$$

Il viceversa se $g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa SCI $g \leq f$

$\Rightarrow \quad epi(g) = K_g$ convesso chiuso e $K_g \supset epi(f)$

$$\Rightarrow \quad epi(\overline{co}(f)) \subset \overline{co}(epi(f))$$

<u>Prop</u> Se $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$,

$\overline{co}(f) = \sup\{ g \mid g \text{ è AFFINE},\ g \leq f \}$

$$g(x) = c + \langle x, x^* \rangle \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \quad x^* \in \mathcal{X}^*$$

<u>Dim</u> lo deduco da $epi(\overline{co}(f)) = \bigcap \{ \text{semispazi che contengono } epi(f) \}$

$\overline{co}(epi(f))$ ← vista prima

semispazio $\{x \mid \langle x, x^* \rangle \leq c \ , c \in \mathbb{R}\}$

<u>Prop</u> Se $f: \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ $x_0 \in \mathcal{X}$

(a) Se $f(x_0) = \overline{co}(f(x_0)) \Rightarrow f$ è sci in x_0

(b) Se f è convessa vale $\Leftarrow$

<u>Dim</u> a) So che $f \geq \overline{f} \geq \overline{co}(f)$ in generale

se $f(x_0) = \overline{co}(f_0) \Rightarrow f(x_0) = \overline{f}(x_0) \Rightarrow f$ è sci in x_0

b) se f è convessa $\Rightarrow \overline{f}$ è convessa $\Rightarrow \overline{f} \leq co(f)$

dunque $\overline{f} = \overline{co}(f) \Rightarrow$ dire che f sci in $x_0 \Rightarrow \overline{f}(x_0) = f(x_0)$

LEZIONE 07

Titolo nota 18/03/2020

Continuità delle funzioni convesse

Lemma Sia $\mathcal{X}$ SVTLC e sia $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathcal{X}$,

$\mathcal{U}$ intorno aperto e convesso di x_0 tale che $\sup_{x \in U} f(x) =: a < +\infty$ (f limitata sup)

Allora $f(x) = -\infty \quad \forall x \in \mathcal{U}$

oppure

$f(x)$ è continua su

Dim Sia $x \in U$ so che $x_t = x_0 + t(x - x_0) \in U$

per $t \in [0, 1+\delta]$

perché $\mathcal{U}$ è aperto

Caso 1 Se avessi $f(x_0) = -\infty \Rightarrow f(x_t) = -\infty \quad \forall t \in [0, 1+\delta[$

$\Rightarrow f(x) = -\infty \quad \forall x \in \mathcal{U}$

Caso 2 Supponiamo che $f(x_0) \in \mathbb{R}$, sia $W \in \mathcal{J}_0$, simmetrico, convesso

e $x_0 + W \subset \mathcal{U}$

Dato $1 > \varepsilon > 0$ prendo $h \in \varepsilon W$, $x_0 + \frac{h}{\varepsilon}$ e $x_0 - \frac{h}{\varepsilon} \in x_0 + W$

$x_0 \pm h = (1-\varepsilon)x_0 + \varepsilon\left(x_0 \pm \frac{h}{\varepsilon}\right)$ è compreso tra x_0 e $x_0 \pm \frac{h}{\varepsilon}$

$$f(x_0 \pm h) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{convessità}}}{\leq} (1-\varepsilon) f(x_0) + \varepsilon\left(f\left(x_0 \pm \frac{h}{\varepsilon}\right)\right) = f(x_0) + \varepsilon\left(f\left(x_0 \pm \frac{h}{\varepsilon}\right) - f(x_0)\right) \leq$$

$$\leq f(x_0) + \underbrace{\varepsilon\left(a + |f(x_0)|\right)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{con } \varepsilon \to 0}}$$

D'altra parte

$$x_0 = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(x_0 - \frac{h}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{1+\varepsilon}\left(x_0 + h\right)$$

$$f(x_0) \le \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} f\left(x_0 - \frac{h}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{1+\varepsilon} f(x_0 + h)$$

$$\iff \quad f(x_0+h) \ge (1+\varepsilon) f(x_0) - \varepsilon f\left(x_0 - \frac{h}{\varepsilon}\right) \ge$$

$$\ge f(x_0) - \varepsilon\left(|f(x_0)| + a\right)$$

$$\Rightarrow \quad |f(x_0+h) - f(x_0)| \le \varepsilon\left(|f(x_0)| + a\right) \quad \forall h \in W$$

Oss: il fatto che fisso x_0 non conta niente la stessa dimostrazione segue $\forall x \in U$

Teorema: Se $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ è convessa. Sono equivalenti

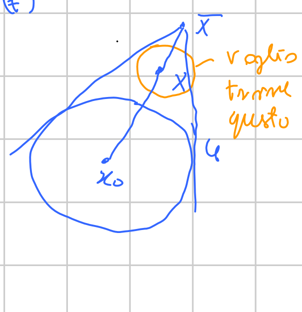
(a) $\mathring{D}(f) \neq \emptyset$ e f è continua in $\mathring{\widehat{D(f)}}$

(b) $\exists x_0 \in X$, $f(x_0) \neq -\infty$, $\exists U$ intorno di x_0, $\sup_{x \in} U < +\infty$

Dim: a) $\Rightarrow$ b) è praticamente ovvio

b) $\Rightarrow$ a)

Osservo che $\mathring{\widehat{D(f)}} \neq \emptyset$ perché per il lemma $U \subset \mathring{\widehat{D(f)}}$



Sia $x \in \mathring{\widehat{D(f)}}$

$x_t = x_0 + t(x - x_0)$ $t \in [0, 1+\delta]$

$x_t \in \mathring{\widehat{D(f)}}$ perché è aperto

$\bar{x} = x_{1+\delta} = x_0 + (1+\delta)(x - x_0) =$

Pongo $W = \frac{\delta}{1+\delta}(U - x_0) \in \mathfrak{I}_0$

Se $h \in W$ Stimiamo $f(x+h)$

$$x+h = \frac{1}{1+\delta}\bar{x} + \frac{\delta}{1+\delta}\tilde{x} \qquad \text{dove } \tilde{x} = \frac{1+\delta}{\delta}(x+h) - \frac{1}{\delta}\bar{x}$$

Dico che $\tilde{x} \in \mathcal{U}$, perché

$$\tilde{x} = \frac{1+\delta}{\delta}(x+h) - \frac{1}{\delta}\Big(x_0 + (1+\delta)(x-x_0)\Big) =$$

$$= \frac{1+\delta}{\delta}(x+h) - \frac{1}{\delta}\Big((1+\delta)x - \delta x_0\Big) =$$

$$= \frac{1+\delta}{\delta}h + x_0 \qquad h \in W = \frac{\delta}{1+\delta}U - x_0$$

$$\frac{1+\delta}{\delta} + x_0 \in U$$

$$\Rightarrow f(x+h) \le \frac{1}{1+\delta}f(\bar{x}) + \frac{\delta}{1+\delta}\sup_{\mathcal{U}} f \le \text{costante}$$

Dunque f è limitata in $x+W \Rightarrow f$ è continua in x per lemma e questo vale $\forall x \in \overset{\circ}{\overline{D(f)}}$

<u>TEOREMA</u> Sia $\mathcal{X}$ uno spazio di Banach (normato e completo)
$f: \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e sia CONVESSA e SCI

Allora f è continua in $\overset{\circ}{\overline{D(f)}}$ (ammesso che non sia vuota)

<u>Dim</u> Sia $x_0 \in \overset{\circ}{\overline{D(f)}}$ voglio dimostrare che esiste $W \in \mathcal{J}_0$ tale che $\sup_{x_0+W} f < +\infty$ per il teo di prima ho finito.

Fisso $c \in \mathbb{R}$, $c > f(x_0)$
Prendo $W = \{h \in \mathcal{X} \mid f(x_0+h) \le c,\ f(x_0-h) \le c\}$

W è chiuso perché è int di due chiusi perché f è SCI

$0 \in W$ e simmetrico, W è convesso per convessità di f

Dico che $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nW$

Sia $x \in X$ Considero $x_t = x_0 + t x$

$x_t \in D(f)$ per $|t| \le \delta$ $0<\delta$ piccolo

$\varphi(t) = f(x_t)$ è convessa su $[-\delta, \delta]$ e continua

$\Rightarrow \varphi(x_t) \le C$ per $t \in [-\delta_1, \delta_1]$

$\Rightarrow f\left(x_0 \pm \frac{x}{n}\right) \le C$ per n grande

$\Rightarrow \frac{x}{n} \in W \Rightarrow x \in nW$

$\forall x \in X \ \exists n \in \mathbb{N}$ tc $x \in nW$

$\Rightarrow X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{nW}_{\text{sono chiusi}} \Rightarrow X$ è di BAIRE

$\Rightarrow \exists n_0$ tc $n_0 W$ ha parte interna $\neq \emptyset$

ma questo è come dire che $\mathring{W} \neq \emptyset$

Quindi $\exists\ h \in \mathring{W}$ e $-h \in \mathring{W}$ per simmetria

$\Rightarrow 0 \in \mathring{W}$ per convessità

e $\forall x \in \overbrace{x_0 + \mathring{W}}^{\in \mathcal{U}_{x_0}}$ tc $f(x) \le C$ quindi ho trovato un intorno

di x_0 dove f è limitata $\Rightarrow$ uso il teo di prima e f è continua

OSS $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ convessa, Allora

potrei mettere $x \in \tilde{D}(f)$

$$\left(\mathrm{epi}(f) = \{(x,y) : x \in \mathcal{X},\ \underset{y \in \mathbb{R}}{y \geq f(x)} \} \right)$$

① $\overset{\circ}{\mathrm{epi}(f)} \subseteq \{ (x,y) : x \in \overset{\circ}{D(f)},\ y > f(x) \}$

② Se $\exists\, x_0 \in \overset{\circ}{D}(f)$ con f continua in x_0 $\Rightarrow$ vale $\supseteq$

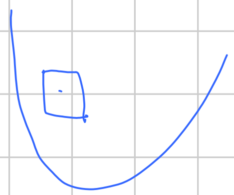
Dim ① se $(x,y) \in \overset{\circ}{\mathrm{epi}(f)}$ esiste U intorno di x e $\delta > 0$

tc $U \times]y-\delta, y+\delta[\ \subset \overset{\circ}{\mathrm{epi}(f)}$

$\forall (x', y') \in U \times]y-\delta, y+\delta[\ \Rightarrow f(x') \leq y' \Rightarrow U \subset \overset{\circ}{D}f$

poi se $x' = x$ $f(x) \leq y - \delta \Rightarrow y > f(x)$

IDEA



② si ricava dai Teoremi precedenti

Lemma Se $\mathcal{X}$ è un Banach, $f : \mathcal{X} \to]-\infty, +\infty]$ convessa e sci

Supponiamo $\overset{\circ}{D}(f) \neq \emptyset$

Se D è un denso in $\mathcal{X}$ $\Rightarrow$ $\inf_{D} (f(x)) = \inf_{\mathcal{X}} (f(x))$

Dim se $\inf D(f) = -\infty$ è ovvio

Suppongo $c = \inf_{D} f(x) \in \mathbb{R}$ (non può essere $+\infty$ perché $\overset{\circ}{D}(f) \neq \emptyset$)

Mi basta dimostrare che $f \geq c$ su $D(f)$

è chiaro che $f \geq c$ su $\overset{\circ}{D(f)}$ perché f è continua

Se $x \in D(f) \setminus \overset{\circ}{\overline{D(f)}} \Rightarrow$ prendo $x_0 \in \overset{\circ}{\overline{D(f)}}$

$x_t = x_0 + t(x - x_0)$ $t \in [0,1]$ e $x_t \in \overset{\circ}{\overline{D(f)}}$ $t < 1$

$\Rightarrow$ $f(x_t) \geq c$ $\forall\, t < 1$

$\Rightarrow$ $\varphi(t)$ è convessa su intervallo chiuso e $\varphi(t) \geq c$ $\forall\, t \in (0,1)$

$\Rightarrow \varphi(1) \geq c$ (Vedi note: una funzione convessa su $[a,b]$ è sci, si deduce dalla crescenza dei rapp incrementali)

TEOREMA Sia X un Banach riflessivo, $f : X \to]-\infty, +\infty]$ convessa, sci, COERCIVA, PROPRIA

$(\forall c \in \mathbb{R} \quad \exists R > 0$ tc $\|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \geq c)$

Allora f ammette minimo

Dim Dato che f è propria esiste $c = \inf_X f < +\infty$

Se prendo $K = \{x \in X \quad f(x) \leq c + 1\}$

K è CHIUSO (f è sci), K convesso, $K \neq \emptyset$ ($\Rightarrow K$ è deb chiuso.)

K è limitato perché f è coerciva

Dato che X è riflessivo $\Rightarrow K$ è deb. compatto

Dato che f è sci + CONVESSA $\Rightarrow$ sci DEBOLE

$\Rightarrow$ f ha minimo su K $\Rightarrow$ f ha minimo su X per coercitività.

SOTTODIFFERENZIALI DI FUNZIONI CONVESSE

DEF X SVTLC, di Hausdorff, $X^* =$ duale

$x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$ $\quad x \in X$, $x^* \in X^*$

$f : X \to]-\infty, +\infty]$ se $x_0 \in D(f)$ e $x_0^* \in X^*$ dico che x_0^* è un SOTTODIFFERENZIALE per f in x_0 se

$\forall x \in X \qquad f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle$

indico con $\partial f(x_0) = \{ x_0^* \text{ sottodiff. per } f \text{ in } x_0 \}$

SI VEDE che $\partial f(x_0)$ è un convesso CHIUSO in $\mathcal{X}^*$
(chiuso rispetto a w^*)

Ex Provare a vedere nel caso generale (facile in Banach o Hilbert
dove posso usare succ)

Abuso di NOTAZIONE $\partial f(x_0)$ è sia l'insieme che un suo generico
elemento

OSS $\partial f(x)$ può essere vuoto
CONVENIAMO che se $x_0 \notin D(f) \Rightarrow \partial f(x_0) = \emptyset$

OSS $x \to \partial f(x)$ (che va da $\mathcal{X}$ in $2^{\mathcal{X}^*}$)
è "MONOTONO"
$$0 \leq \langle x_2 - x_1, x_2^* - x_1^* \rangle \quad \forall x_1 x_2 \in \mathcal{X} \text{ e } x_i^* \in \partial f(x_i)$$
(Si fa come in dimensione finita)

OSS Se $\partial f(x_0) \neq \emptyset \Rightarrow f$ è SCI in x_0

OSS Se $f: \mathcal{X} \to]-\infty, +\infty]$ e $x_0 \in \mathcal{X}$, $x_0^* \in \mathcal{X}$
dico che $x_0^* \in \partial f(x_0) \iff f(x_0) = \bar{f}(x_0)$, $x_0^* \in \bar{f}(x_0)$
dove $\bar{f} = \overline{co}(f)$

Dim Ricordo che $\bar{f} \leq f$ se f è SCI in $x_0 \Rightarrow \bar{f}(x_0) = f(x_0)$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x_0^* \in \partial f(x_0) \Rightarrow$ $f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle}_{\text{è una forma Affine}}$

$\Rightarrow$ per def $\bar{f}$ $\qquad \bar{f}(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle \geq$ ($\bar{f} \leq f$)

(è il sup delle forme affini sotto f)

$\geq \bar{f}(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle \Rightarrow x_0^* \in \partial \bar{f}(x_0)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\bar{f}(x) \geq \overset{f(x_0)}{\overline{f}(x_0)} + \langle x - x_0, x_0^* \rangle$

$f(x) \geq \bar{f}(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle \Rightarrow x_0^* \in \partial f(x_0)$

DEF Se $K \subset \mathcal{X}$ K convesso, $x_0 \in K$, definisco il cono normale a K in x_0

$$N_K(x_0) = \{ u^* \in \mathcal{X}^* : \langle x - x_0, u^* \rangle \leq 0 \ \forall x \in K \}$$

Si vede che $N_K(x_0)$ è un cono convesso chiuso per (w^*)

e $N_K(x_0) = \partial \chi_K(x_0)$

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in K \\ +\infty & x \notin K \end{cases}$$

Dim solo l'uguaglianza

$u^* \in N_K(x_0)$ $x_0 \in K$

$$\chi_K(x) \geq \overset{0}{\chi_K(x_0)} + \langle x - x_0, u^* \rangle \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad (u^* \in \partial \chi_K(x_0))$$

se $x \in K$ $\Updownarrow$

$$0 \geq \langle x - x_0, u^* \rangle \quad (u^* \in N_K(x_0))$$

PROP $f : \mathcal{X} \to]-\infty, +\infty]$ convessa, $x_0 \in D(f)$

① se $x_0^* \in \partial f(x_0) \Rightarrow (x_0^*, -1) \in N_{epi(f)}(x_0, f(x_0))$

Dim $\forall x \in \mathcal{X}$ $f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle$

Se $(x, y) \in epi(f)$ $x \in D(f)$, $y \geq f(x)$

$\Rightarrow y \geq f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x_0^* \rangle$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq (f(x)-y) + \langle x-x_0, x_0^* \rangle =$$

$$= \langle (x,y)-(x_0,f(x_0)), (x_0^*,-1) \rangle$$

DOMANDA $\quad N_{epi(f)}(x_0,f(x_0)) \overset{??}{=} \{ t(x_0^*,-1) : t \geq 0 \quad x_0^* \in \partial f(x_0) \}$

RISPOSTA (PARZIALE) se $x_0 \in \mathring{D}(f)$, se $(\nu^*, w) \in N_{epi(f)}(x_0,f(x_0))$

$$\Rightarrow \quad w < 0 \quad \text{oppure} \quad (\nu^*, w) = (0,0)$$

$\forall (x,y) \in epi(f)$

$$\langle x-x_0, \nu^* \rangle + (y-f(x_0))\, w \leq 0$$

Se $x = x_0$ e $y \geq f(x_0) \Rightarrow (y-f(x_0))\, w \leq 0 \Rightarrow w < 0$

Se $w = 0$

$$\langle x-x_0, \nu^* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathring{D}(f)$$

Dato che $x_0 \in \mathring{D}(f) \Rightarrow x = x_0 + h$ con $h \in U \in \underset{\text{intorno}}{\mathcal{I}_0}$ t.c. $x_0 + U \subset \mathring{D}(f)$

$$\Rightarrow \quad \langle \pm h, \nu^* \rangle \leq 0 \quad \forall h \in U$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nu^* = 0}$$

TORNANDO ALLA DOMANDA (RISPOSTA AFF. nel caso $x_0 \in \mathring{D}(f)$)

se $x_0 \in \mathring{D}(f)$ e $(\nu^*, w) \in N_{epi(f)}(x_0,f(x_0))$

$\Rightarrow$ se $w < 0 \Rightarrow \left(-\dfrac{\nu^*}{w}, -1\right) \in N_{epi(f)}(x_0, f(x_0))$

se faccio vedere che questo sta in $\partial f(x_0)$ ho finito

$$\langle x-x_0, -\frac{\nu^*}{w} \rangle - (f(x)-f(x_0)) \leq 0 \qquad \forall x \in D(f)$$

$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + \langle x-x_0, -\dfrac{\nu^*}{w} \rangle$ quindi è ok

LEZIONE 08

Titolo nota 24/03/2020

CALCOLO SOTTODIFFERENZIALE

Ricordiamo che $f: \mathcal{X} \to]-\infty, +\infty]$ $x_0 \in D(f) = \{x \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$

$$x^* \in \partial f(x_0)$$
$$\iff f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x^* \rangle \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

FATTO Date $f, g: \mathcal{X} \to]-\infty, +\infty]$ convesse, preso $x_0 \in D(f) \cap D(g) = D(f+g)$

se $x_1^* \in \partial f(x_0)$ e $x_2^* \in \partial g(x_0)$
$$\Rightarrow x_1^* + x_2^* \in \partial(f+g)(x_0)$$

$$\Rightarrow \partial f(x_0) + \partial g(x_0) \subset \partial(f+g)(x_0)$$

OSS Se f è convessa e differenziabile in x_0
$$\Rightarrow \partial f(x_0) = \{f'(x_0)\} \to df(x_0)$$

TEOREMA (DI SOMMA)

Siano $f, g: \mathcal{X} \to]-\infty, +\infty]$ convesse, $x_0 \in D(f+g) = D(f) \cap D(g)$

Suppongo esista $\bar{x} \in D(f) \cap D(g)$ con f continua in $\bar{x}$

$$\Rightarrow \partial(f+g)(x_0) = \partial f(x_0) + \partial g(x_0) \quad \forall x_0 \in D(f+g)$$

Dim $\boxed{\supseteq}$ sempre vera.

$\boxed{\subseteq}$ devo dimostrare che dato $x^* \in \partial(f+g)(x_0)$

$\Rightarrow \exists\, x_1^* \in \partial f(x_0)$ $x_2^* \in \partial g(x_0)$ tc $x^* = x_1^* + x_2^*$

(in più ho che se $\partial(f+g)(x_0) \neq \emptyset \Rightarrow \partial f(x_0) \neq \emptyset$ e $\partial g(x_0) \neq \emptyset$)

Prendo x^* tc

$$f(x)+g(x) \geq f(x_0)+g(x_0) + \langle x-x_0, x^* \rangle \quad \forall x \in X$$

Chiamo $f_1(x) = f(x) - f(x_0) - \langle x - x_0, x^* \rangle$

$g_1(x) = g(x) - g(x_0)$

f_1 e g_1 sono convesse, e f_1 è continua in $\bar{x}$

e da sopra $f_1(x) + g_1(x) \geq 0$ e $f_1(x_0) = 0$ $g_1(x_0) = 0$

Chiamo $K_1 = \text{epi}(f_1)$ $K_2 = \{(x,y) \mid (x,-y) \in \text{epi}(g_1)\}$

Sono convessi e $\mathring{K}_1 \neq \emptyset$ perché $(\bar{x}, f_1(\bar{x})+\varepsilon) \in \mathring{K}_1$

e $K_2 \neq \emptyset$ perché $\bar{x} \in D(g_1)$

Voglio dire che $\mathring{K}_1 \cap K_2 = \emptyset$

se ci fosse un punto $(x,y) \in \mathring{K}_1 \cap K_2$

$x \in \mathring{D}(f_1) \cap D(g_1)$

perché $\mathring{K}_1 = \{(x,y) \mid x \in \mathring{D}(f_1) \text{ e } y > f(x)\}$ (segue dalla cont. in $\bar{x}$)

$$\left.\begin{array}{l} y > f_1(x) \\ -y \geq g_1(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 > f_1(x) + g_1(x) \quad \text{ASSURDO}$$

posso applicare il primo teo di separazione di Hahn-Banach

$\exists \ (w_0^*, \eta_0) \in X^* \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ tale che

$$\langle x', w_0^* \rangle + y' \eta_0 > \langle x'', w_0^* \rangle + y'' \eta_0 \qquad \forall (x', y') \in \mathring{K}_1, \ (x'', y'') \in K_2$$

Per la caratterizzazione di $\mathring{K}_1$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \langle x', w_0^* \rangle + y' \eta_0 \geq \langle x'', w_0^* \rangle + y'' \eta_0 \qquad \forall x' \in D(f_1) \ y' \geq f_1(x'), \ \forall x'' \in D(g_1) \ -y'' \geq g_1(x'')$$

Prendo $x' = x'' = x_0 \Rightarrow y' > f(x_0) = 0$ $\quad y'' = -g_1(x_0) = 0$

$$\Rightarrow y'\eta_0 \geq 0$$

Dico che $\eta_0 > 0$ perché se fosse $\eta_0 = 0$

$$\langle x', w_0^* \rangle \geq \langle x'', w_0^* \rangle \quad \forall x' \in D(f_1) \quad \forall x'' \in D(g_1)$$

$x'' = \bar{x}$ e $x' = \bar{x} \pm h \in D(f_1)$ per h piccolo (sta ancora in $D(f_1)$ per continuità)

$\langle \pm h, w_0^* \rangle \geq 0 \Rightarrow w_0^* = 0$ assurdo perché $(w_0^*, \eta_0) = (0,0)$!!

Dunque $\eta_0 > 0$

$$\langle x', w_0^* \rangle + y'\eta_0 \geq \langle x'', w_0^* \rangle + y''\eta_0$$

Divido per η_0

$$(*) \quad \langle x', \frac{w_0^*}{\eta_0} \rangle + y' \geq \langle x'', \frac{w_0^*}{\eta_0} \rangle + y''$$

Prendo $x' = x \in D(f_1)$ $y' = f_1(x)$

$x'' = x_0$ $y'' = g_1(x_0) = 0$

$$\langle x, \frac{w_0}{\eta_0} \rangle + f_1(x) \geq \langle x_0, \frac{w_0^*}{\eta_0} \rangle$$

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x^* - \frac{w_0^*}{\eta_0} \rangle$$

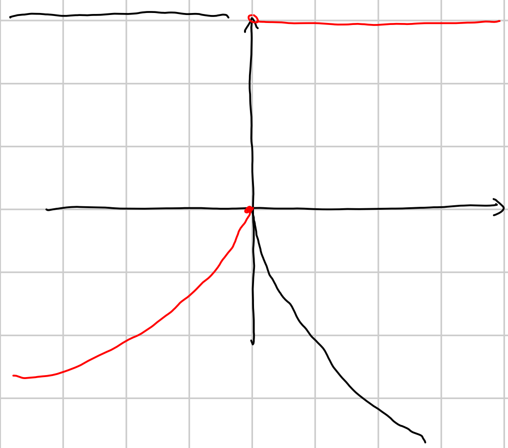
$$\Rightarrow \underbrace{x^* - \frac{w_0^*}{\eta_0}}_{= x_1^*} \in \partial f(x_0)$$

Prendo $x' = x_0$ $y' = f(x_0) = 0$ e $x'' = x \in D(g_1)$ $y'' = -g_1(x)$

$$\xRightarrow{\text{sost in } (*)} g(x) \geq g(x_0) + \langle x - x_0, \frac{w_0^*}{\eta_0} \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{w_0^*}{\eta_0}}_{= x_2^*} \in \partial g(x) \qquad \Rightarrow x_1^* + x_2^* = x^*$$

OSS in generale la regola della somma non vale



$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geq 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = f(-x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x \leq 0 \\ +\infty & x > 0 \end{cases}$$

0 è l'unico punto in $D(f) \cap D(g)$

ma $\partial f(0) = \emptyset$ e $\partial g(0) = \emptyset$

ma $(f+g) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ +\infty & x \neq 0 \end{cases} = \chi_{\{0\}}$

$\Rightarrow \partial(f+g)(0) = \mathbb{R} \neq \partial f(0) + \partial g(0) = \emptyset$

CONSEGUENZA : Normali dell'intersezione

PROP Siano K_1, K_2 convessi, sia $x_0 \in K_1 \cap K_2$.
Suppongo $\mathring{K}_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Allora chiamando $K = K_1 \cap K_2$

$$N_K(x_0) = \{ \nu_1 + \nu_2 : \nu_1 \in N_{K_1}(x_0),\ \nu_2 \in N_{K_2}(x_0) \}$$

Dim $f = \chi_{K_1}$ $g = \chi_{K_1}$ so che esiste $\bar{x} \in \mathring{D}(f) \cap D(g)$ in cui f è continua.

Inoltre se $h(x) = f(x) + g(x) \iff h = \chi_K$

Dunque per il teo

$$\begin{array}{ccccc} \partial h(x_0) & = & \partial f(x_0) & + & \partial g(x_0) \\ \| & & \| & & \| \\ N_K(x_0) & & N_{K_1}(x_0) & & N_{K_2}(x_0) \end{array}$$

Ricordando

Conseguenza 2 sottodifferenziale di $f \vee g = \max\{f, g\}$

PROP Date $f, g : X \to]-\infty, +\infty]$ convesse $x_0 \in D(f) \cap D(g)$

suppongo che f e g siano continue in x_0

tali che $f(x_0) = g(x_0)$

Allora se $h(x) = \max(f(x), g(x))$ si ha $(g(x_0) = f(x_0) = h(x_0) = y_0)$

$$\partial h(x_0) = \{ t x_1^* + (1-t) x_2^* : x_1^* \in \partial f(x_0),\ x_2^* \in \partial g(x_0),\ t \in [0,1] \}$$

Dim mi basa che $epi(h) = epi(f) \cap epi(g)$

$$\Rightarrow N_{epi(h)}(x_0) = N_{epi(f)}(x_0) + N_{epi(g)}(x_0)$$

Prendo $x^* \in \partial h(x_0) \Rightarrow (x^*, -1) \in N_{epi(h)}(x_0, y_0)$

$\Rightarrow \exists\ (x_1^*, \eta_1) \in N_{epi(f)}(x_0, y_0)$ e $(x_2^*, \eta_2) \in N_{epi(g)}(x_0, y_0)$

$$x_1^* + x_2^* = x^* \quad e \quad \eta_1 + \eta_2 = -1$$

Dato che f, g sono continue in $x_0 \Rightarrow$ $\eta_1 < 0$ $\quad \eta_2 < 0$ (una volta la volta scorsa)

dato che le normali sono coni $\Rightarrow$

$$\left(-\frac{x_1^*}{\eta_1}, -1 \right) \in N_{epi(f)}(x_0, y_0) \iff -\frac{x_1^*}{\eta_2} \in \partial f(x_0)$$

$$\left(-\frac{x_2^*}{\eta_2}, -1 \right) \in N_{epi(g)}(x_0, y_0) \iff -\frac{x_2^*}{\eta_2} \in \partial f(x_0)$$

$$\Rightarrow x^* = -\eta_1 \left(-\frac{x_1^*}{\eta_1} \right) - \eta_2 \left(-\frac{x_1^*}{\eta_2} \right) \overset{-1 = \eta_1 + \eta_2}{=}$$

$$= \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \left(-\frac{x_1^*}{\eta_1} \right) + \frac{\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \left(-\frac{x_1^*}{\eta_2} \right) \iff x^* \in \partial h(x_0)$$

Prop Data $f : \mathcal{X} \to]-\infty, +\infty]$ convessa $\Rightarrow$ $\forall x_0 \in \mathring{D}(f)$ $\quad \partial f(x_0) \neq \emptyset$

Dim chiamo $g(x) = \chi_{\{x_0\}}(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ +\infty & x \neq x_0 \end{cases}$

$$\partial g(x_0) = \mathcal{X}^* \qquad (\text{Se } x \neq x_0 \quad x \notin D(g) \Rightarrow \partial g(x) = \emptyset)$$

Prendo $h = f+g$ e applico il teorema di somma

lo posso fare perché $x_0 \in \mathring{D}(f)$ e f è convessa $\Rightarrow$ f è continua in x_0

$\Rightarrow \partial h(x_0) = \partial f(x_0) + \partial g(x_0)$

Ma $h(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{se } x = x_0 \\ +\infty \end{cases}$ $\Rightarrow \partial h(x_0) = \mathcal{X}^* \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ per il teo della somma $\partial f(x_0) \neq \emptyset$

TEOREMA Sia $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ S.V.T.L.C., $g: \mathcal{Y} \to]-\infty, +\infty]$ convessa e $L: D(L) \to \mathcal{Y}$ lineare, "illimitato" con dominio $D(L)$ sottospazio lineare denso in $\mathcal{X}$

Per L è definito l'aggiunto $L^*\ \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$

più precisamente $D(L^*) = \{y^* \in \mathcal{Y}^* : \underbrace{y^* \circ L}_{\text{di suo è definito su } D(L)}$ si estende a tutto $\mathcal{X}$, e $y^* \circ L \in \mathcal{X}^*\}$

se $y^* \in D(L^*) \Rightarrow L^* \circ y^* = y^* \circ L$ (esteso a $\mathcal{X}$)

Chiamo $f(x) = g(Lx)$ $\qquad D(f) = \{x \in D(L) : Lx \in D(g)\}$

f è convessa (perché è lineare)

Suppongo $\bar{x} \in D(f)$: g è continua su $\bar{y} = L(\bar{x})$

Allora $\forall x_0 \in D(f)$ posto $y_0 = Lx_0$

si ha che $\partial f(x_0) = L^* \partial g(y_0) = \{x^* \in \mathcal{X}^* ; \exists y^* \in \partial g(y_0) \cap D(L^*), x^* = L^* y^*\}$

Dim $\supseteq$ se $y^* \in \partial g(y_0) \cap D(L^*)$ $\quad x^* = L^* y^* \Rightarrow$

facile

$\forall x \in D(f)$

$f(x) = g(Lx) \geq \overset{g(Lx_0)}{g(y_0)} + \langle Lx - y_0, y^* \rangle =$

$= f(x_0) + \langle Lx - Lx_0, y^* \rangle \overset{L \text{ è AUTOAGGIUNTO}}{=}$

$= f(x_0) + \langle x - x_0, L^* y^* \rangle$

$\subseteq$ $\qquad$ Parto da un $x^* \in \partial f(x_0)$ cioè

$(*)\quad f(x) = g(Lx) \geq g(Lx_0) + \langle Lx - Lx_0, x^* \rangle \quad \forall x \in D(L)$
con $Lx \in D(g)$

Prendo $C \subseteq Y \times \mathbb{R}$

$C = \{ (Lx, g(y_0) + \langle x - x_0, x^* \rangle) \mid x \in D(L) \}$ è un convesso (è uno spazio affine)

Poi considero $\text{epi}(g) \subset Y \times \mathbb{R}$ e suppongo che per ipotesi
in Y, $\mathring{\text{epi}}(g) \neq \emptyset$

Dico che C e $\mathring{\text{epi}}(g)$ sono disgiunti.
Se ci fosse un (y, t) in comune.

$\Rightarrow \quad y \in \mathring{D}(g) \quad e \quad t > g(y) \quad (i)$

ed $\exists x \in D(L) \quad y = Lx \quad e \quad t = g(y_0) + \langle x - x_0, x^* \rangle \quad (ii)$

$(i) - (ii)$

$$0 > \underset{\overset{\|}{g(Lx)}}{g(y)} - g(y_0) - \langle x - x_0, x^* \rangle$$

e questo è in contrasto con $(*)$

Uso HAHN - BANACH Trovo $w^* \in Y^*$ e $\eta \in \mathbb{R}$ e $(w^*, \eta) = (0,0)$
e avremo

sarebbe < ma passando da $\mathring{\text{epi}}(g)$ a $\text{epi}(g)$ ho $\leq$ come prima

$\langle y', w^* \rangle + t' \eta \leq \langle y'', w^* \rangle + t'' \eta$

$\forall (y', t') \in C \quad e \quad \forall (y'', t'') \in \text{epi}(g)$

$\Updownarrow$

$\langle Lx', w^* \rangle + (g(y_0) + \langle x' - x_0, x^* \rangle) \eta \leq \langle y'', w^* \rangle + t'' \eta$

$\forall x' \in D(L) \quad e \quad y'' \in D(g) \quad \forall t'' \geq g(y'')$

Se $x' = x_0 \quad e \quad y'' = y_0$

$\cancel{\langle y_0, w^* \rangle} + g(y_0) \eta \leq \cancel{\langle y_0, w^* \rangle} + t'' \eta$

$\eta (t'' - g(y_0)) \geq 0 \quad \Rightarrow \eta \geq 0$

Dico che $\eta \neq 0$ perché

$$\langle Lx', w^* \rangle \leq \langle y'', w^* \rangle \quad \forall x' \in D(L) \quad \forall y'' \in D(g)$$

$x' = \bar{x}$ e $y'' = \bar{y} \pm h$ per h piccolo

$$\Rightarrow \langle \pm h, w^* \rangle \leq 0 \quad \Rightarrow w^* = 0 \quad \text{ASSURDO}$$

$$\langle Lx', w^* \rangle + (g(y_0) + \langle x' - x_0, x^* \rangle)\eta \leq \langle y'', w^* \rangle + t''\eta$$

divido per η

(*) $$\langle Lx', \frac{w^*}{\eta} \rangle + g(y_0) + \langle x' - x_0, x^* \rangle \leq \langle y'', \frac{w^*}{\eta} \rangle + t''$$

$\forall x' \in D(L) \quad \forall y'' \in D(g)$

prendo $x' = x_0 \quad y'' = y \in D(g) \quad t'' = g(y)$

$$\langle \underset{\overset{\|}{y_0}}{L x_0}, \frac{w^*}{\eta} \rangle + g(y_0) \leq \langle y, \frac{w^*}{\eta} \rangle + g(y)$$

$$\Rightarrow g(y) \geq g(y_0) + \langle y - y_0, -\frac{w^*}{\eta} \rangle \Rightarrow -\frac{w^*}{\eta} \in \partial g(y_0)$$

Prendo $y = y_0 \quad x \in D(L)$ in (*)

$$\langle Lx, \frac{w^*}{\eta} \rangle + g(y_0) + \langle x - x_0, x^* \rangle \leq \langle Lx_0, \frac{w^*}{\eta} \rangle + g(y_0)$$

$$\langle x - x_0, x^* \rangle \leq \langle L(x - x_0), -\frac{w^*}{\eta} \rangle$$

Dato che $D(L)$ lineare e denso

$\Rightarrow$ (chiamando $x - x_0 = \pm h$) ho "=" $\langle x - x_0, x^* \rangle = \langle x - x_0, L^*(-\frac{w^*}{\eta}) \rangle$

e questo "=" vale $\forall h \in D(L)$ per densità e linearità.

$$-\frac{w^*}{\eta} \in D(L^*) \quad \text{e} \quad x^* = L^*\left(-\frac{w^*}{\eta}\right)$$

cioè $\langle h, x^* \rangle_{X^*} = \langle Lh, -\frac{w^*}{\eta} \rangle_{Y^*}$

$\Rightarrow \left(-\frac{w^*}{\eta} \circ L\right)(h) = x^*(h) \quad \forall h \in D(L) \quad \text{con } x^* \in X^*$

$\searrow$ quindi questo si estende a X^*

per densità.

LEZIONE 09

Titolo nota 25/03/2020

Derivata secondo Gateaux

Def $A \subset \mathcal{X}$ un aperto e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$

Dato $x_0 \in A$ ($f(x_0) \in \mathbb{R}$) e $v \in \mathcal{X}$ chiamo derivata direzionale di f in x_0 lungo v SE ESISTE (ANCHE INFINITO)

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)v$$

Def f è differenziabile secondo G.. in x_0 se $\forall v \in \mathcal{X}$ esiste $f'(x_0)v$ e esiste $x^* \in \mathcal{X}^*$ tc $f'(x_0)v = \langle v, x^* \rangle$ $\forall v \in \mathcal{X}$.

Se questo avviene indico $f'(x_0) = x^*$

(cioè $f'(x_0)(v) = \langle v, f'(x_0) \rangle_{\mathcal{X}\mathcal{X}^*}$

oss in questo caso $f'(x_0)v \in \mathbb{R}$ scriveremo come un elemento x^*

Lemma Se $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, f CONVESSA, dato $x_0 \in D(f)$

① $\forall x \in \mathcal{X}$ $\exists$ $f'(x_0)(x - x_0)$ $\left(\in [-\infty, +\infty[\right)$

② Dato $x^* \in \mathcal{X}^*$ si ha $x^* \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow$

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq \langle x - x_0, x^* \rangle \quad \forall x \in D(f)$$

Dim ① segue dal fatto che $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ è convessa, reale in $[0,1]$

$\Rightarrow \exists\ \varphi'_+(t)$ $\forall t \in [0,1]$ $\varphi'_+(t) \in \mathbb{R}$ se $t \in]0,1[$

$\varphi'_+(0) \in [-\infty, +\infty[$

Si vede che $\varphi'_+(0) = f'(x_0)(x - x_0)$

② $\boxed{\Rightarrow}$ Se $x^* \in \partial f(x_0)$ so che

$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x^* \rangle \quad \forall x \in X$

sia $t \in]0,1]$ e considero $x_t = x_0 + t(x - x_0)$

$$f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0) \geq \langle t(x - x_0), x^* \rangle$$

divido per t e mando $t \to 0^+$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \geq \langle x - x_0, x^* \rangle$$

$$\shortparallel$$

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq \langle x - x_0, x^* \rangle$$

$\boxed{\Leftarrow}$ supponendo valga la dis sopra.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(\overset{x_0 \text{ valutato in } 1 \text{ è } x}{x_1}) - f(x_0)}{1} \underset{\substack{\text{i rapporti incrementali di } \varphi(t) = f(x_t) \\ \text{essendo convessa sono monotoni}}}{\geq} \frac{f(x_t) - f(x_0)}{t} \underset{t \to 0}{\overset{\text{il limite esiste per monotonia.}}{\geq}} f'(x_0)(x - x_0) \geq$$

$$\geq \langle x - x_0, x^* \rangle$$

Prop Se $f : \mathcal{X} \to]-\infty, +\infty]$, convessa, $x_0 \in D(f)$. Allora

(a) Se f è diff secondo Gateaux in $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$
($f'(x_0)$ è l'unico sottodiff)

(b) Se f è continua in x_0, $\partial f(x_0) = \{x_0^*\}$ (unico punto) $x_0^* \in \mathcal{H}^*$
$\Rightarrow f$ è diff. secondo Gateaux e $f'(x_0) = x_0^*$

Dim Dico che $f'(x_0) \in \partial f(x_0)$ infatti dalla ② del lemma
$f'(x_0) \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)(x - x_0) \geq \langle x - x_0, f'(x_0) \rangle$
Ma è uguale quindi è ok

Devo dimostrare che il solo elemento in $\partial f(x_0)$

Sia $x^* \in \partial f(x_0)$, so che dato $h \in \mathcal{X}$ $x_0+th \in D(f)$ per $0<t<$ piccolo

Dato che $f'(x_0)(h)$ esiste finito

Dato $x^* \in \partial f(x_0)$ uso ② del lemma

$$\Rightarrow \quad f'(x_0)(x_0+th-x_0) \geq \langle x_0+th-x_0, x^* \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\langle h, f'(x_0)\rangle}{\underset{\shortparallel}{f'(x_0)\,h}} \geq \langle h, x^* \rangle \quad \forall h \in \mathcal{X}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = x^*$$ (ottengo l'uguale con $\pm h$)

(b) Fisso $h \in \mathcal{X}$ dato che f è continua in x_0 so che $x_0+h \in D(f)$ per h in un intorno di 0

$$\Rightarrow \quad f(x_0+h) - f(x_0) \geq \langle h, x_0^* \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \geq \langle h, x_0^* \rangle \qquad 0<t<1$$

$$\Rightarrow \quad f'_+(x_0)(h) \geq \langle h, x_0^* \rangle$$ $\forall h \in$ intorno di 0; $\forall h \in \mathcal{X}$ (per omogeneità della dis)

Analogamente $x_0-th \in D(f) \Rightarrow$ stesso discorso

$$f'_-(x_0)(h) \leq \langle h, x_0^* \rangle \leq f'_+(x_0)(h)$$

$\Rightarrow \quad m = \langle h, x_0^* \rangle$

m è un sottodiff per la funzione $\varphi(t) = f(x_0+th)$
$-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ in $t_0=0$

$$\varphi(x_0+th) \geq \varphi(x_0) + mt$$

Questo significa che il segmento $\{(x_0+th, f(x_0)+mt)\} = S$ non interseca l' $\mathring{epi}(f)$ $\Rightarrow$ per Hahn-Banach

$\exists\ (w^*, \eta) \in X^* \times \mathbb{R}$ tc

$$\langle x, w^* \rangle + y\eta \leq \langle x_0+th, w^* \rangle + (f(x_0)+mt)\, y$$

$\forall (x,y) \in epi(f)$ $\forall -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$

Ragionando come sempre si ottiene $\eta < 0 \Rightarrow$ divido per

$$\langle x, \frac{w^*}{\eta} \rangle + y \geq \langle x_0+th, \frac{w^*}{\eta} \rangle + f(x_0) + mt$$

$\forall x\ D(f)$ $\forall\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$

retta $y = f(x)$

Se $t = 0$

$$\langle x, \frac{w^*}{\eta} \rangle + f(x) \geq \langle x_0, \frac{w^*}{\eta} \rangle + f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, -\underbrace{\frac{w^*}{\eta}}_{\in \partial f(x_0) = x_0^*} \rangle$$

prendo $t \neq 0$ e $x = x_0$

$$\cancel{\langle x, -x_0^* \rangle} + \cancel{f(x_0)} \geq \cancel{\langle x, -x_0^* \rangle} + \langle th, -x_0^* \rangle + tm + \cancel{f(x_0)}$$

dato che i t sono sia >0 che <0 ottengo che

$$\langle h, x_0^* \rangle = m \quad \forall h \in X$$

Dunque se $m \in [f'_-(x_0)h, f'_+(x_0)(h)] \Rightarrow m = \langle h, x_0^* \rangle$

$$\Rightarrow \quad \langle h, x_0^* \rangle = f'_-(x_0)(h) = f'_+(x_0)(h) \quad \forall h \in X$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad f'(x_0)(h)$$

FATTO $f : X \to \mathbb{R}$ ed è diff. secondo Gateaux, allora sono equivalenti

(a) f è convessa

(b) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x, x_0 \in X$

(c) $\langle x_2 - x_1, f'(x_2) - f(x_1) \rangle \geq 0$ (f' è monotona)

Dim Analoga a una variabile.

Prop Se $g : X \to]-\infty, +\infty]$ convessa, $f : X \to \mathbb{R}$ convessa $x_0 \in D(g)$ e f è diff secondo Gateaux in x_0

Allora $\partial(f+g)(x_0) = \partial g(x_0) + f'(x_0)$

Dim Supponiamo che $\partial g(x_0) + f'(x_0) \subset \partial(f+g)(x_0)$

Devo far vedere $\subseteq$. Prendo $x^* \in \partial(f+g)(x_0)$, $x \in D(g)$

$$g(x) - g(x_0) \geq \langle x - x_0, x^* \rangle - f(x) - f(x_0) =$$
$$= \langle x-x_0, x^* \rangle - \langle x-x_0, f'(x_0) \rangle - \left(f(x) - f(x_0) - \langle x-x_0, f'(x_0) \rangle \right)$$

Se $t \in]0,1[$ $x_t = x_0 + t(x-x_0) \in D(g)$ e metto x_t al posto di x

monotonia rapp. inc. ... ciò segue che $x = x_t$

$$g(x) - g(x_0) = \frac{g(x_1) - g(x_0)}{1} \geq \frac{g(x_t) - g(x_0)}{t} \geq$$

$$\geq \langle \overbrace{\frac{x_t - x_0}{t}}^{x-x_0}, x^* - f'(x_0) \rangle - \left(\frac{f(x_t) - f(x_0)}{t} - \langle \frac{x_t - x_0}{t}, f'(x_0) \rangle \right)$$

$\to 0$ $t \to 0^+$ per diff di f

$$\Rightarrow \quad g(x) - g(x_0) \geq \langle x - x_0 , \underbrace{x^* - f'(x_0)}_{\in \partial g(x_0)} \rangle$$

che è la tesi

<u>oss</u> Se $\mathcal{H}$ è un Hilbert identifico $\mathcal{H}^*$ con $\mathcal{H}$

$$\underset{\subset \mathcal{H}}{\partial f(x_0)} = \{ \alpha \in \mathcal{H} : f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0 , \alpha \rangle$$

prodotto scalare in $\mathcal{H}$

<u>Teorema</u> Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert

$f : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$ propria, convessa e sci. Allora

$\forall \lambda > 0 \quad \forall y \in \mathcal{H} \quad \exists x \in D(f)$ tale che $y - \lambda x \in \partial f(x)$

(In altri termini l'operatore multivoco $x \to \lambda x + \partial f(x)$ è surgettivo)

$$\lambda x + \partial f(x) = (\lambda I + \partial f)(x) = y$$

Inoltre la x detta sopra (quella ottenuta fissata y) è tale

$$\| x_1 - x_2 \| \leq \frac{1}{\lambda} \| y_1 - y_2 \|$$

dove $\quad x_i = (\lambda I + \partial f)^{-1} (y_i)$

<u>Dim</u> Dimostro prima la dis dato tutto il resto

Dati $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ suppongo che $\exists x_1, x_2 \in D(f)$

tali che $\quad y_i - \lambda x_i \in \partial f(x_i) \qquad i = 1, 2$

per la monotonia di ∂f ho

prodotto scalare su X

$$\langle (y_2 - \lambda x_2) - (y_1 - \lambda x_1) , x_2 - x_1 \rangle \geq 0$$

$$\langle y_2 - y_1 , x_2 - x_1 \rangle - \lambda \| x_2 - x_1 \|^2 \geq 0$$

$$\cancel{\| x_2 - x_1 \|} \, \| y_2 - y_1 \| \underset{C\text{-}S}{\geq} \langle y_2 - y_1 , x_2 - x_1 \rangle \geq \lambda \| x_2 - x_1 \|^{\cancel{2}}$$

da cui la tesi

(la dis mi dà l'unicità sia y e $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \| x_1 - x_2 \| \leq \frac{1}{\lambda} \| y - y \|$

Vediamo l'esistenza: dato y $\forall$ considero $I_y : \mathcal{H} \to]-\infty, +\infty]$

$$I_y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 - \langle x, y\rangle$$

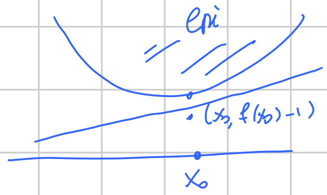
$I_y(x)$ è convesso e sci e proprio, dico che $I_y(x)$ è coercivo.

Prop Prima di che esistono $c \in \mathbb{R}$ e $\alpha_0 \in \mathcal{H}$ tc

$$f(x) \geq -c + \langle x, \alpha_0\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

FATTO GENERALE.

infatti so che $x_0 \in D(f) \Rightarrow (x_0, f(x_0)-1) \notin \mathrm{epi}(f)$



Per HB $\exists (\alpha, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}$ che separa $\mathrm{epi}(f)$ da $\{(x_0, f(x_0)-1)\}$.

Con i soliti discorsi $\eta \neq 0$ e trovo $\alpha_1 = \frac{\alpha}{\eta}$ tc

$$\langle \alpha_1, x\rangle + f(x) \geq \underbrace{\langle \alpha_1, x_0\rangle + f(x_0) - 1}_{-c}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq -c - \langle \alpha_1, x\rangle$$

$$\Rightarrow I_y(x) \geq -c - \langle x, \alpha_0\rangle + \frac{\lambda}{2}\|x\|^2 - \langle x, y\rangle \xrightarrow[\text{se } \|x\| \to +\infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow I_y(x)$ è coercivo dunque ammette minimo in $\bar{x}$

$$\Leftrightarrow 0 \in \partial I_y(\bar{x}) \doteq \partial f(\bar{x}) + \lambda \bar{x} - y$$

ho usato il teorema della somma di sottodiff. e che il sotto diff. di $\|x\|^2$ è $2x$

ESEMPIO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto limitato

Sono $H^1_0(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$

Dalle immersioni si ha che $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ $p \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}$ per $N \geq 3$

si immerge

· l'immersione è compatta se $p < 2^*$

e $H^1_0(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle_{H^1_0} = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \quad \left(\Rightarrow \|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)$$

Voglio considerare $f(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega G(x,u) \, dx$

considero $G : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

i) G è di Carathéodory, cioè

$\forall s \in \mathbb{R}$ $G(\cdot, s)$ è misurabile in Ω

per q.o. $x \in \Omega$ $G(x, \cdot)$ è continua.

Questa condizione implica che u misurabile $\Rightarrow$ $x \to G(x, u(x))$ è misurabile

Voglio che la mappa $L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ sia ben definita
$u \longrightarrow G(x, u(x))$

Lo posso avere se e solo se

$$|G(x,s)| \leq C \left(1 + \|s\|^{\frac{p}{q}}\right)$$

Dim se $u \in L^p \Rightarrow \int_\Omega |G(x,u)|^q dx \leq C + \int_\Omega |u|^p < +\infty$

inoltre quella mappa è continua.

Se poi suppongo che

per q.o $x \in \Omega$ $G(x,\cdot)$ è C^1 in S

$\frac{\partial G}{\partial s}(x,s) = g(x,s)$ $\Big(\Rightarrow g$ è di Carathéodory

e suppongo anche $|g(x,s)| \leq C\left(1+|u|^{2^*-1}\right) = C\left(1+|u|^{\frac{N+2}{N-2}}\right)$

$\Rightarrow \left(|G(x,s)| \leq C_1 (1+|u|^{2^*}, \text{ se } G(x,0)=0\right)$

Sotto queste ipotesi la funzione

$\mathcal{G}(u) = \int_\Omega G(x,u)\,dx$ è di classe C^1 su L^{2^*}

e $\mathcal{G}'(u)[v] = \int_\Omega g(x,u(x))\,v \quad \forall v \in L^{2^*}$

Se poi G è convesso in $S \Rightarrow \mathcal{G}$ è convesso

LEZIONE 10

Titolo nota 13/04/2020

Sia $f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega G(x,u)\, dx$

Con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto limitato, $N \geq 3$

- $p \leq 2^*$
- Sia $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

  (i) g è di Carathéodory cioè

  $g(\cdot, s)$ è misurabile per ogni s

  $g(x, \cdot)$ è continua per q.o. $x \in \mathbb{R}$

  (ii) $\exists\, a > 0$ t.c. $|g(x,s)| \leq a(1 + |s|^{p-1})$

FATTO Se g è di Carathéodory allora $\forall u$ misurabile $\Rightarrow$ $g(x,u)$ è misurabile.

Inoltre se vale la stima (ii), allora $u \longrightarrow g(x,u)$ è ben definita e continua da $L^p(\Omega)$ in $L^{p'}(\Omega)$

Poniamo $G(x,s) = \int_0^s g(x,\sigma)\, d\sigma$, si vede che

G è di Carathéodory cioè

- $G(\cdot, s)$ è misurabile per ogni s
- $G(x, \cdot)$ è C^1 per quasi ogni x

  $G'(x,s) = g(x,s)$
- $|G(x,s)| \leq a(1 + |s|^p)$

Allora $u \longrightarrow G(\cdot, u)$ è ben definita e continua da L^p in L^1

e quindi $u \longrightarrow \int_\Omega G(x,u)$ è ben definita ed è continua da L^p in $\mathbb{R}$

dico inoltre che $\mathcal{G}(u) = \int_\Omega G(x,u)\,dx$ è C^1

e che che $d\,\mathcal{G}(u) = g(\cdot,u)$ $(\in L^{p'})$

infatti facendo la derivata di Gateaux

$$\mathcal{G}'(u)(v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathcal{G}(u+tv) - \mathcal{G}(u)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{G(u+tv) - G(u)}{t}\,dx \xrightarrow[\text{per Lebesgue}]{} \int_\Omega g(x,u)\,v$$

Inoltre dato che $u \to g(\cdot,u)$ è una funzione continua da $L^p \to L^{p'}$. Quindi per il teorema del differenziale totale $\mathcal{G} \in C^1$

- Supponiamo ora che $G(x,\cdot)$ è convessa per q.o x (quindi $g(x,\cdot)$ è crescente per q.o x)

$\Rightarrow$ $\mathcal{G}(u)$ è convessa.

<u>Definisco</u> $I : L^p \to]-\infty,\infty]$ ponendo

$$I(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega G(x,u)\,dx & \text{se } u \in H^1_0(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$D(I) = H^1_0(\Omega)$, inoltre I è convessa.

<u>Prop</u> I è sci

<u>Dim</u> Sia $u_n \to u$ in L^p voglio mostrare che

$$\liminf_{n\to\infty} I(u_n) \geq I(u)$$

Se $\liminf_{n\to\infty} I(u_n) = +\infty$ è ok.

Suppongo che $\liminf_{n\to\infty} I(u_n) < +\infty$ allora posso passare

ad un'estratta t.c. $I(u_n) \leq C < +\infty$

Dato che G è convessa $\Rightarrow \exists\ \gamma \in \mathbb{R}\ \ \exists\, \alpha \in L^{p'}$ tali che

$$G(u) \geq -\gamma - \langle u, \alpha \rangle_{L^p, L^{p'}} = -\gamma - \int_\Omega u\,\alpha \qquad \forall u \in L^p$$

$$\Rightarrow -C \geq I(u_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx + \int_\Omega G(x, u_n)\,dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \gamma - \int \alpha\, u_n\,dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1_0} - \gamma - \|\alpha\|_{L^{p'}}\|u_n\|_{L^p} \overset{\text{imm. di Sobolev}}{\geq}$$

$$\geq \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1_0} - \gamma - C_1\|\alpha\|_{L^{p'}}\|u_n\|_{H^1_0}$$

$\Rightarrow \|u_n\|_{H^1_0}$ è limitata $\Rightarrow u_n \rightharpoonup u'$ a meno di sottosuccessione in H^1_0 $\Rightarrow u_n \rightharpoonup u'$ in L^p (per continuità della immersione di H^1_0 in L^p)

$\Rightarrow u' = u$. Quindi la norma è sci rispetto alla convergenza debole. e $u \to G(u)$ è convessa e continua allora è continua rispetto alla conv. debole in L^p

E questo è la tesi.

Vediamo chi sono i sottodifferenziali di I.

$u \in D(I)$, cioè $u \in H^1_0$

Supponiamo che $\exists\ \alpha \in \partial I(u_0)$ $(\alpha \in L^p)$ dunque

$$I(u) \geq I(u_0) + \langle u - u_0, \alpha \rangle_{L^p, L^{p'}} \qquad \forall u \in H^1_0 \text{ (sarebbe } L^p)$$

$$I(u) \geq I(u_0) + \int_\Omega (u - u_0)\,\alpha\,dx$$

Sia $u = u_0 + tv$ con $v \in H^1_0$ $\boxed{t > 0}$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_0 + tv)|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2\,dx + \int_\Omega G(x, u_0 + tv) - \int_\Omega G(x, u_0)\,dx \geq t\int_\Omega \alpha\, v$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx} + t\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \cancel{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2} + \int_\Omega G(x,u_0+tv) - G(x,u_0) \geq t\int_\Omega \alpha v$$

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v + \frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega \frac{G(x,u_0+tv)-G(x,u_0)}{t} \geq \int_\Omega \alpha v$$

$t \to 0$

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v + \int_\Omega g(x,u_0)\, v \geq \int_\Omega \alpha v\, dx$$

Potevamo ricordare che $\alpha \in \partial I(u_0) \Leftrightarrow I'(u_0)(v) \geq \langle u-u_0, \alpha \rangle$

Se uso $-v$ al posto di v ottengo "=" allora

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla v + \int g(x,u_0)\, v = \int \alpha v \quad \forall v \in H_0^1$$

questo equivale a dire che

$\alpha \in \partial I(u_0) \Leftrightarrow -\Delta u_0 \in L^{p'}$ e si ha

$-\Delta u_0 + g(\cdot,u_0) = \alpha$ (nel senso delle distribuzioni)

Quindi la sottodiff. di I in $u_0 \Rightarrow$ che u_0 è un po' più regolare (cioè il $-\Delta u_0$ è sommabile)

Viceversa se $-\Delta u_0 \in L^{p'} \to I'(u_0)(v) = \int_\Omega \nabla u_0 \nabla v + \int_\Omega g(x,u_0) v =$

$$= \int_\Omega \left(-\Delta u_0 + g(x,u_0)\right) v\, dx \Rightarrow -\Delta u_0 + g(x,u_0) \in \partial I(u_0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Dunque } \partial I(u_0) \neq \emptyset \Leftrightarrow -\Delta u_0 \in L^{p'} \\ \text{e in questo caso } \partial I(u_0) = \{-\Delta u_0 + g(\cdot,u_0)\}\end{array}}$$

Ne segue che $\bar{u}$ è punto di minimo, che esiste per coercività (è il conto che $\|u_n\|$ è limitata), sci e convessità.
allora $\bar{u}$ è sol. debole di

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} + g(\cdot, \bar{u}) = 0 & \text{in } \Omega \\ \bar{u} = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

Consideriamo "lo stesso" definito su $H^1_0(\Omega)$ ovvero

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega G(x,u)\,dx \qquad u \in H^1_0$$

questa è C^1 su H^1_0 e ho che vale

$$I'(u)(v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega g(x,u) v\,dx \qquad \forall v \in H^1_0$$

Chi è il $dI(u_0)$? lo chiamo $\alpha \in H^{-1}$ e deve verificare

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx + \int_\Omega g(x,u)\,dx = \langle \alpha, v \rangle \quad \forall v \in H^1_0$$

Se identifico H^{-1} con H^1_0 (posso farlo perché sono Hilbert)
quindi vedo $\alpha \in H^1_0$ come quel vettore t.c

$$\langle v, \alpha \rangle_{H^1_0\, H^{-1}} = \langle v, \alpha \rangle_{H^1_0\, H^1_0} = \int_\Omega \nabla v \nabla \alpha$$

Quindi

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega g(x,u) v = \int \nabla \alpha \nabla v \quad \forall v \in H^1_0$$

$$\iff \quad \alpha = u + i^* g(\cdot, u)$$

dove $i : H^1_0 \longrightarrow L^p$ e $i^* : L^{p'} \longrightarrow H^{-1}$

$$\langle w, i(v) \rangle_{L^{p'} L^p} = \langle i^*(w), v \rangle_{H^{-1} H^1_0} \qquad \forall v \in H^1_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\int w v\,dx = \langle i^*(w), v \rangle_{H^{-1} H^1_0} = \int \nabla i^*(w) \nabla v\,dx$$

identifico H^{-1} con H^1_0 come prima

<u>Dunque</u> se $I : H^1_0 \to \mathbb{R} \Rightarrow I \in C^1$ e

il $dI(u_0) = u_0 + i^* g(\cdot, u_0)$

<u>OSS</u> componendo i^* con la rapp. di Riesz in realtà posso vedere

$i^* : L^p \to H^1_0$

<u>OSS</u> La caratterizzazione di $\partial I(u)$ vista all'inizio (su L^p) si può ricavare dal teorema di composizione.

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega G(x,u) \quad \text{su } L^p$$

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega G(x,u) \quad \text{su } H^1_0$$

Chiamo $J : \underset{\underset{H^1_0}{\parallel}}{D(I)} \subset L^p \longrightarrow H^1_0 \quad J(u) = u$

è lineare con dominio denso e $I = \mathcal{E} \circ I$

se applico il teorema di composizione ricavando che

$$\partial I(u_0) = J^* \partial \mathcal{E}(u_0) \quad (\text{ESERCIZIO}).$$

PRINCIPIO VARIAZIONALE DI EKELAND

<u>TEOREMA</u>

(X, d) uno spazio metrico completo e $f : X \to]-\infty, \infty]$ sci, propria e inferiormente limitata.

Se $\bar{x} \in X$ e $\varepsilon > 0$ sono tali che

$$f(\bar{x}) < \inf_X f(x) + \varepsilon$$

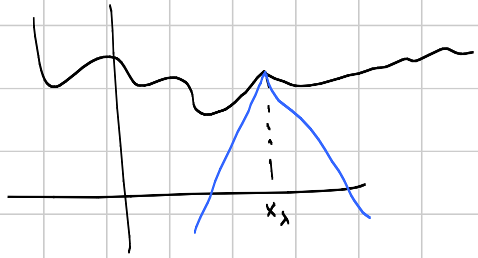
e $\lambda > 0 \Rightarrow \exists x_\lambda \in X$ tc

(a) $f(x_\lambda) \leq f(\bar{x})$

(b) $d(x_\lambda, \bar{x}) \leq \lambda$

(c) $f(x) \geq f(x_\lambda) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_\lambda) \quad \forall x \in X$

geometricamente la (c) dice che esiste un cono tc



dove l'ampiezza è $\frac{\varepsilon}{\lambda}$

(più $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ è piccolo, più il cono è aperto)

In qualche senso la (c) dice che $|f'(x_\lambda)| \le \frac{\varepsilon}{\lambda}$

<u>Dim</u> Per comodità introduco una relazione di ordine parziale su X dove
$$x' \prec x'' \iff f(x') \le f(x'') - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x', x'')$$

Vediamo che è una relazione d'ordine

- $x' \prec x'$ <u>ok</u>
- $x' \prec x''$ e $x'' \prec x' \Rightarrow x' = x''$

$$\cancel{f(x')} \le f(x'') - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x', x'')$$
$$f(x'') \le \cancel{f(x')} - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x', x'') \quad \text{sommando}$$
$$0 \le -2\frac{\varepsilon}{\lambda} d(x', x'') \Rightarrow d(x', x'') = 0 \Rightarrow x' = x''$$

- $x' \prec x''$ e $x'' \prec x''' \Rightarrow x' \prec x'''$

$$f(x') \le \cancel{f(x'')} - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x', x'')$$
$$\cancel{f(x'')} \le f(x''') - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x'', x''') \quad \text{sommando}$$
$$f(x') \le f(x''') - \frac{\varepsilon}{\lambda} \left(d(x', x'') + d(x'', x''') \right) \le \quad \text{d. triangolare}$$
$$\le f(x''') - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x', x''')$$

Costruisco una successione $\{x_n\}$ in X e degli insiemi $S_n \subseteq X$ come segue $x_1 = \bar{x}$ e $S_1 = \{x \in X, \ x \prec x_1\}$

$x_2 \in S_1$ tc $f(x_2) < \inf_{S_1} f + \frac{\varepsilon}{2^2}$ $S_2 = \{x \in X : x < x_2\}$

: RICORSIVAMENTE.

$x_{n+1} \in S_n$ tc $f(x_{n+1}) < \inf_{S_n} f + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ $S_{n+1} = \{x \in X : x < x_{n+1}\}$

- Noto che usato $S_n \neq \emptyset$ $\forall n$
  infatti $\bar{x} = x_1 \in S_1$ (perché f è limitata inf) $\Rightarrow S_n \neq \emptyset$ per ricorsività.
- Per costruzione $x_{n+1} < x_n$
- Inoltre $S_{n+1} \subset S_n$ per costruzione usando la transitività di $<$
  $\{x < x_{n+1}\} \subset \{x < x_n\}$ perché $x_{n+1} \in S_n$.
- S_n sono tutti chiusi perché f è sci

Dico che se $x \in S_n \Rightarrow d(x, x_n) \leq \frac{\lambda}{2^n}$ infatti:

infatti: se $x \in S_n \Rightarrow f(x) \leq f(x_n) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_n)$

inoltre $x \in S_{n-1} \Rightarrow f(x_n) \leq \inf_{S_{n-1}} f + \frac{\lambda}{2^n} \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_n) \leq f(x_n) - f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\Rightarrow d(x, x_n) \leq \frac{\lambda}{2^n}$$

dico che $\{x_n\}$ è di Cauchy in X forse ci vuole $\leq d(x_n, x) + d(x, x_{n+1})$

Siano $m, n \geq \bar{n} \in \mathbb{N}$, allora

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\lambda}{2^k} \leq$$

$$\leq \sum_{k=\bar{n}}^{\infty} \frac{\lambda}{2^k} = \frac{\lambda}{2^{\bar{n}-1}} < \varepsilon \text{ se } \bar{n} \text{ è grande}$$

- Dato che X è completo $\Rightarrow \exists x \in X$ $x_n \to x$
- Inoltre $x_\lambda \in S_n$ $\forall n$ (fissato n_0 so che $x_n \in S_{n_0}$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_\lambda \in S_{n_0}$)
  $x_\lambda \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \Rightarrow x_\lambda < x_n$ $\forall n$
  intersezione di chiusi è chiuso

- Se $x < x_\lambda \Rightarrow x = x_\lambda$ perché

$$x < x_n \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \Rightarrow x_n \to x \Rightarrow x_\lambda = x$$

In realtà ho mostrato $\bigcap S_n = \{x_\lambda\}$. Dico che x_λ verifica (a) (b) (c)

(a) $x_\lambda < x_1 = \bar{x}$ $\qquad f(x_\lambda) \leq f(x_1) - d(x_\lambda, x_1) < f(\bar{x})$

(b) Il conto di prima su $d(x_m, x_n)$

si vede che

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{mandando } m \to \infty}}{d(x_\lambda, x_n)} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda}{2^k} = \frac{\lambda}{2^{n-1}}$$

Se prendo $n = 1$ $\quad d(x_\lambda, x_1) = d(x_\lambda, \bar{x}) \leq \lambda$

(c) Se fosse falsa esisterebbe un $x \in X$ tale che

$$f(x) < f(x_\lambda) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_\lambda, x) \Rightarrow x < x_\lambda$$

ma per quanto sopra $x = x_\lambda$

<u>Def</u> Sia (X, d) metrico, $\quad f : X \to]-\infty, +\infty]$

e $x_0 \in D(f) = \{x : f(x) < +\infty\}$ Definisco la

"<u>pendenza</u>" di f in x_0

$$|\nabla f|(x_0) = -\liminf_{x \to x_0}{}^{+} \frac{f(x) - f(x_0)}{d(x, x_0)} =$$

$$= -\sup_{r > 0} \underbrace{\inf_{x \in B(x_0, r)} \frac{f(x) - f(x_0)}{d(x, x_0)}}_{\leq 0} \qquad \left(\geq 0 \text{ perché c'è sempre } x_0 \in B(x_0, r) \right)$$

da ristudiare

[Si può anche scrivere $|\nabla f| = \inf \{ c \geq 0 : f(x) \geq f(x_0) - c\, d(x, x_0) + o(d(x, x_0)) \}$

= "ampiezza del cono sottotangente più ampio che riesco a mettere a meno di o-piccolo"]

$$C > |\nabla f|(x_0) \iff f(x) \geq f(x_0) - c\, d(x, x_0) \quad \forall x \overset{\text{vicino}}{\simeq} x_0$$

Prop Se $\mathcal{X}$ è uno spazio vettoriale normato, $f : \mathcal{X} \longrightarrow]-\infty, \infty]$ convessa allora

$$M \geq |\nabla f|(x_0) \iff f(x) \geq f(x_0) - M \|x - x_0\| \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ Se $M \geq |\nabla f|(x_0)$ preso $x_t = x_0 + t(x - x_0)$ $t \in (0,1)$

$$f(x) - f(x_0) \overset{f \text{ convessa}}{\geq} \frac{f(x_t) - f(x_0)}{t} \overset{M \geq |\nabla f|(x_0)}{\geq} \frac{-Mt\|x - x_0\| - o(t\|x - x_0\|)}{t}$$

$$= -M\|x - x_0\| - \frac{o(t)}{t}$$

mandando t a 0 ho la tesi.

$\boxed{\Leftarrow}$ Viceversa se $f(x) \geq f(x_0) - M\|x - x_0\| \Rightarrow |\nabla f|(x_0) \leq M$

Dunque nel caso f convessa

$$|\nabla f|(x_0) = \min \{ M : f(x) \geq f(x_0) - M\|x - x_0\| \}$$

perché un minimo e non inf ?

Teorema $\mathcal{X}$ Banach, $f : \mathcal{X} \to]-\infty, \infty]$ sci, propria e limitata inf allora esiste $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ t.c.

- $f(x_n) \to \inf_{\mathcal{X}} f$
- $|\nabla f|(x_n) \to 0$

LEZIONE 11

Titolo nota 01/04/2020

<u>Def</u> (X, d) metrico $\qquad f : X \to]-\infty, \infty]$

x_0 tc $\quad f(x_0) < +\infty$

$$|\nabla f|(x_0) = \inf \{ M \mid f(x) \geq f(x_0) - M\, d(x, x_0) + o(d(x, x_0)) \}$$

<u>Lemma</u> X spazio normato, $f : X \to]-\infty, \infty]$ convessa se

supponiamo che $\exists \; x_0 \in X$, $\quad M \geq 0$ tali che

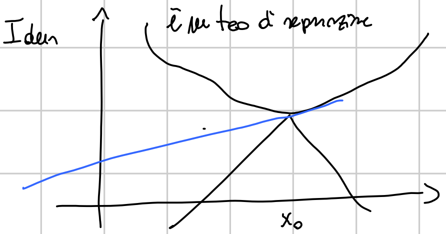
$$f(x) \geq f(x_0) - M \|x - x_0\|$$

Allora esiste $x_0^* \in X^*$ tale che $\|x_0^*\| \leq M$ e

$$f(x) \geq f(x_0) - \langle x - x_0, x_0^* \rangle \quad \forall x \in X$$

Idea

è un teo di separazione



<u>Dim</u> considero epi(f) e

$K = \{ (x, y) \in X \times \mathbb{R} : y < f(x_0) - M\|x - x_0\| \}$

K è aperto.

Sono entrambi convessi e K è aperto $\Rightarrow$ uso Hahn-Banach

trovo $\quad x^* \in X^*$ e $\eta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\langle x', x^* \rangle + \eta\, y' \leq \langle x'', x^* \rangle + \eta\, y''$$

$\forall \; x' \in D(f) \quad$ e $\quad y' \geq f(x')$

$\forall \; (x'', y'') \in D(f)$

$\eta \leq 0 \quad$ prendendo y' grande $\quad$ (con ragionamenti simili $\to$ uso che il cono è aperto)

inoltre $\quad \eta \neq 0$

divido per η

il minimo segue solo nel cono chiuso

$$\langle x', \frac{x^*}{-\eta} \rangle - y' \leq \langle x'', \frac{x^*}{\eta} \rangle - y''$$

prendo $x' = x \in D(f)$ $\quad y' = f(x)$ $\quad x'' = x_0$ e $y'' = f(x_0)$

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) - \langle x - x_0, \overset{x_0^*}{\left(-\frac{x^*}{\eta}\right)} \rangle$$

devo mostrare $\|x_0^*\| \leq M$.

prendo $x'' = x \in \mathcal{X}$ e $y'' = f(x_0) - M\|x - x_0\|$

$x' = x_0$ $\quad y' = f(x_0)$

$$\langle x_0, x_0^* \rangle - \cancel{f(x_0)} \leq \langle x, x_0^* \rangle - \cancel{f(x_0)} + M\|x - x_0\|$$

$$\Rightarrow \quad M \geq \langle \frac{x_0 - x}{\|x - x_0\|}, x_0^* \rangle \qquad \forall x \in \mathcal{X}$$

$$\Rightarrow \quad M \geq \|x_0^*\|$$

<u>Prop</u> Se $\mathcal{X}$ è normato e $f : \mathcal{X} \longrightarrow]-\infty, \infty]$ convessa allora se $x_0 \in D(f)$. Sono equivalenti:

(a) $|\nabla f|(x_0) < \infty$

(b) $\partial f(x_0) \neq \emptyset$

inoltre se sono vere $\quad |\nabla f|(x_0) = \min \{ \|x^*\|, \ x^* \in \partial f(x_0) \}$

<u>Dim</u> $\quad$ (b) $\Rightarrow$ (a) $\quad$ $x_0^* \in \partial f(x_0)$

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x^* \rangle \geq$$

$$\geq f(x_0) - \|x_0^*\| \, \|x - x_0\|$$

$$\Rightarrow \quad |\nabla f|(x_0) \leq \|x_0^*\| \quad \forall \ x_0^* \in \partial f(x_0)$$

(b) $\Rightarrow$ (a) è il lemma.

perché il lemma praticamente dice che esiste $x_0^* \in \partial f(x_0)$ tc $\|x_0^*\| \leq |\nabla f|(x_0)$

$$\Rightarrow |\nabla f|(x_0) = \min \{ \|x^*\|, \ x^* \in \partial f(x_0) \}$$

<u>Teorema</u> Se X è un Banach $f: X \to]-\infty, \infty]$, convessa sci propria e inferiormente limitata

Allora $\exists (x_n)$ in $D(f)$, $\exists (x_n^*)$ in X^* tali che

$f(x_n) \to \inf_X f$

$x_n^* \in \partial f(x_n)$ $\quad x_n^* \to 0$

("l'estremo inferiore si realizza se una succ di pti quasi critici")

<u>Dim</u> Da EKELAND $\Rightarrow \exists (u_n)$ tc $f(u_n) \to \inf_X f$ e $|\nabla f|(x_n) \to 0$ (Vale anche in un metrico completo)

Basta prendere $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$ e $\lambda = \frac{1}{n}$ in EKELAND.

prendo un $\tilde{x}_n$ tc $f(\tilde{x}_n) \leq \inf_X f + \frac{1}{n^2}$

uso EKELAND e trovo $f(x_n) \leq f(\tilde{x}_n) \leq \inf_X f + \frac{1}{n^2}$

$$f(x) \geq f(x_n) - \overset{\varepsilon/\lambda}{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{n}}} d(x, x_n) \iff |\nabla f|(x_n) \leq \frac{1}{n}$$

Se X è Banach e f è convessa $\forall n \ \exists x_n^*$ con $x_n^* \in \partial f(x_n)$ e $\|x_n^*\| \leq |\nabla f|(x_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow$ la tesi.

ABBIAMO DIMOSTRATO

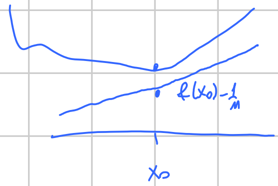
Teo (X,d) metrico completo, f sci propria

$\inf f > -\infty \implies \exists\, (x_n) : f(x_n) \to \inf_X f$

$|\nabla f|(x_n) \to 0$

Teorema X è un Banach $f: X \to]-\infty, \infty]$ è convessa e sci.

Allora $\{x : \partial f(x) \neq \emptyset\}$ è denso in $D(f)$



Dim Sia $x_0 \in D(f)$, dato che $f(x_0) < +\infty$

$\forall n$ trovo $w_n^* \in X^*$ tc $f(x) \geq f(x_0) - \frac{1}{n} + \langle x - x_0, w_n^* \rangle$

(è una separazione fra $\mathrm{epi}(f)$ e $\{(x_0, f(x_0) - \frac{1}{n})\}$)

Prendo $f_1(x) = f(x) - f(x_0) - \langle x - x_0, w_n^* \rangle$ ← convessa e sci

$f_1(x) \geq -\frac{1}{n} \quad \forall n \qquad f_1(x_0) = 0$

Uso EKELAND con $\bar{x} = x_0$ prendo $\varepsilon = \frac{2}{n}$ $\lambda = \frac{1}{n}$

mi serve $f(\bar{x}) = 0 < +\frac{1}{n} = -\frac{1}{n} + \frac{2}{n} \leq \inf_X f_1 + \varepsilon$

$f_1 \geq -\frac{1}{n}$

trovo x_n tc $f(x_n) \leq f_1(x_0) = 0$

$d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{n} \qquad (x_n \to x_0)$

$|\nabla f|(x_n) \leq 2 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$

usando la prop. di prima $\Rightarrow \exists\, x_n^* \in \partial f_1(x_n)$

$\Rightarrow \partial f(x_n) = \partial f_1(x_n) - w_n^* \ni x_n^* - w_n^*$

$\Rightarrow \partial f(x_n) \neq \emptyset$ con x_n arbitrariamente vicino a x_0

Teorema Se $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ sci, propria, $\inf_{\mathcal{X}} f > -\infty$

$\mathcal{X}$ Banach. f sia diff. secondo Gateaux in tutto $\mathcal{X}$

Allora esiste $\{x_n\} \subseteq \mathcal{X}$ tc $f(x_n) \to \inf_{\mathcal{X}} f$

$f'(x_n) \to 0$

Dim trovo $(x_n) \subset \mathcal{X}$ con

$$f(x_n) \leq \inf_{\mathcal{X}} f + \frac{1}{n^2} \qquad \varepsilon = \frac{1}{n^2} \qquad \lambda = \frac{1}{n}$$

$$f(x) \geq f(x_n) - \frac{1}{n} \| x_n - x \| \qquad \forall x \in \mathcal{X}$$

Prendo $x = x_n + tv$

$$\frac{f(x_n + tv) - f(x_n)}{t} \geq \frac{1}{n} \|v\|$$

$$\Rightarrow f'(x_n)(v) \geq \frac{1}{n} \|v\| \qquad \forall v \in \mathcal{X}$$

$$\Rightarrow \|f'(x_n)\| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f'(x_n) \to 0$$

$\boxed{\text{DUALITÀ}}$ (CONIUGATA ...)

Consideriamo $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ due spazi vettoriali e

sia $a : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathbb{R}$ bilineare. suppongo che

(S1) $a(x_1, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in \mathcal{X}_2 \Rightarrow x_1 = 0$

(S2) $a(x_1, x_2) = 0 \quad \forall x_1 \in \mathcal{X}_1 \Rightarrow x_2 = 0$

in questo caso dico che $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ sono in dualità e indico

$$\langle x_1, x_2 \rangle = a(x_1, x_2)$$

OSS che $\mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}_1'$ se identifico $x_1 \longrightarrow \langle x_1, x_2 \rangle$
e allo stesso modo $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2'$

CONSIDERO su $\mathcal{X}_1$ la topologia $\sigma(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ cioè la minima topologia che rende continui tutti gli elementi di $\mathcal{X}_2$.
mentre su $\mathcal{X}_2$ metto $\sigma(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1)$

Lemma Se $v_1 \dots v_n \in \mathcal{X}_2$ linearmente indipendenti allora esistono $u_1 \dots u_n \in \mathcal{X}_1$ tali che
$$\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$
($\Rightarrow u_1 \dots u_n$ sono l. ind.)

Dim Per induzione su n. Se $n=1$ si deduce da (S.2)
se $\forall x_1 \quad \langle x_1, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \mathcal{X}_1 = \{0\}$ altrimenti trovo
x_1 tc $\langle x_1, v_1 \rangle \neq 0 \Rightarrow u_1 = \dfrac{x_1}{\langle x_1, v_1 \rangle}$

$n \Rightarrow n+1$ sia $v_1 \dots v_n v_{n+1}$ l. indipendenti
so che esistono
$\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$ tc
$\langle \tilde{u}_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i j = 1 \dots n$
Pongo $M_1 = \operatorname{Span}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$
$M_2 = \{u \in \mathcal{X}_1 : \langle u, v_1 \rangle = \dots = \langle u, v_n \rangle = 0\}$

Dico che $\mathcal{X}_1 = M_1 \oplus M_2$

$M_1 \cap M_2 = \{0\} \qquad u = \lambda_1 \tilde{u}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{u}_n \in M_2$
$\Rightarrow \langle u, v_i \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

Dico $X_1 = M_1 \oplus M_2$

Se $u \in X_1$ chiamo $\lambda_i = \langle U, V_i \rangle \quad \forall i = 1 \dots n$

dico che $u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i \in M_2$

applicando V_j

$$\langle u, V_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \tilde{U}_i, V_j \rangle = \lambda_j - \lambda_j = 0$$

Dico che non è possibile che $\forall u \in M_2$

$\langle u, V_{n+1} \rangle = 0$

Se così fosse vero. dato $u \in X_1$ $\lambda_i = \langle u, v_i \rangle$ $i = 1 \dots n$

$$u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{u}_i \in M_2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle u, V_{n+1} \rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \tilde{u}_i, V_{n+1} \rangle = \langle u, V_{n+1} \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle U, V_i \rangle \mu_i =$$

(with $\mu_i = \langle \tilde{u}_i, V_{n+1} \rangle$)

$$= \langle U, V_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i V_i \rangle$$

$\Downarrow$ S.1 o S2

$V_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i V_i = 0$!! perché $V_1 \dots V_{n+1}$ l. ind.

Allora trovo $u_{n+1} \in M_2$ t.c. $\langle u_{n+1}, V_{n+1} \rangle = 1$

Se definisco $u_i = \tilde{u}_i - \langle \tilde{u}_i, V_i \rangle u_{n+1} \quad \forall i = 1 \dots n$

$\Rightarrow$ tesi.

Corollario Siano $v_1 \dots v_n \in \mathcal{X}_2$ $\overset{\text{l. ind.}}{\vee}$ Sia $\varphi \in \mathcal{X}_1'$

tale che $\forall x \in \mathcal{X}_1 \quad \langle x, v_1 \rangle = \dots = \langle x, v_n \rangle = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0$

Allora esistono $\lambda_1 \dots \lambda_n$ $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

Dim prendiamo $u_1 \dots u_n$ come nel lemma.

pongo $\lambda_i = \varphi(u_i)$

Data $u \in \mathcal{X}_1$ prendo $\mu_j = \langle u, v_j \rangle$ e definisco

$$u' = u - \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$$

Per costruzione $\langle u', v_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

$$\Rightarrow 0 = \varphi(u') = \varphi(u) - \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i\right) =$$

$$= \varphi(u) - \sum_{i=1}^{n} \langle u, v_j \rangle \lambda_j = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_j v_j$$

Prop Se $\varphi \in \mathcal{X}_1^* \Rightarrow \exists\, x_2 \in \mathcal{X}$ tc $\varphi(x_1) = \langle x_1, x_2 \rangle \quad \forall x_1 \in \mathcal{X}_1$

(su $\mathcal{X}_1$ c'è la topologia $\sigma(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$)

Dim Ricordo $\varphi \in \mathcal{X}_1^* \Leftrightarrow$ esiste una costante $k \in \mathbb{R}$ e $v_1 \dots v_n \in \mathcal{X}_2$ tale che

$$|\varphi(u)| \leq k \max_{i=1\dots n} |\langle u, v_i \rangle|$$

Applicando il corollario $\Rightarrow \varphi = \sum \lambda_i v_i \in \mathcal{X}$

Anticipazioni $\mathcal{X}_1^* = \mathcal{X}_2$ $(\mathcal{X}_2^* = \mathcal{X}_1)$ a meno di isomorfismo
per controllo sopra

Se $\mathcal{X}$ è munito (ho la "topologia forte" su $\mathcal{X}$ τ indotta da $\|\cdot\|$)
definisco $\mathcal{X}_\tau^* = (\mathcal{X}, \tau)^*$

$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$ $\quad \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_\tau^*$ $\quad \langle x, x^* \rangle = x^*(x)$ $\forall x^* \in \mathcal{X}_2$
$\forall x \in \mathcal{X}_1$

Verifica che valgono S1 e S2

La prop. precedente ci dice che
$(\mathcal{X}, w)^* = (\mathcal{X}^*, w^*)$
$(\mathcal{X}^*, w^*)^* = (\mathcal{X}, w)$

LEZIONE 12

Titolo nota 07/04/2020

$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ in dualità con $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Def Data $f : \mathcal{X}_1 \to [-\infty, \infty]$, definisco la coniugata
$f^* : \mathcal{X}_2 \to [-\infty, \infty]$

$$f^*(x_2) = \sup_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1) \quad \left(\in [-\infty, +\infty]\right)$$

Proprietà : Siano $f, g : \mathcal{X}_1 \to [-\infty, +\infty]$. Allora

(i) Se esiste $x_1 \in \mathcal{X}_1$ $f(x_1) = -\infty \Rightarrow f^*(x_2) = +\infty \ \forall x_2 \in \mathcal{X}$

(non è $\Leftrightarrow$ vedi dopo)

(ii) esiste $x_2 \in \mathcal{X}_2$ $f^*(x_2) = -\infty \Leftrightarrow f(x_1) = +\infty \ \forall x_1 \in \mathcal{X}_1$

$\Leftrightarrow f^*(x_2) = -\infty \ \forall x_2 \in \mathcal{X}_2$

(iii) f^* è convessa e sci

Segue dal fatto che f^* è sup di funzioni affini continue.

Perché la dualità è continua dalla scelta della top. della realtà scorsa.

(iv) $f^* = \overline{co}(f)^*$

Notiamo che

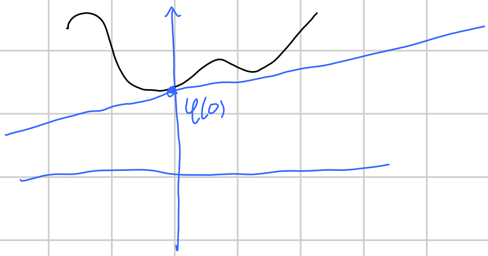
$f^*(x_1) = \sup_{x_1 \in \mathcal{X}} \langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1) =$

$= \min \{ c : c \geq \langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1) \ \forall x_1 \in \mathcal{X}_1 \} =$

$= \min \{ c : f(x_1) \geq \langle x_1, x_2 \rangle - c \ \forall x_1 \in \mathcal{X}_1 \}$

$= -\max \{ c \ \ f(x_1) \geq \underbrace{\langle x_1, x_2 \rangle + c}_{\varphi(x_1)} \ \forall x_1 \in \mathcal{X} \} =$

$= -\max \{ \varphi(0) : f(x_1) \geq \varphi(x_1) \ \ \varphi \text{ affine} \} = \circledast$



$$\circledast = -\max\left\{ \varphi(0) : \overline{co}(f) \geq \varphi(x_1) \quad \varphi \text{ affine} \right\} =$$ Passaggi analoghi a f per $\overline{co}(f)$

$$= \overline{co}(f)^*(x_2)$$

(v) Se $x_1 \in \mathcal{D}(f) = \{x_1 : f(x_1) \in \mathbb{R}\}$ allora

$$x_2 \in \partial f(x_1) \iff f(x_1) + f^*(x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $x_2 \in \partial f(x_1) \Rightarrow \underbrace{f(x') \geq f(x_1) + \langle x' - x_1, x_2 \rangle}_{(*)} \quad \forall x' \in \mathcal{X}$

$$f^*(x_2) = \sup_{x' \in \mathcal{X}_1} \langle x', x_2 \rangle - f(x') \geq \langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1)$$

perché x_1 è un candidato x'

da (*) $\sup_{x' \in \mathcal{X}'} \langle x', x_2 \rangle - f(x') \leq \langle x', x_2 \rangle - f(x_1) - \langle x' - x_1, x_2 \rangle$

$$= \langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1)$$

e quindi vale $\quad f^*(x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1)$

$\boxed{\Leftarrow}$ Per il viceversa si ragiona al rovescio

f^* è il sup su x_1 $\quad \forall x' \in \mathcal{X}_1$

$$f^*(x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1) \geq \langle x', x_2 \rangle - f(x')$$

$$f(x') \geq f(x_1) + \langle x' - x_1, x_2 \rangle \quad \forall x'$$

$$\Rightarrow x_2 \in \partial f(x_1)$$

(vi) $f^*(0) = -\inf f$

(vii) se $f \leq g \Rightarrow g^* \leq f^*$

(viii) se $\{f_i\}_{i \in I}$ una famiglia di funzioni

$$\left(\inf_{i\in I} f_i\right)^* = \sup_{i\in I}\left(f_i^*\right)$$

$$\left(\sup_{i\in I} f_i\right)^* \leq \inf_{i\in I}\left(f_i^*\right) \quad (\text{segue da vii}) \quad \left(\begin{matrix}\text{Avremo una}\\ \text{vale} =\\ \text{vedo dopo}\end{matrix}\right)$$

Dimostriamo la prima

Chiamo $f = \inf_{i\in I} f_i \Rightarrow -f = \sup_{i\in I} -f_i$

$$f^*(x_2) = \sup_{x_1\in\mathcal{H}_1} \langle x_1, x_2\rangle - f(x_1) = \sup_{x_1\in\mathcal{H}_1} \sup_{i\in I} \langle x_1, x_2\rangle - \overset{\text{non dipende da } i}{f_i(x_1)}$$

$$= \sup_{i\in I}\sup_{x_1} \langle x_1, x_2\rangle - f_i(x_1) = \sup_{i\in I}\left(f_i^*(x_2)\right)$$

(ix) Se $\lambda > 0$ $q\in\mathbb{R}$

$$\left(f(\lambda x_1)\right)^*(x_2) = f^*\left(\frac{x_2}{\lambda}\right) \qquad (f+q)^* = f^* - q$$

$$(\lambda f)^*(x_2) = \lambda f^*\left(\frac{x_2}{\lambda}\right) \qquad (f(-x))^* = f^*(-x)$$

- Chiamo $f_\lambda(x_1) = f(\lambda x_1)$

$$f_\lambda^*(x_2) = \sup_{x_1} \langle x_1, x_2\rangle - f(\lambda x_1) =$$

$$= \sup_{x'} \left\langle \frac{x'}{\lambda}, x_2\right\rangle - f(x') =$$

$$= \sup_{x'} \left\langle x', \frac{x_2}{\lambda}\right\rangle - f(x') = f^*\left(\frac{x_2}{\lambda}\right)$$

- $(\lambda f)^*(x_2) = \sup_{x_1} \langle x_1, x_2\rangle - \lambda f(x_1) =$

$$= \lambda \sup_{x_1} \left\langle x_1, \frac{x_2}{\lambda}\right\rangle - f(x_1) = \lambda f^*\left(\frac{x_2}{\lambda}\right)$$

- $(f+q)^*(x_2) = \overbrace{\sup_{x_1} \langle x_1, x_2\rangle - f(x_1)}^{f^*(x_2)} - q = f^*(x_2) - q$

- $(f(-x))^*(x_2) = \sup_{x_1} \langle x_1, x_2 \rangle - f(-x_1) =$
$= \sup_{x'} \langle -x', x_2 \rangle - f(x') =$
$= \sup_{x'} \langle +x', -x_2 \rangle - f(x') = f^*(-x_2)$

(x) • se $x_0 \in X_1$ $\quad f_{x_0}(x_1) = f(x_1 - x_0)$

$f^*_{x_0}(x_2) = f^*(x_2) + \langle x_0 - x_2 \rangle$

$f^*_{x_0}(x_2) = \sup_{x_1} \langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1 - x_0) \overset{x_1 - x_0 = x'}{=} \sup_{x'} \underbrace{\langle x', x_2 \rangle - f(x')}_{f^*(x_2)} + \langle x_0, x_2 \rangle$

• se $x_0 \in X_2$ $\quad f^*(x_2 - x_0) = (f + \langle \cdot, x_0 \rangle)^*(x_2)$

$f^*(x_2 - x_0) = \sup_{x_1} \langle x_1, x_2 - x_0 \rangle - f(x_1) =$

$= \sup_{x_1} \langle x_1, x_2 \rangle - (f(x_1) + \langle x_1, x_0 \rangle) =$

$= (f + \langle , x_0 \rangle)^*(x_2)$

(xi) $\quad f^{**}(x_1) = \overline{co}(f)(x_1)$ (Dove $f^{**} = (f^*)^*$ scambiando X^1 e X^2)

Infatti: $\overline{co}(f)(x_1) = \sup \{ \varphi(x_1) : \varphi \text{ affine } \varphi \le f \} =$

$= \sup \{ c + \langle x_1, x_2 \rangle : c \in \mathbb{R}\ x_2 \in X\ f(x') \ge c + \langle x', x_2 \rangle\ \forall x' \in X_1 \}$

$f^*(x_2) = \sup_{x'} \langle x', x_2 \rangle - f(x') \le \sup_{x'} \cancel{\langle x', x_2 \rangle} - c - \cancel{\langle x', x_2 \rangle}$

$f^*(x_2) \le -c$ $\quad = \sup \{ c + \langle x_1, x_2 \rangle : x_2 \in X_2\ f^*(x_2) \le -c \}$

$= \sup \{ \langle x_1, x_2 \rangle - f^*(x_2)\ ;\ x_2 \in X \} = f^{**}(x_1)$

<u>OSS</u> 1) $f^{***} = f^*$ (da sopra)

2) se f è pari $\Rightarrow f^*$ è pari

Prop Supponiamo $f : \mathcal{X}_1 \to]-\infty, \infty]$ propria

f convessa sci $\iff$ $f^{**} = f$

Dim f convessa sci $\iff$ $f = \overline{co}(f) = f^{**}$

oss f è propria $\iff$ f^* è propria.

Segue da (i) e (ii) (scrivere bene)

oss in (i) non vale $\Leftarrow$

se $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathbb{R}$ $f(x) = -x^2$

$\Rightarrow f^*(x) \equiv -\infty$

- Se f è propria allora $f(x_1) + f^*(x_2) \geq \langle x_1, x_2 \rangle$

e vale $=$ $\iff$ $x_2 \in \partial f(x_1)$

- Se f è convessa e sci vale anche

$f(x_1) + f^*(x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle \iff x_1 \in \partial f^*(x_2)$

(perché $f = \overline{co}(f)$ e uso a f^{**})

Alcuni esempi

(i) $c \in \mathbb{R}$ e $\tilde{x}_2 \in \mathcal{X}_2$ e $f(x_1) = c + \langle x_1, \tilde{x}_2 \rangle$ affine

$$\Rightarrow f^*(x_2) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x_2 \neq \tilde{x}_2 \\ -c & \text{se } x_2 = \tilde{x}_2 \end{cases}$$

$$f^*(x_2) = \sup_{x_1} \langle x_1, \underbrace{x_2 - \tilde{x}_2}_{\neq 0} \rangle - c = +\infty$$

Quindi $f^*(x_2) = -c + \chi_{\{\tilde{x}_2\}}(x_2)$

(ii) $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$ spazio normato , $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}^*$ con dualità ovvia

$\langle x_1, x_2 \rangle = x_2(x_1)$

Sia $\psi : [-\infty, +\infty] \longrightarrow]\infty, +\infty]$ convessa, sci, propria, pari

Poniamo $f(x) = \psi(\|x\|_{\mathcal{X}})$ Allora

$$f^*(x^*) = \psi^*(\|x^*\|_{\mathcal{X}^*})$$

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \langle x, x^* \rangle - \psi(\|x\|) =$$

una di queste da $\|x\|$

$$= \sup_{\rho \geq 0} \sup_{\|x\| = \rho} \langle x, x^* \rangle - \psi(\rho) =$$

$$= \sup_{\rho \geq 0} \Big(\underbrace{\sup_{\|x\| = \rho} \langle x, x^* \rangle}_{= \rho \|x^*\|} \Big) - \psi(\rho) =$$

$$= \sup_{\rho \geq 0} \rho \|x^*\| - \psi(\rho) \overset{\psi \text{ pari}}{=} \sup_{\rho \in \mathbb{R}} \rho \|x^*\| - \psi(\rho) \overset{\text{dualità in } \mathbb{R}}{=} \psi^*(\|x^*\|)$$

(iii) $E \subset \mathcal{X}$ $f = \chi_E$

$$f^*(x_2) = \sup_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \langle x_1, x_2 \rangle - \chi_E(x_1) = \sup_{x_1 \in E} \langle x_1, x_2 \rangle$$

Esempio $(\sup f_i)^* \neq \inf (f_i)^*$

Prop $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$ Banach riflessivo $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}^*$

$f : \mathcal{X} \to]-\infty, +\infty]$ propria debolmente sci e che

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$$

Allora f^* è finita ed è continua in ogni $x^* \in \mathcal{X}^*$

Dim $f^*(x_2)$ è finita perché $f^*(x_2) = \sup_{x_1} \left(\langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1) \right) =$

$$\overset{\substack{\text{coercivo} \\ + \text{ sci} \\ \in B(0,R) \\ \text{Deb. compatto} \\ \text{perché } \mathcal{X} \text{ è Banach riflessivo}}}{=} \max_{x_1 \in B(0,R)} \left(\langle x_1, x_2 \rangle - f(x_1) \right)$$

$\Rightarrow f^*(x^*) = \langle \bar{x}, x^* \rangle - f(\bar{x})$ per un certo $\bar{x} \in \mathcal{X}$

f^* è sempre sci, devo mostrare che f^* è semicontinua sup.

Sia $x_n^* \to x^*$ in $\mathcal{X}^*$ $\Rightarrow \{x_n^*\}$ è limitata

Sia M tc $\|x_n^*\| \leq M$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ prendo $x_n \in \mathcal{X}$ tc $f^*(x_n^*) = \langle x_n, x_n^* \rangle - f(x_n)$

(perché esiste x_n che realizza il max di prima $\forall n$)

Dico che x_n è limitata in $\mathcal{X}$

Dalla coercività deduco che $\exists R$ tc $\|x\| > R \Rightarrow f(x) \geq 2M\|x\|$

posso supporre che $RM \geq f(0) + 1$

Se $\|x\| \geq R$ si ha

$$\langle x, x_n^* \rangle - f(x) \leq \|x_n^*\| \, \|x\| - 2M\|x\| = \|x\| \left(\|x_n^*\| - 2M \right) \leq$$

$$\overset{\|x_n^*\| \leq M}{\leq} \|x\| (-M) \overset{\|x\| \geq M}{\leq} -RM \leq -f(0) - 1$$

x non può essere x_n perché $f^*(x_n^*) \geq -f(0)$ (per def)

$\Rightarrow x_n \in B(0,R) \quad \forall n$

Quindi posso estrarre x_{n_k} tc $x_{n_k} \to x \in B(0,R)$

$x^*_{n_k} \to x^*$ $\Rightarrow$

$$f^*(x^*_{n_k}) = \langle x_{n_k}, x^*_{n_k} \rangle - f(x_{n_k})$$

$$\limsup_{k\to\infty} f^*(x^*_{n_k}) = \limsup_{k\to\infty} \langle \overset{\text{debole}}{x_{n_k}}, \overset{\text{forte}}{x^*_{n_k}} \rangle - f(x_{n_k}) =$$

$$= \langle x, x^* \rangle - \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq$$

$$\leq \langle x, x^* \rangle - f(x)$$

$$\leq f^*(x^*)$$

Dunque se $x^*_n \to x^*$ esiste (n_k) tc

$$\limsup_{k\to\infty} f^*(x^*_{n_k}) \leq f^*(x^*)$$

$$\Updownarrow$$

$$\limsup_{x_2 \to x^*} f^*(x_2) \leq f^*(x^*) \Rightarrow f^* \text{ è scs}$$

LEZIONE 13

Titolo nota 08/04/2020

Controesempio non vale uguale

$$\left(\sup_{i\in I} f_i\right)^* \leq \inf_{i\in I} (f_i^*)$$

Esempio 1

$$f_n(x) = -\frac{x^2}{n} \qquad f_n^*(y) = +\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = f(x)=0 \qquad f^*(y) = \chi_{\{0\}} \neq +\infty$$

Ad esempio

$$f_n(x) = n - x^2 \qquad f_n^*(y) = +\infty$$

$$f(x) = \sup_n f_n(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow f^*(y) = -\infty$$

DUALITÀ e OTTIMIZZAZIONE

Abbiamo 2 coppie di spazi $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ e $(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$ in dualità tutti loc. convessi.

Allora $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1, \mathcal{X}_2 \times \mathcal{Y}_2)$ sono in dualità

con $\langle\ ,\ \rangle = \langle\ \rangle_{X_1X_2} + \langle\ \rangle_{Y_1,Y_2}$

Abbiamo una $F : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1 \longrightarrow [-\infty, +\infty]$

Abbiamo un PROBLEMA PRIMALE (P)

minimizzare $\quad x_1 \longrightarrow F(x_1, 0)$

(idea $\quad x_1 \longrightarrow F(x_1, y_1)$ è una perturbazione del problema con $y_1 = 0$)

Analogamente consideriamo il PROBLEMA DUALE $(\mathcal{P}^*)$

minimizzare $\quad y_2 \longrightarrow F^*(0, y_2)$

Di solito $\mathcal{P}^*$ viene visto come un problema di massimizzazione

$(\mathcal{P}^*)$ massimizzare $\quad y_2 \longrightarrow -F^*(0, y_2)$

NOTAZIONE $\quad \inf(\mathcal{P}) = \inf_{x_1 \in \mathcal{X}_1} F(x_1, 0) = $ VALORE DI $\mathcal{P}$

$\sup(\mathcal{P}^*) = \sup_{x_2 \in} -F^*(0, y_2) = $ VALORE DI $\mathcal{P}^*$

FATTO

$$-\infty \leq \sup \mathcal{P}^* \leq \inf \mathcal{P} \leq +\infty$$

Dim $\quad$ Sia $y_2 \in \mathcal{Y}_2$

$$-F^*(0, y_2) = -\left(\sup_{\substack{x' \in \mathcal{X}_1 \\ y' \in \mathcal{Y}_1}} \langle x', 0 \rangle + \langle y', y_2 \rangle - F(x', y') \right) =$$

$$= \inf_{\substack{x' \in \mathcal{X}_1 \\ y' \in \mathcal{Y}_1}} -\langle y', y_2 \rangle + F(x', y') \underset{y'=0}{\leq}$$

$$\leq \inf_{x' \in \mathcal{X}} F(x', 0)$$

$$\Longrightarrow \sup_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} -F^*(0, y_2) \leq \inf_{x' \in \mathcal{X}_1} F(x', 0)$$

Fatto Siano $\overline{x}_1 \in \mathcal{X}_1$ e $\overline{y}_2 \in \mathcal{Y}_2$ Allora si ha

$$F(\overline{x}_1, 0) = -F^*(0, \overline{y}_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$F(\overline{x}_1, 0) = \inf(\mathcal{P}) \quad e \quad -F^*(0, \overline{y}_2) = \sup(\mathcal{P}^*)$$

Dim segue da sopra facilmente.

Def chiamo duality Gap la differenza tra $\sup(\mathcal{P}^*)$ e $\inf(\mathcal{P})$

Ipotesi buone se non viene detto diversamente F sarà convessa, sci, propria.

Poniamo $\quad h(y_1) = \inf\limits_{x_1 \in \mathcal{X}_1} F(x_1, y_1)$

$$h : \mathcal{Y}_1 \longrightarrow [-\infty, +\infty]$$

Prop h è convessa.

Dim $v', v'' \in \mathcal{Y}_1 \quad h(v') < +\infty \quad h(v'') < +\infty \quad t \in]0,1[$

$$h(tv' + (1-t)v'') \leq t\, h(v') + (1-t)\, h(v'')$$

Siano $c' > h(v')$ e $c'' > h(v'')$, trovo u' e u'' in $\mathcal{X}_1$

$c' > F(u', v') \geq h(v')$ e $c'' > F(u'', v'') \geq h(v'')$ (perché è l'inf)

chiamo $u_t = tu' + (1-t)u''$ e $v_t = tv' + (1-t)v''$

$\Rightarrow$ per la convessità di F

$h(v_t) \leq F(u_t, v_t) \leq t\, F(u', v') + (1-t)\, F(u'', v'') \leq tc' + (1-t)c''$

dato che c' e c'' sono arbitrari $c' \to h(v')$ e $c'' \to h(v'')$

$\Rightarrow \quad h(v_t) \leq t h(v') + (1-t)\, h(v'')$

OSS non si può dire a priori che h sia propria o sci

Lemma $$h^*(y_2) = F^*(0,y_2) \quad \forall y_2 \in Y_2$$

Dim $$F^*(0,y_2) = \sup_{\substack{x_1 \in X_1 \\ y_1 \in Y_1}} \langle x_1, 0\rangle + \langle y_1, y_2\rangle - F(x_1,y_1) =$$

$$= \sup_{y_1 \in Y_1} \left[+ \langle y_1, y_2\rangle - \inf_{x_1 \in X_1} F(x_1,y_1) \right] =$$

$$= \sup_{y_1 \in Y_1} \langle y_1, y_2\rangle - h(y_1) = h^*(y_2)$$

Corollario $$h^{**}(0) = -\inf_{y_2 \in Y_2} h^*(y_2) = \sup_{y_2 \in Y_2} \left(-h^*(y_2)\right) = \sup(\mathcal{P}^*)$$

Def $\mathcal{P}$ è NORMALE se $h(0) \in \mathbb{R}$ e h è sci in 0

OSS Dato che $F^{**} = F$ $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^*$ sono "simmetrici" $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$ e quindi ha senso la def che $\mathcal{P}^*$ è NORMALE

Proprietà Sono equivalenti:

(a) $\mathcal{P}$ è normale

(b) $\mathcal{P}^*$ è normale

(c) $\inf \mathcal{P} = \sup \mathcal{P}^* \in \mathbb{R}$

Dim a) $\Leftrightarrow$ c) $h(0) = \inf \mathcal{P} \in \mathbb{R}$ h è convessa

è sci in $0 \Leftrightarrow h(0) = \overline{co}\, h(0) = h^{**}(0) = \sup \mathcal{P}^*$ (lemma)

b) $\Leftrightarrow$ (c) segue dal fatto che $F^{**} = F$ e $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$

Lemma supponiamo $h^{**}(0) \in \mathbb{R}$ $(\sup \mathcal{P}^* \in \mathbb{R})$ allora

$\bar{y}_2$ è sol di $\mathcal{P}^*$ ($F^*(0,\bar{y}_2) = \sup \mathcal{P}^*$)

$\Leftrightarrow$ $\bar{y}_2 \in \partial h^{**}(0)$

Vedendo $h^{**}: Y_1 \to [\infty, \infty]$

Dim $\bar{y}_2 \in \partial h^{**}(0) \iff h^{**}(0) + h^{***}(\bar{y}_2) = \langle 0, \bar{y}_2 \rangle = 0$

$\iff h^{**}(0) + h^{*}(\bar{y}_2) = 0 \iff$

$$h^*(\bar{y}_2) = \sup_{y_2 \in Y_2} - h^*(y_2) = \inf h^*$$
$$\shortparallel$$
$$F^*(0, \bar{y}_2) = \inf_{y_2 \in Y} F^*(0, y_2)$$

$\iff \bar{y}_2$ è sol. di P^*

Def P si dice STABILE se $h(0) \in \mathbb{R}$ e $\partial h(0) \neq \emptyset$

($\Rightarrow P$ è normale, perché $\partial h(0) \neq \emptyset \Rightarrow h$ è s.c.i. in 0)

FATTO P è stabile $\iff P$ è normale e P^* ha una soluzione.

Dim P normale detto sopra, so che esiste $y_2 \in \partial h(0)$

$\iff \underbrace{y_2 \in \partial \overline{co}\, h(0)} \iff y_2 \in \partial h^{**}(0) \iff \exists\, y_2$ sol di P^*

abbiamo visto che $y_2 \in \partial h(0) \iff h(0) = \overline{co}\, h(0)$ e $y_2 \in \partial \overline{co}\, h(0)$

Prop Supponiamo F convessa $F: X_1 \times Y_1 \to [-\infty, +\infty]$

supponiamo che $h(0) \in \mathbb{R}$ e che esista un punto

$\tilde{x} \in X_1$ tale che $F(\tilde{x}, \cdot)$ sia finita e continua in $y_1 = 0$

Allora P è stabile

Dim Dato che $F(\tilde{x}, \cdot)$ è continua in $0 \Rightarrow$ esiste U

intorno aperto V di zero in Y_1 in cui $F(\tilde{x}, \cdot)$ è limitata

$\Rightarrow h(y_1) \leq F(\tilde{x}, y_1) \leq$ costante $\forall y_1 \in U$

$\Rightarrow h$ è continua in U (per convessità) $\Rightarrow h$ è sott. dif in U

(controllare le prop. di cont. e sotto diff. delle continue delle convesse)

Esempio (GENERALE)

Supponiamo $\mathcal{X}$ di Banach riflessivo, $\mathcal{Y}$?! (almeno loc. convesso)

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} \qquad \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}^* \qquad \mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y} \qquad \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}^*$$

Mettiamo su $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ la topologia debole e
su $\mathcal{X}^*$ e $\mathcal{Y}^*$ la topologia debole $*$

Sia $f : \mathcal{X} \to [-\infty, +\infty]$ $g : \mathcal{Y} \to [-\infty, \infty]$ convesse, sci, proprie.

$\Lambda : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineare e continua.

Sia: $F(x,y) = f(x) + g(\Lambda x - y) : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [-\infty, \infty]$

Suppongo $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) + g(\Lambda x) \overset{= F(x,0)}{=} +\infty$

(**) $\exists\ \tilde{x} \in D(f)$ tc g è continua in $\tilde{y} = \Lambda \tilde{x}$ ed è finita $(\tilde{y} \in D(g))$

Esaminiamo cosa succede in questa situazione

(P) è minimizzare $x \to f(x) + g(\Lambda x)$

Per P^*

$$F^*(0, y^*) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ y \in \mathcal{Y}}} \langle x, 0 \rangle + \langle y, y^* \rangle - F(x,y) =$$

$$= \sup_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ y \in \mathcal{Y}}} \langle y, y^* \rangle - f(x) - g(\Lambda x - y) = \quad \begin{array}{l} z = \Lambda x - y \\ y = \Lambda x - z \end{array}$$

$$= \sup_{x \in X} \underbrace{\langle \Lambda x, y^* \rangle}_{= \langle x, \Lambda^* y^* \rangle} - f(x) + \sup_{z \in Y} \underbrace{\langle -z, y^* \rangle}_{= \langle z, -y^* \rangle} - g(z) =$$

$$f^*(\Lambda^* y^*) + g(-y^*)$$

Dunque P^* è minimizzare $y^* \to f^*(\Lambda^* y^*) + g(-y^*)$

Dato che vale (c) $\Rightarrow P$ ammette sol in $\bar{x}$

" " $(**)$ $\Rightarrow P^*$ " " in $\bar{y}^*$

e $\inf P = \sup P^* \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\underbrace{F(\bar{x}, 0)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{F^*(0, y^*)}_{\in \mathbb{R}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\bar{x}) + g(\Lambda \bar{x}) + f^*(\Lambda^* \bar{y}^*) + g^*(-\bar{y}^*) = 0$$

Sono '='

$$\underbrace{f(\bar{x}) + f^*(\Lambda^* \bar{y}^*) - \langle \bar{x}, \Lambda^* \bar{y}^* \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{g(\Lambda \bar{x}) + g^*(-\bar{y}^*) + \langle \Lambda \bar{x}, \bar{y}^* \rangle}_{\geq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f(\bar{x}) + f^*(\Lambda^* \bar{y}^*) = \langle \bar{x}, \Lambda^* \bar{y}^* \rangle \Leftrightarrow \Lambda^* \bar{y}^* \in \partial f(\bar{x})$$

$$g(\Lambda \bar{x}) + g^*(-\bar{y}^*) = \langle \Lambda \bar{x}, -\bar{y}^* \rangle \Leftrightarrow -\bar{y}^* \in \partial (g \circ \Lambda)(\bar{x})$$

<u>Esempio</u> $X = H^1_0(\Omega)$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto limitato

$$Y = L^2(\Omega, \mathbb{R}^N) = (L^2(\Omega))^N$$

$$\Lambda : X \to Y \qquad \Lambda u = \nabla u$$

$$h \in H^{-1} = (H^1_0(\Omega))^*$$

Poniamo $\quad f(u) = -(u, h)_{H^1_0 \, H^{-1}}$

$$g(p) = \frac{1}{2} \int_\Omega |p|^2 \, dx$$

Allora $\quad F(u,p) = -(u,h)_{H^1_0 H^{-1}} + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u - p|^2 dx$

(P) è minimo $\quad \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - (u,h)$

(P) ha sol unica $\bar{u}$ $\quad \bar{u}$ risolve $\begin{cases} \Delta u = h & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$ in senso debole.

- $f^*(u^*) = \chi_{\{-h\}}(u^*) = \begin{cases} 0 & \text{se } u^* = -h \\ +\infty & \text{se } u^* \neq -h \end{cases}$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\sup_{u\in H^1_0} (u,u^*) + (u,h) = \sup_{u\in H^1} (u, u^*+h)$

- $g^*(p^*) = \frac{1}{2}\int |p^*|^2$ $\quad$ (identificando L^2 con il suo duale)

$g(p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 = \Psi(\|p\|)$

$\Psi(s) = \frac{1}{2}s^2 \Rightarrow g^*(p^*) = \Psi^*(\|p^*\|) = \frac{1}{2}\int |p^*|^2$

$\Psi^*(s^*) = \sup_s ss^* - \frac{1}{2}s^2 = \max_{s\in\mathbb{R}}\left(ss^* - \frac{1}{2}s\right) = \frac{1}{2}(s^*)^2$

$(P)^*$ minimizzo $\quad F^*(0,p^*) = f^*(\Lambda^* p^*) + g^*(-p^*)$

$\chi_{-h}(\Lambda^* p^*) + \frac{1}{2}\|p^*\|^2_{L^2} \iff$

minimizzo $\quad \frac{1}{2}\int_\Omega |p^*|^2 dx$ su $\boxed{\Lambda^* p^* = h}$

cosa significa $\Lambda^* p^* = h$

$(u, \Lambda^* p^*) = (u,h) \quad \forall u \in H^1_0$

$$\langle \Lambda u, p^* \rangle_{L^2}$$
$$\parallel$$
$$\int_\Omega \nabla u \cdot p^* \, dx = (u, h) \quad \forall u \in H^1_0$$

se p^* è regolare lo potrei scrivere

$$\int_\Omega u \, (\operatorname{div} p^*) = (u, h)$$

dunque in "senso debole" $\Lambda^* p^* = \operatorname{div} p^*$

(P^*) minimizzare $\frac{1}{2} \int |p^*|^2 dx$ su $\{ p^* : \operatorname{div} p^* = h \}$

Dunque P^* ha soluzione $\bar{p}^*$

Inoltre $\bar{u}$ e $\bar{p}^*$ sono legate da

$$f(\bar{u}) + f^*(\Lambda^* \bar{p}^*) = \langle \bar{u}, \Lambda^* \bar{p}^* \rangle \quad \text{(banale verifica)}$$
$$g(\Lambda \bar{u}) + g^*(-\bar{p}^*) = -\langle \Lambda \bar{u}, \bar{p}^* \rangle_{L^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega |\bar{p}^*|^2 = -\int \nabla \bar{u} \cdot \bar{p}^*$$
$$\Longleftrightarrow \int_\Omega |\nabla \bar{u} + \bar{p}^*|^2 = 0 \Rightarrow -\nabla \bar{u} = \bar{p}^*$$

Dunque la sol del problema duale è $-\nabla \bar{u}$

LEZIONE 14

Titolo nota 22/04/2020

$$f(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega G(x,u)\,dx$$

che ipotesi devo mettere su G?

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto limitato, $G : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

ipotesi che useremo sempre: $\forall s \in \mathbb{R}^N$ $G(\cdot, s)$ è misurabile

NOTAZIONE: dico che G è un "INTEGRANDO"

Di solito si dice che G è un integrando continuo, convesso etc..
se per q.o $x \in \Omega$ $G(x,\cdot)$ è cont., convesso etc.

Def Dico che G è un INTEGRANDO NORMALE se:

(a) per q.o $x \in \Omega$ $G(x,\cdot)$ è SCI

(b) $\exists\ \tilde{G} : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ boreliana tale che
per q.o $x \in \Omega$ $\tilde{G}(x,\cdot) = G(x,\cdot)$
(cioè per q.o $x \in \Omega$ e $\forall s \in \mathbb{R}^N$ $\tilde{G}(x,s) = G(x,s)$)

Prop Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è misurabile e G integrando normale
allora: $x \longrightarrow G(x, u(x))$ è misurabile

Dim Sia $\tilde{G}$ come nella def., noto che $x \longrightarrow (x, u(x))$ è misurabile
da $\Omega \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ $x \longrightarrow \tilde{G}(x, u(x))$ è misurabile (serve $\tilde{G}$ boreliana)

ma $G(\cdot, u) = \tilde{G}(\cdot, u)$ q.o x $\Rightarrow$ $G(\cdot, u)$ è misurabile

OSS in particolare $\forall s \in \mathbb{R}^N$ $x \to G(x,s)$ è misurabile
(se G è un integrando normale $\Rightarrow$ G è integrabile)

OSS . Se G_1 e G_2 sono int. normali $\Rightarrow$ $G_1 + G_2$ lo è
. Se G è un int. normale allora
$a(x)\,G(x,s)$ è int. normale se $a \geq 0$ misurabile
$H(s)\,G(x,s)$ " " se H è continua
. G_n int. normale $\Rightarrow$ $\sup G_n$ è int. normale

Teorema Supponiamo G di Carathéodory, allora
G è un integrando normale

Dim Possiamo supporre $G \geq 0$ (pur di prendere $e^{G(x,s)}$)
e anche che $G(x,\cdot)$ sia continua $\forall x$ (metto a 0
dove non è continua).

Siano $x \in \Omega$ $s \in \mathbb{R}^N$

SCI Passaggio imp.

$$G(x,s) = \liminf_{z \to s}{}^{*} G(x,s) = \sup_{r>0} \inf_{z \in B(s,r)} G(x,z) \quad \text{per la SCI in } s$$

$$= \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \inf_{z \in B(z,r)} G(x,z)$$

$\rightarrow$ perché l'inf è un monotono rispetto a r quindi il lim inf in realtà è un min.

$$= \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \max \{ c : \forall z \in B(s,r) \quad G(x,z) \geq c \} =$$

$$\underset{\text{continuità}}{=} \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup \{ c \in \mathbb{R} : \forall z \in B(s,r) \cap \mathbb{Q}^m , G(x,z) \geq c \} =$$

unico punto dove si usa la cont.

$$= \sup_{r \in \mathbb{Q}} \sup_{c \in \mathbb{Q}} c \cdot 1\!\!1_{A_{r,c}}(x,s)$$

dove

$$A_{r,c} = \{ (x', s') : \forall z \in \mathbb{Q}^m \ z \in B(s', r) \Rightarrow G(x', z) \geq c \}$$

$$= \bigcap_{z \in \mathbb{Q}^m} A_{r,c,z}$$

$$A_{r,c,z} = \{ (x', s') : z \in B(s', r) \Rightarrow G(x', z) \geq c \} =$$

$a \to b \equiv \neg a \vee a \to b$

$$= \{ (x', s') : |z - s| \geq r \ \vee \ z \in B(s', r) \Rightarrow G(x', z) \geq c \}$$

allora

$$A_{r,c,z}^c = \{ (x', s') : |z - s'| < r \ , \ G(x', z) < c \} =$$

$$= \underbrace{\{ x' \in \Omega : G(x', z) < c \}}_{E_{c,z}} \times \underbrace{\{ s' \in \mathbb{R}^m : |z - s'| < r \}}_{B(z,r)}$$

$$\Rightarrow G(x, s) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup_{c \in \mathbb{Q}} c \, 1\!\!1_{\bigcap_{z \in \mathbb{Q}^m} A_{r,c,z}} (x, s) =$$

$$= \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup_{c \in \mathbb{Q}} \inf_{z \in \mathbb{Q}^m} c \, 1\!\!1_{A_{r,c,z}} =$$

$$\boxed{G(x, s) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \sup_{c \in \mathbb{Q}} \inf_{z \in \mathbb{Q}^m} c \left[1 - \left(1\!\!1_{E_{c,z}}(x) \times 1\!\!1_{B(z,r)}(s) \right) \right]}$$

$E_{c,z} = \{ x' \in \Omega : G(x', z) < c \}$ è misurabile perchè G è un integrando

$\Rightarrow \exists \ \tilde{E}_{c,z}$ boreliano in Ω con $|\tilde{E}_{c,z} \Delta E_{c,z}| = 0$

Se definisco

$$\tilde{G}(x, s) = \underbrace{\sup_{r \in \mathbb{Q}} \sup_{c \in \mathbb{Q}} \inf_{z \in \mathbb{Q}^m} c \left(1 - 1\!\!1_{\tilde{E}_{c,z}} 1\!\!1_{B(z,r)} \right)}_{\text{è boreliana nel prodotto.}}$$

e $\tilde{G}(x, s) = G(x, s)$ per q.o. $x \notin \underbrace{\bigcup_{\substack{c \in \mathbb{Q} \\ z \in \mathbb{Q}^m}} \left(\tilde{E}_{c,z} \Delta E_{c,z} \right)}_{\text{trascurabile}}$

Esempio Sia $C \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$ e $C(x) = \{ s \in \mathbb{R}^m : (x,s) \in C \}$ $\forall x \in \Omega$

Supponiamo che

(a) q.o x $C(x)$ è chiuso

(b) esiste $\tilde{C}$ boreliano tc $\tilde{C}(x) = C(x)$ per q.o x

$$\Rightarrow \chi_C(x,s) = \begin{cases} +\infty & \text{se } (x,s) \notin C \\ 0 & \text{se } (x,s) \in C \end{cases}$$ è un integrando normale.

Viceversa se G è un integrando normale e $c \in \mathbb{R}$, allora

$C = \{ (x,s) : G(x,s) \leq c \} \Rightarrow C$ verifica (a) e (b) sopra.

Esempi 1) $a \geq 0$ misurabile, $s \to G(s)$ sci $\Rightarrow a(x)\, G(s)$ è un integrando normale

Infatti $\exists$ $\tilde{a}$ boreliana $\tilde{a} = a$ q.o

e $\tilde{G}(x,s) = \tilde{a}(x)\, G(s)$ fa quello che voglio

2) Supponiamo che G sia un integrando convesso e cioè per q.o $x \in \Omega$ $G(x,\cdot)$ è convesso e s.c.i.

Inoltre supponiamo che per q.o $x \in \Omega$ $D(G(x,\cdot))$ abbia parte interna non vuota

allora G è un integrando normale.

Dim Analogo a quello del teorema nel caso Carathéodory

$G(x,s) \overset{\text{per sci}}{=} \liminf\limits_{z \to s} f^*$, il passaggio della continuità (vedi video per conferma)

vale con le ipotesi fatte

$G(x,z) \geq c$ su $B(z,r)$
$\Updownarrow$
$G(x,z) \geq c$ su $B(z,r) \cap \mathbb{Q}^m$

" perché nella parte interna le funz. convesse sono convesse
$D(\ \ ) \neq \emptyset$ e $G(x,\cdot)$ convessa.

Controesempio $\Omega = \mathbb{R}$ $m=1$ prendo

$$G : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$$

$$G(x,s) = \begin{cases} +\infty & x \neq s \\ 1 & x = s \text{ e } x \in E \\ 0 & x = s \text{ e } x \notin E \end{cases}$$

dove E è un insieme non misurabile

· Se $s \in \mathbb{R} \Rightarrow G(\cdot, s) = \begin{cases} \chi_{\{s\}} & \text{se } s \notin E \\ \chi_{\{s\}} + 1 & \text{se } s \in E \end{cases}$ misurabile

Se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow G(x, \cdot) = \begin{cases} \chi_{\{x\}} & \text{se } x \notin E \\ \chi_{\{x\}} + 1 & \text{se } x \in E \end{cases}$ convesso e sci

Quindi G è un integrando convesso e sci

però se compongo con $u(x) = x \Rightarrow G(x,x) = \chi_E(x)$ non è misurabile

ESISTENZA DI "SELEZIONI MISURABILI"

esempio cerco $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$: $G(x, u(x)) = \inf_{s \in \mathbb{R}^m} G(x,s)$

Teorema (NO DIM) Se $B \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ è un boreliano, allora

$$\pi_1(B) = \{ x \in \mathbb{R}^N : \exists y \in \mathbb{R}^N, (x,y) \in B \}$$

è misurabile

(Measurable Projection Theorem)

Non è per nulla ovvio ed è falso se B è solo misurabile.

Controesempio $B = \{(x,x) : x \in E\}$ (non misurabile) è misurabile perché ha misura nulla.

ma $\pi_1(B) = E$ non misurabile

Prop sia $u: \Omega \to \mathbb{R}^m$ prima $\mathcal{G}_u = \{(x,s) : x \in \Omega \text{ e } s = u(x)\}$ = grafico di $u(x)$

Allora u è misurabile $\iff$ esiste $B \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$ boreliano tc per q.o $x \in \Omega$ $B(x) = G_u(x)$ (le sezioni coincidono q.o.)

Dim (solo accennata) $\boxed{\Rightarrow}$ u mis $\Rightarrow \exists \tilde{u}$ boreliana con $u = \tilde{u}$ q.o

$\Rightarrow G_{\tilde{u}}$ è boreliano (si vede con proiezione)

Freccia interessante.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $W \subset \mathbb{R}^m$ boreliano $\Rightarrow \Omega \times W$ è un boreliano nel prodotto

$\Rightarrow$ $(\Omega \times W) \cap B$ è ancora un boreliano in $\Omega \times \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ $\pi_1((\Omega \times W) \cap B) \subset \Omega$ è misurabile

$\Rightarrow$ $\pi_1((\Omega \times W) \cap G_u)$ è misurabile perché per q.o $x \in \Omega$ i due insiemi $(\Omega \times W) \cap B$ e $(\Omega \times W) \cap G_u$ hanno la stessa sezione $\Rightarrow$ le proiezioni differiscono per un trascurabile

$\Rightarrow$ $\pi_1((\Omega \times W) \cap G_u)$ è misurabile

$$\{x \in \Omega : \exists s \in W \cap G_u\} = u^{-1}(W)$$

quindi u è misurabile perché controimmagine di un boreliano è misurabile.

Prop G integrando normale $\Rightarrow$ La funzione $m: \Omega \to [-\infty, +\infty]$ definita da $m(x) = \inf_{s \in \mathbb{R}^m} G(x,s)$ è misurabile.

Dim Sia $\tilde{G}$ boreliana con $\tilde{G}(x,\cdot) = G(x,\cdot)$ per q.o $x \in \Omega$

Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo $\tilde{B}^c = \{(x,s) : \tilde{G}(x,s) < c\}$ è un boreliano. $\Rightarrow \pi_1(\tilde{B}^c)$ è misurabile

$$\pi_1(\tilde{B}^c) = \{x \in \Omega : \exists s \in \mathbb{R}^m \ \tilde{G}(x,s) < c\} =$$
$$\{x \in \Omega : \underbrace{\inf_{\mathbb{R}^m} \tilde{G}(x,\cdot)}_{\tilde{m}(x)} < c\} \text{ è misurabile}$$

$\Rightarrow \tilde{m}(x)$ è misurabile

ma $\tilde{m}(x) = m(x)$ q.o $x \in \Omega \Rightarrow m$ è misurabile

OSS Si vede che

$$\hat{G}(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{se } G(x,s) = \inf_{\mathbb{R}^m} G(x,\cdot) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è un integrando normale.

Infatti $\hat{G}(x,s) =$ è l'indicatrice dei punti di minimo (può essere anche $+\infty$ a tratto)

Considero $G_1(x,s) = G(x,s) - \underbrace{\inf_s G(x,\cdot)}_{m(x)}$

è un integrando normale e $G_1 \geq 0$

$\Rightarrow \chi_{\{G_1 \leq 0\}}$ è un integrando normale

perché è un chiuso con le sezioni fatte mele

ma $\hat{G} = \chi_{\{G_1 \leq 0\}}$

Def Se $s_0 \in \mathbb{R}^m$ $C \subset \mathbb{R}^m$ definisco

$$\mathrm{Proj}_{s_0}(C) = \left\{ s \in C : \| s - s_0 \| = \inf_{s' \in C} \| s' - s_0 \| \right\}$$

è un chiuso contenuto in C.

Conseguenza Se $C \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$ verifica (a) e (b) (in modo tale che χ_C è un integrando normale), $s_0 \in \mathbb{R}^m$

$\forall x \in \Omega$ $C_1(x) = \{ \mathrm{Proj}_{s_0} C(x) \}$

Allora la funzione $\hat{G}(x,s) = \chi_{C_1(x)}(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \in \mathrm{Proj}_{s_0} C(x) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

è un integrando normale.

Infatti basta applicare l'osservazione a

$$\chi_C(x,s) + \|s - s_0\| = G(x,s)$$

la sua indicatrice dei punti di minimo è $\hat{G}(x,s)$

Lemma Se $s_0 \ldots s_m \in \mathbb{R}^m$ affinemente indipendenti e $r_0 \ldots r_m$ sono dei raggi > 0,

(Dim vedi dispense è solo lunga)

S_i = Sfera di centro s_i e raggio r_i

Allora $\forall\ k = 0, \ldots, m$

$$\bigcap_{i=0}^{k} S_i \subset \text{Spazio affine di dimensione di dim. } m-k$$

in particolare

$$\bigcap_{i=0}^{m} S_i \text{ contiene al più un punto.}$$

Teorema (Selezione misurabile di minimi)

Supponiamo che $G : \Omega \times \mathbb{R}^m \to [-\infty, +\infty]$ integrando normale

Supponiamo che per q.o $x \in \Omega$ $\{s : G(x,s) = \inf_{\mathbb{R}^m} G(x,\cdot)\} \neq \emptyset$

Allora esiste $\bar{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ misurabile tc

$$G(x, \bar{u}(x)) = \inf_{\mathbb{R}^m} G(x,\cdot)$$

Dim Poniamo $C = \{(x,s) : G(x,s) = \inf G(x,\cdot)\}$

per quanto visto si ha che C verifica (a), (b)

Cioè χ_C è un integrando normale.

Prendiamo $s_0, \ldots s_m$ affinemente indipendenti

$C_0 = \{(x,s)\ \ s \in \mathrm{Proj}_{s_0} C(x)\}$

per quanto detto C_0 verifica (a) (b)

$C_1 = \{(x,s) \quad s \in \text{Proj}_{S_1} C_0(x)\}$

$\vdots$

$C_m = \{(x,s) \quad s \in \text{Proj}_{S_m} C_m(x)\}$

C_m verifica (a) (b) ($\bar{e}$ un integrando normale)

$\Rightarrow$ per quasi ogni x $\exists! s$ tc $(x,s) \in C_m \Leftarrow$

per il lemma

$\exists \bar{u}$ tale che C_m è il grafico di $\bar{u}$

$\bar{u}$ è misurabile (vedi prop. dopo il teorema di proiezione)

e $\bar{u}$ è la funzione richiesta

Cor Se $C \subset \Omega \times \mathbb{R}^m$ verificante (a) (b) esiste una $\bar{u} \quad \Omega \to \mathbb{R}^m$ misurabile tale che $\bar{u}(x) \in C(x)$ per q.o $x \in \Omega$

Dim (basta usare il teo sopra con $G = \chi_C$)

Teorema G integrando normale $M: \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile tc $m(x) > \inf G(x,\cdot)$

Allora esiste $\bar{u}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ misurabile tale che $G(x, \bar{u}(x)) \leq M(x)$ q.o $x \in \Omega$

Dim uso il corollario con $C = \{(x,s) \quad G(x,s) \leq m(x)\}$

Lezione 15

Titolo nota 28/04/2020

Data $G(x,s)$ consideriamo funzionali del tipo

$$\mathcal{G}(u) = \int_\Omega G(x,u(x))\,dx$$

- Consideriamo nel seguito $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato (per ora basterebbe misurabile)
- Sia $\mathbb{L}$ uno s.v.t.l.c tale che le funzioni di $\mathbb{L}$ sono funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$ tali che

- <u>Def</u> sia $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, \infty]$ integrando normale convesso (cioè $G(x,\cdot)$ è convessa per q.o x in Ω)

  Poniamo $\tilde{\mathcal{D}}_G : \{u \in \mathbb{L} : G(\cdot,u) \text{ è sup. integrabile}\} =$

  $= \{u \in \mathbb{L} : \exists\, w \in L^1(\Omega) \text{ con } G(\cdot,u) \leq w\} =$

  $= \{u \in \mathbb{L} : G(\cdot,u) \vee 0 \in L^1(\Omega)\}$

Se $u \in \tilde{\mathcal{D}}_G$ ha senso $\int_\Omega \underbrace{G(x,u(x))}\,dx \in [-\infty, +\infty[$ → misurabile perché G è normale

allora $\mathcal{G} : \mathbb{L} \to [-\infty, +\infty]$ ponendo

$$\mathcal{G}(u) = \begin{cases} \int_\Omega G(x,u)\,dx & \text{se } u \in \tilde{\mathcal{D}}_G \\ +\infty & \text{se } u \notin \tilde{\mathcal{D}}_G \end{cases}$$

<u>Prop</u> Si può vedere che $\tilde{\mathcal{D}}_G$ è convesso

<u>Dim</u> $u_0, u_1 \in \tilde{\mathcal{D}}_G$, $t \in [0,1]$ $u_t = t u_1 + (1-t) u_0$

$G(x, u_t(x)) \leq t\, G(x, u_1(t)) + (1-t)\, G(x, u_0) \leq$ funzione integrabile

$\downarrow$ G è convessa in u

$\Rightarrow u_t \in \tilde{D}_G \quad \forall t \in [0,1]$

Nota che $\tilde{D}_G = \tilde{D}(\mathcal{G}) = \{u \in \mathbb{L} : \text{con } \mathcal{G}(u) < +\infty\}$

e se $u_0, u_1 \in \tilde{D}_G \quad t \in]0,1[$ si ha con lo stesso conto di sopra e integrando $\mathcal{G}(u_t) \leq t\, \mathcal{G}(u_1) + (1-t)\, \mathcal{G}(u_0)$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{G} \text{ è convessa}} \Rightarrow D(\mathcal{G}) = \{u \in \mathbb{L} : G(\cdot, u) \in L^1(\Omega)\}$

<u>oss</u> Se $u_0 \in D(\mathcal{G})$ e $v \in D(\mathcal{G})$ allora

derivata rispetto a s

$\exists \quad G'(x, u_0(x))(v(x) - u_0(x)) \leq G(x, v(x)) - G(x, u_0(x))$ per q.o x

(per le prop. in dimensione finita e ragiono nel segmento tra u_0 e v)

$\Rightarrow G'(\cdot, u)(v-u)$ è sup integrabile se u e $v \in D(G)$.

$\Rightarrow \exists \int_\Omega G'(x,u)(v-u)\, dx \in [-\infty, +\infty[$

<u>PROP</u> Ne segue se $u^* \in \mathbb{L}^*$

$$u^* \in \partial \mathcal{G}(u) \iff \int G'(x,u)(v-u) \geq \langle v-u, u^* \rangle_{\mathbb{L}\mathbb{L}^*} \quad \forall v \in D(\mathcal{G})$$

<u>Dim</u> infatti $\int_\Omega G'(x,u)(v-u)\, dx = \mathcal{G}'(u)(v-u)$ ↙ derivata direzionale

Vero perché posso applicare Beppo Levi (decrescente

$$\lim_{t\to 0^+} \int_\Omega \underbrace{\frac{G(x, u+t(v-u)) - G(x,u)}{t}}$$

è decrescente in t per convessità, se $t\to 0$ tende a $G'(x,u)(v-u)$, ed è $\leq$ di una funzione integrabile $G(x,v)-G(x,u)$ (per una B-L)

Se $u^* \in \partial \mathcal{G}(u) \Rightarrow G(\cdot,u)(v-u) \in L^1(\Omega) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$

Consideriamo ora $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ tali che

(L.1) $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^M) \subset \mathbb{L}_i \subset L^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$

(L.2) Se $u_1 \in \mathbb{L}^1$, $u_2 \in \mathbb{L}_2 \Rightarrow u_1 \cdot u_2 \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$

(L.3) Se $u \in \mathbb{L}_i$, $E \subset \Omega$ è misurabile $\Rightarrow \mathbb{1}_E \cdot u_i \in \mathbb{L}_i$

La (L.2) permette di definire la dualità

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_\Omega u_1 \cdot u_2 \, dx$$

che è bilineare. Si vede che

se $\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \quad \forall u_2 \in \mathbb{L}_2 \Rightarrow u_1 = 0$

e se $\langle u_1, u_2 \rangle = 0 \quad \forall u_1 \in \mathbb{L}_1 \Rightarrow u_2 = 0$

(Vero perché $L^\infty \subset \mathbb{L}_i$ e vale $\int_\Omega u \cdot w = 0 \ \forall w \in L^\infty \Rightarrow u = 0$
quindi vero se $w \in \mathbb{L}_i$)

Quindi $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ sono in dualità e metto $\sigma(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2)$ su $\mathbb{L}_2$ e $\sigma(\mathbb{L}_2, \mathbb{L}_1)$ su $\mathbb{L}_2$

$\Rightarrow$ posso considerare $\mathcal{G}_G : L_1 \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ come detto prima

Voglio indagare su $\mathcal{G}_G^*$ (Vorrei $\mathcal{G}_G^* = \mathcal{G}_{G^*}$)

<u>Teorema</u> Sia $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ un integrando normale convesso $\exists\, u_0 \in L_1$ con $G(\cdot, u_0) \in L_1$ (cioè $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{G}_G)$)

Allora $\mathcal{G}_G^* = \mathcal{G}_{G^*}$ dove $G^*(x,\sigma)$ è la coniugata rispetto alla variabile s di $G(x,s)$

<u>Dim</u> Sia $u_2 \in L_2$ Per definizione di G^*

$$G^*(x, u_2(x)) \geq u_1(x) \cdot u_2(x) - G(x, u_1(x))$$

se $u_1 : \Omega \to \mathbb{R}^M$ qualsiasi

Se prendo $u_1 \in \tilde{\mathcal{D}}_G$ ($G(\cdot, u_1)$ è sup. è integrabile)

$\Rightarrow G^*(\cdot, u_2)$ è inferiormente integrabile

e

$$\int_\Omega G^*(x, u_2(x))\, dx \geq \langle u_1, u_2 \rangle - \mathcal{G}(u_1) \qquad \forall u_1 \in \tilde{\mathcal{D}}(\mathcal{G})$$

$$\Rightarrow \int_\Omega G^*(x, u_2) \geq \mathcal{G}^*(u_2) > -\infty \to \text{perché c'è } u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$$

Dobbiamo adesso ottenere la dis. opposta.

Siccome $\int_\Omega G^*(x, u_2)\, dx > -\infty$ sia $\gamma \in \mathbb{R}$ tc

$$\int_\Omega G^*(x, u_2)\, dx > -\gamma$$

Posso trovare una $m \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ tc

$$G^*(x, u_2(x)) > m(x) \quad \text{e} \quad \int_\Omega m(x)\, dx > -\gamma$$

Dato che

$$-G^*(x, u_2(x)) = \inf_{s \in \mathbb{R}^n} G(x,s) - s \cdot u_2(x) < -m(x)$$

Per (l'ultimo) teorema di selezione misurabile $\exists\, \bar{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ misurabile tc

$$G(x, \bar{u}(x)) - \bar{u}(x) \cdot u_2(x) < -m(x) \quad \text{per q.o. in } \Omega$$

Poniamo $E_n := \{x \in \Omega : |\bar{u}(x)| < n\}$ misurabile

$$\text{Poniamo} \quad u_{1,n} = \underbrace{\mathbb{1}_{E^n} \bar{u}}_{\in L^\infty \subset L_1} + \underbrace{\mathbb{1}_{\Omega \setminus E_n} u_0}_{\text{prop } L.3} \in L_1$$

mis $(\Omega \setminus E_n) \to 0$ x $n \to \infty$ allora

$$\langle u_{1,n}, u_2 \rangle - g(u_{1,n}) = \int_\Omega u_{1,n}\, u_2\, dx - \int_\Omega G(x, u_{1,n})\, dx =$$

$$= \int_{E_n} (\bar{u} \cdot u_2\, dx - G(x, \bar{u}))dx + \int_{\Omega \setminus E_n} (u_0 u_2 - G(x, u_0))dx \geq$$

$$\geq \int_{E_n} m(x)\, dx + \int_{\Omega - E_n} u_0 \cdot u_2 - G(x, u_0) \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_\Omega m(x)\, dx > -\gamma$$

$$\Rightarrow g^*(u_2) > -\gamma \quad \forall \gamma \text{ tc } \int_\Omega G^*(x, u_2)\, dx > -\gamma$$

$$\Rightarrow g^*(u_2) \geq \int_\Omega G^*(x, u_2)\, dx$$

Prop Se G è un integrando normale convesso, sono equivalenti:

(a) $\exists u_1 \in \mathcal{U}_1$ con $G(\cdot, u_1) \in L^1(\Omega)$

$\exists u_2 \in \mathcal{U}_2$ con $G^*(\cdot, u_2) \in L^1(\Omega)$

(b) $\mathcal{G}_G$ è proprio ed è s.c.i.

Dim (a) $\Rightarrow$ (b)

L'esistenza di u_1 mi dà che $\exists u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ cioè $\mathcal{G}_G$ non è $\equiv +\infty$

e dato che $G^*(\cdot, u_2) \in L^1(\Omega)$ ottengo

$$G(\cdot, u') \geq u' u_2 - G^*(\cdot, u_2) \in L^1 \quad \forall u' \in \mathcal{U}^1$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{G}(u') > -\infty \quad \forall u' \in \mathcal{U}'$

$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{G} \text{ è PROPRIA}}$

Se faccio lo stesso discorso su u_2

$$(\mathcal{G}_G)^{**} \overset{\text{uso } u_1 \in \mathcal{U}'}{=} (\mathcal{G}_{G^*})^* \underset{\text{uso } u_2 \in \mathcal{U}_2}{=} \mathcal{G}_{G^{**}} \overset{G \text{ è sci}}{=} \mathcal{G}_G$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{G}_G$ è sci perché $\mathcal{G}_G^{**}$ lo è sempre

(b) $\Rightarrow$ (a) Se $\mathcal{G}$ è proprio e sci $\Rightarrow \exists u_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$ (quindi è $u_1 \in \mathcal{U}_1$ tc $G(\cdot, u_1) \in L^1$)

Se $\mathcal{G}$ è s.c.i. e prendo $c \in \mathbb{R}$ con $\mathcal{G}(u_1) > -c$

usando Hahn-Banach $\exists u_2 \in \mathcal{U}_2$ tc

$$\mathcal{G}(u') \geq -c + \langle u' - u_1, u_2 \rangle \quad \forall u' \in \mathcal{U}_1$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{G}^*(u_2) = \sup_{u' \in \mathcal{U}_1} \langle u', u \rangle - \mathcal{G}(u') \leq \sup_{u' \in \mathcal{U}_1} \langle u', u_2 \rangle + c + \langle u_1 - u', u_2 \rangle =$$

$$= c + \langle u_1, u_2 \rangle \in \mathbb{R}$$

quindi $u_2 \in \mathcal{U}_2$ tc $\quad \mathcal{G}_G^*(u_2) = \mathcal{G}_{G^*}(u_2) \in \mathbb{R}$

Conseguenze G integrando normale convesso
$u_1 \in \mathcal{D}(g)$ $\left(G(\cdot, u_1) \in L^1(\Omega) \right)$, $u_2 \in \mathcal{U}_2$. Allora

$$u_2 \in \partial g(u_1) \iff u_2 \in \partial_s G(x, u_1(x)) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega$$

fatto solo rispetto a s

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ per def di $\partial_s G(x, u_1(x))$ ho che se $u' \in \mathcal{U}_1$

$$G(x, u'(x)) \geq \underbrace{G(x, u_1(x)) + (u'(x) - u_1(x)) \cdot u_2(x)}_{\in L^1} \quad \text{q.o. } x$$

$$\Rightarrow \int_\Omega G(x, u'(x)) \geq \int_\Omega G(x, u_1(x))\, dx + \int_\Omega (u'(x) - u_1) \cdot u_2(x)\, dx \quad \forall u' \in \mathcal{U}_1$$

$$\Rightarrow u_2 \in \partial g(u_1)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Se $u_2 \in \partial g(u_1)$ allora

$$g(u_1) + g^*(u_2) = \langle u_1, u_2 \rangle = \int u_1 \cdot u_2$$

$\shortparallel$ $\shortparallel$ → dato che $u_1 \in \mathcal{D}(g)$ posso scriverlo

$$\int_\Omega G(x, u_1)\, dx + g_{G^*}(u_2)$$

$$\Rightarrow g_{G^*}(u_2) \in \mathbb{R} \Rightarrow g_{G^*}(u_2) = \int_\Omega G^*(x, u_2(x))\, dx$$

Dunque

$$\int_\Omega \underbrace{G(x, u_1) + G^*(x, u_2) - u_2 \cdot u_1}_{\overset{\vee\shortparallel}{0} \text{ per def di } G^*}\, dx = 0$$

$$\Rightarrow G(x, u_1) + G^*(x, u_2) - u_2 \cdot u_1 = 0 \quad \text{q.o.}$$

Casi $\mathbb{L}_1 = L^p(\Omega)$ e $\mathbb{L}_2 = L^{p'}(\Omega)$ $p \geq 1$

Prop Se considero l'ipotesi

(G^-, q, σ) $G(x,s) \geq -a_0(x) - a_1(x)|s|^q$ con $a_0 \in L^1$ $a_1 \in L^\sigma(\Omega)$

$1 \leq q < +\infty$

$1 \leq \sigma \leq +\infty$

$\Rightarrow \mathcal{G}_G$ è sci in $L^{q\sigma'}(\Omega, \mathbb{R}^M)$

Dim Supponiamo $u_n \in L^{q\sigma'}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ $u_n \to u \in L^{q\sigma'}(\Omega, \mathbb{R}^M)$

allora possiamo ad un'estratta che $u_n \to u$ punt q.o

Inoltre dall'ip. (G^-, q, σ)

$$G(x, u_n) \geq -a_0(x) - a_1(x)|u_n|^q = g_n(x)$$

dico che $g_n(x) \xrightarrow[L^1(\Omega)]{} g = -a_0 - a_1|u|^q$ (lo vediamo dopo)

allora posso applicare Fatou generalizzato

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega G(\cdot, u_n) \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} G(\cdot, u_n) \overset{G \text{ è sci e } u_n \to u \text{ p. q.o}}{\geq} \int_\Omega G(\cdot, u)\, dx$$

oss "Fatou Generalizzato": se $f_n \geq g_n \in L^1$ e $g_n \xrightarrow{L^1} g$

$$\Rightarrow \liminf \int_\Omega f_n \geq \int \liminf f_n$$

(basta usare Fatou a $f_n - g_n$)

Vediamo la prop. sopra sulle g_n

$g_n \in L^1$ perché $a_0 \in L^1$

e $\int \underset{\frac{1}{\sigma}}{a_1} \underset{\frac{1}{\sigma'}}{|u_n|^q} \underset{H}{\leq} \|a_1\|_\sigma \left(\int |u_n|^{q\sigma'}\right)^{\frac{1}{\sigma'}} = \|a_1\|_\sigma \|u_n\|^q_{q\sigma'} \overset{a_1 \in L^\sigma \text{ e } u_n \in L^{q\sigma'}}{<} +\infty$

Che $g_n(x) \to g(x)$ in L^1

$$\int_\Omega |g_n(x) - g(x)|\, dx = \int_\Omega |a_1| \left| |u_n|^q - |u|^q \right| \leq$$

$$\leq c(q) \int_\Omega |a_1| \, |u_n - u| \left(|u_n|^{q-1} + |u|^{q-1} \right) \overset{\swarrow \text{Holder}}{\leq}$$

$$\leq c(q) \, \|a_1\|_\sigma \, \|u_n - u\|_{q\sigma'} \left(\|u_n\|_{q\sigma'}^{q/q'} + \|u\|_{q\sigma'}^{q/q'} \right) \to 0$$

Esempio di G non continuo, Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$
e $\varphi \leq \psi : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ misurabili
e $\mathbb{K} = \{ u$ misurabili t.c. $\varphi \leq u \leq \psi$ q.o.$\}$ ($u \in L_1$)

Potrei introdurre $G : \Omega \times \mathbb{R}$

$$G(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi(x) \leq s \leq \psi(x) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathcal{G}_G(u) = \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{se } u \in \mathbb{K} \\ +\infty & \text{se } u \notin \mathbb{K} \end{matrix} \right\} = \chi_{\mathbb{K}}$$

$u^* \in \partial \mathcal{G}_G(u) \iff$ (lo finiamo domani)

LEZIONE 16

Titolo nota 29/04/2020

Torniamo un attimo indietro

Prop Se $G : \Omega \times \mathbb{R}^M \longrightarrow [-\infty, \infty]$ è un int normale convesso e se vale

$$(G, q, \sigma) \qquad G(x,s) \geq -a_0(x) - a_1(x)\,|s|^q \qquad \forall s \in \mathbb{R}^N \quad q.o \in \Omega$$

$a_0 \in L^1(\Omega)$

$a_1 \in L^{\sigma}(\Omega)$ e $q \in [1, +\infty[$

$\sigma \in [1, +\infty]$

Allora $\mathcal{G}_G$ è sci in $L^{q\sigma'}(\Omega, \mathbb{R}^M)$ e σ' è il coniugato di σ

Dim Prendo $u_n \xrightarrow{L^{q\sigma'}} u$ e posso supporre che la convergenza sia puntuale q.o

Ho che $G(x, u_n(x)) \geq -a_0(x) - a_1(x)\,|u_n(x)|^q = g_n(x)$

$g_n(x) \in L^1$ perché $|g_n(x)| \leq a_0 + a_1 |u_n|^q$

e $\| a_1 \, |u_n|^q \|_{L^1} \overset{\text{Holder}}{\leq} \|a_1\|_\sigma \, \| |u_n|^q \|_{\sigma'} = \|a_1\|_\sigma \, \|u_n\|^q_{q\sigma'}$

inoltre $g_n(x) \xrightarrow{L^1} g \qquad g = -a_0 - a_1 |u|^q$

infatti $\|g_n - g\|_1 = \| a_1 (|u_n|^q - |u|^q) \|_1 \leq$

$$\leq \text{cost} \, \| a_1 \left(|u_n|^{q-1} + |u|^{q-1} \right) |u_n - u| \, \|_1 \overset{\text{Holder}}{\leq}$$

$$\le \text{cost}\ \|a_1\|_\sigma \ \| (|u_n|^{q-1} + |u|^{q-1}) \, |u_n - u| \, \|_{\sigma'} \le$$

Uso Hölder generalizzata: se $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{r}$ $\Rightarrow \|fg\|_r \le \|f\|_{q_1}\|g\|_{q_2}$

$$\le \text{cost}\ \|a_1\|_\sigma \ \|u_n-u\|_{q\sigma'} \ \| |u_n|^{q-1}+|u|^{q-1}\|_r \le$$

con $\frac{1}{r}+\frac{1}{q\sigma'}=\frac{1}{\sigma'}$ $\Rightarrow r = q'\sigma'$

$$\le \text{cost}\ \|a_1\|_\sigma \ \|u_n-u\|_{q\sigma'} \left(\||u_n|^{q-1}\|_{q'\sigma'} + \||u|^{q-1}\|_{q'\sigma'}\right) =$$

$$= \text{cost}\ \|a_1\|_\sigma \ \|u_n-u\|_{q\sigma'} \left(\||u_n|\|^{q-1}_{q'(q-1)\sigma'} + \||u|\|^{q-1}_{q'(q-1)\sigma'}\right)$$

$q'(q-1)=q$

$$= \text{cost}\ \|a_1\|_\sigma \ \underbrace{\|u_n-u\|_{q\sigma'}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \ \underbrace{\left(\|u_n\|^{q-1}_{q\sigma'}+\|u\|^{q-1}_{q\sigma'}\right)}_{\text{è limitato}}$$

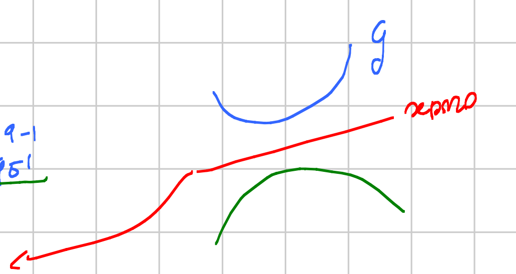
$g_n \to g$ in L^1 e quindi posso usare Fatou.

Questo risultato si può dimostrare anche come segue

Dim. Se $G \equiv +\infty \Rightarrow G$ è sci.

Se no c'è un punto $u_0 \in L^{q\sigma'}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ $G(u_0)<+\infty$. Ma per l'ipotesi $(G.q\sigma)$ dico $G > -\infty$ perché

$$G(u) \ge \underbrace{-\|a_0\|_1 - \|a_1\|_\sigma \|u\|^{q-1}_{q\sigma'}}$$



inoltre esiste $u^* \in (L^{q\sigma'})'$ tc

$$G(u) \ge -c + \langle u^*, u\rangle \quad \forall u \in L^{q\sigma'}(\Omega)$$

$\Rightarrow G^*(u^*) \le c$ dalla definizione

e $\mathcal{G}^*(u^*) \geq \langle x^*, u_0 \rangle - \mathcal{G}(u_0) > -\infty$

$\Rightarrow \exists\ u^* \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$

$\Rightarrow \left(\mathcal{G} > -\infty\right)$ ed è sci (BOH!)

OSS Se suppongo che valga

$(G, q\sigma)^+ \quad -\infty < G(x,s) \leq a_0(x) + a_1(x)|s|^q$ con le stesse ip. di prima

$\Rightarrow$ G è di Carathéodory e $\mathcal{G}$ è semicontinua sup in $L^{q\sigma}(\Omega, \mathbb{R}^N)$

e se valgono entrambi allora $\mathcal{G}$ è continua.

Dim Dato che $G(x,\cdot) \in \mathbb{R}$ ed è convessa per q.o. $x \in \Omega$

$\Rightarrow G(x,\cdot)$ è continua q.o. $x \in \Omega$

Per la s.c.s si fa allo stesso modo di sci (I° modo conto iniziale).

ESEMPIO $N = 1$

$\varphi \leq \psi : \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty]$ misurabili

spazio funzionale adeguato

$\mathbb{K}_\varphi^\psi = \{ u \in L^p : \varphi \leq u \leq \psi \text{ q.o} \}$

$$G(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi(x) \leq s \leq \psi(x) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \chi_{[\varphi(x), \psi(x)]}(s)$$

Supponiamo che $\varphi < \psi$ q.o

$\Rightarrow G(x,s)$ è un integrando normale convesso

è un integrando: Fisso $s \in \mathbb{R}$

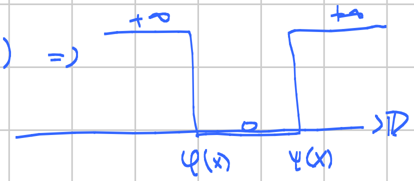
$\{x \in \Omega : G(x,s) = 0\} =$

$= \underbrace{\{x \in \Omega : \varphi(x) \le s\}}_{\text{misurabile}} \cap \{x \in \Omega : \psi(x) \ge s\}$ quindi misurabile

$\{x \in \Omega : G(x,s) = +\infty\} = (\{x \in \Omega : G(x,s) = 0\})^c$ quindi

misurabile $\Rightarrow$ G è misurabile

è semicontinua e convessa: se $x \in \Omega$ $s \to G(x,s)$ $\Rightarrow$



è sci (perché $[\varphi(x), \psi(x)]$ è chiuso) ed è ovviamente convessa

è normale q.o. x $D(G(x,\cdot))$ ha parte interna $\neq \emptyset$

perché $\varphi(x) < \psi(x)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{G}_G(u) = \chi_{K_\varphi^\psi}$

$(G(x,u(x)) = 0 \text{ q.o.})$

infatti $\mathcal{G}_G(u) = \int_\Omega G(x,u(x))\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi(x) \le u(x) \le \psi(x) \text{ q.o.} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Quindi questo è il modo di inserire nel funzionale il vincolo che le mie funzioni debbano stare tra due funzioni fissate.

Quindi $\mathcal{G}_G^* = \mathcal{G}_{G^*}$ se $K \neq \emptyset$

$$G^*(x,s) = \max_{\varphi(x) \le s \le \psi(x)} s^* s = \max(\varphi(x)s^*, \psi(x)s^*) = \begin{cases} \varphi s^* & \text{se } s^* < 0 \\ \text{Both!} & \text{se } s^* = 0 \\ \psi s^* & \text{se } s^* > 0 \end{cases}$$

$s^* \in \partial_s G(\cdot, s) \iff G^*(x,s^*) + G(x,s) = s s^*$

$$\partial \partial s^* = \begin{cases} \psi(x) s^* + G(x,s) & s^*>0 \\ 0 + G(x,s) & s^*=0 \\ \varphi(x) s^* + G(x,s) & s^*<0 \end{cases} \quad e \quad s \in \mathcal{D}(G(x,\cdot)) \underset{\text{deve}}{} \Rightarrow G(x,s)=0$$

$$\Rightarrow \quad \partial s^* = \begin{cases} \psi(x) s^* & s^*>0 \\ \varphi(x) s^* & s^*<0 \end{cases}$$

$$\boxed{s^*>0 \ e \ s=\psi(x) \quad \text{oppure} \quad s^*<0 \ e \ s=\varphi(x), \ \text{oppure} \quad s^*=0 \ e \ \varphi(x) \le s \le \psi(x)}$$

In altri termini

$$\partial G(x,s) = \begin{cases} \{0\} & \text{se} \quad \varphi(x)<s<\psi(x) \\ [0,+\infty[& \text{se} \quad \varphi(x)<s=\psi(x) \\ ]-\infty,0] & \text{se} \quad \varphi(x)=s<\psi(x) \\ \mathbb{R} & \text{se} \quad \varphi(x)=s=\psi(x) \ \text{(non succede quasi mai)} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\{\nu \in \mathbb{R} : \nu \text{ normale a } [\varphi(x), \psi(x)] \text{ in } s\}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto limitato $N \geq 3$

2^* tc $\dfrac{1}{2^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{N} > 0$ $\quad 2^* = \dfrac{2N}{N-3}$

$$H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^M) \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \qquad \forall \ p \le 2^*$$

$\downarrow$ cpt se $p<2^*$

in H^1_0 posso considerare $\|u\|^2_{H^1_0} = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega \sum_{\substack{i=1\dots N \\ j=1\dots M}} \left(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2$

è Hilbert con $\langle u, v\rangle_{H^1_0} = \int_\Omega \nabla u \nabla v$

<u>Notazione</u> $\overset{\text{energia}}{\mathcal{E}}(u) = \dfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ se $u \in H^1_0(\Omega)$

$G : \Omega \times \mathbb{R}^M \longrightarrow [-\infty, \infty]$ integrando normale convesso

Voglio introdurre un funzionale $I : L^p(\Omega, \mathbb{R}^M) \to [-\infty, +\infty]$ con $p \leq 2^*$

Vorrei scrivere

$$I(u) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}_{+\infty \text{ se } u \notin H_0^1(\Omega)} + \underbrace{\int_\Omega G(x,u)}_{\in [-\infty, +\infty]}$$

$-\infty$ problema.

Posso definire $\widetilde{D} = \{ u \in H_0^1 : G(\cdot, u) \text{ è sup. integrabile} \}$

$\exists\, w$ integrabile e $G(\cdot, u) \leq w$

$$I(u) = \begin{cases} \mathcal{E}(u) + \int_\Omega G(x,u) & \text{se } u \in D \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\Rightarrow I(u)$ è convesso (e non ho problemi $+\infty - \infty$)

Prop Se G verifica (G, q, σ') con $q\sigma' = p$

$\Rightarrow I(u)$ è s.c.i. in L^p e $I > -\infty$

Dim Nell'ip. fatte g è s.c.i. e $g > -\infty$

Inoltre se $\mathcal{E}(u) = +\infty$ fuori da H_0^1 allora

$\mathcal{E}(u)$ è s.c.i. in L^p infatti:

se $u_n \xrightarrow{L^p} u$ $\quad \mathcal{E}(u_n) \leq C \Rightarrow u_n$ è limitata in H_0^1

$\Rightarrow \exists\, u_{n_k} \xrightarrow{H_0^1} u$ (in realtà $u_n \xrightarrow{H_0^1} u$ con le sotto-sotto).

So che $u \longrightarrow \|u\|^2$ in un Hilbert è s.c.i. $(H = H_0^1)$

<u>oss</u> Sia $u \in \mathcal{D}(I) = \{ u \in L^p : G(\cdot, u) \in L^1 \}$

$\Rightarrow \forall\, v \in \mathcal{D}(I)$ si ha $G'(\cdot,u)(v-u)$ è sup. integrabile e

$$I'(u)(v-u) = \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) + G_s'(\cdot, u)(v-u)\, dx \in [-\infty, +\infty[$$

Basta mostrare che $t>0$

$$\frac{I(u+t(v-u)) - I(u)}{t} = \underbrace{\int_\Omega -\nabla u \nabla(v-u)}_{\text{Fisso}} + \underbrace{\frac{t}{2}}_{\downarrow\, 0} \int |\nabla(v-u)|^2 + \int_\Omega \frac{G(x, u+t(v-v)) - G(x,u)}{t}$$

$\downarrow$ per Beppo Levi in t

$$\int_\Omega G'(x,u)(v-v)$$

<u>Prop</u> a) $u^* \in \partial I(u) \Leftrightarrow$ b) $\underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\, dx + \int_\Omega G'(x,u)(v-u)}_{I'(u)(v-u)} \geq \int_\Omega u^*(v-u) \quad \forall v \in \mathcal{D}(I)$

$\Leftrightarrow$

(c) $\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u)\, dx + \int_\Omega G(x,v) - G(x,u) \geq \int_\Omega u^*(v-u)$

<u>Dim</u>
- (a) $\Leftrightarrow$ (b) già vista in generale
- (c) $\Leftrightarrow$ (b)

Noto che $G(x,v) - G(x,u) \geq G'(x,u)(v-u)$

quindi b) $\Rightarrow$ c)

viceversa uso c) con $v_t = u + t(v-u)$ al posto di v e $v_t \in \mathcal{D}(I)$ per convessità

$$t \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) + \int_\Omega G(x, u+t(v-u)) - G(x,u) \geq t \int u^*(v-u)$$

divido per t e mando $t \to 0^+$ e uso Beppo-Levi come prima

Teorema Supponiamo che valgano $(G.q,\sigma)$ (la prima quella $\geq -a_0 - a_1|s|^q$) con $q\sigma' \leq p$

Allora $\exists !\ \bar{u} \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $G(\cdot, \bar{u}) \in L^1$

$$\int_\Omega \nabla\bar{u}\,\nabla(v-\bar{u}) + G'(x,\bar{u})(v-\bar{u}) \geq 0 \quad \forall\, v \in H_0^1 \text{ con } G(\cdot,v) \in L^1$$

Dim Dico che I ammette unico minimo. Infatti:

da $(G,q,\sigma) \Rightarrow \mathcal{G}(u) \geq -c - c\,\|u\|_p^{q-1}$

$\Rightarrow \exists\, u^*$ con $\mathcal{G}(u) \geq -c + \langle u^*, u\rangle$

teo di Rellich

Allora se $u \in H_0^1$ $I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - c - \|u^*\|_{p'}\|u\|_p \geq$

costante di Sobolev

$$\geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - c - S_p\|u^*\|_{p'}\|u\|_{H_0^1} \to +\infty$$

se $\|u\|_{H_0^1} \to +\infty$

$\Rightarrow$ I ha minimo (su $L^p \sim H_0^1$): lo chiamo $\bar{u}$

Se $\bar{u}$ è minimo $\Rightarrow 0 \in \partial I(\bar{u}) \Leftrightarrow$

$$\int \nabla\bar{u}\,\nabla(v-\bar{v}) + G'(x,\bar{u})(v-\bar{u}) \geq 0 \left(= \int_\Omega 0\cdot(v-\bar{u})\right) \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(I)$$

$G(\cdot,v) \in L^1$

- $\bar{u}$ è unico, perché se ci fosse un altro minimo allora la rel. sopra vale anche per $\tilde{u}$ e $v=\bar{v}$

$$\int \nabla\tilde{u}\,\nabla(\bar{v}-\tilde{u}) + G'(x,\tilde{u})(\bar{v}-\tilde{u}) \geq 0$$

e quella per $\bar{u}$ con $v=\tilde{u}$

$$\int \nabla\bar{u}\,\nabla(\tilde{v}-\bar{v}) + G'(x,\bar{u})(\tilde{u}-\bar{u}) \geq 0$$

Sommando

$$-\int |\nabla(\bar{u}-\tilde{u})|^2 - \int \underbrace{\left(G'(x,\tilde{u}) - G'(x,\bar{u})\right)(\tilde{u}-\bar{u})}_{\substack{\geq \\ 0 \\ \text{per monotonia}}} \leq 0$$

$$\underset{\|\bar{u}-\hat{u}\|^2_{H^1_0}}{\shortparallel}$$

$$\Rightarrow \|\tilde{u}-\bar{u}\| = 0 \quad \Rightarrow \tilde{u} = \bar{u}$$

OSS Il teorema di sopra contiene (se $M=1$)

min di $u \to \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2$ con $\varphi \leq u \leq \psi$

basta costruire G come indicatrice come prima

la $\bar{u}$ verifica la "DISEQUAZIONE VARIAZIONALE"

$$\begin{cases} \int \nabla\bar{u}\,\nabla(v-\bar{u}) \geq 0 \\ \bar{u} \in \mathbb{K}^{\psi}_{\varphi} \cap H^1_0 \end{cases}$$

Prop Se in aggiunta vale $(G,q,\sigma)^+$ (quella con $\leq a_0 + a_1 |s|^q$) con $q\sigma' \leq p$ (potrei anche prendere un q_1, σ_1 diversi).

$\Rightarrow G(\cdot,u) \in L^1 \quad \forall u \in L^p$ e G è continua su L^p

$\Rightarrow \bar{u}$ verifica $\int \nabla\bar{u}\,(v-\bar{u}) + G'(x,\bar{u})(v-\bar{u}) \geq 0 \qquad \forall v \in H^1_0$

$$\Longleftrightarrow \int \nabla\bar{u}\,\nabla v + G'(x,\bar{u})\,v \geq 0 \qquad \forall v \in H^1_0$$

Cioè $\quad -\Delta\bar{u} + \partial G(\cdot,\bar{u}) \ni 0$ "in senso debole"

(Soliti conti vedi video)

Se poi $G(x,\cdot)$ è diff quasi ovunque posso scrivere

$$\int \nabla\bar{u}\,\nabla v + \nabla G(x,\bar{u})\,v = 0 \qquad \forall v \in H^1_0$$

(perché guadagnando la linearità di G' posso scambiare v con $-v$)

LEZIONE 17

Titolo nota 05/05/2020

- $G : \Omega \times \mathbb{R}^m \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ un integrando normale

- $(G^{\pm}, q, \sigma)$ $\qquad G(x,s) \gtrless -a_0(x) \mp a_1(x)\,|s|^q \qquad q \in [1, +\infty)\,,\ \sigma \in [1, +\infty]$

  per q.o x e $\forall s \qquad a_0 \in L^1(\Omega)\ a_1\ L^\sigma(\Omega)$

- $q\sigma' \leq p < 2^* \quad (\Rightarrow \sigma \neq 1)$ e di solito $p = q\sigma'$

Si può definire il funzionale

$$I : L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \to]-\infty, +\infty] \text{ ponendo}$$

$$I(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega G(x,u)\,dx & \text{se } G(\cdot,u) \in L^1 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Visto (la volta scorsa) che $\exists!\ \bar{u}$ di minimo per I e $\bar{u}$ verifica in forma debole:

$$\begin{cases} \forall s \in \mathcal{D}(I) = \{v : G(\cdot, v) \in L^1\} \text{ si ha che} \\ \quad G'(\cdot, \bar{u})(v - \bar{u}) \text{ è superiormente integrabile (in realtà è integrabile) e vale} \\ \int \nabla\bar{u}\,\nabla(v - \bar{u})\,dx + \int G'(x,\bar{u})(v-\bar{u})\,dx \geq 0 \end{cases}$$

è la forma debole di $\quad -\Delta\bar{u} + \partial G(\cdot, \bar{u}) \ni 0$

Supponiamo inoltre che valga che

$(\nabla G, q, \sigma)$ q.o $x \in \Omega \quad G(x, \cdot)$ sia differenziabile e che

$$|\nabla_s G(x,s)| \leq \alpha(x) + a(x)\cdot|s|^{q-1} \qquad \forall s \in \mathbb{R}^m$$

con $\tilde{a} \in L^{p'}$ e $a \in L^{\sigma}$ $\quad p, q, \sigma$ quelli di prima

<u>Oss</u> Questa proprietà $\Rightarrow (G^-, q, \sigma)$ e (G^+, q, σ)

Se vale $(\nabla G, q, \sigma)$ e se $\bar{u}$ è il minimo di I su L^p

$$\Rightarrow \quad -\Delta \bar{u} \in L^{p'} \quad \text{e vale}$$

$$-\Delta \bar{u} + \nabla_s G(\cdot, \bar{u}) = 0$$

Per vederlo basta dimostrare che vale

<u>prop</u>: $\forall u \in L^p \Rightarrow \nabla_s G(\cdot, u) \in L^{p'}$

<u>Dim</u>

$$\|\nabla_s G(\cdot, u)\|_{p'} \le \underbrace{\|\tilde{a}\|_{p'}}_{<+\infty} + \|a\, |u|^{q-1}\|_{p'} \le$$

$$= \|\tilde{a}\|_{p'} + \| \underbrace{a^{p'}}_{\frac{\sigma}{p'}} \; \underbrace{|u|^{(q-1)p'}}_{\left(\frac{\sigma}{p'}\right)' = \frac{\sigma}{\sigma - p'}} \|_{1}^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le \|\tilde{a}\|_{p'} + \|a\|_{\sigma} \underbrace{\| |u|^{(q-1)p'} \|_{\frac{\sigma}{\sigma-p}}}_{\text{dovrebbe tornare } L^p.}$$

Dalla prop so che

$$\int \nabla \bar{u}\, \nabla(v - \bar{u}) + \int G'(x, \bar{u})(v - \bar{u}) \ge 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(I)$$

$\Downarrow v = \pm(v - \bar{u})$ tanto $\in \mathcal{D}(I)$ ottengo $= 0$

$$\int \nabla \bar{u}\, \nabla v + \int \nabla_s G(x, \bar{u})\, v = 0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$\Rightarrow$ Se $\nabla_s G(x, \bar{u}) \in L^{p'} \Rightarrow$

$$\left| \int_\Omega \nabla \bar{u} \nabla v \right| \leq \| \nabla_S G(\cdot, \bar{u}) \|_{L^{p'}} \| v \|_p \quad \forall v \in H_0^1$$

Dicendo $v \longrightarrow \int_\Omega \nabla \bar{u} \nabla v$ è continuo rispetto rispetto a L^p allora $\bar{u}$ ammette $-\Delta \bar{u}$ in $L^{p'}$

ma il conto di sopra mi da la continuità cercata.

(Teorema di Regolarità)

Se $m=1$ $\quad g(x,u) = G_s'(x,u) \Rightarrow$ ottimo risolvendo $-\Delta u + g(\cdot, u) = 0$

Si poteva anche fare un risultato intermedio chiedendo una limitazione sulla crescita di G del tipo

$$(\text{Lip } G) \quad |G(x,s_1) - G(x,s_2)| \leq |a(x)| \left| |s_1|^{q-1} + |s_2|^{q-1} \right| |s_2 - s_1|$$

$$\text{q.o. } x \in \Omega \quad \forall s_1, s_2$$

$$a \in L^\sigma$$

- In questo caso se $p \geq q\sigma'$

$(\text{Lip } G) \Rightarrow$ valgono G^+ e G^- allora $G(\cdot, u) \in L^1 \; \forall u \in L^p$

e $\forall u, v \in L^p \quad G'(\cdot, u) v \in L^1$

e $\boxed{\left| \int G'(x,u) v \, dx \right| \leq C \|v\|_{L^p}}$ da (Lip G) questa è la cosa importante da ottenere.

$$\Rightarrow \int \nabla \bar{u} \nabla v + G'(x, \bar{u}) v \, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1$$

$$\Rightarrow \left| \int \nabla \bar{u} \nabla v \, dx \right| \leq \text{cost} \|v\|_{L^p} \Rightarrow -\Delta u \in L^{p'}$$

e vale $\quad -\Delta \bar{u} + \partial G(\cdot, u) \ni 0 \quad$ q.o. x.

Qui si usa il Lemma di somma

$\partial(\mathcal{E} + \mathcal{G}) = \partial \mathcal{E} + \partial \mathcal{G}$ perché $\mathcal{G}$ è continuo.

Quindi se $0 \in \partial I(\bar{u}) \Rightarrow$

$$0 \in \underset{\{-\Delta \bar{u}\}}{\partial \mathcal{E}(\bar{u})} + \underset{\{\alpha : \alpha(x) \in \partial G(\cdot,\bar{u}) \text{ q.o } x\}}{\partial \mathcal{G}(\bar{u})}$$

Altro punto di vista (+ tradizionale)

Considero $\tilde{I}(u) : H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^m) \longrightarrow]-\infty, +\infty]$

$$\tilde{I}(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \int G(x,u)\,dx & \text{se } G(\cdot,u) \in L^1 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Noto che se $i = i_p : H^1_0 \longrightarrow L^p$ immersione $\Rightarrow \tilde{I} = I \circ i_p$

Consideriamo l'aggiunta $i^* : L^{p'} \longrightarrow H^{-1} = (H^1_0)'$

i^* è caratterizzata da:

$u \in L^{p'}$ $\quad i^*(u) = w \in H^{-1}$ tc

$$\int \nabla i^*(u) \nabla v = \int u v \qquad \forall v \in H^1_0$$

$$\langle i^* u, v \rangle_{H^{-1} H^1_0} = \langle u, iv \rangle_{p' p}$$

dunque posso scrivere $\quad i^* = (-\Delta)^{-1}$

perché $i^*(u) = w$ è la sol di $-\Delta u = w$

oss $\quad \tilde{I} = \frac{\|u\|^2_{H^1_0}}{2} + \tilde{\mathcal{G}}_G(u) \Rightarrow \partial \tilde{I} = u + \partial \tilde{\mathcal{G}}_G(u)$ posso usare il teo della somma

$\tilde{\mathcal{G}}_G(u) = \mathcal{G}_G(iu)$ se penso $\mathcal{G}_G : L^p \to]-\infty, +\infty]$

OSS se vale $(\nabla G, q, r)$ è sotto-diff. $\forall u$.

Posso usare il teorema di composizione per calcolare il sottodiff di $\tilde{g}$

$$\Rightarrow \partial \tilde{g}_\sigma (u) = \{ i^* w \; : \; w \in \partial g(iu) \}$$

Alla fine si trovano le stesse cose:

$\alpha \in \partial \tilde{I}(u) \iff \int \nabla u \nabla (u-v) + G'(x,u)(v-u) \geq \langle \alpha, v-u \rangle_{H^{-1} H^1_0} \quad \forall v \in H^1_0$

e $\alpha = i^* w$ con $w \in \partial I(u)$

Se prendo il minimo $\bar{u}$ per $\tilde{I}$ trovo la stessa condizione

$$\int \nabla \bar{u} \nabla (\bar{u} - v) + G'(x, \bar{u})(v - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall v \in H^1_0$$

Quindi per minimizzare è indifferente la scelta di H^1_0 o L^p

vedremo cosa dove è preferibile uno o l'altro.

- La peculiarità dell'approccio in L^p è il risultato di "regolarità"

cioè se $\partial I(u) \neq \emptyset \Rightarrow u$ è più regolare del semplice $u \in H^1_0$

$(-\Delta u \in L^{p'}$ se G è "buono")

PROBLEMI CON OSTACOLO $(m=1)$

- Sia φ misurabile e indichiamo con $\mathbb{K}_\varphi = \{ u \in L^p \; : \; u \geq \varphi \text{ q.o} \}$

con $p < 2^*$ (φ è l'OSTACOLO),

$\varphi : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ ($\varphi(x) \overset{\text{oppure}}{<} +\infty$ q.o)

- Sia $G : \Omega \times \mathbb{R} \to]-\infty, +\infty]$ verificante (G^-, q, σ) con $p \geq q\sigma'$

e $u \to g(u) = \int_\Omega G(x,u) dx$ è s.c.i in L^p

Consideriamo $\overline{I}_p : L^p \to]-\infty, +\infty]$ $\quad \overline{I}_\varphi = \overline{I} + \chi_{\mathbb{K}_\varphi}$

cioè
$$\overline{I}_\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega G(x,u) & \text{se } u \in H^1_0,\ G(\cdot,u) \in L^1,\ u \geq \varphi \text{ q.o.} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

<u>OSS</u> $\overline{I}_\varphi(u) = \mathcal{E} + \mathcal{G}_{\tilde{G}}$ dove

$$\tilde{G}(x,s) = \begin{cases} G(x,s) & \text{se } s \geq \varphi(x) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\tilde{G}$ è un integrando normale perché è un integrando convesso e a x fissato il $\mathcal{D}(G(x,\cdot)) = [\varphi(x), +\infty[$ che ha parte interna non vuota.

Quindi rientra nelle considerazioni precedenti:

le prop. di punto di sotto diff. sono caratterizzanti i minimi per le funzioni convesse (Audio)

$\overline{u}$ è minimo per $\overline{I}_\varphi$ $\iff$

$$\begin{cases} G'(\cdot,\overline{u})(v-\overline{u}) \in L^1 \\ \int_\Omega \nabla\overline{u}\, \nabla(v-\overline{u})\, dx + \int_\Omega G'(x,\overline{u})(v-\overline{u}) \geq 0 \end{cases} \qquad \forall v \in \mathbb{K}_\varphi \cap H^1_0 \text{ con } G(\cdot,v) \in L^1$$

Se vale anche $(G^+, q, \sigma) \Rightarrow G'(\cdot,u)(v-u) \in L^1 \ \forall u \in L^p$

$\Rightarrow$ posso scrivere

$$\boxed{\int_\Omega \nabla\overline{u}\, \nabla(v-\overline{u}) + \int_\Omega G'(x,\overline{u})(v-\overline{u}) \geq 0 \quad \forall v \in H^1_0 \cap \mathbb{K}_\varphi}$$

VARIATIONAL INEQUALITY (V.I.)

Se poi $\exists\ g(x,u) = G'(x,u)$ (quindi G è differenziabile in S)

posso scrivere

$$G'(x,\bar{u})(v-\bar{u}) = g(x,\bar{u})(v-\bar{u})$$

VOGLIO VEDERE SE $\bar{u}$ VERIFICA UNA QUALCHE EQ FORTE

Mi serviranno qualche ipotesi su G e φ:

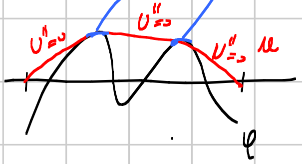
- G verifica (Lip G)
- $\varphi \in H^{2,p}(\Omega,\mathbb{R})$ e $\varphi^+ \in H^1_0$ → serve altrimenti

Teorema (Regolarità per il problema con ostacolo)

Sotto le ipotesi scritte sopra $-\Delta\bar{u} \in L^{p'}$ e posso scrivere:

[Spazio bianco da completare dopo aver fatto i conti.]

Idea con $G:=0$



Dim Voglio mostrare che vale un teorema di somma dei sottodiff.

$$\boxed{\partial \bar{I}_\varphi = \partial I + \partial \chi_{\mathbb{K}_\varphi} \qquad \forall u \in H^1_0 \cap \mathbb{K}_\varphi}$$

OSS questo non può essere dedotto da quanto fatto perché né I, $\mathbb{K}_\varphi$ sono continue.

Se la prop. sopra è vera $\Rightarrow \bar{u}$ di minimo per $\bar{I}_\varphi$

$\Rightarrow \quad 0 \in \partial \bar{I}(\bar{u}) \Rightarrow \partial I(\bar{u}) \neq \emptyset \Rightarrow$ per la regolarità di G $-\Delta u \in L^{p'}$

Dimostriamo la somma: introduciamo la proiezione

$$\Pi : L^p \to \mathbb{K}_\varphi = \{u \in L^p \ \ u \geq \varphi\}$$

$$\Pi(u) = \max\{u, \varphi\} = \begin{cases} u & \text{se } u \geq \varphi \\ \varphi & \text{se } u \leq \varphi \end{cases} = u + (\varphi - u)^+$$

Se $u \in H^1_0 \Rightarrow \Pi(u) \in H^1_0$

$$\text{e } \nabla \Pi(u) = \nabla u + \nabla(\varphi - u)^+ = \begin{cases} \nabla u & u \geq \varphi \\ \nabla \varphi & u \leq \varphi \end{cases}$$

Mi basta dire che $\partial \bar{I}_\varphi(u) \subset \partial I(u) + \partial \chi_\varphi(u)$

Prendo $\alpha \in L^{p'}$ $\quad \alpha \in \partial \bar{I}_\varphi(u)$ (quando è $\neq \emptyset$ altrimenti è banale) Dunque

$$\bar{I}_\varphi(v) \geq \bar{I}_\varphi(v) + \langle \alpha, v - u \rangle_{p',p} \qquad \underbrace{\forall v \in \mathbb{K}_\varphi \cap H^1_0}$$

per questo questo è vero per I

$$I(v) \geq I(v) + \langle \alpha, v - u \rangle_{p',p'}$$

Voglio vedere cosa succede se $v \in H^1_0$ (senza $\mathbb{K}_\varphi$)

$$I(v) = I(v) - I(\Pi(v)) + I(\Pi(v)) \geq$$

$$\underbrace{I(v) - I(\Pi(v))}_{①} + \underbrace{I(u) + \langle \alpha, \Pi(v) - u \rangle}_{②}$$

$$① = \frac{1}{2}\int |\underset{\nabla(v - \Pi(v) + \Pi(v))}{\nabla v}|^2 + \int G(x, v) - \frac{1}{2}\int |\nabla \Pi(v)|^2 - \int_\Omega G(x, \Pi v) =$$

$$\geq \int \nabla(v-\pi(v))\nabla(\pi(v)) + \frac{1}{2}\int \underbrace{|\nabla(v-\pi(v))|^2}_{\geq 0} + \int_\Omega G'(x,\pi(v))(v-\pi(v))\,dx$$

↓ uso $\pi(v) = v + (\varphi - v)^+$

$$= -\int \nabla\pi(v)\nabla((\varphi-v)^+) + \int G'(x, v+(\varphi-v)^+)(v-\pi(v))\,dx =$$

$$= -\int \nabla\varphi\, \nabla((\varphi-v)^+) + \int G'(x,\varphi)(v-\pi(v))\,dx$$

perché se $v=\pi(v)$ entrambi gli integrandi sono $0 \Rightarrow$ ha senso solo x $\pi(v)=\varphi$

dato che $\varphi \in H^{2,p}$ posso scaricare una derivata sul primo int.

$$= \int_\Omega \underbrace{-\Delta\varphi}_{\in L^{p'}}(v-\pi(v)) + \underbrace{G'(x,\varphi)(v-\pi(v))}_{\text{per ipotesi Lip } G} \geq -\text{cost}\,\|v-\pi(v)\|_{L^p}$$

$$I(v) - I(\pi(v)) \geq -c\,\|v-\pi(v)\|_{L^p}$$

$$② \geq I(v) - \underset{\|\alpha\|_{L^{p'}}}{c}\|v-\pi(v)\|_{L^p}$$

quindi $I(v) - I(u) \geq -\text{cost}\,\|v-\pi(v)\|_p \overset{②}{\geq} -\text{cost}\,\|v-u\|$

② perché
$$\underbrace{v(x)-\pi(v)(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } v\geq\varphi \\ v(x)-\varphi(x) & \text{se } v<\varphi(x)\end{cases}}_{\text{Sistemare dettagli (vedi video)}} \quad \text{e } u(x)\geq\varphi(x)$$

$$\Rightarrow \nabla I(u) < +\infty \Rightarrow \partial I(u) \neq \emptyset$$

LEZIONE 18

Titolo nota 06/05/2020

Continuiamo la dim. del teorema di regolarità per il problema "con ostacolo"

Ricordiamo anche qualche dettaglio nelle ipotesi.

$$(V.I)\begin{cases} \int_\Omega \nabla\bar{u}\,\nabla(v-\bar{u}) + G'(x,\bar{u})(v-\bar{u})\,dx \geq 0 & \forall v\in H^1_0 \text{ con } v\geq\varphi \\ & G(\cdot,v)\in L \\ \bar{u}\geq\varphi\ ,\ \bar{u}\in H^1_0(\Omega),\ G(\cdot,\bar{u})\in L^1 \end{cases}$$

dove $\bar{u}$ è il minimo $\frac{1}{2}\int|\nabla u|^2 + G(x,u)$ su $\{u\geq\varphi\}$

<u>Teorema</u> (di Regolarità)

- Supponiamo che l'ostacolo φ verifichi $\Delta\varphi\in L^{p'}$, $\varphi^+\in H^1_0$ $\Downarrow$ $\mathbb{K}_\varphi\cap H^1_0\neq\emptyset$

  e $G_-'(\varphi)\in L^{p'}$

  dove G è un integrale convesso normale e vale $(G^+, q_1, \sigma_1), (G^-, q_2, \sigma_2)$

  e $p\geq q_1\sigma_1'$ e $p\geq q_2\sigma_2'$

- $G:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ (non $]-\infty,+\infty]$ tanto valgono G^+ e G^- quindi è propria)

Allora la sol $\bar{u}$ di $(V.I)$ è in $H^{2,p'}(\Omega)$

cioè $-\Delta\bar{u}\in L^{p'}(\Omega)$ e vale:

$\exists\, w\in L^{p'}(\Omega)$ con $w(x)\in\partial G(x,\bar{u}(x))$ q.o $x\in\Omega$

$$-\Delta\bar{u}+w\begin{cases} =0 & x\ \ \bar{u}>\varphi \\ \geq 0 & x\ \ \bar{u}=\varphi \end{cases}$$

S.E (Strong Equation)

Se inoltre esiste G' allora la forma forte si scrive

$$-\Delta\bar{u} + G'(x,\bar{u}) \begin{cases} = 0 & \text{se } \bar{u} > \varphi \text{ (q.o).} \\ \geq 0 & \text{se } \bar{u} = \varphi \text{ (q.o)} \end{cases}$$

<u>Dim</u> Per fare la dim. serve la prop

<u>Prop</u> Se G verifica (G^+, q_1, σ_1) e (G^-, q_2, σ_2) e $p \geq q_1\sigma_1'$ $p \geq q_2\sigma_2'$

$$I(u) = \mathcal{E}(u) + \mathcal{G}_G(u)$$

Se $u \in \mathcal{D}(I)$ e $u^* \in L^{p'}$

$u^* \in \partial I(u) \iff -\Delta u \in L^{p'}$, $u^* + \Delta u \in \partial G(\cdot, u)$ q.o

<u>Dim prop</u> Se $G = 0$ l'abbiamo visto

$(u \in H_0^1 \quad u^* \in \partial\mathcal{E}(u) \iff u^* = -\Delta u \in L^{p'} \quad -\partial\mathcal{E}(u) = \{-\Delta u\})$

Se c'è G noto che $\mathcal{G}$ è continuo in L^p a causa di G^+ e G^- (VISTO) $\Rightarrow$ vale il teorema di somma

$$\partial I(u) \Rightarrow \partial\mathcal{E}(u) + \partial\mathcal{G}(u) \to \text{Tesi.}$$

Quello che abbiamo mostrato ieri è il seguente risultato:

Indicando con $\bar{I}(u) = I(u) + \chi_{K_\varphi} \begin{cases} I(u) & \text{se } u \in H_0^1 \ u \geq \varphi \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

<u>Prop</u> Se valgono G^+ e G^- e se φ verifica le ipotesi

allora $\overset{\text{pendenza}}{|\nabla \bar{I}|(u)} \leq \|-\Delta\varphi + G_-^+(\cdot,\varphi)\|_{p'} + |\nabla I|(u) \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\bar{I})$

in particolare se $|\nabla \bar{I}|(u) < +\infty \Rightarrow |\nabla I|(u) < +\infty$

Ripercorrendo la dimostrazione di ieri:

preso $v \in \mathcal{D}(I) = H^1_0(\Omega)$

uso che $\pi(v)$ e $u \in \mathcal{D}(\bar{I})$

$$I(v) - I(u) = \underbrace{I(v) - I(\pi(v))}_{①} + \underbrace{\bar{I}(\pi(v)) - \bar{I}(u)}_{②}$$

ieri avevo G' oggi vediamo che basta G'_-

① $\geq \int \nabla\pi(v)\nabla(v - \pi(v)) + \int_\Omega G(x,v) - G(x,\pi(v)) \geq$

$\geq \int \nabla(\pi(v))\nabla(v-\pi(v)) + \int_\Omega G'_-(x,\pi(v))(v-\pi(v))$ $\geq$

perché $v - \pi(v) \leq 0$

e dalle prop. delle funzioni convesse

$G(s_2) \geq G(s_1) + G'_-(s_1)(s_2 - s_1)$

se $s_2 \leq s_1$

$$= \int \nabla\varphi\nabla(v - \pi(v)) + \int G'_-(x,\varphi)(v - \pi(v))$$

$$= \int \left(-\Delta\varphi + G'_-(x,\varphi)\right)(v - \pi(v)) \geq$$

$$- \|-\Delta\varphi + G'_-(x,\varphi)\|_{L^{p'}} \|v - \pi(v)\|_{L^p} \geq$$

$\|v-\pi(v)\|_p \leq \|v-u\|_p$

dato che $u \geq \varphi$

$|v - \pi(v)| = (\varphi - v)^+ \leq$ $u \geq \varphi$

$\leq (u - v)^+ \leq$

$\leq |v - u|$

$$\geq - \|-\Delta\varphi + G'_-(x,\varphi)\|_{L^{p'}} \|v - u\|_{L^p}$$

② $\geq - |\nabla \bar{I}|(u)\, \|v - u\|$ per la convessità di $\bar{I}$

$$\Rightarrow I(v) - I(u) \geq -\left(\|-\Delta\varphi + G'_-(\cdot,\varphi)\|_{L^{p'}} + |\nabla\bar{I}|(u)\right)\|u - v\| \quad \forall v \in H^1_0$$

$$\Rightarrow |\nabla I|(u) \leq \|-\Delta\varphi + G'_-(\cdot,\varphi)\|_{L^{p'}} + |\nabla\bar{I}|(u)$$

Dimostriamo il teorema di regolarità.

$\bar{u}$ è un punto di minimo per $\bar{I}$ in particolare

$$|\overline{\nabla} I|(\bar{u}) = 0 \Rightarrow |\nabla I|(\bar{u}) < +\infty$$

$\Rightarrow$ Ricordo che pendenza finita $\Rightarrow \partial I(\bar{u}) \neq \emptyset$, ho quindi $u^* \in \partial I(\bar{u})$

$\Rightarrow$ dato che valgono G^+ e G^- $\Rightarrow -\Delta\bar{u} \in L^{p'}$ e vale

$$= u^* + \Delta\bar{u} \in \partial G(\cdot, \bar{u}) \quad \text{q.o } x \in \Omega \text{ (uso la prop. iniziale)}$$

$$m^* \left(= \overset{\text{II - locale}}{G'}(\cdot, \bar{u}) \text{ se esiste}\right)$$

Resta da dimostrare S.E cioè devo dire che prop ha u^*

Torniamo al fatto che $0 \in \partial\bar{I}(\bar{u}) \Rightarrow$

$$(*) \int_\Omega (-\Delta u + m^*)(v - \bar{u})\, dx = \int_\Omega u^* (v - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K}_\varphi \cap H^1_0$$

posso scrivere la rel. sopra $\boxed{\forall v \in \mathbb{K}_\varphi}$ $(v \in L^p(\Omega))$ perché

se $v \in \mathbb{K}_\varphi$ trovo $v_n' \to v$ in L^p con $v_n' \in H^1_0$

si vede $v_n := \pi(v_n') \in H^1_0$ (prop. di H^1_0) $v_n \in \mathbb{K}_\varphi$

e $v_n \to v$ in L^p

quindi $\mathbb{K}_\varphi \cap H^1_0$ è denso rispetto alla norma L^p in $\mathbb{K}_\varphi$

Mostro ≥ 0 della S.E

Se prendo $v = \bar{v} + w$ con $w \in L^p$ con $w \in L^p$

$\Rightarrow v \in \mathbb{K}_\varphi$

$$\Rightarrow \int (-\Delta\bar{u}\, w + m^*)\, w \geq 0 \quad \forall w \geq 0 \quad \text{cioè}$$

$$-\Delta\bar{u} + m^* \geq 0 \quad \text{q.o}$$

Adesso mostro $= 0$ quando $\bar{u} > \varphi$ q.o.

Preso $w \in L^p$ con $w = 0$ q.o su $\{x : \bar{u} = \varphi\}$

prendiamo $v_t = (\bar{u} + tw) \vee \varphi = \pi(\bar{u} + tw) \in \mathbb{K}_\varphi \quad t \geq 0$

e sostituiamo in (*)

$$\int_\Omega \underbrace{\left(-\Delta\varphi + m^*\right)}_{L^{p'}} \frac{\left(V_t - \bar{u}\right)}{t} \geq 0 \qquad \forall t > 0$$

Noto che

$$\frac{V_t - \bar{u}}{t} = \begin{cases} w & \text{se } \bar{u} + tw \geq \varphi \\ \frac{\varphi - \bar{u}}{t} & \text{se } \underline{\bar{u} + tw \leq \varphi} \end{cases} \Bigg\} \leq w$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{V_t - \bar{u}}{t}\right| \leq |w|$$

inoltre

$$\Delta_t = \frac{V_t - w}{t} \xrightarrow[t \to 0]{\text{punt}} \begin{cases} w(x) & \text{se } \bar{u} > \varphi \ \left(\Rightarrow \bar{u} + tw \geq \varphi \text{ è vera punt definit}\right) \\ w^+(x) \overset{\text{perché } 0 = w \text{ se } \bar{u} = \varphi}{\leq 0} & \text{se } \bar{u} = \varphi \end{cases}$$

$$\Delta_t = \frac{\left(\varphi(x) + tw\right)^+ - \varphi}{t} = \begin{cases} w(x) & w \geq 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_t \xrightarrow[t \to 0]{} w(x) \quad \text{puntualmente}$$

$\Rightarrow$ usando Lebesgue

$$\int \left(-\Delta\varphi + m^*\right) w \geq 0 \qquad \forall w \in L^p(\Omega) \quad \text{con } w = 0 \text{ su } \{\bar{u} = \varphi\}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\Delta\varphi + m^* = 0 \qquad \text{q.o. su } \{x : \bar{u} > \varphi\}$$

<u>OSS</u> In questa dimostrazione abbiamo in realtà che

$$\partial \bar{I}(\bar{u}) = \partial \mathcal{E}(\bar{u}) + \partial g_0(\bar{u}) + \partial \chi_{K_\varphi}(\bar{u})$$

$$\partial \chi_{K_\varphi}(\bar{u}) = \{v(x) : v(x) \geq 0 \text{ e } v(x) = 0 \text{ dove } \bar{u} > \varphi\} = N_{K_\varphi}(\bar{u})$$

SOTTOSOLUZIONI / SOPRASOLUZIONI

φ sottosoluzione $\Rightarrow$ φ è un ostacolo inferiore fittizio

G verifica (vedi modifica video).

Def $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ è una sottosoluzione (soprasoluzione) per $-\Delta + G'$ se

$$\varphi \in H^1(\Omega), \quad \varphi^{\pm} \in H^1_0, \quad G(\cdot, \varphi) \in L^1 \quad e$$

$$\forall v \in H^1_0 \text{ con } v \geq 0 \text{ si ha } \left(G'_-(\cdot, \varphi) v\right)^{\pm} \in L^1(\Omega)$$

Forma debole $\displaystyle\int \nabla\varphi \nabla v + \int_\Omega G'(x, \varphi) v \underset{\leq}{\geq} 0$

$\left(\underline{\text{Nota}} \Rightarrow G'(\cdot, \varphi) v \in L^1 \right)$

Prop Se φ è una sottosoluzione e u $\bar{u}$ risolve (V.I) con l'ostacolo φ ($\bar{u}$ è minimo per $\bar{I}$) $\Rightarrow$ $\bar{u}$ è minimo per I, dunque risolve $-\Delta u + G'(\cdot, u) \ni 0$ nelle forme deboli che abbiamo visto.

Dim So che $\bar{u}$ è di minimo per $\bar{I}$. Prendo $v \in \mathcal{D}(I)$ e

$$I(v) - I(u) = I(v) - I(\pi(v)) + \bar{I}(\pi(v)) - \bar{I}(u) \geq$$

conti già visti

$$\geq \int_\Omega \nabla\pi(v) \nabla(v - \pi(v)) + \int_\Omega G'_-(x, \pi(v))(v - \pi(v))\, dx =$$

$$= \int_\Omega \nabla\varphi\, \nabla\underbrace{(v - \pi(v))}_{\leq 0}\, dx + \int_\Omega G'_-(x, \varphi)\underbrace{(v - \pi(v))}_{\leq 0} \geq 0$$

perché φ è sottosoluzione.

$\Rightarrow$ Tesi

<u>oss</u> Se $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e $-\Delta\varphi \leq 0$ in Ω, $\varphi \leq 0$ in $\partial\Omega$

G derivabile e $G'(\cdot, \varphi) \in L^1$

$\Rightarrow$ φ è sottosoluzione

Nelle ipotesi dove valgono le forme forti:

$$-\Delta\bar{u} + G'(\cdot, \bar{u}) \begin{cases} = 0 & \text{se } \bar{u} > \varphi \\ \geq 0 & \text{se } \bar{u} = \varphi \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-\Delta\varphi + G'(\cdot, \varphi) \leq 0 \quad \text{se } \varphi \text{ è sottosoluzione}$$

LEZIONE 19

Titolo nota 13/05/2020

Torniamo alla questione delle soprasoluzioni e "ostacolo fittizio"

Def sottosoluzione (soprasol)

Data $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile tale che

$\psi \in H^1(\Omega)$, $\psi^+ \in H^1_0(\Omega)$ ($\psi \overset{\geq}{\leq} 0$ su $\partial\Omega$), $G(\cdot,\psi) \in L^1(\Omega)$

$G'_-(\cdot, v)$ è $\overset{\sup}{\inf}$. integrabile

e $\forall v \in H^1_0(\Omega)$ con $v \geq 0$ e $[G'_-(\cdot, v)]^{\overset{+}{-}} v \in L^1$

$$\int \nabla\psi \nabla v + \int G'_-(x,\psi) v \, dx \overset{\geq}{\leq} 0$$

oss da qui si ricava che $G'_-(x,\psi) v \in L^1$

Teorema Se ψ è sottosoluzione (soprasol) e se $\bar{u}$ risolve la dis variazionale

$$\begin{cases} \bar{u} \overset{\leq}{\geq} \psi & (\mathbb{K}^\psi = \{u \leq \psi\}) \\ \int \nabla\bar{u} \, \nabla(v-\bar{u}) \, dx \quad \int G'(x,\bar{u})(v-\bar{u}) \overset{\geq}{\underset{\leq}{}} 0 & \forall v \text{ con } v \overset{\leq}{\geq} \psi, \ G(\cdot,v) \in L^1 \end{cases}$$

Dim Ricordo che se $\bar{u}$ verifica V.I.

$\Rightarrow \bar{u}$ è di minimo per $\tilde{I}(u) = I + \chi_{\mathbb{K}_\psi}$ $\quad (\mathbb{K}_\psi = \{v \geq \psi\})$

Prendo $v \in D(I) = \{v : v \in H^1_0, \ G(\cdot,v) \in L^1\}$

Notiamo $G(\cdot, \pi(v)) = \underset{\underset{L^1}{\cap}}{G(\cdot,v)} \mathbb{1}_{\{v \geq \psi\}} + \underset{\underset{L^1}{\cap}}{G(\cdot,\psi)} \mathbb{1}_{\{v < \psi\}} \in L^1$

Allora posso calcolare

$$I(v) - I(\pi(v)) \geq \int_\Omega \nabla \pi(v) \nabla (v-\pi(v))\,dx + \int_\Omega \left(G(x,v) - G(x,\pi(v))\right) dx \geq$$

$$\geq \int_\Omega \nabla \pi(v) \nabla (v-\pi(v))\,dx + \int_\Omega G_-'(x,\pi(v))(v-\pi(v))$$

ha senso perché $(v-\pi(v)) \leq 0$ e

$$G(\cdot,v) - G(\cdot,\pi(v)) \geq G_-'(\cdot,\pi(v))(v-\pi(v))$$

$$\Rightarrow [G'(\cdot,\pi(v))]^+(v-\pi(v)) \in L^1$$

$$-[G'(\cdot,\pi(v))]^-(v-\pi(v))$$

$$\int_\Omega \nabla \varphi \nabla (v-\pi(v))\,dx + \int G_-'(x,\varphi)(v-\pi(v))\,dx \geq 0$$

uso che φ è sottoluzione e noto che

$$[G_-'(x,\varphi)]^-(\pi(v)-v) \in L^1$$

OSS Si deduce dal risultato un "principio di max"

Se $\bar u$ è sol del problema "$-\Delta u + G'(\cdot,u) = 0$" nel senso debole che abbiamo incontrato $\Leftarrow$ $\bar u$ è di minimo per I

$$I(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \int G(x,u)\,dx$$

Se φ è sotto soluzione per "$-\Delta + G$" $\Rightarrow \bar u \geq \varphi$

Dim infatti considero $\tilde u$ punto di minimo per $\tilde I = I + \chi_{K_\varphi}$

$\Rightarrow \tilde u \geq \varphi$. Per il teorema prec. allora $\tilde u$ è

minimo anche per I e per unicità $\overline{u} = \tilde{u}$ e vale la tesi.

Soluzione di un problema "singolare" e cioè

$$-\Delta u = \frac{1}{u^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

Considero $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ $\partial\Omega$ sia regolare e Ω aperto limitato

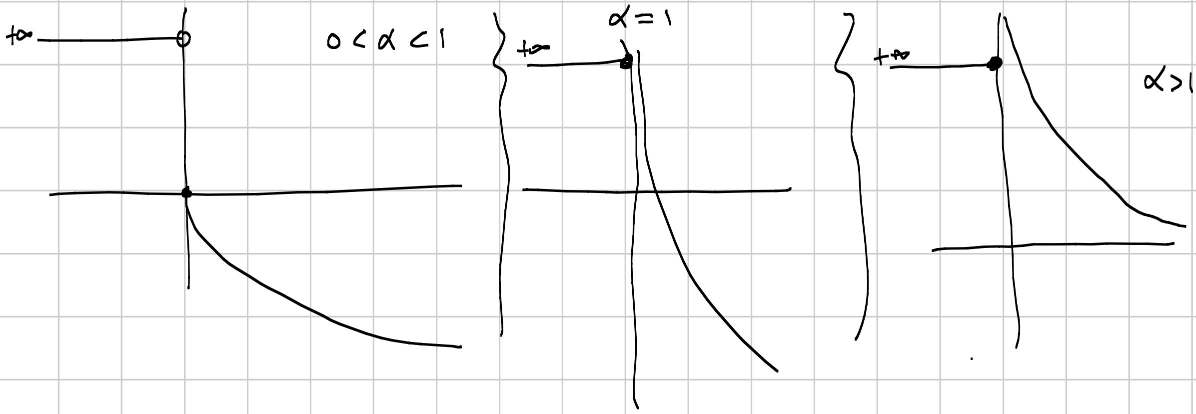
Considero anche

$$G_\alpha(s) = \begin{cases} \dfrac{s^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & s \geq 0 \\ +\infty & \text{se } s < 0 \end{cases} \qquad \alpha \neq 1$$

$$= \begin{cases} -\log(s) & s > 0 \\ +\infty & s < 0 \end{cases} \qquad \alpha = 1$$

$G_\alpha(0) = +\infty$ se $\alpha \geq 1$

$G'_\alpha(s) = -s^{-\alpha}$ $\qquad G''(s) = \alpha s^{\alpha - 1} \geq 0$



quindi convessa

posso prendere $a \in L^\infty(\Omega)$ $0 \leq \underline{a} \leq a \leq \overline{a} < +\infty$

e considerare $I : L^p \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ $\quad p \leq 2^*$

$$I(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + a(x) G_\alpha(u)\, dx & \text{se } G_\alpha(u) \in L^1,\ u \in H^1_0(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

NOTA $-\infty$ non è nell'immagine di I perché

$$G_\alpha(s) \geq 1 - k s \quad \text{con } k>0$$

quindi $G_\alpha(u)$ è inferiormente integrabile

Quindi $a(x)\, G_\alpha(s)$ è un integrando normale convesso.

Se applico i teoremi fatti $\Rightarrow \exists\, \bar{u}$ minimo per I e vale

$$\int \nabla \bar{u}\, \nabla(v-\bar{u})\,dx - \int a(x) u^{-\alpha}(x)\,(v-\bar{u})\,dx \geq 0 \qquad \forall v \in H^1_0$$

con $G_\alpha(v) \in L^1$

non occorre mettere u

e $G_\alpha(\bar{u}) \in L^1$

$\Rightarrow \bar{u} \geq 0$, misura$(\{x,\ \bar{u}(x)=0\}) = 0$ altrimenti $\bar{u} \notin D(I)$

perché $\int G_\alpha(u) = +\infty$

Vorrei qualcosa di più:
- $u(x) > 0$
- e $-\Delta u = a(x) u^{-\alpha}$

Effettivamente si può dimostrare che: se $\boxed{\alpha < 3}$

esiste $\bar{u} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ $\quad u(x) = 0$ se $x \in \partial\Omega$ e $u(x) > 0$ $x \in \Omega$

e tale $\Delta u = a(x)\, u^{-\alpha}(x)$ $\quad x \in \Omega$

cioè esiste una sol classica dell'eq.

Per dimostrarlo trovo $\bar{u}$ come problema vincolato:

PASSO CRUCIALE: Costruire una sopra e una sottosoluzione.

Ora cerco φ sottosoluzione ψ soprasoluzione con $\varphi \le \psi$ entrambe in H^1_0

Ricordo che: si può considerare la prima autofunzione $e \in H^1_0$ e $-\Delta$ cioè una sol di $-\Delta e = \lambda_1 e$ dove $\lambda_1 > 0$, λ_1 è semplice e ha segno costante e $\neq 0$ in Ω posso sceglierla in modo che $e > 0$ in Ω

Siccome $\partial\Omega$ è regolare so che $e \in C^1(\bar{\Omega})$ e $|\nabla e| \ge c > 0$ vicino a $\partial\Omega$
$\iff \nabla e \, \hat{\nu} \ge c_1 > 0$ dove $\hat{\nu}$ è la unità entrante al $\partial\Omega$

CASO $0 < \alpha < 1$ in questo caso $u \to \int G_\alpha(u)$ è continuo sulle $u \ge 0$

$\varphi = te$ è una sottosol. se $t > 0$ "è piccolo"

$\varphi \in H^1_0$ $G_\alpha(\varphi)$ è continua $\Rightarrow G_\alpha(\varphi) \in L^1$

Voglio che $-\Delta\varphi - a\varphi^{-\alpha} \le 0$ e lo posso fare in senso puntuale nei punti di Ω (DA CHIARIRE PERCHÉ Vedi video)

$$-\Delta\varphi - a\varphi^{-\alpha} = \lambda_1 t e - a t^{-\alpha} e^{-\alpha} =$$
$$= a t^{-\alpha} e^{-\alpha}\left(\frac{\lambda_1 t^{1+\alpha} e^{1+\alpha}}{a} - 1\right) \le \underbrace{a t^{-\alpha} e^{-\alpha}}_{\ge 0}\left(\frac{\lambda_1 t^{1+\alpha} e^{1+\alpha}}{a} - 1\right) \underset{t \text{ piccolo}}{<} 0$$

$\frac{\lambda_1 t^{1+\alpha} e^{1+\alpha}}{a} \xrightarrow{t \to 0} 0$

quindi φ è sottosol. per t piccoli.

SOPRASOL $\psi = t(e - c e^{2-\alpha}) = te(1 - c e^{1-\alpha})$ $t > 0$, $c > 0$

$$-\Delta\psi = t\left(-\Delta e + c\Delta e^{2-\alpha}\right) = t\left(\lambda_1 e + c \operatorname{div}\left((2-\alpha)e^{1-\alpha}\nabla e\right)\right) =$$
$$= t\left(\lambda_1 e + c(2-\alpha)(1-\alpha)e^{-\alpha}|\nabla e|^2 + c(2-\alpha)e^{1-\alpha}\Delta e\right)$$

$$= t\left(\lambda_1 e + c(2-\alpha)(1-\alpha)e^{-\alpha}|\nabla e|^2 - c(2-\alpha)\lambda_1 e^{2-\alpha}\right)$$

$-\Delta\psi - a\,\psi^{-\alpha} =$

$$= t\left(\lambda_1 e + c(2-\alpha)(1-\alpha)e^{-\alpha}|\nabla e|^2 - c(2-\alpha)\lambda_1 e^{2-\alpha}\right) - a t^{-\alpha} e^{-\alpha}(1-ce^{1-\alpha})^{-\alpha}$$

$$t^{-\alpha}e^{-\alpha}\left\{ t^{\alpha+1}\left[\lambda_1 e^{1+\alpha}\underbrace{(1-c(2-\alpha)e^{1-\alpha})}_{A(x)} + c(2-\alpha)(1-\alpha)|\nabla e|^2\right] - a\underbrace{(1-ce^{1-\alpha})}_{B(x)}{}^{-\alpha}\right\} \geq$$

Scelgo $c>0$ in modo tale che $A(x)\geq\frac{1}{2}$, $B(x)\geq\frac{1}{2}$ ovvero $\geq\frac{1}{2}$

$$\geq t^{-\alpha}e^{-\alpha}\left\{ t^{\alpha+1}\underbrace{\left[\frac{\lambda_1 e^{1+\alpha}}{2} + c(2-\alpha)(1-\alpha)|\nabla e|^2\right]}_{\text{è limitata da } 0 \text{ e } >0} - \frac{a}{2^{-\alpha}}\right\} \geq 0$$

per t grandi

perché al bordo $|\nabla e|^2 \geq \nu^2$ e internamente $e^{1+\alpha}\geq \text{cost}>0$

Quindi ψ è soprasoluzione.

<u>NOTA</u> vicino al $\partial\Omega$ $e(x)\simeq \text{dist}(x,\partial\Omega)$

sia φ che ψ sono $\simeq \text{dist}(x,\partial\Omega)$

perché $\varphi = te$

$\psi = te(\underbrace{1-ce^{1-\alpha}}_{\simeq 1 \text{ vicino al bordo.}})$ e scelti t opportuni e $\varphi\leq\psi$

Dimostriamo quindi la tesi x $0<\alpha<1$ (quindi $\alpha<3$)

Considero $\bar{I} = I + \chi_{\mathbb{K}_\varphi^\psi}$ $\mathbb{K}_\varphi^\psi = \{\varphi\leq u\leq\psi\}$

$\bar{I}$ ha dominio $\neq\emptyset$ in quanto $\varphi\leq\psi$ e stanno in H_0^1

dunque $\bar{I}$ ha minimo $\bar{v}$ in $\mathbb{K}_\varphi^\psi \cap H_0^1 \cap \{G(\cdot,u)\in L^1\}$

non non è necessario perché con $u\in\mathbb{K}_\varphi^\psi$ sono tali che $G(\cdot,u)\in L^1$

e per il "vicolo fittizio" $\Rightarrow$ è numero di $\mathcal{I}$

quindi qualunque $\varphi \leq \bar{u} \leq \psi$

se $\Omega' \subset\subset \Omega$ allora $\inf_{\Omega'} u > 0$

Se nell' V.I prendo $v = \bar{u} + \varepsilon w$ con $w \in C_0^\infty(\Omega')$

e ε piccolo $\Rightarrow v$ è ammissibile

$$\int \nabla\bar{u}\,\nabla w + \int a(x)\underbrace{G_\alpha'(\bar{u})}_{\in L^\infty(\Omega')} w = 0 \quad \forall\ w \in C_0^\infty(\Omega')$$

$$\underbrace{-\Delta\bar{u} \in L^\infty(\Omega') \Rightarrow \bar{u} \in C^{1,1}(\Omega')}_{\text{c'è un po' di teoria di regolarità.}} \Rightarrow -\Delta\bar{u} \in C^{1,1} \Rightarrow \text{Bootstrap}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta\bar{u} = a(x)\,\bar{u}^{-\alpha}$$

Inoltre siccome $\varphi \leq \bar{u} \leq \psi \Rightarrow \bar{u} \in C^0(\bar{\Omega})$

perché φ e ψ si annullano al bordo.

Caso $\alpha = 1$ è incontrato

Vediamo $1 < \alpha$

Voglio costruire sopra-sotto soluzioni:

Considero
$$\varphi = t e^\beta \qquad \text{con } \beta < 1$$

$$\Delta\varphi = t\,\mathrm{div}\left(\beta e^{\beta-1}\nabla e\right) = t\left(\beta(\beta-1)e^{\beta-2}|\nabla e|^2 + \beta e^{\beta-1}\underset{-\lambda_1 e}{\underset{\shortparallel}{\Delta e}}\right) =$$

$$-\Delta\varphi - a\varphi^{-\alpha} = -t\,\beta(\beta-1)e^{\beta-2}|\nabla e|^2 + t\lambda_1\beta e^\beta - at^{-\alpha}e^{-\alpha\beta}$$

Scelgo β t.c. $\beta - 2 = -\alpha\beta = \quad \beta = \frac{2}{1+\alpha} < 1$ perché $\alpha > 1$

Con questa scelta

$$-\Delta\varphi - a\varphi^{-\alpha} = t^{-\alpha}e^{-\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\Big(\underbrace{-t^{1+\alpha}\beta\overbrace{(\beta-1)}^{<0}|\nabla e|^2 + t^{1+\alpha}\lambda_1\beta e^2}_{\downarrow\, t\to 0 \atop 0}\ \underset{-a<0}{\underset{\shortparallel}{-a}}\Big) < 0 \quad \text{per } t \text{ piccoli}$$

Quindi $-\beta(\beta-1)|\nabla e|^2 + \lambda_1 \beta e^2 \geq \mu > 0 \Rightarrow$ per t grande ψ è sopra sol.

uso che $e \geq \nu > 0$ "dentro" Ω
e $|\nabla e| \geq \nu > 0$ vicino $\partial\Omega$

$\varphi = te^\beta$ t piccolo e $\psi = te^\beta$ t grande

$$\Rightarrow \quad -\Delta\varphi - a\varphi^{-\alpha} < 0$$
$$-\Delta\psi - a\psi^{-\alpha} > 0$$

devo controllare che $\underline{\underline{\varphi \text{ e } \psi \in H_0^1}}$ e $G_\alpha(\varphi)$ e $G_\alpha(\psi) \in L^1$

comunque gratis

$$\nabla e^\beta = \beta e^{\beta-1} \underbrace{\nabla e}_{\in L^\infty} \in L^2 \; ?$$

mi serve $e^{\beta-1} \in L^2$, dato che $\partial\Omega$ è regolare

$\Rightarrow e \simeq d = \text{dist}(\cdot, \partial\Omega)$

$\Rightarrow e^{\beta-1} \simeq d^{\beta-1} = (\text{dist}(\cdot,\partial\Omega))^{\beta-1} \in L^2 \iff \beta - 1 > -\frac{1}{2}$

$$\beta > \frac{1}{2}$$
$$\shortparallel$$
$$\frac{2}{1+\alpha} > \frac{1}{2}$$
$$4 > 1+\alpha$$
$$\boxed{\alpha < 3}$$

Quindi x $1 < \alpha < 3 \Rightarrow \varphi$ e $\psi \in H_0^1$

$$G_\alpha(e^\beta) \in L^1 \iff e^{\beta(1-\alpha)} \in L^1 \iff e^{\frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha}} \in L^1$$

$$\frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha} > -1 \qquad 2 - 2\alpha > -1 - \alpha$$
$$\boxed{\alpha < 3}$$

Quindi $\alpha < 3$ sono sopra/sotto sol e seguo lo stesso ragionamento di prima. e trovo $\bar{u}$ sol con $\varphi \leq \bar{u} \leq \psi$

in questo caso non $\in C^1(\bar{\Omega})$ ma $\bar{u}$ è solo Hölderiana in $\bar{\Omega}$

LEZIONE 20

Titolo nota 19/05/2020

Abbiamo visto che se $\alpha < 3$ esiste $u \in H_0^1(\Omega)$ con Ω aperto limitato e bordo reg.
$u \in C^0(\bar\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ sol di

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = u^{-\alpha} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \qquad u > 0 \text{ in } \Omega \end{cases}$$

La u l'abbiamo trovata minimizzando

$$I(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int |\nabla u| dx - \frac{1}{1-\alpha}\int u^{1-\alpha} du & \text{se } u > 0 \text{ e } u^{1-\alpha} \in L^1 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\underline{\alpha < 3}$ è legato al fatto che $D(I) \neq \emptyset$
si può vedere che, se $\partial\Omega$ è suff regolare, non ci sono $u \in H_0^1$ con $u^{1-\alpha} \in L^1$ $u > 0$ e $\alpha \geq 0$

In realtà si può può vedere che se rinuncio a $u \in H_0^1$ anche se $\alpha \geq 3$ (Sembra difficile pensare alla sol come problema variazionale)

Però si può usare un "trucco": cerco $u = \varphi + z \;/\; \psi - z$
dove φ e ψ sono le sopra/sotto-soluzioni usate le volte scorse

$\varphi = t\, e_1^{\beta}$ t piccolo con e_1 la prima autofunzione
e $\beta \in]0,1[$ e $-\alpha$

$\psi = t\, e_1^{\beta}$ t grande $-\alpha\beta = \beta - 2 \Rightarrow \beta = \dfrac{2}{1+\alpha}$
e $\beta \in]0,1[$ se $\alpha > 1$

Se $\alpha = 3 \quad \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad x \ \alpha < 3 \Rightarrow e_1^\beta \in H_0^1$

Se $\alpha > 3 \quad \varphi, \psi \in H_0^{1,p}$ con $1 < p < 2$

e continua a essere vero $-\Delta\varphi - \varphi^{-\alpha} < 0$

$$-\Delta\psi - \psi^{-\alpha} > 0$$

Posso sperare di trovare $u = \varphi + z$ con $z \in H_0^1$

$$u = \psi - z$$

$\Leftarrow$ Posso considerare Formalmente

$$I(\varphi + z) - I(\varphi) \qquad (+\infty - \infty \quad x \geq 3)$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\int |\nabla\varphi|^2} + \int_\Omega \nabla\varphi \nabla z + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 - \frac{1}{1-\alpha}\int (\varphi + z)^{1-\alpha}$$

$$- \cancel{\frac{1}{2}\int |\nabla\varphi|^2} + \frac{1}{1-\alpha}\int_\Omega \varphi^{1-\alpha} =$$

$\to$ divido per buono di poter scrivere

$$= \frac{1}{2}\int |\nabla z|^2 - \frac{1}{1-\alpha}\int \underbrace{(\varphi + z)^{1-\alpha}}_{-G_\alpha(\varphi+z)} - \varphi^{1-\alpha} - \int \Delta\varphi \, z =$$

$$= \frac{1}{2}\int |\nabla z|^2 + \int \tilde{G}_\alpha (x, z) \, dx$$

$$\tilde{G}_\alpha(x, z) = -\frac{1}{1-\alpha}\overbrace{\left((\varphi + z)^{1-\alpha} + \varphi^{1-\alpha} \right)}^{\text{uso la convessità}} - \Delta\varphi \, z \geq \quad \left(\begin{matrix} \text{manca} \\ \text{a } +\infty \ x \\ z \leq 0 \end{matrix} \right)$$

$$\geq \underbrace{\left(-\varphi^{-\alpha} - \Delta\varphi \right)}_{\text{Vorrei stesse in } (L^{2^*})' \ ?!} z$$

(Dimostrazione totale nel Video !!)

Vogliamo vedere un modo di risolvere un problema di evoluzione

$$(P.e)\ \begin{cases} -u' \in \partial f(u) \\ u(0) = u_0 \in D(f) \end{cases} \quad \text{nel caso } f \text{ convessa. in }]0,T]$$

Parto da $f : H \to]-\infty, +\infty]$ convessa, SCI, propria e H è Hilbert

(come visto) $\Rightarrow$ $f(u) \geq -c(1 + \|u\|)$ $\forall u \in H$
(su ogni limitato f è limitata inf)

$\Rightarrow$ Se $\lambda > 0$ $\forall \bar{u} \in H$ e se considero $v \to f(v) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{u} - v\|^2 = f_\lambda(v)$

ha minimo perché f_λ è convessa sci coerciva $\forall \lambda > 0$

Se v_λ è minimo di f_λ $\Rightarrow$ $0 \in \partial f_\lambda(v_\lambda) \Leftrightarrow$

$$0 \in \partial f(v_\lambda) + \underbrace{\frac{v_\lambda - \bar{u}}{\lambda}}_{=\partial\left(\frac{1}{2\lambda}\|v_\lambda - \bar{u}\|^2\right)} \Leftrightarrow \frac{\bar{u} - v_\lambda}{\lambda} \in \partial f(v_\lambda)$$

Inoltre $\underbrace{f(v_\lambda) + \frac{1}{2\lambda}\|v_\lambda - \bar{u}\|^2}_{f_\lambda(v_\lambda)} \leq f(\bar{u}) = f_\lambda(\bar{u})$

in particolare $f(v_\lambda) \leq f(\bar{u})$

- Prendiamo un punto iniziale $u_0 \in D(f)$ e $T > 0$
  Dato $n \in \mathbb{N}$, divido $[0,T]$ in 2^n sottointervalli
  $\left[\frac{i}{2^n}T, \frac{(i+1)}{2^n}T\right]$ $i = 0, \dots, 2^n - 1$

chiamo $t_{n,i} = \frac{i}{2^n}T$ costruisco $u_{n,i}$ ← numericamente vicini fra $u(t_{n,i})$

Prendo $u_{n,0} = u_0$

$u_{n,i+1}$ = p. di minimo per $f_{\lambda_n, u_{n,i}}$ con $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$ → questa al posto di $\bar{u}$

<u>Definisco</u> $u_n(t_{n_i}) = u_{n,i}$

posso estendere $u_n(t) = u_{n,i}$ se $t_{n,i} \leq t < t_{n,i+1}$ (a scalini)

Mi ricordo che $\underbrace{f(u_{n,i+1}) \leq f(u_{n,i})} + \frac{y}{2} \| u_{n,i+1} - u_{n,i} \|^2$

$\Rightarrow$ $f \circ u_n$ é decrescente.

- $\frac{u_{n,i} - u_{n,i+1}}{\lambda_n} \in \partial f(u_{n,i+1})$

cioè $\frac{u_n(t_{n,i}) - u_n(t_{n,i+1})}{\lambda_n} \in \partial f\left(u_n(t_{n,i+1})\right)$

Pongo $\alpha_n(t)$ se $t \in$ (LASCIATO IN SOSPESO)

Da tutto sopra $\Rightarrow$

① $h \geq k$ $\quad \|u_n(t_{n,h}) - u_n(t_{n,k})\| \leq \sum_{i=k}^{h-1} \|u_n(t, i+1) - u_n(t,i)\| \leq$

$$= \sum_{i=k}^{h-1} \left\| \frac{u_n(t_{n,i+1}) - u_n(t_{n,i})}{\lambda_n} \right\| \lambda_n \quad = \to \alpha_n(t) = \frac{u_n(t) - u_n(t-\lambda_n)}{\lambda_n}$$

e $\alpha_n(t) \in \partial f(u(t))$

$$= \sum_{i=k+1}^{h} \| \alpha(t_{n,i})\| \lambda_n = \int_{t_{n,k}+\lambda_n}^{t_{n,h}+\lambda_n} \|\alpha_n(t)\| \, dt$$

dalla convessità di f ho

$$f(u_{n,i}) \geq f(u_{n,i+1}) + \Big\langle \underbrace{\frac{u_{n,i} - u_{n,i+1}}{\lambda_n}}^{\partial f(u_{n,i})}, u_{n,i} - u_{n,i+1} \Big\rangle =$$

$$= f(u_{n,i+1}) - \lambda_n \left\| \frac{u_{n,i} - u_{n,i+1}}{\lambda_n} \right\|^2$$

$\Rightarrow$ posto $h \geq k$

(2) $$f(u_n(t_{n,h})) - f(u_n(t_{n,k})) =$$

$$= \sum_{i=0}^{h-1} f(u_n(t_{n,i+1})) - f(u_n(t_{n,i})) \leq \text{per la dis di sopra}$$

$$\leq - \sum_{i=0}^{h-1} \| \alpha_n(t_{n,i+1}) \|^2 \lambda_n =$$

$$= - \int_{t_{n,k}+\lambda_n}^{t_{n,h}+\lambda_n} \|\alpha_n(t)\|^2 \, dt$$

Dico che $f(u_n(T)) \geq -c_1 \quad \forall n$

perché $\|u_n(t)\| \leq C_2 \quad \forall n$ e $\forall t \in [0,T]$

in effetti da (1)

$$\|u_n(t_{n,h}) - u_n(t_{n,k})\| \overset{\text{Holder}}{\leq} \sqrt{t_{n,h} - t_{n,k} \int_{t_{n,k}+\lambda_n}^{t_{n,h}+\lambda_n} \|\alpha_n(t)\|^2 dt} \leq$$

$$\overset{(2)}{\leq} \sqrt{t_{n,h} - t_{n,k}} \, \left(f(u_n(t_{n,k})) - f(u_n(t_{n,h})) \right)$$

$$\| u_n(t) - \underset{u_n(0)}{u_0} \| \leq \sqrt{t} \left(f(u_0) - f(u_n(t)) \right)$$

Se $f \geq -C$ su tutto H allora u_n è $\frac{1}{2}$ - Holderiana.

Se Fisso $R > 0$ so che $f(u) \geq -\text{cost}$ per $u \in B(u_0, R)$

Dico che $u_n(t) \in B(u_0, R)$ se $t < \dfrac{R^2}{(f(u_0)+C)^2}$

infatti:

$$\|u_n(t) - u_0\| \leq \sqrt{t} \, \left(f(u_0) + C \right) < R \text{ se } t < \frac{R^2}{(f(u_0)+C)^2}$$

Se non fosse vero $\bar{t} = \inf \left\{ \begin{array}{l} t>0 \\ t \leq \frac{R^2}{(c+f(u_0))^2} \end{array} \middle| \, \|u_n(t) - u_0\| = R \right\}$

$\bar{t}$ sarebbe $< \frac{R^2}{(f(u_0)+c)^2}$ $\Rightarrow$ ma è assurdo per la stima di sopra

$R \leq \|u_n(t) - u_0\| \leq \sqrt{\bar{t}} \quad f(u_0) - f(u_n(t)) \leq \sqrt{\bar{t}} \, (f(u_0)+c)$

$$\bar{t} \geq \frac{R^2}{(f(u_0)+c)^2}$$

quindi $u_n(t)$ non arriva sul bordo di $B(u_0,R)$ prima di quell $\bar{t}$

Dunque se $R>0$ $\exists\, T_1 > 0$ per cui $u_n(t) \in B(u_0,R)$ $\forall\, t \in [0,T_1]$ potevo scegliere $T = T_1 < \frac{R^2}{(f(u_0)+c)^2}$

$\forall n$ $u_n(t) \in B(u_0, R)$ e u_n è $\frac{1}{2}$-Hölderiana

$$(*) \quad \|u_n(t_2) - u_n(t_1)\| \leq \left(\int_{t_1+\lambda_n}^{t_2+\lambda_n} \|\alpha_n(t)\| \right)^{1/2} \sqrt{t_2 - t_1}$$

$$\| f(u_n(t_2)) - f(u_n(t_1))\| \leq - \int_{t_1+\lambda_n}^{t_2+\lambda_n} \|\alpha_n(t)\|^2 dt$$

$$e \quad \alpha_n \in \partial f(u_n(t)) \quad t > \lambda_n$$

Da $(*)$ provo ricavare un equi-Hölderianità in n (Va ridimostrato prox lezione)

$$\int_{t_1+\lambda_n}^{t_2+\lambda_n} \|\alpha_n(t)\| \, dt \leq \ldots \leq f(u_0) - f(u_n(t)) \leq$$
$$\leq f(u_0) - \inf_{B(0,R)} f$$

LEZIONE 21

Titolo nota 20/05/2020

Eq di evoluzione

(P.E) $\begin{cases} -u' \in \partial f(u) \\ u(0) = u_0 \in D(f) \end{cases}$ su $[0,T]$ $\quad f : H \to]-\infty, +\infty]$ convessa propria sci, H Hilbert.

Posto $u_0 \in D(f)$, prendo $R > 0$ e considero

$$T = \frac{R^2}{\left(f(u) - \inf_{B(u_0,R)} f\right)}$$

<u>OSS</u> So che $\exists\, c > 0$ tc $f(u) \geq f(u_0) - c\,\|u - u_0\|$

$\Rightarrow \inf_{B(u_0,R)} f \geq f(u_0) - cR$

$\Rightarrow T \geq \dfrac{R^2}{(cR)^2} = \dfrac{1}{c^2}$ e poi vedremo che vale per tutti i T

intanto ho che T è indipendente da R

Dato $n \in \mathbb{N}$ considero i punti t_{n_i} $\lambda_n = \dfrac{1}{2^n}$

(Vedi file prof con mmca).

$\begin{cases} u_{n_0} = u_0 \\ u_{n,i+1} = \text{punto di minimo per } v \longrightarrow f(v) + \dfrac{1}{2\lambda_n}\|v - u_{n_i}\|^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{u_{n,i} - u_{n,i+1}}{\lambda_n} \in \partial f(u_{n,i+1})$$

Definisco $u_n(t) = u_{n_i}$ $\quad t_{n_i} \leq t < t_{n,i+1}$

$$\alpha_n(t) = \underbrace{\frac{u_{n,i} - u_{n,i+1}}{\lambda_n}} \qquad t_{n,i} \le t < t_{n,i+1}$$

$$\alpha_n(t) = \frac{u_n(t) - u_n(t+\lambda_n)}{\lambda_n} \in \partial f(u_n(t+\lambda_n))$$

Allora ① $\| u_n(t_2) - u_n(t_1) \| \le \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha_n(t)\|\, dt \qquad t_1 \le t_2$ in I_n

② $\quad f(u_n(t_2)) - f(u_n(t_1)) \le - \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha_n(t)\|^2\, dt$

$t_1 \le t_2$ in I_n

Perché

$$f(u_{n,i}) \ge f(u_{n,i+1}) + \langle u_{n,i} - u_{n,i+1}, \frac{u_{n,i} - u_{n,i+1}}{\lambda_n} \rangle =$$

$$= f(u_{n,i+1}) + \|\alpha_n\|^2 \cdot \lambda_n$$

Da ① + ②

$$\Rightarrow \quad \|u_n(t_1) - u_n(t_2)\| \le \sqrt{t_2 - t_1} \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \|\alpha_n\|^2\, dt} \le$$

$$\le \sqrt{t_2 - t_1} \sqrt{f(u_n(t_1)) - f(u_n(t_2))}$$

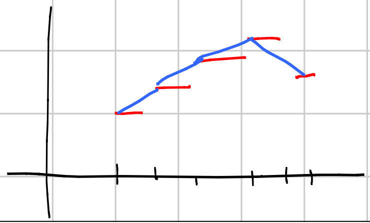
Dico che $u_n(t) \in B(u_0, R)$ per $t \in I_n$

(visto ieri di pende dalla costruzione di T)

$$\Rightarrow \quad \|u_n(t_2) - u_n(t_1)\| \le \sqrt{t_2 - t_1} \sqrt{f(u_0) - \inf_{B(u_0,R)} f} \le C\sqrt{t_2 - t_1}$$

$\Rightarrow u_n(t) \longrightarrow u(t)$ unif. su $[0,T]$. (Perché ② $\Rightarrow f$ dec. $\Rightarrow f(u_n) \le f(u_0)$ $\Rightarrow$ le u_n hanno valori in $\{f(u_n) \le f(u_0)\}$ che è cpt)

[potrei definire $\tilde{u}_n(t)$ come $u_n(t)$ negli $t_{n,i}$ e poi collegarli affinemente tra $t_{n,i}$ e $t_{n,i+1}$]



u_n

$\tilde{u}_n \Rightarrow$ la dis di sopra essendo continue sono equi-Holderiane

Problema di voler applicare Ascoli-Arzelà: manca la compattezza in H.

Aggiungo l'ipotesi che $\{f \leq M\}$ sia compatto in H $\forall M$

Ma si dovrebbe sistemare lo stesso.

Il problema che ha in mente lui è

$$f(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \int G(x,u)\,dx + \chi_{K}$$

$\boxed{\text{su } L^2}$ $\to f(u) \leq C$ è limitato in $H^1_0 \Rightarrow$ compatto in L^2

qui si vede l'utilità di L^2

e l'eq. diventa "$u' = \Delta u - G(\cdot, u)$"

$u(0) = u_0$

Inoltre $\alpha_u(t)$ sono limitate in $L^2([0,T], H)$

perché $\|\alpha_u\|_2^2 = \int_0^T \|\alpha_u\|^2 dt \leq f(u_0) - f(u_\mu(T)) \leq C$

Quindi a meno di sottosucc. $\alpha_u \rightharpoonup \alpha$ debole $L^2([0,T], H)$

$\alpha_u(t) \in \partial f(u_u(t+\lambda_u))$ $t \in I_u$

Dico che $\alpha(t) \in \partial f(u(t))$ per q.o $t \in [0,T]$

Introduco $\mathfrak{F} : L^2([0,T], H) \to \mathbb{R}$

$$\mathfrak{F}(u) = \int_0^T f(u(t))\,dt$$

Prop dico che $w \in \partial \mathfrak{F}(u) \Leftrightarrow w(t) \in \partial f(u(t))$ q.o

Dim $\Leftarrow$ è facile basta integrare $w(t) \in \partial f(u(t))$

$\Rightarrow$ Suppongo $w \in \partial \mathfrak{F}(u)$

$$\int_0^T f(v(t))\,dt \geq \int_0^T f(u(t)) + \int_0^T \langle v(t) - u(t), w(t) \rangle\,dt$$

(Non finisce la dim e prendiamolo per buono)

Uso la prop. dimostrando che $\alpha \in \partial \mathcal{J}(u) \Rightarrow \alpha(t) \in \partial f(u(t))$ per q.o. t)

Se $v \in L^2([0,T], H)$ allora

$$f(V(t)) \geq f(u_n(t+\lambda_n)) + \langle V(t) - u_n(t+\lambda_n), \alpha_n(t) \rangle$$

Perché $\alpha_n \in \partial f(u_n(t+\lambda_n))$

integro $\int$

$$\mathcal{J}(V) \geq \mathcal{J}(u_n(\cdot + \lambda_n)) + \int \langle V(t) - u_n(t+\lambda_n), \alpha_n(t) \rangle$$

e $u_n(t+\lambda_n) \xrightarrow{L^2} u(t)$ (FACILE perché $u_n \to u$ unif)

$$\mathcal{J}(v) \geq \mathcal{J}(u) + \int \langle V(t) - u(t), \alpha(t) \rangle \qquad \alpha_n \rightharpoonup \alpha \ L^2$$

$\Rightarrow \alpha(t) \in \partial f(u(t))$ per q.o. t.

Passiamo al limite in ① e ②

① $\|u(t_2) - u(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \rho \, dt$ (Vedere se è inf conv. debole L^2 per avere il lim. di $\|\alpha_n(t)\|$ a $\|\alpha\|$ in L^1)

non è detto

ρ inizialmente è $\|\alpha(t)\|$

② $f(u_n(t_1)) - f(u_n(t_2)) \leq - \int_{t_1}^{t_2} \overbrace{\|\alpha_n\|^2}^{\rho_n^2} dt$

non è sufo $\downarrow$ $f(u(t_1))$ $\qquad \downarrow$ $f(u(t_2))$

Dato che $\int \|\alpha_n\|^2 dt \leq c \Rightarrow$ usando Fatou

$$\int_0^T \liminf \|\alpha_n\|^2 \leq \liminf \int_0^T \|\alpha_n\|^2 dt \leq c$$

$$\Rightarrow \liminf_n \|\alpha_n\|^2 \in \mathbb{R} \quad \text{q.o } t$$

Dunque se $t \in [0,T) - E$, $|E| = 0$, $\exists n_k$ $\sup \|\alpha_{n_k}(t)\| < +\infty$

Chiamo $t_n = t_c$ $\quad t_n \in I_n \quad t_n - \lambda_n < t < t_n$

$$\Rightarrow f(u(t)) \geq f(u_{n_k}(t_{n_k})) + \langle \underbrace{u(t) - u_n(t_{n_k})}_{\downarrow\, 0},\ \underbrace{\alpha_{n_k}(t)}_{\text{limitato}} \rangle$$

$$\Rightarrow \limsup_{k \to \infty} f(u_{n_k}(t_{n_k})) \leq f(u(t)) \Rightarrow f \text{ è scs}$$

$\Rightarrow$ ricordando f è sci $\quad f(u_{n_k}(t_{n_k})) \to f(u(t))$

ho trovato che per $t \in [0,T] \setminus E$

$\exists n_k$ con $f(u_{n_k}(t_{n_k})) \to f(u(t))$ e $\underline{\partial f(u(t)) \neq 0}$

La seconda dipende da $u_{n_k} \to u$ $\quad \alpha_{n_k} \to \alpha \Rightarrow \alpha \in \partial f(u)$ (Prop. realizz nota)

in (2) prendo $t_2 \in [0,T] \quad t_1 \in [0,T] \setminus E$

e $t_{2,k} \in I_{n_k} \quad t_{j,k} - \lambda_{n_k} < t_j < t_{j,k} \quad j = 1,2$

$t_{1,k} \in I_{n_k}$

$$\Rightarrow u_{n_k}(t_{j,k}) \to u(t_j)$$

$$f(u_{n_k}(t_{2,k})) - f(u_{n_k}(t_{1,k})) \leq -\int_{t_{1,k}}^{t_{2,k}} \|\alpha_{n_k}\|^2 dx$$

$\downarrow$ liminf $\qquad \downarrow$

$\geq \qquad f(u(t_1))$

$f(u(t_2))$ $\qquad$ per la scelta di t_1

La parte a dx $\quad \|\alpha_{n_k} 1\!\!1_{[t_{1,k}, t_{2,k}]}\|^2_{L^2([0,T], H)}$

$\shortparallel$

$$\| \rho_{n_k} \mathbb{1}_{[t_{1k}, t_{2k}]} \|^2_{L^2}$$

Dico che $\rho_{n_k} \mathbb{1}_{[t_{1k}, t_{2k}]} \longrightarrow \rho \, \mathbb{1}_{[t_1, t_2]}$

$\rho_n = \|\alpha_n\|$ dato che $\rho_{n_k} \to \rho$ e $\mathbb{1}_{[t_{1,k}, t_{2k}]} \xrightarrow{\text{forte in } L^2} \mathbb{1}_{[t_1, t_2]}$

$\Rightarrow$ per la SCI della norma in L^2

$$\liminf \int_{t_{1,k}}^{t_{2,k}} \|\alpha_{n_k}\|^2 \, dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \rho^2$$

Trovo ② $f(u(t_2)) - f(u(t_1)) \leq - \int_{t_1}^{t_2} \rho^2 \, dt \quad \forall t_2$ e q.o t_1

① $\|u(t_2) - u(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \rho \, dt$

e so anche che q.o t $\partial f(u(t)) \neq \emptyset$

u è assolutamente continua $\Rightarrow \exists u'(t)$ q.o t

Per ① $\|u'(t)\| \leq \rho(t)$ q.o t

So che $f \circ u$ decrescente $\Rightarrow \frac{d}{dt}(f \circ u)(t)$ per q.o t

e $(f \circ u)'(t) = -\rho^2(t)$

prendo $t = t_1 \in [0,T] - E$ e tale che $f \circ u$ è derivabile in t

e che $\frac{1}{t_2 - t} \int_t^{t_2} \rho \to \rho(t)$

allora scrivo ② divido per $\frac{1}{t_2 - t}$ e mando $t_2 \to t$

Sempre per q.o t

$(f \circ u)' = \langle \alpha_0, u'(t) \rangle$ dove $\alpha_0 \in \partial f(u(t))$

ed è quello di minima norma

Dunque per q.o t

$$\left.\begin{array}{l} \langle \alpha_0(t), u'(t) \rangle \leq -\rho^2(t) \\ \|u'(t)\| \leq \rho(t) \end{array}\right\} \Rightarrow u'(t) = -\alpha_0(t) \quad \text{q.o}$$

Se ammessi che $\|\alpha_0(t)\| \leq \rho(t)$

Ricordo che $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ $\alpha \in \partial f(u(t))$
e della sci debole della norma

$$\|\alpha\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\alpha_n\| = \liminf_{n\to\infty} \rho_n$$

(Vedere in rete i dettagli quando li metterà)

Se questo passaggio torna $u : [0,T] \longrightarrow H$ è $\frac{1}{2}$ – Hölderiana
e $-u'(t) \in \partial f(u(t))$ per q.o $t \in [0,T]$
anzi $-u'(t)$ è l'elemento di minima norma in $\partial f(u(t))$

In realtà DA QUESTO SI DEDUCE DI PIU':
cioè che $\exists$ $u'_+(t)$ $\forall t \geq 0$ e che $\|u'_+(t)\|$ decresce.
Per vedere questo uso la monotonia di $\partial f(\,)$.
Siano $t_1 < t_2$ per quanto sopra

$$-u'(t_j) \in \partial f(u_j)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle -u'(t_2) + u'(t_1), u(t_2) - u(t_1) \rangle \geq 0$$

dividendo per

$$-\left\langle \frac{u'(t_2) - u'(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{u(t_2) - u(t_1)}{t_2 - t_1} \right\rangle \geq 0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\| \frac{u(t_2) - u(t_1)}{t_2 - t_1} \right\|^2 \geq 0$$

ANCHE QUESTO NON TORNA
VEDERE FILE CHE MANDERA'