DEF FUNZIONALE DI HAMILTON-LAGRANGE.

SIA $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ UNA LAGRANGIANA CON $q,\dot{q}\in\mathbb{R}^n$ $t\in[t_0,t_1]$

PRESA $\gamma:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$ IL FUNZIONALE DI AZIONE LAGRANGIANA È

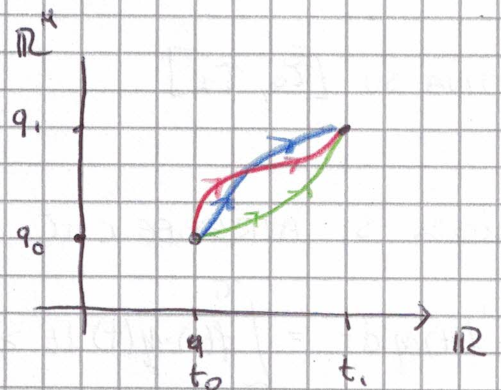
$$\mathcal{A}_{\mathcal{L}}(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t),t)\,dt$$

PROBLEMA: VOGLIAMO MINIMIZZARE $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}(\gamma)$

FISSIAMO UNO SPAZIO DI LAVORO

$$\Gamma=\left\{\gamma:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n \;\middle|\; \gamma\in C^\infty([t_0,t_1]) \quad \gamma(t_j)=q_j \quad \forall j=0,1\right\}$$

CON q_0, q_1, t_0, t_1 FISSATI



DEF VARIAZIONE PRIMA

SIA $\Gamma_0=\left\{\eta:[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n \;\middle|\; \eta(t_j)=0,\ \eta\in C^\infty([t_0,t_1])\right\}$

SIA $J:\Gamma\to\mathbb{R}$ UN FUNZIONALE

OSS È UNO SPAZIO VETTORIALE.

$$\delta J(\gamma,\eta)=\underbrace{\frac{d}{d\lambda}J(\gamma+\lambda\eta)}\Big|_{\lambda=0}$$

DERIVATA ~~PRIMA~~ SECONDO GATEAUX DI J IN γ LUNGO LA DIREZIONE DI η

DEF J È STAZIONARIO IN γ SE $\delta J(\gamma,\eta)=0$ $\forall\eta\in\Gamma_0$.

LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

SIA $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ CONTINUA, TALE CHE

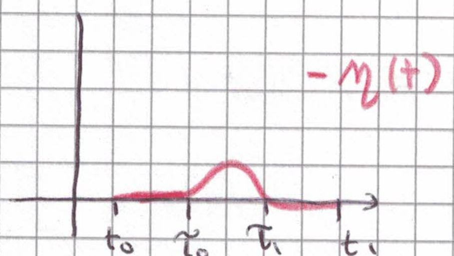
$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \cdot \eta(t)\, dt = 0 \qquad \forall \eta \in \Gamma_0$$

$\Rightarrow f(t) \equiv 0$

DIM SE PER ASSURDO ESISTESSE UN $\bar{t} \in [t_0, t_1]$ TALE CHE $f(\bar{t}) \neq 0$ (WLOG $f(\bar{t}) > 0$) ALLORA ESISTEREBBERO τ_0, τ_1 $\quad t_0 \leq \tau_0 < \bar{t} < \tau_1 \leq t_1$ TALI CHE

$f|_{[\tau_0, \tau_1]} > 0$. QUINDI PRESA UNA $\eta(t)$

NULLA FUORI DI τ_0, τ_1 E POSITIVA SU $[\tau_0, \tau_1]$



ALLORA SI AVREBBE CHE

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\eta\, dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(t) \cdot \eta(t)\, dt > 0 \quad !!$$

PROPOSIZIONE SE $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \in C^2$ ALLORA $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ È DERIVABILE SECONDO GATEAUX

DIM
$$\frac{d}{d\lambda} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\gamma + \lambda\eta, \dot{\gamma} + \lambda\dot{\eta}, t)\, dt \Big|_{\lambda=0} =$$

$\mathcal{L}$ È SUFF REGOLARE DA PORTARE LA DERIVATA SOTTO IL SEGNO DI INT.

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\gamma+\lambda\eta, \dot{\gamma}+\lambda\dot{\eta}, t) \cdot \eta + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\gamma+\lambda\eta, \dot{\gamma}+\lambda\dot{\eta}, t) \cdot \dot{\eta}}_{\text{INTEGRO PER PARTI}}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\gamma+\lambda\eta, \dot{\gamma}+\lambda\dot{\eta}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\gamma+\lambda\eta, \dot{\gamma}+\lambda\dot{\eta}, t)\right] \cdot \eta\, dt \Big|_{\lambda=0} =$$

MANCANO I TERMINI DI BORDO PERCHÉ $\eta \in \Gamma_0$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\gamma, \dot{\gamma}, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\gamma, \dot{\gamma}, t)\right] \cdot \eta\, dt$$

OSS $\mathcal{L} \in C^2$ SERVE PER SCRIVERE $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$

INFATTI SVILUPPANDO PER COMPONENTI

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{h=1}^{m} \left\{ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_h \partial \dot{q}_k} \cdot \dot{q}_h + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \cdot \ddot{q}_h \right\} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{q}_k}$$

DAL CONTO PRECEDENTE OTTENIAMO CHE PER AVERE UN ESTREMALE DI $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}(\gamma)$ DEVE ACCADERE CHE

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\gamma, \dot{\gamma}, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(\gamma, \dot{\gamma}, t) \right] \cdot \eta \, dt = 0 \quad \forall \eta \in \Gamma_0$$

IN PARTICOLARE VALE PER LE $\eta = (0, \dots, 0, \eta_k, 0, \dots, 0)$
E QUINDI USANDO IL LEMMA FONDAMENTALE COMPONENTE PER COMPONENTE SI OTTIENE :

PRINCIPIO DI HAMILTON (DI MINIMA AZIONE)

$\bar{\gamma} \in \Gamma$ È UN ESTREMALE DI $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \iff \bar{\gamma}$ RISOLVE L'EQUAZIONE DI EULERO LAGRANGE

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0} \quad \forall h = 1, \dots, n$$

COVARIANZA : PROPRIETÀ DELLE EQUAZIONI DI EULERO LAGRANGE PER IL CAMBIAMENTO DI COORDINATE.

SIANO $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ e $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$

E SIA $Q = \varphi(q)$ UN CAMBIAMENTO DI COORDINATE.

$$\dot{Q} = \frac{\partial \varphi}{\partial q}(q) \cdot \dot{q}$$

SI HA CHE LA LAGRANGIANA NELLE NUOVE COORDINATE È

$$\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) = \mathcal{L}\left(\varphi^{-1}(Q), \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial Q}(Q) \cdot \dot{Q}, t\right)$$

E VALE ANCHE

$$L(q,\dot q,t) = \mathcal{L}\left(\varphi(q),\ \frac{\partial\varphi}{\partial q}(q)\cdot\dot q,\ t\right)$$

SIA $\gamma_q(t)$ UNA TRAIETTORIA NELLE VECCHIE COORDINATE.

ALLORA $\gamma_Q(t) = \varphi\circ\gamma_q(t)$ È LA TRAIETTORIA NELLE NUOVE

PROP: IL FUNZIONALE DI AZIONE LAGRANGIANA A_L e $A_{\mathcal{L}}$ ASSUMONO GLI STESSI VALORI SU LE STESSE TRAIETTORIE.

$$A_{\mathcal{L}}(\gamma_Q) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\gamma_Q, \dot\gamma_Q, t)\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L\left(\varphi^{-1}\circ\gamma_Q,\ \left(\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial Q}\circ\gamma_Q\right)\cdot\dot\gamma_Q,\ t\right) =$$

OSSERVO CHE $\varphi^{-1}\circ\gamma_Q = \gamma_q$

E CHE $\left(\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial Q}\circ\gamma_Q\right)\cdot\dot\gamma_Q = \dot\gamma_q$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma_q, \dot\gamma_q, t)\,dt = A_L(\gamma_q).$$

PROP $\bar\gamma_q$ È ESTREMALE DI $A_L \iff \bar\gamma_Q = \varphi\circ\bar\gamma_q$ È ESTREMALE DI $A_{\mathcal{L}}$

DIM PER IL PRINCIPIO DI HAMILTON

$\bar\gamma_q$ È ESTREMALE DI A_L

$\Updownarrow$

$\bar\gamma_q$ RISOLVE $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$\bar\gamma_Q$ È ESTREMALE DI $A_{\mathcal{L}}$

$\Updownarrow$

$\bar\gamma_Q$ RISOLVE $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot Q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0$

MOSTRO CHE LE SECONDE CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI.

BASTA FAR VEDERE CHE

$$\frac{d}{d\lambda} A_L(\gamma_q + \lambda\eta)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} A_\mathcal{L}\Big(\varphi(\gamma_q + \lambda\eta)\Big)\Big|_{\lambda=0}$$

POICHÈ VALUTIAMO PER $\lambda=0$ L'UGUAGLIANZA DEVE VALERE AL PRIMO ORDINE OVVERO È SUFF.

VEDERE CHE IL MEMBRO A DESTRA SI SCRIVE COME

$$\frac{d A_\mathcal{L}}{d\lambda}(\gamma_Q + \lambda\tilde{\eta})\Big|_{\lambda=0} \quad \text{con } \tilde{\eta} \in \Gamma_0$$

VEDIAMO QUINDI CHI È LO SVILUPPO AL PRIMO ORDINE DI

$$\varphi(\gamma_q + \lambda\eta) = \varphi\circ\gamma_q + \lambda\overbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial q}(\gamma_q)\cdot\eta}^{\tilde{\eta}\in\Gamma_0} + O(\lambda^2) =$$

$$= \gamma_Q + \lambda\tilde{\eta} + O(\lambda^2)$$

QUINDI È SUFF. PER CONCLUDERE PERCHÈ ANDANDO A DERIVARE A_L e $A_\mathcal{L}$ su γ_q RISOLVE $\Leftrightarrow$ γ_Q RISOLVE.

<u>DEF</u> DUE <u>LAGRANGIANE</u> SI DICONO <u>EQUIVALENTI</u> SE RISOLVONO LA STESSA EQUAZIONE DI EULERO-LAGRANGE

<u>ESEMPI</u> $L' = L + c(t)$

$$L' = L + \frac{dF}{dt}(q,t) \quad \text{con } \frac{dF}{dt} = \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial F}{\partial t}$$

<u>DEF</u> <u>INTEGRALE DI JACOBI</u>: SIA $L(q,\dot{q})$ IND. DA t $(L = T - V)$

SIA $E(q,\dot{q}) = \dot{q}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$

<u>PROP</u> L'INTEGRALE DI JACOBI È UN INTEGRALE PRIMO $\left(\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \text{ LUNGO LE SOL DI EULERO-LAGR.}\right)$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \cancel{\ddot{q}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}} + \dot{q}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \overset{=0}{\frac{\partial L}{\partial t}} - \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\dot{q} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\cdot\ddot{q}} =$$

$$= \dot{q}\Big(\overbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}}^{=0}\Big) = 0.$$

OSS SE FISSIAMO QUINDI UN ESTREMALE ALLORA PER QUANTO VISTO, LA QUANTITÀ $E(\gamma, \dot{\gamma}) = e$ È COSTANTE NEL TEMPO.

NUOVO SPAZIO DI LAVORO:

$$\Gamma_e = \left\{ \begin{array}{l} \gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n, \ \gamma \in C^\infty \\ \gamma(t_J) = q_J \quad J = 0, 1 \\ E(\gamma, \dot{\gamma}) = e \end{array} \right\} = \text{CURVE AMMISSIBILI (ASINCRONE, EQUIENERGETICHE)}$$

OSS ASINCRONE PERCHÉ ADESSO t_0 e t_1 NON SONO FISSATI MA DIPENDONO DA γ. $\left(t_0(\gamma), t_1(\gamma) \right)$

DEF $\boxed{\text{FUNZIONALE DI AZIONE RIDOTTA}}$

$$S_L(\gamma) = \int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} \boxed{\dot{\gamma}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

→ N.B QUESTO TERMINE COMPARIVA IN $\frac{\partial E}{\partial t}$.

CONDIZIONI DI STAZIONARIETÀ PER S_L:

DEVE ACCADERE CHE $\left. \frac{d}{d\lambda} S_L(\gamma_\lambda) \right|_{\lambda=0} = 0$

$\forall \{\gamma_\lambda\}$ FAMIGLIA DI CURVE TALI CHE

1) $\{\gamma_\lambda\} \subseteq \Gamma_e$ e $t_J(\bar{\gamma}) = t_J(0)$ (NOTAZIONE $t_J(\gamma_\lambda) = t_J(\lambda)$)

2) $\gamma_\lambda : [t_0(\lambda), t_1(\lambda)] \to \mathbb{R}^n$

3) $\gamma_0 \equiv \bar{\gamma}$

4) $\gamma(t_J(\lambda), \lambda) =: \gamma_\lambda(t_J(\lambda)) = q_J \quad J = 0, 1$

NOTAZIONE

CON $\bar{\gamma}$ IL FUNZIONALE CHE RENDE STAZIONARIO.

PRINCIPIO DI MAUPERTIUS

SIA $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ INDIPENDENTE DA t, $\bar{\gamma}$ SOLUZIONE DELL'EQ DI EULERO LAGRANGE, SIA $E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - \mathcal{L}$ INTEGRALE DI JACOBI. FISSIAMO $e = E(\bar{\gamma}, \dot{\bar{\gamma}})$ E DEFINIAMO

$$\Gamma_e = \left\{ \gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n : \gamma \in C^\infty,\ \begin{array}{l} \gamma(t_J(\gamma)) = q_J \\ E(\gamma, \dot{\gamma}) = e \end{array} \right\}$$

ALLORA $\bar{\gamma}$ RENDE STAZIONARIO IL FUNZIONALE DI AZIONE RIDOTTA

DIM CONTI PRELIMINARI

$\gamma(t_J(\lambda), \lambda) = q_J$ DERIVO RISPETTO A λ E VALUTO IN $\lambda = 0$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\gamma(t_J, 0) \cdot t_J'(0) + \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda}(t_J, 0) = 0} \to (*)$$

(NOTAZIONE: CON $'$ INDICHIAMO $\frac{d}{d\lambda}$ E CON $\cdot$ $\frac{\partial}{\partial t}$)

RICHIAMIAMO IL FUNZIONALE DI AZIONE LAGRANGIANA

$$A_{\mathcal{L}}(\gamma_\lambda) = \int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} \mathcal{L}(\gamma_\lambda, \dot{\gamma}_\lambda)\, dt$$

(OSS IN QUESTO CASO GLI ESTREMI POSSONO VARIARE)

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE:

i) $A_{\mathcal{L}}$ HA COME INTEGRANDA $\mathcal{L}$

ii) $S_{\mathcal{L}}$ HA COME INTEGRANDA $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q}$

iii) VALE LA RELAZIONE $E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - \mathcal{L}$

QUINDI MINIMIZZEREMO $S_{\mathcal{L}}$ USANDO $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} = E + \mathcal{L}$

$$\frac{d}{d\lambda} A_L(\gamma_\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} L(\gamma_\lambda(t),\dot{\gamma}_\lambda(t))\,dt\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= L\big(\gamma_\lambda(t_1(\lambda)),\dot{\gamma}_\lambda(t_1(\lambda))\big)\,t_1'(\lambda) - L\big(\gamma_\lambda(t_0(\lambda)),\dot{\gamma}_\lambda(t_0(\lambda))\big)\,t_0'(\lambda) +$$

$$+\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma_\lambda(t),\dot{\gamma}_\lambda(t))\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial\lambda}(t,\lambda) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma_\lambda(t),\dot{\gamma}_\lambda(t))\frac{\partial\dot{\gamma}_\lambda}{\partial\lambda}(t,\lambda)\,dt\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= L(\bar{\gamma}(t_1),\dot{\bar{\gamma}}(t_1))\,t_1'(0) - L(\bar{\gamma}(t_0),\dot{\bar{\gamma}}(t_0))\,t_0'(0) +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q}(\bar{\gamma}(t),\dot{\bar{\gamma}}(t))\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\lambda}(t,0) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\bar{\gamma}(t),\dot{\bar{\gamma}}(t))\frac{\partial\dot{\bar{\gamma}}}{\partial\lambda}(t,0)}_{\text{INTEGRO PER PARTI}}\,dt =$$

RACCOGLIENDO

$= 0$ $\frac{\partial\bar\gamma}{\partial\lambda}$ VALE EULERO LAGR. IN $\bar{\gamma}$.

$$= L(\bar{\gamma}(t_1),\dot{\bar{\gamma}}(t_1))\,t_1'(0) - L(\bar{\gamma}(t_0),\dot{\bar{\gamma}}(t_0))\,t_0'(0) +$$

$$+\boxed{\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial q}(\bar{\gamma}(t),\dot{\bar{\gamma}}(t))\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\lambda}(t,0) - \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\bar{\gamma}(t),\dot{\bar{\gamma}}(t))\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\lambda}(t,0)\,dt} +$$

$$+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\bar{\gamma}(t_1),\dot{\bar{\gamma}}(t_1))\cdot\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\lambda}(t_1,0) - \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\bar{\gamma}(t_0),\dot{\bar{\gamma}}(t_0))\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\lambda}(t_0,0)$$

DA $(*)$ RICAVIAMO $\quad \frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\lambda}(t_j,0) = -\dot{\bar{\gamma}}(t_j,0)\,t_j'(0)$

$$\Rightarrow \Big[L(\bar{\gamma}(t_1),\dot{\bar{\gamma}}(t_1)) - \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\bar{\gamma}(t_1),\dot{\bar{\gamma}}(t_1))\cdot\dot{\bar{\gamma}}(t_1,0)\Big]\,t_1'(0) +$$

$$-\Big[L(\bar{\gamma}(t_0),\dot{\bar{\gamma}}(t_0)) - \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}(\bar{\gamma}(t_0),\dot{\bar{\gamma}}(t_0))\cdot\dot{\bar{\gamma}}(t_0,0)\Big]\cdot t_0'(0) =$$

$$= -\underbrace{E(\bar{\gamma}(t_1),\dot{\bar{\gamma}}(t_1))}_{e}\cdot t_1'(0) + \underbrace{E(\bar{\gamma}(t_0),\dot{\bar{\gamma}}(t_0))}_{e}\cdot t_0'(0) =$$

$$= -(t_1'(0) - t_0'(0))\,e = -\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} E(\gamma_\lambda,\dot{\gamma}_\lambda)\,dt\Big|_{\lambda=0}$$

ABBIAMO QUINDI MOSTRATO CHE.

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} L(\gamma_\lambda(t), \dot{\gamma}_\lambda(t))\,dt = -\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} E(\gamma_\lambda(t), \dot{\gamma}_\lambda(t))\,dt$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{d\lambda}\int_{t_0(\lambda)}^{t_1(\lambda)} L(\gamma_\lambda, \dot{\gamma}_\lambda) + E(\gamma_\lambda, \dot{\gamma}_\lambda)\,dt \Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\int_{t_0}^{t_0} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma_\lambda, \dot{\gamma}_\lambda)\cdot\dot{\gamma}_\lambda\,dt\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\int_{t_0} S_L(\gamma_\lambda)\Big|_{\lambda=0} = 0$$

$\square$

CASO MECCANICO

$L = T - V$ con $T = T_2$ = FUNZIONE QUADRATICA OMOGENEA DI GRADO 2 IN $\dot{q}$

e $V = V_0$ (INDIPENDENTE DA $\dot{q}$)

SE ABBIAMO VINCOLI OLONOMI E FISSI

OLONOMI: N PUNTI IN $\mathbb{R}^3$ LE CUI POSIZIONI RECIPROCHE CHE POSSONO ASSUMERE SONO UNA SOTTOVARIETÀ $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{3N}$

FISSI: INDIPENDENTI DAL TEMPO.

(OSS $\mathcal{C} = \mathbb{R}^{3N}$ IN ASSENZA DI VINCOLO)

IN QUESTO CASO $T = \frac{1}{2}\dot{q}\,A(q)\cdot\dot{q}$ con $A(q)$ DETTA MATRICE CINETICA

$A(q)$: $m \times m$ SIMMETRICA E DEF. POSITIVA.

GRAZIE AD $A(q)$ POSSIAMO DEFINIRE PRODOTTI SCALARI SUGLI SPAZI TANGENTI ALLE VARIETÀ.

SE ASSUMIAMO CHE LE FORZE SONO INDIPENDENTI DA t E CONSERVATIVE ($V = V_0$), ALLORA ANCHE L NON DIPENDE DA t e QUINDI E SI CONSERVA.

TRUCCO VEDIAMO COME RICAVARE CHE IN QUESTO CASO

$$E = T + V$$

DEF $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È OMOGENEA DI GRADO $\alpha \in \mathbb{R}$ SE

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

PROP SE f È OMOGENEA DI GRADO $\alpha \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ È OMOGENEA DI GRADO $\alpha - 1$ $\forall i$.

TEOREMA DI EULERO SULLE FUNZIONI OMOGENEE

Se f è OMOGENEA DI GRADO $\alpha \Rightarrow \alpha f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x$

$$\text{SE } L = \underbrace{L_2}_{\text{GRADO 2}} + \underbrace{L_1}_{\text{GRADO 1}} + \underbrace{L_0}_{\text{GRADO 0}} \qquad \text{CHE } T_2 = L_2, \quad V_0 = -L_0$$

ALLORA
$$\frac{\partial L}{\partial \dot q} \cdot \dot q = \frac{\partial L_2}{\partial \dot q} \cdot \dot q + \frac{\partial L_1}{\partial \dot q} \cdot \dot q + \overset{0}{\frac{\partial L_0}{\partial \dot q}} \cdot \dot q =$$

$$= 2L_2 + L_1$$

RICORDANDO $E = \frac{\partial L}{\partial \dot q} \cdot \dot q - L = 2L_2 + L_1 - L_2 - L_1 - L_0 = L_2 - L_0 = T_2 + V_0$

ANDIAMO QUINDI A RICAVARE LA FORMA DI JACOBI DEL PRINCIPIO DI MAUPERTIUS

$$S_L = \int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q} \cdot \dot q(\gamma, \dot\gamma)\,\dot\gamma}_{= E(\gamma,\dot\gamma) + L(\gamma,\dot\gamma) = T_2 + V_0 + T_2 - \cancel{V_0}} \, dt = 2\int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} T(\gamma, \dot\gamma)\, dt =$$

$$= \int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} \sqrt{2T(\gamma,\dot\gamma)}\,\sqrt{2T(\gamma,\dot\gamma)}\, dt \qquad \text{SE } \gamma \in \Gamma_e \quad T(\gamma,\dot\gamma) = e - V_0(\gamma)$$

$$= \int_{t_0(\gamma)}^{t_1(\gamma)} \sqrt{2(e - V_0(\gamma))}\ \underbrace{\sqrt{2T(\gamma,\dot\gamma)}}\, dt$$

OSS: LA RADICE DI UNA FUNZIONE OMOGENEA DI GRADO 2 È OMOGENEA DI GRADO 1.

ANALIZZIAMO IL FUNZIONALE LUNGHEZZA

$$\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot\gamma(t)|\,dt \underset{\tilde\gamma\circ s(t)=\gamma(t)}{=} \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\tilde\gamma}(s(t))\cdot \dot s(t)|\,dt \overset{s(t)=s}{=} \int_{s_0}^{s_1} |\dot{\tilde\gamma}(s)|\,ds$$

$\hookrightarrow$ NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE E ANCHE LUI È UN FUNZIONALE OMOGENEO DI GRADO 1.

IDEA: PROVIAMO A VEDERE SE TUTTI I FUNZIONALI OMOGENEI DI GRADO 1 IN $\dot\gamma$ SONO INVARIANTI PER RIPARAMETRIZZAZIONE.

SIA $L(q,\lambda\dot q) = \lambda L(q,\dot q)$ OMOGENEA DI GRADO 1 IN $\dot q$

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t),\dot\gamma(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L(\tilde\gamma\circ s(t), \dot{\tilde\gamma}\circ s(t)\cdot \dot s(t))\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L(\tilde\gamma\circ s(t), \dot{\tilde\gamma}\circ s(t))\cdot \dot s(t)\,dt \underset{s(t)=s}{=} \int_{s_0}^{s_1} L(\tilde\gamma(s), \dot{\tilde\gamma}(s))\,ds$$

QUINDI ANCHE $S_L(\gamma)$, CHE IN QUESTO CASO È OMOGENEO DI GRADO 1 IN $\dot\gamma$, È INVARIANTE PER RIPARAMETRIZZAZIONE. QUINDI IL FATTO CHE GLI ESTREMI DIPENDONO DA γ È SOLO UNA QUESTIONE DI NATURA GEOMETRICA.

INTRODUCIAMO IL PARAMETRO D'ARCO GENERALIZZATO.

$$s = \int_0^s \sqrt{\dot\gamma'(\sigma)\underbrace{A(\gamma(\sigma))}_{\text{MATRICE CINETICA}}\dot\gamma(\sigma)}\,d\sigma \qquad \left(\text{RICORDA } \int_0^s |\gamma'(\sigma)|\,d\sigma\right)$$

FACENDO IL CONTO SI OTTIENE CHE $\dot{\tilde\gamma}(s)\,A(\tilde\gamma(s))\,\dot{\tilde\gamma}(s) = 1$

POICHÉ $\tilde\gamma\circ s = \gamma \Rightarrow \dot\gamma = (\dot{\tilde\gamma}\circ s)\cdot\dot s$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\dot\gamma A(\gamma)\dot\gamma = \frac{1}{2}\left(\dot{\tilde\gamma} A(\gamma)\dot{\tilde\gamma}\right)\cdot(\dot s)^2 = \frac{1}{2}\dot s^2$$

$$\Rightarrow S_L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(e-V(\gamma))}\,\sqrt{2T(\gamma,\dot\gamma)}\,dt \overset{\gamma_0 s = \gamma(t)}{=}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(e-V(\tilde\gamma_0 s))}\,\sqrt{2\underbrace{T(\tilde\gamma_0 s, (\dot{\tilde\gamma}_0 s)\dot s)}_{\frac{1}{2}\dot s^2}}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2(e-V(\tilde\gamma_0 s(t)))}\cdot \dot s(t)\,dt \overset{s(t)=s}{=} \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{2(e-V(\tilde\gamma))}\,ds$$

SONO GEODETICHE DELLA METRICA DI JACOBI

INFATTI NEL CASO PARTICOLARE $V=0$ (NON CI SONO FORZE ATTIVE) E $L=T_2$, QUINDI HO UN PUNTO CHE SI MUOVE SU UNA SUPERFICIE ~~SUP~~ LISCIA (NO GRAVITÀ)

$$S_L(\gamma) = \sqrt{2e}\int_{s_0}^{s_1} 1\,ds = \sqrt{2e}\cdot l_A(\gamma)$$

LUNGHEZZA DI γ DEFINITA SOLO DALL'ENERGIA CINETICA.

OSS IN QUESTO CASO $L = T - \cancel{V}$ $\Rightarrow E = T + \cancel{V}$ $\Rightarrow$ E e T SONO COSTANTI

GENERALIZZAZIONE DEL PRINCIPIO D'INERZIA DI GALILEO

UN PUNTO MATERIALE VINCOLATO AD UNA SUP. LISCIA IN ASSENZA DI FORZE ESTERNE, QUESTO SI MUOVERÀ LUNGO LE GEODETICHE.

ESEMPIO (GENERALIZZANTE)

CONSIDERIAMO UN PUNTO MATERIALE P VINCOLATO SU $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ SUPERFICIE.

$q \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow X(q) \in \mathbb{R}^3$ CARTE DI Σ

QUINDI LE $X(q)$ SONO LE POSIZIONI AMMISSIBILI DI P.

LE POSSIBILI VELOCITÀ SONO QUINDI $\frac{\partial X}{\partial q}(q)\cdot \dot q = V$

OSS QUESTO RAGIONAMENTO SI GENERALIZZA BENE ANCHE A $\mathbb{R}^n$

INFATTI $\frac{\partial X}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial X}{\partial q_n}$ SONO L. IND E DETERMINANO UNA BASE DELLO SPAZIO TANGENTE.

CONSIDERANDO IL CASO $L = T$ SI OTTIENE

$$T = \frac{1}{2} m < \frac{\partial \chi}{\partial q}(q) \cdot \dot q , \frac{\partial \chi}{\partial q}(q) \dot q > = \frac{1}{2} \dot q A \cdot \dot q$$

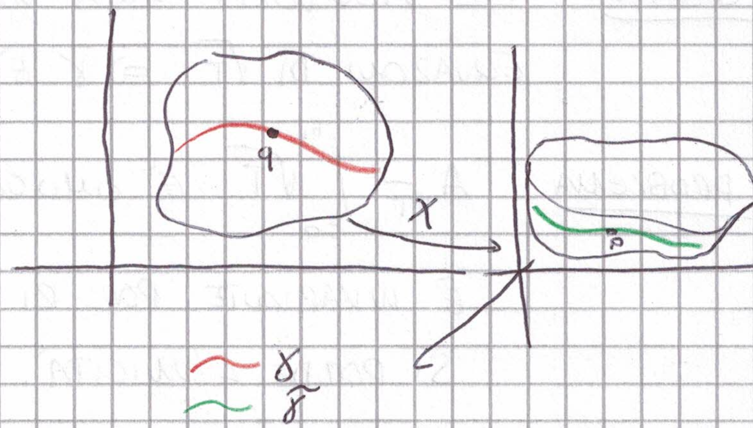
È UNA MATRICE DEFINITA POSITIVA

DOVE $\left(A(q)\right)_{h,k} = m \cdot < \frac{\partial \chi}{\partial q_h}(q) , \frac{\partial \chi}{\partial q_k}(q) >$

PRENDIAMO ADESSO $t \to \tilde\gamma(t) \subseteq \Sigma$ CURVA SULLA SUPERFICIE.

ALLORA $\tilde\gamma$ PUÒ ESSERE VISTA COME UNA CURVA SU $\mathbb{R}^2$

ATTRAVERSO χ $\quad \tilde\gamma = \chi \circ \gamma$



QUINDI $\ell(\tilde\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\tilde\gamma}(t)| dt =$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{\partial \chi}{\partial q}(\gamma) \cdot \dot\gamma(t) \right| dt \underset{\text{SI SCOPRE}}{=} \ell_A(\gamma)$$

INFATTI $\left| \frac{\partial \chi}{\partial q}(\gamma) \cdot \dot\gamma(t) \right| = \sqrt{< \frac{\partial \chi}{\partial q}(\gamma) \cdot \dot\gamma , \frac{\partial \chi}{\partial q}(\gamma) \cdot \dot\gamma >} =$

$$= \underbrace{\boxed{\sqrt{\frac{2L(\gamma)}{m}}}}_{\ell} \Rightarrow \frac{m}{2} \ell^2 = L$$

__PROP__ SE γ È SOL. DELLE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE PER $L = T_2$, INDIPENDENTI DAL TEMPO E γ NON È UN'EQUILIBRIO

$\Rightarrow$ γ È SOLUZIONE DELLE EQ. DI EULERO LAGRANGE DI $\sqrt{T}$.

__DIM__ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \sqrt{T}}{\partial \dot q} - \frac{\partial \sqrt T}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{1}{2\sqrt T}\frac{\partial T}{\partial q} \overset{T \text{ è IND. DAL TEMPO}}{=} \frac{1}{2\sqrt T} \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q}\right)}_{\text{PERCHÉ } \gamma \text{ ANNULLA LE EQ. DI } T} = 0$$

OSS L'IPOTESI CHE $\bar{\gamma}$ NON SIA UN EQUILIBRIO SERVE PER EVITARE $T=0$ INFATTI

$T = \cancel{1/\gamma}\ \frac{1}{2} m\, \dot{\gamma}\, A(\gamma)\, \dot{\gamma}$ se $\bar{\gamma}$ è UN EQUILIBRIO $\Rightarrow \dot{\bar{\gamma}} \equiv 0$ e $T=0$

INOLTRE SE $\dot{\bar{\gamma}}$ È DIVERSO DA 0 PER UN CERTO t, IN QUESTO CASO NON POTRÀ MAI ESSERE $=0$ PERCHÉ $E=T$ ED È UN'INTEGRALE PRIMO.

DOMANDA IL VICEVERSA SARÀ VERO? (OVVERO $\bar{\gamma}$ SOL. DELLE EQUAZIONI DI $\sqrt{T} \Rightarrow \bar{\gamma}$ È SOL DELLE EQUAZIONI DI T?)

PROBLEMA $A_{\sqrt{T}} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{T}$ È OMOGENEO DI GRADO 1 QUINDI

È INVARIANTE PER RIPARAMETRIZZAZIONE, QUINDI SI PERDE L'UNICITÀ.

SOL L'UNICA COSA CHE SI PUÒ DIRE È CHE ESISTE UNA RIPARAMETRIZZ. CHE RISOLVE EULERO-LAGRANGE PER T.

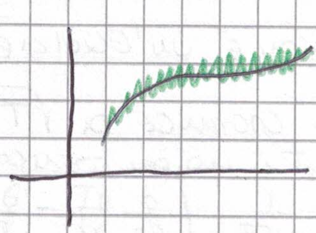
OBBIETTIVO OTTENERE CONDIZIONI NECESSARIE E/O SUFF. PER AVERE UN MINIMO.

OSS IN DIMENSIONE INFINITA NON TUTTE LE NORME SONO EQUIVALENTI.

CONSIDERIAMO 2 TIPI DIFFERENTI DI INTORNI DI $\bar{\gamma}$.

INTORNI FORTI
(LARGHI)

STESSI ESTREMI, MOLTO VICINE
SENZA CONTROLLO SULLA DERIVATA
(OSCILLAZIONI SELVAGGE AMMESSE)

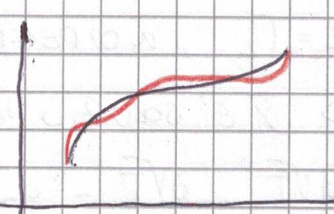


$\|\gamma - \bar{\gamma}\|_{C^0} \leq \varepsilon$

$\sup_{[t_0,t_1]} |\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)| \leq \varepsilon$

INTORNI DEBOLI
(O STRETTI)

CONTROLLO ANCHE
SULLA DERIVATA
(SENZA OSC ECCESSIVE)



$\|\gamma - \bar{\gamma}\|_{C^1} \leq \varepsilon$

$\sup_{[t_0,t_1]} |\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)| + \sup_{[t_0,t_1]} |\dot{\gamma}(t) - \dot{\bar{\gamma}}(t)| \leq \varepsilon$

RICORDIAMO CHE LA VARIAZIONE PRIMA È

$$\delta A_L(\bar\gamma,\eta) = \frac{d}{d\lambda}\left(A_L(\bar\gamma+\lambda\eta)\right)\Big|_{\lambda=0}$$

<u>DEF</u> GENERALIZZANDO, LA VARIAZIONE SECONDA È

$$\delta^2 A_L(\bar\gamma,\eta) = \frac{d^2}{d\lambda^2}\left(A_L(\bar\gamma+\lambda\eta)\right)\Big|_{\lambda=0}$$

<u>IDEA</u> CI RESTRINGIAMO A STUDIARE $\phi_\eta(\lambda) = A_L(\bar\gamma+\lambda\eta)$ con $\eta\in\Gamma_0$

SVILUPPIAMO $\phi_\eta(\lambda)$ in 0

$$\phi_\eta(\lambda) = \phi_\eta(0) + \underbrace{\phi'_\eta(0)}_{\delta A_L(\bar\gamma,\eta)}\cdot\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\underbrace{\phi''_\eta(0)}_{\delta^2 A_L(\bar\gamma,\eta)} + o(\lambda^2)$$

CONDIZIONE NECESSARIA è OVVIAMENTE $\phi''_\eta(0)\geq 0$

<u>DOMANDA</u>: $\phi''_\eta(0)>0$ È SUFFICIENTE PER UN MINIMO? $\boxed{\text{NO!}}$

<u>DEFINIZIONE</u>: 1) $\bar\gamma$ È UN $\boxed{\text{MINIMO DEBOLE}}$ DI A_L SE $\exists\,\varepsilon>0$

$$A_L(\gamma)\geq A_L(\bar\gamma)\quad \forall\gamma\in\{\gamma \mid \|\bar\gamma-\gamma\|_{C^1}\leq\varepsilon\}$$

2) $\bar\gamma$ È UN $\boxed{\text{MINIMO FORTE}}$ DI A_L SE $\exists\,\varepsilon>0$

$$A_L(\gamma)\geq A_L(\bar\gamma)\quad \forall\gamma\in\{\gamma \mid \|\gamma-\bar\gamma\|_{C^0}\leq\varepsilon\}$$

<u>ESEMPIO DI SCHEEFFER</u>

PRESE $\delta^2 A_L(\bar\gamma,\eta)>0 \quad \forall\eta\in C^1_0(I) \qquad I=[t_0,t_1]$

NON ASSICURA CHE $\bar\gamma$ SIA UN MINIMO (DEBOLE)

<u>SIA</u> $A_L(\gamma) = \int_{-1}^{1}(t^2\dot\gamma^2 + t\dot\gamma^3)\,dt$

$$\delta A_L(\gamma,\eta) = \frac{d}{d\lambda}\int_{-1}^{1} t^2(\dot\gamma+\lambda\dot\eta)^2 + t(\dot\gamma+\lambda\dot\eta)^3\,dt\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \int_{-1}^{1} t^2\dot\gamma^2 + t\dot\gamma^3 + \lambda\left(2t^2\dot\gamma\dot\eta + 3t\dot\gamma^2\dot\eta\right) + \lambda^2\left(t^2\dot\eta^2 + 3t\dot\gamma\dot\eta^2\right) + \dots \, dt \Big|_{\lambda=0}$$

$$\Rightarrow \delta A_L(\gamma,\eta) = \int_{-1}^{1} 2t^2\dot\gamma\dot\eta + 3t\dot\gamma^2\dot\eta \, dt = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \left(2t^2\dot\gamma + 3t\dot\gamma^2\right)\dot\eta \, dt = 0$$

LEMMA DBR (VEDI I ST ANALISI)

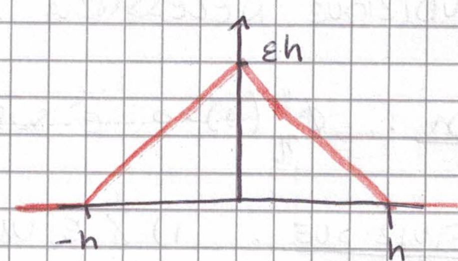
$$\Rightarrow \quad 2t^2\dot\gamma + 3t\dot\gamma^2 = \text{COSTANTE}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(2t^2 + 3t\dot\gamma)\dot\gamma\right] = 0 \quad \Rightarrow \bar\gamma \equiv 0 \text{ È UN ESTREMALE}$$

ALLORA $\delta^2 A_L(\gamma,\eta) = 2\int_{-1}^{1} t^2\dot\eta^2 + 3t\dot\gamma\dot\eta^2 \underset{\bar\gamma\equiv 0}{=} 2\int_{-1}^{1} t^2\dot\eta^2 > 0 \quad \forall \eta \in C_0^1(I)$

MA SE CONSIDERO

$$\gamma_{\varepsilon,h}(t) = \begin{cases} \varepsilon(h+t) & t \in [-h,0] \\ \varepsilon(h-t) & t \in [0,h] \\ 0 & \text{ALTROVE.} \end{cases}$$



OSS IL FATTO DI ESSERE C^1 SI SISTEMA CON I SOLITI RACCORDI NEI PUNTI ANGOLOSI.

SUPPONENDO DI CONSIDERARE h IN MODO TALE CHE $[-h,h] \subset [-1,1]$

$(h<1) \Rightarrow \|\gamma_{\varepsilon,h} - 0\|_{C^1} \le \varepsilon\cdot h + \varepsilon \le \varepsilon(h+1) = \varepsilon'$

MA $A_L(\gamma_{\varepsilon,h}) = \int_{-h}^{0} t^2\cdot\varepsilon^2 + t\varepsilon^3 \, dt + \int_0^h t^2\varepsilon^2 - t\varepsilon^3 \, dt =$

$$= \text{CONTI} = \frac{2h^2\varepsilon}{3}\left(h - \frac{3}{2}\varepsilon\right) \quad \Rightarrow h < \frac{3}{2}\varepsilon$$

SI HA $A_L(\gamma_{\varepsilon,h}) < 0 = A_L(\bar\gamma \equiv 0)$ E QUINDI NON PUÒ ESSERE UN MINIMO DEBOLE.

STUDIAMO IL CASO $n=1$

DEFINIAMO IL FUNZIONALE AUSILIARIO

$$Q(\eta) = A_Q(\eta) = \int_{t_0}^{t_1} Q(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,\dot\eta^2(t) + 2b(t)\,\eta(t)\,\dot\eta(t) + c(t)\,\eta^2(t)\,dt$$

DOVE SE ABBIAMO $L(t,q,\dot q)$ e $A_L(\bar\gamma)$ con $\bar\gamma$ ESTREMALE DI A_L

Q LO COSTRUIAMO COME

$$a(t) = \cancel{\tfrac{1}{2}} \frac{1}{2} L_{\dot q\dot q}(t, \bar\gamma, \dot{\bar\gamma})$$

$$b(t) = \frac{1}{2} L_{q\dot q}(t, \bar\gamma, \dot{\bar\gamma})$$

$$c(t) = \frac{1}{2} L_{qq}(t, \bar\gamma, \dot{\bar\gamma})$$

IDEA DI Q. ~~RICOSTRU~~ RICOSTRUIAMO LA VARIAZIONE SECONDA DI A_L

$$\delta^2 A_L(\bar\gamma,\eta) = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{d}{d\lambda}\int_{t_0}^{t_1} L(t, \bar\gamma+\lambda\eta, \dot{\bar\gamma}+\lambda\dot\eta)\,dt\right]\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\int_{t_0}^{t_1} L_q(t, \bar\gamma+\lambda\eta, \dot{\bar\gamma}+\lambda\dot\eta)\,\eta + L_{\dot q}(t, \bar\gamma+\lambda\eta, \dot{\bar\gamma}+\lambda\dot\eta)\cdot\dot\eta\,dt\Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L_{qq}(t,\bar\gamma,\dot{\bar\gamma})\,\eta^2 + 2L_{q\dot q}(t,\bar\gamma,\dot{\bar\gamma})\,\eta\dot\eta + L_{\dot q\dot q}(t,\bar\gamma,\dot{\bar\gamma})\,\dot\eta^2\,dt$$

CIOÈ $Q(\eta) = \frac{1}{2}\delta^2 A_L(\bar\gamma,\eta)$

OSS
1) $Q(\eta) \geq Q(0) \Rightarrow \eta = 0$ È UN MINIMO (DEBOLE) (SE $\bar\gamma$ ERA UN MINIMO DEBOLE DI A_L)
2) IN REALTÀ $Q(\eta) > Q(0)$ se $\eta \neq 0$

IDEA PROVIAMO AD AGGIUNGERE UNA "NULL-LAGRANGIAN" G

QUINDI UNA G IN MODO TALE CHE $Q+G$ ABBIA LE STESSE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE DI Q.

AD ESEMPIO $G = \frac{d}{dt}\left[q^2 w(t)\right] = 2q\dot q\,w(t) + q^2\dot w(t)$

~~QRAZ~~ $\int_{t_0}^{t_1} G \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\eta^2 \omega(t)\right) dt = \eta^2 \omega(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$ POICHÉ $\eta \in \Gamma_0$

QUINDI RINOMINIAMO $Q(\eta) = \int_{t_0}^{t_1} Q + G \, dt$

$$(Q+G)(t,\eta,\dot\eta) = \underbrace{a(t)}_{\alpha}\dot\eta^2 + 2\underbrace{(b(t)+\omega(t))}_{\beta}\eta\dot\eta + \underbrace{(c(t)+\dot\omega(t))}_{\gamma}\eta^2(t)$$

VOGLIO TROVARE $\omega(t)$ IN MODO TALE CHE $Q+G = a(t) \cdot \left(\quad \right)^2$

ALLORA $\alpha \cdot \dot\eta^2 + 2\beta\eta\dot\eta + \gamma\eta^2$ DOVE AVREMO

$$\frac{\Delta}{4} = \beta^2\eta^2 - \alpha\gamma\eta^2 = 0$$

$$\Rightarrow \dot\eta = -\frac{\beta}{\alpha}\eta$$

QUINDI DEVO CERCARE $\omega(t)$ CHE RISOLVE

$$\boxed{(b(t)+\omega(t))^2 - a(t)\left(c(t)+\dot\omega(t)\right) = 0}$$

È UN'EQUAZIONE DI RICCATI.

$$\Rightarrow (Q+G)(t,\eta,\dot\eta) = a(t)\left(\dot\eta + \frac{b(t)+\omega(t)}{a(t)} \cdot \eta(t)\right)^2$$

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DI EULERO LAGRANGE PER $Q(\eta)$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial Q}{\partial \dot\eta}\right\} - \frac{\partial Q}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(2a\dot\eta + 2b\eta\right) - \left(2b\dot\eta + 2c\eta\right) = 0$$

$$\dot a\dot\eta + a\ddot\eta + \dot b\eta + \cancel{b\dot\eta} - \cancel{b\dot\eta} - c\eta = 0$$

$$\boxed{(a\dot\eta)^{\cdot} - (c - \dot b)\eta = 0}$$ EQUAZIONE DI JACOBI

SE η È SOL. DELL'EQUAZIONE SI DICE η È UN CAMPO DI JACOBI

TUTTI I CONTI FATTI FINO AD ADESSO SONO LA DIMOSTRAZIONE DEL $\boxed{\text{LEMMA DI LEGENDRE}}$

SIA $w(t) \in C^2(I)$ CHE RISOLVE L'EQUAZIONE DI RICCATI

$$(b+w)^2 - a(c+\dot{w}) = 0,$$

SE $\exists\, \eta \in C^1_0(I)$ con $a(t) \neq 0$ SUL SUPPORTO DI η

$$\Rightarrow Q(\eta) = \int_{t_0}^{t_1} a(t) \left(\dot{\eta} + \frac{b+w}{a}\eta \right)^2 dt$$

$\boxed{\text{CONDIZIONE NECESSARIA DI LEGENDRE}}$ (PER UN MINIMO DEBOLE)

$\bar{\gamma}$ MINIMO DEBOLE DI $A_L \Rightarrow L_{\dot{q}\dot{q}}(\bar{\gamma}, \dot{\bar{\gamma}}, t) \geq 0 \quad \forall t \in I = [t_0, t_1]$

DIM SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\exists\, \tau \in [t_0, t_1)$ tc NON VERIFICHI LA TESI $(a(\tau) < 0)$

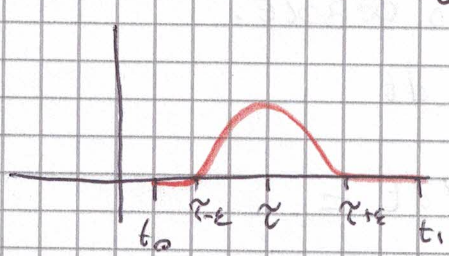
ALLORA POSSO PRENDERE $\varepsilon > 0$ tc $U_\varepsilon(\tau) = (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \subset (t_0, t_1)$ e $a(t) < 0 \ \forall t \in U_\varepsilon(\tau)$.

A PATTO DI RESTRINGERE $U_\varepsilon(\tau)$ POSSO PRENDERE

$$\square \begin{cases} \dot{w}(t) = \dfrac{(b+w)^2}{a} - c \\ w(\tau) = 1 \end{cases}$$

SOLUZIONE POSITIVA IN $U_\varepsilon(\tau)$ DELL'EQUAZIONE DI RICCATI.

PRENDIAMO
$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \notin U_\varepsilon(\tau) \\ e^{q(t)} & t \in U_\varepsilon(\tau) \end{cases}$$
con $q(t) = \dfrac{1}{(t-\tau)^2 - \varepsilon^2}$



IN MODO TALE CHE $a(t) \neq 0$ SUL SUPPORTO DI $\eta_\varepsilon(t)$, QUINDI $w(t)$ e η_ε VERIFICANO LE IPOTESI DEL LEMMA DI LEGENDRE.

E QUINDI POSSO SCRIVERE

$$Q(\eta_\varepsilon) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \underbrace{a(t)}_{<0} \underbrace{\left(\dot{\eta}_\varepsilon(t) + \frac{b+\omega}{a} \eta_\varepsilon\right)^2}_{\geq 0} \leq 0$$

RICORDANDO CHE PER IPOTESI $\bar{\gamma}$ È MINIMO DEBOLE DI A_L

$\Rightarrow \quad Q(\eta) \geq 0 \quad \forall \eta \in C_0^1(I)$

ALLORA $Q(\eta_\varepsilon) = 0$ MA POICHÉ $a(t) < 0$

DEVE NECESSARIAMENTE ESSERE

$$\boxed{\frac{\dot{\eta}_\varepsilon(t)}{\eta_\varepsilon(t)}} = \boxed{-\frac{b+\omega}{a}}$$

DIPENDE DA ε — NON DIPENDE DA ε

MA QUESTO DEVE ESSERE VERO $\forall \varepsilon$ QUINDI È ASSURDO.

<u>PROPOSIZIONE</u>: (COND. SUFFICIENTE DI LEGENDRE) SIA $\bar{\gamma}$ UN ESTREMALE DI A_L, SE

$$Q(\eta) \geq \lambda \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 + \eta^2 \, dt \quad \forall \eta \in C_0^1(I) \text{ e per qualche } \lambda > 0$$

ALLORA $\bar{\gamma}$ È UN MINIMO STRETTO DI A_L.

<u>DIM</u> $\delta^2 A_L(\bar{\gamma}, \eta) = 2Q(\eta) \geq 2\lambda \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 + \eta^2 \, dt \quad \forall \eta \in C_0^1(I)$

E $\bar{\gamma}$ È ESTREMALE, ALLORA $\bar{\gamma}$ È UN MINIMO DEBOLE.

INFATTI DA $Q(\eta) \geq \lambda \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 + \eta^2 \, dt$

OTTENGO $\int_{t_0}^{t_1} (a-\lambda)\dot{\eta}^2 + 2\beta\eta\dot{\eta} + (c-\lambda)\eta^2 \, dt =$

CONTI ANALOGHI A $Q(\eta)$

$= \int_{t_0}^{t_1} (a-\lambda) \left(\quad \right)^2 dt$ QUINDI LA CONDIZIONE NECESSARIA

MI DÀ $a - \lambda \geq 0 \Rightarrow a \geq \lambda > 0$ E QUINDI $a > 0$ OVVERO $\bar{\gamma}$ È UN MINIMO DEBOLE.

INDICHIAMO CON $\delta^2 L(\bar\gamma,\eta) = \frac{d}{d\tilde\lambda} L(\bar\gamma+\tilde\lambda\eta, \dot{\bar\gamma}+\tilde\lambda\dot\eta, t)\Big|_{\tilde\lambda=0}$

ALLORA $\delta^2 A_L(\bar\gamma,\eta) = \int_{t_0}^{t_1} \delta^2 L(\bar\gamma,\eta)\,dt$

ADESSO VOGLIO DIRE CHE

$$|\delta^2 L(\beta,\eta) - \delta^2 L(\bar\gamma,\eta)| \le \lambda(\dot\eta^2+\eta^2)$$

$\forall t\in I$ e $\forall \beta \in \mathcal{U}_\varepsilon(\bar\gamma)$ = INTORNO STRETTO DI $\bar\gamma$ = $\{\beta \mid \|\beta-\bar\gamma\|_{C^1} < \varepsilon\}$

PER FARLO VOGLIO USARE UN ARGOMENTO DI CONTINUITÀ

RAGIONAMENTO DI CONTINUITÀ: (ANALOGO PER GLI ALTRI COEFF)

POICHÉ $a_\beta = \frac{1}{2} L_{\dot q\dot q}(\beta,\dot\beta,t)$ e $a_{\bar\gamma} = \frac{1}{2} L(\bar\gamma,\dot{\bar\gamma},t)$

E POICHÉ $L\in C^2$ ALLORA per β SUFF. VICINA A $\bar\gamma$

LA DIFFERENZA $|a_\beta - a_{\bar\gamma}|$ PUÒ DIVENTARE PICCOLA A PIACERE

$$|\delta^2 L(\beta,\eta) - \delta^2 L(\bar\gamma,\eta)| = 2\left[(a_\beta(t)-a_{\bar\gamma}(t))\dot\eta^2 + 2(b_\beta(t)-b_{\bar\gamma}(t))\eta\dot\eta + (c_\beta(t)-c_{\bar\gamma}(t))\eta^2(t)\right]$$

$$\le \lambda(\dot\eta^2+\eta^2)$$

UNENDO QUESTA COSA ALL'IPOTESI SI OTTIENE

$$\delta^2 A_L(\beta,\eta) \ge \lambda\int_{t_0}^{t_1} \dot\eta^2+\eta^2\,dt \quad \forall\eta\in C_0^1([t_0,t_1]) \quad \forall\beta\in\mathcal{U}_\varepsilon(\bar\gamma)$$

SUPPONIAMO CHE β COINCIDA CON $\bar\gamma$ AL BORDO $\bar\gamma\{t_0,t_1\}$

ALLORA $\forall\sigma\in[0,1]$ $\psi(\sigma) = (1-\sigma)\bar\gamma + \beta(\sigma) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\bar\gamma)\ \forall\sigma$

E $\beta-\bar\gamma$ È NULLA AL BORDO QUINDI

$$\delta^2 A_L(\psi(\sigma), \beta-\bar\gamma) \ge 0$$

SIA $H(\sigma) = A_L(\psi(\sigma))$ E SCRIVIAMO LA SUA SERIE CON RESTO INTEGRALE

$$H(1)-H(0) = H'(0) + \int_0^1 (1-\sigma)H''(\sigma)\,d\sigma$$

MA $H'(0) = \delta A_L(\bar{\gamma}, \beta - \bar{\gamma}) = 0$

$$H''(\sigma) = \delta^2 A_L(\psi(\sigma), \beta - \bar{\gamma})$$

$$H(0) = A_L(\bar{\gamma}, \beta - \bar{\gamma})$$

$$H(1) = A_L(\beta, \beta - \bar{\gamma})$$

$$\mathcal{A}_L(\beta) - A_L(\bar{\gamma}) = \int_0^1 \underbrace{(1-\sigma)}_{\geq 0} \underbrace{\delta^2 A_L(\psi(\sigma), \beta - \bar{\gamma})}_{\geq 0} \, d\sigma \geq 0$$

> 0 se $\beta \neq \bar{\gamma}$.

LEMMA DI JACOBI

Se $a > 0$ $\forall t \in I$ e se $\nu > 0$ $\forall t \in I$ ν campo di Jacobi, $\nu \in C^2(I)$

$$\Rightarrow Q(\eta) = \int_{t_0}^{t_1} a \, \nu^2 \left[\left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{\cdot}\right]^2 dt$$

DIM $a(t) > 0$ ESISTA $\nu(t)$ SOL. DI

$$-(a\dot{\nu})^{\cdot} + (c - \dot{b})\nu = 0 \qquad \nu(t) > 0 \quad \forall t \in I$$

$$\text{Sia } \quad w(t) = -\left(b + a\frac{\dot{\nu}}{\nu}\right)$$

IDEA PER RICORDARSI w

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)\left(\dot{\eta} + \frac{b+w}{a}\eta\right) dt$$
$\overset{\shortparallel}{0}$
con $\eta = \nu$

VERIFICHIAMO CHE $w(t)$ SODDISFA L'EQUAZIONE DI RICCATI $(b+w)^2 - a(t)(c + \dot{w}) = 0$

$$\dot{w}(t) = -\dot{b}(t) - \dot{a}(t)\frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)} - a(t)\frac{\ddot{\nu}}{\nu} + a\frac{\dot{\nu}^2}{\nu^2}$$

SOSTITUENDO

$$\cancel{a^2\frac{\dot{\nu}^2}{\nu^2}} - a(t)c(t) + a(t)\dot{b}(t) + a\dot{a}\frac{\dot{\nu}}{\nu} + a^2\frac{\ddot{\nu}}{\nu} - \cancel{a^2\frac{\dot{\nu}^2}{\nu^2}} = 0$$

$$\frac{a(t)}{\nu(t)}\left[\dot{b}(t)\nu(t) - c(t)\nu(t) + \dot{a}\dot{\nu}(t) + a\ddot{\nu}\right] = 0$$

$$\frac{u}{\nu}\underbrace{\left(-\nu(c-\dot{e}) + (a\dot{\nu})^{\cdot}\right)}_{\text{EQUAZIONE DI JACOBI}} = 0$$

QUINDI POICHÈ $\omega(t) = -\left(b + a\frac{\dot{\nu}}{\nu}\right)$ RISOLVE L'EQUAZIONE DI RICCATI E $a(t) \neq 0$ POSSIAMO APPLICARE IL LEMMA DI LEGENDRE

$$Q(\eta) = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\left(\dot{\eta} + \frac{b+\omega}{a}\eta\right)^2 dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} a(t)\left(\dot{\eta} - \frac{\dot{\nu}}{\nu}\cdot\eta\right)^2 dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,\nu^2\left[\left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{\cdot}\right]^2$$

CASO PARTICOLARE DISEGUAGLIANZA DI POINCARÉ

$$\psi \in C^1(I),\ \psi(t_0) = 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}|\psi|^2 dt \leq (t_1-t_0)^2\int_{t_0}^{t_1}|\dot{\psi}|^2 dt$$

DIM $|\psi(t)| = |\psi(t) - \psi(t_0)| = \left|\int_{t_0}^{t}\dot{\psi}(s)\,ds\right| \leq \int_{t_0}^{t_1}|\dot{\psi}(s)|\,ds$

QUINDI $|\psi(t)|^2 \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} 1\,|\dot{\psi}(s)|\,ds\right)^2 \underset{\text{HÖLDER}}{\leq} (t_1-t_0)\int_{t_0}^{t_1}|\dot{\psi}^2(s)|\,ds$

INTEGRANDO DA ENTRAMBI I LATI

$$\int_{t_0}^{t_1}|\psi(t)|^2 dt \leq \int_{t_0}^{t_1}\left(\underbrace{(t_1-t_0)\int_{t_0}^{t_1}|\dot{\psi}(s)|^2 ds}_{\text{NON DIPENDE DA } t}\right)dt = (t_1-t_0)^2\int_{t_0}^{t_1}|\dot{\psi}(s)|^2 ds$$

TEOREMA Se $a>0$ su I e $\nu \in C^2(I)$ è un campo di Jacobi $\nu>0$ allora $\bar{\gamma}$ è un minimo debole stretto.

DIM Sia $\eta \in C_0^1(I)$ allora $\psi = \dfrac{\eta}{\nu} \in C_0^1(I)$

e quindi per il lemma di Jacobi

$$Q(\eta) = \int_{t_0}^{t_1} a \nu^2 \dot{\psi}^2 \geq$$

DIS. DI POINCARÉ

$$\geq \inf_I (a \cdot \nu^2) \cdot \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}^2 dt \geq \qquad \left(\psi(t_0) = \frac{\eta(t_0)}{\nu(t_0)} = 0 \right)$$

$$\geq \inf_I (a \cdot \nu^2) \cdot \frac{1}{(t_1-t_0)^2} \int_{t_0}^{t_1} \psi^2 dt \geq$$

$$\geq \underbrace{\boxed{\inf_I (a\nu^2) \frac{1}{(t_1-t_0)^2} \cdot \inf_I \left(\frac{1}{\nu^2}\right)}}_{\mu>0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \eta^2 dt$$

Adesso ricordando $Q(\eta) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} a\dot{\eta}^2 + 2b\eta\dot{\eta} + c\eta^2 dt$

$\alpha = \inf_I a \qquad \beta = \sup_I b \qquad \gamma = \sup_I c$

$$\Rightarrow \alpha \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 dt \leq Q(\eta) + 2\beta \int_{t_0}^{t_1} |\eta| \, |\dot{\eta}| + \gamma \int_{t_0}^{t_1} |\eta|^2 dt$$

Ricordando che $\forall \varepsilon>0$ vale

$$2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$$

Se $x = \dot{\eta}$ e $y = \beta\eta \Rightarrow 2\beta |\eta| \, |\dot{\eta}| \leq \varepsilon \dot{\eta}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2 \eta^2$

$$\alpha \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 dt \leq Q(\eta) + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 dt + \frac{1}{\varepsilon}\beta^2 \int_{t_0}^{t_1} \eta^2 + \gamma \int_{t_0}^{t_1} \eta^2 dt$$

$$(\alpha - \varepsilon) \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 dt \leq Q(\eta) + \overbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon} + \beta^2 + \gamma\right)}^{\delta} \int_{t_0}^{t_1} \eta^2 dt$$

USANDO LA DISEGUAGLIANZA OTTENUTA PRIMA

$$(\alpha-\varepsilon)\int_{t_0}^{t_1}\dot{\eta}^2 dt \leq Q(\eta)\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)$$

$$\Rightarrow Q(\eta) \geq \delta \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 dt \qquad \text{con } \delta = (\alpha-\varepsilon)\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)^{-1}$$

E QUINDI $Q(\eta) \geq \mu \int_{t_0}^{t_1} \eta^2 dt \geq 2\lambda \int_{t_0}^{t_1} \eta^2 dt$ con $2\lambda = \min\{\delta, \mu\}$

$$Q(\eta) \geq \delta \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 dt \geq 2\lambda \int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta}^2 dt$$

$\Rightarrow$ SOMMANDO $Q(\eta) \geq \lambda \int_{t_0}^{t_1} \eta^2 + \dot{\eta}^2 dt$ E QUINDI USANDO

LA PROPOSIZIONE SI HA LE TESI.

<u>ESEMPIO</u> (SCHEFFER) $\bar{\gamma}$ MINIMO DEBOLE MA NON FORTE.

$$A_L(\gamma) = \int_{t_0}^{1} (\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^3) dt \qquad \gamma(0) = \gamma(1) = 0$$

$\bar{\gamma} \equiv 0$ È UN'ESTREMALE.

$$\delta A_L(\gamma,\eta) = \frac{d}{d\lambda}\int_0^1 (\dot{\gamma}+\lambda\dot{\eta})^2 + (\dot{\gamma}+\lambda\dot{\eta})^3 dt \Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{1} 2(\dot{\gamma}+\lambda\dot{\eta})\dot{\eta} + 3(\dot{\gamma}+\lambda\dot{\eta})^2\dot{\eta}\, dt \Big|_{\lambda=0}$$

$$\delta A_L(\gamma,\eta) = \int_0^1 2\dot{\eta}\dot{\gamma} + 3\dot{\gamma}^2\dot{\eta}\, dt \underset{\bar{\gamma}\equiv 0}{=} 0$$

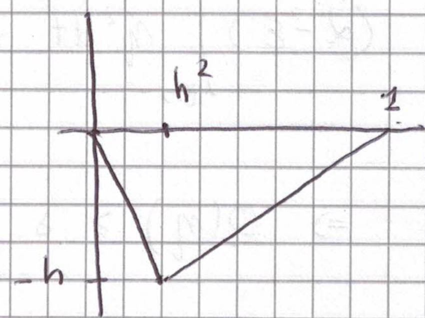
$$\delta^2 A_L(\gamma,\eta) = \int_0^1 2\dot{\eta}^2 + 6\dot{\gamma}\dot{\eta}^2 dt \underset{\bar{\gamma}\equiv 0}{=} \int_0^1 2\dot{\eta}^2 dt =$$

$$= \int_0^1 \dot{\eta}^2 + \underbrace{\int_0^1 \dot{\eta}^2 dt}_{\text{dis di Poincaré}} \geq \int_0^1 \dot{\eta}^2 + \int_0^1 \eta^2 dt = \underset{\lambda}{1} \int_0^1 \dot{\eta}^2 + \eta^2 dt$$

$\Rightarrow \bar{\gamma} \equiv 0$ È UN MINIMO DEBOLE PER QUANTO VISTO.

MA SE PRENDIAMO

$$\beta_h(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{h} & 0 \le t \le h^2 \\ \dfrac{h(t-1)}{1-h^2} & h^2 \le t \le 1 \end{cases}$$



$$\dot\beta_h(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{h} & 0 \le t \le h^2 \\ \dfrac{h}{1-h^2} & h^2 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$A_L(\beta_h) = \int_0^{h^2} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 + \left(-\frac{1}{h}\right)^3 dt + \int_{h^2}^1 \left(\frac{h}{1-h^2}\right)^2 + \left(\frac{h}{1-h^2}\right)^3 dt$$

$$\underset{h \in (0, 1/2)}{\le} \int_0^{h^2} -\frac{1}{2h^3} + \int_{h^2}^1 2 = -\frac{1}{2h} + 2 - 2h^2 \xrightarrow[h \to 0^+]{} -\infty$$

QUINDI A_L PUÒ ASSUMERE VALORI < 0 QUINDI $\bar\gamma \equiv 0$ NON È UN ESTREMALE FORTE.

OSS: $\|\beta_h - \bar\gamma\|_{C^0} = -h \to 0$

RIASSUMENDO: SE L È UNA LAGRANGIANA DI CLASSE C^2

$\Rightarrow$ 1) $\bar\gamma$ È MINIMO DEBOLE PER A_L ALLORA È ESTREMALE E VALE $\delta^2 A(\bar\gamma, \eta) \ge 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(I)$

2) VICEVERSA SE $\bar\gamma$ È UN ESTREMALE ED ESISTE λ TC $Q(\eta) \ge \lambda \int \dot\eta^2 + \eta^2 \quad \lambda \ge 0$ E $\nu > 0$ ALLORA $\bar\gamma$ È MINIMO DEBOLE STRETTO.

TEORIA DEI PUNTI CONIUGATI.

SIA $\bar{\gamma}$ UN ESTREMALE e $-(a\dot{\eta})^{\cdot}+(c-\dot{b})\eta=0$

LA RISPETTIVA EQUAZIONE DI JACOBI.

SUPPONIAMO $\boxed{a>0}$ su $t\in(t_0-\delta_0, t_0+\delta_0)=I_0$

e $\eta(t)=\omega(t,\tau,\alpha,\beta)$ SOLUZIONE DI $(*)\begin{cases} -(a\dot{\eta})^{\cdot}+(c-\dot{b})\eta=0 \\ \eta(\tau)=\alpha \\ \dot{\eta}(\tau)=\beta \end{cases}$ (OSS: È UN PROB. DI CAUCHY)

UNA BASE DELLE SOLUZIONI È DATA DA

$$\eta_1(t)=\omega(t,\tau,1,0) \quad e \quad \eta_2(t)=\omega(t,\tau,0,1) \quad \text{E VALE CHE}$$

$$\eta(t)=\omega(t,\tau,\alpha,\beta)=\alpha\eta_1(t)+\beta\eta_2(t)$$

PROPOSIZIONE Sia $\mathcal{X}$ LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI $(*)$

$\eta\in\mathcal{X}$ con $\eta\neq 0$

i) Se $\tau\in I_0$ e $\eta(\tau)=0 \Rightarrow \dot{\eta}(\tau)\neq 0$

ii) GLI ZERI DI $\eta(t)$ SONO ISOLATI E NON SI ACCUMULANO

iii) Sia $\tau\in I_0$ e $\eta(\tau)=0$

ALLORA PRESA $\tilde{\eta}\in\mathcal{X}$

$\eta(t)$ e $\tilde{\eta}(t)$ SONO INDIPENDENTI $\Leftrightarrow \tilde{\eta}(\tau)\neq 0$

($\eta(t)$ e $\tilde{\eta}(t)$ SONO DIPENDENTI $\Leftrightarrow \tilde{\eta}(\tau)=0$)

DIM i) Se $\dot{\eta}(\tau)=0 \Rightarrow \eta\equiv 0$ PER UNICITÀ DELLE SOLUZIONI

ii) Se $\exists$ UNA SUCC. DI ZERI DI η $\eta(t_n)=0$ e $t_n\to\bar{t}$

ALLORA PER ROLLE $\forall n$ $\exists$ s_n $t_n<s_n<t_{n+1}$ t.c. $\dot{\eta}(s_n)=0$

e $s_n\to\bar{t}$ $\Rightarrow \eta(\bar{t})=\dot{\eta}(\bar{t})=0 \Rightarrow \eta\equiv 0$

iii) PRESI $\alpha,\beta\ \tilde{\alpha},\tilde{\beta}\in\mathbb{R}$ ALLORA CON LA NOTAZIONE DI

PRIMA $\eta(t)=\alpha\eta_1(t)+\beta\eta_2(t)$ e $\tilde{\eta}(t)=\tilde{\alpha}\eta_1(t)+\tilde{\beta}\eta_2(t)$

ALLORA $\eta_0(t)$ e $\tilde{\eta}(t)$ SONO DIP. $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \tilde\alpha & \tilde\beta\end{pmatrix}=0$

$\Leftarrow$) SUPPONIAMO $\exists\ \lambda$ e $\tilde\lambda$ NON ENTRAMBI NULLI

TALI CHE $\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}+\tilde\lambda\begin{pmatrix}\tilde\alpha\\ \tilde\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \lambda\alpha+\tilde\lambda\tilde\alpha=0$$
$$\lambda\beta+\tilde\lambda\tilde\beta=0$$

$$\Rightarrow \lambda\eta(t)+\tilde\lambda\tilde\eta(t)=\lambda(\alpha\eta_1(t)+\beta\eta_2(t))+\tilde\lambda(\tilde\alpha\eta_1(t)+\tilde\beta\eta_2(t))=$$
$$=\eta_1(t)(\underbrace{\lambda\alpha+\tilde\lambda\tilde\alpha}_{=0})+\eta_2(t)(\underbrace{\lambda\beta+\tilde\lambda\tilde\beta}_{=0})=0$$

$\Rightarrow$) BASTA RILEGGERE LA DIMOSTRAZIONE AL CONTRARIO SFRUTTANDO CHE η_1 e η_2 SONO UNA BASE PER OTTENERE $\lambda\alpha+\tilde\lambda\tilde\alpha=0$ e $\lambda\beta+\tilde\lambda\tilde\beta=0$

OSS

$$\begin{pmatrix}\eta(t)\\ \tilde\eta(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \tilde\alpha & \tilde\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}\eta_1(\tau)=1 & \eta_2(\tau)=0\\ \dot\eta_1(\tau)=0 & \dot\eta_2(\tau)=1\end{matrix}$$

SE $\alpha=0$ $(\eta(\tau)=0)$ ALLORA η e $\tilde\eta$ SONO DIP. $\Leftrightarrow \tilde\alpha=0$

MA SE $\alpha=0 \Rightarrow \beta\neq0$ PERCHÉ $\eta\neq0$ MA SE QUELLA MATRICE HA DET $=0$

$$\det=\alpha\tilde\beta-\tilde\alpha\beta=\underset{\alpha=0}{0}-\tilde\alpha\beta \Leftarrow\neq0 \Leftrightarrow \underset{\beta\neq0}{\tilde\alpha=0}$$

PROP PRESI $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$ CAMPI DI JACOBI QUALSIASI (NON QUELLI DI PRIMA) E SIA

$$W(t) = \text{def} \begin{pmatrix} \eta_1(t) & \eta_2(t) \\ \dot{\eta}_1(t) & \dot{\eta}_2(t) \end{pmatrix} = \eta_1 \dot{\eta}_2 - \dot{\eta}_1 \eta_2$$

↓

WRONSKIANO DI η_1 e η_2

i) $\eta_1 \eta_2$ SONO UNA BASE DI $\mathcal{H} \iff W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I_0$

ii) $\forall \tau \in I_0 \qquad W(t) = W(\tau) \dfrac{a(\tau)}{a(t)} \qquad \forall t \in I_0$

(EQUIVALE A DIRE CHE $W(t) \cdot a(t)$ È COSTANTE].

iii) $\boxed{\text{TEOREMA DI OSCILLAZIONE DI STURM}}$

SE $\{\eta_1, \eta_2\}$ È UNA BASE DI $\mathcal{H}$, ALLORA TRA DUE ZERI CONSECUTIVI DI η_1 GIACE UNO ZERO DI η_2 E VICEVERSA.

DIM ~~[illegible]~~ i) $\Rightarrow$) SUPPONIAMO PER ASSURDO $\exists\, \tau$ tc $W(\tau) = 0$

ALLORA ESISTE $\lambda \neq 0$ tc $\lambda \begin{pmatrix} \eta_1(\tau) \\ \dot{\eta}_1(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2(\tau) \\ \dot{\eta}_2(\tau) \end{pmatrix}$ OSS SOLO IN τ AL MOMENTO HO LA DIPENDENZA.

MA POICHÉ L'EQUAZIONE DI JACOBI È OMOGENEA IN η SE η_1 È SOLUZIONE ANCHE $\lambda\eta_1$ LO È.

MA $\eta_1(t)$ RISOLVE CON DATI $\eta_1(\tau)$ e $\dot{\eta}_1(\tau)$ e $\lambda\eta_1(t) = \eta_2(t)$ RISOLVONO CON $\lambda\eta_1(\tau)$ e $\lambda\dot{\eta}_1(\tau)$ QUINDI RISOLVONO LA STESSA EQUAZIONE $\Rightarrow \eta_2(t) = \lambda\eta_1(t) \ \underline{\forall t}$.

$\Leftarrow$ SE PER ASSURDO $\eta_2(t) = \lambda\eta_1(t)$ CON $\lambda \neq 0 \Rightarrow W(t) \equiv 0$

ii) SVILUPPANDO L'EQUAZIONE DI JACOBI E DIVIDIAMO PER $-a$ (~~a~~ ABBIAMO ASSUNTO $a>0$)

$$-a\ddot{\eta}-\dot{a}\dot{\eta}+(c-\dot{b})\eta=0$$

$$\ddot{\eta}+\underbrace{\boxed{\frac{\dot{a}}{a}}}_{p}\dot{\eta}+\underbrace{\boxed{\frac{(c-\dot{b})}{a}}}_{q}\eta=0$$

$$\ddot{\eta}+p\dot{\eta}=q\eta \qquad (\square)$$

SE $W=\eta_1\dot{\eta}_2-\eta_2\dot{\eta}_1$

$$\dot{W}+pW=\cancel{\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2}+\eta_1\ddot{\eta}_2-\cancel{\dot{\eta}_2\dot{\eta}_1}-\eta_2\ddot{\eta}_1+p(\eta_1\dot{\eta}_2-\dot{\eta}_1\eta_2)=$$

$$=\eta_1(\ddot{\eta}_2+p\dot{\eta}_2)-\eta_2(\ddot{\eta}_1+p\dot{\eta}_1)\overset{\text{USANDO }\square}{=}$$

$$=\cancel{q\eta_1\eta_2}-\cancel{q\eta_1\eta_2}=0$$

$$\Rightarrow \dot{W}+pW=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{W}+\frac{\dot{a}}{a}W=0\\ &a\dot{W}+\dot{a}W=0\end{aligned}\right)\ a\neq 0$$

$$(a\cdot W)^{\cdot}=0 \quad \Rightarrow a\cdot W \text{ è COSTANTE IN } t.$$

DIM iii) SE $\{\eta_1,\eta_2\}$ è UNA BASE DI $\mathcal{R}$ $\Rightarrow W(t)\neq 0$ (SUPPONIAMO $W>0$)

PRENDIAMO 2 ZERI CONSECUTIVI τ,τ^* DI $\eta_1(t)$

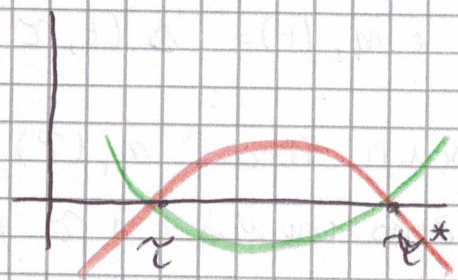
CIOÈ $\eta_1(\tau)=\eta_1(\tau^*)=0$ e $\eta_1(t)\neq 0$ $\forall t\in(\tau,\tau^*)$

ALLORA $\dot{\eta}_1(\tau)\neq 0$ e $\dot{\eta}_1(\tau^*)\neq 0$

SI HA $W(\tau) = -\dot{\eta}_1(\tau)\, \eta_2(\tau) > 0$

$W(\tau^*) = -\dot{\eta}_1(\tau^*)\, \eta_2(\tau^*) > 0$

MA HO SOLO 2 POSSIBILITÀ DISEGNATE PER $\eta_1(t)$



IN QUALUNQUE CASO $\dot{\eta}_1(\tau) \cdot \dot{\eta}_1(\tau^*) < 0$

MA ALLORA $W(\tau) \cdot W(\tau^*) = \underbrace{\dot{\eta}_1(\tau)\, \dot{\eta}_1(\tau^*)}_{<0} \cdot \underbrace{\eta_2(\tau)\eta_2(\tau^*)}_{<0} > 0$

QUINDI PER IL TEO DEGLI ZERI $\exists\, \bar{t} \in (\tau, \tau^*)$ tc $\eta_2(\bar{t}) = 0$
INOLTRE $\bar{t}$ È UNICO POICHÉ SE CI FOSSE UN $\bar{t}^* \in (\tau, \tau^*)$ TALE CHE $\eta_2(\bar{t}^*) = 0$ POTREI TROVARE UN τ^{**} tc $\eta_1(\tau^{**}) = 0$ MA QUESTO CONTRADDIREBBE L'IPOTESI CHE τ e τ^* SONO ZERI CONSECUTIVI DI $\eta_1(t)$.

DEF SIA $\tau \in I_0$ ALLORA $\Delta(t, \tau) := \eta(t, \tau, 0, 1)$ $\boxed{\text{FUNZIONE DI JACOBI}}$

QUINDI ~~...~~ IL CAMPO DI JACOBI CHE IN τ VALE ZERO E PARTE CON DERIVATA UGUALE A 1.

DEF τ^* SI DICE $\boxed{\text{ZERO DI VALORE CONIUGATO}}$ A τ SE $\eta(\tau^*) = 0$

DEF DATI τ e τ^* DUE ZERI DI VALORI CONIUGATI ALLORA
$P = (\tau, \bar{\gamma}(\tau))$ e $P^* = (\tau^*, \bar{\gamma}(\tau^*))$ SI DICONO $\boxed{\text{PUNTI CONIUGATI}}$ SULL'ESTREMALE $\bar{\gamma}$.

PROPOSIZIONE SE $(t_0, t_1]$ NON CONTIENE VALORI CONIUGATI A t_0 ALLORA NON ESISTONO COPPIE τ, τ^* DI VALORI CONIUGATI CON $t_0 < \tau < \tau^* \leq t_1$

DIM SIANO $\eta_1(t) = \Delta(t, t_0)$ e $\eta_2(t) = \Delta(t, \tau)$

η_1 e η_2 SONO LIN. INDIPENDENTI POICHE' $\eta_1(\tau) \neq 0$
ALLORA SE ESISTESSE τ^* ZERO CONIUGATO A τ PER η_2 PER IL TEOREMA DI STURM DOVREBBE CADERE LI NEL MEZZO UNO ZERO CONIUGATO DI η_1 IL CHE È ASSURDO.

TEOREMA SIA $a > 0$ SU $I = [t_0, t_1]$

i) SE NON ESISTONO VALORI CONIUGATI A t_0 IN I ALLORA $\bar{\gamma}$ È UN MINIMO DEBOLE STRETTO.

ii) SE ESISTE UNO ~~VALORE~~ ZERO CONIUGATO A t_0 IN $\mathring{I}$ ALLORA $\bar{\gamma}$ NON È UN MINIMO DEBOLE.

DIMOSTRIAMO SOLO i)

SIANO $\eta_1(t) = \Delta(t, t_0)$
$\eta_2(t) = \Delta(t, t_1)$

IDEA: VOGLIO MOSTRARE CHE SECONDO ARITMOSO η_2 NON SI ANNULLA SU I.

SIA $t_{0\delta} < \tau < t_0$ E PRENDO $\Delta(t, \tau) = \eta_3(t)$
VOGLIO MOSTRARE CHE $\eta_3(t) > 0 \quad \forall t \in I$
SE ESISTESSE $\bar{t} \in I$ tc $\eta_3(\bar{t}) = 0 \Rightarrow \exists \bar{t}_1 \in (t_0, \bar{t})$ tc

$\eta_2(t_1) = 0$ POICHE η_2 e η_3 SONO INDIPENDENTI.
MA ALLORA POICHE' η_1 e η_2 SONO IND. SI DOVREBBE AVERE UN $t_2 \in (\bar{t}_1, t_1)$ tc $\eta_3(t_2) = 0$ IL CHE È ASSURDO

ALLORA $\eta_3(t) > 0 \quad \forall t \in I$ ED È IL CAMPO DI JACOBI CHE MI PERMETTE DI USARE LA COND. SUFFICIENTE.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEI PUNTI CONIUGATI

Sia $\bar\gamma(t)$ un estremale immerso in un campo di estremali ovvero una famiglia $\{\gamma(t,\alpha)\}$ ad un parametro $\alpha \in (\alpha_0-\delta, \alpha_0+\delta)$ di estremali.

con $\bar\gamma(t) = \gamma(t,\alpha_0)$ $\quad \gamma(t,\alpha) \in C^3\left(I \times (\alpha_0-\delta, \alpha_0+\delta)\right)$ $\quad I=[t_0,t_1]$, $\delta>0$

e supponiamo $\underbrace{\gamma_{\alpha t}}_{\text{derivata seconda}}(t,\alpha) \not\equiv 0$ su I (cioè non identicamente nulla ma può annullarsi).

PROP $\eta(t) = \gamma_\alpha(t,\alpha_0)$ è un campo di Jacobi per $\bar\gamma$.

DIM sappiamo che $\forall \alpha$ $\gamma(t,\alpha)$ soddisfa Eulero-Lagrange per L.

$\forall t \in I$ vale $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\left(\gamma(t,\alpha), \dot\gamma(t,\alpha), t\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\left(\gamma(t,\alpha), \dot\gamma(t,\alpha), t\right) = 0$

Derivo rispetto ad α e valuto in α_0

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\left(\gamma(t,\alpha), \dot\gamma(t,\alpha), t\right)\right)\Big|_{\alpha=\alpha_0} \overset{\text{supponendo } L\in C^3}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot q}(\gamma,\dot\gamma,t)\right)\Big|_{\alpha=\alpha_0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(L_{\dot q q}\cdot\gamma_\alpha(t,\alpha) + L_{\dot q\dot q}\,\gamma_{t\alpha}(t,\alpha)\right)\Big|_{\alpha=\alpha_0} =$$

$$= \overbrace{\frac{d}{dt}\left(L_{\dot q q}\right)}^{2\dot b}\cdot\overbrace{\gamma_\alpha(t,\alpha_0)}^{\eta} + \overbrace{L_{\dot q q}}^{2b}\,\overbrace{\gamma_{\alpha t}(t,\alpha_0)}^{\dot\eta} + \overbrace{\frac{d}{dt}\left(L_{\dot q\dot q}\cdot\gamma_{t\alpha}\right)}^{(2a\cdot\dot\eta)^{\cdot}}$$

mentre

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma,\dot\gamma,t)\Big|_{\alpha=\alpha_0} = \overbrace{L_{qq}}^{2c}\cdot\overbrace{\gamma_\alpha(t,\alpha_0)}^{\eta} + \overbrace{L_{q\dot q}}^{2b}\,\overbrace{\gamma_{t\alpha}(t,\alpha_0)}^{\dot\eta}$$

$$\cancel{2}\dot b\eta + \cancel{2b\dot\eta} + (\cancel{2}a\dot\eta)^{\cdot} - \cancel{2}c\eta - \cancel{2b\dot\eta} = 0$$

$$\boxed{(a\dot\eta)^{\cdot} - (c-\dot b)\eta = 0}$$ è l'eq di Jacobi.

SE SUPPONIAMO CHE $\begin{cases} \gamma(t_0,\alpha) = \bar{\gamma}(t_0) \\ \gamma_t(t_0,\alpha) = \alpha \end{cases}$ (PARTONO TUTTE DALLO STESSO PUNTO CON PENDENZA α)

OTTENIAMO QUINDI $\begin{cases} \eta(t) = \gamma_\alpha(t_0,\alpha) \\ \eta(t_0) = 0 \\ \dot{\eta}(t_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \eta(t) = \Delta(t,t_0)$

INFATTI $\eta(t_0) = \gamma_\alpha(t_0,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\gamma(t_0,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\bar{\gamma}(t_0) = 0$

$$\dot{\eta}(t_0) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\gamma_t(t_0,\alpha)\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha = 1$$

SCAMBIANDO L'ORDINE DI DERIVAZIONE

QUINDI LA NOSTRA $\eta(t)$ ESSENDO UN CAMPO DI JACOBI MI INTERESSERÀ SAPERE QUANDO AVRÀ DEGLI ZERI CONIUGATI.

<u>DEF</u> SIA $\mathcal{C}_\alpha = \{(t,q) : F(t,q,\alpha) = 0\}$ UNA FAMIGLIA DI CURVE DEFINITE IMPLICITAMENTE

IL SUO <u>INVILUPPO</u> $\mathcal{E}$ CONSISTE NEI PUNTI $(t,q) \in \mathbb{R}^2$

tc

$$\begin{cases} F(t,q,\alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial\alpha}(t,q,\alpha) = 0 \end{cases} \quad \forall\alpha \text{ PARAMETRO CONSIDERATO.}$$

<u>OSS</u> L'INVILUPPO È UNA CURVA $\mathcal{E}$ CHE È TANGENTE IN OGNI SUO PUNTO AD UNA CURVA DI $\mathcal{C}_\alpha$

CONSIDERIAMO $F(t,q,\alpha) = \gamma(t,\alpha) - q = 0$

ALLORA LE EQUAZIONI DELL'INVILUPPO SONO

$$(*) \begin{cases} q = \gamma(t,\alpha) \\ \gamma_\alpha(t,\alpha) = 0 \end{cases}$$

INOLTRE SE IMMAGINIAMO $\mathcal{E}$ COME VARIABILE DELLA SOLA α

$t = \tau(\alpha) \quad q = X(\alpha) \Rightarrow X(\alpha) = \gamma(\tau(\alpha),\alpha) \quad (*_1)$

QUINDI LA CONDIZIONE DI TANGENZA A $\mathcal{E}$ NEI PUNTI $(\tau(\alpha), \chi(\alpha))$ DIVENTA CHE IL VETTORE $(\tau'(\alpha), \chi'(\alpha))$ SIA TANGENTE A $\mathcal{C}_\alpha$

POICHÈ $\mathcal{C}_\alpha$ È DEFINITO IMPLICITAMENTE DA

$$\gamma(t,\alpha) - q = 0$$

ALLORA DAL TEOREMA DEL DINI SO CHE IL VETTORE NORMALE È DATO DA $\nabla_{(t,q)}\big(\gamma(t,\alpha) - q\big) =$

$$= \underbrace{\big(\gamma_t(t,\alpha), -1\big)}_{\text{AVENDO FISSATO } \alpha}$$

QUINDI AFFINCHÈ $\mathcal{E}$ SIA TANGENTE A $\mathcal{C}_\alpha$ SI HA

$$\big(\tau'(\alpha), \chi'(\alpha)\big) \cdot \big(\gamma_t(t,\alpha), -1\big) = 0 \quad \forall \alpha$$

$$\gamma_t(t,\alpha)\,\tau'(\alpha) = \chi'(\alpha) \quad (*_2)$$

<u>TEOREMA</u> $(*) \Rightarrow (*_1) + (*_2)$

SO CHE $F(t,q,\alpha) = 0$ e $F_\alpha(t,q,\alpha) = 0$

CHIAMO $G(t,q,\alpha) = \begin{pmatrix} F(t,q,\alpha) \\ F_\alpha(t,q,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ~~(NON POSSO ESPLICITARE α IN FUNZ. DI t E q)~~

~~MA SE~~

VOGLIO USARE IL TEOREMA DEL DINI A G PER POTER ESPLICITARE (t,q) IN FUNZIONE DI α

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} F_t & F_q \\ F_{\alpha t} & F_{\alpha q} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \gamma_t & -1 \\ \gamma_{\alpha t} & 0 \end{pmatrix} = \gamma_{\alpha t}(t,\alpha) \neq 0$$

MA RICORDIAMO $\eta(t) = \gamma_\alpha$ e $\underset{\gamma_{\alpha t}}{\underset{\|}{\eta'(t)}} \neq 0$

ALLORA $\begin{cases} \alpha \to \big(\tau(\alpha), \chi(\alpha)\big) \\ \gamma(\tau(\alpha),\alpha) - \chi(\alpha) = 0 \quad (*_1) \to \text{OTTENUTA} \\ \gamma_\alpha(\tau(\alpha),\alpha) = 0 \end{cases}$

NOLTRE SEMPRE PER IL TEOREMA DEL DINI

$$\begin{pmatrix} \tau'(\alpha) \\ \chi'(\alpha) \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} F_t & F_a \\ F_{\alpha t} & F_{\alpha a} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_\alpha \\ F_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} \gamma_t & -1 \\ \gamma_{\alpha t} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_\alpha \\ \gamma_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\gamma_{\alpha t}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma_{\alpha t} & \gamma_t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_\alpha \\ \gamma_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\gamma_{\alpha t}} \begin{pmatrix} \gamma_{\alpha\alpha} \\ -\gamma_{\alpha t} \cdot \underbrace{\gamma_\alpha}_{=0} + \gamma_t \gamma_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\gamma_{\alpha\alpha}}{\gamma_\alpha(t)} \begin{pmatrix} 1 \\ +\gamma_t \end{pmatrix}$$ ED È PERPENDICOLARE A $\begin{pmatrix} \gamma_t \\ -1 \end{pmatrix}$ CHE È IL VETTORE TANGENTE.

$$\Rightarrow \tau'(\alpha)\, \gamma_t(t,\alpha) - \chi(\alpha) = 0 \quad (*_2)$$

QUINDI L'INVILUPPO È L'INSIEME DEI PUNTI CONIUGATI

{PERCHÉ $\gamma_a = 0$ cioè $\eta(t) = 0$ e $q = \gamma(t,\alpha)$

CAMPI DI ESTREMALI E CONDIZIONI PER MINIMO FORTE

- γ ESTREMALE DI A_L

$n = 1$

$L \in C^3$

DEFINIAMO $\Gamma = \{(\alpha, t) : \alpha \in A \subseteq \mathbb{R} \text{ e } t \in I(\alpha) \subset \mathbb{R}\}$
(f CAMPO DI ESTREMALI)

DEF Sia $f(t,\alpha) : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(t,\alpha) = (t, \varphi(t,\alpha)) = (t, q)$

$G = \mathrm{Img}\, f$ IN MODO TALE CHE f SIA UN DIFFEOMORFISMO SULL'IMMAGINE e $\varphi_\alpha(t,\alpha) \neq 0$ su Γ

ALLORA $\{q = \varphi(t,\alpha)\}$ RISPETTA LE IPOTESI DEL DINI.

E POSSO QUINDI RICAVARE $\alpha = a(t,q)$ IN FUNZIONE DI t e q

cioè $q = \varphi(t, a(t,q))$ e $\alpha = a(t, \varphi(t,\alpha))$

ALLORA $\mathcal{C}_{(\alpha)} = \{(t,q) : t \in I_\alpha,\ q(t,\alpha) = \varphi(t, a(t,q))\}$

È UN CAMPO DI CURVE CHE RICOPRONO G.

$\varphi_t(t,\alpha)$ = PENDENZA DI UNA GENERICA CURVA DI C_α
NEL PUNTO $(t, \varphi(t,\alpha))$

DEF LA $\boxed{\text{SLOPE-FUNCTION}}$ (FUNZIONE PENDENZA)

$$P(t,q) = \varphi_t(t, a(t,q))$$

SE FISSIAMO α e $w(t) = \varphi(t,\alpha)$

$\Rightarrow \boxed{\dot{w}(t) = P(t,\alpha)}$

PROPOSIZIONE SE L'ESTREMALE $\bar{\gamma}(t)$ DEFINITO IN $t_0 \leq t \leq t_1$

SODDISFA LA CONDIZIONE DI LEGENDRE STRETTA ($a(t) > 0$ su $I = [t_0, t_1]$)

E NON ESISTONO COPPIE DI PUNTI CONIUGATI SU I

ALLORA $\bar{\gamma}$ PUÒ ESSERE IMMERSO IN UN CAMPO C^3 DI

ESTREMALI DATO DA $q = \varphi(t,\alpha)$ $\alpha \in A$, $t \in I$

DIM $\exists\, \tau \in (t_0 - \delta, t_0)$ tc $\Delta(t,\tau) > 0$ su $(\tau, t_1]$

CONSIDERANDO IL SEGUENTE PROBLEMA DI CAUCHY $\square$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}(\omega,\dot\omega,t) - \frac{\partial L}{\partial q}(\omega,\dot\omega,t) = 0 \\ \omega(\tau) = \bar\gamma(\tau) \\ \dot\omega(\tau) = \alpha \end{cases}$$

(A PATTO DI RIDURRE δ POSSO ESTENDERE $\bar\gamma$ FINO A τ)

SIA $\alpha \in [\alpha_0 - \rho, \alpha_0 + \rho]$ tc $\alpha_0 = \dot{\bar\gamma}(\tau)$

$\exists\, \rho_0 > 0$ tc $\forall \alpha \in [\alpha_0 - \rho_0, \alpha_0 + \rho_0]$ IL PROBLEMA $\square$

HA ESATTAMENTE UNA SOLUZIONE $\omega(t) = \varphi(t,\alpha) \in C^3$

SE CONSIDERIAMO $v(t) = \varphi_\alpha(t,\alpha_0)$ QUESTO È UN CAMPO DI JACOBI

CON $\dot v(\tau) = \varphi_{t\alpha}(\tau,\alpha) = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha}(\varphi_t(\tau,\alpha)) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha = 1$

$v(\tau) = \varphi_\alpha(\tau,\alpha_0) = 0$ POICHÉ $\varphi(\tau,\alpha_0)$ NON DIPENDE DA α

$\Rightarrow v(t) = \Delta(\tau,t) > 0$ $\forall t \in (\tau, t_1]$

PER CONTINUITÀ $\exists\, \rho \in (0,\rho_0)$ e $\mu > 0$ tc

$\varphi_\alpha(t,\alpha) \geq \mu$ $\forall (t,\alpha) \in I \times [\alpha_0 - \rho, \alpha_0 + \rho]$

E QUESTO CI DÀ IL CAMPO VOLUTO (OVVERO LE SOL DI $\square$).

PRO (NO DIM) $f: \Gamma \to G$ È UN CAMPO DI ESTREMALI

RISPETTO A L $\Leftrightarrow$ LA SUA SLOPE-FUNCTION $\mathcal{P}(t,q)$ SODDISFA

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\bar L - \mathcal{P}\bar L_{\dot q}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\bar L_{\dot q}$$

NOTAZIONE se $\phi = \phi(q,\dot q,t)$ $\Rightarrow \bar\phi = \phi(q,\mathcal{P}(t,q),t)$.

METODO DI CARATHÉODORY (ROYAL ROAD TO THE FIELD'S THEORY)

TEOREMA : Sia $L(q,\dot q,t) \in C^2$

$\bar\gamma$ ESTREMALE DI A_L IMMERSO IN UN CAMPO G. SE LA SLOPE FUNCTION SODDISFA

i) $L(q,\mathcal{P}(t,q),t)=0$

ii) $L(q,\dot q,t)>0$ x $\dot q \neq \mathcal{P}(t,q)$ $\forall (t,q)\in G$

$\Rightarrow \bar\gamma$ È MINIMO FORTE.

~~PD~~ DIM POICHÉ OVVIAMENTE $\dot{\bar\gamma}(t) = \mathcal{P}(t,\bar\gamma(t))$

OSS LE IPOTESI i) e ii) SONO CHIEDONO TANTO QUINDI DOBBIAMO TROVARE UNA STRADA ALTERNATIVA.

IDEA USIAMO LE NULL-LAGRANGIAN

$L^* = L - M$ M = NULL LAGRANGIAN con $\boxed{M = S_q\,\dot q + S_t}$

SE L^* SODDISFA i) e ii)

$$A_{L^*}(\gamma) > A_{L^*}(\bar\gamma)$$

$$A_{L^*}(\gamma) = A_L(\gamma) - A_M(\gamma)$$

$$A_M(\gamma) = A_M(\bar\gamma)$$

$$\Rightarrow A_L(\gamma) > A_L(\bar\gamma)$$

DOVE S È DETTA ICONALE O DISTANZA OTTICA

~~TEO~~ **PROP** $f:\Gamma \to G$, $\mathcal{P}(t,q)$ SLOPE DI G

$L(q,\dot q,t)$ ~~...~~ e M COME SOPRA

SE
$$\left\{\begin{array}{l} \text{i) } L^*_{\dot q}(q,\mathcal{P}(t,q),t)=0 \\ \text{ii) } L^*_{\dot q\dot q}(q,\mathcal{P}(t,q),t)\geq 0 \end{array}\right.$$

OSS QUESTE CONDIZIONI VALGONO POICHÉ $\dot q \to L^*(q,\dot q,t)$ HA MINIMO IN $\dot q = \mathcal{P}(t,q)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a) & L_{\dot q}(q,\mathcal{P}(t,q),t) = S_q(q,t) \\ b) & S_t = L(q,\mathcal{P}(t,q),t) - \mathcal{P}(t,q)\,L_{\dot q}(q,\mathcal{P}(q,t),t) \end{array}\right.$$

$\boxed{\text{EQUAZIONI DI CARATHÉODORY}}$

DIM $\Rightarrow$

~~$L^*(q,B(t,q))$~~

$$L^*(q,\dot q,t) = L(q,\dot q,t) - S_q \cdot \dot q + S_t$$

DERIVO IN $\dot q$ $\Rightarrow$

$$L^*_{\dot q}(q,\dot q,t) = L_{\dot q}(q,\dot q,t) - S_q$$

VALUTO IN $\dot q = S(q,t)$ e USANDO i

$$\boxed{0 = L_{\dot q}(q, S(q,t), t) - S_q(q,t)} \quad a)$$

RICORDANDO

$$L^*(q,\dot q,t) = L(q,\dot q,t) - S_q(q,t)\cdot \dot q + S_t(q,t)$$

SOSTITUENDO $\dot q = S(q,t)$ e A $S_q(q,t)$ USO LA a) APPENA OTTENUTA. + i)

$$0 = L^*(q, B(q,t), t) = L(q, B(t,q), t) - L_{\dot q}(q, S(q,t), t)\cdot S(q,t) - S_t(t,q)$$

DA CUI

$$\boxed{S_t(q,t) = -S(q,t)\, L_{\dot q}(q, S(q,t), t) + L(q, B(t,q), t)} \quad b)$$

IN SINTESI
$$\begin{cases} a) & S_q = \overline{L}_{\dot q} \\ b) & S_t = \overline{L} - B\overline{L}_{\dot q} \end{cases}$$

~~4)~~

~~VERIFICO IDEA DISEGNARE LE EQUAZIONI (i) SE VALGONO (a) (b)~~

TEOREMA LE EQUAZIONI DI CARATHÉODORY DANNO L'IMMERSIONE IN UN CAMPO DI ESTREMALI.

DIM DERIVANDO a) IN dt e b) IN dq e USANDO SCHWARTZ SI HA

$$\frac{d}{dt}\overline{L}_{\dot q} = \frac{d}{dq}\left(\overline{L} - B\overline{L}_{\dot q}\right) \Leftrightarrow B \text{ è UN CAMPO DI ESTREMALI RISPETTO A } L.$$

PER IL TEO NON DIMOSTRATO

TEOREMA SE VALGONO LE EQUAZIONI DI CARATHÉODORY ALLORA LA CONDIZIONE (i) $L^*_{\dot q\dot q}(q,\dot q,t) > 0$ PUÒ ESSERE SOSTITUITA DA $L_{\dot q\dot q} \geq 0$ (CONDIZIONE NECESSARIA DI LEGENDRE).

DISCUTIAMO COSA DIVENTA LA CONDIZIONE (i) NELLA ROYAL-ROAD $\overset{\text{PER } L^*}{V}$ OVVERO $L^*(q,\dot q,t) > 0$ se $\dot q \neq \mathcal{P}(q,t)$.

$$L^* = L - M = L - S_q \dot q - S_t = \boxed{L - \bar L_{\dot q}\dot q - (\bar L - \mathcal{P}\bar L_{\dot q}) > 0}$$

$$L - \bar L - \bar L_{\dot q}(\dot q - \sigma) > 0$$

DEFINIZIONE FUNZIONE ECCESSO DI WEIERSTRASS.

$$\mathcal{E}_L(t,q,v,w) = L(q,w,t) - L(q,v,t) - (w-v)L_{\dot q}(q,v,t)$$

QUINDI LA DISEGUAGLIANZA SOPRA DIVENTA

$$\boxed{\mathcal{E}_L(t,q,\mathcal{P}(t,q),\dot q) > 0} \quad \text{PER } (t,q) \in G \text{ e } \dot q \neq \mathcal{P}(t,q)$$ CONDIZIONE DI WEIERSTRASS

TEOREMA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER UN MINIMO FORTE.

SE $\bar\gamma$ È UN ESTREMALE E PUÒ ESSERE IMMERSO IN UN CAMPO DI ESTREMALI CON SLOPE FUNCTION $\mathcal{P}(t,q)$ TALE CHE VALGA LA CONDIZIONE DI WEIERSTRASS

$$\Rightarrow A_L(\gamma) > A_L(\bar\gamma) \quad \forall \gamma \neq \bar\gamma.$$

(DIMOSTRAZIONE DOPO).

SCHEMA RIASSUNTIVO

METODO DI CARATHÉODORY

$L^* = L - M$ con $M = S_q \dot{q} + S_t$

i) $L^*(q, \mathcal{P}(t,q), t) = 0$

ii) $L^*(q, \dot{q}, t) > 0 \quad \dot{q} \neq S(q,t)$

$\bar{\gamma}$ estremale di L immerso in un campo di estremali con scope $\mathcal{P}(q,t)$

i) e ii) creano condizioni suff. poiché $A_L(\gamma) > A_L(\bar{\gamma})$

$\forall \gamma : [t_0, t_1] \to G \quad \gamma(t_j) = \bar{\gamma}(t_j) \quad j = 0, 1$

COSA ABBIAMO OTTENUTO.

$$i) + ii) \Rightarrow \begin{cases} L^*_{\dot{q}}(q, \mathcal{P}(t,q), t) = 0 & (a) \\ L^*_{\dot{q}\dot{q}}(q, \mathcal{P}(t,q), t) \geq 0 & (b) \end{cases}$$

$$\text{inoltre } i) + a) \Leftrightarrow \begin{cases} S_q = \bar{L}_{\dot{q}}(q, \mathcal{P}(t,q), t) \\ S_t = \bar{L} - \mathcal{P}\bar{L}_{\dot{q}} \end{cases} \quad (\square)$$

EQUAZIONI DI CARATHÉODORY

Se vale $(\square)$ la condizione ii) $L^*(q, \dot{q}, t) > 0 \quad \dot{q} \neq \mathcal{P}(t,q)$

si scrive come (W) $\boxed{\mathcal{E}_L(t, q, \mathcal{P}, \dot{q}) > 0 \quad \dot{q} \neq \mathcal{P}(t,q)}$

ALLORA $(\square) + (W) \Rightarrow \bar{\gamma}$ MINIMO FORTE

CONDIZIONE SUFF (DI WEIERSTRASS) $\bar{\gamma}$ immerso in un campo di estremali + (W) $\Rightarrow \bar{\gamma}$ è un minimo forte.

ORA basta ottenere $(\square)$

$\bar{\gamma}$ immerso in un campo di estremali $\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q}\underbrace{(\bar{L} - \mathcal{P}\bar{L}_{\dot{q}})}_{F_1} = \frac{d}{dt}\underbrace{\bar{L}_{\dot{q}}}_{F_2}$

Sono le condizioni di chiusura del campo $S = F_1\,dt + F_2\,dq$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_t = \bar{L} - \mathcal{P}\bar{L}_{\dot{q}} \\ S_q = \bar{L}_{\dot{q}} \end{cases} \quad (\square)$$

Quindi per avere S bisogna chiedere che il dominio sia semp. connesso

DEF SIA S ICONALE DI UN CAMPO DI ESTREMALI

E $M = S_t + \dot{q} S_q$

M È UNA DERIVATA TOTALE

$$\mathcal{M}(\bar{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} M(\gamma, \dot{\gamma}, t)\, dt = S(t_1, \gamma(t_1)) - S(t_0, \gamma(t_0))$$

$\downarrow$

$\boxed{\text{INVARIANTE INTEGRALE DI HILBERT}}$

TEO FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE DI WEIERSTRASS.

f CAMPO DI ESTREMALI SU G, P LA SCOPE, S ICONALE.

e $A_L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)\, dt$ DEFINITO SU $D^1([t_0, t_1])$

con grafico$(\gamma) \subseteq G$

$D^1 =$ (CURVE $C^0([t_0, t_1])$ E DERIVABILI TRANNE IN UN NUMERO FINITO DI PUNTI DOVE ESISTONO FINITI LIMITE DESTRO E SINISTRO DELLA DERIVATA)

ALLORA $\boxed{A_L(\gamma) = S(t_1, \gamma(t_1)) - S(t, \gamma_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E}_L(t, \gamma, P(t, \gamma), \dot{\gamma})\, dt}$

DIM $M = S_t + \dot{q} S_q = (\bar{L} - P \bar{L}_{\dot{q}}) + \bar{L}_{\dot{q}}\, \dot{q} =$
$= \bar{L} + (\dot{q} - P) \bar{L}_{\dot{q}}$

$L^* = L - M$

$L^*(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) - L(q, P(q,t), t) - (\dot{q} - P(t,q)) L_{\dot{q}}(q, P(q,t), t)$

$\Rightarrow L^* = \mathcal{E}_L(t, q, P(q,t), \dot{q})$

$\Rightarrow L = M + \mathcal{E}_L(t, q, P(t,q), \dot{q})$ DA CUI INTEGRANDO SI HA LA TESI.

OSS $\mathcal{E}_L = 0$ SE $\dot{q} = P(t, q)$

PROP SIA f UN CAMPO DI ESTREMALI CON P SCOPE E S ICONALE

E $\bar{\gamma}$ CHE SI ADATTA AL CAMPO ($\dot{\bar{\gamma}} = P(t, \bar{\gamma})$)

$\Rightarrow A_L(\bar{\gamma}) = S(t_1, \bar{\gamma}(t_1)) - S(t_0, \bar{\gamma}(t_0))$

DIM SEGUE DALL'OSS + FORMULA DI RAPP.

TEO Sia $A_L(\tilde{\gamma}) \geq A_L(\gamma)$ (*)

SE $\mathcal{E}_L(t, \tilde{\gamma}, p(t,\tilde{\gamma}), \dot{\tilde{\gamma}}) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

ANZI VALE > IN (*) SE $\mathcal{E}_L \not\equiv 0$ (NON IDENTICAMENTE NULLA)

OSS SE USIAMO LA FORMULA DI TAYLOR

$$\mathcal{E}_L(t, \tilde{\gamma}, p(t,\tilde{\gamma}), \dot{\tilde{\gamma}}) = (\dot{\tilde{\gamma}} - p(t,\tilde{\gamma}))\cdot A(t)$$

CON $A(t) = \underbrace{\frac{1}{2} L_{\dot{q}\dot{q}}(\tilde{\gamma}, p(t,\tilde{\gamma}), t)}_{\text{È ANCORA IL TERMINE DOMINANTE ED È LEGATO ALLA CONDIZIONE DI LEGENDRE}} + \vartheta(t)(\dot{\tilde{\gamma}}(t), p(t,\tilde{\gamma}))$

CON $\vartheta(t) \in [0,1]$

COROLLARIO: $\bar{\gamma}$ ESTREMALE IN UN CAMPO DI ESTREMALI (G SEMP. CONNESSO)

$\Rightarrow \bar{\gamma}$ È UN MINIMO FORTE DI A_L SE SODDISFA

LA CONDI DI LEGENDRE ~~SODDISFA~~ FORTE

$$L_{\dot{q}\dot{q}}(q, \dot{q}, t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \text{ e } \forall q \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{FINE CAPITOLO CALCOLO VARIAZIONI}}$

MECCANICA DI HAMILTON

TRASFORMAZIONE E TRASFORMATA DI LEGENDRE

- Sia $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO e $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \neq 0 \quad \forall x \in U$

ALLORA
SIA $\phi_f : x \longrightarrow y = \frac{\partial f}{\partial x}$ È UNA MAPPA LOC. INVERTIBILE PER IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE.

QUINDI ESISTE (ALMENO LOCALMENTE) ϕ_f^{-1}

DEFINIAMO $g(y) = G\left(\phi_f^{-1}(y), y\right)$ CON $G(x,y) = \langle x, y \rangle - f(x)$

VEDIAMO CHI È $dg = \frac{\partial g}{\partial y} dy =$

$$= \left[\underbrace{\frac{\partial G}{\partial x}\left(\phi_f^{-1}(y), y\right)} \cdot \frac{\partial \phi_f^{-1}(y)}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y}\left(\phi_f^{-1}(y), y\right)\right] dy =$$

$$= \left[\underbrace{\left(y - \underset{\underset{\phi_f}{\shortparallel}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\left(\phi_f^{-1}(y)\right)\right)}_{y} \cdot \frac{\partial \phi_f^{-1}(y)}{\partial y} + \phi_f^{-1}(y) \right] dy =$$

$$= \phi_f^{-1}(y)\, dy \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial g}{\partial y}(y) = \phi_f^{-1}(y)}$$

ϕ_f SI CHIAMA TRASFORMAZIONE E g SI CHIAMA TRASFORMATA.

ANDIAMO A DIMOSTRARE CHE QUESTA OPERAZIONE È INVOLUTIVA

INIZIAMO MOSTRANDO CHE $\det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y}(y)\right) = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^{-1} \circ \phi_f^{-1}(y)$ E QUINDI $\neq 0$

$$\frac{\partial g}{\partial y} \circ \phi_f(x) = x$$

DERIVO IN ∂x

E USO $\frac{\partial \phi_f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial g^2}\left(\phi_f(x)\right) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = Id$$

PASSANDO AI DETERMINANTI E USANDO BINET + $x = \phi_f^{-1}(y)$ SI HA LA TESI.

QUINDI ANCHE SU g È POSSIBILE DEFINIRE LA TRASFORMAZ.

$$\phi_g \quad y \longrightarrow z = \frac{\partial g}{\partial y}(y) = \phi_f^{-1}(y) \Rightarrow \phi_f^{-1}(\phi_f(x)) = x$$

PER QUANTO DETTO SOPRA, GRAZIE AL TEO DI INVERTIBILITÀ LOCALE $\exists\, \phi_g^{-1}$ QUINDI DEFINIAMO

$$h(x) = F(x, \phi_g^{-1}(x)) \qquad \text{con } F(x,y) = \langle x, y\rangle - g(y)$$

IN MODO IDENTICO A ~~SOPRA~~ PRIMA SI OTTIENE

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx = \phi_g^{-1}(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = \phi_g^{-1}(x) = \phi_f(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

QUINDI AL MENO DI COSTANTE ADDITIVA IN y f e h SONO LA STESSA.

MECCANICA LAGRANGIANA

SIA $\mathcal{L}(q, \dot q, t) \in C^2$ CON $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q}(q, \dot q, t) \neq 0 \quad \forall (q, \dot q, t)$

OSS LA CONDIZIONE VALE PER $\mathcal{L}$ MECCANICA $(\mathcal{L} = T_2 - V)$

E $T_2 = \frac{1}{2} \dot q A(q) \dot q$ CON A MATRICE DEFINITA POSITIVA.

$$\phi_{\mathcal{L}}\ (q, \dot q, t) \longrightarrow (p, q, t) \qquad \text{con } p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}$$

È UNA TRASFORMAZIONE LOCALMENTE INVERTIBILE.

PROP/OSS NEL CASO MECCANICO LA TRASFORMAZIONE È DEFINITA GLOBALMENTE.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot q A(q,t) \dot q + b(q,t)\cdot \dot q + c(q,t) \qquad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = A(q,t)\dot q + b(q,t)$$

$$\Rightarrow \dot q = [A(q,t)]^{-1}(p - b)$$ È DEFINITA OVUNQUE.

PROP $L \in C^2$ E VALE $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}} \neq 0$

$t \to q(t)$ È SOLUZIONE DELLE EQ. DI EULERO LAGRANGE

$\Updownarrow$

LA CURVA $t \to (p(t), q(t))$ CON $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t)$

È SOL. DI $\begin{cases} \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$ DOVE $H(p,q,t) = \left[p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t)\right]$

CON $\dot{q} = V(p,q,t)$

E V È DEFINITA IMPLICITAMENTE

DA $\phi_L^{-1}(p,q,t) = (q, V(p,q,t), t)$

DIM $\Rightarrow$) $p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$ $h = 1, \dots, n$

VALE EULERO LAGRANGE

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{h=1}^{n} \left[\cancel{\underbrace{p_h}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}} \cdot \frac{\partial V_h}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \cdot \frac{\partial V_h}{\partial q_j}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} \overset{\downarrow}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -\dot{p}_j$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{h=1}^{n} \left(\cancel{p_h \cdot \frac{\partial V_h}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \cdot \frac{\partial V_h}{\partial p_j}} \right) = \dot{q}_j$$

QUINDI VALGONO LE EQUAZIONI DI HAMILTON

OSS L'INVOLUZIONE CI DA UNA DUALITÀ

SE $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$

$\Leftarrow$) SIA $t \to (p(t), q(t))$ TC $\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$

CON $\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right) \neq 0$ (IN MODO ANALOGO A PRIMA CON $L = f$ E $H = g$)

SIANO $(p, q, t) \to \left(q, \frac{\partial H}{\partial p}, t\right)$ E LA SUA INVERSA LOCALE

DI $p = \pi(q, \dot{q}, t)$

ALLORA

$$L(q,\dot q,t) = \Big[\, p\cdot \dot q - H(p,q,t) \Big]_{p=\pi(q,\dot q,t)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}(q,\dot q,t) = \sum_{h=1}^{n} \cancel{\left(\frac{\partial \pi_h}{\partial q_j}\cdot \dot q_h - \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_h}}_{=\dot q_h}\cdot\frac{\partial \pi_h}{\partial q_j}\right)} - \frac{\partial H}{\partial q_j} = \dot p_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = p_j + \sum_{h=1}^{n} \cancel{\left(\frac{\partial \pi_h}{\partial \dot q_j}\cdot \dot q_h - \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_h}}_{=\dot q_h}\frac{\partial \pi_h}{\partial \dot q_j}\right)} = p_j$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}p_j - \dot p_j = \dot p_j - \dot p_j = 0$$ E QUINDI VALE EULERO LAGRANGE.

CAMPI VETTORIALI HAMILTONIANI

$(p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\dot X = \begin{pmatrix}\dot p \\ \dot q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p}\end{pmatrix} = J\cdot \nabla_x H \qquad x=(p,q) \qquad J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{array}\right)$$

$$J^T = J^{-1} = -J \quad \text{e} \quad \det J = 1$$

DOMANDA QUANDO UN CAMPO È HAMILTONIANO?

INFATTI ABBIAMO VISTO CHE PRESA $L(q,\dot q,t)$ E UNA TRASFORMAZIONE $Q=\varphi(t) \Rightarrow \mathcal{L}(Q,\dot Q,t)$ HA LE STESSE EQUAZIONI DI EULERO LAGRANGE.

VORREMO QUINDI TROVARE DEI CRITERI CHE CI PERMETTONO DI DEFINIRE $(p,q) \to (P,Q)$ CHE MANDI UN HAMILTONIANO IN UNO EQUIVALENTE.

PROP Sia $X \in \mathbb{R}^{2n}$ campo vettoriale

$x \in U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

J = identità simplettica

Se X è hamiltoniano (cioè $X = J \nabla_x H$ per una qualche $H \in C^2$

H funzione di Hamilton) allora $J \dfrac{\partial X}{\partial x}$ è simmetrica

Vale il viceversa se l'insieme U è ~~sem~~ semp. connesso.

DIM $\Rightarrow$) $J \cdot \dfrac{\partial X}{\partial x} = J \cdot \left(J \cdot \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) = - \dfrac{\partial^2 H}{\partial x}$ è un'Hessiana di una ~~matri~~ funzione C^2 allora per Schwartz è simmetrica.

$\Leftarrow$) Se $\left[J \dfrac{\partial X}{\partial x} \right] = \left[J \cdot \dfrac{\partial X}{\partial x} \right]^T$

chiamando $F_i = (J \cdot X)_i$

la condizione di simmetria si legge come la condizione di chiusura per F

$$\left(J \frac{\partial X}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \left(J \frac{\partial X}{\partial x} \right)^T_{ij}$$

$\Rightarrow$ se U è semplicemente connesso $\exists H$ tc

$- \nabla_x H = F = J \cdot X$ moltiplicando per $-J$ a sinistra da entrambi i lati

$\boxed{X = J \nabla_x H}$ ovvero X è hamiltoniano.

TEORIA DELLE TRASFORMAZIONI CANONICHE

- INDIPENDENTI DAL TEMPO

OSS LA DIPENDENZA DI $H(p,q,t)$ NON CAMBIA MOLTO, MENTRE VEDREMO CHE LA DIP. DELLE TRASFORMAZIONI LE COSE CAMBIANO ~~[illegible]~~ NON POCO.

DEF Sia $(p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ E $\Psi : (p,q) \to (P,Q)$ UNA TRASFORMAZIONE DA U IN $\Psi(U)$ CON $\Psi \in C^2(U, \mathbb{R}^{2n})$

LA TRASFORMAZIONE SI DICE CANONICA SE PER OGNI $H \in C^2(U, \mathbb{R})$ IL CAMPO HAMILTONIANO $X_H = J \nabla_x H$ SI TRASFORMA IN UN CAMPO $X_K = \boxed{\Psi * X_H}$ PER UNA CERTA HAMILTONIANA $K \in C^2(\Psi(U), \mathbb{R})$

PUSH-FORWARD

PUSH-FORWARD

$$\dot{x} = X(x)$$

$$y = \Psi(x)$$

$$\dot{y} = \frac{d\Psi}{\partial x}(x) \cdot \dot{x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} X(x) =$$

$$= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} X\right) \circ \left(\Psi^{-1}(y)\right) = \Psi * X_H$$

DEF UNA TRASFORMAZIONE ~~[illegible]~~ SIMPLETTICA DI VALENZA α

Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Ψ SI DICE SIMPLETTICA SE

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot J \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]^T = \alpha J \quad \forall x \in U$$

OSS QUESTE MATRICI FORMANO UN GRUPPO CON LA COMPOSIZIONE

1) $A \cdot J A^T = \alpha J \qquad B \cdot J B^T = \beta J$

$$(A \cdot B) \cdot J \cdot (A \cdot B)^T = A(B \cdot J \cdot B^T)A^T = \beta \cdot (A J A^T) = \beta\alpha \cdot J$$

2) $A^{-1} J (A^{-1})^T = \frac{1}{\alpha} J \qquad J = A^{-1}(A J A^T) A^{-T} = \alpha A^{-1} J A^{-T}$

PROPOSIZIONE SONO EQUIVALENTI I SEGUENTI FATTI

1) ψ è α-SIMPLETTICA
2) $\forall H \in C^2 \quad \psi_* X_H = X_{\underbrace{\alpha H \circ \psi^{-1}}_{K}}$
3) $\forall f, g \in C^2 \qquad \{f, g\}_x \circ \psi^{-1} = \alpha \{ f \circ \psi^{-1}, g \circ \psi^{-1} \}_y$
4) $PdQ - \alpha p dq$ è UNA 1-FORMA CHIUSA
(CONDIZIONE DI LIE DIFFERENZIALE).

DEF $\boxed{\text{PARENTESI DI POISSON}}$

$f(p,q)$ e $g(p,q) \quad x = (p,q)$

$$\{f, g\}_x = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} = (\nabla_x f) \cdot J \cdot (\nabla_x g)$$

DIM (1) $\Leftrightarrow$ (2)

$$\psi_* X_H = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} X_H \right) \circ \psi^{-1} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} J \nabla_x H \right) \circ \psi^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} J \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^{-T} \nabla_x H \right) \circ \psi^{-1} =$$

$$= \left(\alpha J \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^{-T} \nabla_x H \right) \circ \psi^{-1}$$

MENTRE

$$X_{\alpha H \circ \psi^{-1}} = J \nabla_y \left(\alpha H \circ \psi^{-1} \right)$$

VEDIAMO $\nabla_y (H \circ \psi^{-1}) = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(H \circ \psi^{-1} \right) \right]^T =$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} H \circ \psi^{-1} \cdot \underbrace{\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial y}}_{= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^{-1} \circ \psi^{-1}} \right]^T = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^{-T} \cdot \nabla_x H \circ \psi^{-1}$$

QUINDI $\quad X_{\alpha H\circ\psi^{-1}} = \alpha J \left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{-T} \nabla_x H \right) \circ \psi^{-1}$

e $\quad \psi_* X_H - X_{\alpha H\circ\psi^{-1}} = \underbrace{\left\{ \frac{\partial\psi}{\partial x} J \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{T} - \alpha J \right\}}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ SE VALE 1)}} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{-T} \nabla_x H \right] \circ \psi^{-1} = 0 \quad (*)$

QUINDI $\quad$ 1) $\Rightarrow$ 2) $\quad$ è FATTO

PER AVERE 2) $\Rightarrow$ 1) $\quad$ (*) DEVE ESSERE VERA $\forall H$

QUINDI $\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{-T} \nabla_x H$ è UN GENERICO VETTORE $\forall$ AL VARIARE DI H ALLORA

$\frac{\partial\psi}{\partial x} J \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{T} - \alpha J$ DEVE ESSERE LA MATRICE NULLA.

(1) $\Leftrightarrow$ (3)

CONTO ANALOGO A SOPRA

$$\alpha \cdot \{ f\circ\psi^{-1}, g\circ\psi^{-1} \}_y = \alpha \nabla_y (f\circ\psi^{-1}) J \nabla_y (g\circ\psi^{-1}) \overset{!}{=}$$

$$= \alpha \left(\underbrace{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{-T}}_{A} \underbrace{\nabla_x f}_{x} \cdot \underbrace{J \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{-T}}_{B} \underbrace{\nabla_x g}_{y} \right) \circ \psi^{-1} =$$

$$\langle Ax, By \rangle = \langle x, A^T B y \rangle$$

$$= \alpha \left(\nabla_x f \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{T} J \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^{-T}}_{\frac{1}{\alpha} J} \nabla_x g \right) \circ \psi^{-1} =$$

$$= \cancel{\alpha} \left(\nabla_x f \cdot \frac{1}{\cancel{\alpha}} J \nabla_x g \right) \circ \psi^{-1} =$$

$$= \{ f, g \}_x \circ \psi^{-1}$$

① ⟺ ④ RICORDANDO CHE $\begin{matrix} P = P(p,q) \\ Q = Q(p,q) \end{matrix} \Big\}$ CHE DIPENDONO DA p e q

$$P\,dQ - \alpha p\,dq = \sum_{h=1}^{n} P_h\,dQ_h - \alpha\, p_h\, dq_h =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} P_h \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_h}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} dq_j \right) \right] - \sum_{j=1}^{n} \alpha\, p_j\, dq_j =$$

ISOLANDO dp_j e dq_j

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \cdot \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} \right) dp_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} - \alpha\, p_j \right) dq_j$$

SCRIVIAMO QUINDI LE CONDIZIONI DI CHIUSURA.

1) $$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} - \alpha\, p_j \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} \right)$$

2) $$\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} \right) = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial p_i} \right)$$

3) $$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} - \alpha\, p_j \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{h=1}^{n} P_h \frac{\partial Q_h}{\partial q_i} - \alpha\, p_i \right)$$

QUINDI DIVENTANO

1) $$\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial P_h}{\partial p_i} \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} + \cancel{P_h \frac{\partial^2 Q_h}{\partial p_i \partial q_j}} \right) - \alpha\,\delta_{ij} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} + \cancel{P_h \frac{\partial^2 Q_h}{\partial q_i \partial p_j}}$$

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial P_h}{\partial p_i} \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} - \frac{\partial P_h}{\partial q_i} \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} \right) = \alpha\,\delta_{ij}}$$

2) $$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_h}{\partial p_i} \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} + \cancel{P_h \frac{\partial^2 Q_h}{\partial p_i\, p_j}} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_h}{\partial p_j} \frac{\partial Q_h}{\partial p_i} + \cancel{P_h \frac{\partial^2 Q_h}{\partial p_i \partial p_j}}$$

$$\boxed{\sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial P_h}{\partial p_i} \frac{\partial Q_h}{\partial p_j} - \frac{\partial P_h}{\partial p_j} \frac{\partial Q_h}{\partial p_i} \right) = 0}$$

CONTI LUNGHI VEDI DISPENSE PROF. ...

DEF Ψ SI DICE COMPLETAMENTE CANONICA SE $\alpha = 1$

VEDIAMO CHE UN MODO MIGLIORE DI ESPRIMERE LA $\mathfrak{Z}$) È

$\{P_i, P_j\} = 0 \qquad \{Q_i, P_j\} = \alpha\,\delta_{ij} \qquad \{Q_i, Q_j\} = 0$

OVVERO SI CONSERVANO LE PARENTESI FONDAMENTALI.

LEMMA ALGEBRICO

$A(x)$, A DI ORDINE n e $(A(x))_{ij} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

SE $\forall$ funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ESISTE UNA $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

TALE CHE

$$A(x) \cdot \nabla_x f(x) = \nabla_x g(x)$$

ALLORA ESISTE UNA COSTANTE $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $A = \alpha I$

DIM Se $A(x) \cdot \nabla_x f(x) = \nabla_x g(x)$, $\nabla_x g(x)$ è un GRADIENTE

QUINDI DEVONO VALERE LE CONDIZIONI DI CHIUSURA

(*)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A(x)\nabla_x f(x)\right)_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A(x)\cdot\nabla_x f(x)\right)_i} \quad \forall f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad \forall i, j$$

Se $f_1(x) = x_j \Rightarrow \nabla_x f_1 = e_j \quad (A(x) e_j)_i = A(x)_{ij}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial A(x)_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial A(x)_{jj}}{\partial x_i}} \quad (1)$$

Se $f_2(x) = \frac{x_j^2}{2} \quad \nabla_x f_2(x) = x_j e_j$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_j A_{ij}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j A_{jj}\right)$$

per (1)

$$\cancel{\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} x_j} + A_{ij} = \cancel{\frac{\partial}{\partial x_i} A_{jj}\, x_j} + \delta_{ij} A_{jj}$$

$$\rightarrow \boxed{A_{ij} = \delta_{ij} A_{jj}} \; (2) \Rightarrow A \text{ è DIAGONALE}$$

e USANDO CHE A è DIAGONALE su (1) SI HA CHE $A_{jj}(x)$ DIPENDE SOLO DA x_j

SCRIVIAMO PER ESTESO LA CONDIZIONE DI CHIUSURA (*)

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial A_{ih}}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_h} + A_{ih} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_h} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial A_{jh}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_h} + A_{jh} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_h}$$

Se $h \neq i \Rightarrow A_{ih} = 0$ QUINDI IL TUTTO SI RIDUCE A

$$\underbrace{\frac{\partial A_{ii}}{\partial x_j}}_{(1) \Rightarrow = 0} \frac{\partial f}{\partial x_i} + A_{ii} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial A_{jj}}{\partial x_i}}_{(1) \Rightarrow = 0} \frac{\partial f}{\partial x_j} + A_{jj} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$A_{ii} \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}} = A_{jj} \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}$$

$\Rightarrow A_{ii} = A_{jj}$ CIOÈ GLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE SONO TUTTI UGUALI.

SIAMO PRONTI PER DIMOSTRARE

TEOREMA φ è CANONICA $\Leftrightarrow$ φ È α SIMPLETTICA.
IND DAL TEMPO

$\Leftarrow$) GIÀ FATTO.

$\Rightarrow$) POICHÉ φ è CANONICA $\forall H$ HAMILTONIANA $\exists K$ T.C.

$$\varphi_* X_H = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} J \nabla_x H\right) \circ \varphi^{-1} = J \nabla_y K = X_K \quad (\text{DOVE } y = (P, Q))$$

DEFINISCO $\tilde{K} = H \circ \varphi^{-1} \Rightarrow \nabla_y \tilde{K} = \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{-T} \nabla_x H\right) \circ \varphi^{-1}$

$$\Rightarrow \nabla_x H = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{T} \nabla_y \tilde{K} \circ \varphi$$

SOSTITUENDO NELLA PRIMA EQ SI OTTIENE

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{T} \nabla_y \tilde{K} \cancel{\circ \varphi}\right) \cancel{\circ \varphi^{-1}} = J \nabla_y K$$

MOLTIPLICO PER $-J$

$$\underbrace{-J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} J \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{T} \circ \varphi^{-1}\right)}_{=} \nabla_y \tilde{K} = \nabla_y K$$

$\Rightarrow$ PER LEMMA ALGEBRICO αI CON $\alpha \neq 0$ POICHÉ φ È UN DIFFEO.

$\Rightarrow \nabla_y K = \alpha \nabla_y \tilde{K} \Rightarrow K = \alpha \tilde{K} + c(t)$

QUINDI $\psi_x X_H = J \nabla_y K = J \nabla_y (\alpha \tilde{K} + c(t))$

$$= J \nabla_y \alpha \tilde{K} = \alpha J \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^{-T} \nabla_x H \right) \circ \psi^{-1} =$$

$$= X_{\alpha H} \circ \psi^{-1}$$

E QUINDI PER LA CONDIZIONE 2) DI EQUIVALENZA ψ è α-SIMPLETTICA

COSTRUZIONE DI TRASFORMAZIONI CANONICHE

METODO 1 OTTENERLE COME FLUSSO INTEGRALE A TEMPO FISSATO

METODO 2 USARE UNA FUNZIONE GENERATRICE.

SIA $X_H = J \nabla_x H$ e $x \in (p, q)$

NOTAZIONE: $\phi(x, t) = \phi_t(x)$ è SOLUZIONE DI $\dot{x} = X_H(x, t)$
ED ESISTE t_0 t.c. $\phi(x, t_0) = x$

OSS SE X_H NON DIPENDE DA t POTREI CHIEDERE $\phi(x, 0) = x$ CON $t_0 = 0$ POICHÉ SE $x(t)$ È SOL. ANCHE $x(t+c)$ LO È. MA SE X_H DIPENDE DA t QUESTO NON È PIÙ VERO.

TEOREMA SIA X_H CON $H \in C^2(U \times I, \mathbb{R})$ CAMPO HAMILTONIANO E $\phi : U \times J \to \mathbb{R}^{2n}$ IL FLUSSO INTEGRALE CON $I, J \subseteq \mathbb{R}$ INTERVALLI. SIA $\phi_{\bar{t}} : U \to \mathbb{R}^{2n}$ LA MAPPA A TEMPO FISSATO $\bar{t} \in I$ CON $\phi_{\bar{t}}(x) = \phi(x, \bar{t})$ DEFINISCE UNA TRASFORMAZIONE COMPLETAMENTE CANONICA

DIM $\phi(x, t)$ È SOLUZIONE DI $\dot{x} = X_H(x, t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(X_H(\phi(x, t), t) \right) =$$

$$= \frac{\partial X_H}{\partial x}(\phi, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = J \underbrace{H''}_{\text{MATRICE HESSIANA}}(\phi, t) \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\forall t$ VALE

$$\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial x}\right)^T J \frac{\partial\phi_t}{\partial x} = J$$

PER $t = t_0$ $\quad \frac{\partial\phi_{t_0}}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = I$

QUINDI SE MOSTRO ~~SRK~~ CHE $\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial x}\right)^T J \frac{\partial\phi_t}{\partial x}$ È COSTANTE

NEL TEMPO HO FINITO.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial x}\right)^T J \left(\frac{\partial\phi_t}{\partial x}\right)\right) = \left(J H'' \frac{\partial\phi_t}{\partial x}\right)^T J \frac{\partial\phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\phi_t}{\partial x}\right)^T J^2 H'' \frac{\partial\phi}{\partial x} =$$

$$= \left(\frac{\partial\phi_t}{\partial x}\right)^T \underbrace{(H'')^T}_{= H''} \underbrace{J^T \cdot J}_{= -Id} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\phi_t}{\partial x}\right)^T Id\, H'' \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0$$

DEF UNA $\boxed{\text{FUNZIONE GENERATRICE}}$ $S(q, P)$

q → VECCHIE COORD

P → NUOVI MOMENTI.

PROP DATA $S(q, P)$ CON $\boxed{\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial P}\right) \neq 0}$ CONDIZIONE DI NON DEGENERAZIONE

ALLORA LE EQUAZIONI $\begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial S}{\partial P} \end{cases}$ DEFINISCONO IMPLICITAMENTE E LOCALMENTE UNA TRASFORMAZIONE COMPLETAMENTE CANONICA.

CIOÈ $\forall (q_0, P_0)$ DOVE VALE LA CONDIZIONE DI NON DEGENERAZIONE

È DEFINITA UNA MAPPA DA UN INTORNO DI $\left(q_0, \frac{\partial S}{\partial q}(q_0, P_0)\right)$ IN

UN INTORNO DI $\left(\frac{\partial S}{\partial P}(q_0, P_0), P_0\right)$

DIMOSTRAZIONE LA CONDIZIONE DI NON DEGENERAZIONE E IL TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITÀ CI DANNO IL DIFFEOMORFISMO LOCALE NELL'INTORNO DI (p_0, q_0)

PER LA CANONICITÀ CONTROLLIAMO LA CONDIZIONE DI LIE.

$$PdQ - pdq = d(PQ) - QdP - pdq =$$

$$= d(PQ) - \frac{\partial S}{\partial P} dP - \frac{\partial S}{\partial q} dq =$$

$$= d(PQ - S)$$ QUINDI LA FORMA È ESATTA E QUINDI CHIUSA.

OSS ANCHE FACENDO TUTTE LE CASISTICHE

$S(q, P)$

$S(q, Q) \longrightarrow \begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} \\ P = -\frac{\partial S}{\partial Q} \end{cases}$

$S(p, P) \longrightarrow \begin{cases} q = -\frac{\partial S}{\partial P} \\ Q = -\frac{\partial S}{\partial Q} \end{cases}$

$S(p, Q) \longrightarrow \begin{cases} q = \frac{\partial S}{\partial q} \\ P = \frac{\partial S}{\partial Q} \end{cases}$

REGOLA: UN SOLO CAMBIO DA $S(q, P)$ IMPLICA UN CAMBIO DI SEGNO NELLA RELAZIONE DELLA VARIABILE SCAMBIATA. CON 2 CAMBI I SEGNO SONO ENTRAMBI +.

NON SI CREANO TUTTE LE TRASFORMAZIONI POSSIBILI

$$(p, q, t) \xrightarrow{\psi} (\underbrace{P, Q}_{\phi(p,q,t)}, t)$$

TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

CON $P = P(p, q, t)$ e $Q = Q(p, q, t)$

DEF ψ è CANONICA SE $\forall H \in C^2 \ \exists K \in C^2$ tc $\boxed{\psi_* X_H = X_K}$

VEDIAMO IN QUESTO CASO COME CAMBIA IL PUSH-FORWARD.

$\dot{x} = X(x, t)$

$y = \phi(x, t)$ TRASFORMAZIONE DI COORD DIPENDENTE DAL TEMPO

$$\dot{y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot X + \frac{\partial \phi}{\partial t} = Y(y, t)$$

DA CUI

$$\psi_* X_H = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} X_H + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \circ \psi^{-1} \quad \text{con} \quad (x, t) \xrightarrow{\psi} (y, t) = (\phi(x, t), t)$$

DEF DATA UNA ψ COME SOPRA $\forall \bar{t} \in I$ LA CORRISPONDENTE TRASFORMAZIONE A TEMPO BLOCCATO $\phi_{\bar{t}}$

$$\phi_{\bar{t}}(x) = \phi(x, \bar{t})$$

PROP SE $\psi \in C^2(U \times I, \mathbb{R}^{2n+1})$ È UNA TRASFORMAZIONE CANONICA ALLORA $\exists \alpha \neq 0$ tc $\forall$ SCELTA DI $\bar{t} \in I$ $\phi_{\bar{t}}$ È SIMPLETTICA CON VALENZA α. SE U È SEMP. CONNESSO VALE IL VICEVERSA.

~~DIM~~

E INOLTRE LA NUOVA K HAMILTONIANA È DELLA FORMA

$$K = \alpha H \circ \psi^{-1} + K_0 \quad \text{con} \quad X_{K_0} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \circ \psi^{-1}$$

HAMILTONIANA DEL CAMPO HAMILTONIANO RELATIVA AL TEMPO CHE ABBIAMO INTRODOTTO.

DIM $\Rightarrow$ ψ è CANONICA ALLORA $\forall H \in C^2 \; \exists K \in C^2$

tc $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} X_H + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \circ \psi^{-1} = X_K$

IN PARTICOLARE è VERO PER $H \equiv 0$ $\Rightarrow \exists K_0$ tc

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{X_H}} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \circ \psi^{-1} = X_{K_0}$$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial \phi}{\partial t} \circ \psi^{-1} = X_{K_0}$ è UN CAMPO NELLE COORD. y

QUINDI COMPONENDO CON ψ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) = X_{K_0}(\phi(x,t), t)$$ CIOÈ LA MAPPA

$\phi(x,t)$ È SOL DI UN SISTEMA DI EQ. DI HAMILTON

(OSS ϕ NON È UN FLUSSO).

SE FISSO $\bar{t}$ E CONSIDERO $\phi_{\bar{t}}$ QUESTA È UNA TRASFORMAZIONE INDIPENDENTE DA t. $\Rightarrow$ $\frac{\partial \phi_{\bar{t}}}{\partial x} X_H \circ \psi^{-1} = X_K - X_{K_0} \underset{\downarrow}{=} X_{(K-K_0)}$ (MI DICE CHE $\phi_{\bar{t}}$ È CANONICA IND. DAL TEMPO)

IL CAMPO È LINEARE

QUINDI SEGUENDO LA DIMOSTRAZIONE (ϕ CANONICA $\to$ ϕ HA VALENZA α)

USANDO IL LEMMA ALGEBRICO

SI OTTIENE CHE $\phi_{\bar{t}}$ È SIMPLETTICA A VALENZA $\alpha(\bar{t})$

ADESSO RESTA DA VEDERE CHE $\alpha(\bar{t})$ NON DIPENDE DA $\bar{t}$.

TORNANDO $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) = X_{K_0}(\phi(x,t),t)\right)^{(*)}$ ϕ NON È DETTO SIA

UN FLUSSO INTEGRALE POICHÉ NON È DETTO ESISTA t_0 tc $\phi(x, t_0) = x \;\; \forall x$.

ALLORA PRENDIAMO UN t_0 ARBITRARIO E CONSIDERIAMO

$$\phi(x,t) = \phi\left(\phi_{t_0}^{-1}(y), t\right)\Big|_{y = \phi_{t_0}(x)}$$

IN QUESTO MODO HO UN OPERATORE CHE È UN FLUSSO

~~QUINDI~~ QUINDI SOSTITUENDO IN $(*)$ SI HA ANCHE

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(\phi_{t_0}^{-1}(y,t)\right) = X_{K_0}\left(\phi\left(\phi_{t_0}^{-1}(y),t\right),t\right)$$

OVVERO LA MAPPA $(y,t) \to (H)(y,t) = \phi\left(\phi_{t_0}^{-1}(y,t),t\right)$ È UNA

~~MAPPA~~ FLUSSO HAMILTONIANO, QUINDI È UNA TRASFORMAZIONE UNIVALENTE

MA QUINDI AL TEMPO t_0 LA VALENZA $\alpha(t_0)=1$. PER ARBITRARIETÀ

DI t_0 SI HA LA TESI.

$(\Leftarrow)$ SUPPONIAMO CHE PER OGNI TEMPO $\bar{t}$ LA TRASFORMAZIONE A TEMPO BLOCCATO $\phi_{\bar{t}}$ SIA SIMPLETTICA CON VALENZA α INDIPENDENTE DA $\bar{t}$

ALLORA DA UNA DELLE EQ. DI ESSERE α SIMPLETTICA SEGUE CHE

$\forall H \quad \left(\frac{\partial \phi_{\bar{t}}}{\partial x} X_H\right)\circ\psi^{-1}$ È HAMILTONIANO CON FUNZIONE DI

HAMILTONIANO $\alpha H \circ \psi^{-1}$

INOLTRE LA MATRICE $J\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\circ\psi^{-1}\right)$ È SIMMETRICA

$$J\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\circ\psi^{-1}\right) = J\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}\circ\psi^{-1}\right)\cdot\frac{\partial\phi^{-1}}{\partial y} =$$

$$= J\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}\cdot\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]^{-1}\right)\circ\psi^{-1}$$

$$\Rightarrow J\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{-1}\right) - \left(J\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{-1}\right)^T =$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{-T}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}^T J\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}\right)^T J\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{-T}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^T J\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)}_{=\alpha J}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{-1} = 0$$

PERCHÉ α È IND. DA t.

ALLORA SE SIAMO SU UN CONVESSO $\Rightarrow J\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\circ\psi^{-1}\right)$ SIMMETRICA

IMPLICA $\frac{\partial\phi}{\partial t}\circ\psi^{-1}$ HAMILTONIANO PER UNA QUALCHE $K_0(P,Q,t)$

QUINDI IL CAMPO

$$\Psi_* X_H = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} X_H + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right] \circ \psi^{-1} \text{ è HAMILTONIANO}$$

CON FUNZIONE DI HAMILTON αH ~~KO~~ $\circ \psi^{-1} + K_0$.

QUINDI ψ è CANONICA.

SPAZIO DELLE FASI ESTESO

DATA UNA TRASFORMAZIONE DIP. DAL TEMPO $(p, q, t) \xrightarrow{\psi} (P, Q, t)$
LA POSSO ESTENDERE AD UNA TRASFORMAZIONE $(p, e, q, t) \xrightarrow{\tilde{\psi}} (P, \mathcal{E}, Q, t)$
NELLO SPAZIO DELLE FASI ESTESO.

OSS LA COSA HA SENSO SE CONSIDERIAMO

$$\tilde{H}(p, e, q, t) = H(p, q, t) + e$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial q} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{e} = -\dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{t} = \dfrac{\partial \tilde{H}}{\partial e} = 1 \end{cases}$$

PROP SIA ψ UNA TRASF CANONICA CON VALENZA α, ALLORA
$\tilde{\psi}$ è CANONICA CON VALENZA SE E SOLO SE
$\mathcal{E}(p, e, q, t) = \alpha e - H_0(p, q, t)$ CON $H_0 = K_0 \circ \psi$
E K_0 FUNZIONE DI HAMILTON DEL CAMPO $\dfrac{\partial\phi}{\partial t} \circ \psi^{-1}$
VICEVERSA SIA $\tilde{\Psi}(p, e, q, t) = (P(p, q, t), \mathcal{E}(p, e, q, t), Q(p, q, t), t)$
UNA TRASF. CANONICA A VALENZA $\alpha \Rightarrow$

$$\psi(p, q, t) = (P(p, q, t), Q(p, q, t), t) \text{ è CANONICA CON}$$

VALENZA α.

DIM SIA $\tilde{x} = (p, e, q, t)$ NELLO SPAZIO DELLE FASI ESTESE

NELLO SPAZIO DELLE FASI ESTESE ABBIAMO UNA TRASFORMAZIONE INDIPENDENTE DAL TEMPO (CONSIDERANDO t COME COORDINATA e e COME SUO MOMENTO).

$$\{f, g\}_{\tilde{x}} = \{f, g\}_x + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial e} - \frac{\partial f}{\partial e}\frac{\partial g}{\partial t}$$

CON f e g FUNZIONI DI $\tilde{x}$.

DA $\{t, \mathcal{E}\}_{\tilde{x}} = \alpha$ OVVERO $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e} = \alpha$ SI HA

$$\mathcal{E}(p, e, q, t) = \alpha e + \mathcal{F}(p, q, t)$$

DA $\{P_i, \mathcal{E}\}_{\tilde{x}} = \{Q_i, \mathcal{E}\}_{\tilde{x}} = 0$ SI OTTIENE

$$\{P_i, \mathcal{F}\}_x + \alpha \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0 \qquad \{Q_i, \mathcal{F}\}_x + \alpha \frac{\partial Q_i}{\partial t} = 0$$

SICCOME Ψ È CANONICA, ESISTE UNA FUNZIONE $K_0(y, t)$

TALE CHE $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = J \nabla_y K_0 \circ \Psi$

PERCHÉ $\frac{\partial \Psi}{\partial t} \circ \Psi^{-1} = X_{K_0}$

OVVERO $\frac{\partial P_i}{\partial t} = -\frac{\partial K_0}{\partial Q_i} \circ \Psi$ e $\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{\partial K_0}{\partial P_i} \circ \Psi$

METTENDO INSIEME TUTTO SI HA

$$\{P_i, \mathcal{F}\}_x = -\alpha \frac{\partial P_i}{\partial t} = \alpha \frac{\partial K_0}{\partial Q_i} \circ \Psi = -\alpha \{P_i, K_0\}_y \circ \Psi = -\alpha \{P_i, H_0\}_x$$

$$\{Q_i, \mathcal{F}\}_x = -\alpha \frac{\partial Q_i}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial K_0}{\partial P_i} \circ \Psi = -\alpha \{Q_i, K_0\}_y \circ \Psi = -\alpha \{Q_i, H_0\}_x$$

DA CUI $\{H_0 + \mathcal{F}, Q_i\}_x = \{H_0 + \mathcal{F}, P_i\}_x = 0 \quad \forall i$ QUESTO EQUIVALE

$$\{K_0 + \mathcal{F} \circ \Psi^{-1}, Q_i\}_y = \{K_0 + \mathcal{F} \circ \Psi^{-1}, P_i\}_y = 0$$ DA QUESTO

A MENO DI COSTANTI ADDITIVE SEGUE $\mathcal{F} = -H_0$

(NO DIM VICEVERSA)

DEF INDICHIAMO CON δ IL DIFFERENZIALE VIRTUALE, cioè IL DIFFERENZIALE A TEMPO BLOCCATO

$$\delta G(p,q,t) = dG(p,q,t) - \frac{\partial G}{\partial t}dt$$

PROP CONDIZIONE DI LIE: AFFINCHÉ $\psi(x,t) = (\phi(x,t),t)$ SIA CANONICA CON VALENZA α è CHE ESISTA $G(p,q,t)$ tc

$$\delta G = P\delta Q - p\delta q$$

FUNZIONI GENERATRICI DIPENDENTI DAL TEMPO

PROPOSIZIONE SIA $S(q,Q,t)$ UNA FUNZIONE DELLE VECCHIE COOR. E DEI NUOVI MOMENTI tc

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q\,\partial P}\right) \neq 0$$

ALLORA $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ $Q = \frac{\partial S}{\partial P}$ DEFINISCONO IMPLICITAMENTE UNA TRASF. CANONICA DIP. DAL TEMPO.

DIM INTRODUCO UNA TRAS. ~~[illegible]~~ NELLO SPAZIO DELLE FASI ESTESO DATA DA ~~[illegible]~~

$$\tilde{S}(q,t,P,\mathcal{E}) = S(q,P,t) + \mathcal{E}t$$

$$\det\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial(P,\mathcal{E})(q,t)} = \det\left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 S}{\partial P\, q} & \begin{matrix} x \\ \vdots \\ x\end{matrix} \\ \hline 0, \dots, 0 & 1 \end{array}\right] = \det\frac{\partial^2 S}{\partial P\, q} \neq 0$$

PER CUI LE RELAZIONI $p = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}$ $e = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}$ $Q = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial P}$ $\mathcal{E} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}$

DEFINISCONO UNA TRASF CANONICA UNIVALENTE INDIPENDENTE NELLO SPAZIO DELLE FASI ESTESO e VALE INFATTI LA CONDIZIONE DI LIE

$$P\,dQ + \mathcal{E}dt - p\,dq - e\,dt = d(PQ) + d(\mathcal{E}t) - (Q\,dP + p\,dq) - \cancel{\mathcal{E}d}\,\mathcal{E}dt$$

$- e\,dt =$

$$= d\left(PQ + \mathcal{E}t - \tilde{S}\right) = d(PQ - S)$$

PONENDO $G(p,e,q,t) = P \cdot Q - S$ DOVE $P = P(p,q,t)$ e $Q = Q(p,q,t)$

OSSERVO CHE G è FUNZIONE SOLO DI (p,q,t)

E $e = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{E}$

QUINDI LA TRASFORMAZIONE $(p,e,q,t) \to (P,\mathcal{E},Q,t)$ CON $\mathcal{E} = e - \frac{\partial S}{\partial t}$

è UNIVALENTE. SONO DUNQUE PRESERVATE LE PARENTESI DI POISSON

$\{\ \}_x$ MA POICHÈ P e Q NON DIPENDONO DA e

SONO PRESERVATE ANCHE $\{\ ,\ \}_x$ PER P e Q. DUNQUE $\forall t$

LA TRASFORMAZIONE ϕ_t è CANONICA UNIVALENTE E QUINDI Ψ è CANONICA

COROLLARIO: SE Ψ è UNA TRASF. CANONICA UNIVALENTE GENERATA DA $S(q,P,t)$ SI HA CHE IL CAMPO X_H VIENE CONIUGATO CON X_K DOVE

$$K \circ \Psi(p,q,t) = H(p,q,t) + \frac{\partial S}{\partial S}\left(q, P(p,q,t), t\right)$$

DIM: RICORDO CHE $K = H \circ \Psi^{-1} + K_0$ CON K_0 FUNZIONE DI HAMILTON DEL CAMPO $\frac{\partial \phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1}$

CONSIDERANDO $(p,e,q,t) \xrightarrow{\tilde{\Psi}} (P,\mathcal{E},Q,t)$ L'ESTENSIONE DI Ψ ALLO SPAZIO DELLE FASI ESTESO CON $\mathcal{E} = e - H_0$

CON $H_0 = K_0 \circ \Psi$

DA SOPRA $e = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{E}$ QUINDI A MENO DI COSTANTI

ADDITIVE $H_0(p,q,t) = \frac{\partial S}{\partial t}\left(q, P(p,q,t), t\right)$

METODO DI JACOBI

IDEA: CERCARE UNA TRASFORMAZIONE CANONICA CHE CONIUGHI IL CAMPO X_H AL CAMPO NULLO COSÌ NELLA NUOVA DINAMICA AVREMO SOLO EQUILIBRI.

QUINDI USANDO IL METODO DELLA FUNZIONE GENERATRICE $S(q, P, t)$ LA TRASFORMAZIONE ψ

(LA DIPENDENZA DAL TEMPO È OBBLIGATA DA CIÒ CHE SI VUOL OTTENERE)

$$K \circ \psi(P, q, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, P, t)$$

ADESSO RICORDIAMO CHE $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ E CHE K VOGLIAMO SIA NULLA ALLORA SI OTTIENE

$$\boxed{H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \quad \left(\begin{matrix}\text{NELLE VARIABILI} \\ q, P, t\end{matrix}\right)$$

EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI

DEF SI DICE INTEGRALE COMPLETO DELL'EQUAZIONE UNA ~~FUNZIONE~~ FAMIGLIA DI FUNZIONI $S(q, \alpha, t)$ DI SOLUZIONI DELL'EQ AL VARIARE DI n PARAMETRI α_i $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ TALE CHE

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial q} \neq 0$$

OSS. POICHÉ NELL'EQUAZIONE COMPAIONO SOLO DERIVATE DI S ALLORA SE $S^*(q, P, t)$ È SOL ANCHE $S^*(q, P, t) + C$ LO È QUINDI NESSUNA DELLE α_i PUÒ ESSERE UNA COST. ADDITIVA

PROP DATO UN SISTEMA HAMILTONIANO CON FUNZIONE DI HAMILTON H, TROVARE UN SISTEMA COMPLETO $S(q,\alpha,t)$ PERMETTE DI INTEGRARE IL SISTEMA ALLA LIOUVILLE CIOÈ A MENO DI QUADRATURE E INVERSIONI.

DIM

OSS NELLA NUOVA HAMILTONIANA I NUOVI MOMENTI SARANNO COSTANTI DEL MOTO QUINDI POSSIAMO SUPPORRE

$$P=\alpha$$

POTEVAMO ANCHE SUPPORRE $P=U(\alpha)$ CON $U:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ DIFFEOMORFISMO TANTO LA CONDIZIONE DI NON DEGENERAZIONE DI S NON CAMBIA.

VEDIAMO QUINDI CHE IL VETTORE $P=\alpha$ CI FORNISCE n INTEGRALI PRIMI INDIPENDENTI E IN INVOLUZIONE DEL SISTEMA HAMILTONIANO.

VEDIAMO L'IND.: SI RICAVA CONSIDERANDO

$$p - \frac{\partial S}{\partial q}(q,P,t)=0$$

DALLA QUALE GRAZIE ALLA COND. $\det\frac{\partial^2 S}{\partial P\partial q}\neq 0$ MI PERMETTE DI UTILIZZARE IL TEOREMA DEL DINI E ISOLARE LA P. E INOLTRE MI DA

$$\frac{\partial P}{\partial(q,P)} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial P\partial q}\right)^{-1}\underbrace{\left[\, I \;\middle|\; \frac{\partial^2 S}{\partial q^2}\right]}_{n\times 2n}$$ HA RANGO MAX $= n$

QUINDI POICHÉ I È IND. DA $\frac{\partial^2 S}{\partial q^2}$ e $\frac{\partial^2 S}{\partial P\partial q}$ È INVERTIBILE SI OTTIENE CHE LE DERIVATE DI $P(p,q,t)$ RISPETTO A p SONO INDIPENDENTI DA QUELLE RISPETTO A q.

IL FATTO CHE LE P_i SIANO IN INVOLUZIONE (OVVERO $\{P_i,P_j\}=0$) SEGUE DAL FATTO CHE LE TRASFORMAZIONI CANONICHE PRESERVANO LE PARENTESI DI POISSON FONDAMENTALI.

con $t_0 = 0$

PRENDIAMO ADESSO UN DATO INIZIALE (p_0, q_0) E MOSTRIAMO CHE POSSIAMO INTEGRARE IL SISTEMA.

INFATTI LE RELAZIONI DI TRASFORMAZIONE SONO

$$(1)\ p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, \underline{P}, t) \quad (2)\ Q = \frac{\partial S}{\partial \underline{P}}(q, \underline{P}, t)$$

CON $\alpha = \underline{P}$

SE VALUTIAMO (1) IN $t=0$ POSSIAMO PER INVERTIBILITÀ LOCALE RICAVARE $\underline{P}_0 = (p_0, q_0, 0)$ SOSTITUENDO NELLA SECONDA q_0 e $\underline{P}_0$ POSSO RICAVARE, SEMPRE CON $t=0$, Q_0.

ADESSO POSSO TORNARE A t GENERICO (DATO CHE $\underline{P}$ e Q SONO COSTANTI e QUINDI $P = P_0$ e $Q = Q_0$) QUINDI INVERTENDO LA (2) A t GENERICO RICAVO $q(p_0, q_0, t)$ e SOSTITUENDO NELLA (1) RICAVARE $p(p_0, q_0, t)$.

ANDIAMO ADESSO A DARE UN'INTERPRETAZIONE DI S LUNGO LE SOLUZIONI DEL SISTEMA HAMILTONIANO.

SIA DATA $(p(t), q(t))$ UNA SOLUZIONE e $(P(t), Q(t)) = \psi(p(t), q(t), t)$

INTRODUCIAMO LA NOTAZIONE $\hat{f}(t) = f(q(t), \underline{P}(t), t)$

ALLORA

$$\frac{d}{dt}\hat{S}(t) = \widehat{\frac{\partial S}{\partial q}} \cdot \dot{q}(t) + \widehat{\frac{\partial S}{\partial \underline{P}}}(t) \cdot \underbrace{\dot{\underline{P}}(t)}_{=0} + \underbrace{\widehat{\frac{\partial S}{\partial t}}}_{=H - \tilde{S}\ =\ H(p(t), q(t), t)} =$$

$$= \dot{p}(t) \cdot \dot{q}(t) - H(p(t), q(t), t) \overset{\text{TRAS. DI LEGENDRE}}{=} L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$$\Rightarrow A_L(q(t); (0,t)) = \int_0^t L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau)\, d\tau =$$

$$= S(q(t), \underline{P}(t), t) - S(q(0), \underline{P}(0), 0)$$

LA FUNZIONE CARATTERISTICA:

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI H NON DIPENDA ESPLICITAMENTE DA t

POSSIAMO CERCARE UN'INTEGRALE COMPLETO

$$S(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - e(\alpha)t$$

SEPARANDO LA PARTE CHE DIPENDE DA t

$W(q,\alpha)$ SI CHIAMA <u>FUNZIONE CARATTERISTICA DI HAMILTON</u>

e $e(\alpha)$ È UNA FUNZIONE ARBITRARIA.

POSSIAMO QUINDI SPEZZARE L'EQ. DI HAMILTON JACOBI NEL

SEGUENTE SISTEMA

$$\begin{cases} H\left(\frac{\partial W}{\partial q}, q\right) = e(\alpha) \\ \frac{\partial S}{\partial t}(q,\alpha,t) = -e(\alpha) \end{cases}$$

IN QUESTO CASO $e(\alpha)$ ASSUME IL ~~RUOLO~~ VALORE DELL'HAMILTONIANA,

CHE POICHÉ H NON DIPENDE DA t È ANCHE UN'INTEGRALE PRIMO.

SE S È UN INTEGRALE PRIMO ANCHE LE RELAZIONI

$$P = \frac{\partial W}{\partial q} \quad e \quad Q = \frac{\partial W}{\partial \alpha}$$ DEFINISCONO UNA TRASF. CANONICA.

POICHÉ $\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q \partial \alpha}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha}\right) \neq 0$

ANCHE IN QUESTO CASO ~~QUINDI~~ UTILIZZANDO LA SCELTA $P=\alpha$

SI OTTIENE $\dot{P} = -\frac{\partial e(P)}{\partial Q} = 0$ ANCORA COSTANTE

MA $\dot{Q} = \frac{\partial e(P)}{\partial P}$ E QUINDI STAVOLTA Q NON È COSTANTE MA LINEARE NEL TEMPO.

IL METODO DELLE CARATTERISTICHE

OBBIETTIVO: RICAVARE ~~[illegible]~~ ~~NUOVAMENTE~~ LE EQUAZIONI DI HAMILTON PARTENDO DA HAMILTON - JACOBI.

RAGIONAMENTO GENERALE: CONSIDERIAMO LA SEGUENTE P.DE

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u, x\right) = 0$$

$$F: \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F = F(y, z, x) \quad x, y \in \mathbb{R}^n \quad z \in \mathbb{R}$$

DATA $u(x)$ UNA SOLUZIONE $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $u \in C^2$ E DATA UNA CURVA $s \longrightarrow x(s)$ IN $\mathbb{R}^n$ INTRODUCO

$$z(s) = u(x(s)) \qquad y(s) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(s))$$

DERIVANDO $y_i(s) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x(s))$ RISPETTO A s OTTENIAMO

$$y_i'(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x(s)) \cdot x_j'(s)$$

MENTRE DERIVANDO LA PDE RISPETTO A x_i SI HA

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

PONGO $x_j'(s) = \frac{\partial \hat{F}}{\partial y_j}(s) = \frac{\partial F}{\partial y_j}(y(s), z(s), x(s))$

CHIAMO $s \to (y(s), z(s), x(s))$ CURVE CARATTERISTICHE

ALLORA LA DERIVATA IN x_i DELLA PDE LUNGO LE CURVE CARATTERISTICHE VALE.

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \underset{x_j'}{\frac{\partial \hat{F}}{\partial y_j}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x(s))}_{y_i'(s)} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} = 0$$

$$y_i'(s) + \frac{\partial \hat{F}}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_i} = 0$$

$$z'(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s))\, x_j'(s) = \sum_{j=1}^{n} y_j(s) \cdot \frac{\partial \hat{F}}{\partial y_j}(s)$$

OTTENIAMO QUINDI

$$\begin{cases} y'(s) = -\frac{\partial \hat{F}}{\partial x}(y(s), z(s), x(s)) - \frac{\partial \hat{F}}{\partial z}(y(s), z(s), x(s)) \cdot y(s) \\ z'(s) = \frac{\partial F}{\partial y}(y(s), z(s), x(s)) \cdot y(s) \\ x'(s) = \frac{\partial F}{\partial y}(y(s), z(s), x(s)) \end{cases}$$

ANDIAMO A VEDERE COSA SUCCEDE NEL CASO MECCANICO.

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

ABBIAMO $F(y, x) = H(p, q, t) + e \qquad x = (q, t) \quad y = (p, e)$

(IN H NON C'È DIPENDENZA DA $z = S$)

LE EQUAZIONI CARATTERISTICHE DIVENTANO

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q, t) & e' = -\frac{\partial H}{\partial t}(p, q, t) \to e = -H \text{ (A MENO DI COSTANTI ADDITIVE)} \\ z' = \frac{\partial H}{\partial p} \cdot p + e \\ q' = \frac{\partial H}{\partial p} & t' = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ S COINCIDE CON IL TEMPO.

INOLTRE LA $z' = \dot{z} = \dot{q}\, p + e = \dot{q}\, p - H \overset{\text{TRASFORMATA DI LEGENDRE}}{=} L$

$\to \quad z(t) = S(t)$ SOL. DELLE EQ. DI HAMILTON QUINDI FUNZIONALE DI AZIONE LAGRANGIANA.

OSS ABBIAMO QUINDI OTTENUTO PRIMA $\hat{H}$ SULLO SPAZIO DELLE FASI ESTESO.

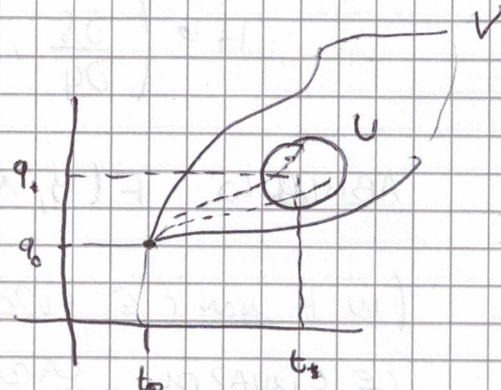
AZIONE COME FUNZIONE DELLE COORDINATE

VOGLIAMO VEDERE UN ALTRO MODO DI RICAVARE LE EQ DI H-J.

IN $n=1$ PRENDO $L(q,\dot q,t)\in C^2$ CON $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}\neq 0$

SIA γ UN ESTREMALE DI A_L E TALE CHE $\gamma(t_0)=q_0$ E SIA IMMERSO IN UN CAMPO STIGMATICO DI ESTREMALI V (OVVERO TUTTI GLI ESTREMALI PASSANO PER (t_0,q_0)).

SIA $U\subset V$ UN INTORNO DI (t_1,q_1) CON $t_1>t_0$



ALLORA $\forall (t_1,q_1)\in U$ INDIVIDUA UN UNICO ESTREMALE $\gamma(t,q_1,t_1)$

DEFINIAMO

$$S(q_1,t_1)=S_{(q_0,t_0)}(q_1,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}L(\gamma(t,q_1,t_1),\dot\gamma(t,q_1,t_1),t)\,dt$$

E VOGLIAMO CALCOLARNE IL SUO DIFFERENZIALE.

$$\frac{\partial S}{\partial q_1}(q_1,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma,\dot\gamma,t)\frac{\partial\gamma}{\partial q_1}+\overbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot q}(\gamma,\dot\gamma,t)\frac{\partial\dot\gamma}{\partial q_1}\,dt}^{\text{PER PARTI}}=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma,\dot\gamma,t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q}(\gamma,\dot\gamma,t)\right]}_{=0\ \to\ \text{EULERO LAGRANGE}}\frac{\partial\gamma}{\partial q_1}\,dt\right\}+\left[\frac{\partial L}{\partial\dot q}(\gamma,\dot\gamma,t)\frac{\partial\gamma}{\partial q_1}\right]_{t_0}^{t_1}=$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial S}{\partial q_1}(q_1,t_1)=\frac{\partial L}{\partial\dot q}(q_1,\dot q_1,t_1)} \quad \text{CON } \dot q_1=\dot\gamma(t_1,q_1,t_1)$$

$\gamma(t_0,q_1,t_1)=q_0 \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial q_1}(t_0)=0$

$\gamma(t_1,q_1,t_1)=q_1 \Rightarrow \frac{\partial\gamma}{\partial q_1}(t_1)=1$

PER CALCOLARE $\frac{\partial S}{\partial t_1}(q, t_1)$ CONSIDERO

$$\tau \to q(\tau) = \gamma(\tau, q_1, t_1) \qquad \tau \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) = I_\varepsilon \quad \varepsilon << 1$$

$$q(t_1) = q_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma(t, q(\tau), \tau) = \gamma(t, q_1, t_1) \quad \forall t \in I_\varepsilon$$

PRENDIAMO $S(q(\tau), \tau) = \int_{t_0}^{\tau} L\big(\gamma(t, q(\tau), \tau), \dot\gamma(t, q(\tau), \tau), t\big)\, dt$

E DERIVIAMO RISPETTO A τ.

$$\frac{dS}{d\tau} = L\big(\gamma(\tau, q(\tau), \tau), \dot\gamma(\tau, q(\tau), \tau), \tau\big) +$$

$$+ \int_{t_0}^{\tau} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}(\gamma, \dot\gamma, t) \overset{0}{\frac{d\gamma}{d\tau}} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}(\gamma, \dot\gamma, t) \overset{0}{\frac{\partial \dot\gamma}{\partial \tau}}}_{0}\, dt$$

POICHÉ AL VARIARE DI τ NON CAMBIO ESTREMALE.

$$= L\big(\gamma(\tau, q(\tau), \tau), \dot\gamma(\tau, q(\tau), \tau), \tau\big) \overset{\uparrow}{=}$$

POICHÉ γ NON CAMBIA AL VARIARE DI τ POSSO PORRE $\tau = t_1$

$$= L\big(\gamma(t_1, q, t_1), \dot\gamma(t_1, q_1, t_1), t\big)$$

$$\frac{dS}{d\tau}(q(\tau), t) = \frac{\partial S}{\partial q_1}(q(\tau), \tau)\frac{dq(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial S}{\partial t_1}(q(\tau), \tau)$$

VALUTANDO IN $\tau = t_1$ E USANDO $\dot q_1 = q'(t_1) = \dot\gamma(t, q_1, t_1)$

$$L(q, \dot q_1, t) = \frac{\partial S}{\partial q_1}(q_1, t_1) \cdot \dot q_1 + \frac{\partial S}{\partial t_1}(q_1, t_1)$$

RICORDANDO $\frac{\partial S}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t_1}(q, t_1) = L(q, \dot q_1, t) - \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} \cdot \dot q_1$$

VALUTANDO IN $\dot q = \nu(p, q, t)$ INVERSA $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}$ E USANDO LA TRASF DI LEGENDRE.

$$\boxed{H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1, t_1\right) + \frac{\partial S}{\partial t_1} = 0}$$

DEF $-\mathcal{L}_{X_f}\, g = \{f, g\}$ DERIVATA DI LIE DI g LUNGO IL CAMPO DI FUNZIONI X_f

OVVERO $\mathcal{L}_X f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ← IN COORDINATE

$$\mathcal{L}_X f = X \cdot \nabla f = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

PRESENTA PERÒ ANCHE UNA DEFINIZIONE INTRINSECA

$$\mathcal{L}_X f = \frac{d}{dt} f\left(\phi_X^t(x)\right)\Big|_{t=0}$$

PROPOSIZIONI: sia X CAMPO VETTORIALE e f UNA FUNZIONE

i) Se $x(t)$ è SO. DI $\dot{x}(t) = X(x(t))$ ALLORA

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \mathcal{L}_X (f(x(t))) \quad \forall t$$

DIM

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \nabla f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla f(x(t)) \cdot X(x(t)) = \mathcal{L}_X f(x(t))$$

ii) f è INTEGRALE PRIMO DI $\dot{x} = X(x) \iff \mathcal{L}_X f = 0$

$\Leftarrow$) f è COSTANTE LUNGO UNA QUALUNQUE ~~COSTANTE~~ SOL. $x(t)$

INFATTI per i) $\frac{d}{dt} f(x(t)) = \mathcal{L}_X f(x(t)) = 0$

$\Rightarrow$) POICHÉ $\forall x(t)$ e $\forall t$ $\frac{d}{dt} f(x(t)) = 0$ PARTENDO DA UN t_0 FISSATO

E SCEGLIENDO LA SOL SI OTTIENE $\mathcal{L}_X f(x(t)) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_X f = 0$

DA QUESTE PROP ~~DALLE~~ SEGUE CHE se H è HAMILTONIANA e f UNA FUNZIONE

f è INTEGRALE PRIMO DI $H \iff \{H, f\} = 0$ INFATTI

$$\{H, f\} = -\mathcal{L}_{X_H} f = 0$$

PROPRIETÀ DELLE PARENTESI DI POISSON

i) BILINEARE $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f,h\} + \mu\{g,h\}$

ii) ANTISIMMETRICA $\{f,g\} = -\{g,f\}$

iii) $\{f, g\cdot h\} = \{f,g\}\cdot h + \{f,h\}\cdot g$ (DISCENDE DALLA DERIVATA DEL PRODOTTO)

iv) IDENTITÀ DI JACOBI

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

TEOREMA DI JACOBI

SIANO f, g DIPENDENTI DA p e q INTEGRALI PRIMI DI $\dot{x} = X_H(x)$

ALLORA ANCHE $\{f,g\}$ È UN INTEGRALE PRIMO

DIM USANDO L'ID. DI JACOBI CON H, f, g SI HA

$$\{H,\{f,g\}\} + \underbrace{\{f,\{g,H\}\}}_{=0} + \underbrace{\{g,\{H,f\}\}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \{H,\{f,g\}\} = 0$$

ESEMPIO SIANO M_i I MOMENTI ANGOLARI RISPETTO ALLA i-ESIMA COMPONENTE.

$$M_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2$$
$$M_2 = q_3 p_1 - q_1 p_3 \qquad \Rightarrow \{M_1, M_2\} = M_3$$
$$M_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

DEF f e g SONO INTEGRALI PRIMI IND SE LO SONO I RISPETTIVI GRADIENTI COME VETTORI $rg\,(\nabla f^T | \nabla g^T) = 2$

PARENTESI DI LIE (DI CAMPI VETTORI) E PROPRIETÀ

DEF Sia $X = (X_i)$, $Y = (Y_i)$ $\Rightarrow$ $[X, Y]_i = \mathcal{L}_X Y_i - \mathcal{L}_Y X_i =$

$$= \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

PROP LA DEFINIZIONE NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLE COORDINATE

DIM SIANO $x' = \varphi(x)$ UN CAMBIO DI COORDINATE e X' e Y' I CAMPI NELLE NUOVE COORDINATE.

VOGLIO FAR VEDERE CHE

$$[X, Y]' = [X', Y']$$

$$[X', Y']_i = \mathcal{L}_{X'} Y_i' - \mathcal{L}_{Y'} X_i' \underset{\text{VOGLIO OTTENERE}}{=} (\mathcal{L}_X Y_i - \mathcal{L}_Y X_i) \circ \varphi^{-1} = [X, Y]_i'$$

PER FARLO MOSTREREMO CHE $\mathcal{L}_{X'} Y_i' = (\mathcal{L}_X Y_i) \circ \varphi^{-1}$

$$Y_i' = Y_i \circ \varphi^{-1}(x)$$

$$X' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot X\right) \circ \varphi^{-1}$$

CONTI ANALOGHI GIÀ VISTI PER I CAMBIAMENTI DI COORDINATE

$$\mathcal{L}_{X'} Y_i' = \nabla_{x'} (Y_i \circ \varphi^{-1}) \cdot X' = \nabla_{x'} (Y_i \circ \varphi^{-1}) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} X\right) \circ \varphi^{-1} =$$

$$= \Big(\underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{-T}}_{A} \underbrace{\nabla_x Y_i}_{x}\Big) \circ \varphi^{-1} \cdot \Big(\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{B} \underbrace{X}_{y}\Big) \circ \varphi^{-1} =$$

$\langle Ax, By \rangle = \langle x, A^T B y \rangle$

$$= \left(\nabla_x Y_i \cdot \cancel{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^{-1}} \cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} X\right) \circ \varphi^{-1} = (\mathcal{L}_X Y_i) \circ \varphi^{-1}$$

PROP $L_{[X,Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X$

DIM SIA f UNA GENERICA FUNZIONE DI CLASSE C^2

$$L_X L_Y f = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}(L_Y f) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \underbrace{X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}}_{L_X y_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} + X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(L_X Y_j) + \sum_{i,j=1}^{n} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

IN MODO ANALOGO

$$L_Y L_X f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(L_Y X_j) + \sum_{j,i=1}^{n} X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\Rightarrow L_X L_Y f - L_Y L_X f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \underbrace{(L_X y_j - L_Y X_j)}_{[X,Y]_j} =$$

$$= L_{[X,Y]} f$$

PER ARBITRARIETÀ DI f SI OTTIENE L'IDENTITÀ.

PROP VOGLIO MOSTRARE CHE $[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$

DIM RICORDANDO CHE $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

CONSIDERO LE DERIVATE SECONDE IN h E SONO DATE DA

$$\underbrace{L_{X_g} L_{X_f} h - L_{X_f} L_{X_g} h}_{\shortparallel} + L_{X_{\{f,g\}}} h = 0$$

$$L_{[X_f, X_g]} h + L_{X_{\{f,g\}}} h = 0$$

$$L_{[X_f, X_g] + X_{\{f,g\}}} h = 0 \Rightarrow [X,Y] = -X_{\{f,g\}}$$

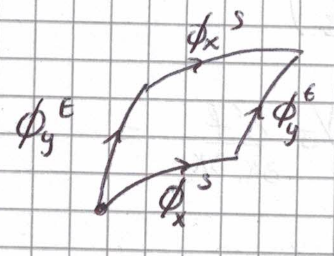
COROLLARIO $\{f,g\} = 0 \Rightarrow [X_f, X_g] = 0$

DEF Se $[X,Y]=0 \Rightarrow X$ e Y COMMUTANO

DEF ϕ_X^s e ϕ_Y^t FLUSSI DEI CAMPI X e Y COMMUTANO SE

$$\phi_Y^t \circ \phi_X^s - \phi_X^s \circ \phi_Y^t = 0 \qquad \forall t,s$$

IDEA DELLA COMMUTAZIONE DEI FLUSSI



I 2 TRAGITTI PORTANO SEMPRE NELLO STESSO PUNTO.

MANCATA COMMUTAZIONE TRA I FLUSSI

DEF $\Delta_f(s,t) = f \circ \phi_Y^t \circ \phi_X^s - f \circ \phi_X^s \circ \phi_Y^t$

PROP $\forall f \quad \Delta_f(s,t) = st\, L_{[X,Y]} + O_3(s,t)$

DIM $\Delta_f(0,t) = \Delta_f(s,0) = 0 \quad \forall s,t$

PERCHE $\phi_X^0 = x$ e $\phi_Y^0 = y$

e QUINDI $\frac{\partial}{\partial s}\Delta_f(s,0) = 0$ e $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Delta_f(s,0) = 0$

ALLORA PER TAYLOR $\Delta_f(s,t) = st \left.\frac{\partial^2 \Delta_f(s,t)}{\partial s\,\partial t}\right|_{t=s=0} + O_3(s,t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t}\left(\phi_Y^t\left(\phi_X^s(x)\right)\right)\Big|_{t=0} \underset{\downarrow}{=} L_Y f(\phi_X^s(x))$$

DEF INTRINSECA DELLA DERIVATA DI LIE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(L_Y f\left(\phi_X^s(x)\right)\right)\Big|_{s=t=0} = L_Y L_X f(x)$$

DA CUI $\left.\frac{\partial^2 \Delta_f}{\partial s\,\partial t}\right|_{s=t=0} = L_X L_Y f - L_Y L_X f = L_{[X,Y]} f$

E QUINDI LA TESI.

ABBIAMO LASCIATO IN SOSPESO LA DIMOSTRAZIONE DELL'IDENTITÀ DI JACOBI.

GRAZIE ALLA DIMOSTRAZIONE DEL FATTO CHE $[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$

SI È NOTATO CHE NELLE PARENTESI DI POISSON SE SVILUPPIAMO IN OGNUNO DEI TERMINI COMPAIONO DELLE DERIVATE SECONDE (AD ESEMPIO DI h)

$L_{X_f} L_{X_g} h$, $-L_{X_g} L_{X_f} h$ e $L_{X_{\{f,g\}}} h$

D'ALTRA PARTE NON POSSONO COMPARIRE DERIVATE SECONDE DI h PERCHÉ AD ESEMPIO IL PRIMO TERMINE È

$[X_f, X_g] h$ e QUESTO È UN OPERATORE AL PRIMO ORDINE DI DERIVATA QUINDI LE SECONDE DEVONO ANNULLARSI.

PER SIMMETRIA QUESTO SUCCEDE ANCHE PER g E PER f QUINDI TUTTI I TERMINI SI SEMPLIFICANO E SI ANNULLANO E QUINDI SI HA L'IDENTITÀ DI JACOBI.

TEOREMA

I CAMPI X e Y COMMUTANO $\Leftrightarrow$ COMMUTANO I FLUSSI ϕ_X^s ϕ_Y^t

DIM $\Leftarrow$) SE I FLUSSI COMMUTANO $\Rightarrow \Delta_f(s,t) = 0 \Rightarrow L_{[X,Y]} = 0 \Rightarrow [X,Y] = 0$

$\Rightarrow$) FISSIAMO s e t e LI DIVIDIAMO IN k INTERVALLI UGUALI GLI INTERVALLI $[0,s]$ e $[0,t]$ RISPETTIVAMENTE DI LUNGHEZZA

$\sigma = \frac{s}{k}$ $\tau = \frac{t}{k}$

POICHÉ I FLUSSI FORMANO UN SEMIGRUPPO

$$\phi_Y^t \circ \phi_X^s = \underbrace{\phi_Y^\tau \circ \cdots \circ \phi_Y^\tau}_{k \text{ VOLTE}} \circ \underbrace{\phi_X^\sigma \circ \cdots \circ \phi_X^\sigma}_{k \text{ VOLTE}}$$

PER QUANTO GIÀ VISTO SAPPIAMO

$$\phi_y^{\tau} \circ \phi_x^{\sigma} = \phi_x^{\sigma} \circ \phi_y^{\tau} + O(k^{-3})$$

BASTA RICORDARE ~~GLI~~ LO SVILUPPO DI Δ_1 E USARE $f_i = \pi_i$

MANCA ts PERCHÈ $L_{[x,y]} = 0$

SIA L UNA COSTANTE DI LIP. PER I CAMPI X e Y

(È LECITO FARLO IMMAGINANDO I CAMPI COME FUNZIONI C^1 E QUINDI DEFINITE LOCALMENTE SONO LIP. CON COSTANTE L DOVE L È IL MAX TRA TUTTE LE COSTANTI DI TUTTE LE COMP. DI X e Y.)

IDEA DELLA DIM: $\phi_y^{\tau} \circ \dots \circ \underbrace{\phi_y^{\tau} \circ \phi_x^{\sigma}}_{\substack{\downarrow \\ \text{VOGLIO SCAMBIARE PER PORTARE TUTTO A SINISTRA.}}} \circ \dots \circ \phi_x^{\sigma}$

VOGLIO FAR VEDERE CHE OGNI SCAMBIO MI COSTA $\frac{1}{k^3}$ E MA GLI SCAMBI SONO k^2 QUINDI ALLA FINE LA DIFFERENZA È DI $\frac{1}{k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$$\phi_y^{(k-1)\tau} \circ \phi_y^{\tau} \circ \phi_x^{\sigma} \circ \phi_x^{(k-1)\sigma} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{DA VEDERE}}}{=} \phi_y^{(k-1)\tau} \circ \phi_x^{\sigma} \circ \phi_y^{\tau} \circ \phi_x^{(k-1)\sigma} + \vartheta\left(e^{2(k-1)\tau} k^{-3}\right)$$

$\dot{x} = Y(x)$ L COSTANTE DI $\phi_y^t(x)$ FLUSSO

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_y^t(x) = Y\left(\phi_y^t(x)\right) \quad e \quad A(t) = \frac{\partial \phi_x^t(x)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A = \frac{\partial Y}{\partial x}\left(\phi_y^t(x)\right) \cdot A \Rightarrow \|A(t)\| \leq C\, e^{Lt}$$

TEOREMA DI LIOUVILLE-ARNOLD (SI PUÒ MORIRE)

SIA $M \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ APERTO CON $(p,q) \in M$ $p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^n$

SIANO $F_1, \dots, F_n$ FUNZIONI DA $M \to \mathbb{R}$ REGOLARI QUANTO BASTA E A 2 A 2 IN INVOLUZIONE $\{F_i, F_j\} = 0 \quad \forall i \neq j$

SIA $f \in \mathbb{R}^n$ DENOTIAMO

$$M_f = \{(p,q) \in M : F_1(p,q) = f_1, \dots, F_n(p,q) = f_n\}$$

SUPPONIAMO CHE GLI F_i SIANO INDIPENDENTI SU M_{f^*} PER UN OPPORTUNO f^*, OVVERO

$$\mathrm{rg}\, \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)} = n$$

ALLORA:

i) M_{f^*} È UNA SOTTOVARIETÀ DI $\mathbb{R}^{2n}$ DI DIMENSIONE n INVARIANTE PER GLI n FLUSSI HAMILTONIANI $\phi^t_{X_{F_j}}$ $\forall j = 1, \dots, n$

ii) SE M_{f^*} È CONNESSA (O CI SIAMO RESTRETTI AD UNA COMP. CONNESSA) E COMPATTA ALLORA È DIFFEOMORFA AL TORO $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$

↳ IP. IMPORTANTE

SE INVECE NON È COMPATTA, MA I FLUSSI SI PROLUNGANO TUTTI FINO AD $\mathbb{R}$ ALLORA È DIFFEOMORFA AL CILINDRO $C^{k,n-k} = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ PER k COMPRESO TRA 0 E n

iii) NEL CASO COMPATTO, CONNESSO ESISTE UN INTORNO $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ DI f^* TALE CHE $M_{\mathcal{F}} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} M_f$ ("INTORNO TUBOLARE" DI M_{f^*})

È DIFFEOMORFO A $\mathcal{F} \times M_{f^*}$; IN $M_{\mathcal{F}}$ ESISTONO COORDINATE CANONICHE DI AZIONE-ANGOLO (I, φ)

CON $I \in \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ E $\varphi \in \mathbb{T}^n$, CON $I = I(f)$ E $\mathcal{B} = I(\mathcal{F})$

TALI CHE $(p,q) = \mathcal{C}(I, \varphi)$ IL PULL-BACK $F_i' = F_i \circ \mathcal{C}$ È FUNZIONE DELLE SOLE AZIONI $F_i'(I, \varphi) = f_i(I)$

DIM i) L'IPOTESI SUL RANGO CI DÀ LA DIMENSIONE RICHIESTA PER LA VARIETÀ.

INOLTRE $\mathcal{L}_{X_{F_i}} F_j = \{F_j, F_i\} = 0$

QUINDI SE FISSIAMO j, F_i È UN INTEGRALE PRIMO PER X_{F_j}

ALLORA LUNGO LE QUOTE RIMANGO COSTANTE SU f_i^* SEGUENDO IL FLUSSO $\phi_{X_{F_j}}$ OVVERO RIMANE INVARIANTE M_{f^*}.

DIM ii) OSSERVIAMO CHE GLI X_{F_i} SONO IND. SU M_{f^*}

INFATTI $X_{F_j} = J \underbrace{\nabla F_j}$ SONO LE RIGHE DELLA MATRICE

$$\frac{\partial(F_1, \_\_, F_n)}{\partial(p,q)}$$ CHE HA RANGO n PER IPOTESI

QUINDI POICHÉ J È SOLO UNA ROTAZIONE (QUINDI INVERTIBILE) GLI X_{F_j} SONO INDIPENDENTI.

INOLTRE $[X_{F_i}, X_{F_j}] = -X_{\{F_i, F_j\}} = 0$ QUINDI COMMUTANO.

~~ALLORA~~

OSSERVIAMO CHE GRAZIE AL PUNTO 1), POICHÉ I FLUSSI SI MUOVONO SU M_{f^*} ALLORA I CAMPI SONO TANGENTI A M_{f^*}.

PASSIAMO QUINDI ALLA DIMOSTRAZIONE DEL SEGUENTE

LEMMA: SIA N UNA VARIETÀ n-DIMENSIONALE CONNESSA.

SE $\exists X_i$ $i=1, \_, n$ CAMPI TANGENTI, LIN. INDIPENDENTI e CHE COMMUTANO A 2 A 2 $[X_i, X_j] = 0$ e I LORO FLUSSI $\phi_{X_i}^t$ SI ESTENDONO A TUTTO $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists k$ $0 \le k \le n$ TALE CHE $N \underset{\text{DIFFEOMORFA}}{\simeq} \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

DIM LEMMA:

SIA $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\phi^\tau : N \longrightarrow N \qquad \phi^\tau = \underbrace{\phi_{X_m}^{\tau_m} \circ \dots \circ \phi_{X_1}^{\tau_1}}_{\text{I FLUSSI COMMUTANO POICHÉ COMMUTANO I CAMPI}}$$

$\left(\{\phi^\tau, \tau \in \mathbb{R}^m\}, \circ\right)$ È UN GRUPPO A m PARAMETRI (τ_i) DI DIFFEOMORFISMI DI M (DA VERIFICARE)

QUINDI ABBIAMO UN'AZIONE DI $\mathbb{R}^m$ SULLA VARIETÀ N DATA DA

$$N \times \mathbb{R}^m \longrightarrow N$$
$$(x, \tau) \longrightarrow \phi^\tau(x) \in N$$

PER $y \in N$ FISSATO DEFINIAMO $\Psi_y : \mathbb{R}^m \longrightarrow N$

$$\tau \longrightarrow \Psi_y(\tau) = \phi^\tau(y)$$

Ψ_y È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE, IN PARTICOLARE MANDA $U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ (INTORNO DI $\tau = 0$) IN $V_y \subseteq N$ INTORNO DI y

MOSTRIAMO CHE È UN DIFFEO LOCALE.

VEDIAMO CHE $\dfrac{\partial \Psi_y}{\partial \tau_j}(\tau) = X_j(\Psi_y(\tau))$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_j} \Psi_y(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_j}\left(\phi_m^{\tau_m} \circ \dots \circ \phi_1^{\tau_1}(y)\right) \overset{\text{I FLUSSI COMMUTANO}}{=}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau_j}\Big[\phi_j^{\tau_j}}_{\text{USANDO LA DERIVATA DEL FLUSSO.}} \circ \left(\phi_m^{\tau_m} \circ \dots \circ \phi_{j+1}^{\tau_{j+1}} \circ \phi_{j-1}^{\tau_{j-1}} \circ \dots \circ \phi_1^{\tau_1}(y)\right)\Big] =$$

$$= X_j\left(\phi^\tau(y)\right) = X_j\left(\Psi_y(\tau)\right)$$

DA CUI $\dfrac{\partial \Psi_y(0)}{\partial \tau_j} = X_j(y)$

$$\phi^0(y) = y$$

I CAMPI X_j SONO IND. QUINDI $\dfrac{\partial \Psi_y}{\partial \tau}$ HA RANGO m E QUINDI

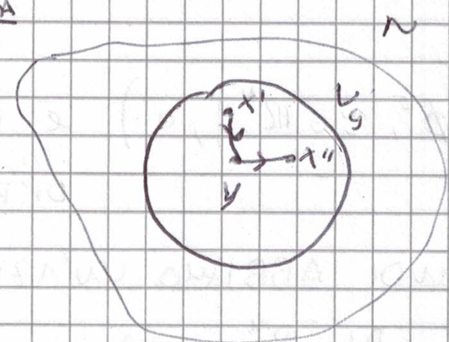
HO IL DIFFEO LOCALE

DATI x' e $x'' \in V_y \subseteq N$ $\exists\ \tau \in \mathbb{R}^n$ tc $\phi^{\tau}(x') = x''$

INFATTI $\exists\ \tau'$ tc $\phi^{\tau'}(y) = x'$ e τ'' tc $\phi^{\tau''}(y) = x''$

$\Rightarrow x'' = \phi^{\tau''-\tau'}(x')$

IDEA

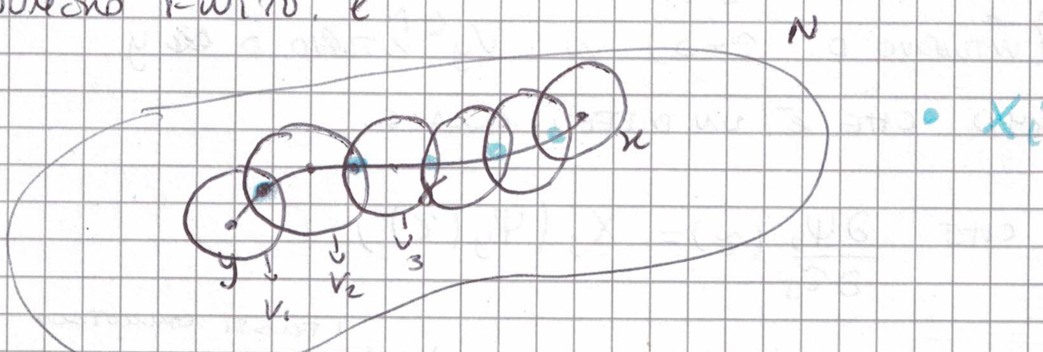


ADESSO MOSTRO CHE Ψ_y È SURIETTIVA

SIA $x \in N$ e γ UNA CURVA IN N CHE COLLEGA y CON x.

$\forall\ y' \in \gamma$ ESISTE UN INTORNO $V_{y'}$ COSTRUITO COME PRIMA PER ~~Ψ~~ y.

γ È COMPATTA QUINDI POICHÉ I $V_{y'}$ RICOPRONO γ NE BASTA UN NUMERO FINITO, ℓ



ALLORA SI PRENDO $x_i \in V_i \cap V_{i+1}$ E SI COSTRUISCE

$$y = x_0, x_1, \dots, x_\ell = x$$

QUINDI PER IL PUNTO PRECEDENTE ~~...~~ V_i $\exists\ \tau_i$ tc

$\phi^{\tau_i}(x_i) = x_{i+1}$ $i = 0, \dots, \ell-1$ CHIAMANDO $\tau = \tau_0 + \dots + \tau_{\ell-1}$

SI HA $\phi^{\tau}(y) = \Psi_y(\tau) = x$ PER ARBITRARIETÀ DI x SI HA LA SURIETTIVITÀ.

Se $\Psi_y(\tau)$ è ~~SURIETTIVA~~ ANCHE INIETTIVA (QUINDI BIETTIVA) CONCLUDO SUBITO PERCHÉ $N \simeq \mathbb{R}^n$

VEDIAMO SE $\Psi_y(\tau)$ NON È ~~[illegible]~~ BIETTIVA.

CHIAMO $\mathcal{T}_y = \{\tau \in \mathbb{R}^n : \Psi_y(\tau) = y\}$

INSIEME DEI PERIODI DI y

E VOGLIO VEDERE CHE È ~~DISCRETO~~

UN SOTTOGRUPPO DI $\mathbb{R}^n$ (ADDITIVO E DI FACILE VERIFICA)

- DISCRETO
- INDIPENDENTE DA y (ECCO PERCHÈ L'ABBIAMO CHIAMATO $\mathcal{T}$ E NON $\mathcal{T}_y$)

SICURAMENTE I PERIODI NON SI ACCUMULANO A ZERO DATO CHE Ψ_y È UN DIFFEO LOCALE. MA I PERIODI NON SI POSSONO NEANCHE ACCUMULARE ALTROVE PERCHÈ ALLORA ESISTEREBBERO τ' E τ'' ARBITRARIAMENTE VICINI E $\tau' - \tau'' \in \mathcal{T}$ (PERCHÈ È UN GRUPPO) MA $\tau' - \tau''$ È ARBITRARIAMENTE VICINO A 0 E QUINDI NON È POSSIBILE. QUINDI $\mathcal{T}$ È DISCRETO

DIMOSTRIAMO L'INDIPENDENZA DA y DIMOSTRANDO CHE SE τ È UN PERIODO DI y LO È ANCHE DI x GENERICO IN N.

INFATTI PER SURIETTIVITÀ DI Ψ_y $\exists \sigma$ t.c. $\cancel{\phi}\, \Psi_y(\sigma) = x$

$$\Rightarrow \phi^\tau(x) = \phi^\tau \circ \phi^\sigma(y) \underset{\uparrow}{=} \phi^\sigma \circ \phi^\tau(y) = \phi^\sigma(y) = x$$

I FLUSSI COMMUTANO PERCHÈ COMMUTANO I CAMPI

CONSIDERO QUINDI IL QUOZIENTE

$$\tilde{N} = \mathbb{R}^n / \mathcal{T}$$

E IL SEGUENTE DIAGRAMMA

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\Psi_y"] \arrow[d, "/\mathcal{T}"'] & N \\
\tilde{N} \arrow[ur, "\tilde{\Psi}_y"'] &
\end{tikzcd}$$

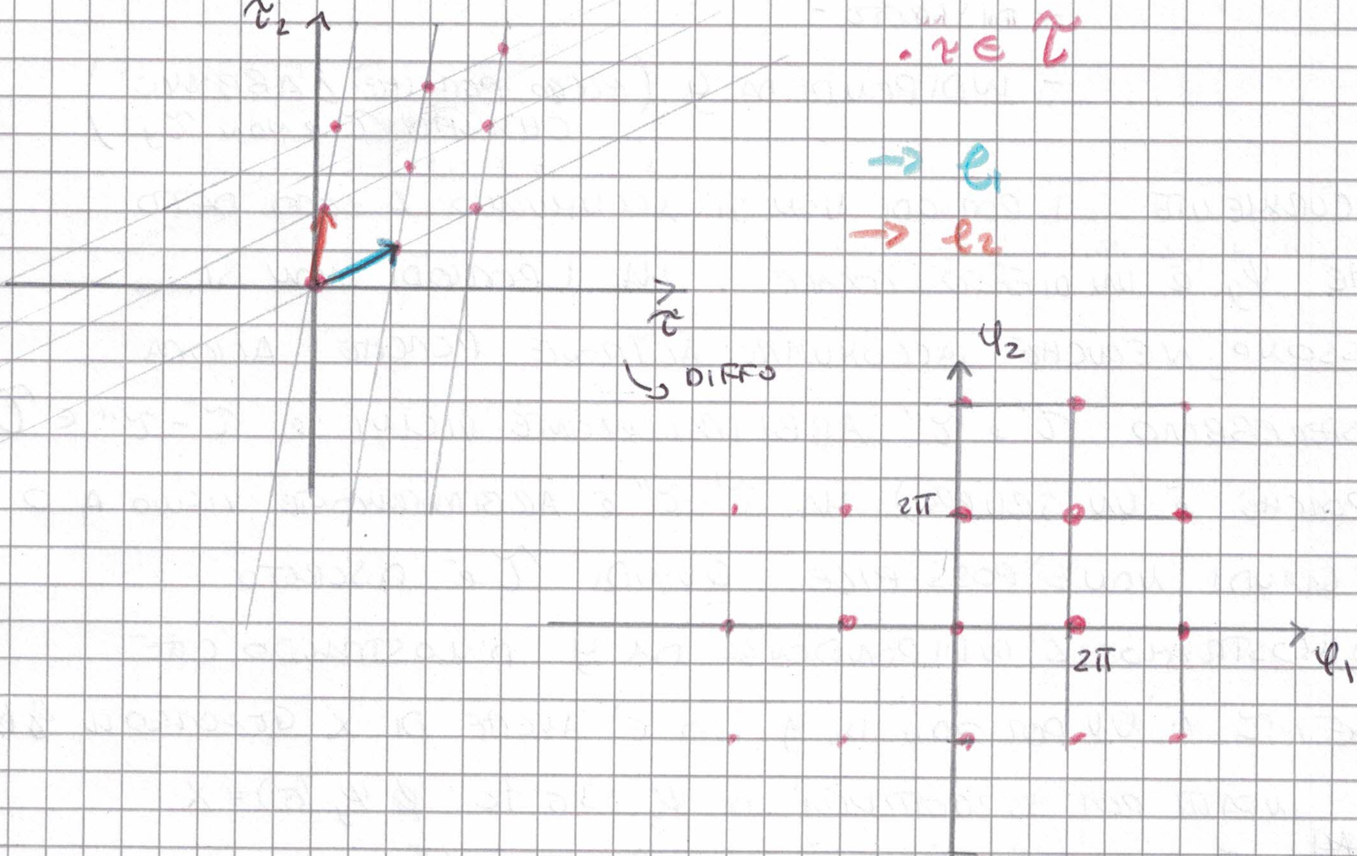
$\tilde{\Psi}_y$ = DIFFEOMORFISMO.

LEMMA (NO DIM)

SE $\mathcal{T}$ È UN SOTTOGRUPPO DISCRETO DI $\mathbb{R}^n$ ALLORA
$\exists\ e_1, \dots, e_k \in \mathcal{T}$ LINEARMENTE INDIPENDENTI TC

$$k \leq n \quad e \quad \mathcal{T} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} m_i e_i \ : \ m_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

IDEA IN ~~...~~ $k = n = 2$ COME CONCLUDERE



SE $k < n$ ALLORA COMPLETO $e_1, \dots, e_k$ DEL LEMMA CON $e_{k+1}, \dots, e_n$
A BASE DI $\mathbb{R}^n$

CONSIDERO ADESSO IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \varphi_j e_j \qquad \text{OVVERO} \qquad \tau = \frac{1}{2\pi} T \cdot \varphi$$

DOVE $(T)_{ij} = (e_j)_i$ PRENDENDO I φ_i MULTIPLI INTERI DI 2π $i \leq k$
SI OTTENGONO I τ e ~~...~~ MENTRE $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n$ SONO NULLI
e T È CHIAMATA MATRICE DEI PERIODI INFATTI T_{ij} CI DICE
QUANTO AVANZA τ_i QUANDO φ_i e $i \leq k$ AVANZA DI 2π.

QUINDI NELLE NUOVE COORDINATE IL GRUPPO τ DIVENTA

$$\cancel{(2\pi\mathbb{Z})^k}\quad (2\pi\mathbb{Z})^k \quad \text{E} \quad \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^k = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = C^{k,n-k}$$

ALLORA IL SEGUENTE DIAGRAMMA CONCLUDE

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n_{(\varphi)} \arrow[r, "\frac{1}{2\pi}T"] \arrow[d, "(2\pi\mathbb{Z})^n"'] & \mathbb{R}^n_{(\tau)} \arrow[r, "\Psi_y"] \arrow[d, "\tilde{\tau}"] & N \\
C^{k,n-k} \arrow[r, "\tilde{T}", "\sim"'] & \tilde{N} \arrow[ur, "\tilde{\Psi}_y", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ DIFFEO CERCATO

IL DIFFEOMORFISMO EVIDENZIATO È QUELLO CERCATO.

SE INVECE N FOSSE CONNESSA $\Rightarrow k = n$ (PERCHÉ $C^{n,n-k}$ NON È COMPATTA SE $k < n$) E QUINDI $N \simeq \mathbb{T}^n$.

<u>PASSIAMO A DIMOSTRARE IL PUNTO iii)</u>

NEL CASO M_{f^*} CONNESSA E COMPATTA $\quad M_{f^*} \cong \mathbb{T}^n$

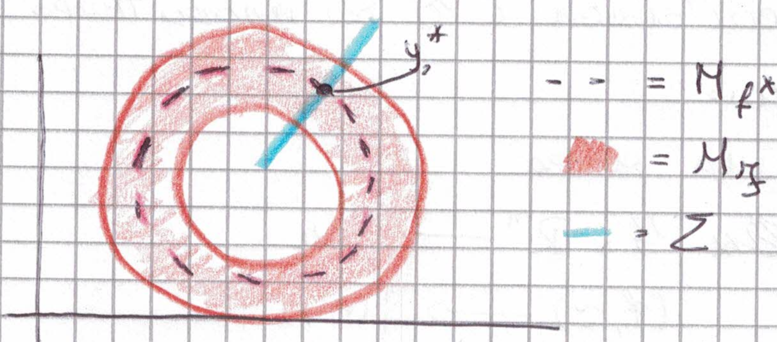
ALLORA $\exists\ \mathcal{J}$ INTORNO DI f^* IN $\mathbb{R}^n$ TALE CHE

$$M_{\mathcal{J}} = \bigcup_{f \in \mathcal{J}} M_f \underset{\substack{\downarrow \\ \text{DIFFEOMORFA}}}{\simeq} \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n$$

E LI ESISTONO COORDINATE CHIAMATE AZIONE ANGOLO (I, φ).

CON $I = I(f)$ FUNZIONI INVERTIBILI

<u>IDEA</u>



PRENDIAMO Σ SUPERFICIE n DIMENSIONALE TRASVERSA A M_{f^*} IN UN PUNTO y^*, SE $\mathcal{J}$ LO PRENDO SUFF. PICCOLO ALLORA Σ INTERSECA $M_{\mathcal{J}}$ IN UN SOLO $y = y(f)$.

POICHÈ $M_f \subset \mathbb{R}^{2n}$ PER PARAMETRIZZARE Σ SERVONO n EQUAZIONI $\sigma_i(x)=0$ CON $i=1,\dots,n$ PER PARAMETRIZZARLA.
RICORDANDO CHE LE EQUAZIONI DI M_f SONO DEL TIPO
$F_i(x) = f_i$ QUINDI LA CONDIZIONE DI TRASVERSALITÀ SI SCRIVE

$$\det \frac{\partial (F,\sigma)}{\partial x}(y^*) \neq 0$$

QUESTO CI PERMETTE DI USARE IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE OVVERO $\exists!\ x = \xi(f,s)$ TC $F(\xi(f,s)) = f_i$ e $\sigma_i(\xi(f,s)) = s_i$
SI PONE QUINDI $y(f) = \xi(f,0)$ $\left(\sigma_i(y(f))=0\right)$ E LA CONDIZIONE DI TRASVERSALITÀ SI CONSERVA PER ~~...~~ CONTINUITÀ E Σ ASSUME LA FORMA PARAMETRICA $y = y(f)$.
INOLTRE A PATTO DI RESTRINGERE ULTERIORMENTE $\mathcal{F}$ POSSO SUPPORRE CHE LA CONDIZIONE CHE

$$rg \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)} = n \quad \text{VALGA SU TUTTO } M_f$$

COSÌ SU M_f POSSO FARE LA STESSA COSTRUZIONE DI PRIMA OTTENENDO COSÌ NUOVE COORDINATE (f,τ) DOVE f GIOCA IL RUOLO DELL'ENERGIA E τ DEL ~~PERIODO~~ TEMPO NEL CASO DEL PENDOLO.
COSTRUIAMO COSÌ UNA MAPPA

$$W : \mathcal{F} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M_f$$
$$(f,\tau) \longrightarrow (p,q)$$

e $W(f,\tau) = \phi^\tau(y(f))$ IN MODO TALE CHE SIA PERIODICA IN τ e ~~...~~ E HA COME PERIODI GLI ELEMENTI DI $T(f)$ DOVE T È LA STESSA COSTRUITA AL PUNTO ii $\forall f$

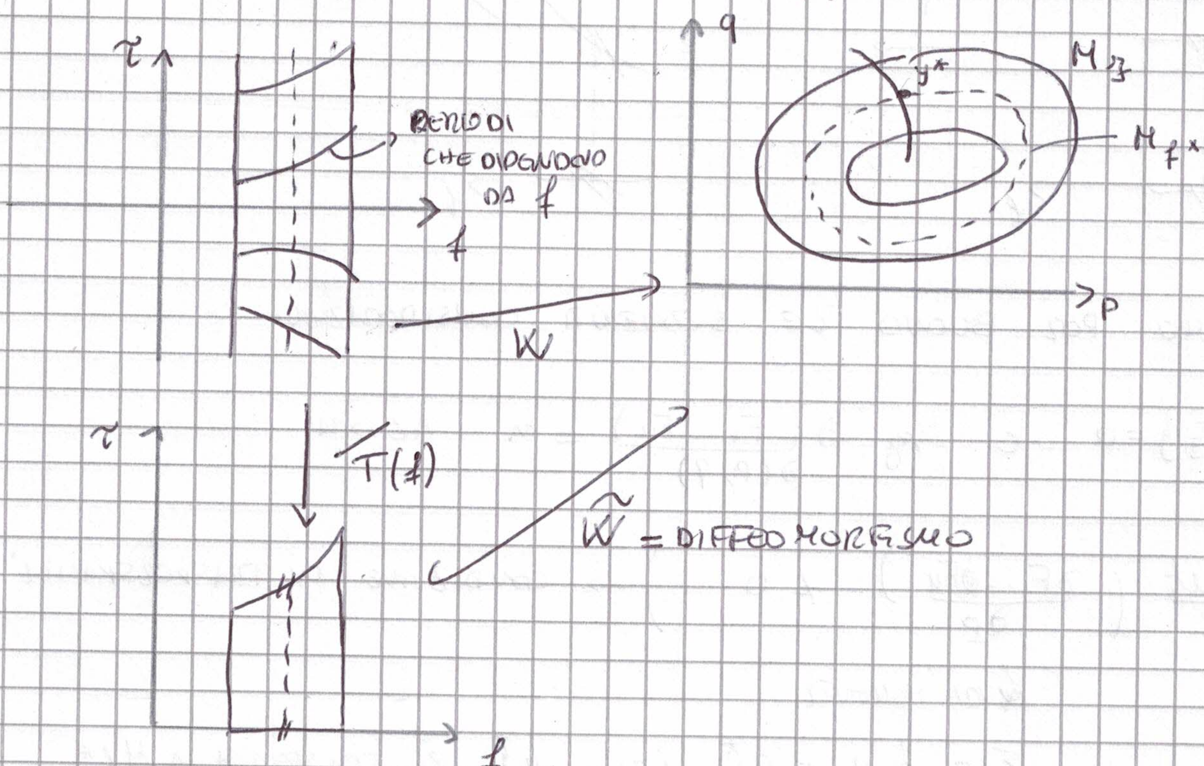
e W È OVVIAMENTE UNA MAPPA SURGETTIVA.

IDEA DI DIM. CHE $W(f,\tau)$ È UN DIFFEO LOCALE.

BASTA VEDERE CHE
$$\frac{\partial W}{\partial \tau}(f,0) = X_{F_i}(y(f))$$
$$\frac{\partial W}{\partial f}(f,0) = \frac{\partial y}{\partial f_j}(f)$$
e
$$\frac{\partial W}{\partial(f,\tau)} = \underbrace{D\phi^{\tau}_{y(f)}}_{\downarrow} \frac{\partial W}{\partial(f,\tau)}(f,0)$$

DERIVATA COVARIANTE OVVERO TANGENTE A ϕ^{τ} IN y QUINDI
$$\frac{\partial \phi^{\tau}}{\partial y}$$

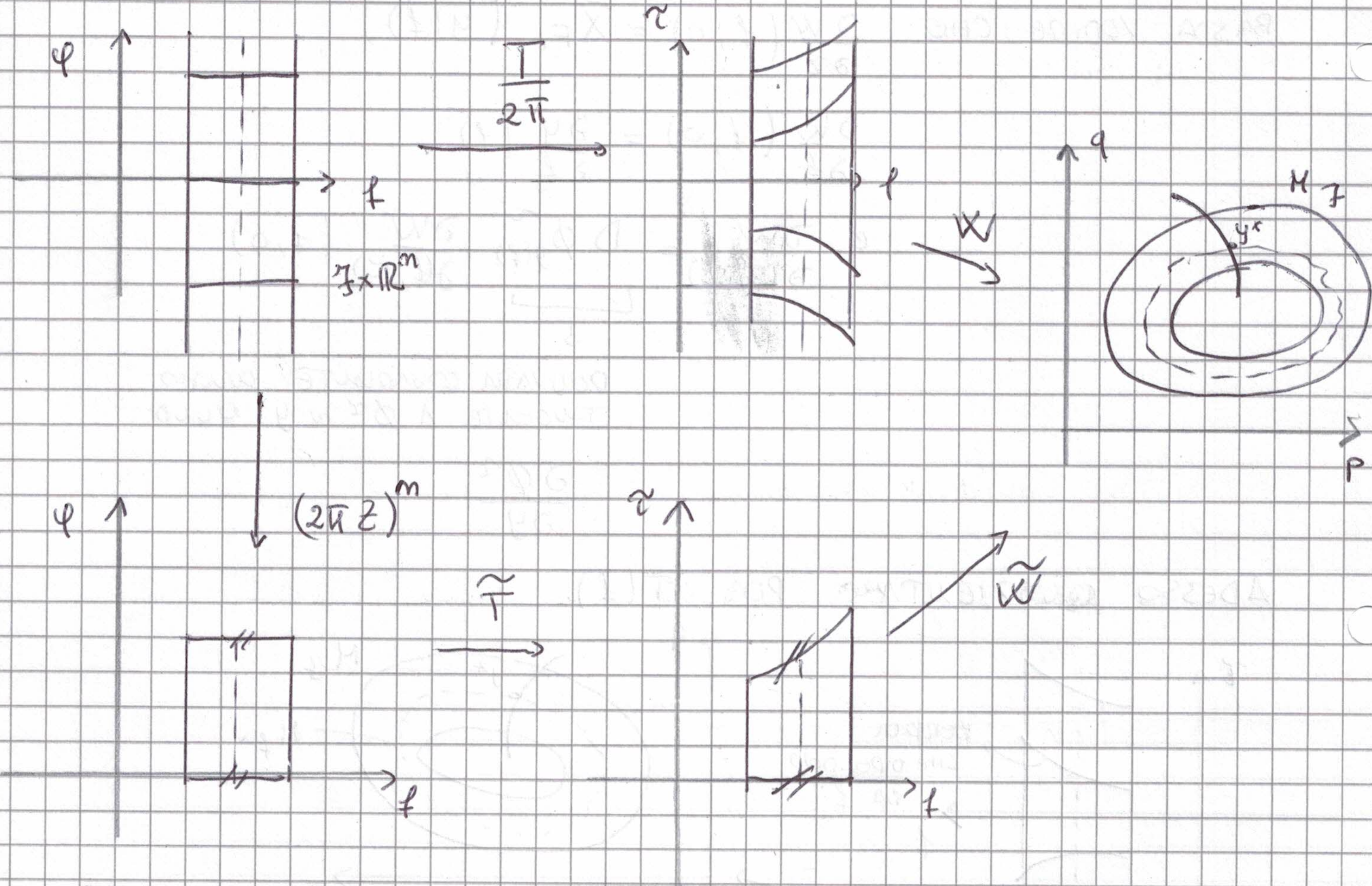
ADESSO QUOZIENTIAMO PER $T(f)$



ADESSO SEGUENDO L'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE DEL PUNTO $xi)$ DEVO NORMALIZZARE I PERIODI PER OTTENERE LE φ MA QUESTO NON È SUFFICIENTE A DIRE CHE LA TRASF. È CANONICA QUINDI DOVREMO MOSTRARE CHE ESISTE UNA PARTICOLARE SCELTA DI Σ CHE LO RENDE POSSIBILE.

DOPODICHÉ RESTA DA FAR VEDERE CHE $\exists$ FUNZIONI I DELLE SOLE f E OTTENERE LE VARIABILI AZIONE ANGOLO.

OVVERO LO SCHEMA COMPLETO DIVENTA



PRENDIAMO PER BUONO LE SEGUENTI CONSIDERAZIONI

DA $\{F_i, F_j\}=0$ e $\text{rg}\,\dfrac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(p,q)} = n$ ALLORA

$$\det\left(\frac{\partial F_1 \dots \partial F_n}{\partial \underline{p}}\right) \neq 0 \Bigg) \rightarrow \text{CONDIZIONE DI TRASVERSALITÀ}$$

RISP. AI MOMENTI

e INOLTRE LA $\Sigma = \{q_i = q_i^*,\ i=1,\dots,n\}$ È TRASVERSA A M_f^*

$$e \quad \frac{\partial(F_1 \dots F_n)}{\partial(p,q)} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial F}{\partial p} & * \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

LEMMA LA FORMA $p\,dq$ È CHIUSA SU TUTTE LE M_f

DIM DALLA TRASVERSALITÀ DI Σ_f (COME ABBIAMO FATTO CON $\xi(f,s)$) ESISTE P TC

$$F_i(P(q,f),q) = f_i \quad *$$

ALLORA PER AVERE LA CHIUSURA

$$\Delta_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} = 0$$

EQUIVALENTEMENTE $\forall\, l, m$

$$\alpha_{l,m} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial p_i}\frac{\partial F_m}{\partial p_j}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} - \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\right) = 0$$

DERIVANDO $*$ SI HA

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial p_i}\frac{\partial P_i}{\partial q_j} + \frac{\partial F_l}{\partial q_j} = 0$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_m}{\partial p_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F_m}{\partial q_i} = 0$$

SOSTITUENDOLE IN α_{lm}

SI OTTIENE

$$\alpha_{lm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial q_i}\frac{\partial F_m}{\partial p_i} - \frac{\partial F_l}{\partial p_i}\frac{\partial F_m}{\partial q_i} \underset{\text{POICHÉ } \{F_l,F_m\}=0}{=} 0$$

LEMMA LA FUNZIONE $S(q,f) = \int_{q^*}^{q} P(q',f)\,dq'$

DOVE L'INTEGRALE È FATTO SU UN QUALSIASI CAMMINO DA q^* A q

È UNA FUNZIONE GENERATRICE.

DIM S È BEN DEFINITA POICHÉ LA CHIUSURA DELLA FORMA $P\,dq$ MI DÀ L'INVARIANZA PER IL TRAGITTO.

INOLTRE $\det \frac{\partial^2 S}{\partial f\,\partial q} = \det \frac{\partial P}{\partial f} \neq 0$

È L'INVERSA DI $\frac{\partial F}{\partial p}$ E AVEVAMO CHIESTO AVESSE $\det \neq 0$.

QUINDI

OSS IL TRASPOSTO SALTA FUORI DAL PRODOTTO SCALARE

$$p = P(q, f) \quad e \quad g = \int_{q^*}^{q} \left(\frac{\partial P}{\partial f}\right)^T (q', f)\, dq'$$ DEFINISCONO IMPLICITAMENTE

$Z : (p, q) \to (f, g)$. SE MOSTRO CHE $\boxed{\tau = g}$ (NON ANCORA)

ALLORA $Z = W^{-1}$ ALMENO LOCALMENTE.

RESTA DA VEDERE CHE

$W : (f, \tau) \longrightarrow (p, q)$ È OVUNQUE CANONICA.

PER FARLO PRENDIAMO UN GENERICO PUNTO $(\bar{f}, \bar{\tau})$ E MOSTRIAMO CHE UN INTORNO U DI TALE PUNTO VIENE MANDATO CANONICAMENTE IN $V = W(U) \subseteq M_f$ CHE A SUA VOLTA È INTORNO DI $(\bar{p}, \bar{q}) = W(\bar{f}, \bar{\tau})$

PRENDIAMO $U = A^{\bar{\tau}}(U^*)$ DOVE $A^{\bar{\tau}}$ È LA TRASLAZIONE DI $\bar{\tau}$

$A^{\bar{\tau}}(f, \tau) = (f, \tau + \bar{\tau})$ E $V = \phi^{\bar{\tau}}(V^*)$ IL MOVIMENTO DI V^* SEGUENDO IL FLUSSO $\phi^{\bar{\tau}}$ (CHE È UNA TRASF. CANONICA) E ANCHE $A^{\bar{\tau}}$ È UNA TRASF CANONICA.

CONSIDERIAMO IL DIAGRAMMA

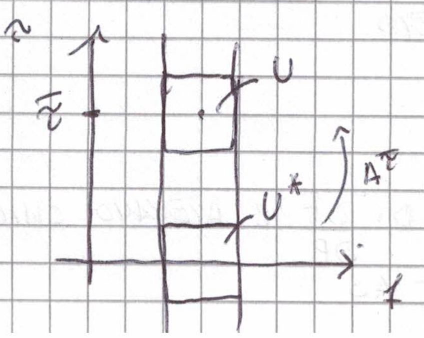
LOC. CANONICA DAL LEMMA PREC.

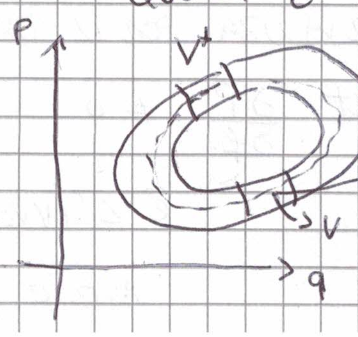
$$\begin{array}{ccc} U^* & \xrightarrow{W^*} & V^* \\ \downarrow A^{\bar{\tau}} & & \downarrow \phi^{\bar{\tau}} \\ U & \xrightarrow[W]{} & V \end{array}$$

$\Rightarrow W = \phi^{\bar{\tau}} \circ W^* \circ (A^{\bar{\tau}})^{-1}$

E QUINDI È COMP. DI TRASF CANONICHE

QUINDI È CANONICO





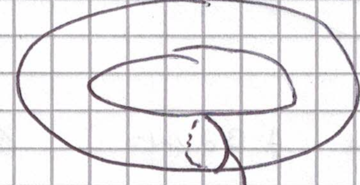
POSSIAMO ADESSO DEFINIRE LE VARIABILI AZIONE-ANGOLO.

$$\tau = \frac{1}{2\pi} T(f)\,\varphi$$ ✓ GIÀ VISTA LA COSTRUZIONE

con $T(f)$ MATRICE DEI PERIODI

e $I = I(f)$ DOVE $I_i(f) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i(f)} p\,dq$

OSS LA CHIUSURA DI $p\,dq$ CI DÀ LA BUONA DEFINIZIONE.



$\gamma_i(f)$ è UN CICLO CHE FA VARIARE SOLO DI 2π LA φ_i.

QUINDI $\varphi = 2\pi\, T^{-1}(f)\,\tau$

LEMMA:

$$(*) \begin{cases} I = I(f) \\ \tau = \frac{1}{2\pi} T(f)\,\varphi \end{cases} \qquad \text{se } \frac{\partial I}{\partial f} = \frac{1}{2\pi} T^T(f)$$

ALLORA $(*)$ È CANONICA.

DIM VEDIAMO CHE $(*)$ È GENERATA DA $S(f,\varphi) = I(f)\,\varphi$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = I(f) \quad e \quad \frac{\partial S}{\partial f} = \left(\frac{\partial I}{\partial f}\right)^T \varphi \underset{\text{IPOTESI}}{=} \frac{1}{2\pi} T(f)\,\varphi = \tau$$

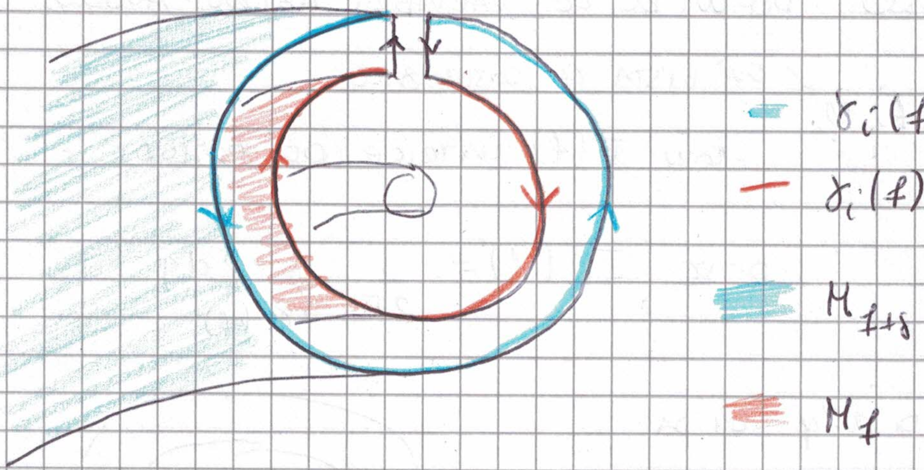
e OVVIAMENTE $\det \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial f} \neq 0$

ALLORA RESTA DA VERIFICARE CHE NEL NOSTRO CASO VALE LA CONDIZIONE DEL LEMMA.

PRENDIAMO QUINDI UN PICCOLO INCREMENTO δ E VEDIAMO

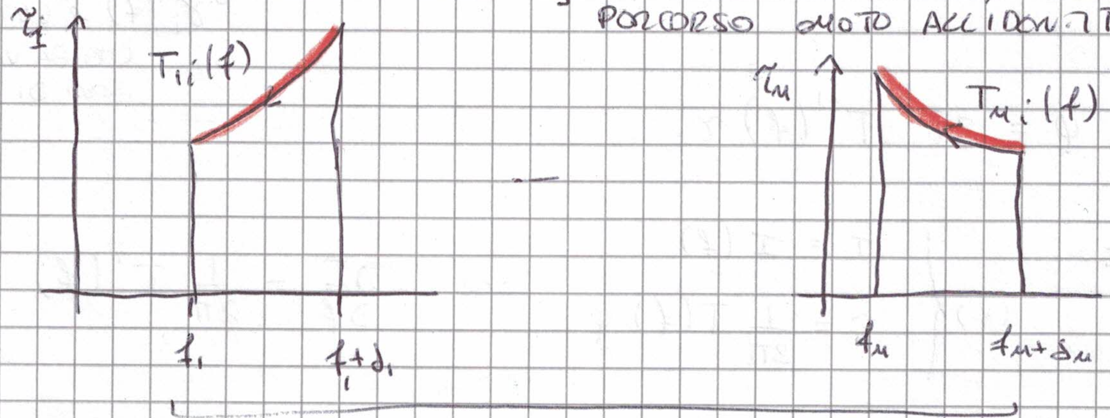
$$2\pi\left[I(f+\delta) - I(f)\right] =$$

$$= 2\pi \underbrace{\oint_{\gamma_i(f+\delta)} p\,d}_{\text{su } M_{f+\delta}} - \underbrace{\oint_{\gamma_i(f)} p\,dq}_{\text{su } M_f}$$



IN FIGURA ABBIAMO $\Gamma_i^{f,f+\delta} = \gamma_i(f+\delta) - \gamma_i(f)$

PERCORSO OMOTO ALL'IDENTITÀ.



IMMAGINI DEI CORR. CICLI DELLE COMPONENTI $\tilde{\Gamma}_{ij}^{f,f+\delta}$ NELLE VARIABILI (f_i, τ_i)

ADESSO RICORDANDO CHE W È CANONICA SI HA PER LA CONDIZIONE DI LIE CHE

$$p \cdot dq - f \cdot d\tau \text{ È CHIUSA}$$

QUINDI IL SUO INTEGRALE SU $\Gamma_{ij}^{f,f+\delta}$ CHE È OMOTOPA ALL'IDENTITÀ È NULLO QUINDI

$$2\pi\left[I_i(f+\delta) - I_i(f)\right] = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\tilde{\Gamma}_{ij}^{f,f+\delta}} f_j \, d\tau_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \text{Area}\left(\tilde{\Gamma}_{ij}^{f,f+\delta}\right)$$

ORA POICHÈ L'UNICO LATO NON NULLO DI QUELL'INTEGRALE È QUELLO SU $T_{ji}(f)$ ~~PERCORRE~~

PER CALCOLARE

$$2\pi \frac{\partial I_i}{\partial \delta_\ell}(f) = \lim_{\delta_\ell \to 0} \frac{1}{\partial \ell_2} \int_{f_\ell}^{f_\ell+\delta_\ell} T_{\ell_i}(f)\, d\ell_i = T_{ie}(f)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial f} = \frac{1}{2\pi} T(f)$$ E QUINDI VALE IL LEMMA E QUESTO

CONCLUDE LIOUVILLE-ARNOLD.

INTEGRALI PRIMI

RICORDIAMO ALCUNI ESEMPI NEL FORMALISMO LAGRANGIANO.

1) SE q_j È CICLICA IN $\mathcal{L}$ $\Rightarrow$ $P_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$ È ~~[illegible]~~ INTEGRALE PRIMO

2) SE $\mathcal{L}$ NON DIPENDE DA t $\Rightarrow$ $E(q, \dot q) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} \cdot q - \mathcal{L}$ È L'INTEGRALE DI JACOBI.

CONSIDERIAMO U $\left(= \mathbb{R}^n \text{ O APERTO DI } \mathbb{R}^n \right)$ E G UN GRUPPO $\left(= \mathbb{R} \text{ O } S^1 \right)$

$\varphi : U \times G \longrightarrow U$ UN'AZIONE DI G SU U

IN MODO TALE CHE $\varphi_\alpha : U \longrightarrow U$ $\alpha \in G$ SIA UN DIFFEOMORFISMO

TALE CHE $\varphi_0 = Id$

$\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$ (PROP. DI SEMIGRUPPO).

ALLORA:

<u>DEF</u>: IL GENERATORE INFINITESIMO DELL'AZIONE $\varphi_\alpha(q) = \varphi(q, \alpha)$
$\alpha \in G$ e $q \in U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\xi(q) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(q, 0)}$$

OSSERVIAMO CHE $\varphi_\alpha(q)$ È IL ~~F~~ FLUSSO DEL SUO GENERATORE INFINITESIMO

INFATTI $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(q, \alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(q, \alpha+h) - \varphi(q, \alpha)}{h} \overset{\text{PROP. DI SEMIGRUPPO}}{=}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(\varphi(q,\alpha), h) - \varphi(\varphi(q,\alpha), 0)}{h} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\varphi(q,\alpha), 0) = \xi(\varphi(q,\alpha))$$

INOLTRE $\varphi(q, 0) = Id(q)$ E QUINDI HO CHE È UN FLUSSO.

TEOREMA DI NOETHER

Sia $q \to Q = \varphi_\alpha(q)$ UNA FAMIGLIA DI DIFFEOMORFISMI AD UN PARAMETRO

$$(q, \dot q) \to (Q, \dot Q) = \left(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q) \cdot \dot q \right)$$

SOLLEVAMENTO AI VETTORI VELOCITA' NEL FORMALISMO LAGRANGIANO.

SE $L(q, \dot q, t) = L\left(\varphi_\alpha(q), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(q) \cdot \dot q, t\right) \quad \forall q \dot q t$

(cioè L è INVARIANTE PER φ_α)

ALLORA $I(q, \dot q, t) = \xi(q) \frac{\partial L}{\partial \dot q}(q, \dot q, t)$ è UN INTEGRALE PRIMO PER L.

DIM

L NON DIPENDE DA α

L è INVARIANTE PER φ_α

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \alpha}(q, \dot q, t)\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}\left(\varphi(q,\alpha), \frac{\partial \varphi}{\partial q}(q,\alpha)\dot q, t\right)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q}\underbrace{(q, \dot q, t)}_{\alpha=0}\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}}_{\xi(q)} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\underbrace{(q, \dot q, t)}_{\alpha=0} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial \alpha}(q, 0) \cdot \dot q}_{\dot \xi(q)} =$$

ASSUMENDO DI FARE IL CONTO LUNGO SOLUZIONI DI EULERO LAGRANGE $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q, \dot q, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q}(q, \dot q, t) \cdot \dot\xi(q) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q, \dot q, t) \cdot \xi(q) \right) = 0.$$

DOMANDA: DATA L INVARIANTE PER φ_α POSSIAMO TROVARE COORDINATE Q TALE CHE L NELLE NUOVE COORD. ABBIA UNA VARIABILE CICLICA?

RISPOSTA: AFFERMATIVA QUASI SEMPRE.

PROP sia $\dot{x} = F(x)$ e $\phi^t(x)$ il suo flusso.

E siano $y = U(x)$ un cambio di coordinate

e $\dot{y} = G(y)$ con $G = \left(\frac{\partial U}{\partial x} F\right) \circ U^{-1}$

ALLORA $\psi^t(y) = U \circ \phi^t \circ U^{-1}(y)$ è flusso della nuova equazione.

DIM $F = \left[\frac{\partial U}{\partial y}^{-1} \circ G\right] \circ U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{-1} G \circ U$

$$\frac{d}{dt} \psi^t(y) = \frac{d}{dt}\left(U \circ \phi^t \circ U^{-1}\right)(y) =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\left(\phi^t \circ U^{-1}(y)\right) \frac{d}{dt}\left[\phi^t \circ U^{-1}(y)\right] =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\left(\phi^t \circ U^{-1}(y)\right) F\left(\phi^t \circ U^{-1}(y)\right) =$$

$F = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{-1} G \circ U$

$$= \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial x}}\right)\left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial x}}\right)^{-1}\left(G \cancel{\frac{\partial U}{\partial x}} \circ U^{-1}\right) \left(\phi^t \circ U^{-1}(y)\right) =$$

$$= G \circ U \circ \phi^t \circ U^{-1}(y) = G\left(\psi^t(y)\right)$$

TEOREMA DI RETTIFICAZIONE DEL FLUSSO

Sia ϕ_x^t flusso di $\dot{x} = F(x)$, supponiamo $\exists \bar{x}$ tc $F(\bar{x}) \neq 0$

ALLORA esiste un cambiamento di coord. locale

$x \to U(x) = y$ tc

1) $U^{-1} \circ \psi^t(y) = \phi^t \circ U^{-1}(y)$

2) $\psi^t(y) = y + t e_1$

$\downarrow$

lineare rispetto solo alla prima componente.

DIM ASSUMIAMO CHE $\bar{x} = 0$ (A MENO DI TRASLAZIONE)
E A MENO DI ROTAZIONE CHE $F_1(\bar{x}) \neq 0$

$$w(y) = \phi^{y_1}(0, y_2, \dots, y_n) \quad \text{VOGLIO VEDERE CHE QUESTA È } u^{-1}(y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial w}{\partial y_1}(0) = F(0) \neq 0 \\ \text{se } j > 1 \quad \dfrac{\partial w}{\partial y_j}(0) = e_j \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = \begin{bmatrix} F_1(0) & 0 & & \\ F_2(0) & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ F_n(0) & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

e $\det \dfrac{\partial w}{\partial y} = F_1(0) \neq 0$ PER IPOTESI

$\Rightarrow \exists\, u = w^{-1}$ LOCALMENTE PER IL TEO DI INV. LOCALE.

PONGO $\psi^t(y) = y + t e_1$ E VERIFICHIAMO CHE RISPETTA.

$$w \circ \phi^t(y) = \phi^{t+y_1}(0, y_2, \dots, y_n) \underset{\downarrow}{=} \phi^t \circ w(y)$$

PER LE PROP. DEI SEMIGRUPPI DEI FLUSSI

TORNANDO ALLE LAGRANGIANE

PROP Sia $L(q, \dot{q}, t)$ INVARIANTE PER $\varphi_\alpha(q, \alpha)$
e sia $\bar{q}$ tc $\xi(\bar{q}) \neq 0$ ALLORA ESISTE UN INTORNO U DI $\bar{q}$

E UNA TRASFORMAZIONE $U \ni q \xrightarrow{\psi} Q = \psi(q)$ tc Q_1 SIA CICLICA

in $\mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t) =$

$$= L\left(\psi^{-1}(Q), \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial Q}(Q) \cdot \dot{Q}, t\right)$$

DIM RICORDIAMO CHE $\xi(q) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(q, 0)$ è un CAMPO CON FLUSSO $\varphi_\alpha(q)$. ALLORA PER L'IPOTESI $\xi(\bar{q}) \neq 0$ POSSO USARE IL TEOREMA DI RETTIFICAZIONE DEL FLUSSO E TROVO UN CAMBIAMENTO LOCALE $\psi(q) = Q$ INTORNO A $\bar{q}$ tc

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{NUOVO FLUSSO}}}{\eta_\alpha} = \psi \circ \varphi_\alpha \circ \psi^{-1} \quad e \quad \eta_\alpha(Q) = Q + \alpha e_1$$

ALLORA DOVE HO USATO $Q = \psi(q)$ e l'invarianza in φ_α di $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(Q,\dot{Q},t) \overset{\checkmark}{=} \mathcal{L}\left(\varphi_\alpha(\psi^{-1}(Q)), \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial q}(\psi^{-1}(Q))\left(\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial Q}(Q)\cdot\dot{Q}\right), t\right)$$

$\psi^{-1}\circ\eta_\alpha = \varphi_\alpha \circ \psi^{-1}$ e la sua derivata in ∂Q

$$\overset{\checkmark}{=} \mathcal{L}\left(\psi^{-1}\circ\eta_\alpha(Q), \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial Q}\circ\eta_\alpha(Q)\ \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial Q}(Q)\cdot\dot{Q}, t\right) =$$

$$= \mathcal{L}\left(\eta_\alpha(Q), \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial Q}(Q)\cdot\dot{Q}, t\right) = \mathcal{L}(Q+\alpha e_1, \dot{Q}, t)$$

QUINDI POICHÉ $\mathcal{L}$ è INVARIANTE PER TRASLAZIONE RISPETTO ALLA PRIMA COMPONENTE Q_1 ALLORA Q_1 è CICLICA

SISTEMI INTEGRABILI

METODO DELLE COPPIE DI PETER LAX

LEMMA Sia $t \to U(t) \in M(n,\mathbb{R})$ SOL. DI

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t}(t) = A(t)\,U(t) \\ U(0) = I_d \end{cases} \qquad A(t) \in M(n,\mathbb{R})$$

$U(t)$ è ORTOGONALE $(\in SO(n)) \Leftrightarrow A(t)$ è ANTISIMMETRICA.

DIM

$$\frac{d}{dt}(UU^T) = \dot{U}(t)\,U^T(t) + U(t)\,\dot{U}^T(t) =$$

$$= A\cdot UU^T + UU^TA^T$$

$$\frac{d}{dt}(U^TU) = \dot{U}^TU + U^T\dot{U} = U^TA^TU + U^TAU =$$

$$= U^T(A^T+A)U$$

se U è ORTOGONALE $\Rightarrow U^TU = I \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(U^TU) = U^T(A^T+A)U = 0$

$\Rightarrow A^T + A = 0 \Rightarrow A$ è ANTISIMMETRICA

SE A È ANTISIMMETRICA $\Rightarrow \frac{d}{dt}(U^T U) = 0$

$\Rightarrow U^T U =$ COSTANTE MA $U(0) = I \Rightarrow U^T(t)U(t) = I \quad \forall t$

QUINDI $U(t)$ È ORTOGONALE.

PROP SE U È ORTOGONALE $\Rightarrow$ SPETTRO $(D) =$ SPETTRO $(U^T D U)$

DIM

$$D\xi = \lambda \xi$$

$$U^T D U (U^T \xi) = U^T D(\xi) = \lambda (U^T \cdot \xi)$$

TEO SIA

$$(*) \begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

SUPPONIAMO CHE ESISTANO $L(p,q)$ E $B(p,q)$ MATRICI DI ORDINE m

CON L SIMMETRICA E B ANTISIMMETRICA DALI CHE

LUNGO LE SOL DI $(*)$ $\frac{d}{dt} L(p(t), q(t)) = \underbrace{[B, L]}_{\text{COMMUTATORE}} := BL - LB$

ALLORA GLI AUTOVALORI DI L SONO INTEGRALI PRIMI DEL SISTEMA.

DIM $t \to (p(t), q(t))$ SOL. DEL SISTEMA.

$$B(t) = B(p(t), q(t))$$

E SIA $\begin{cases} \dot{U}(t) = B(t) U(t) \\ U(0) = Id \end{cases} \Rightarrow$ PER IL LEMMA $U(t) \in SO(m)$

DIMOSTRO CHE $L(t) = L(p(t), q(t)) = U(t) L(0) U^T(t)$

E QUINDI LO SPETTRO DI $L(t)$ NON CAMBIA AL VARIARE DI t

QUINDI I SUOI AUTOVALORI SONO COSTANTI LUNGO LE SOLUZIONI.

$$U^T(t) L(t) U(t) = L(0) \quad \text{DERIVO IN } dt$$

$$\dot{U}^T L U + U^T \underbrace{\dot{L}}_{(BL-LB)} U + U^T L \dot{U} =$$

$$= U^T B^T L U + U^T (BL - LB) U + U^T L B U =$$

$$= U^T (\underbrace{(B^T + B)}_{=0} L - LB + LB) U = 0 \Rightarrow U^T L U = \text{COSTANTE} = L(0).$$

TEORIA DELLE PERTURBAZIONI (IN FORMA HAMILTONIANA)

Sia $H_\varepsilon(p,q) = h(p,q) + \varepsilon f(p,q)$

DOVE $h(p,q)$ È UN'HAMILTONIANA DI UN SISTEMA INTEGRABILE.

MI DOMANDO QUANTO DIFFERISCONO I FLUSSI ~~DE~~ DEL SISTEMA INTEGRABILE DA QUELLO PERTURBATO.

OVVERO $\|\phi_\varepsilon^t(p,q) - \phi_0^t(p,q)\|$

NELLE COORDINATE (p,q) LA RISPOSTA È POCO SODDISFACENTE INFATTI:

$$\|\phi_\varepsilon^t(p,q) - \phi_0^t(p,q)\| \leq \varepsilon \cdot C e^{\lambda|t|}$$

DOVE λ È LA COSTANTE DI LIP. DEL CAMPO X_{H_ε} E C È UN'OPPORTUNA COSTANTE POSITIVA.

QUINDI LA MAGGIORAZIONE È DI ORDINE 1 QUANDO

$$e^{\lambda|t|} \sim \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |t| \sim \frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

PROBLEMA: IN QUESTE COORDINATE QUESTO ESPONENZIALE NON È MIGLIORABILE.

MA SFRUTTANDO IL FATTO CHE h È INTEGRABILE E QUINDI PASSANDO ALLE VARIABILI AZIONE-ANGOLO IL PROBLEMA DIVENTA

$H_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$ DA CUI SI RIESCONO

~~A OTTEN~~ OTTENERE STIME DEL TIPO

$$|I_\varepsilon(t) - I_0(t)| \leq \varepsilon a|t|$$
$$|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_0(t)| \leq \varepsilon\left(a|t| + bt^2\right) \text{ con } a, b > 0$$

~~ERGUNDI~~

INFATTI

$$\begin{cases} \dot{I}_J = -\varepsilon \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_J} \\ \\ \dot{\varphi}_J = \omega_J(I) + \varepsilon \dfrac{\partial f}{\partial I_J}(I, \varphi) \end{cases}$$

DOVE $\omega(I) = \dfrac{\partial h}{\partial I}$

OSS: SI USA ω PERCHÈ SONO PROPRIO LE FREQUENZE.

$$I_J(t) = I_J(0) - \varepsilon \int_0^t \frac{\partial f}{\partial \varphi_J}(I(\tau), \varphi(\tau))\, d\tau$$

SE SUPPONIAMO DI AVERE UNA STIMA $\left\| \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_J} \right\| \leq a$

dove $a = \max\limits_{i,J} \sup\limits_{(\varphi, I)\in D} \left| \dfrac{\partial f_i}{\partial \varphi_J}(I, \varphi) \right|$

DOVE D È UN DOMINIO COMPATTO DOVE RIMANGONO I e φ

E QUINDI POICHÈ SE $\varepsilon = 0$ $I_0(t) = I_0(0)$ È COSTANTE

DALLA STIMA SOPRA PASSANDO AI MODULI

$$|I_\varepsilon(t) - I_0(t)| \leq \varepsilon a |t|$$

MENTRE PER φ LE φ

$$\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(0) = \int_0^t \frac{\partial h}{\partial I}(I_\varepsilon(\tau)) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial I}(I_\varepsilon(\tau), \varphi_\varepsilon(\tau))\, d\tau$$

$$\varphi_0(t) - \varphi_0(0) = \int_0^t \frac{\partial h}{\partial I}(I_0)\, d\tau$$

SOTTRAENDO E USANDO CHE $\varphi_\varepsilon(0) = \varphi_0(0)$

$$\| \varphi_\varepsilon(t) - \varphi_0(t) \| \leq \int_0^{|t|} \underbrace{\left\| \frac{\partial h}{\partial I}(I_\varepsilon(\tau)) - \frac{\partial h}{\partial I}(I_0(\tau)) \right\|}_{\varepsilon a |t| \text{ INTEGRANDO}} + \varepsilon \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial I}(I_\varepsilon(\tau), \varphi_\varepsilon(\tau)) \right|}_{\text{USO LA STIMA USATA PRIMA SU } \frac{\partial f}{\partial I}} d\tau$$

SI OTTIENE $\varepsilon b t^2$

L'INTEGRABILITÀ DI h CI HA PERMESSO DI MIGLIORARE LA STIMA, SOPRATTUTTO QUELLA SULLE AZIONI CHE CI DICE CHE I È UNA VARIABILE LENTA, OVVERO SI DISCOSTA TANTO DALLA CONDIZIONE INIZIALE IN UN TEMPO $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$

DOMANDA: SI PUÒ FARE DI MEGLIO? OVVERO $t \sim \frac{1}{\varepsilon^k}$ CON $k > 1$?

PRINCIPIO DELLA MEDIA:

SISTEMA GENERALE $(*) = \begin{cases} \dot{I} = \varepsilon F(I, \varphi) \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon G(I, \varphi) \end{cases}$ $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $I \in \mathbb{R}^m$

NEL CASO HAMILTONIANO $H_\varepsilon(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi)$

$\omega(I) = \frac{\partial h}{\partial I}$ $\quad F = -\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ $\quad G = \frac{\partial f}{\partial I}$

SCRIVIAMO $F(I, \varphi) = \mathcal{F}(I) + \tilde{F}(I, \varphi)$

DOVE $\mathcal{F}(I)$ È LA MEDIA SUGLI ANGOLI OVVERO $\mathcal{F}(I) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} F(I, \varphi) d\varphi$

DEFINISCO IL SISTEMA MEDIATO $\begin{cases} \dot{J} = \varepsilon \mathcal{F}(J) \end{cases}$ $(*, *)$

RIASSUMENDO:

SISTEMA → IMPERTURBATO $I_0(t)$; PERTURBATO $I_\varepsilon(t)$; MEDIATO $J_\varepsilon(t)$

QUINDI IL PRINCIPIO DELLA MEDIA AFFERMA CHE

IL SISTEMA (*) SODDISFA IL PRINCIPIO DELLA MEDIA AL PRIMO ORDINE IN ε SE $\exists$ UN TEMPO $t_0 > 0$ TALE CHE $\forall$ DATO INIZIALE (I°, φ°) LE SOLUZIONI

$(I_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t))$ DI (*) e $J_\varepsilon(t)$ SOLUZIONE DI (*,*)

CON DATO INIZIALE $J^\circ(0) = I^\circ$ SONO TALI CHE

$$\max_{[0, \frac{t_0}{\varepsilon}]} \left\{ \| I_\varepsilon(t) - J_\varepsilon(t) \| \right\} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

GRAFICO NEL CASO GENERALE

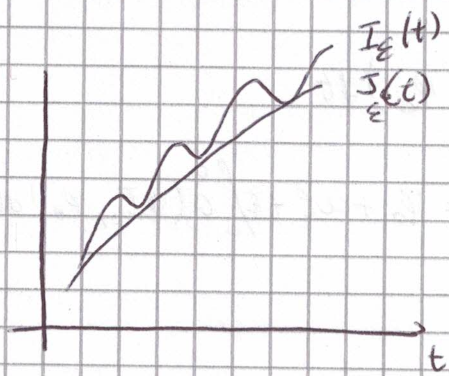
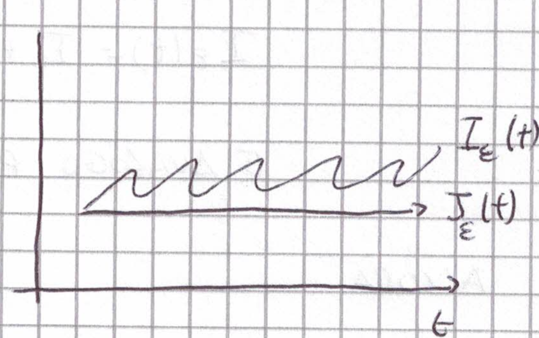


GRAFICO NEL CASO HAMILTONIANO



INFATTI

$$\dot{J} = -\varepsilon \left\langle \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\rangle_\varphi (J)$$

$= 0$ POICHÉ f È PERIODICA IN φ.

TRATTAZIONE EURISTICA ("UN PO' DA FISICI") CIT.

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon F(I, \varphi) \\ \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon G(I, \varphi) \end{cases}$$

$\omega \in \mathbb{R}^n$ COSTANTE (CASO ISOCRONO)

$I \in \mathbb{R}^m$ $\varphi \in \mathbb{T}^n$

INTRODUCIAMO UNA SCALA DEI TEMPI $1 \ll T_\varepsilon \ll \frac{1}{\varepsilon}$

FACCIAMO
STIME A PRIORI SU T_ε

$0 \le t \le T_\varepsilon$

NORMA DEL SUP. PER AVERE STIME ANALOGHE A PRIMA

$$\| I_\varepsilon(t) - I_0(t) \| \le \varepsilon \cdot \|F\| \cdot t$$

$$\| \varphi_\varepsilon(t) - \varphi_0(t) - \omega t \| \le \varepsilon \|G\| t$$

$$I_\varepsilon(T_\varepsilon) - I_\varepsilon(0) = \varepsilon \int_0^{T_\varepsilon} F(I_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon(t))\,dt =$$

$$= \varepsilon \int_0^{T_\varepsilon} F(I_0, \varphi_0 + \omega t)\,dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2 T_\varepsilon^2)$$

RICORDANDO

$$I_\varepsilon(t) = I_0 + \varepsilon \int_0^t F(I_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)\,dt$$

E ANALOGO PER $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi_0 + \omega t + \varepsilon \int_0^t G(I_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)\,dt$

ALLORA

$$\frac{I_\varepsilon(T_\varepsilon) - I_{0\varepsilon}}{T_\varepsilon} = \varepsilon \cdot \frac{1}{T_\varepsilon} \int_0^{T_\varepsilon} F(I_0, \varphi_0 + \omega t)\,dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2 T_\varepsilon^2)$$

$\simeq$

$\frac{dI}{dt}$ ANCHE SE $\varepsilon \to 0$ $T_\varepsilon \to +\infty$ MA NELLA NOSTRA SCALA DI TEMPI $T_\varepsilon \ll \frac{1}{\varepsilon}$ E QUINDI LA VARIAZIONE SULLE I_ε È PICCOLA.

MENTRE DEFINENDO $\bar{F}(I, \varphi) = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T F(I_0, \varphi_0 + \omega t)\,dt$ (MEDIA TEMPORALE)

POICHÉ $T_\varepsilon \to +\infty$ MANDANDO $\varepsilon \to 0$.

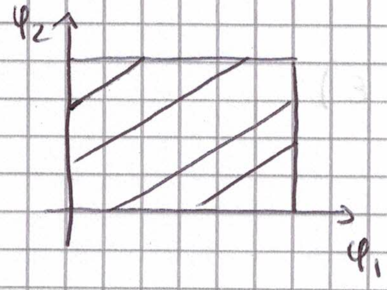
INOLTRE $\mathcal{O}(T_\varepsilon^2 \varepsilon^2) \to 0$ $\varepsilon \to 0$ POICHÉ $T_\varepsilon \ll \frac{1}{\varepsilon}$

OTTENIAMO QUINDI UN SISTEMA

$$\dot{I}(t) = \varepsilon \bar{F}(I, \varphi)$$ DOVE LA F STAVOLTA È MEDIATA SUI TEMPI E NON SUGLI ANGOLI.

METTENDO QUINDI A CONFRONTO MEDIE SPAZIALI (SU φ) E MEDIE TEMPORALI, SI OTTIENE IN MODO MOLTO INTUITIVO CHE SUL TORO

ESEMPIO SU $\mathbb{T}^2$



i) SE IL RAPPORTO TRA φ_1 E φ_2 È RAZIONALE ALLORA HO RISONANZA, QUINDI NON RIESCO A RIVESTIRE TUTTO IL TORO E QUINDI NON POSSO IDENTIFICARE LA MEDIA SPAZIALE PERCHÉ SONO SU UN INSIEME A MISURA NULLA, QUINDI NON VALE IL PRINCIPIO DELLA MEDIA

ii) MENTRE SE φ_1/φ_2 È IRRAZIONALE, NON C'È RISONANZA, QUINDI VALE IL PRINCIPIO DELLA MEDIA E QUINDI C'È ~~EQUIVALENZA~~ CORRISPONDENZA TRA MEDIE SPAZIALI E MEDIE TEMPORALI.

VERSO L'OSTRUZIONE ALL'INTEGRABILITÀ

CONSIDERIAMO $H_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$ con h INTEGRABILE

$I \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$

$\varphi \in \mathbb{T}^n$

CI CHIEDIAMO SE ESISTE UNA TRASFORMAZIONE CANONICA VICINA ALL'IDENTITÀ, OVVERO $(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \Psi_\varepsilon(I,\varphi) = (I,\varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ CHE SIA TALE DA RIMUOVERE LA DIPENDENZA DAGLI ANGOLI.

CIOÈ $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon^{-1} = \tilde{h}_\varepsilon(\tilde{I},\varepsilon) + \varepsilon g(\tilde{I},\varepsilon)$

SE COSÌ FOSSE $\tilde{H}_\varepsilon$ SAREBBE INTEGRABILE ALLA LIOUVILLE PERCHÉ ~~GLI ANGOLI~~ I MOMENTI $\tilde{I}$ SAREBBERO INTEGRALI PRIMI.

E QUINDI L'INTEGRABILITÀ DI h SAREBBE UNA COSA "RESISTENTE" ANCHE ALLE PICCOLE PERTURBAZIONI. (PROBLEMA CONSIDERATO FONDAMENTALE DA POINCARÉ).

INTRODUZIONE AL PRIMO PASSO PERTURBATIVO CON UNA TRASFORMAZIONE CANONICA ~~INDOTTA~~ VICINO ALL'IDENTITÀ GENERATA DA UNA FUNZIONE GENERATRICE.

SIA $S(\varphi, \tilde{I}) = \tilde{I}\cdot\varphi + \varepsilon W(\varphi, \tilde{I}, \varepsilon)$

$$\begin{cases} I = \tilde{I} + \varepsilon \dfrac{\partial W}{\partial \tilde{I}}(\varphi, \tilde{I}, \varepsilon) \\ \tilde{\varphi} = \tilde{I} + \varepsilon \dfrac{\partial W}{\partial \varphi}(\varphi, \tilde{I}, \varepsilon) \end{cases}$$

SUPPONIAMO CHE LA TRASFORMAZIONE INDOTTA IMPLICITAMENTE DALLE EQUAZIONI SOPRA SIA TALE CHE LA NUOVA HAMILTONIANA RISULTI

$$\hat{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \tilde{h}(\tilde{I}, \varepsilon) + \varepsilon R(\tilde{I}, \tilde{\varphi}, \varepsilon)$$

CON $R = O(\varepsilon^r)$ CON $r \geq 1$

SI CHIAMA PRIMO PASSO PERTURBATIVO SE $r = 1$

SE VALE QUANTO DETTO SOPRA ALLORA

$$\underbrace{\tilde{I}(t) - \tilde{I}(0) = O(\varepsilon)}_{} \quad \text{PER } |t| \leq \varepsilon^{-r}$$

GUADAGNANO DI UN GRADO RISPETTO ALLE VECCHIE STIME.

INFATTI $\dot{\tilde{I}}(t) = -\dfrac{\partial \hat{H}_\varepsilon}{\partial \tilde{\varphi}} = -\varepsilon \underbrace{\dfrac{\partial R}{\partial \tilde{\varphi}}(\tilde{I}, \tilde{\varphi}, \varepsilon)}_{O(\varepsilon^r)}$

ALLORA $\tilde{I}(t) - \tilde{I}(0) = -\varepsilon \displaystyle\int_0^t \underbrace{\frac{\partial R}{\partial \tilde{\varphi}}}_{O(\varepsilon^2)} dt$ E QUINDI SE $|t| \leq \varepsilon^{-r}$ VALE LA STIMA SOPRA.

INOLTRE $\tilde{I}(t) - I(t) = O(\varepsilon)$ VALE $\forall t$ PERCHÉ LA TRASFORMAZIONE CANONICA È PRESA VICINO ALL'IDENTITÀ.

$$\Rightarrow I(t) - I(0) = \underbrace{\underbrace{(I(t) - \tilde{I}(t))}_{= O(\varepsilon)} + \underbrace{(\tilde{I}(t) - \tilde{I}(0))}_{= O(\varepsilon) \text{ per } |t| \le \varepsilon^{-r}} + \underbrace{(\tilde{I}(0) - I(0))}_{= O(\varepsilon)}}_{\text{PER SOPRA}}$$

$$= O(\varepsilon) \quad \text{se} \quad |t| \le \varepsilon^{-r}$$

OSS SE $r = 1$ QUESTO COINCIDE CON LA VALIDITÀ DEL PRINCIPIO DELLA MEDIA ALL'ORDINE 1 IN ε.

NOTAZIONE: PER VICINO ALL'IDENTITÀ INTENDEREMO IN NORMA C^1 QUINDI SIA LA TRASFORMAZIONE E LE SUE DERIVATE.

PROPOSIZIONE TUTTE LE TRASFORMAZIONI CANONICHE $(p, q) \xrightarrow{\Psi} (P, Q)$ VICINE ALL'IDENTITÀ, SI SCRIVONO ATTRAVERSO UNA FUNZIONE GENERATRICE DELLA FORMA $S(q, P, \varepsilon) = q \cdot P + \varepsilon W(q, P, \varepsilon)$.

DIM

$$\Psi : \begin{cases} P = p + \varepsilon \Psi_1(p, q, \varepsilon) \\ Q = q + \varepsilon \Psi_2(p, q, \varepsilon) \end{cases}$$

$$\underbrace{\underbrace{\|\Psi_j\|_\infty}_{\text{NORMA DEL SUP}}, \quad \left\| \frac{\partial \Psi_j}{\partial p} \right\|_\infty, \quad \left\| \frac{\partial \Psi_j}{\partial q} \right\|_\infty} \le C$$

$\|\Psi_j\|_{C^1} \le C$ NEL DOMINIO DI DEFINIZIONE DELLE Ψ_j.

PER INVERSIONE

$$\begin{cases} p = P + \varepsilon \phi_1(q, P, \varepsilon) \\ Q = q + \varepsilon \phi_2(q, P, \varepsilon) \end{cases} \quad \text{Con} \quad \underbrace{\|\phi_j\|_{C^1} \le C'}_{\text{DA VEDERE DOPO}}$$

③ CERCO $S(q, P, \varepsilon) = P \cdot q + \varepsilon W(q, P, \varepsilon)$

e $\|W\|_{C^2} \le \varepsilon C'$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial q} = \phi_1(q, P, \varepsilon) \\ \dfrac{\partial W}{\partial P} = \phi_2(q, P, \varepsilon) \end{cases}$$

④ POICHÉ ABBIAMO ASSUNTO Ψ CANONICA, LA CONDIZIONE DI LIE CI DICE CHE $\exists\, S_1$ TALE CHE

$$P\,dQ - p\,dq = dS_1$$

$$P\,dQ - p\,dq = d(P \cdot Q) - Q\,dP - p\,dq$$

SE $S_2 = P \cdot Q - S_1 \Rightarrow dS_2 = p\,dq + Q\,dP =$

$$= (P + \varepsilon\phi_1)\,dq + (q + \varepsilon\phi_2)\,dP =$$

$$= \frac{\partial S_2}{\partial q}\,dq + \frac{\partial S_2}{\partial P}\,dP$$

QUINDI $\begin{cases} \dfrac{\partial S_2}{\partial q} = P + \varepsilon\phi_1 \\ \dfrac{\partial S_2}{\partial P} = q + \varepsilon\phi_2 \end{cases}$ DA CUI $\begin{cases} \varepsilon\phi_1 = \dfrac{\partial S_2}{\partial q} - P \\ \varepsilon\phi_2 = \dfrac{\partial S_1}{\partial P} - q \end{cases}$

SCEGLIENDO $\varepsilon W = S_2 - P \cdot q = P Q - S_1 - P \cdot q$

CON QUESTA SCELTA VALGONO LE RELAZIONI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial q} = \phi_1 \\ \dfrac{\partial W}{\partial P} = \phi_2 \end{cases}$$

OSS Se $\|\phi_J\|_{C^1} \le C'$ ALLORA LE DERIVATE PRIME E SECONDE DI W SONO STIMATE IN NORMA C_0

ALLORA NECESSARIAMENTE $\|W\|_{C^2} \le C$ POICHÉ SE W HA LE DERIVATE LIMITATE NON SI È SPOSTATA DI MOLTO QUINDI POSSO TRASLARLA VERSO IL BASSO FINO A CHE NON VALE LA STIMA. ~~ACH~~ ANCHE SU $\|W\|_\infty$.

QUESTA STIMA INOLTRE MI GARANTISCE CHE SE ε È PICCOLO

POICHÉ VALE $\frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} = I + \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial P \partial q}$ È INVERTIBILE.

MOSTRIAMO CHE ϕ_1 È LIMITATA IN NORMA C^1

SIA $F_\varepsilon(p, q, P) = p + \varepsilon \varphi_1(p, q, \varepsilon) - P$

POICHÉ $F_\varepsilon(p, q, P) = 0$ OTTENIAMO DAL TEOREMA DEL DINI

CHE $p^* = p(q, P, \varepsilon)$ E

$$\frac{\partial p^*}{\partial (q, P)} = -\left[\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial p}\right]^{-1} \left[\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial (q, P)}\right] (p^*, q, P) =$$

$$= -\left[I + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial p}(p^*, q, P)\right]^{-1} \left[\varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial q} \;\middle|\; -I\right]$$

p^* PRIMA PER INVERSIONE L'ABBIAMO SCRITTA COME.

$p^* = P + \varepsilon \phi_1(q, P, \varepsilon)$

PRENDENDO QUELLA DAL TEO DEL DINI

$$\frac{\partial p^*}{\partial P} = I + \varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial P} = \left[I + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial P}(p^*, q, P)\right]^{-1} = \left[I + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right]^{-1}$$

$\underset{\text{TAYLOR}}{=}$ $I + \mathcal{O}(\varepsilon)$ e QUINDI $\left\|\frac{\partial \phi_1}{\partial P}\right\|_\infty$ È LIMITATA.

$$\frac{\partial P^{x}}{\partial q} = +\varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial q} \overset{\text{DWI}}{=} -\varepsilon \underbrace{\left[I + \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial p} \right]^{-1}}_{= I + \mathcal{O}(\varepsilon)} \cdot \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial q} \right] = -\varepsilon \left[I - \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial q} \right]$$

QUINDI $\varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial q} = -\varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial q} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial q}}_{= \mathcal{O}(\varepsilon)}$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial q} = -\underbrace{\frac{\partial \psi_1}{\partial q}}_{= \mathcal{O}(\varepsilon)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

E QUINDI ANCHE $\left\| \frac{\partial \phi_1}{\partial q} \right\|_\infty$ È LIMITATA

ALLORA $\|\phi_1\|_{C^1}$ È LIMITATA. ANALOGO PER ϕ_2

OSTRUZIONE ALL'INTEGRABILITÀ

PROP (POINCARÉ)

LE 3 PROPRIETÀ SEGUENTI NON SONO COMPATIBILI (SI INTENDE TUTTE E 3 INSIEME NON A 2 A 2).

i) $h(I)$ È NON DEGENERE CIOÈ SU $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $\det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}\right) \neq 0$

ii) f SIA GENERICA CIOÈ $f(I, \varphi) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_{\vec{k}}(I) e^{i \vec{k} \cdot \varphi}$

e $\forall \vec{k} \in \mathbb{Z}^n$ con $\vec{k} \neq 0 \Rightarrow \exists \vec{k}' \parallel \vec{k}$ TALE CHE $\hat{f}_{\vec{k}'}(I) \neq 0$

($\vec{k}' = h \vec{k}$ con $h \in \mathbb{Z} - \{0\}$)

iii) IL SISTEMA È INTEGRABILE FINO AL PRIMO ORDINE IN ε IN $U \times \mathbb{T}^n$.

CIOÈ $\exists W(\varphi, \tilde{I}, \varepsilon)$ DEFINITA $(\varphi, \tilde{I}) \in \mathbb{T}^n \times U$

TALE CHE LA TRASF. CANONICA Ψ_ε VICINO ALL'IDENTITÀ DATA IMPLICITAMENTE DA

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi}(\varphi, \tilde{I}, \varepsilon) \\ I = \tilde{I} + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \tilde{I}}(\varphi, \tilde{I}, \varepsilon) \end{cases}$$

TRASFORMA H_ε

IN $\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \Psi_\varepsilon^{-1} = \tilde{h}_\varepsilon(\tilde{I}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

DIM DALLE RELAZIONI DELLA iii PER INVOLUZIONE E SVILUPPO IN TAYLOR IN $\varepsilon=0$ DI $\frac{\partial W}{\partial \varphi}(\tilde{I},\tilde{\varphi},0)$

SI OTTIENE

$$\begin{cases} I = \tilde{I} + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi}(\tilde{I},\tilde{\varphi},0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \tilde{I} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \varphi = \tilde{\varphi} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

SOSTITUENDO NELL'HAMILTONIANA H_ε OTTENIAMO

$$K_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = h\left(\tilde{I} + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \varphi}(\tilde{I},\tilde{\varphi},0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) + \varepsilon f\left(\tilde{I}+\mathcal{O}(\varepsilon), \tilde{\varphi}+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)$$

$$\underset{\substack{\text{SVILUPPANDO IN } \varepsilon_0=0 \\ \text{E USANDO} \\ \omega(\tilde{I}) = \frac{\partial h}{\partial I}(\tilde{I})}}{=} h(\tilde{I}) + \varepsilon\left[\omega(\tilde{I})\frac{\partial W}{\partial \varphi}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) + f(\tilde{I},\tilde{\varphi})\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

CERCO $W(\tilde{I},\tilde{\varphi})$ TALE CHE $\boxed{\omega(\tilde{I})\frac{\partial W}{\partial \varphi}(\tilde{I},\tilde{\varphi}) + f(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = g(\tilde{I})}$

IN $U \times \mathbb{T}^n$

EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

DOVE W e g SONO LE INCOGNITE.

CONSIDERIAMO $W(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^n \\ k\neq 0}} \hat{W}_k(I)\, e^{i\vec{k}\varphi}$

ALLORA SI OTTIENE SUBITO CHE $g(\tilde{I}) = \langle f\rangle_\varphi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(\tilde{I},\tilde{\varphi})\,d\tilde{\varphi}$

ADESSO SOSTITUENDO GLI SVILUPPI E UGUAGLIANDO TERMINE A TERMINE SI OTTIENE:

$$ik\,\omega(\tilde{I})\,\hat{W}_k(\tilde{I}) + \hat{f}_k(\tilde{I}) = 0 \quad \forall k\neq 0$$

PER AVERE UNA SOLUZIONE VORREI DIRE

$$\hat{W}_k(\tilde{I}) = -\frac{\hat{f}_k(\tilde{I})}{ik\,\omega(\tilde{I})}$$

POICHÈ ABBIAMO ASSUNTO PER BUONO i)

OVVERO $\det \frac{\partial^2 h}{\partial I^2} \neq 0$ QUESTO CI DICE CHE $\frac{\partial h}{\partial I}(\tilde{I}) = \omega(\tilde{I})$

È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE DI $\mathbb{R}^n$, QUINDI $\forall\, \tilde{I} \in U$ (PER DENSITÀ DELL'INSIEME)

$\exists\, k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ TC $k\,\omega(\tilde{I}) = 0$, INOLTRE, POICHÈ

ABBIAMO ASSUNTO ii) $\exists\, k' \,/\!/\, k$ tc $f_{k'}(\tilde{I}) \neq 0$

MA SE $k \cdot \omega(\tilde{I}) = 0$ ANCHE $k'\,\omega(\tilde{I}) = 0$ E QUINDI

NON È POSSIBILE PER k' RISOLVERE L'EQUAZIONE FONDAMENTALE

QUINDI i) ii) iii) NON POSSONO COESISTERE. □

METODO DI LIE (ALTERNATIVA AL PRIMO PASSO PERTURBATIVO).

IDEA SIA $\dot{x} = \varepsilon X(x)$ UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

E SIA $\mathcal{C}_\varepsilon(\tilde{x}) = x$ con $\mathcal{C}_\varepsilon = \phi^1_{\varepsilon X}$ FLUSSO AL TEMPO 1

QUESTA È UNA TRASFORMAZIONE CANONICA E $x = \tilde{x} + \mathcal{O}(\varepsilon)$

VEDIAMO CHE POTREMMO CONSIDERARE IL CAMPO X E NON εX

MA CONSIDERARE IL TEMPO εt E NON t E LA TRASFORMAZIONE

NON CAMBIA, OVVERO

PROP: $\phi^t_{\varepsilon X} = \phi^{t\varepsilon}_X$

DIM SUPPONIAMO $x(t)$ SOL. DI $\dot{x}(t) = \varepsilon X(x)$

SIA $\tau = \varepsilon t$ e $\xi(t) = x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$

$$\frac{d}{d\tau}\xi(t) = \dot{x}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon} = \cancel{\varepsilon} X\left(x\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\frac{1}{\cancel{\varepsilon}} = X(\xi(t))$$

QUINDI $\xi(t)$ SI RISOLVE SENZA ε.

DA CUI LA TESI.

CONSIDERIAMO $F : D \to \mathbb{R}$ e $F' = F \circ \mathcal{C}_\varepsilon$

DEFINIZIONE INTRINSECA DERIVATA DI LIE.

$$\frac{dF'}{dt} = \mathcal{L}_{\varepsilon X} F \stackrel{\swarrow}{=} \frac{d}{dt}\left(F \circ \phi^t_{\varepsilon X}\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(F \circ \phi^{\varepsilon t}_{X}\right)\Big|_{t=0} = \varepsilon \mathcal{L}_X F$$

DA CUI $\frac{d^k}{dt^k} F = \varepsilon^k \mathcal{L}^k_X F$

TAYLOR IN $t_0 = 0$

ALLORA $F' = F \circ \underset{t=1}{\mathcal{C}_\varepsilon} = F \circ \phi^t_{\varepsilon X} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\varepsilon)^k}{k!} \mathcal{L}^k_X F = e^{\varepsilon t \mathcal{L}_X} \cdot F$

SE $t = 1 \Rightarrow F' = e^{\varepsilon \mathcal{L}_X} \cdot F$

PERÒ SICCOME POTREMMO AVERE PROBLEMI DI CONVERGENZA DELLA SERIE E QUINDI QUELLO CHE ABBIAMO SCRITTO POTREBBE NON AVER SENSO, CI LIMITEREMO SOLO A ORDINI PICCOLI DELLO SVILUPPO OVVERO

$$F' = F \circ \mathcal{C}_\varepsilon = F + \varepsilon \mathcal{L}_X F + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{L}^2_X F + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

<u>NEL CASO HAMILTONIANO</u>: $X = X_\chi$ con χ HAMILTONIANA

ALLORA $\mathcal{L}_{X_\chi} F = \{F, \chi\}$ e $\mathcal{L}^2_{X_\chi} F = \{\{F,\chi\},\chi\}$

E QUINDI $F \circ \mathcal{C}_\varepsilon = F + \varepsilon\{F,\chi\} + \frac{\varepsilon^2}{2}\{\{F,\chi\},\chi\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

SIA $H_\varepsilon(I,\varphi) = h(I) + \varepsilon f(I,\varphi)$ QUASI INTEGRABILE.

CERCHIAMO χ CHE GENERA $\mathcal{C}_\varepsilon = \phi^\varepsilon_{X_\chi}$

$$H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon(\tilde{I},\tilde{\varphi}) = h(\tilde{I}) + \varepsilon f(\tilde{I},\tilde{\varphi}) + \varepsilon\{h(\tilde{I}) + \varepsilon f(\tilde{\varphi},\tilde{I}), \chi\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= h(\tilde{I}) + \varepsilon\left[f + \{h(I),\chi\}\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) =$$

$$= h(\tilde{I}) + \varepsilon f(\tilde{\varphi},\tilde{I}) + \cancel{\underset{\overset{\|}{0}}{\frac{\partial h}{\partial \varphi}} \frac{\partial \chi}{\partial I}} - \underset{\overset{\|}{\omega}}{\frac{\partial h}{\partial I}} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) =$$

$$= h + \varepsilon \left(f - \overset{\omega(I)}{\cancel{\frac{\partial h}{\partial I}}} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

QUINDI AFFINCHÈ LA NUOVA HAMILTONIANA SIA INTEGRABILE AL PRIMO ORDINE IN ε SI DEVE AVERE

$$\boxed{f(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) - \omega(\tilde{I}) \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = g(\tilde{I})}$$

OVVERO È DI NUOVO L'EQUAZIONE FOND. CON $\chi = -W$

ALLORA ANCHE IN QUESTO CASO $g(\tilde{I}) = \langle f \rangle_\varphi$.

ANALISI DI PARTICOLARI CASISTICHE: (CON METODO DI LIE).

SISTEMI ISOCRONI PERTURBATI (NON RISONANTI)

i) $\omega \in \mathbb{R}^n$ COSTANTE

ii) f ~~ASSUME~~ $\exists$ UN NUMERO FINITO DI $k \in K \subseteq \mathbb{Z}^n$ tc $\hat{f}_k(I) \neq 0$

$$H_\varepsilon(I, \varphi) = h(I) + \varepsilon f(I, \varphi) \qquad h(I) = \omega \cdot I$$

CERCO UNA χ tc $\phi^{\varepsilon}_{H_\chi} = \mathcal{C}_\varepsilon$

$$(I, \varphi) = \mathcal{C}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi})$$

$$\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon = H_\varepsilon + \varepsilon \{H_\varepsilon, \chi\} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \{\{H_\varepsilon, \chi\}, \chi\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_\varepsilon = h + \varepsilon (\underbrace{f + \{h, \chi\}}_{= \langle f \rangle_\varphi}) + \varepsilon^2 \left[\{f, \chi\} + \frac{1}{2}\{\{h, \chi\}, \chi\} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\Rightarrow f - \langle f \rangle_\varphi = -\{h, \chi\}$$ E QUINDI

$$\tilde{H}_\varepsilon = h + \varepsilon \langle f \rangle_\varphi + \frac{\varepsilon^2}{2} \{f + \langle f \rangle_\varphi, \chi\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

FORMA NORMALE NON RISONANTE

SE $f(I,\varphi) = \sum_{k \in K} \hat{f}_k(I) e^{i\vec{k}\varphi}$ $\quad k \in K \subseteq \mathbb{Z}^n$ FINITO

ALLORA DALLA FORMULA FONDAMENTALE DELLA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

$$i(k \cdot \omega) \hat{\chi}_k(I) = \hat{f}_k(I) \quad \forall k \in K \setminus \{0\}$$

E QUINDI $\boxed{\chi(I,\varphi) = \sum_{k \in K \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}_k(I)}{i(\vec{k}\cdot\omega)} e^{i\vec{k}\varphi}}$

$\Rightarrow \tilde{H}_\varepsilon = h + \varepsilon \langle f \rangle_\varphi + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ è UN SISTEMA MEDIATO PER IL PRINCIPIO DELLA MEDIA.

FORMA NORMALE RISONANTE ~~[illegible]~~

- CASO RISONANZA SINGOLA.

SUPPONIAMO $\exists k^* \in K$ tc $\omega \cdot k^* = 0$

e $\forall k \in K \quad k \not\parallel k^* \quad k \cdot \omega \neq 0$

SI RICAVANO GLI $\hat{\chi}_k(I)$ DOVE POSSIBILE

$$\chi(\varphi, I) = \sum_{\substack{k \in K \setminus \{0\} \\ k \not\parallel k^*}} \frac{\hat{f}_k(I)}{i k \cdot \omega} e^{ik\cdot\varphi}$$

VERIFICHIAMO CHE CON QUESTA SCELTA

$$\tilde{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \circ \mathcal{C}_\varepsilon = h(\tilde{I}) + \varepsilon g(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

con $g(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \sum_{\substack{k \in K \\ k \parallel k^*}} \hat{f}_k(\tilde{I}) e^{ik\cdot\varphi}$

Si osservi che tra i $k \parallel k^*$ c'è anche 0 quindi in g è compresa anche $f_0(I) = \langle f \rangle_\varphi$.

PER UN CONTO VISTO IN PRECEDENZA

$$\hat{H}_\varepsilon = h + \varepsilon \left(f_0 + \{h, \chi\} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$g = f + \{h, \chi\} = f - \omega \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} =$$

$$= \sum_{k \in K} \hat{f}_k(I) e^{i\vec{k}\varphi} - \omega \cdot \sum_{\substack{k \in K \setminus \{0\} \\ k \not\parallel k^*}} \frac{\cancel{i k} \hat{f}_k(I) e^{ik\varphi}}{\cancel{i (k \cdot \omega)}} =$$

$$= \sum_{\substack{k \in K \\ k \parallel k^*}} \hat{f}_k(I) e^{i\vec{k}\varphi}$$

- NEL CASO IN CUI $1 \leq r \leq n-1$ $r = n°$ DI RISONANZE.

$k^{(1)}, \dots, k^{(r)}$ t.c. $k^{(s)} \cdot \omega = 0$ $s = 1, \dots, r$

Sia $R = \{k \in \mathbb{Z}^n : k \cdot \omega = 0\}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo r-dimensionale.

SCELGO $\chi_1 = \sum_{\substack{k \in K \setminus \{0\} \\ k \notin R}} \frac{\hat{f}_k(I)}{ik \cdot \omega} e^{ik\varphi}$

OTTENIAMO (CON CONTO ANALOGO A 1 RISONANZA)

$$\hat{H}_\varepsilon(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = h(\tilde{I}) + \varepsilon g(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

con $g(\tilde{I}, \tilde{\varphi}) = \sum_{k \in R \cap K} \hat{f}_k(I) e^{ik\varphi}$

NOTIAMO CHE SE $\alpha \perp R \Rightarrow J = \alpha \cdot I$ È QUASI COSTANTE

FISSO $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n-r)}$ INDIPENDENTI e $\perp R$

VOGLIO VEDERE CHE I $J^{(1)}, \dots, J^{(n-r)}$ SONO IN INVOLUZIONE.

DEFINISCO $\mathcal{H}_\varepsilon = h + \varepsilon g + \cancel{\mathcal{O}(\varepsilon^2)}$ → TOLGO LA PARTE IN ε^2

$$\{\mathcal{H}_\varepsilon, \cancel{\alpha} \, \alpha^{(s)} I\} = 0 \quad e \quad \{\alpha^{(s)} I, \alpha^{(6)} I\} = 0.$$

NEL CASO AD UNA RISONANZA $\mathcal{H}_\varepsilon$ È QUINDI INTEGRABILE POICHÉ ABBIAMO $n-1$ J e IN PIÙ $\mathcal{H}_\varepsilon$ QUINDI n INTEGRALI PRIMI IN INVOLUZIONE.

BREVE DISCUSSIONE DEL CASO NON POLINOMIALE

$$(i k\cdot\omega)\, \hat{\chi}_k(I) = \hat{f}_k(I) \quad \forall k\in K\setminus\{0\} \quad \text{con } K \text{ infinito.}$$

VEDIAMO CHE CHIEDERE $k\cdot\omega\neq 0$ $\forall k\in K\setminus\{0\}$ NON È SUFFICIENTE IN QUESTO CASO. POICHÉ SCRIVENDO LA SOLUZIONE

$$\chi(\varphi I, \varphi) = \sum_{k\in K\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}_k(I)}{i(k\cdot\omega)} e^{ik\varphi}$$

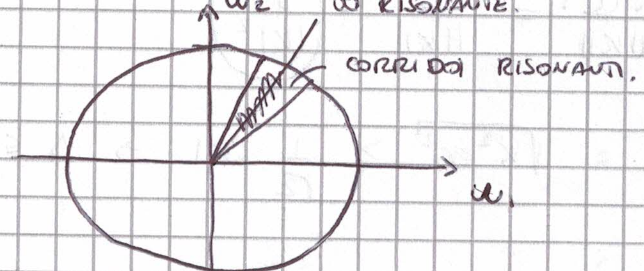
ANCHE SE DIVERSI DA ZERO POSSONO ESSERE ARBITRARIAMENTE PICCOLI DA NON PERMETTERE LA CONVERGENZA DELLA SERIE.
(PICCOLI DIVISORI).

VEDIAMO UNA CONDIZIONE CHE GARANTISCE LA SOLUZIONE AL PROBLEMA

CONDIZIONE DIOFANTEA DI SIEGEL (ENUNCIATO CON $\tau=n$ RISPETTO ALLE DISPENSE)

SUPPONIAMO $\exists\,\gamma$ t.c. $|k\cdot\omega| > \dfrac{\gamma}{|k|^n}$ $\forall k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ e $|k| = |k_1|+\dots+|k_n|$

CONSIDERAZIONI: $n=2$



$B(0,R) = B_R$

SE $k\cdot\omega = 0$ MOVENDO "POCO" ω IN ω' SI HA $|k\cdot\omega'| < \dfrac{\gamma}{|k|^n}$ OVVERO RESTO ANCORA VICINO A ZERO.

QUINDI LA CONDIZIONE È VIOLATA IN UN APERTO DENSO

SIA $B_{R,\gamma} = B_R \setminus$ CORRIDOI RISONANTI

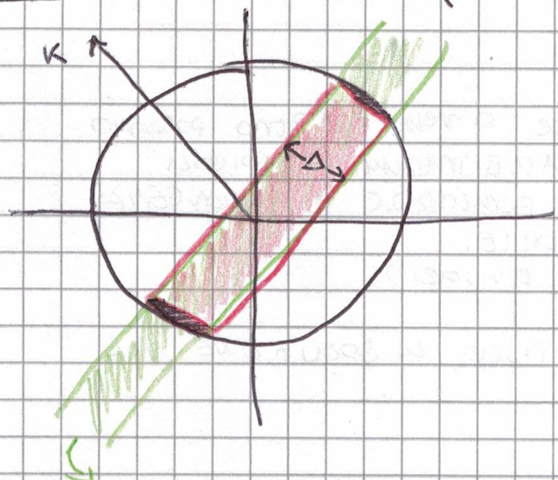
OSS $B_{R\gamma}$ HA PARTE INTERNA VUOTA POICHÉ È IL COMPLEMENTARE DI UN APERTO DENSO.

MA LA COSA INTERESSANTE DA DIMOSTRARE È CHE HA MISURA DI LEBESGUE GRANDE PER γ PICCOLO (E QUESTO CI DICE CHE LA COND. DI SIEGEL È VIOLATA IN UN INSIEME QUASI TRASCURABILE).

PROP $\exists\, C > 0 \quad m(B_R \setminus B_{R,\gamma}) < C \cdot R^{-1} \gamma \cdot m(B_R)$

(SOLO IN $n=2$)

DIM



CORRIDOIO RISONANTE

$$\overline{B}_{R,\gamma} = B_R - B_{R,\gamma}$$

$\overline{B}_{R,k,\gamma}$ = VIOLAZIONE DELLA CONDIZIONE DI SIEGEL PER UN CERTO K FISSATO.

IDEA VOGLIO FARE UNA STIMA SULLA MISURA DI E POI FARE LA SOMMA SU K.

$n=2 \qquad |k\omega| > \dfrac{\gamma}{|k|^2}$

AMPIEZZA CORRIDOIO

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{|k\omega|}{\|k\|} = \frac{1}{\|k\|} \cdot \frac{\gamma}{|k|^2}$$ SE $\omega \in$ BORDO

$$e \quad \|k\| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |k| \Rightarrow \Delta \leq \frac{2\sqrt{2}\,\gamma}{|k|^3}$$

$$m(\overline{B}_{R,k,\gamma}) \underset{\text{TRASCURANDO}}{\leq} 2R\Delta \leq \frac{4\sqrt{2} R \gamma}{|k|^3}$$

$$\Rightarrow m(\overline{B}_{R,\gamma}) = 4\sqrt{2} R \gamma \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|^3}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{|k|^3} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{N_j}{j^3} = \underbrace{4\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j^2}}_{=C} < +\infty$$

DOVE N_j = n° DI $k\in\mathbb{Z}^2$ TC $|k|=j$

SI VEDE CHE $N_j = 4j$