LEZIONE 3/10/2017

TEORIA DELLE CURVE (in $\mathbb{R}^3$)

- Spazio Ambiente: $\mathbb{R}^3$ con prodotto SCALARE $\langle , \rangle$ STANDARD. e norma $\|\cdot x\|$ ASSOCIATA.

$$x, y \in \mathbb{R}^3 \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)^{1/2} = \left(\langle x, x \rangle\right)^{1/2}$$

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ APERTO $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ è $C^\infty(\Omega)$ se ogni sua componente ha tutte le derivate parziali di ogni ordine.

DEF Sia $X \subset \mathbb{R}^k$ (qualsiasi) e $f: X \to \mathbb{R}^n$ allora $f \in C^\infty(X)$

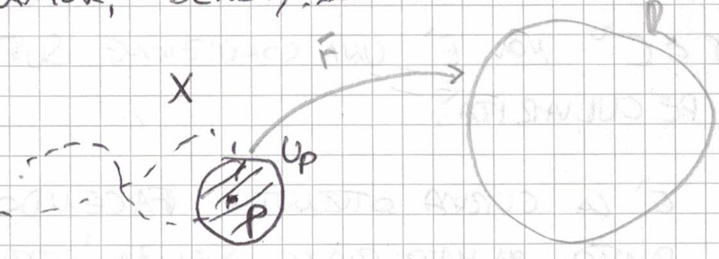
se ~~ALLORA~~ $\forall p \in X$ $\exists$ U_p INTORNO DI p (quindi APERTO) e $F: U_p \to \mathbb{R}^n$

t.c. $F \in C^\infty(U_p)$ e $f|_{X \cap U_p} = F_{X \cap U_p}$

OSS QUESTA DEFINIZIONE È NECESSARIA PER INSIEMI X MOLTO PARTICOLARI.

VEDI INSIEMI DI CANTOR, DENSI, ... ~~SEPARA~~

IDEA GRAFICA



DEF UNA CURVA è UNA funzione $C^\infty(I)$ $f: I \to \mathbb{R}^3$ con

$I \subset \mathbb{R}^3$ intervallo

DEF IL SUPPORTO DI UNA CURVA è $f(I)$ L'INSIEME IMMAGINE

DEF LA VELOCITÀ è $f': I \to \mathbb{R}^3$ (DERIVATA PRIMA)

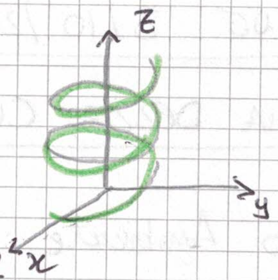
NOTAZIONE LE CURVE LE INDICHEREMO con γ, α, β ...

N.B LE CURVE NON SONO CARATTERIZZATE DAL LORO SUPPORTO

es. $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ $t \in [0, 2\pi]$ $\quad \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ $t \in [0, 3\pi]$.

ESEMPI DI CURVE

1) ELICA CIRCOLARE RETTA



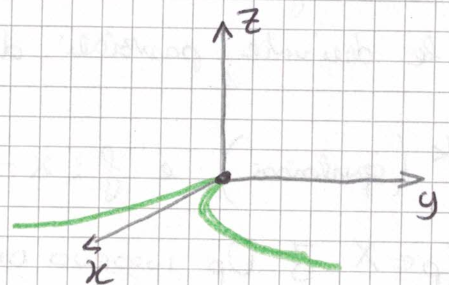
$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (R\cos t,\ R\sin t,\ at) \qquad R>0 \text{ e } a \in \mathbb{R}$$

CALCOLANDO LA VELOCITÀ

$$\gamma'(t) = (-R\sin t,\ R\cos t,\ a) \quad \text{DA CUI } \|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2+a^2} > 0$$

E INOLTRE È UNA CURVA A VELOCITÀ COSTANTE

2) CUSPIDE (SUPPORTO PIANO)

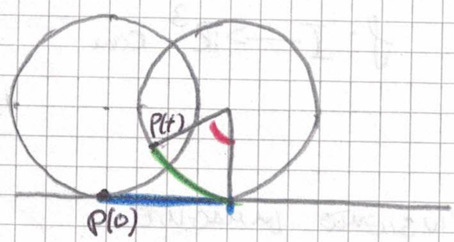


$$\gamma(t) = (t^2, t^3, 0)$$
$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2, 0)$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2+9t^4} =$$
$$= |t|\sqrt{4+9t^2} = 0 \iff t=0$$

QUINDI CI RENDIAMO CONTO DI AVERE ANGOLI O CUSPIDI QUANDO LA NOSTRA CURVA SI FERMA ($\gamma'(t)=0$) E POI RIPARTE.

OSS QUINDI $\gamma \in C^\infty$ NON È UNA CONDIZIONE SUFF. A ELIMINARE QUESTE PECULIARITÀ.

3) CICLOIDE È LA CURVA OTTENUTA FACENDO RUOTARE UN PUNTO ~~DA~~ MATERIALE SENZA "STRUSCIARE".



SUPPONIAMO $R=1$ e VELOCITÀ $\longrightarrow =1$

ALL'ISTANTE t

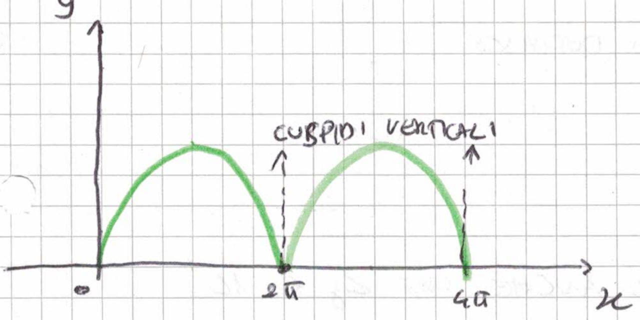
— (blu) È LUNGO t per l'ipotesi CHE LA VELOCITÀ $\rightarrow$ SIA $=1$

— (verde) È LUNGO t PERCHÉ ~~NON~~ ESSENDOCI SOLO ~~SO~~ MOTO ROTAZIONALE LE DISTANZE PERCORSE SONO LE STESSE.

— (rosso) È t IN RADIANTI PER DEFINIZIONE E AVENDO UN CERCHIO DI RAGGIO 1.

QUINDI LE COORD. DELLA CURVA CERCATA SONO

$$\gamma(t) = (t-\sin t,\ 1-\cos t,\ 0)$$



CALCOLIAMO $\gamma'(t) = (1-\cos t, \sin t, 0)$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{2-2\cos t} =$$

$$= 2\sin\frac{t}{2} = 0 \quad \text{ricordando } \sin\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$$

$$\Updownarrow$$

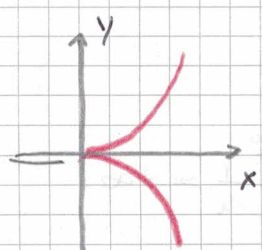
$$\frac{t}{2} = k\pi \qquad t = 2k\pi$$

<u>DEFINIZIONE</u> $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ SI DICE <u>REGOLARE</u> se $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$

OSS L'ELICA È REGOLARE, LA CUSPIDE E LA CICLOIDE NON LO SONO.

<u>DOMANDA</u> LA REGOLARITÀ DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE e NON DAL SUPPORTO? (NO VEDI ESERCIZIO)

<u>ESERCIZIO</u> IL SUPPORTO DI UNA CUSPIDE NON È IL SUPPORTO DI UNA CURVA REGOLARE.



Sia $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)$

tale che $\gamma(t_0) = (0,0,0)$

t_0 è minimo per $\gamma_1(t)$ in quanto $\gamma_1(t) \geq 0 \ \forall t$

$\Rightarrow \gamma_1'(t_0) = 0$

INOLTRE $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ sono legati dalla relazione

$\gamma_1^3(t) = \gamma_2^2(t)$ da cui

$$\gamma_2(t) = \pm\sqrt{\gamma_1^3(t)}$$

- Allora se $\exists$ un intorno destro (o sinistro) di t_0 t_0 $\gamma_2(t)$ non cambia mai di segno. Allora si conclude dicendo che $\gamma_2'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\gamma_1(t)}\,\gamma'(t_0)$ e in t_0 $\gamma_2'(t_0) = 0$
- Se invece $\forall$ intorno di t_0 $\gamma_2(t)$ cambia di segno infinite volte si conclude osservando che $\gamma_2(t_0)$ è infinite volte minimo relativo per $\gamma_2(t)$

OSS SI POTEVA GIUNGERE ALLA STESSA CONCLUSIONE OSSERVANDO CHE VICINO A t_0 $|\gamma_2'(t)| <<< |\gamma_1'(t)|$ e quindi se uno è zero lo è anche l'altro e quindi $\gamma_2'(t_0) = 0$.

DEFINIZIONE Sia $\gamma:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva si definisce <u>LUNGHEZZA</u> di γ

$$L_\gamma := \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

FATTO Si potrebbe dare come definizione anche, che L_γ è il sup delle lunghezze delle poligonali che approssimano γ.

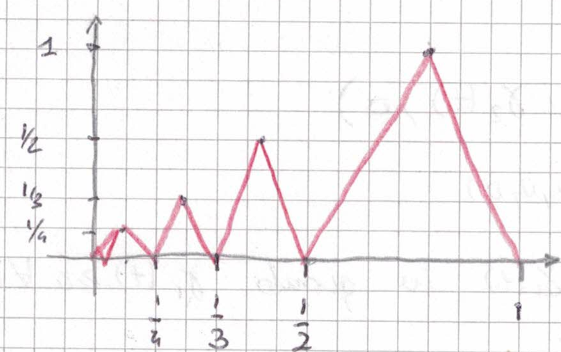
ovvero $$\sup_{a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$$

OSS Possono esistere curve su $[a,b]$ (quindi a immagine compatta) la cui definizione nel fatto da come risultato lunghezza infinita.

Prendiamo a esempio su $[0,1]$ $x_n = \frac{1}{n}$ e $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \ \forall n$

e $f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{n}$ e prendiamo la spezzata che congiunge questi punti.

e $f(0)=0$



Ovviamente

$$L_{\gamma|_{[x_n, x_{n+1}]}} \geq \frac{2}{n} \quad \forall n$$

Quindi $$L_\gamma \geq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

come volevasi dimostrare.

PROP Sono fatti equivalenti con $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$

① $\|\gamma'(t)\| = 1$

② $L(\gamma|_{[a,b]}) = b-a \quad \forall [a,b] \subset I$

① ⇒ ② dalla def di L_γ

② ⇒ ①

$$\int_a^t \|\gamma'(s)\| \, dt = t-a$$

$\|\gamma'(t)\| = 1$ per il teo fondamentale dell'algebra.

DEF Se valgono ① o ② allora γ è <u>parametrizzata per lunghezza d'arco</u> (PLA)

ESEMPIO $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, at)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2+a^2}$

$\Rightarrow \gamma(s) = \left(R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), \frac{a s}{\sqrt{R^2+a^2}} \right)$ è PLA.

QUESTO È STATO UN CASO SEMPLICE PERCHÉ $\|\gamma'(t)\| =$ costante.

DEFINIZIONE $I, J \subset \mathbb{R}$ $\varphi: I \longrightarrow J$ è UN DIFFEOMORFISMO se è $C^\infty(I)$ e φ^{-1} è $C^\infty(J)$

DEF Sia $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ UNA RIPARAMETRIZZAZIONE DI γ è UNA CURVA $\alpha = \gamma \circ \varphi$ con $\varphi: J \longrightarrow I$ $\alpha: J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dove φ è UN DIFFEOMORFISMO CRESCENTE (PER NON CAMBIARE IL VERSO DI PERCORRENZA DELLA CURVA).

OSS $\varphi: J \longrightarrow I$ è UN DIFFEOMORFISMO CRESCENTE
ALLORA $\forall t \in I$ $\varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$

$(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1$ per cui $\varphi'(t) \neq 0$ $\forall t$.

PROPOSIZIONE $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ SONO FATTI EQUIVALENTI.

1. γ è REGOLARE
2. γ AMMETTE UNA RIPARAMETRIZZAZIONE PLA

DIM (2) $\Rightarrow$ (1) $\alpha = \gamma \circ \varphi$ è LA RIPARAMETRIZZAZIONE PLA DI γ

CON $\varphi: J \longrightarrow I$ DIFF. CRESCENTE

$\alpha'(t) = \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in J$

QUINDI $\gamma'(\varphi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in J$

$\gamma'(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in I$

(1) $\Rightarrow$ (2) Sia $t_0 \in I$ Sia $\beta: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$\beta(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(s)\| ds = L(\gamma|_{[t_0, t]})$

$\beta'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ PER IPOTESI DI REGOLARITÀ DUNQUE β è STRETTAMENTE CRESCENTE

FISSANDO $J = \beta(I)$ $\exists\, \beta^{-1}: J \to I$ e $\beta^{-1} \in C^\infty(J)$

PERCHÈ PER IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ UNA FUNZIONE CON DERIVATA PRIMA $\neq 0$ $\Rightarrow$ L'INVERSA CONSERVA GLI ORDINI DI DERIVABILITÀ.

PONIAMO $\psi(t) = \beta^{-1}(t)$ IN MODO TALE CHE LA NUOVA PARAMETRIZZAZIONE ALL'ISTANTE S AVEVO PERCORSO PROPRIO UNA DISTANZA PARI A S.

$$\|(\gamma \circ \psi)'(s)\| = \|\gamma'(\psi(s)) \cdot \psi'(s)\| =$$

USANDO $\beta \circ (\beta^{-1}(s)) = s$

$\beta'(\beta^{-1}(s)) \cdot (\beta^{-1})'(s) \ldots$

$$= \|\gamma'(\psi(s))\| \cdot \|\psi'(s)\| = \|\gamma'(\beta^{-1}(s))\| \cdot \|(\beta^{-1})'(s)\| =$$

$$= \|\gamma'(\beta^{-1}(s))\| \cdot \frac{1}{\|\beta'(\beta^{-1}(s))\|} = 1$$

$$\beta' = \gamma'$$

OSS LA DIMOSTRAZIONE È SÌ COSTRUTTIVA MA I PASSAGGI DA FARE NELLA MAGGIOR PARTE DEI CASI SONO MOLTO COMPLESSI O IMPOSSIBILI. INFATTI SEGUENDO LA DIMOSTRAZIONE DOVREMMO PRIMA INTEGRARE $\|\gamma'(t)\|$ e POI INVERTIRE LA FUNZIONE TROVATA.

ESEMPIO (IN CUI INVECE I CONTI SI FANNO) CICLOIDE.

$$\gamma(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ 0) \qquad t \in (0, 2\pi) = I$$

(PER AVERE LA REGOLARITÀ VOLUTA).

OSS PARTIRE DA $t_0 = 0$ IN TEORIA NON SAREBBE LECITO PER IPOTESI ($\gamma(t)$ NON È DEFINITA IN 0) E QUINDI POTREBBE IL TRATTO TRA 0 e t_0 ESSERE INFINITO. (MA POICHÈ PER CONTI NOTI NON È QUESTO IL CASO ALLORA LO FACCIAMO LO STESSO).

$$\|\gamma'(t)\| = 2 \sin \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad L(\gamma|_{[0,t]}) = \left[-4\cos\frac{x}{2}\right]_0^t = -4\cos\frac{t}{2} + 4 = s$$

DA CUI $t = 2\arccos\left(\frac{4-s}{4}\right) \Rightarrow \alpha(s) = \gamma\Big(\underbrace{2\arccos\left(\frac{4-s}{4}\right)}_{\psi(s)}\Big)$

INOLTRE $L(\gamma_{(0,2\pi)}) = 8$.

DEF Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ PLA IL <u>VERSORE NORMALE</u> in s_0 è

$t(s_0) = \gamma'(t_0)$

DEF Se $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ è REGOLARE MA NON PLA $\Rightarrow$ PRENDO

$\alpha = \gamma \circ \psi$ e DEFINISCO

$$t_\gamma(s_0) = t_\alpha(\psi^{-1}(s_0))$$

MA COME VERIFICO CHE QUESTA SIA UNA BUONA DEFINIZIONE (CIOÈ NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE?

BEH IN QUESTO SEMPLICE CASO BASTA OSSERVARE CHE

$t_\gamma(s) = \dfrac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$ CHE QUINDI OLTRE A DARMI IL RISULTATO VOLUTO <u>MI PERMETTE DI CALCOLARE $t_\gamma(s)$ SENZA DOVER RIPARAMETRIZZARE γ</u>

DEF γ REGOLARE PLA CON VERSORE $t_\gamma(s)$ LA <u>CURVATURA</u> DI γ

$$K_\gamma(s_0) = \|t'(s_0)\|$$

CIOÈ MI DICE QUANTO STA RUOTANDO IL VETTORE VELOCITÀ.

DEF Se γ è REGOLARE (NON PLA) e $\alpha = \gamma \circ \psi$ RIPARAMETRIZZAZIONE PLA

$$K_\gamma(s_0) = K_\alpha(\psi^{-1}(s_0))$$

N.B IL RISULTATO SOPRA OTTENUTO NON È EQUIVALENTE A PRENDERE $\dfrac{\gamma'(s_0)}{\|\gamma'(s_0)\|}$ DERIVARLO E POI FARNE LA NORMA.

QUINDI IL NOSTRO OBBIETTIVO È QUELLO DI CALCOLARE OGGETTI INTRINSECHI ALLE CURVE SENZA EFFETTIVAMENTE DOVERLE RIPARAMETRIZZARE.

ESERCIZIO ASSEGNATO DUE RIPARAMETRIZZAZIONI PLA DIFFERISCONO PER UNA TRASLAZIONE.

DIM siano $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta: J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ PLA

e $\psi: J \longrightarrow I$ tc $\beta = \alpha \circ \psi$ ψ DIFFEOMORFISMO CRESCENTE

$$1 = \|\beta'(s)\| = \|(\alpha \circ \psi)'s\| = \|\underbrace{\alpha'(\psi(s))}_{=1 \text{ perché } \alpha \text{ PLA}}\| \cdot |\psi'(s)|$$

$$\Rightarrow |\psi'(s)| = 1 \xRightarrow{\text{perché DIFF CRESCENTE}} \psi'(s) = 1 \quad \text{da cui} \quad \psi(s) = s + c \quad \text{cioè}$$

UNA TRASLAZIONE.

LEZIONE 4/10/2017

PARENTESI SULL'ORIENTAZIONE DI SPAZI VETTORIALI E PRODOTTO VETTORE

DEF Sia V uno spazio di dimensione n, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ due BASI di V sono EQUIVALENTI $(\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2)$ se la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ HA DET POSITIVO.

FATTO La relazione sopra definita è di equivalenza.

- RIFLESSIVA: $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_1$ $\quad M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(id) = I$ e $\det I = 1 > 0$
- SIMMETRICA: $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2 \Rightarrow \mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_1$

$$\Downarrow$$
$$\det\left(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right) > 0 \quad \text{MA} \quad M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \left(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} \text{ e } \det\left(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^2 > 0$$

perché $\det M \cdot \det M^{-1} = 1$ QUINDI SONO CONCORDI

- TRANSITIVA: $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_3 \Rightarrow \mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_3$

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$$

$$\det\left(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}\right) = \det\left(M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}\right) \cdot \det\left(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right) > 0$$ perché prodotto di matrici con det. positivo.

LEMMA ESISTONO ESATTAMENTE 2 ORIENTAZIONI SU V

DIM $(n = \dim V \geq 1)$

SICURAMENTE CI SONO ALMENO 2 ORIENTAZIONI IN QUANTO

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1 \dots v_n\} \not\sim \mathcal{B}_2 = \{-v_1, v_2 \dots v_n\}$$

INFATTI $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $\det = -1$

SONO AL MASSIMO 2, PERCHÉ SE CE NE FOSSERO ALMENO 3

AVREI $\mathcal{B}_1 \not\sim \mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_2 \not\sim \mathcal{B}_3$

$\Rightarrow$ MA ALLORA $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3} \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$

PER BINET

$$\det\left(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_3}\right) = \underbrace{\det\left(M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}\right)}_{<0} \cdot \underbrace{\det\left(M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)}_{<0} > 0$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_3$

~~LEMMA~~ ~~[illegible] spazi.~~

DEF SCEGLIERE UN'ORIENTAZIONE SU V QUINDI VUOL DIRE SCEGLIERE UNA DELLE 2 CLASSI DI EQUIVALENZA COME LA CLASSE DI QUELLE POSITIVE.

LEMMA $f: V \to W$ TRA SPAZI ORIENTATI, $\dim V = \dim W$, f ISOMORFISMO.

SONO FATTI EQUIVALENTI.

(1) $\exists\, \mathcal{B}$ base positiva di V tc $f(\mathcal{B})$ sia base positiva di W

(2) $\forall\, \mathcal{B}$ base positiva di $V \Rightarrow f(\mathcal{B})$ è base positiva di W

(3) $\exists\, \mathcal{B}_1\, \mathcal{B}_2$ basi positive di V e W tc $\det M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f) > 0$

(4) $\forall\, \mathcal{B}_1\, \mathcal{B}_2$ basi positive di V e $W \to \det M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(f) > 0$

DIM (2) $\Rightarrow$ (1) e (4) $\Rightarrow$ (3) SONO EVIDENTI.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sia $\mathcal{B}$ LA BASE DEL PUNTO 1 e $\mathcal{B}'$ UNA BASE POSITIVA DI V

$$V_{\mathcal{B}'} \xrightarrow{id} V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{f} W_{f(\mathcal{B})} \xrightarrow{id} W_{f(\mathcal{B}')}$$

DA CUI SI RICAVA CHE $f(B')$ È POSITIVA PERCHÉ SEGUENDO IL DIAGRAMMA

$$\begin{tikzcd} V_B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & W_{f(B)} \arrow[d, "id"] \\ V_{B'} \arrow[r, "f"] & W_{f(B')} \end{tikzcd}$$

$M_{B'}^{f(B')}(f) = I$

$M_{B}^{f(B)}(f) = I$

$\det\left(M_{B}^{B'}(id)\right) > 0$ perché B' e B SONO POSITIVE

QUINDI $M_{f(B)}^{f(B')}(id) = \left(M_{B}^{B'}(id)\right)^{-1}$

e quindi ANCHE LEI HA DET > 0

E ALLORA $f(B')$ È POSITIVA PERCHÉ LO ERA $f(B)$.

(3) ⇒ (4) CON UNO SCHEMA ANALOGO AL PRECEDENTE

$$\begin{tikzcd} V_{B_1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow] & W_{B_2} \arrow[d] \\ V_{B_1'} \arrow[r, "f"'] & W_{B_2'} \end{tikzcd}$$

$\forall\ B_1'\ B_2'$ BASI POSITIVE DI V, W RISPETTIVAMENTE POSSO VERIFICARE CHE $\det\left(M_{B_1'}^{B_2'}\right) > 0$ FACENDO IL GIRO RAPPRESENTATO.

E SONO TUTTI DET POSITIVI

$$\underbrace{M_{B_2}^{B_2'}(id)}_{>0} \cdot \underbrace{M_{B_1}^{B_2}(f)}_{>0} \cdot \underbrace{M_{B_1'}^{B_1}(id)}_{>0} = M_{B_1'}^{B_2'}(f)$$

(1) ⇔ (3) BASTA OSSERVARE $M_{B}^{f(B)}(f) = Id$ e quindi LA TESI.

⇒ (1) FISSATA B positiva di V se $f(B)$ NON FOSSE POSITIVA PER W $\Rightarrow M_{B}^{f(B)}(f) = Id$ dovrebbe avere det < 0.

<u>DEF</u> SE UNA QUALSIASI DI QUESTE CONDIZIONI È VERIFICATA SI DICE CHE <u>f PRESERVA L'ORIENTAZIONE</u>

<u>CONVENZIONE</u> Se $V = \mathbb{R}^n$ SARÀ DOTATO DELL'ORIENTAZIONE INDOTTA DALLA BASE CANONICA.

<u>ESEMPIO</u> V è SPAZIO VETTORIALE, $f: V \to V$ ISOMORFISMO

ALLORA f PRESERVA L'ORIENTAZIONE $\iff \forall \mathcal{B}$ base di V $\det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) > 0$

INFATTI IL DET. è DEFINITO COME INVARIANTE RISPETTO AL CONIUGIO QUINDI QUEL NUMERO È SEMPRE FISSATO

PRODOTTO VETTORE (DI $\mathbb{R}^n$ PER ALLEGGERIRE LA NOTAZIONE)

<u>DEF/LEMMA</u> Siano $v_1 \dots v_{n-1}$ VETTORI DI $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists!\, w \in \mathbb{R}^n$ tc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \det(v_1 | \dots | v_{n-1} | x) = \langle x, w \rangle \qquad \underline{w := v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}}$$

DOBBIAMO VERIFICARNE L'ESISTENZA E L'UNICITÀ (ECCO IL LEMMA)

SE CONSIDERIAMO L'APP. CHE FISSATI $v_1, \dots v_{n-1}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \det(v_1 | \dots | v_{n-1} | x) \end{aligned}$$

$\in (\mathbb{R}^n)^*$ è LINEARE PER LE PROP. DEL DET.

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DI RAPP. DI RIESZ $\exists!\, w$ FUNZIONALE tc

$$\det(v_1 | \dots | v_{n-1} | x) = \langle x, w \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(OVVIAMENTE PRODOTTO SCALARE NON DEGENERE)

<u>PROPOSIZIONE</u> VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ

1) L'APPLICAZIONE : $(\mathbb{R}^n)^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $v_1, \dots v_{n-1} \longrightarrow w = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ È MULTILINEARE ALTERNANTE.

2) $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = 0 \iff v_i$ LINEARMENTE DIPENDENTI

3) Se $v_1 \dots v_{n-1}$ SONO INDIPENDENTI $\Rightarrow \{v_1, \dots v_{n-1}, w\}$ è UNA base POSITIVA.

4) $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \perp v_i \quad \forall i = 1 \dots n-1$

5) ~~Sia~~ $\forall A \in O(n) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) \mid M M^t = I\}$

$$\Rightarrow A v_1 \wedge \dots \wedge A v_{n-1} = \det(A) \cdot A(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) \qquad \text{N.B. } \det(A) = \pm 1$$

6) Se $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ è UN SISTEMA ORTONORMALE

$\Rightarrow v_1 \dots v_{n-1}, v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ è UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA.

DIMOSTRAZIONE

1) DISCENDE DALLA MULTILINEARITÀ E ALTERNANZA DEL DETERMINANTE E DALLA LINEARITÀ DELL'ISOMORFISMO DI RIESZ.

a) $\det(\alpha v_1 + \beta v_1', v_2 \dots, v_{n-1}, x) = \alpha \det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, x) + \beta \det(v_1', v_2 \dots, v_{n-1}, x)$

E SI HA LA TESI PRENDENDO $\alpha w_1 + \beta w_2$ COMB DI FUNZIONALI.

b) $\det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots v_{n-1}, x) = -\det(v_1 \dots, v_j, \dots, v_i, \dots v_{n-1}, x)$

detto w IL FUNZIONALE PER IL PRIMO $\Rightarrow$ $-w$ è FUNZ. PER IL SECONDO.

2) $\Rightarrow$ Se v_i SONO DIPENDENTI $\Rightarrow \det(v_1 | \dots | v_{n-1} | x) = 0 \quad \forall x$

e quindi IL FUNZIONALE w è QUELLO NULLO.

$\Leftarrow$ Se v_i SONO INDIPENDENTI $\Rightarrow \exists \bar{x}$ CHE LI COMPLETA A BASE.

$\Rightarrow \det(v_1 | \dots | v_{n-1} | \bar{x}) = \langle \bar{x}, w \rangle \neq 0$ e QUINDI $\bar{x} \neq 0$

$\Rightarrow$ ANCHE $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \neq 0$

(PERCHÉ PRODOTTO NON DEGENERE).

3) $\det(v_1 | \dots | v_{n-1} | v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) = \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \rangle =$

$= \| v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \|^2 > 0$ POICHÉ v_i SONO INDIPEN

$\Rightarrow w \neq 0$

~~ALLORA~~ IN CONCLUSIONE $\{v_1 \dots v_{n-1}\}$ w SONO INDIPENDENTI

INOLTRE $\det(M_e^{\mathcal{B}}(id)) = \det(v_1 | \dots | v_{n-1} | w) > 0$ DOVE

e è LA BASE CANONICA, $\mathcal{B}$ è LA MIA BASE QUINDI HO CHE LA BASE è POSITIVA.

4) $\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, v_i \rangle = \det(v_1 | \dots v_i \dots | v_i) = 0$ PER PROP. DEL DET.

$\downarrow$ PER COME DEF. IL PRODOTTO VETTORE

(5) $\langle A(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}), x \rangle = \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, A^{-1}x \rangle =$

POICHÉ $A \in O(n)$ E QUINDI ESSA E A^{-1} CONSERVANO I PRODOTTI SCALARI

$= \langle A^{-1}Av_1 \wedge \dots \wedge A^{-1}Av_{n-1}, A^{-1}x \rangle =$

$= \det\left(A^{-1}Av_1 \middle| \dots \middle| A^{-1}Av_{n-1} \middle| A^{-1}x\right) = \det\left(A^{-1} \cdot (Av_1 | \dots | Av_{n-1} | x)\right) =$

$= \det(A^{-1}) \cdot \det\left(Av_1 | \dots | Av_{n-1} | x\right) = \det(A) \langle Av_1 \wedge \dots \wedge Av_n, x \rangle$

$\det(A^{-1}) = \det(A)$ perché $A^{-1} = A^t$ perché $A \in O(n)$.

QUINDI POICHÉ VALE $\forall x$ PER RIESZ

$$A(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) = \det(A)\left(Av_1 \wedge \dots \wedge Av_{n-1}\right)$$

(6) Se v_i SONO UN SISTEMA ORTONORMALE SO DAI PUNTI PRECEDENTI CHE $v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ SONO UNA BASE ORTOGONALE POSITIVA

PER DIMOSTRARE L'ORTONORMALITÀ MI RESTA SOLO DA DIMOSTRARE CHE $\|v_1 \wedge \dots \wedge v_n\| = 1$

DIMOSTRIAMO PRIMA IL SEGUENTE LEMMA

<u>LEMMA</u> $e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} = e_n$ DIM

INFATTI $\det(e_1 | e_2 \dots | e_{n-1} | x) = \det\begin{pmatrix} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & x_2 \\ 0 & & 1 & \vdots \\ & & & x_n \end{pmatrix} = x_n = \langle x, \underline{e_n} \rangle$ FUNZ...

DUNQUE PRENDO $A \in O(n)$ (CHE SICURAMENTE ESISTE) TALE CHE

$$Av_i = e_i$$

DUNQUE

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = A^{-1}e_1 \wedge \dots \wedge A^{-1}e_{n-1} = \det(A^{-1})\{A^{-1}(e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}) =$$

$$= \det(A^{-1}) \cdot A^{-1}(e_n)$$

DUNQUE A^{-1} PORTA LA BASE $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}\}$ NELLA BASE $\{e_1, \dots, e_n\}$ ESSENDO $A \in O(n)$ e $\{e\}$ BASE CANONICA UNA BASE ORTONORMALE, ANCHE QUELLA INIZIALE LO ERA PERCHÉ A CONSERVA LE LUNGHEZZE.

in $\mathbb{R}^3$ DATI $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $w=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

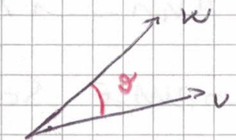
$$\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x_1 \\ v_2 & w_2 & x_2 \\ v_3 & w_3 & x_3 \end{pmatrix} = x_1(v_2w_3 - v_3w_2) - x_2(v_1w_3 - v_3w_1) + x_3(v_1w_2 - v_2w_1) =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}}_{} \right\rangle$$

$v \wedge w$ È IL FUNZIONALE CERCATO.

LEMMA in $\mathbb{R}^3$ $\|v\wedge w\| = \|v\|\cdot\|w\|\cdot \sin\theta$

$\sin\theta$ = L'ANGOLO COMPRESO TRA v e w (QUELLO CONVESSO)



DIM RICORDIAMO CHE $\cos\theta = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$

- Se v e w SONO L. DIPENDENTI. $\Rightarrow$ $v\wedge w = 0$ e $\sin\theta = 0$ OK
- Se v e w SONO INDIPENDENTI $\exists A \in O(3)$ tale che

$$Av \in \operatorname{span}\{e_1\} \text{ e } \{Av, Aw\} \subset \operatorname{span}(e_1, e_2)$$

OSS NON POSSO ESSERE PIÙ PRECISO DI COSÌ PERCHÈ NON HO INFORMAZIONI SU v, w QUINDI v POSSO SOLO DIREZIONARLO TRAMITE A NELLA STESSA DIREZIONE DI e_1 (POTREBBE NON ESSERE LUNGO 1) MENTRE NON SAPENDO SE v e w SONO ORTOGONALI O NO POSSO SOLO RIUSCIRE A PORTARE v e w SULLO STESSO PIANO DI $\langle e_1, e_2\rangle$ MA NON È DETTO (se non sono ort.) CHE $Aw \in \operatorname{Span}\{e_2\}$

QUINDI MI SONO RIDOTTO AL CASO

$$v=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w=\begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \quad v\wedge w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ac \end{pmatrix}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{(b^2+c^2)\cdot a^2}} = \sqrt{\frac{c^2}{b^2+c^2}} = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\|v\wedge w\| = ac = \|v\|\cdot\|w\|\cdot\sin\theta = a\cdot\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = a\cdot c.$$

TORNANDO ALLE CURVE

$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ PLA $\Rightarrow K_\gamma(s) = \|t'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$

POICHÉ γ PLA $t(s) = \gamma'(s)$

$t'(s) = \gamma''(s)$

PROP (ES DA COMPITO)

γ REGOLARE

$K_\gamma \equiv 0 \iff$ SUPPORTO DI γ È CONTENUTO IN UNA RETTA.

DIM: OSS POICHÈ ENTRAMBE LE PROPOSIZIONI SONO INVARIANTI PER RIPARAMETRIZZAZIONE; INFATTI PER LA PRIMA PER QUANTO VISTO $K_{\alpha\gamma}(s) = K_{\gamma\alpha}(\psi^{-1}(s))$ DOVE α RP. PLA. MENTRE LA SECONDA OVVIAMENTE NON DIPENDE DA RIPARAMETRIZZAZIONI PERCHÈ IL SUPPORTO NON CAMBIA. QUINDI SUPPONGO γ PLA

$\Rightarrow$) $K \equiv 0 \Rightarrow \|t'(s)\| = 0 \Rightarrow t'(s) = 0 \Rightarrow t(s)$ È COSTANTEMENTE UN CERTO VETTORE V_0

DUNQUE SE $S_0 \in I$ $\quad \gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^{s} \gamma'(t)\,dt = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^{s} V_0\,dt =$

$$= \underbrace{\gamma(s_0) + V_0(s - s_0)}_{\text{EQ DI UNA RETTA.}}$$

$\Leftarrow$) Se γ è A SUPPORTO IN UNA CURVA $\Rightarrow \exists\, \alpha(s)$ tc

$\gamma(s) = P_0 + \alpha(s) V_0 \qquad \alpha(s): I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\|V_0\| = 1$

$\alpha(s)$ è $C^\infty(I)$ perchè $\alpha(s) = \langle \gamma(s), V_0 \rangle - \langle P_0, V_0 \rangle$

(PER OTTENERLO BASTA FARE IL PRODOTTO SCALARE CON V_0 DA ENTRAMBE LE PARTI DI $\gamma(s) = P_0 + \alpha(s) V_0$)

QUINDI $\gamma(s) \in C^\infty$ E ANCHE $\langle\, , \rangle$ SENNO

QUINDI ANCHE $\alpha(s)$

$\gamma'(s) = \alpha'(s) V_0$ ESSENDO $\gamma'(s)$ e V_0 VETTORI DI NORMA UNITARIA

$\Rightarrow \alpha'(s) = \pm 1$ e PER CONTINUITÀ VALE IDENTICAMENTE 1 o -1 $\forall s$.

$\Rightarrow \gamma'(s) = \pm V_0 \Rightarrow K(s) = \|\gamma''(s)\| = 0$

PROPOSIZIONE: Sia $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare (non necessariamente pla...)

ALLORA $$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

DIMOSTRAZIONE Sia $\beta = \gamma \circ \varphi$ una riparametrizzazione pla di γ

Derivando otteniamo $\beta' = (\gamma' \circ \varphi) \cdot \varphi' \Rightarrow 1 = \|\beta'\| = \|\gamma' \circ \varphi\| \cdot \|\varphi'\|$

Ricordando che $\varphi' > 0$ (posso togliere il modulo)

$$\varphi' = \frac{1}{\|\gamma' \circ \varphi\|} = \left(\langle \gamma' \circ \varphi, \gamma' \circ \varphi \rangle\right)^{-1/2}$$

RICORDA $\|x\|' = \frac{2\langle x', x\rangle}{\|x\|}$

$$\varphi'' = -\frac{1}{2} \underbrace{\langle \gamma' \circ \varphi, \gamma' \circ \varphi \rangle^{-3/2}}_{\|\gamma' \circ \varphi\|^{-3}} \cdot 2 \langle (\gamma'' \circ \varphi) \cdot \underbrace{\varphi'}_{\|\gamma' \circ \varphi\|^{-1}}, \gamma' \circ \varphi \rangle =$$

$$= -\frac{\langle \gamma'' \circ \varphi, \gamma' \circ \varphi \rangle}{\|\gamma' \circ \varphi\|^4}$$

IN ALT. RICOD. CHE $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ $\quad g' = \frac{1}{2(f(x))^{3/2}} \cdot f'(x)$

$$\Rightarrow \varphi' = \frac{1}{\sqrt{\langle \gamma' \circ \varphi, \gamma' \circ \varphi \rangle}} \Rightarrow \varphi'' = \frac{1}{2(\langle \gamma' \circ \varphi, \gamma' \circ \varphi \rangle)^{3/2}} \, 2 \langle (\gamma'' \circ \varphi) \cdot \underbrace{\varphi'}_{\frac{1}{\sqrt{\langle \gamma' \circ \varphi, \gamma' \circ \varphi \rangle}}}, \gamma' \circ \varphi \rangle$$

$$k(t) = k_\beta(\varphi^{-1}(t)) = \|\beta''(\varphi^{-1}(t))\|$$

$$\beta'' = (\gamma'' \circ \varphi) \cdot (\varphi')^2 + (\gamma' \circ \varphi)\, \varphi'' =$$

$$= \frac{\gamma'' \circ \varphi}{\|\gamma' \circ \varphi\|^2} - \frac{\gamma' \circ \varphi \cdot \langle \gamma'' \circ \varphi, \gamma' \circ \varphi \rangle}{\|\gamma' \circ \varphi\|^4} =$$

$$= \frac{1}{\|\gamma' \circ \varphi\|^2} \underbrace{\left(\gamma'' \circ \varphi - \frac{\gamma' \circ \varphi \, \langle \gamma'' \circ \varphi, \gamma' \circ \varphi \rangle}{\|\gamma' \circ \varphi\|^2} \right)}_{\text{PROIEZIONE DI } \gamma'' \circ \varphi \text{ su } (\gamma' \circ \varphi)^\perp} = \oplus$$

Se $\sin\alpha$ è l'angolo tra $\gamma'' \circ \varphi$ e $\gamma' \circ \varphi \Rightarrow$ proiezione di $\gamma'' \circ \varphi$ su $P(\gamma' \circ \varphi)^\perp$ è $\|\gamma'' \circ \varphi\| \sin\alpha$

$$\oplus = \frac{\|\gamma'' \circ \varphi\| \sin\alpha}{\|\gamma' \circ \varphi\|^2} = \frac{\|\gamma' \circ \varphi\| \cdot \|\gamma'' \circ \varphi\| \sin\alpha}{\|\gamma' \circ \varphi\|^3} = \frac{\|\gamma' \circ \varphi \wedge \gamma'' \circ \varphi\|}{\|\gamma' \circ \varphi\|^3}$$

Da cui componendo con $\varphi^{-1}(t)$ la tesi.

ABBIAMO USATO IL SEGUENTE RISULTATO.

LEMMA sia $b: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ bilineare, allora b è C^∞ e

se $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\beta = I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sono C^∞

si ha $\frac{d}{dt} b\{\alpha(t), \beta(t)\} = b\{\frac{d}{dt}\alpha(t), \beta(t)\} + b(\alpha(t), \frac{d}{dt}\beta(t))$

DIMOSTRAZIONE POSSIAMO SUPPORRE $k=1$ (TANTO ESSENDO UN RISULTATO VETTORIALE PUÒ ESSERE DIMOSTRATO PER COMPONENTI).

$b(\alpha(t), \beta(t)) = \sum_{ij} \alpha_i(t)\beta_j(t) b_{ij}$ Cioè ESISTONO b_{ij} CHE RAPPRESENTANO b.

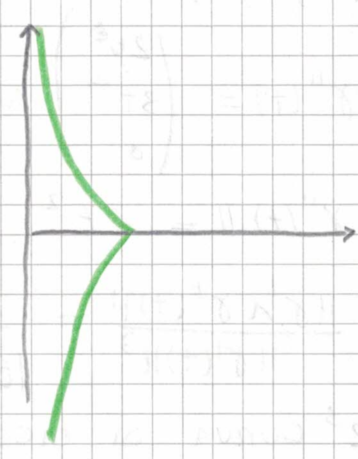
$\frac{d}{dt} b(\alpha(t), \beta(t)) = \sum_{ij} (\alpha_i'(t)\beta_j(t) + \alpha_i(t)\beta_j'(t)) b_{ij} =$

$= b(\alpha'(t), \beta(t)) + b(\alpha(t), \beta'(t))$.

TRATTRICE Sia $\gamma: (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (\sin t, \cos t + \log(\operatorname{tg}\frac{t}{2}), 0)$

SUPPORTO TRATTRICE IN $z=0$



$\gamma'(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(\frac{t}{2})}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{t}{2})} - \sin t, 0) = (\cos t, \frac{1}{\sin t} - \sin t, 0) =$

$= (\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t}, 0) = (0,0,0)$
$\Updownarrow$
$t = \frac{\pi}{2}$

QUINDI γ REGOLARE PER $t \neq \frac{\pi}{2}$
cioè in $(0\ \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}\ \pi)$

CALCOLIAMO $k(t)$ $t \neq \frac{\pi}{2}$

$\gamma''(t) = (-\sin t, \frac{-\cos t\,(1+\sin^2 t)}{\sin^2 t}, 0)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \frac{\cos^4 t}{\sin^2 t}} =$

$= \sqrt{\frac{\cos^2 t\,(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\sin^2 t}} = |\operatorname{cotg} t|$

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \frac{(1+\sin^2 t)}{\sin^2 t} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\cos^2 t (1+\sin^2 t)}{\sin^2 t} + \cos^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\gamma' \wedge \gamma''\| = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

$$k(t) = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \cdot \left|\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}\right| = \left|\frac{\sin t}{\cos t}\right| = |tg\, t|$$

ESERCIZIO CALCOLARE k per la cuspide con $t \to +\infty$

$\gamma(t) = (t^2, t^3, 0)$ $\gamma'(t) = (2t, 3t^2, 0)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|\sqrt{4+9t^2}$

$\gamma''(t) = (2, 6t, 0)$

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6t^2 \end{pmatrix}$$

$\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| = 6t^2$

$$k(t) = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{6t^2}{|t|^3 \sqrt{(4+9t^2)^3}} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

DEFINIZIONE $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ curva si dice BIREGOLARE se è regolare e $k(t) \neq 0$ $\forall t \in I$

~~OSS~~ DEF se γ è BIREGOLARE e PLA allora $t'(s) = \gamma''(s) = k(s) \cdot n(s)$

per un unico versore $n(s)$ che si chiama versore normale di γ.

$$n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} = \frac{t'(s)}{k(s)} \quad \text{se } \gamma \text{ è PLA}$$

DEF Se γ è BIREGOLARE MA NON PLA e $\beta = \gamma \circ \varphi$ è PLA

ALLORA $n_\gamma(t) = \underline{n_\beta(\varphi^{-1}(t))}$?

LEMMA Sia $V: I \to \mathbb{R}^3$ C^∞ di norma costante $\Rightarrow V(t) \perp V'(t) \, \forall t \in I$

DIM. $\langle V(t), V(t) \rangle = \|V(t)\|^2 =$ costante

derivo da entrambe le parti

$$0 = \frac{d}{dt} \langle V(t), V(t) \rangle = 2 \langle V'(t), V(t) \rangle$$

COROLLARIO γ BIREGOLARE e PLA $\Rightarrow \forall t$ $t(s) \perp n(s)$ in ogni $s \in I$.

DIMOSTRAZIONE $n = \frac{t'}{k(t)} \perp t$ per i pezzi perché $\|t\| = 1$

FATTI ① γ è REGOLARE $\Rightarrow t \in C^\infty$

DIM $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ $\|\cdot\|$ è C^∞ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

② γ è BIREGOLARE $\Rightarrow n, k$ sono C^∞

DIM $k = \|\gamma''\|$ $n = \frac{\gamma''}{k}$ e $\gamma'' \neq 0$ $\forall t$

③ Se γ non è REGOLARE non è DETTO CHE k sia C^∞.

DEFINIZIONE: Si $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ biregolare, IL VERSORE BINORMALE di γ in $\gamma(s)$ è $b(s) = t(s) \wedge n(s)$

PER LA COSTRUZIONE $(t(s), n(s), b(s))$ è UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA DI $\mathbb{R}^3$ $\forall s \in I$, CHE PRENDE IL NOME DI TRIEDRO DI FRENET.

OSS t, n, b sono C^∞

DERIVANDO $b' = t' \wedge n + t \wedge n' = k \underbrace{n \wedge n}_{=0} + t \wedge n' \Rightarrow b' \perp t$

INOLTRE $b' \perp b$ perché b è a NORMA UNITARIA (γ è PLA)

DUNQUE $b' \in (\text{Span}(t, b))^\perp = \text{Span}\langle n \rangle \Rightarrow b'(s) = \tau(s) n(s)$ $\tau(s) \in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE $\tau(s): I \to \mathbb{R}$ SI CHIAMA TORSIONE DI γ ed è C^∞

IN QUANTO $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle$

COME SEMPRE SE γ NON PLA $\Rightarrow \tau_\gamma = \tau_\beta(\varphi^{-1}(s))$ con $\beta = \gamma \circ \varphi$ PLA

LEZIONE 10/10/2017

PIANO E CERCHIO OSCULATORE

Ip di lavoro: γ BIREGOLARE PLA, se non detto diversamente

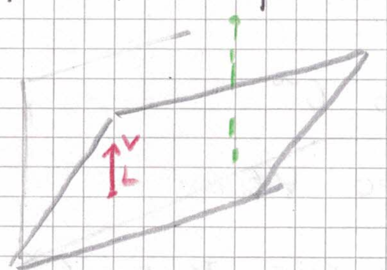
DEF $\forall s_0 \in I$ il PIANO OSCULATORE di γ in $\gamma(s_0)$ è L'UNICO PIANO P t.c. LA DISTANZA TRA $\gamma(s)$ e P è $o((s-s_0)^2)$ per $s \to s_0$

LEMMA IL PIANO OSCULATORE è BEN DEFINITO (CIOÈ ESISTE ED È UNICO) ED È IL PIANO $P: \gamma(s_0) + \mathrm{Span}(t(s_0), n(s_0))$

DIM ~~~~ SIA P UN GENERICO PIANO $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, v\rangle = a\}$ con $v \in \mathbb{R}^3$ $\|v\| = 1$ e $a \in \mathbb{R}$

POICHÈ v è UN VERSORE $\perp$ a $P \Rightarrow$ LA distanza P DA $\gamma(s)$

$$d(\gamma(s), P) = |\langle \gamma(s_0), v\rangle - a|$$



$= d(\gamma(s), P)$

quindi essendo $v \perp P$ LA DISTANZA CERCATA COINCIDE CON LA PROIEZIONE DI $\gamma(s)$ LUNGO v TRASLATA DI UN FATTORE a PERCHÈ IL PIANO ~~NON~~ è AFFINE.

OVVIAMENTE $d(\gamma(s), P) = o((s-s_0)^2) \iff$ lo è $\underbrace{\langle \gamma(s_0), v\rangle - a}_{\text{DISTANZA CON SEGNO}}$

QUINDI CONSIDERIAMO $f(s) = \langle \gamma(s_0), v\rangle - a$

andiamo quindi a imporre $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ CHE COINCIDE CON CHIEDERE $o((s-s_0)^2)$.

$$\begin{cases} \langle \gamma(s_0), v\rangle - a = 0 \\ \langle t(s_0), v\rangle = 0 \\ \underbrace{k(t_0)}_{\neq 0 \text{ PER BIREGOLARITÀ DI } \gamma}\langle n(t_0), v\rangle = 0 \end{cases}$$

$\langle \gamma(s_0), v\rangle - a = 0 \longrightarrow$ QUESTA CONDIZIONE CI DICE OVVIAMENTE $\gamma(s_0) \in P$

$\Rightarrow v \perp t(s_0)$ e $v \perp n(s_0)$ $\Rightarrow$ POICHÈ v è VERSORE $\perp$ a t e n $\Rightarrow v = \pm b(s_0)$

cioè LA GIACITURA è $\mathrm{Span}(t(s_0), n(s_0))$

DA CUI IL PIANO P è $\gamma(s_0) + \mathrm{Span}(t(s_0), n(t_0))$

L'UNICITÀ DISCENDE DALLE CONDIZIONI IMPOSTE AFFINCHÈ $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0$.

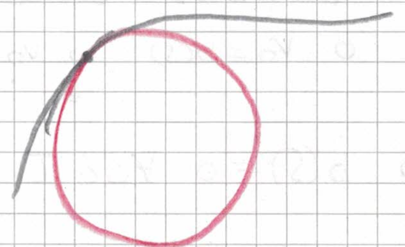
CERCHIO OSCULATORE

PROP $\exists!\ \alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ PLA tc $\alpha(s_0)=\gamma(s_0)$, $\alpha'(s_0)=\gamma'(s_0)$, $\alpha''(s_0)=\gamma''(s_0)$

(cioè $d(\alpha(s),\gamma(s)) = o((s-s_0)^2)$ $s \to s_0$) CHE GIACE SUL PIANO OSCULATORE, HA CENTRO SU $\gamma(s_0) + \mathrm{Span}(n(s_0))$ e RAGGIO $R = \frac{1}{k(s_0)}$

DETTO RAGGIO DI CURVATURA

DIM UNA GENERICA CIRCONFERENZA in $\mathbb{R}^3$ PLA SI PUÒ SCRIVERE



$$\alpha(s) = C + R\cos\left(\frac{s}{R}\right)V_1 + R\sin\left(\frac{s}{R}\right)V_2$$

DOVE V_1, V_2 SONO UN SISTEMA ORTONORMALE.

$$\alpha'(s) = -\sin\left(\frac{s}{R}\right)V_1 + \cos\left(\frac{s}{R}\right)V_2$$

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right)V_1 - \frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

A MENO DI RIPARAMETRIZZARE γ e α PER TRASLAZIONE PER PARAMETRO POSSO SUPPORRE

$s_0 = 0$

$$\begin{cases} \alpha(0) = \gamma(0) \\ \alpha'(0) = \gamma'(0) \\ \alpha''(0) = \gamma''(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + RV_1 = \gamma(0) \\ V_2 = t(0) \\ -\frac{V_1}{R} = k(0)\,n(0) \end{cases} \rightarrow$$

ESSENDO V_1 e $n(0)$ VERSORI E $\frac{1}{R}$ e $k(0)$ È SEMPRE POS.

SI DEVE AVERE $n(0) = -V_1$

$$\boxed{k(0) = \frac{1}{R}}$$

INOLTRE $C = \gamma(0) + R\,n(0) = \underbrace{\gamma(0) + \frac{n(0)}{k(0)}}_{\text{CONDIZIONE CERCATA SUL CENTRO}}$

e $V_2 = t(0)$

MI DICONO CHE $\alpha(s) \subseteq \{ C + \mathrm{Span}((t(0), n(0)) \}$ e QUINDI SUL PIANO OSCULATORE

OSS $b(s)$ È ORTOGONALE AL PIANO OSCULATORE E LA TORSIONE $\tau(s)$ MISURA LA VARIAZIONE DEL PIANO OSCULATORE.

ANDIAMO AD CAPIRE MEGLIO QUESTA OSS CON IL SEGUENTE TEOREMA.

TEOREMA γ BIREGOLARE PLA ALLORA γ È PIANA (CIOÈ HA IL SUPPORTO CONTENUTO IN UN PIANO) $\Leftrightarrow \tau(s) = 0 \ \forall s$.

$\Rightarrow$) È ABBASTANZA SEMPLICE PERCHÈ sia P tc

$$\gamma(s) \subseteq P \Rightarrow d(\gamma(s), P) \equiv 0 = o((s-s_0)^2) \quad \forall s_0 \in I$$

ALLORA $\exists v_0 \in \mathbb{R}^3$ tc $P = \{x \mid \langle x, v_0 \rangle = a\}$ $\quad \|v_0\| = 1$

$\forall s \in I$ $v_0 = \pm b(s)$ e PER CONTINUITÀ DI $b(s)$ VALE SEMPRE

o $v_0 = b(s)$ o $v_0 = -b(s)$.

$\Leftarrow$) $\tau \equiv 0 \Rightarrow b'(s) = 0 \ \forall s \in I$ perciò $\exists v_0$ VERSORE COSTANTE tc

$b(s) = v_0 \quad \forall s \in I$

CONSIDERIAMO
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$s \longrightarrow \langle \gamma(s), v_0 \rangle$$

$$f'(s) = \langle t(s), v_0 \rangle = 0 \quad \text{perchè } v_0 = b(s)$$

$\Rightarrow f(s)$ è COSTANTE e quindi $\langle \gamma(s), v_0 \rangle = a$

Cioè $\forall s$ $\gamma(s) \in \underbrace{\{x \mid \langle x, v \rangle = a\}}$ $\longrightarrow$ PIANO ~~OSCULATORE~~

TEOREMA $\boxed{\text{FORMULE DI FRENET.}}$

Sia γ BIREGOLARE e PLA

$$\Rightarrow \begin{cases} t' = k n \\ n' = -k t - \tau b \\ b' = \tau n \end{cases}$$

IN FORMA VETTORIALE

$$\left(t' \middle| n' \middle| b'\right) = \left(t \middle| n \middle| b\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}}$$

LA PRIMA E L'ULTIMA NOTE.

RICORDA MOLTO IL RISULTATO CHE LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE CONTINUA NELLO SPAZIO DELLE MATRICI CHE PARTE DALL'IDENTITÀ È UNA MATRICE ANTISIMMETRICA.

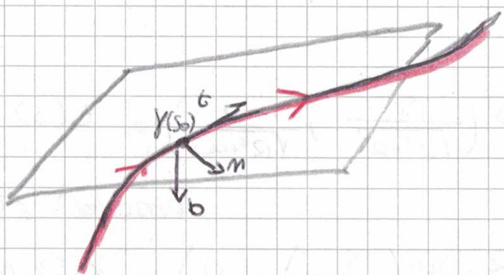
DIM POICHÈ t, n, b SONO UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA

$$\Rightarrow n = b \wedge t$$

$$n' = b' \wedge t + b \wedge t' = \tau n \wedge t + b \wedge k n = -\tau b - k t$$

INTERPRETAZIONE DEL SEGNO DI τ

PROP $\tau(s_0) > 0$ se γ in s_0 PASSA DAL SEMISPAZIO BORDATO DEL PIANO OSCULATORE CHE CONTIENE $\gamma(s_0) + b(s_0)$ a quello che CONTIENE $\gamma(s_0) - b(s_0)$ (VICEVERSA se $\tau(s_0) < 0$)



NELLA SIT. DISEGNATA $\tau(s_0) > 0$

OSSERVAZIONE SULLA DEFINIZIONE DI τ CI SONO ANCORA MOLTE DISCORDANZE (QUALCUNO LA DEF COME $b' = -\tau n$) CHE RENDE SÌ PIÙ COMPLICATE LE FORMULE DI FRENET MA COMBACIA CON L'IDEA FISICA CHE $\tau > 0$ VUOL DIRE CHE PASSO VERSO b e non verso $-b$.

DIM SVILUPPO $\gamma(s)$ AL TERZO ORDINE ~~con~~ IN s_0

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)(s-s_0) + \frac{\gamma''(s_0)}{2}(s-s_0)^2 + \frac{\gamma'''(s_0)}{6}(s-s_0)^3 + o((s-s_0)^3)$$

$$= \gamma(s_0) + t(s_0)(s-s_0) + \frac{k(s_0)n(s_0)}{2}(s-s_0)^2 + \frac{\gamma'''(s_0)}{6}(s-s_0)^3 + o((s_0-s_0)^3)$$

QUINDI $\gamma'''(s_0) = k'(s_0)n(s_0) + k(s_0)n'(s_0) = k'(s_0)n(s_0) - k^2(s_0)t(s_0) - k(s_0)\tau(s_0)b(s_0)$

$$\Rightarrow \gamma(s_0) = \overbrace{\gamma(s_0) + t(s_0)\left[(s-s_0) - \frac{k^2(s_0)}{6}(s-s_0)^3\right] + n(t_0)\left[\frac{k(s_0)(s-s_0)^2}{2} - \frac{k'(s_0)}{6}(s-s_0)^3\right]}^{\text{PIANO OSCULATORE } \gamma(s_0) + \langle t(s_0), n(s_0)\rangle}$$

$$+ \underbrace{-\frac{k(s_0)\tau(s_0)b(s_0)(s-s_0)^3}{6}} + \underbrace{o((s-s_0))}_{\text{TRASCURABILE}}$$

UNICO PEZZO SIGNIFICATIVO AL DI FUORI DEL PIANO OSCULATORE

$k(s_0) > 0$ $\tau(s_0) > 0$ $(s-s_0)^3 > 0$ se $s > s_0$

E QUINDI se $\tau(s_0) > 0$ IL TERMINE ⁄ È CONCORDE A $b(s_0)$ se $s < s_0$ E DISCORDE PER $s > s_0$ COME VOLEVASI DIMOSTRARE.

ESEMPIO ELICA CIRCOLARE RETTA

CALCOLARE CURVATURA E TORSIONE DI

$$\gamma(s) = \left(R\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), R\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), \frac{as}{\sqrt{R^2+a^2}} \right)$$

con $R>0$ e $a \in \mathbb{R}$

$$\gamma'(s) = \left(\frac{-R}{\sqrt{R^2+a^2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}} \right) = t(s)$$

PERCHÉ $\gamma(s)$ È PLA

$$\Rightarrow \gamma''(s) = t'(s) = \left(\frac{-R}{R^2+a^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), \frac{-R}{R^2+a^2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), 0 \right) = k(s)\cdot n(s)$$

$$k(s) = \| t'(s) \| = \frac{R}{R^2+a^2}$$

quindi
$$n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), 0 \right)$$

$$b(s) = t(s)\wedge n(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), -\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}} \right)$$

$$b'(s) = \left(\frac{a}{R^2+a^2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), \frac{+a}{R^2+a^2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}\right), 0 \right)$$

DA CUI $\tau(s) = \dfrac{a}{R^2+a^2}$

OSSERVAZIONE ANTICIPANTE: $k(s)$ e $\tau(s)$ NON DIPENDONO DA s NELL'ELICA. QUESTO PERCHÈ SE PRENDIAMO DUE PUNTI SULL'ELICA E RUOTIAMO E TRASLIAMO L'ELICA ~~BO~~ RIUSCIAMO SEMPRE A MANDARE IL PRIMO NEL SECONDO. QUINDI ~~...~~ QUELLO CHE CI ASPETTIAMO CHE CURVATURA E TORSIONE NON DIPENDANO DA ISOMETRIE E QUINDI UNA FIGURA COME L'ELICA CHE PUÒ ESSERE SEMPRE RIMANDATA IN SÈ NON PUÒ AVERE k e τ DIPENDENTI DA s.

ESERCIZIO $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ CURVA BIREGOLARE P.L.A (NON NECESSARIO MA COMODO)
Sia $A \in O(3)$ e $v \in \mathbb{R}^4$ e consideriamo
$\gamma_1 : I \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma_2 : -I \to \mathbb{R}^3$ (oss se $I = [a,b]$ $-I = [-b,-a]$)

$$\gamma_1(s) = A\gamma(s) + v \quad e \quad \gamma_2(+s) = \gamma(-s)$$

VOGLIAMO CALCOLARE $k_{\gamma_1}(s)$, $\tau_{\gamma_1}(s)$ e $k_{\gamma_2}(s)$ e $\tau_{\gamma_2}(s)$ IN FUNZIONE DI ~~$k\gamma$~~ $k_\gamma(s)$ e $\tau_\gamma(s)$

INIZIAMO CON $\gamma_1(s)$

$$\gamma_1'(s) = (A\gamma(s)+v)' = A\gamma'(s) = A\,t_\gamma(s)$$ CHE MI DICE CHE γ_1 è PLA PERCHE t UNITARIO $A \in O(3) \Rightarrow At(s)$ è UNITARIO

$$\Rightarrow \underline{t_{\gamma_1}(s)} = A\,t_\gamma(s)$$

$$\gamma_1''(s) = A\,t_\gamma'(s) = \underbrace{k_\gamma(s)}_{\text{è POSITIVO}}\,\underbrace{A\,n_\gamma(s)}_{\text{è UNITARIO}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_{\gamma_1}(s) = k_\gamma(s)} \quad \forall s \in I$$ e inoltre $n_{\gamma_1}(s) = A\,n_\gamma(s)$

TEOREMA SU PRODOTTI VETTORI

$$b_{\gamma_1}(s) = t_{\gamma_1}(s) \wedge n_{\gamma_1}(s) = A\,t_\gamma(s) \wedge A\,n_\gamma(s) = \det A \cdot A \cdot b_\gamma(s)$$

$$b'_{\gamma_1}(s) = \det A \cdot A \cdot b'_\gamma(s) - \det A \cdot A \cdot \tau_\gamma(s) \cdot n_\gamma(s) = \det A\,\tau_\gamma(s) \cdot A\,n_\gamma(s) =$$
$$= \det A\,\tau_\gamma(s) \cdot n_{\gamma_1}(s)$$

QUINDI PER DEFINIZIONE $\boxed{\tau_{\gamma_1}(s) = \det A\,\tau_\gamma(s)}$

cioè se $A \in SO(3)$ $\Rightarrow$ triedro di γ VA NEL TRIEDRO DI γ_1 tramite A
se $A \in O(3) \setminus SO(3)$ $\Rightarrow$ TRIEDRO DI γ VA TRAMITE A NEL TRIEDRO DI γ_1 TRANNE b CHE CAMBIA VERSO.

PASSIAMO A $\gamma_2(s)$

$$\gamma_2'(s) = -\gamma'(-s) = -t_\gamma(-s)$$ CHE è UNITARIO QUINDI γ_2 è PLA

$$\gamma_2''(s) = \gamma''(-s) = t_\gamma'(-s) = k_\gamma(-s) \cdot \underbrace{n_\gamma(-s)}_{\text{UNITARIO}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_{\gamma_2}(s) = k_\gamma(-s)}$$ e quindi $n_{\gamma_2}(s) = n_\gamma(-s)$

ME LO POTEVO ASPETTARE PERCHÉ CAMBIANDO IL VERSO DI PERCORRENZA n PUNTA COMUNQUE AL CENTRO DEL CERCHIO OSCULATORE CHE NON CAMBIA

$$b_{\gamma_2}(s) = \cancel{}\, t_{\gamma_2}(s) \wedge n_{\gamma_2}(s) = -t_\gamma(-s) \wedge n_\gamma(-s) = -b_\gamma(-s)$$

$$b'_{\gamma_2}(s) = \left(-b_\gamma(-s)\right)' = b'_\gamma(-s) = \tau_\gamma(-s)\cdot n_\gamma(-s) = \tau_\gamma(-s)\cdot n_{\gamma_2}(s)$$

E QUINDI $\boxed{\tau_{\gamma_2}(s) = \tau_\gamma(-s)}$

<u>DEF</u> DUE CURVE ~~sm~~ $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ PLA SONO <u>CONGRUENTI</u> SE $\exists A \in SO(3)$ e $v \in \mathbb{R}^3$ tc $\forall s \in I$ $\gamma_2(s) = A\gamma_1(s) + v$

CIOÈ SE ESISTE UN'ISOMETRIA POSITIVA CHE MANDA UNA NELL'ALTRA.

<u>OSS</u> ~~L'ISOMETRIA~~ LA CONGRUENZA È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA, OVVIAMENTE PER LE PROP. DELLE ISOMETRIE.

<u>TEOREMA FONDAMENTALE DELLE CURVE</u>

Siano $k : I \longrightarrow (0, +\infty)$ e $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni C^∞ ASSEGNATE

$\Rightarrow \exists !$ CURVA BIREGOLARE PLA $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ CON $k_\gamma \equiv k$ e $\tau_\gamma \equiv \tau$

INOLTRE TALE CURVA È UNICA A MENO DI ISOMETRIA.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>: <u>ESISTENZA</u> COSTRUIAMO UN CANDIDATO TRIEDO DI FRENET PER γ ANCORA DA COSTRUIRE.

Sia $s_0 \in I$ e siano e_1, e_2, e_3 VETTORI DELLA BASE CANONICA E SIA DATO IL SISTEMA

$$\begin{cases} \bar{t}' = k\bar{n} \\ \bar{n}' = -k\bar{t} - \tau\bar{b} \\ \bar{b}' = \tau\bar{n} \\ \bar{t}(s_0) = e_1 \\ \bar{n}(s_0) = e_2 \\ \bar{b}(s_0) = e_3 \end{cases}$$

$\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ SONO LE INCOGNITE

$\rightarrow$ POTEVO SCEGLIERE COME CONDIZIONE INIZIALE UNA QUALSIASI BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^3$ TANTO L'EQUIVALENZA PER ISOMETRIA POSITIVA MI GARANTIRÀ LA VALIDITÀ DELLA MIA SCELTA.

ABBIAMO QUINDI UN SISTEMA LINEARE NORMALIZZATO DEL PRIMO ORDINE NON AUTONOMO (NON IND. DAL TEMPO I COEFF) DI 9 EQ IN 9 INCOGNITE CON CONDIZIONI INIZIALI DI CAUCHY

$\Rightarrow$ ESSO AMMETTE UNICA SOLUZIONE SU TUTTO I (PER LINEARITÀ LA SOLUZIONE SI ESTENDE AD I).

ABBIAMO QUINDI TROVATO LE NOSTRE SOLUZIONI $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b} : I \to \mathbb{R}^3$

DOBBIAMO ADESSO DIMOSTRARE CHE RESTANO UN SISTEMA ORTONORMALE POSITIVO $\forall s \in I$.

CHIAMO $M(s) = \left(\bar{t}(s) \,\middle|\, \bar{n}(s) \,\middle|\, \bar{b}(s) \right)$ ALLORA HO LA TESI

$\Leftrightarrow M(s) \in SO(3) \ \forall s \in I \Leftrightarrow {}^tM(s)\, M(s) = Id \ \forall s$ e $\det M(s) > 0 \ \forall s$

CHIAMO $X(s) = {}^tM(s)\, M(s)$ E VOGLIO VEDERE CHE EQUAZIONE DIFFERENZIALE SODDISFA.

RICORDANDO CHE $M'(s) = M(s) \cdot A(s)$ DOVE $A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$

PER QUANTO VISTO CON LE FORMULE DI FRENET

INOLTRE OSSERVIAMO ANCORA L'ANTISIMMETRIA DI $A(s)$ ${}^tA(s) = -A(s)$ È IL PUNTO CHIAVE DELLA DIMOSTRAZIONE.

$$X'(s) = \left({}^tM(s) \cdot M(s)\right)' =$$
$$= {}^tM'(s) \cdot M(s) + {}^tM(s) \cdot M'(s) =$$
$$= {}^t\left(M(s)A(s)\right) \cdot M(s) + {}^tM(s) \cdot M(s) \cdot A(s) =$$
$$= \underbrace{{}^tA(s)}_{-A(s)} \underbrace{{}^tM(s)\, M(s)}_{X(s)} + \underbrace{{}^tM(s)\, M(s)}_{X(s)} A(s) = -A(s)\, X(s) + X(s)\, A(s)$$

ABBIAMO QUINDI IL SEGUENTE PROBLEMA DI CAUCHY PER $X(s)$

$$\begin{cases} X'(s) = -A(s)\, X(s) + X(s)\, A(s) \\ \underbrace{X(s_0) = Id}_{\text{PER COME È DEFINITA } M(s_0) = Id} \end{cases}$$

È DI NUOVO UN SIST. LINEARE NON AUTONOMO QUINDI AMMETTE UNICA SOLUZIONE e POICHÉ LA SOLUZIONE COSTANTE $X(s) \equiv Id$ SODDISFA È GIÀ LA SOLUZIONE CERCATA.

MI RESTA DA VERIFICARE CHE $\det M(s) > 0$ $\forall s \in I$ MA L'APPLICAZIONE

$$I \longrightarrow \{\pm 1\}$$
$$s \longrightarrow \det(M(s))$$

È UN'APP. CONTINUA PER LA CONTINUITÀ DEL DET e QUINDI POICHÉ $\det(M(s_0)) = 1$ RIMANE SEMPRE 1.

QUINDI $M(s) \in SO(3)$ $\forall s \in I$ CIOÈ $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ SONO UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA $\forall s \in I$.

ADESSO POSSO EFFETTIVAMENTE COSTRUIRE γ PONENDO

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^{s} \bar{t}(u)\,du$$

DA CUI $\gamma'(s) = \bar{t}(s)$ CHE È UNITARIO $\forall s$ DUNQUE γ È PLA

e DUNQUE $t_\gamma(s) = \bar{t}(s)$

$$\gamma''(s) = \bar{t}\,'(s) \underset{\text{PER COSTRUZIONE}}{=} k(s)\,\overbrace{\bar{n}(s)}^{\text{UNITARIO}} \Rightarrow k_\gamma(s) \equiv k(s) \text{ e DUNQUE } n_\gamma(s) = \bar{n}(s)$$

$$b_\gamma(s) = t_\gamma(s) \wedge n_\gamma(s) = \bar{t} \wedge \bar{n} = \bar{b}(s)$$

PERCHÈ $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ SONO UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA. $\forall s \in I$.

DUNQUE $\{\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}\} = \{t_\gamma, n_\gamma, b_\gamma\}$ SONO EFFETTIVAMENTE IL TRIEDRO DI FRENET DI γ.

DA CUI

$$b_\gamma'(s) = \bar{b}\,'(s) \overset{\text{COSTRUZIONE}}{=} \tau(s)\,\bar{n}_\gamma(s) = \tau(s)\,n_\gamma(s) \quad \text{e QUINDI} \quad \tau_\gamma(s) = \tau(s)$$

<u>UNICITÀ</u> SIANO γ_1 e γ_2 DUE CURVE BIREGOLARI CON $k_{\gamma_1} \equiv k_{\gamma_2}$ e $\tau_{\gamma_1} \equiv \tau_{\gamma_2}$ VOGLIO MOSTRARE CHE SONO CONGRUENTI.

CONSIDERIAMO $\{t_1(s_0), n_1(s_0), b_1(s_0)\}$ e $\{t_2(s_0), n_2(s_0), b_2(s_0)\}$ i TRIEDRI IN s_0 DI γ_1 e γ_2. SICURAMENTE $\exists A \in SO(3)$ tc

$$\begin{cases} A t_1(s_0) = t_2(s_0) \\ A n_1(s_0) = n_2(s_0) \\ A b_1(s_0) = b_2(s_0) \end{cases} \quad \text{ed } \exists v \text{ tc} \quad A\gamma_1(s_0) + v = \gamma_2(s_0)$$

VOGLIO MOSTRARE CHE $f(x) = Ax + b$ È LA ISOMETRIA POSITIVA CANDIDATA.

VOGLIO MOSTRARE CHE $At_1(s)$ $An_1(s)$ $Ab_1(s)$ e $t_2(s), n_2(s), b_2(s)$ SODDISFANO LO STESSO SISTEMA DI EQ DIFF A SOL UNICA E CHE QUINDI COINCIDONO $\forall s \in I$ (E NON SOLO IN s_0)

$$(At_1(s))' = At_1'(s) = A\,k(s)\,n_1(s) = k(s)\,An_1(s)$$

$$(An_1(s))' = A\cdot(n_1'(s)) = A(-k(s)\,t_1(s)) - A\tau(s)\,b_1(s) = -k(s)\,At_1(s) - \tau(s)\,Ab_1(s)$$

$$(Ab_1(s))' = A(b_1(s))' = A\,\tau(s)\,n_1(s) = \tau(s)\,An_1(s).$$

QUINDI CONSIDERANDO

$$\begin{cases} \bar{t}' = k\bar{n} \\ \bar{n}' = -k\bar{t} - \tau\bar{b} \\ \bar{b}' = \tau\bar{n} \\ \bar{t}(s_0) = t_2(s_0) = At_1(s_0) \\ \bar{n}(s_0) = n_2(s_0) = An_1(s_0) \\ \bar{b}(s_0) = b_2(s_0) = Ab_1(s_0) \end{cases}$$

QUINDI PER UNICITÀ DELLE SOLUZIONI $t_2(s), n_2(s), b_2(s)$ e $At_1(s), An_1(s), Ab_1(s)$ COINCIDONO $\forall t \in I$

DUNQUE $\gamma_2(s) = \gamma_2(s_0) + \int_{s_0}^{s} t_2(u)\,du =$

$$= A\gamma_1(s_0) + V + \int_{s_0}^{s} At_1(u)\,du =$$

$$= A\gamma_1(s_0) + V + A\left(\int_{s_0}^{s} t_1(u)\,du\right) =$$

$$= A\left(\gamma_1(s_0) + \int_{s_0}^{s} t_1(u)\,du\right) + V = A\gamma_1(s) + V$$

COROLLARIO 1 DUE CURVE BIREGOLARI PLA SONO CONGRUENTI

$\Leftrightarrow$ HANNO STESSA CURVATURA E TORSIONE.

DIM $\Rightarrow$) VEDI ESERCIZIO INIZIO LEZIONE DI γ_1

$\Leftarrow$) VEDI UNICITÀ TEOREMA FOND. DELLE CURVE.

COROLLARIO 2 SIA γ BIREGOLARE PLA CON CURVATURA E TORSIONE COSTANTI $\Rightarrow$ γ È A MENO DI CONGRUENZA UN'ELICA CIRCOLARE RETTA.

DIM BASTA CERCARE $R>0$ e $a \in \mathbb{R}$ tc

$$k = \frac{R}{R^2+a^2} \quad e \quad \tau = \frac{a}{R^2+a^2}$$

ESERCIZIO 1) Sia γ ~~BIRE~~GOLARE PLA TALE CHE TUTTE LE RETTE ~~CHE~~ TANGENTI A γ ~~R~~SI INCONTRANO IN UN PUNTO P. ALLORA γ è CONTENUTA IN UNA RETTA

2) SIA γ BIREGOLARE PLA E TUTTE LE SUE RETTE NORMALI SI INCONTRANO IN UN PUNTO. ALLORA γ è CONTENUTA IN UNA CIRCONFERENZA.

SVOLGIMENTO 1) PER IPOTESI $\exists P \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha(s) \in \mathbb{R}$ $\forall s \in I$ tc

$$\gamma(s) + \alpha(s) t(s) = P$$

VERIFICO $\alpha(s) \in C^\infty(I)$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle t(s), \gamma(s) \rangle} + \alpha(s) \underbrace{\langle t(s), t(s) \rangle}_{\overset{\shortparallel}{1}} = \underset{\overset{\wedge}{C^\infty}}{\langle P, t(s) \rangle}$$

$$\alpha(s) = \langle P, t(s) \rangle \quad \text{QUINDI è } C^\infty$$

TORNANDO A $\gamma(s) + \alpha(s) t(s) = P$ e DERIVANDO

$$\underbrace{\gamma'(s)}_{t(s)} + \alpha'(s) t(s) + \alpha(s) \cdot t'(s) = 0$$

$$t(s)(1 + \alpha'(s)) + \alpha(s) t'(s) = 0$$

POICHé $\forall s \in I$ $t(s)$ è $\perp$ $t'(s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha'(s) = 0 \\ \alpha(s) \cdot t'(s) = 0 \end{cases} \quad \forall s \in I$$

LEZIONE 12/10/2017

CONTINUO SVOLGIMENTO ① DALLA PRIMA EQ SI RICAVA CHE

$\alpha'(s) = -1 \Rightarrow \alpha(s) = \alpha_0 - s$ DA CUI SI ANNULLA SOLO PER $s = \alpha_0$ e QUINDI $t'(s) = 0$ $\forall s \neq \alpha_0$ e PER CONTINUITÀ è SEMPRE 0, DA CUI $t(s) = V_0$

$$\gamma(s) = P - \alpha(s) \cdot t(s) = (P - \alpha_0 V_0) + s V_0 \quad \text{eqn di una retta.}$$

② ANALOGAMENTE AD ① $\exists$ $\alpha(s)$ ~~tc~~ $I \to \mathbb{R}$ C^∞ e $P \in \mathbb{R}^3$

$\downarrow$ SI DIMOSTRA $\langle \, , n(s) \rangle$ COME ①

$$\gamma(s) + \alpha(s) n(s) = P$$

DERIVO e $t(s) + \alpha'(s) n(s) + \alpha(s)(-k(s) t(s) - \tau(s) b(s)) = 0$

$$t(s)(1 - \alpha(s) k(s)) + \alpha'(s) n(s) - \alpha(s) \tau(s) b(s) = 0$$

PER CUI ESSENDO $t(s), n(s), b(s)$ UNA BASE

$$\begin{cases} \text{I} & \alpha(s)\, k(s) \equiv 1 \\ \text{II} & \alpha'(s) \equiv 0 \\ \text{III} & \tau(s)\cdot \alpha(s) = 0 \end{cases}$$

DALLA SECONDA RICAVO CHE $\alpha(s) = \alpha_0$ COSTANTE E DALLA I RICAVO CHE $\alpha_0 \neq 0$ QUINDI NELLA TERZA SI OTTIENE CHE $\tau(s) = 0$ E $k(s) = \frac{1}{\alpha_0}$ COSTANTE

PER IL TEOREMA FUND. DELLE CURVE, E POICHÉ τ, k SONO COSTANTI ALLORA γ È CONGRUENTE AD UN ELICA CIRCOLARE RETTA, MA POICHÉ $\tau \equiv 0 \Rightarrow \gamma$ È PIANA E QUINDI CONTENUTA IN UNA CIRC. CON $R = \frac{1}{k} = \alpha_0$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ $\gamma(t) = \left(e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ \sqrt{2}\, e^t\right)$ ← SPIRALE LOGARITMICA

TROVARE UNA PARAMETRIZZAZIONE PLA, CALCOLARE CURVATURA E TORSIONE (E QUINDI VERIFICARNE LA BIREGOLARITÀ)

$$\gamma'(t) = \left(e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t),\ \sqrt{2}\, e^t\right)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t - \cancel{2\sin t \cos t}) + e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t + \cancel{2\sin t\cos t}) + 2e^{2t}} =$$

$$= \sqrt{4e^{2t}} = 2e^{t}$$

$$L(\gamma)\big|_{[0,t]} = \int_0^t 2e^u\, du = 2e^t - 2$$

Sia s' IL PARAMETRO D'ARCO

$$\Rightarrow \quad s' = 2e^t - 2 \qquad \text{e } \operatorname{dom} s' = (-2, +\infty)$$

$s' + 2 = 2e^t$

$s = 2e^t$

$t = \log\left(\frac{s}{2}\right)$

ORA RICORDANDO CHE TUTTE LE PARAMETRIZZAZIONI P[LA] COINCIDONO A MENO DI TRASLAZIONI CHIAMO $s = s' + 2$ e $\operatorname{Dom} s = (0, +\infty)$

QUINDI $\alpha(s) = \frac{1}{2}\left(s \cos\left(\log\left(\frac{s}{2}\right)\right),\ s \sin\left(\log\left(\frac{s}{2}\right)\right),\ \sqrt{2}\, s\right)$

$$\alpha'(s) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\log\left(\frac{s}{2}\right)\right) - s\sin\left(\log\left(\frac{s}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{s},\ \sin\left(\log\left(\frac{s}{2}\right)\right) + s\cos\left(\log\left(\frac{s}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{s},\ \sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\log\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(\log\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right),\ 1\right)$$

SUGG DELL'ES. $\cos(\alpha) - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ e $\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

CHIAMANDO $\vartheta(s) = \log\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$ e RICORDANDO $\vartheta'(s) = \frac{1}{s}$

$$t_\alpha(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos(\vartheta(s)),\ \sin(\vartheta(s)),\ 1\Big)$$

$$\alpha''(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{s}\sin(\vartheta(s)),\ \frac{1}{s}\cos(\vartheta(s)),\ 0\right) =$$

$$= \underset{\substack{\neq 0 \\ \forall s>0}}{\frac{\sqrt{2}}{2s}}\ \underbrace{\Big(-\sin(\vartheta(s)),\ \cos(\vartheta(s)),\ 0\Big)}_{\text{UNITARIO}}$$

$$\Rightarrow\ k(s) = \frac{\sqrt{2}}{2s} \quad e \quad n(s) = \Big(-\sin(\vartheta(s)),\ \cos(\vartheta(s)),\ 0\Big)$$

$$b(s) = t(s)\wedge n(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}\cos(\vartheta(s))\\ \sin(\vartheta(s))\\ 1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\sin(\vartheta(s))\\ \cos(\vartheta(s))\\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-\cos(\vartheta(s))\\ -\sin(\vartheta(s))\\ 1\end{pmatrix}$$

$$b'(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{s}\sin(\vartheta(s)),\ -\frac{1}{s}\sin(\vartheta(s)),\ 0\right) = \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2s}}_{\tau(s)}\ \underbrace{\Big(-\sin(\vartheta(s)),\ \cos(\vartheta(s)) \ldots}_{n(s)}$$

<u>OSS</u> $\frac{\tau(s)}{k(s)} = 1$ (GENERALIZZEREMO QUESTO RISULTATO PER LA SPIRALE LOGARITMICA)

<u>ESERCIZIO</u> $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ DI REGOLARE e PLA ALLORA SONO FATTI EQUIVALENTI

① $\frac{\tau(s)}{k(s)} = \text{costante} \quad \forall s \in I$

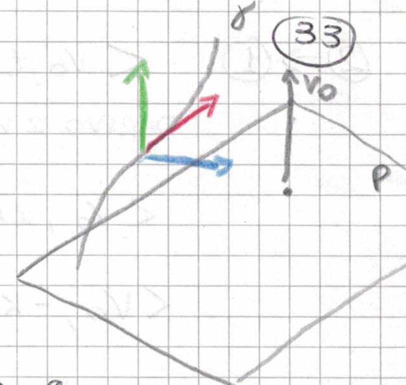
② $\exists\, v_0 \neq 0$ $v_0 \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\langle t(s), v_0\rangle$ sia costante

③ γ è CONGRUENTE AD UNA CURVA DEL TIPO $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s), as)$ con $a \in \mathbb{R}$ e $\sqrt{(\alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2}$ COSTANTI.

<u>DEF</u> UNA TALE CURVA SI DICE <u>ELICA GENERALIZZATA</u>

② ⇒ ③ Sia $P = v_0^\perp$ e sia $\pi: \mathbb{R}^3 \to P$ PROIEZIONE ORTOGONALE

$\Rightarrow \forall s \in I \quad \gamma(s) = \pi(\gamma(s)) + g(s)\, v_0 \quad g(s) \in C^\infty$ (PRODOTTO SCALARE CON v_0)



POICHÉ Π È LINEARE

$$\gamma'(s) = \underline{t(s)} = \underline{\Pi(t(s))} + \underline{g'(s)\, V_0}$$

$$\text{costante} = \langle V_0, t(s) \rangle = \underbrace{\langle \Pi(t(s)); V_0 \rangle}_{0 \text{ perché } \Pi(t(s)) \in V_0^{\perp}} + g'(s)\, \|V_0\|^2$$

DUNQUE $g'(s) = a$ costante $\forall s \Rightarrow g(s) = as + a_0$

$$1 = \|t(s)\|^2 = \|\Pi(t(s))\|^2 + \underset{\|g'(s)\|}{a^2}\, \|V_0\|^2 \Rightarrow \|\Pi(t(s))\|^2 \text{ è costante e}$$

quindi anche $\|\Pi(t(s))\|$ lo è per continuità

e quindi LA PROIEZIONE DELLA VELOCITÀ SU P È A NORMA COSTANTE.

QUINDI L'IDEA È STATA DI SPEZZARE γ LUNGO V_0 e $P = V_0^{\perp}$ e SFRUTTARE LA COSTANZA DELLA PROIEZIONE SU V_0 PER DIMOSTRARE CHE ANCHE QUELLA SU P VALE (OVVIO PERCHÉ DEVE VALERE PITAGORA)

CHIAMANDO $\Pi(\gamma(s)) = \psi(s)$ $\Rightarrow \|\psi'(s)\| = $ COSTANTE

$\gamma(s) = \psi(s) + (as + a_0)V_0$ ALLORA TRASLO DI $a_0 V_0$ e

quindi $\gamma_1(s) = \psi(s) + as\, V_0$ ALLORA TROVO $A \in SO(3)$ tc

$V_0 \to (0,0,\lambda)$ $\lambda \neq 0$ e

$\gamma_2(s) = A\gamma_1(s) = (\alpha(s), \beta(s), a\lambda s)$ $A(P) \to \{z=0\}$ cioè

$A(\psi(s)) = (\alpha(s), \beta(s), 0)$

con $a\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$\|(A\psi)'(s)\| = \|A\| \cdot \|\psi'(s)\| = 1 \cdot \text{COSTANTE} = 1\sqrt{(\alpha'(s))^2 + (\beta'(s))^2}$$

③ $\Rightarrow$ ② PRENDO $\gamma(s)$ e $A \in SO(3)$ e $b \in \mathbb{R}^3$

tc $\gamma_1(s) = A\gamma(s) + b = (\alpha(s), \beta(s), as)$ con LE IPOTESI.

CONSIDERO $V_0 = e_3$ $\gamma_1'(s) = (\alpha'(s), \beta'(s), a)$

$\langle t_1(s), e_3 \rangle = a \in \mathbb{R}$ costante.

CHIAMANDO $\gamma(s) = A^{-1}\gamma_1(s) - A^{-1}b$ con $A^{-1} \in SO(3)$ e $A^{-1}b \in \mathbb{R}^3$

POICHÉ A CONSERVA LE ORTOGONALITÀ $\Rightarrow \langle A^{-1}V_0 - A^{-1}b, t(s) \rangle = a$.

2 $\Rightarrow$ 1 $\quad \langle V_0, t(s) \rangle = a$ COSTANTE

DERIVO 2 VOLTE

$\langle V_0, k\,n(s) \rangle = 0 \Rightarrow V_0 \perp n(s) \ \forall(s)$ DATO CHE $k(s) \neq 0 \ \forall s$

$\langle V_0, -k(s)\,t(s) \rangle + \langle V_0, -\tau(s)\,b(s) \rangle = 0$

$-a\,k(s) - \tau(s) \cdot \langle V_0, b(s) \rangle = 0$

$\tau(s) \langle V_0, b(s) \rangle = -a\,k(s) \Rightarrow$ se $\langle V_0, b(s) \rangle$ FOSSE $\neq 0$ e COSTANTE AVREI LA TESI.

MA V_0 è COSTANTE $\Rightarrow \underbrace{\|V_0\|^2}_{\text{COSTANTE}} = \underbrace{\langle V_0, t \rangle^2}_{a^2} + \underbrace{\langle V_0, n \rangle^2}_{0} + \langle V_0, b \rangle^2$

$\Downarrow$ è costante perché differenza di cose costanti.

INOLTRE $\langle V_0, b \rangle \neq 0$ perché se fosse $= 0$

AVREI $k(s) \cdot a = 0$ cioè $a = 0 \Rightarrow V_0 = 0$ ASSURDO.

E QUINDI $\dfrac{\tau(s)}{k(s)} = \dfrac{-a}{\langle V_0, b(s) \rangle}$

1 $\Rightarrow$ 2 CERCO V_0 CHE PER SODDISFARE LA RICHIESTA DOVRÀ ESSERE DELLA FORMA

$$V_0 = a\,t(s) + d(s)\,n(s) + c(s)\,b(s)$$

CERCO $c(s)$ e $d(s)$ IN MODO TALE CHE $V_0' = 0 \ \forall s \in I$

MA LA DIMOSTRAZIONE DI PRIMA MI HA DETTO CHE UN TALE V_0 SE ESISTE HA COMPONENTE NORMALE NULLA $(d(s) = 0)$

$V_0 = a\,t(s) + c(s)\,b(s)$ e QUINDI ANCHE

$c(s) = c =$ COSTANTE PER FARE IN MODO CHE LA NORMA DI V_0 SIA COSTANTE.

$$V_0 = a\,t(s) + c\,b(s)$$

DERIVO

$$0 = a\,k(s)\,n(s) + c\,\tau(s)\,n(s)$$

$$a\,k(s) + c\,\tau(s) = 0$$

Pongo $c = 1 \quad a = -\dfrac{\tau(s)}{k(s)}$

ADESSO PRENDO LA FUNZIONE $s \longrightarrow -\dfrac{\tau(s)}{k(s)} \cdot t(s) + b(s)$

VOGLIO VEDERE CHE LA FUNZIONE INDICATA È COSTANTE e $\neq 0$ e CHIAMO $V_0 = -\dfrac{\tau(s)}{k(s)} \cdot t(s) + b(s)$

LEZIONE 17/10/2017

Se $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ (X qualsiasi) $f: X \to Y$ è C^∞ se $\forall p \in X$
$\exists U$ ~~intorno~~ APERTO $p \in U$ e $\exists F: U \to \mathbb{R}^n$ C^∞ tc

$$F|_{U\cap X} = f|_{U \cap X}$$

<u>OSS 1</u> $f \in C^\infty \Rightarrow f$ è loc continua $\Rightarrow f$ è continua.

<u>OSS 2</u> $f: X \to Y$ $\quad g: Y \to Z$ C^∞
$\Rightarrow g\circ f: X \to Z$ è C^∞

$\forall p \in X$ scelgo un ~~intorno~~ APERTO $I_{f(p)} \subseteq Y$ tc $\exists G|_{I_{f(p)}\cap Y} = g|_{I_{f(p)}\cap Y}$ $\quad G$ è C^∞
dopo di chè per oss 1 $f^{-1}(I_{f(p)})$ è un aperto (perchè f è continua)
CHE CONTIENE p. $\Rightarrow$ Cerco U aperto tc $\exists F: U \to \mathbb{R}^n$ C^∞ tc $F|_{U\cap X} = f|_{U\cap X}$
considero $U \cap f^{-1}(I_{f(p)})$ ed ottengo L'APERTO CERCATO PER LA COMPOSIZIONE

<u>OSS 3</u> $Id_X: X \to X$ è C^∞

<u>DEF DIFFERENZIALE IN INSIEMI APERTI</u>

Siano $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ C^∞
Allora $\forall p \in \Omega$ $\exists!$ APP. LINEARE $df_p: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tc

$$f(p+v) = f(p) + df_p(v) + o(\|v\|) \quad \forall v \text{ tc } p+v \in \Omega_1$$

PROP. DEL DIFF SU APERTI:

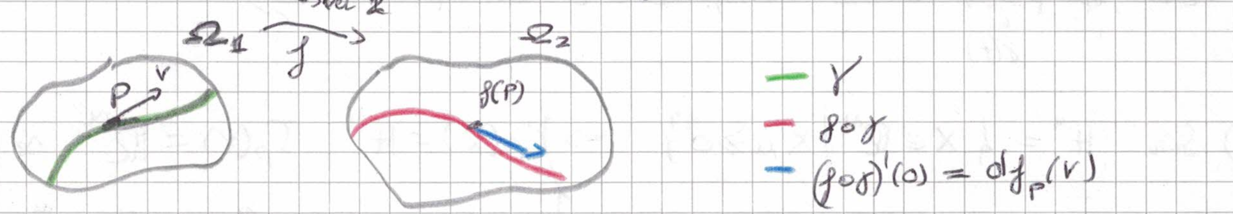
① $df_p(v) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(p+tv) - f(p)}{t}$

② $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ $\quad d\gamma_0(1) = \gamma'(0)$

③ $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ $\quad \gamma\ (-\varepsilon,\varepsilon) \to \Omega_1$ $\quad \gamma'(0) = v$ e $\gamma(0) = p$

$\Rightarrow df_p(v) = (f\circ\gamma)'(0)$

<u>DIM</u>: $(f\circ\gamma)'(0) = \underbrace{d(f\circ\gamma)_0(1)}_{\text{per } 2} = df_{\gamma(0)} \circ d\gamma_0(1) = df_p\, \gamma'(0) = df_p(v)$



QUINDI L'IDEA È QUELLA DI CALCOLARE IL DIFFERENZIALE TRAMITE IL VETTORE TG. ALLA CURVA IMMAGINE (UNA DEF GEOMETRICA DELLA COSA).

PER DIMOSTRARE 3 ABBIAMO USATO

④ $f: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \quad g: \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3 \quad C^\infty$

$\forall p \in \Omega \quad d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$

⑤ $df_p = J(f)_p = \left(J(f)_p\right)_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}$ (USARE CON CAUTELA)

OSS: LA PROP. ③ è BEN DEFINITA ANCHE se $\gamma: [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$, infatti se è così essendo C^∞ $\exists\, \varepsilon'$ t.c. si possa estendere a $(-\varepsilon', \varepsilon)$ e γ' e $(f\circ\gamma)'$ in 0 sono derivate destre.

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE

$f: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \in C^\infty$ tra aperti di $\mathbb{R}^n$ se $p \in \Omega_1$ è t.c.

$df_p: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è INVERTIBILE $\Rightarrow \exists\, U_1 \subseteq \Omega_1$ e $U_2 \subseteq \Omega_2$ t.c.

APERTI T.C. $f|_{U_1} \longrightarrow U_2$ è UN DIFFEOMORFISMO

RICORDA: UN DIFFEOMORFISMO è una f C^∞ con inversa C^∞.

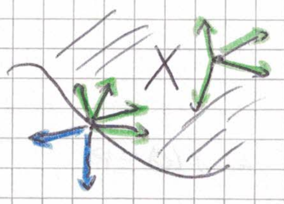
CONO E SPAZIO TANGENTE

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ qualsiasi $p \in X$

DEF CONO TANGENTE A X in P $\quad C_p(X) = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, \gamma: [0, \varepsilon) \to X \;\; \gamma(0) = p \text{ e } \gamma'(0) = v\}$
(L'INSIEME DELLE DIREZIONI AMMISSIBILI)

DEF SPAZIO TANGENTE A X in p $\quad T_p(X) = \operatorname{Span}(C_p(X))$

IDEA



ESEMPI 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\Rightarrow C_p(X) = T_p(X) = \mathbb{R}^n$

$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall p \in \Omega \quad \underset{\gamma(t)}{p + tv} \in \Omega$ per qualche $\varepsilon \Rightarrow C_p(X) = \mathbb{R}^n$

2) Sia $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \Rightarrow \begin{cases} C_p(X) = H^n \quad T_p(X) = \mathbb{R}^n & \text{se } p \in \partial H^n \\ C_p(X) = T_p(X) = \mathbb{R}^n & p \in H^n \setminus \partial H^n \end{cases}$

3) Se $P = p + V$ spazio affine con giacitura V
$\Rightarrow C_p(X) = T_p(X) = V$

DIM $\forall v \in V$ $\gamma : p + tv$ $\gamma : [0, +\infty) \to P$ GIACE SU P $\gamma(0) = p$ $\gamma'(0) = v$
QUINDI $V \subseteq C_p(P)$
VICEVERSA se $v \in C_p(P)$ $\exists\, \gamma : [0, \varepsilon) \to P$ tc $\gamma(t) \in P$
$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \underbrace{\boxed{\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}}}_{\in V} = v \in V \Rightarrow C_p(P) \subseteq V$
per def di SPAZIO AFFINE
e P è UN INSIEME CHIUSO QUINDI ANCHE IL SUO LIMITE $\in V$

$\Rightarrow C_p(P) = V = T_p(P)$ PER DEF DI SPAZIO VETTORIALE

TORNIAMO QUINDI AL PROBLEMA DI DEFINIRE IL DIFFERENZIALE su X qualsiasi

DEF-PROP $f : X \to Y$ C^∞ $X \subseteq \mathbb{R}^m$ $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ qualsiasi.

Sia $v \in C_p(X)$ $p \in X$ Scelgo arbitrariamente $\gamma : [0, \varepsilon) \to X$ $\gamma(0) = p$ $\gamma'(0) = v$
e $F : U \to \mathbb{R}^n$ $U \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO $\overset{C^\infty}{V}$ tc $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$ estensione loc di f.
$\Rightarrow dF_p(v) = (f \circ \gamma)'(0)$

OSS Se VALE L'UGUAGLIANZA è UNA BUONA DEFINIZIONE PERCHÈ NON DIPENDE NÈ DALLA SCELTA DI γ NÈ DA QUELLA DI F.

DIM CALCOLIAMO $dF_p(v) = (F \circ \gamma)'(0) = (f \circ \gamma)'(0)$

QUESTA È VERA A PRIORI $\forall \gamma$ tc $\gamma'(0) = v$ perché F è DIFF su UN APERTO

RICORDANDO CHE γ è A VALORI IN X lì f e F COINCIDONO

DUNQUE $dF_p(v)$ NON DIPENDE DALLA SCELTA F
e $(f \circ \gamma)'$ NON DIPENDE DALLA SCELTA DI γ.

OSS $(f \circ \gamma)'(0) \in C_{f(p)}(Y)$ PER DEFINIZIONE QUINDI è SENSATO DEFINIRE
$$df_p : C_p(X) \to C_{f(p)}(Y) \quad \text{come} \quad df_p(v) = dF_p(v) = (f \circ \gamma)'(0)$$

OSS $df_p = dF_p|_{C_p(X)}$ DA COME È DEFINITA, QUINDI ESSENDO UNA RESTRIZIONE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE SI ESTENDE BENE SULLE COMB. LINEARI DEL SUO DOMINIO CIOÈ È SENSATO:

$df_p : T_p(X) \to T_p(Y)$ è LINEARE

OSS OVVIAMENTE L'ESTENSIONE APPENA SCRITTA È UNICA

PROP $f: X \to Y \quad g: Y \to Z$

① $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$

② $d(Id_X)_p = Id_{T_p(X)} \quad \forall p \in X$

③ DA 1 e 2 DISCENDE $f: X \to Y$ è un diffeo (ANCHE SOLO LOCALE) se $df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ È UN ISOMORFISMO.

VARIETÀ

DEF $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è UNA VARIETÀ K-DIMENSIONALE se LOC È DIFFEOMORFO AD APERTI DI $\mathbb{R}^k$. CIOÈ $\forall p \in X \ \exists U$ intorno aperto in X e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ APERTO e $\varphi: U \to \Omega$ DIFFEOMORFISMO.

DEF UNA TALE φ SI DICE CARTA

DEF UN INSIEME DI CARTE TC I DOMINI RICOPRONO X SI DICE ATLANTE

DEF $\varphi^{-1}: \Omega \to U$ SI DICE PARAMETRIZZAZIONE LOCALE

LEMMA X VARIETÀ k dimensionale $\Rightarrow \forall p \in X \quad C_p(X) = T_p(X)$ e $\dim T_p(X) = k$ e

INOLTRE $\forall \varphi: U \to \Omega$ CARTA, $\forall p \in U \quad T_p(X) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k)$

DIMOSTRAZIONE $\varphi^{-1}: \Omega \to U$ È UN DIFFEOMORFISMO, dunque $\forall q \in \Omega \ d\varphi^{-1}_q$ DÀ UNA BIGEZIONE TRA I CONI E UN ISOMORFISMO TRA GLI SPAZI TANGENTI.

DUNQUE $T_{\varphi^{-1}(q)}(X) = d\varphi^{-1}_{(q)}(T_q(\Omega)) = d\varphi^{-1}_{(q)}(C_q(\Omega)) = d\varphi^{-1}_q(\mathbb{R}^k)$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ APERTO $\Rightarrow T_q(\Omega) = C_q(\Omega) = \mathbb{R}^k$

DA CUI $\varphi^{-1}(q) = p \quad q = \varphi(p)$ si HA

$$T_p(X) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k) \quad \text{INOLTRE } d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}\left(C_{\varphi(p)}(\Omega)\right) \overset{1}{=} C_p(X)$$

BIGEZIONE TRA CONI DI $d\varphi^{-1}$

E QUINDI SI OTTIENE ANCHE $T_p(X) = C_p(X)$.

quindi $d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$ È UN DIFFEOMORFISMO TRA $\mathbb{R}^k$ e $T_p(X)$ e quindi ci dà la dimensione voluta.

OSS In tutta la dimostrazione è stato usato $C_p(U) = C_p(X)$.
A priori $C_p(U) \subseteq C_p(X)$ ma poiché U è aperto in X ha tutte le direzioni di X a patto di restringere gli ε. Inoltre $T_p(U) = T_p(X)$ in quanto U è aperto.

COROLLARIO Varietà diffeomorfe hanno la stessa dimensione.

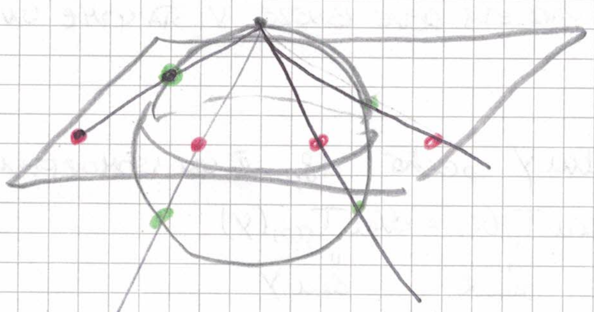
DIM Un diffeomorfismo dà isomorfismi su spazi tangenti e quindi le dim degli spazi tangenti coincidono, quindi coincidono le dim delle varietà.

ESEMPI - Ogni aperto di $\mathbb{R}^m$ è una m-varietà (è isomorfa a sé con $Id_{\mathbb{R}^m}$)

- Ogni aperto di una k-varietà è una k varietà (basta restringere le carte)

ESERCIZIO $S^m = \{ x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \|x\| = 1 \}$ è una m-varietà.

Un modo economico di carte sarebbe usare proiezioni stereografiche ma non sono facili da scrivere (2 sole carte con 2 poli)



Andiamo invece a proiettare ortogonalmente ad ogni piano $\{x_i = 0\}$ ognuna delle $2i$ semisfere.

QUINDI $\forall i = 1, \ldots m$ $U_i^+ = \{x_i > 0\} \cap S^m$ posto $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^m$

$U_i^- = \{x_i < 0\} \cap S^m$

$$\varphi_i^\pm \quad U_i^{\pm} \longrightarrow \mathcal{B}$$
$$(x_1, \ldots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_{m+1}) \quad (x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_m)$$

$\mathcal{B}$ è effettivamente il codominio infatti

$$\|\varphi_i^\pm(x)\|^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} x_j^2 = 1 - x_i^2 < 1 \quad \text{perché } x_i > 0 \ (o\ x_i < 0)$$

$\varphi^\pm$ è C^∞ perché è solo una restrizione.

$$(\varphi_i^\pm)^{-1} : B \longrightarrow U_i^\pm$$

$$(x_1 \dots x_{i-1}, x_i, \dots x_n) \longrightarrow \left(x_1 \dots x_{i-1}, \pm\sqrt{1-\sum_{j=1}^{n} x_j}\,, x_i, \dots x_n\right)$$

È C^∞ perché la radice non va mai a 0 e quindi non ho problemi di derivabilità e sono ovviamente una l'inversa dell'altra.

OSS per φ dovevo dire che era una restrizione di una funzione C^∞ mentre per le φ^{-1} dovevo solo verificare fossero C^∞ in quanto definite su un aperto

Concludo dicendo che $S^n = \bigcup_i (U_i^+) \cup \bigcup_i (U_i^-)$

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ TRA VARIETÀ

$f : X \longrightarrow Y$ tra varietà $p \in X$ se $df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ è un isomorfismo

$\Rightarrow \exists\, U_1 \subseteq X$ e $U_2 \subseteq Y$ $p \in U_1$ tc $f|_{U_1} : U_1 \to U_2$ è un diffeomorfismo.

PENSIERO ASTRATTO vicino a un punto p una varietà deve essere vista come un aperto di $\mathbb{R}^k$.

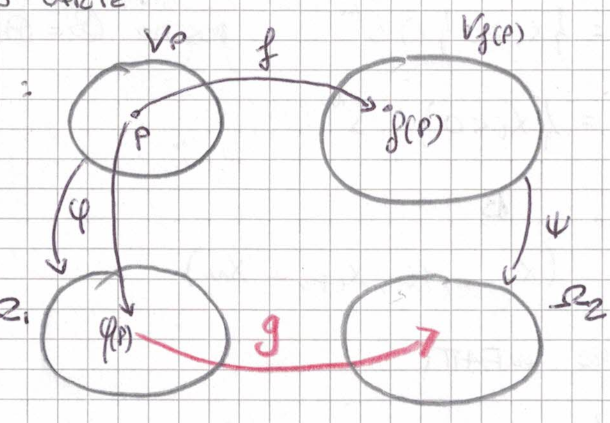
DIM dalle ipotesi deduco che $\dim X = \dim Y$ perché df_p è un isomorfismo tra gli spazi tangenti. $\Rightarrow \underbrace{\dim T_p(X)}_{\dim X} = \underbrace{\dim T_{f(p)}(Y)}_{\dim Y}$

$\exists\, V_p \subset X$ e $V_{f(p)} \subset Y$ $p \in V_p$ e $f(p) \in V_{f(p)}$ tc

$\varphi : V_p \longrightarrow \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ $\quad \psi : V_{f(p)} \longrightarrow \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ $\quad \Omega_i$ aperti di $\mathbb{R}^k$

φ e ψ sono carte

IDEA :



— Voglio rapp. f tramite g.

OSS a meno di restringere V_p posso supporre $f(V_p) \subseteq V_{f(p)}$ poiché f è continua. E posso considerare

$$g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

Voglio applicare il teo di invertibilità sugli aperti a g
QUINDI CALCOLO $dg_{\varphi(p)}$

$$dg_{\varphi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$$

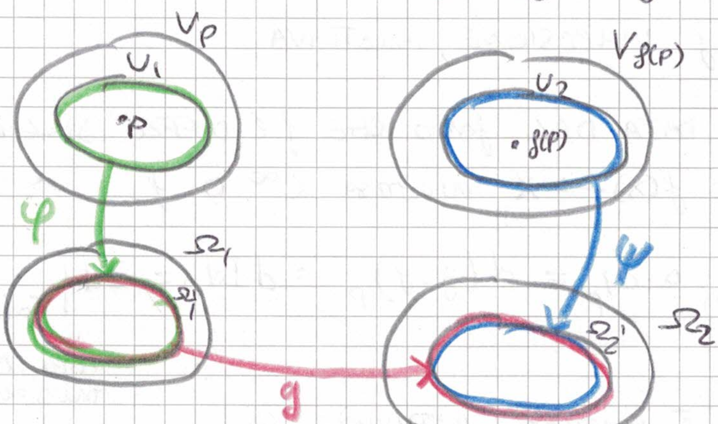
$d\psi$ e $d\varphi^{-1}$ SONO ISOMORFISMI PERCHÉ φ^{-1} e ψ SONO DIFFEOMORFISMI

df_p È ISOMORFISMO PER IPOTESI

$\Rightarrow$ $dg_{\varphi(p)}$ È COMPOSIZIONE DI ISOMORFISMI, QUINDI È UN ISOMORFISMO

$\Rightarrow$ g È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE PER TEO DI INVERTIBILITÀ LOCALE SUGLI APERTI.

QUINDI $\exists\ \Omega_1' \subseteq \Omega_1$ e $\Omega_2' \subseteq \Omega_2$ tc $g: \Omega_1' \longrightarrow \Omega_2'$ È DIFFEO.



CON φ, g, ψ DIFFEOMORFISMI

QUINDI PONGO $U_1 = \varphi^{-1}(\Omega_1')$ e $U_2 = \psi^{-1}(\Omega_2')$
CHE SONO APERTI PERCHÉ CONTROIMMAGINI DI APERTI TRAMITE DIFFEOM.

$\Rightarrow$ $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ È UN DIFFEOMORFISMO PERCHÉ COMP. DI DIFFEOMORFISMI
e RESTA DA PROVARE CHE HA IMMAGINE PROPRIO V_2
MA DISCENDE DALLA COSTRUZIONE

$$\psi^{-1} \circ g \circ \varphi(U_1) = \psi^{-1} \circ g(\Omega_1') = \psi^{-1}(\Omega_2') = U_2$$

DEF $f : X \to Y$ TRA VARIETÀ SI DICE <u>IMMERSIONE</u> se $df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ È INIETTIVO $\forall p \in X$

N.B NON È RICHIESTA L'INIETTIVITÀ DI f.

DEF $f : X \to Y$ TRA VARIETÀ È UN <u>EMBEDDING</u> SE È UN DIFFEOMORFISMO CON L'IMMAGINE. CIOÈ $f : X \to f(X)$ È DIFFEO.

ESEMPI 1) <u>UNA CURVA REGOLARE</u> È UN'IMMERSIONE IN QUANTO IL SUO DIFFERENZIALE È LA SUA VELOCITÀ ED È INIETTIVO PERCHÉ $\neq 0$ PER IP. DI REGOLARITÀ

2) L'INCLUSIONE $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ È UN EMBEDDING OVVIAMENTE PERCHÉ $i_{|_{S^2}} : S^2 \to i(S^2) = S^2$ È L'IDENTITÀ.

PROP f EMBEDDING $\Rightarrow$ f IMMERSIONE, INIETTIVA

DIM L'INIETTIVITÀ È DATA DAL fatto CHE f È DIFFEO SULL'IMMAGINE ~~INFATTI~~ INOLTRE sia $g : f(X) \to X$ INVERSA C^∞ DI f

ALLORA $\forall p \in X$ $\quad dg_{f(p)} \circ df_p = d(g \circ f)_p = d\,Id_p = Id|_{T_p(X)}$

$Id|_{T_p(X)}$ = IDENTITÀ TRA SPAZI TANGENTI

DA CUI df_p È INIETTIVO. ALTRIMENTI LA SUA COMP. A DESTRA NON DAREBBE MAI $Id_{T_p(X)}$

N.B UN'IMMERSIONE INIETTIVA PUÒ NON AVERE INVERSA C^∞ SULL'IMMAGINE E QUINDI NON ESSERE UN DIFFEOMORFISMO SULL'IMMAGINE (CIOÈ NON È EMBEDDING)

ESEMPIO $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^2}{1+t^4} \right)$ <u>il FIOCCO</u>.

$f'(t) = \frac{1}{(1+t^4)^2} \left(1 - 3t^4, 2t(1-t^2) \right) \neq 0 \quad \forall t$ QUINDI È UNA CURVA REGOLARE E QUINDI f È UN'IMMERSIONE

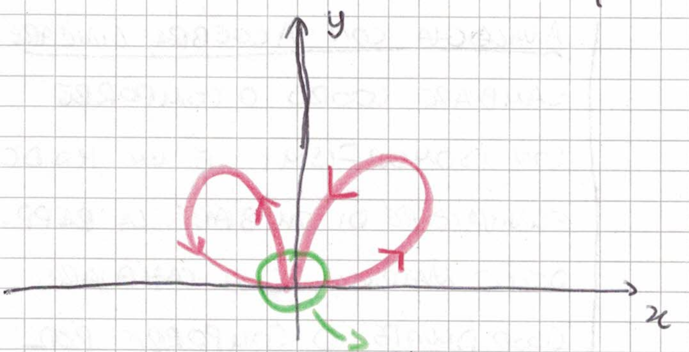
INOLTRE f È INIETTIVA: se $f(t_1) = f(t_2)$ e $t_1 \neq 0$
$\Rightarrow f(t_1)$ e $f(t_2)$ HA ASCISSA NON NULLA

$$\Rightarrow t_1 = \frac{Y(f(t_1))}{X(f(t_1))} = \frac{Y(f(t_2))}{X(f(t_2))} = t_2$$

INVECE SE $t_1 = 0 \Rightarrow f(t_1) = f(t_2) = (0,0)$ MA QUESTO $\Leftrightarrow t_2 = 0$

DUNQUE f È UN'IMMERSIONE INIETTIVA

COSTRUIAMO $g(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ INVERSA DI f.



UN QUALSIASI APERTO DI $(0,0)$ HA COME PREIMMAGINE SIA PUNTI VICINO A 0, CHE PUNTI VICINI A $\pm\infty$ (SU $\mathbb{R}$) QUINDI g NON È CONTINUA IN $(0,0)$ DUNQUE NON PUÒ ESSERE C^∞ E QUINDI f NON È EMBEDDING

OSS $f: X \to Y$ TRA VARIETÀ, f EMBEDDING $\Rightarrow f(X)$ È UNA VARIETÀ

CIOÈ COSE DIFFEOMORFE A VARIETÀ SONO VARIETÀ PERCHÉ SE PRENDO UN ATLANTE DI X LO POSSO TRASFORMARE TRAMITE f AD UN ATLANTE DI $f(X)$ PERCHÈ COMPOSIZIONE DI DIFFEO È DIFFEO.

TEOREMA (FORMA NORMALE DELLE IMMERSIONI)

Sia $f: X \to Y$ UN'IMMERSIONE TRA VARIETÀ, ALLORA f È LOCALMENTE L'INCLUSIONE DI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE A MENO DI UN'OPPORTUNA SCELTA DELLE COORDINATE IN ARRIVO.

CIOÈ $\forall p \in X$ e $\forall \varphi: U_p \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ CARTA INTORNO A p

$\exists \psi: V_{f(p)} \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ CARTA TALE CHE

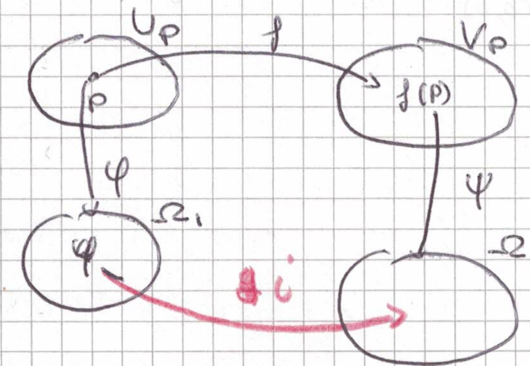
A MENO DI RESTRINGERE U_p AFFINCHÉ $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \Omega_1 \to \Omega_2$ sia definita (CIOÈ $f(U_p) \subseteq V_{f(p)}$) È TALE CHE

$$g(x) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x, 0) \quad \forall x \in \Omega_1 \quad (0 \in \mathbb{R}^{n-m})$$

OSS LA TESI SARÀ VERA LOCALMENTE ANCHE SE df_p È INIETTIVO PER QUALCHE $p \in X$ (CIOÈ NON MI SERVE f IMMERSIONE).

(COSTRUZIONE ^OSSERVAZIONE^ PRELIMINARE CHE CI PERMETTERÀ DI ALLEGGERIRE LA NOTAZIONE, MA È MOLTO IMPORTANTE PERCHÉ SI FA SEMPRE COSÌ).

CAPIAMO MEGLIO COSA DICE IL TEOREMA



ANALOGIA CON ALGEBRA LINEARE: CAMBIARE COORD. O COMPORRE CON ISOMORFISMI È UN MODO EQUIVALENTE DI CAMBIARE LA RAPP. DELLE MATRICI. QUI CAMBIARE COORDINATE O COMPORRE PER DIFFEOMORFISMI *

FISSATA φ TROVO ψ tc i SIA PROPRIO L'IMMERSIONE.

* INOLTRE RISPETTO ALL'ALGEBRA IL TEOREMA È PIÙ PRECISO PERCHÉ FISSATA φ QUALSIASI MI PERMETTE DI TROVARE SEMPRE ψ COME VOGLIO.

<u>DIM</u> Sia $\psi : V_{f(p)} \longrightarrow \Omega_2$ UNA CARTA QUALSIASI INTORNO A $f(p)$ E SI RESTRINGE U_p IN MODO CHE $f(U_p) \subseteq V_p$ CHE SI PUÒ FARE PER CONTINUITÀ DI f.

QUINDI È BEN DEFINITA $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$

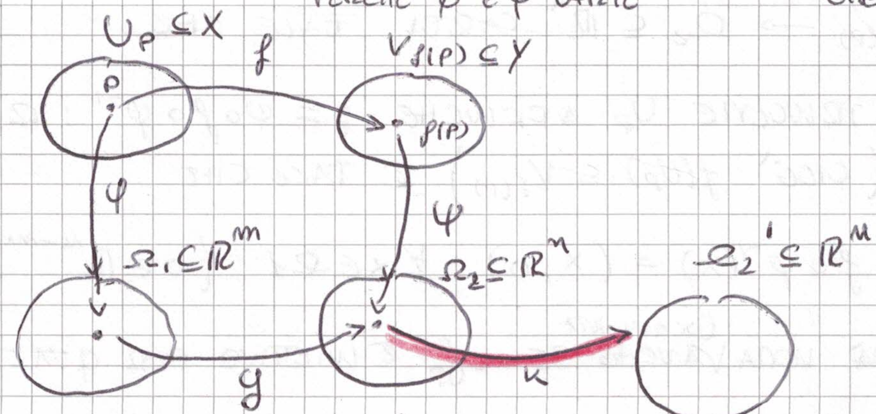
g È UNA MAPPA TRA APERTI DI $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ e

$$dg_{\varphi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ \overbrace{df_p}^{\text{INIETTIVO PER IPOTESI}} \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} \Rightarrow \text{è iniettivo}$$

INIETTIVI PERCHÉ SONO ADDIRITTURA BIGETTIVI PERCHÉ φ e ψ CARTE

$\Downarrow$

ABBIAMO RICAVATO ANCHE CHE $m \leq n$



SE TROVO $k : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_2'$ DIFFEOMORFISMO DI APERTI DI $\mathbb{R}^n$ tc $k \circ g(x) = (x, 0)$ HO FINITO PERCHÉ BASTA CHE PRENDO COME $\overline{\psi}$ CHE RISOLVE IL TEO $\overline{\psi} = k \circ \psi$

IN ALTRE PAROLE POSSO SOSTITUIRE U_p con Ω_1
A PATTO DI SOSTITUIRE φ con L'IDENTITÀ e $V_{f(p)}$ con Ω_2.
CIOÈ DIMENTICO U_p e $V_{f(p)}$ E IDENTIFICO p con $\varphi(p)$ e
$f(p)$ con $g(p)$ IN QUANTO HO GIÀ MOSTRATO CHE

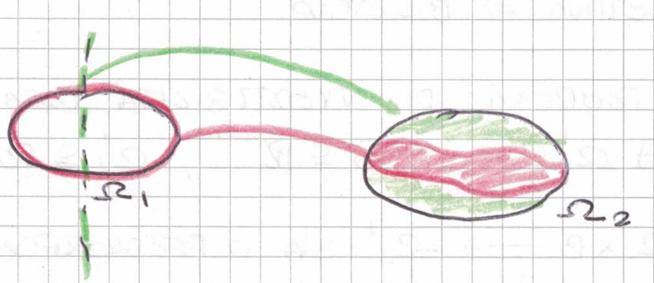
$$dg_{\varphi(p)} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ è INIETTIVA}$$

IN CONCLUSIONE ~~POSSO~~ HO DIMOSTRATO CHE POSSO RIDURRE A STUDIARE IL PROBLEMA CON p IN UN APERTO $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ e $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ APERTI DI $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, TANTO SE df_p è INIETTIVO LO È ANCHE $dg_{\varphi(p)}$ e SE k RADDRIZZA g, $k \circ \varphi$ RADDRIZZA f.

QUESTA È LA COST... CHE SEMPLIFICA I CONTI

<u>DUNQUE</u> $\quad g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \quad p \in \Omega_1 \quad dg_p$ INIETTIVA

QUELLO CHE DOVRÒ FARE È AGGIUNGERE DIMENSIONI A Ω_1
E MANDARE LE DIREZIONI AGGIUNTE IN UN COMPLEMENTARE H



PRENDO H COMPLEMENTARE in $\mathbb{R}^n$ di $dg_p(\mathbb{R}^m)$ con BASE $\{v_1, \dots, v_{n-m}\}$

COSTRUISCO $G : \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x, t_1, \dots, t_{n-m}) \longrightarrow g(x) + t_1 v_1 + \dots + t_{n-m} v_{n-m}$$

G è OVVIAMENTE C^∞ e MOSTRO CHE $dG_{(p,0)}$ è BIGETTIVO
DATO CHE ORA HA SENSO FARLO VISTO CHE LE DIM. IN PARTENZA ED IN ARRIVO COINCIDONO.

PER QUESTIONI DI DIMENSIONE BASTA VEDERE CHE SIA SURGETTIVO PER AVERE LA ~~SURGETTIVITÀ~~. INIETTIVITÀ.

PRENDIAMO $i : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-m}$ $\quad$ SI HA CHE $g = G \circ i$
$\qquad x \longrightarrow (x, 0)$ $\quad$ DEDUCO CHE

$$dg_p = dG_{(p,0)} \circ di_p$$

DA CUI PER L'INIETTIVITÀ DI di_p SI HA CHE

$$dg_p(\mathbb{R}^m) \subseteq dG_{(p,0)}(\mathbb{R}^n)$$

CIOÈ dG_p CONTIENE TUTTA L'IMMAGINE DI dg_p.

Sia $J: \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-m}$

$(t_1, \dots, t_{n-m}) \longrightarrow (p, t_1, \dots, t_{n-m})$

$\Rightarrow G \circ J = g(p) + \sum_{i=1}^{n-m} t_i v_i$ CHE È UNA FUNZIONE AFFINE

E QUINDI IL SUO DIFFERENZIALE COINCIDE CON LA SUA PARTE LINEARE.

E $d(G \circ J)_0$ È UN'ISOMORFISMO TRA $\mathbb{R}^{n-m}$ e H IN QUANTO I v_i SONO UNA BASE DI H.

QUINDI $H = d(G \circ J)_0 (\mathbb{R}^{n-m}) = dG_{(p,0)} \circ dJ_0 (\mathbb{R}^{n-m})$ cioè

$dG_{(p,0)}$ CONTIENE TUTTO H PERCHÉ ALTRIMENTI LA SUA COMP. A SINISTRA NON POTREBBE MAI DARE H.

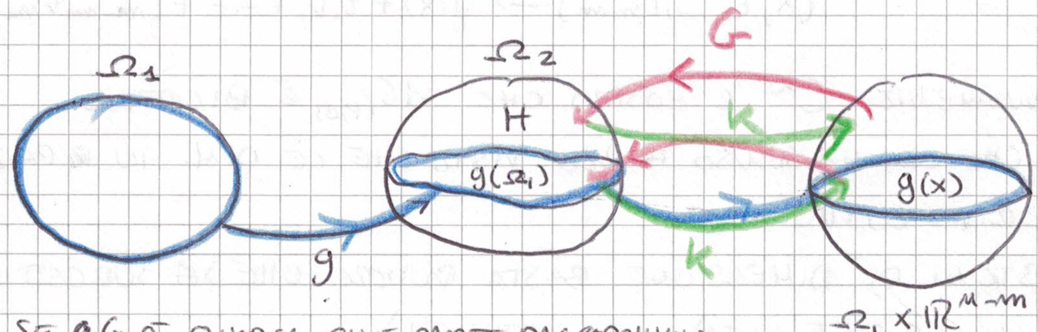
<u>CONCLUDENDO</u> $dG_{(p,0)}(\mathbb{R}^n) \supseteq H + dg_p(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$ PERCHÉ H È COMPLEMENTARE A $dg_p(\mathbb{R}^m)$

E QUINDI $dG_{(p,0)}$ È SURGETTIVO $\Rightarrow$ BIGETTIVO.

ALLORA POSSO APPLICARE IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE SU APERTI A G, E QUINDI $\exists\, \Omega_1' \subseteq \Omega_1$, $B \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, $\Omega_2' \subseteq \Omega_2$ APERTI tc $G|_{\Omega_1' \times B} : \Omega_1' \times B \longrightarrow \Omega_2'$ SIA DIFFEOMORFISMO

PONGO $k = G'$

VEDIAMO PERCHÉ QUESTO È SENSATO: (IN MODO INFORMALE)



CIOÈ SE G È QUELLA CHE PARTE DAL DOMINIO RADDRIZZATO, $\Rightarrow$ IL PERCORSO — CHE APPLICA g E POI k (INVERSA DI G) DEVE FINIRE NEL CODOMINIO RADDRIZZATO

<u>FORMALIZZANDO</u>: $G(k(g(x))) = Id(g(x)) = \underbrace{g(x) = G(x,0)}$

APPLICANDO K

$k \circ g(x) = k(G(x,0)) = (x,0)$

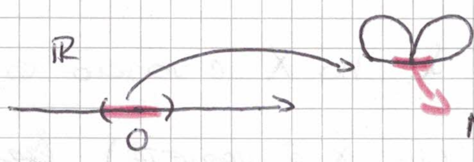
COME VOLUTO. □

COROLLARIO $f: X \to Y$ IMMERSIONE $\Rightarrow \forall p \in X \ \exists U_p \ni p$ APERTO IN X tc $f|_{U_p} : U_p \to f(U_p)$ è UN DIFFEOMORFISMO.

DIM A MENO DI UN'OPPORTUNA SCELTA DI CORDINATE SI PUÒ OTTENERE $f(x) = (x, 0)$ IN UN INTORNO DI p DA CUI LA TESI PERCHÈ L'IMMERSIONE DI UN DIFFEO.

ATTENZIONE IL COROLLARIO APPENA SCRITTO PUÒ SEMBRARE CHE CONTRADDICA CIÒ CHE È STATO DETTO ALL'INIZIO TRA IMMERSIONI ED EMBEDDING. MA LA COSA DA OSSERVARE PER NON CADERE IN ERRORE È CHE $f(U_p)$ NON SIA APERTO IN $f(X)$ E CHE QUINDI f NON È UN DIFFEOMORFISMO SULL'IMMAGINE TOTALE. IL PROBLEMA È QUINDI DI NATURA GLOBALE.

INFATTI NELL'ESEMPIO DEL FIOCCO



NON È APERTO NEL FIOCCO.
ANCHE SE I 2 INTERVALLI EVIDENZIATI SONO DIFFEOMORFI.

LEMMA $f: X \to Y$ IMMERSIONE INIETTIVA, SONO FATTI EQUIVALENTI:

1. f è APERTA SULL'IMMAGINE
2. f è UN OMEOMORFISMO ($f: X \to f(X)$ CONTINUA CON INVERSA CONTINUA)
3. f è UN EMBEDDING (DIFFEOMORFISMO SULL'IMMAGINE).

OSS IL LEMMA CHIARISCE CHE LA DIFFERENZA TRA UN EMBEDDING E UN'IMMERSIONE INIETTIVA È UNA QUESTIONE DI NATURA TOPOLOGICA GLOBALE (E NON LOCALE).

③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ① OVVIO PERCHÈ SONO CONDIZIONI SEMPRE PIÙ FORTI.

① $\Rightarrow$ ② f è BIGETTIVA TRA X e $f(X)$ DUNQUE è OMEOMORFISMO se è APERTA (SE PENSATA A VALORI IN $f(X)$)

② $\Rightarrow$ ③ Sia $g : f(X) \to X$ l'inversa di f che è continua

$\forall p \in X \ \exists U_p$ aperto in X tc ~~f(U_p)~~ $f : U_p \to f(U_p)$

è un diffeomorfismo ma $f(U_p)$ è aperto in $f(X)$

(perchè ② $\Rightarrow$ ①) dunque $g : f(U_p) \to U_p$ è diffeo

Deduco quindi che $\forall q \in f(X)$ $\exists$ un aperto di $f(X)$

che contiene q e su cui g è C^∞ dunque g è C^∞ su tutto $f(X)$

e quindi f è diffeomorfismo sull'immagine.

<u>LEMMA</u> $f : X \to Y$ immersione iniettiva tra varietà della stessa dimensione $\Rightarrow$ f è un embedding.

<u>DIM</u> f è aperta per il teorema di inversione locale e quindi la tesi perchè ① $\Rightarrow$ ③.

<u>AVVERTENZA PER GLI ESERCIZI</u>: Se ho X e voglio costruire un atlante per X (senza sapere che X è varietà) ~~[illegible]~~ allora devo mostrare che le carte (o le parametrizzazioni) sono diffeomorfismi. Oppure posso mostrare solo le carte $\varphi \in C^\infty$ con $d\varphi_p$ iniettivo $\forall p$ + una prop. topologica globale (aperta o omeomorfa).

Se invece X so ~~già~~ già che è varietà (vedremo come fare a saperlo) di dimensione m, basta esibire immersioni iniettive con aperti di $\mathbb{R}^m$.

LEZIONE 19/10/2017

TEOREMA (FORMA NORMALE DELLE SOMMERSIONI)

* $f : X \to Y$ una MAPPA TRA VARIETÀ (È UNA SOMMERSIONE) se $p \in X$

$df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}(X)$ È SURGETTIVO.

$\Rightarrow$ $\forall$ CARTA $\psi : V_{f(p)} \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ $V_{f(p)}$ INTORNO DI $f(p)$ in Y

A MENO DI RESTRINGERE $V_{f(p)}$ $\exists \varphi : U_p \to \Omega_1$ intorno di p tc

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega_1 \to \Omega_2$ sia ben definita e

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = \pi(x)$ dove se $m = \dim X$ e $n = \dim Y$

$\pi : \Omega_1 \to \Omega_2$ È LA PROIEZIONE SULLE PRIME n COORDINATE.

CIOÈ LOCALMENTE f È UNA PROIEZIONE.

DIM Per ipotesi df_p SURGETTIVO $\Rightarrow$ $m \geq n$ COME NEL TEOREMA PER LE IMMERSIONI POSSO SUPPORRE $X = \Omega_1$ $Y = \Omega_2$ $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ tra aperti, E $p \in \Omega_1$ df_p SURGETTIVO.

OSS QUANDO VADO DA Ω_1 a Ω_2 È SENSATO PENSARE CHE LE DIREZIONI CHE NON DANNO CONTRIBUTO NELL'IMMAGINE SONO QUELLE di $\ker df_p$ PERCHÉ AL PRIMO ORDINE QUELLE DIREZIONI NON SI MUOVONO, E SONO QUELLE CHE ANDRANNO AGGIUNTE AD Ω_2

$df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ abbiamo $K = \ker df_p$ $\dim K = m - n$ per surgettività di df_p

Sia $\pi : \mathbb{R}^m \to K$ LA PROIEZIONE ORTOGONALE.

Sia $F : \Omega_1 \to \Omega_2 \times K$

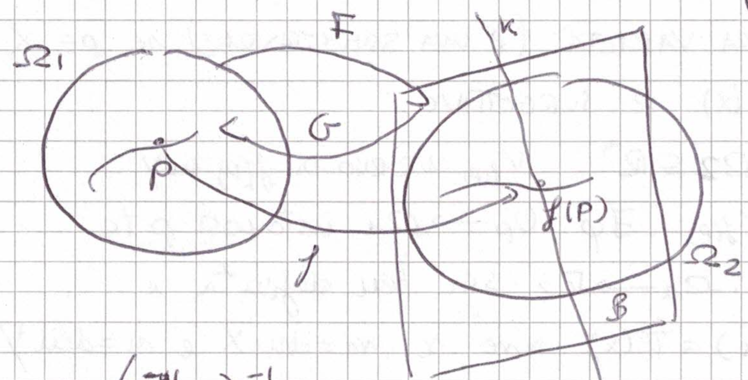
$x \to (f(x), \pi(x))$ PER COSTRUZIONE F È C^∞ perché C^∞ SU TUTTE LE COMPONENTI.

INOLTRE $\Omega_2 \times K$ È DIFFEOMORFO A $\Omega_2 \times \mathbb{R}^{m-n}$ cioè AD UN APERTO DI $\mathbb{R}^m$, DUNQUE F È UNA MAPPA TRA VARIETÀ DELLA STESSA DIMENSIONE.
VOGLIO MOSTRARE CHE dF_p È BIUNIVOCO (E PER QUESTIONI DI DIMENSIONE) MI BASTA MOSTRARE L'INIETTIVITÀ.
POICHÉ π È LINEARE $d\pi = \pi$
DUNQUE

$v \in \ker dF_p \Leftrightarrow (df_p(v), \pi(v)) = 0 \Leftrightarrow 0 = df_p(v) \wedge \pi(v) = 0 \Leftrightarrow$

$v \in \underbrace{\ker df_p}_{K}$ e $\underbrace{\pi(v) = 0}_{\perp K} \Leftrightarrow v = 0$

QUINDI dF_p È UN ISOMORFISMO $\Rightarrow$ PER INVERTIBILITÀ LOCALE A MENO DI RESTRINGERMI A Ω_1', Ω_2', B, CON B intorno di $\pi(p)$ in K, F SI RESTRINGE A UN DIFFEOMORFISMO $F| : \Omega_1' \to \Omega_2' \times B$



CHIAMO $G = \left(F|_{\Omega_1}\right)^{-1}$ è IL CAMBIO DI COORDINATE CERCATO.

$f \circ G : \Omega_2 \times B \to \Omega_2$ È LA PROIEZIONE E CIÒ CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE

INFATTI PER COSTRUZIONE $\forall (x, v) \in \Omega_2 \times B$

$$(x, v) = F\big(G((x,v))\big) = \big(f(G(x,v)), \pi(G(x,v))\big)$$

$$\Downarrow$$

$x = f \circ G(x, v)$ che è LA DEF DI PROIEZIONE.

DEFINIZIONI Sia $f : X \to Y$ TRA VARIETÀ

1) $p \in X$ SI DICE <u>PUNTO CRITICO</u> per f se df_p <u>NON</u> È SURGETTIVO
2) e $p \in X$ SI DICE <u>PUNTO REGOLARE</u> se df_p È SURGETTIVO
3) L'IMMAGINE DI f DEI PUNTI CRITICI DEFINISCE L'INSIEME <u>DEI VALORI CRITICI</u>
4) $q \in Y$ tc q non è UN VALORE ~~REGOLARE~~ CRITICO È UN <u>VALORE REGOLARE</u>

OSS LA DEFINIZIONE COSÌ POSTA DEI VALORI REGOLARI SERVE PERCHÉ UN VALORE q POTREBBE ESSERE IMMAGINE SIA DI UN PUNTO CRITICO CHE NON, OPPURE NON ESSERE IMMAGINE DI NIENTE, MENTRE COSÌ FACENDO UN VALORE $q \in Y$ O È CRITICO O REGOLARE NON C'È ALTRA ALTERNATIVA.

OSS QUINDI VALE CHE $q \in V$ VALORE REGOLARE $\Leftrightarrow \forall p$ tc $f(p) = q$ p PUNTI REGOLARI

TEOREMA Sia $f: X \to Y$ tra varietà, $m = \dim X$ e $n = \dim Y$.
Sia $q \in Y$ valore regolare $\Rightarrow f^{-1}(q)$ è una varietà di dimensione $m-n$ e inoltre $\forall p$ in $f^{-1}(q)$ $\quad T_p(f^{-1}(q)) = \ker df_p \subseteq T_p(X)$

DIM Sia $M = f^{-1}(q) \subseteq X$ candidata varietà.

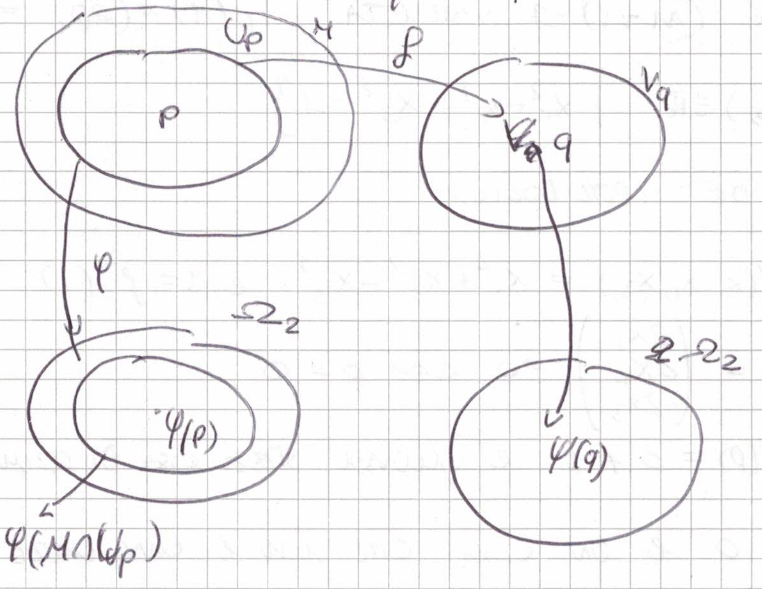
Dato $p \in M$, per il teorema visto (per la suriettività di df_p)
$\exists$ carte $\varphi: U_p \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\psi: V_q \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$

tc $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \Omega_1 \to \Omega_2$ è la proiezione sulle prime n coordinate

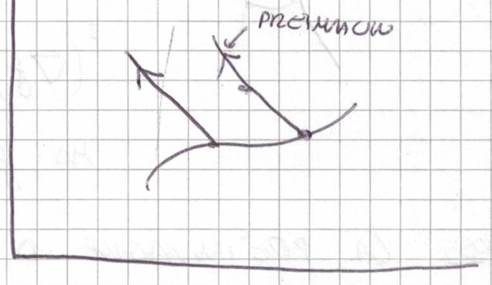
(Quello che vogliamo mostrare è che la controimmagine della proiezione è uno spazio affine e quindi una varietà)

$M \cap U_p$ è un aperto di M ed è diffeomorfo a $\varphi(M \cap U_p)$

Basta quindi vedere che $\varphi(M \cap U_p)$ è una varietà



N.B Le preimmagini di un punto ~~[illegible]~~ di una proiezione ortogonale sono spazi affini della dimensione $m-n$



$\Rightarrow$ dallo schema $\quad \varphi(M \cap U_p) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(\psi(q))$

Dunque è la preimmagine di ~~una proiez~~ un punto tramite una proiezione ortogonale (intersecata con Ω_1) cioè un aperto di uno spazio affine della giusta dimensione

Sia ora $p \in M$, $\forall \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \quad \gamma(0) = p$

$f \circ \gamma \equiv q$ è costante per cui $0 = (f \circ \gamma)'(0) = df_p(\gamma'(0))$

$\Rightarrow T_p(M) \subseteq \ker df_p$ e l'altra inclusione è ovvia, ~~[illegible]~~ per questioni di dimensione.

OSS Il teorema descritto è equivalente al teorema del Dini.

OSS Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad df_p = {}^t(\nabla f_p)$ dove $\nabla f_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$

$\ker df_p = \nabla f_p^{\perp}$ DUNQUE P È REGOLARE $\iff \nabla f_p \neq 0$

e $q \in \mathbb{R}$ è REGOLARE e $p \in f^{-1}(q)$

$\Rightarrow T_p(M) = (\nabla f_p)^{\perp}$

ESEMPIO S^n È UNA VARIETÀ n dimensionale e $T_p(S^n) = p^{\perp}$ $\forall p$

INFATTI SE PRENDO $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^1$, $\quad x \mapsto \|x\|^2$

OSS PRENDO NORMA QUADRA PER EVITARE LA RADICE ED AVERE $f \in C^\infty$

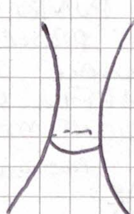
$S^n = f^{-1}(1)$

$\nabla f(x) = 2x \Rightarrow \nabla f_p = 2p$ CHE SI ANNULA $\iff p = 0$

MA $f(p) = 0 \neq 1$ QUINDI 1 È UN VALORE REGOLARE

DUNQUE S^n è una $(n+1)-1$ VARIETÀ $\quad T_p(M) = (2p)^{\perp} = p^{\perp}$

ESEMPIO $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$



IPERBOLOIDE IPERBOLICO

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^3$ e $M = f^{-1}(1)$

${}^t(\nabla f) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ -2x_3 \end{pmatrix} = 0 \iff p = 0$

MA $f(p) = 0 \neq 1$ e quindi STESSA COSA DI PRIMA.

OSS LA PREIMMAGINE DI 0 È UN CONO CHE NON È UNA VARIETÀ PER VIA DEL VERTICE, MA ATTENZIONE IL TEOREMA PRECEDENTE È SOLO UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE.

DEF UN GRUPPO DI LIE G È UNA VARIETÀ C^∞ CON LA STRUTTURA DI GRUPPO TALE CHE LE FUNZIONI

$m: G \times G \to G \quad m(g,h) = g \cdot h$ MOLTIPLICAZIONE

$i: G \to G \quad i(g) = g^{-1}$ INVERSIONE

siano C^∞ in G

OSS Se X e Y sono VARIETÀ $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow X \times Y \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ è UNA VARIETÀ (BASTA COSTRUIRE CARTE CHE SULLE PRIME COMPONENTI SI COMPORTANO COME φ PER X e ψ per Y sulle ULTIME COMP.) e

$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

ESEMPIO $GL(n,\mathbb{R})$ è un gruppo di Lie di dim n^2 in quanto è aperto in $M(n,\mathbb{R})$ che è uno spazio di dim n^2

INFATTI $\det M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua

$$GL(n,\mathbb{R}) = \underbrace{\{ M \in \mathbb{R}^2 \mid \det M = 0 \}}_{\text{CHIUSO}}{}^c$$

CHIUSO $\Rightarrow$ COMPL. DI UN CHIUSO È UN APERTO.

INOLTRE $A \cdot B$ è polinomiale quindi C^∞

A^{-1} è un rapporto di polinomiali con $\det A$ = denominatore sempre $\neq 0$ quindi è C^∞.

DEF G GRUPPO DI LIE, $g \in G$

$\Rightarrow$ $L_g : G \longrightarrow G$, $h \longmapsto gh$ e $R_g : G \longrightarrow G$, $h \longmapsto hg$ MOLTIPLICAZIONE DESTRA E SINISTRA

SONO DIFFEOMORFISMI.

INFATTI

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\text{inversa proiezione}} & G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ h & \longmapsto & (g,h) & \longmapsto & g \cdot h \end{array}$$

L_g = è composizione di funzioni C^∞ quindi C^∞

INOLTRE $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$

ANALOGO PER R_g.

DEF UN <u>OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE</u> è UN OMOMORFISMO C^∞

LEMMA Sia $f : G \longrightarrow H$ OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE

$\Rightarrow$ $\mathrm{Rg}\left(df_g\right)$ è COSTANTE (NON DIPENDE DA $g \in G$)

DIM f OMOMORFISMO se $\forall g, h \in G$ $f(gh) = f(g) \cdot f(h)$

CIOÈ

$$f \circ L_g(h) = L_{f(g)} \circ f(h) \quad \forall g \in G$$

DIFFERENZIANDO DA IN $h = e$

$$df_g \circ \underbrace{dL_g(e)}_{\text{ISOMORFISMI}} = \underbrace{dL_{f(g)}(f(e))}_{} \circ df_e$$

QUINDI PER LE PROP. DELLA COMPOSIZIONE $\mathrm{rg}(df_g) = \mathrm{rg}(df_e)$ $\forall g \in G$

DA CUI LA TESI.

LEZIONE 24/10

DEF $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$

PROP $SL(n,\mathbb{R})$ È UN GRUPPO DI LIE DI DIM n^2-1

PROP PER BWET $SL(n,\mathbb{R})$ È UN SOTTOGRUPPO DI $GL(n,\mathbb{R})$, CHE È UNA VARIETÀ DI DIM n^2. SE MOSTRO CHE 1 È UN VALORE REGOLARE PER LA FUNZIONE $\det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ HO FINITO.
(SO GIÀ CHE MOLT. e INVERSIONE SONO C^∞ COME LO ERANO IN $GL(n,\mathbb{R})$).
INFATTI $\mathbb{R}^*$ È UNA 1-VARIETÀ IN QUANTO APERTO DI $\mathbb{R}$. e $GL(n,\mathbb{R})$ è una n^2-VARIETÀ.
OSSERVO CHE $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ È UN GRUPPO DI LIE, e che det è un OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE DUNQUE PER QUANTO VISTO $rg(d(\det)_A)$ NON DIPENDE DA A in $GL(n,\mathbb{R})$

RICORDIAMO CHE $d(\det)_A : T_A(GL(n)) \to T_{\det A}(\mathbb{R}^*)$

$$\begin{array}{ccc} T_A(GL(n)) & \longrightarrow & T_{\det A}(\mathbb{R}^*) \\ \cong & & \cong \\ \mathbb{R}^{n^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

DUNQUE $rg\, d(\det)_A$ È O ZERO O UNO perché $\dim T_{\det A}(\mathbb{R}^*) = 1$

Se 1 NON FOSSE REGOLARE AVREI CHE $rk\, d\{(\det)_A\} = 0 \ \forall A \in GL(n,\mathbb{R})$
$\iff d(\det)_A = 0 \ \forall A \in GL$ DUNQUE $\det A$ sarebbe localmente COSTANTE

(PER ESERCIZIO: $f: N \to M$ tra varietà, differenziale identicamente nullo $\Rightarrow f$ è loc COSTANTE. <u>SUGG</u>: BASTA PASSARE IN CARTA.)

MA CIÒ È FALSO PERCHÉ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1+t & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R})$ per t PICCOLI

MA $\det(\gamma(t)) = 1+t$ NON È COSTANTE QUANDO $\gamma(t)$ è VICINA A I_d.
E QUINDI IL RANGO NON PUÒ ESSERE 0.

Ex: $d(\det)_{I_d} : M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ CALCOLARLO.
$X \longrightarrow tr X$

IDEA DI COME FARLO. PRENDO $\gamma(t) = I + tX \Rightarrow d(\det_{I_d}) = (\det\circ\gamma)'(0)$

SCRIVERE $(\det\circ\gamma)$ COME FORMULA POLINOMIALE e MOSTRARE CHE

$tr X$ È IL coeff. DEL TERMINE DI PRIMO GRADO e QUINDI $(\det\circ\gamma)'(0)$.

PROP $O(n)$ È UN GRUPPO DI LIE DI DIMENSIONE $\frac{n(n-1)}{2}$

DIM COME PRIMA BASTA SOLO VEDERE CHE È UNA VARIETÀ DELLA DIM GIUSTA (CHE È UN GRUPPO È NOTO).

UNA PRIMA IDEA SAREBBE QUELLA DI FISSARE UNA

$$F: GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow M(n,\mathbb{R})$$
$$A \longrightarrow {}^tA\,A$$

PERCHÉ LA RELAZIONE CHE DEFINISCE $O(n)$ È ${}^tAA = 1$ E QUINDI VERIFICARE 1 VALORE REGOLARE,

MA SE COSÌ FOSSE AVREI DIM $O(n)$ $= n^2 - n^2 = 0$! NON È QUELLO CHE CERCO.

ALLORA L'IDEA È QUELLA DI RESTRINGERE IL CODOMINIO

$$F: GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow S(n) = \text{MATRICI SIMMETRICHE}$$
$$A \longrightarrow {}^tAA$$

POICHÉ $({}^tAA)^t = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$

INOLTRE LA DIM $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ SAREBBE LA DIMENSIONE CHE CERCO.

Se MOSTRO CHE $d(F_A): T_A(GL(n)) \longrightarrow T_{F(A)}(S(n))$ È SURGETTIVO

$T_A(GL(n)) \cong GL(n)$, $T_{F(A)}(S(n)) \cong S(n)$ PERCHÉ SPAZI VETTORIALI

AVRÒ CHE $O(n)$ È UNA VARIETÀ E PER QUANTO OSSERVATO DELLA DIM GIUSTA.

FISSO $A \in O(n)$ e prendo $X \in T_A(GL(n,\mathbb{R})) \cong M(n,\mathbb{R})$ MATRICE QUALSIASI

N.B (X non simmetrica).

CALCOLO $dF_A(X)$. PER FARLO PRENDO $\gamma(t) = A + tX$ $\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to GL$

γ È A VALORI IN GL PER UN CERTO ε PER LA CONTINUITÀ DEL DETERMINANTE.

$\gamma(0) = A$ e $\gamma'(0) = X$ $\Rightarrow dF_A(X) = (F\circ\gamma)'(0)$

$$F\circ\gamma = {}^t(A+tX)(A+tX) = {}^tAA + t({}^tXA + {}^tAX) + t^2\,{}^tXX$$

DUNQUE $(F\circ\gamma)'(0) = {}^tAX + {}^tXA$

PER MOSTRARE CHE È SURGETTIVO DOVREI MOSTRARE CHE $\forall S \in S(n)$ $\exists X \in M(n,\mathbb{R})$ tc ${}^tAX + {}^tXA = S$

PRENDERE $X = \frac{AS}{2}$ RISOLVE, INFATTI:

$${}^tA\frac{AS}{2} + {}^t\!\left(\frac{AS}{2}\right)A = \frac{{}^tAAS}{2} + \frac{{}^tS\,{}^tAA}{2} \underset{A\in O(n)}{=} \frac{S}{2} + \frac{{}^tS}{2} \underset{S\in S(n)}{=} \frac{S}{2} + \frac{S}{2} = S$$

E DA QUI LA SURGETTIVITÀ CERCATA.

OSS RICORDANDO IL TEOREMA SULLE VARIETÀ il $T_{\underset{Id}{A}}(O(n)) = A(n)$ LE ANTISIMMETRICHE.

INFATTI $X \in T_{Id}(O(n)) = \mathrm{Ker} d(F_{Id}) \Leftrightarrow 0 = {}^tIX + {}^tXI \Leftrightarrow$
${}^tX = -X$ cioè
$X \in A(n)$

PROP $O(n)$ CONSISTE DI DUE COMPONENTI CONNESSE $SO(n)$ e $O(n) \setminus SO(n)$.

OSS PER VARIETÀ CONNESSO $\Leftrightarrow$ CONNESSO PER ARCHI C^0 $\Leftrightarrow$ CONNESSO PER ARCHI C^∞ A TRATTI $\Leftrightarrow$ CONNESSO PER ARCHI C^∞

DIM PUNTO 1 DIMOSTRO CHE $SO(n)$ È CONNESSO (PER ARCHI)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ siamo $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ LA MATRICE DI ROTAZIONE.

DATA $A \in SO(n)$ LA VOGLIO COLLEGARE ALL'Id CON UN ARCO.

DA TEOREMI DI GAAL SI SA CHE $\exists B \in O(n)$ tc

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{R(\theta_1)} & & & & \\ & \boxed{R(\theta_2)} & & & \\ & & \ddots\ \boxed{R(\theta_j)} & & \\ & & & \boxed{I_h} & \\ & & & & \boxed{-Id_k} \end{pmatrix}$$

$\det(B^{-1}AB) = \det A \overset{A \in SO(n)}{=} 1$
$\overset{\parallel}{(-1)^k}$ DA CUI k È PARI

QUINDI POSSO SOSTITUIRE $\boxed{-Id_k}$ con $\frac{k}{2}$ BLOCCHI $R(\pi)$

$\Rightarrow$ POSSO ASSUMERE

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{R(\theta_1)} & & \\ & \ddots\ \boxed{R(\theta_j)} & \\ & & \boxed{Id_h} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1, \dots, j$ siano $\overline{\theta}_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\overline{\theta}_i(0) = 0$ e $\overline{\theta}_i(1) = \theta_i$

PRENDO $\gamma(t) = B^{-1} \begin{pmatrix} \boxed{R(\overline{\theta}_1)} & & \\ & \ddots\ \boxed{R(\overline{\theta}_j)} & \\ & & \boxed{Id_h} \end{pmatrix} B$ $t \in [0,1]$

$\gamma(0) = B^{-1} Id\, B = Id$ $\gamma(1) = A$ INOLTRE È

$\gamma(t)$ è C^∞ se lo sono $\overline{\theta}_i(t)$ MA SE PRENDO $\overline{\theta}_i = t\theta_i$ ok

e $\gamma(t) \in O(n)$ PERCHÈ PRODOTTO DI MATRICI $\in O(n)$ e

$\gamma(t) \in SO(n)$ perchè CONIUGATA DI UNA MATRICE $SO(n)$

PASSO 2 ANCHE $O(n) \setminus SO(n)$ È CONNESSO.

INFATTI SE $B \in O(n) \setminus SO(n)$ $L_B : O(n) \to O(n)$ È UN DIFFEO CHE SCAMBIA $SO(n)$ CON IL SUO COMPLEMENTARE, QUINDI SONO DIFFEOMORFI.

PASSO 3 MOSTRO CHE $O(n)$ È SCONNESSO

infatti LA FUNZIONE $\det : O(n) \to \mathbb{R}$ HA IMMAGINE SCONNESSA $\{-1, 1\}$ E QUINDI $O(n)$ HA ESATTAMENTE 2 COMPONENTI CONNESSE

PROP $GL(n,\mathbb{R})$ SI RETRAE PER DEFORMAZIONE FORTE SU $O(n)$ IN MODO CHE $GL^+(n,\mathbb{R})$ $(\det > 0)$ SI RETRAE SU $SO(n)$ E $GL^-(n,\mathbb{R})$ SI RETRAE SU $O(n) \setminus SO(n)$.

CIOÈ $\exists F : GL(n,\mathbb{R}) \times [0,1] \longrightarrow GL(n)$ CONTINUA (OMOTOPIA)

$F(A,0) = A \quad \forall A \in GL(n,\mathbb{R})$

$F(A,1) \in O(n) \quad \forall A \in GL(n,\mathbb{R})$ → QUESTO VUOL DIRE RETRAZIONE

$F(A,t) = A \quad \forall A \in O(n)$ → VUOL DIRE STRETTA CIOÈ FORZO A VALERE L'ID SU $O(n)$

OSS IN REALTÀ F È ANCHE C^∞ SU $GL(n,\mathbb{R}) \times [t_i, t_{i+1}]$ PER QUALCHE PARTIZIONE $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$

DUNQUE (VEDI TRA QUALCHE SETTIMANA) SE SERVE F SI POTRÀ ASSUMERE C^∞ SE DOVESSE SERVIRE.

DIM L'IDEA CHIAVE È QUELLA DI ITERARE CONTINUAMENTE GRAM-SCHMIDT.

OVVERO PARTIRE DA $A = (v_1 | \dots | v_n) \in GL(n,\mathbb{R})$ e

$F(A,1) = (v_1' | \dots | v_n')$ $\quad v_i'$ RISULTATO DI GRAM-SCHMIDT.

INFATTI AD OGNI PASSO

$$v_i'' = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, v_j' \rangle v_j' \quad e \quad v_i' = \frac{v_i''}{\|v_i''\|}$$

ALLORA PER INDUZIONE OGNI v_i' DIPENDE IN MODO C^∞ DAI DATI INIZIALI PRECEDENTI.

PER SCRIVERE L'OMOTOPIA VA FATTO A PASSI

- $t \in [0, t_1]$ RISCALO V_1 A V_1' E LASCIO FERMI V_j $j \geq 2$

  CIOÈ $(V_1, t) \longrightarrow \left(\frac{t}{t_1}\|V_1\| + 1 - \frac{t}{t_1}\right) V_1$

- $t \in [t_1, t_2]$ V_i' $i \leq 2$ FERMI $V_2'' = V_2 - \frac{t-t_1}{t_2-t_1} \cdot \langle V_2, V_1' \rangle V_1'$

- $t \in [t_2, t_3]$ $V_2'' \longrightarrow V_2'$ $(V_2'', t) \longrightarrow \left(1 + \left(\frac{t-t_2}{t_3-t_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\|V_2''\|} - 1\right)\right) V_2''$

IN GENERALE $\forall i$

- $t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$ $V_i \longrightarrow V_i'' = V_i - \frac{t - t_{2i-1}}{t_{2i} - t_{2i-1}} \sum_{j=1}^{i-1} \langle V_i, V_j' \rangle V_j'$

- $t \in [t_{2i}, t_{2i+1}]$ $V_i'' \longrightarrow V_i' = 1 + \left(\frac{t - t_{2i}}{t_{2i+1} - t_{2i}}\right)\left(\frac{1}{\|V_i''\|} - 1\right) V_2''$

LA COSA IMPORTANTE DA NOTARE È CHE GRAM-SMIDTH CONSERVA LA BASE A BANDIERA. IN PARTICOLARE $F(A, t) \in GL(n)$ $\forall t$ DA CUI LA TESI.

COROLLARIO $GL(n)$ HA 2 COMPONENTI CONNESSE GL^+ E GL^-

DIM $F(\cdot, 1)$ È UN'EQUIVALENZA OMOTOPICA TRA $GL(n)$ E $O(n)$.

PROP $SO(2) \cong S^1$ ~~HOMEO~~

DIM $S^1 \longrightarrow SO(2)$

$$(x, y) \longrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \text{ È UN DIFFEOMORFISMO}$$

PROPOSIZIONE $SO(3) \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (OMEOMORFI)

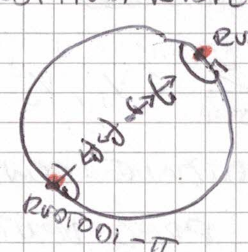
DIM $D^3 = \{V \in \mathbb{R}^3 \mid \|V\| \leq 1\}$

INTUITIVAMENTE

$$\psi : D^3 \longrightarrow SO(3)$$

$V \neq 0 \longrightarrow$ ROTAZIONE DI ASSE $\mathrm{SPAN}(V)$ E $\theta = \pi \cdot \|V\|$ POSITIVA RISPETTO A V.

$V = 0 \longrightarrow Id$



NEI PUNTI • OTTENGO LO STESSO RISULTATO

ψ È SURIETTIVA E $\psi(V) = \psi(W) \Leftrightarrow V = -W$ E $\|V\| = \|W\| = 1$

PER COSE NOTE DI TOPOLOGIA $SO(3)$ È T_2 D^3 È COMPATTO ALLORA ψ INDUCE UN OMEO TRA $D^3/_\sim$ E $SO(3)$ DOVE $v \sim w \Leftrightarrow \psi(v) = \psi(w)$

QUINDI $SO(3)$ SI IDENTIFICA CON IL BORDO DELLA PALLA A PATTO DI IDENTIFICARE I PUNTI ANTIPODALI CHE È LA COSTRUZIONE CANONICA DI $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

LEZIONE 25/10

DEF $M \subseteq \mathbb{R}^N$ UNA K-VARIETÀ ALLORA UN CAMPO TANGENTE ~~SU~~ È UNA FUNZIONE C^∞ $v: M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ t.c. $v(p) \in T_p(M)$ $\forall p \in M$

ATTENZIONE: IL CODOMINIO NATURALE DI v È $\mathbb{R}^N$ E NON $T_p(M)$ PERCHÉ $\forall p \in M$ $T_p(M)$ È DIFFERENTE!!

NOTAZIONE SE NON DICHIARATO DIVERSAMENTE QUANDO SI SCRIVE SOLO CAMPO SI ~~HA~~ SI INTENDE CAMPO TANGENTE.

DEF UN CAMPO NORMALE È UNA FUNZIONE C^∞ $n: M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tc $n(p) \in (T_p(M))^\perp$ $\forall p \in M$.

ESEMPIO
$$n_{1,2}: S^M \longrightarrow \mathbb{R}^{M+1}$$
$$p \longrightarrow \pm p$$
SONO ENTRAMBI CAMPI NORMALI PER QUANTO GIÀ VISTO.

DEF UN FRAME (BASI MOBILI IN ITALIANO) GLOBALE SU M È UNA K-UPLA DI CAMPI TANGENTI tc $V_1(p), \dots, V_k(p)$ SIA UNA BASE DI $T_p(M)$ $\forall p \in M$ con $k = \dim M$

DEF UN FRAME LOCALE SE È UN FRAME SU UN APERTO DI M.

DEF M SI DICE PETTINABILE SE $\exists$ UN CAMPO TG V SU M tc $V(p) \neq 0$ $\forall p$.

NOTA: IL TERMINE "PETTINABILE" DERIVA DALL'IDEA CHE UN CAMPO TANGENTE MI DA LA DIREZIONE LUNGO LA QUALE PETTINARE LA MIA ~~...~~ VARIETÀ.

DEF M SI DICE PARALLELIZZABILE SE AMMETTE UN FRAME GLOBALE.

OSS PARALLELIZZABILE $\Rightarrow$ PETTINABILE, INFATTI OGNI $V_i(p)$ DEL FRAME ESSENDO UN VETTORE DI UNA BASE NON PUÒ MAI ESSERE $= 0$.

IL PROSSIMO ENUNCIATO SERVE A DIMOSTRARE CHE QUESTE DEFINIZIONI NON SONO VUOTE MA CHE CI SONO VARIETÀ CHE NON LE HANNO, E CHE QUELLE CHE CE L'HANNO SONO "PIÙ BELLE".

PROPOSIZIONE S^2 NON È PETTINABILE (DUNQUE NEANCHE PARALLELIZZABILE).

(SPOILER: DIMOSTREREMO CHE S^{2n} NON È PETTINABILE CON STRUMENTI PIÙ FORTI).

DIM PARTIAMO CON UNA DEFINIZIONE (ASSURDA E COMPLICATA)

$$\text{SIA } U_M \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \{(p,v) \mid p \in S^2, v \in T_p(S^2), \|v\| = 1\} =$$

$= \underline{\text{FIBRATO TANGENTE UNITARIO}}$ (UNITARIO PERCHÉ HO CHIESTO $\|v\|=1$)

CIOÈ L'"UNIONE" DI TUTTI GLI SPAZI TANGENTI IN OGNI PUNTO PERÒ L'UNIONE NON AVVIENE SU UN SINGOLO $\mathbb{R}^n$, PERCHÉ ALTRIMENTI CI SAREBBERO SOVRAPPOSIZIONI, MA SU PIÙ $\mathbb{R}^n$.

- SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE S^2 SIA PETTINABILE.
  E SIA QUINDI $v: S^2 \to \mathbb{R}^3$ UN CAMPO MAI NULLO.
  PER LA NON NULLITÀ POSSO RINORMALIZZARLO E SUPPORRE $\|v(p)\| = 1 \quad \forall p \in S^2$

- L'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE STA NEL MOSTRARE CHE U È DIFFEOMORFO SIA A $SO(3)$ (E QUESTO È EFFETTIVAMENTE VERO) MA CON L'IPOTESI ASSURDA DIMOSTRIAMO ANCHE CHE U è DIFFEOMORFO A $S^2 \times S^1$. CONCLUDO OSSERVANDO CHE $SO(3)$ e $S^2 \times S^1$ NON SONO NEANCHE OMEOMORFI.

- DIMOSTRO CHE U è DIFFEO A $SO(3)$

Se $(p,v) \in U \quad v \in (T_p(S^2)) = v^\perp \Rightarrow p$ e v SONO SEMPRE ORTONORMALI (AVENDO PRESO ANCHE v UNITARIO in U)

$\Rightarrow \{p, v, p \wedge v\}$ è $\underline{\text{L'UNICA}}$ BASE ORTONORMALE POSITIVA DI $\mathbb{R}^3$ CON PRIMI 2 VETTORI p e v.

NON È IL CAMPO MA È QUELLO DEL FIBRATO.

DUNQUE $U \longrightarrow SO(3)$

$$(p,v) \longrightarrow \left(p \mid v \mid p \wedge v\right)$$

è C^∞, INIETTIVA E SURIETTIVA.

e HA INVERSA C^∞.

L'UNICA COSA DA CONTROLLARE È CHE PARTENDO DA $SO(3)$ E COMPONENDO LA RESTRIZIONE ALLE PRIME 2 COLONNE E POI DI NUOVO CON LA FUNZIONE SCRITTA TORNI L'$id_{SO(3)}$

$$\left(p, v \mid v_3\right) \longrightarrow (p,v) \longrightarrow \left(p \mid v \mid p \wedge v\right)$$

MA $v_3 = p \wedge v \to$ QUESTO è VERO PER L'UNICITÀ DELLA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^3$ CON PRIMI 2 VETTORI p e v.

- ORA USANDO IL CAMPO V (IPOTESI ASSURDA) MOSTRO CHE U È DIFFEOMORFO A $S^2 \times S^1$

$\forall p \in S^2$ $v(p)$ e $\underbrace{p \wedge v(p)}_{\in T_p(S^2)}$ FORMANO UN FRAME GLOBALE SU S^2
perché $p \in (T_p(S^2))^\perp$
$\Downarrow$
$p \wedge v(p) \perp p$

SIA $\psi : S^2 \times S^1 \longrightarrow U$

$$(p, (\cos\theta, \sin\theta)) \longrightarrow (p, \underbrace{\cos\theta \cdot v(p) + \sin\theta \cdot (p \wedge v(p))})$$

QUESTO FUNZIONA PERCHÉ $V(P)$ e $P \wedge V(P)$ FORMANO UNA BASE ORTONORMALE DI $T_p(S^2)$.

QUINDI ψ È UNA BIGEZIONE

ED È ANCHE C^∞ CON INVERSA C^∞

(OPPURE PER ESERCIZIO PROVARE CHE È VA DA COMPATTO A T_2 E OMEO)

<u>DUNQUE</u> $U \cong SO(3) \overset{\downarrow \text{LEZIONE PRECEDENTE}}{\cong} \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ MA $\pi_1(\mathbb{P}^3(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$U \cong S^2 \times S^1$
e $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$ e QUINDI È ASSURDO CHE SIANO OMEOMORFI.

ORIENTAZIONI TRA VARIETÀ

<u>DEF</u> Sia $M \subseteq \mathbb{R}^N$ UNA K-VARIETÀ, <u>UN'ORIENTAZIONE</u> su M è LA SCELTA DI UN'ORIENTAZIONE SU $T_p(M)$ $\forall p \in M$ IN MODO TALE CHE LA SCELTA SIA LOCALMENTE COERENTE, CIOÈ

$\forall p \in M$ $\exists U_p \subseteq M$ APERTO in M E UN FRAME LOCALE $V_1, \dots, V_k : U \to \mathbb{R}^N$

tc $V_1(q), \dots V_k(q)$ SIA UNA BASE POSITIVA $\forall q \in U_p$

<u>DEF</u> SIA $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow U \subseteq M$ UNA PARAMETRIZZAZIONE LOCALE $k = \dim M$ ALLORA $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \circ \varphi^{-1} \middle| \dots \middle| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \circ \varphi^{-1} \right) =$

$= \left(d\varphi_{\varphi^{-1}(\cdot)}(e_1) \middle| \dots \middle| d\varphi_{\varphi^{-1}(\cdot)}(e_k) \right)$ È UN FRAME LOC SU U

CHE È INDOTTO DA φ. CIOÈ IL DIFFERENZIALE AGISCE IN MODO C^∞ SULLA BASE CANONICA $\{e_i\}$ BASE POS. DEL TG IN Ω e LA PORTA IN UNA BASE DI $T_p(M)$ $\forall p \in U$ IN MODO C^∞.

OSS QUINDI AVENDO MOSTRATO CHE LE PARAMETRIZZAZIONI (EQUIVALENTEMENTE LE CARTE) INDUCONO SEMPRE UN FRAME LOCALE LA DEFINIZIONE DI ORIENTAZIONE È BEN POSTA.

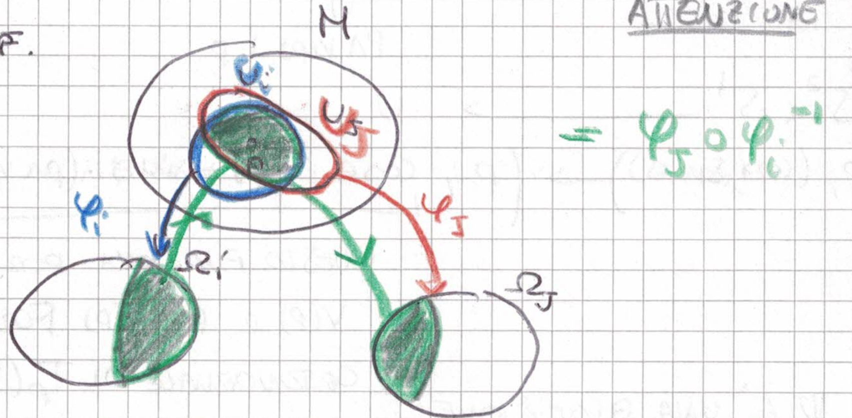
DEF $M \subseteq \mathbb{R}^N$ K-VARIETÀ, UN ATLANTE ORIENTATO DI M

è UN ATLANTE $\{(U_i, \varphi_i) : \varphi_i : U_i \to \Omega_i\}_{i\in I}$ TALE CHE

JACOBIANA $\left(\varphi_J \circ \varphi_i^{-1}\right)_p$ ABBIA DETERMINANTE POSITIVO $\forall p$ DOVE è DEFINITO, CIOè $\forall p \in \varphi_i(U_i \cap U_J)$

ATTENZIONE ADESSO φ_i SONO CARTE NON PARAMETRIZZAZIONI.

idea DELLA DEF.



L'IDEA è QUELLA DI ESSERE SICURI CHE SE UN PUNTO p APPARTIENE A PIÙ INTORNI U_i, U_J CHE L'ORIENTAZIONE SIA COERENTE IN ENTRAMBE LE ~~[illegible]~~ PARAMETRIZZAZIONI.

LEMMA Sia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ UN ATLANTE ORIENTATO $\Rightarrow \exists$ UN'ORIENTAZIONE SU M PER CUI I FRAME LOCALI ASSOCIATI AI φ_i SIANO POSITIVI IN OGNI PUNTO. TALE ORIENTAZIONE SI DICE INDOTTA DALL'ATLANTE.

DIM $\forall p \in M$ DICO CHE LE BASI DEFINITE DALLE φ_i su $T_p(M)$ SONO EQUIVALENTI

MOSTRATO QUESTO HO FINITO PERCHÈ DICHIARANDOLI POSITIVI HO, PER COSTRUZIONE, UNA SCELTA DELL'ORIENTAZIONE DI $T_p(M)$ LOCAL. COERENTE. (CIOè DEVO SOLO STARE ATTENTO A DOVE LE CARTE SI SOVRAPPONGONO).

Siano $\varphi_i : U_i \to \Omega_i$ e $\varphi_J : U_J \to \Omega_J$ CARTE CON $p \in U_i \cap U_J$ QUINDI

DEVO CONFRONTARE LE BASI

$d\varphi^{-1}_{i\,\varphi_i(p)}(e_1), \ldots, d\varphi^{-1}_{i\,\varphi_i(p)}(e_k)$ CON

$d\varphi^{-1}_{J\,\varphi_J(p)}(e_1), \ldots, d\varphi^{-1}_{J\,\varphi_J(p)}(e_k)$.

QUESTE BASI SONO EQUIVALENTI $\iff$ LO SONO LA LORO COMPOSIZIONE CON LO STESSO ISOMORFISMO.

PRENDO COME ISOMORFISMO $(d\varphi_J)_p$ IN MODO ~~DA~~ TALE CHE LA SECONDA BASE DIVENTI $e_1, \ldots, e_k$ E QUINDI BASE POSITIVA.

LA PRIMA INVECE VA IN $d(\varphi_J \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)}(e_1), \ldots, d(\varphi_J \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)}(e_k)$ CHE è ANCHE ESSA POSITIVA PER DEF DI ATLANTE ORIENTATO. E QUINDI SONO EQUIVALENTI.

DEF M è ORIENTABILE se ammette almeno un'orientazione.

DEF M è ORIENTATA se ho scelto un'orientazione

PROP M è orientabile $\Longleftrightarrow$ ammette un atlante orientato.

ATTENZIONE! In molti libri questa prop. è data come definizione di orientabilità.

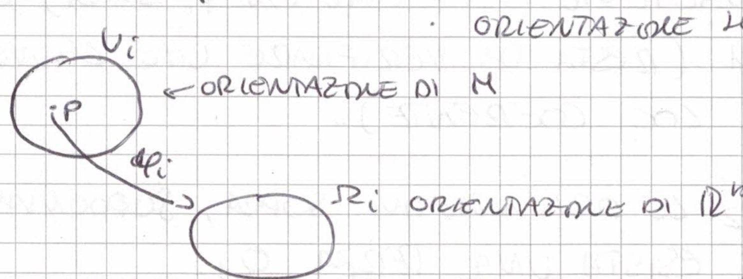
DIM $\Leftarrow$) vedi lemma precedente.

$\Rightarrow$) Supponiamo di mettere su M un'orientazione. E prendiamo $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlante qualsiasi (non orientato).

Possiamo a patto di prendere un atlante più grande supporre U_i connesso $\forall i$.

Dico che $(d\varphi_i)_p$ o è positivo $\forall p \in U_i$ o è negativo $\forall p \in U_i$

$\forall p \in U_i$ ($T_p(M) = \mathbb{R}^k$ con orientazione standard) $(d\varphi_i)_p$ induce un orientazione su Ω_i



Infatti a meno di restringere gli U_i posso assumere che

$\exists\, v_1, \dots, v_k : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^N$ frame locale che induce l'orientazione di $T_p(M)$ $\forall p \in U_i \Rightarrow (d\varphi_i)_p(v_1(p)), \dots, (d\varphi_i)_p(v_k(p))$ è una base di $\mathbb{R}^k$ che dipende in maniera C^∞ da p. Per cui la funzione $p \longrightarrow \det\Big((d\varphi_i)_p(v_1(p)) \Big| \dots \Big| (d\varphi_i)_p(v_k(p))\Big)$ è C^∞ e non si annulla mai. Quindi per connessione di U_i è sempre positivo o sempre negativo. Dunque $d\varphi_i > 0$ o $d\varphi_i < 0$ in ogni punto $p \in U_i$.

- Se $d\varphi_i > 0 \Rightarrow$ pongo $\psi_i = \varphi_i$ $\quad \psi_i : U_i \longrightarrow \Omega_i$
- Se $d\varphi_i < 0 \Rightarrow$ pongo $\psi_i = R \circ \varphi_i$ dove R è una riflessione di $\mathbb{R}^k$
  esempio $R(x_1, \dots, x_k) = (-x_1, x_2, \dots, x_k)$ e ψ_i è diffeo perché composizione di diffeo e $\psi_i : U_i \longrightarrow \underbrace{R(\Omega_i)}_{\text{aperto di } \mathbb{R}^k}$
  e $d\psi_i > 0$ $\forall p \in U_i$.

QUINDI $\{(U_i, \psi_i)\}$ È UN ATLANTE ORIENTATO IN QUANTO

$d(\psi_j \circ \psi_i^{-1}) = d\psi_j \circ d\psi_i^{-1}$ È COMPOSIZIONE, LADDOVE È

DEFINITO $(\psi_i(U_i \cap U_j))$, DI ISOMORFISMI POSITIVI ED È

QUINDI POSITIVO, CHE EQUIVALE AD AVERE DETERMINANTE DELLA JACOBIANA POSITIVO.

PROP M ~~compatta~~ CONNESSA ORIENTABILE $\Rightarrow$ M AMMETTE ESATTAMENTE 2 ORIENTAZIONI

GENERALIZZAZIONE: M K-COMPONENTI CONNESSE ORIENTABILI $\Rightarrow$ M AMMETTE 2^K ORIENTAZIONI

DIMOSTRAZIONE (DA FORMALIZZARE PER BENE PASSAGGI ANALOGHI ALLE DIMOSTRAZIONI PRECEDENTI).

DIM SICURAMENTE PER IPOTESI ESISTE UN'ORIENTAZIONE O_1

INVERTENDOLA PUNTUALMENTE (TIPO COME CON ψ_i SOPRA) SE NE OTTIENE UN'ALTRA. (RESTA DA VERIFICARE CHE L'INVERSIONE LASCIA L'ORIENTAZIONE LOC COERENTE).

ADESSO DETTE O_1 E O_2 LE ORIENTAZIONI SOPRA, SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE NE ESISTA UNA TERZA O_3.

SIA $K_1 = \{$ L'INSIEME DEI PUNTI DOVE O_1 COINCIDE CON L'ORIENTAZIONE $O_3 \}$

E ANALOGO K_2 CON O_2 E O_3. UTILIZZANDO LA ~~nozione~~ LOC COERENZA SI DIMOSTRA CHE SE $p \in K_1 \Rightarrow \exists\, U_p \subseteq K_1$ INTORNO DI p TALE CHE O_1 E O_3 CONTINUANO AD AVERE LA STESSA ORIENTAZIONE. QUINDI QUESTO DIMOSTRA CHE K_1 È APERTO PERCHÉ PER OGNI PUNTO p ESISTE UN INTORNO DI p IN K_1. MA ANCHE K_2 È APERTO PER LO STESSO MOTIVO MA $K_1 \cup K_2 = M$ PER LA CONNESSIONE DI M $K_1 = \emptyset$ O $K_2 = \emptyset$ E QUINDI IN UN CASO $O_3 \equiv O_2$ O $O_3 \equiv O_1$.

PROP $M \subseteq \mathbb{R}^N$ IPERSUPERFICIE ($\dim M = N-1$)

M È ORIENTABILE $\Leftrightarrow$ AMMETTE UN CAMPO NORMALE MAI NULLO.

(LA DIM. FINIRÀ DOMANI INIZIO SOLO LA FRECCIA SEMPLICE).

$\Leftarrow$) SIA $n: M \to \mathbb{R}^N$ CAMPO NORMALE DICO CHE

$(v_1, \dots, v_{N-1})$ È base POSITIVA DI $T_p(M) \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_{N-1}, n(p))$ È base POSITIVA DI $\mathbb{R}^N$.

DEVO CONTROLLARE CHE:

1) LA DEFINIZIONE È BEN POSTA PUNTUALMENTE (CIOÈ CHE STO INDICANDO UNA CLASSE DI EQ DI BASI)

2) È LOC COERENTE.

1) SE $v_1', \dots v_{N-1}'$ È UN'ALTRA BASE DI $T_p(M)$ CON MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE A DA $v_1, \dots v_{N-1}$

$\Rightarrow$ A' LA MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE DA $v_1, \dots v_{N-1}, n(p)$ A $v_1', \dots v_{N-1}', n(p)$ È

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$ e $\det A = \det A'$ DA CUI LA BUONA DEFINIZIONE

2) PER ESERCIZIO ~~(SONO STANCO PER FARLO VEDIAMO DOMANI)~~

LEZIONE 26/10 CONTINUIAMO L'ESERCIZIO DIMOSTRANDO L'ALTRA IMP.

$\Leftarrow$) PER IPOTESI $\exists$ UN RICOPRIMENTO Aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di M tc su ogni U_i sia DEFINITO UN FRAME LOCALE $\{v_1^i, \dots v_{N-1}^i\}: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se $p \in U_i \cap U_j$ LE BASI $\{v_1^i(p), \dots, v_{N-1}^i(p)\}$ e $\{v_1^j(p), \dots, v_{N-1}^j(p)\}$ basi di $T_p(M)$ EQUIVALENTI.

L'IDEA FONDAMENTALE È QUELLA DI PRENDERE I VETTORI NORMALI. POSSO ANCHE SUPPORRE CHE I FRAME SIANO ORTONORMALI A PATTO DI USARE GRAM-SCHMIDT, CHE NON MUTA LA CLASSE DI EQUIVALENZA TRA LE BASI. PERCHÉ LA MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE È TRIANGOLARE SUPERIORE con λ_i sulla DIAG ~~su~~ $\lambda_i >$ CON $\lambda_i = \|v_i\| > 0$ E QUINDI CAMBIO DI BASE EQUIVALENTE.

PONGO $N_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^N$
$$N_i(p) = v_1^i(p) \wedge \dots \wedge v_{N-1}^i(p)$$
E OTTENGO COSÌ UN CAMPO UNITARIO NORMALE SU OGNI U_i

e $\forall p \in U_i$ $v_1^i(p), \dots, v_{N-1}^i(p), N_i(p)$ È UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA DI $\mathbb{R}^N$. $N_i \in C^\infty$ POICHÉ PRODOTTO VETTORE DI FUNZIONI C^∞

PER CONCLUDERE MI BASTA VEDERE CHE $N_i = N_j$ su $U_i \cap U_j$.

Se A è la matrice di cambio di base da $\{v_h^i\}$ ai $\{v_h^j\}$ $h \in \{1, \dots, N-1\}$ allora poiché i frame sono eq e ortonormali $\det A = 1 > 0$

So che $N_i(P) = \pm N_j(P)$ perché sono vettori unitari in $(T_p(M))^\perp$ che è uno spazio di dimensione 1

$\Rightarrow$ Sia A' la matrice di cambio di base tra $v_1^i(P), \dots, v_{N-1}^i(P), N_i(P)$ e $v_1^j(P), \dots, v_{N-1}^j(P), N_j(P)$ dove $N_i(P) = \varepsilon N_j(P)$

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon \end{array}\right)$$

Ma le basi sono positive in $\mathbb{R}^N$ $\Rightarrow \det A' = \det A \cdot \varepsilon > 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon > 0$ dunque $\varepsilon = 1$ cioè $N_i(P) = N_j(P)$ $P \in U_i \cap U_j$

e $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ con $N|_{U_i} : U_i \longrightarrow N_i$ è il campo normale cercato.

<u>COROLLARIO</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di $f \Rightarrow M = f^{-1}(\lambda)$ (che è un'ipersuperficie) è orientabile.

<u>DIM</u> $\forall p$ def $N \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$p \longrightarrow (\nabla f)_p = {}^t(df)_p$ poiché λ è regolare $N(P) \neq 0$ $\forall p \in M$

Inoltre $(T_p(M)) = (\nabla f_p)^\perp$ da cui $N(P) \in (T_p(M))^\perp$ e $N \in C^\infty$.

<u>COROLLARIO</u> S^n è orientabile e $SL(n, \mathbb{R})$ è orientabile.

<u>OSS</u> parallelizzabile $\Rightarrow$ orientabile ma S^2 mostra che il contrario è falso.

TEORIA METRICA DELLE SUPERFICI

STUDIAMO 2-VARIETÀ IN $\mathbb{R}^3$ DAL PUNTO DI VISTA METRICO (CIOÈ INSERENDO LA DISTANZA).

DEF Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è UNA SUPERFICIE UNA VARIETÀ 2-DIMENSIONALE

NOTAZIONE: PER COMODITÀ SUPPORREMO SEMPRE S ORIENTATA COERENTEMENTE CON UN CAMPO N COME APPENA VISTO IN DIMENSIONE QUALSIASI (CIOÈ V_1, V_2 BASE POS. DI $T_p(S) \Rightarrow V_1, V_2, N$ BASE POS. DI $\mathbb{R}^3$)

NOZIONE GENERALE: IL PRODOTTO SCALARE STANDARD DI $\mathbb{R}^3$, SI RESTRINGE AD UN PRODOTTO SCALARE SU $T_p(S)$ $\forall p \in S$ CHE SI CHIAMA I FORMA FONDAMENTALE.

QUINDI PASSANDO IN COORDINATE:

Se $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow U \subseteq S$ UNA PARAMETRIZZAZIONE LOCALE ESSA INDUCE UN FRAME SU U $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \circ \varphi^{-1}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \circ \varphi^{-1}\right)$

dove (u,v) COORDINATE DI φ.

I COEFF DELLA PRIMA FORMA FOND. RISPETTO A φ SONO

$$E = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle \qquad F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle \qquad G = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle$$

PER CUI LA MATRICE CHE RAPPRESENTA LA I FORMA FOND RISPETTO A φ è (INTENDENDO RISPETTO AL FRAME INDOTTO DA φ)

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

E, F, G SONO FUNZIONI DI $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

ATTENZIONE: A VOLTE SI CONFONDONO FUNZIONI DEFINITE SU Ω CON LE CORRISPONDENTI FUNZIONI (TRAMITE φ e φ^{-1}) DEFINITE SU U.

AD ESEMPIO $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \circ \varphi^{-1}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \circ \varphi^{-1}$ SONO UN FRAME SU U e A VOLTE SI TOGLIE φ^{-1}

DEF LA MAPPA DI GAUSS DI S è

$N: S \longrightarrow S^2$ DOVE N è IL CAMPO NORMALE UNITARIO COERENTE CON L'ORIENTAZIONE.

(FARÀ COMODO VEDERLA COME UNA FUNZIONE TRA LA VARIETÀ S e LA VARIETÀ S^2).

OSSERVIAMO CHE $T_p(S) = (N(P))^\perp = T_{N(P)}(S^2)$

DUNQUE $dN_p : T_p(S) \longrightarrow T_{N(P)}S^2$ È UN ENDOMORFISMO DI $T_p(S)$

PROP $\forall p \in S$ dN_p È UN ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO.

DIM BASTA VERIFICARE CHE $\langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle$ PER v, w IN UNA BASE DI $T_p(S)$

FISSO UNA PARAMETRIZZAZIONE $\varphi : \Omega_p \to U_p$ INTORNO DI P.
E COME BASE PRENDO IL FRAME INDOTTO $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \circ \varphi^{-1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \circ \varphi^{-1}$

(PRESTO TOGLIEREMO "$\circ\varphi^{-1}$" COME ABBIAMO ACCENNATO).

RESTA SOLO DA GIUSTIFICARE:

$$\langle dN_p\left(\frac{d\varphi}{\partial u} \circ \varphi^{-1}\right), \frac{d\varphi}{\partial v} \circ \varphi^{-1} \rangle = \langle \frac{d\varphi}{\partial u} \circ \varphi^{-1}, dN_p\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \circ \varphi^{-1}\right) \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle dN_p\left(\frac{d\varphi}{\partial u}\right), \frac{d\varphi}{\partial v} \rangle = \langle \frac{d\varphi}{\partial u}, dN_p\left(\frac{d\varphi}{\partial v}\right) \rangle$$ questo perché

$\forall p \in U$ $\varphi^{-1}(p) \in \Omega$ E QUESTO GIUSTIFICA PERCHÉ IN GENERALE POSSO TOGLIERE φ^{-1}

$$\Leftrightarrow \langle \frac{d(N \circ \varphi)}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial (N \circ \varphi)}{\partial v} \rangle$$

CONSIDERO $\langle N \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle \equiv 0$ PERCHÉ $N \circ \varphi \in N_p(S)$
e $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \in T_p(S)$

DERIVANDO RISPETTO A U

$$\langle \frac{\partial (N \circ \varphi)}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle + \langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \rangle = 0$$

PER SIMMETRIA $\langle N \circ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \rangle \equiv 0$ E DERIVO RISPETTO A V

$$\langle \frac{\partial (N \circ \varphi)}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \rangle + \langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u} \rangle \equiv 0$$ POICHÉ $\varphi \in C^\infty$

PER IL TEO DI SCHWARTZ HO LA TESI.

DUNQUE $\langle dN_p\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right), \frac{\partial \varphi}{\partial v} \rangle = - \langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \rangle$

DEFINIZIONE LA II FORMA FONDAMENTALE SU $T_p(S)$ È LA FORMA BILINEARE OTTENUTA "TWISTANDO" LA PRIMA CON $-dN_p$

cioè $\mathrm{II}(w,z) = \mathrm{I}(w, -dN_p(z)) = \langle w, -dN_p(z)\rangle =$

$= -\langle w, dN_p(z)\rangle$

OSS POICHÉ dN_p È AUTOAGGIUNTO $\Rightarrow$ II È SIMMETRICA (MA PUÒ ESSERE NULLA, SEMIDEFINITA, NON DEFINITA...).

AD ESEMPIO PRENDO UN PIANO N_p = COSTANTE $dN_p = 0 \Rightarrow \mathrm{II} = 0$

I COEFFICIENTI DELLA SECONDA FORMA, RISPETTO AL FRAME INDOTTO DA φ, SONO:

$$e = \mathrm{II}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = -\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}, dN_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, N\circ\varphi\right\rangle$$

$$f = \mathrm{II}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = -\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}, dN_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right\rangle = \left\langle N\circ\varphi, \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right\rangle$$

$$g = \mathrm{II}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = -\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}, dN_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}, N\circ\gamma\right\rangle$$

INFATTI f = quello dim. PRECEDENTE

$0 \equiv \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}, N\circ\gamma\right\rangle$ DERIVANDO RISPETTO A v

$$0 = \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}, N\circ\gamma\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \underbrace{\frac{\partial(N\circ\gamma)}{\partial v}}_{= dN_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)}\right\rangle$$

(con $\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}, N\circ\gamma\right\rangle = g$) ANALOGO PER e.

DEF $\gamma : I \to S$ PLA (NON NECESSARIO BASTEREBBE RIPARAMETRIZZARE) CURVA

ALLORA CURVATURA NORMALE DI γ in t è $K_n(t) = \langle \gamma''(t), N(\gamma(t))\rangle$

CIOÈ LA COMPONENTE NORMALE DELLA CURVATURA.

PROP $\gamma : I \to S$ PLA ALLORA $K_n(t) = \mathrm{II}(\gamma'(t), \gamma'(t))$ IN PARTICOLARE DIPENDE SOLO DA $\gamma'(t)$ CIOÈ LA COMPONENTE NORMALE DI γ SU S DIPENDE SOLO DALLA VELOCITÀ DI γ e DALLA STRUTTURA DI S.

DIM POICHÉ $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}(S)$ e $N(\gamma(t)) = (T_{\gamma(t)}(S))^{\perp}$

$0 = \langle \gamma', N\circ\gamma\rangle$ DUNQUE

$$0 = \langle \underbrace{\gamma''(t), N\circ\gamma(t)}_{= K_n(\gamma(t))}\rangle + \underbrace{\langle \gamma'(t), dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\rangle}_{= -\mathrm{II}(\gamma'(t), \gamma'(t))} \qquad \square.$$

LEZIONE 31/10

S ~~p~~ SUP ORIENTATA DA $N: S^2 \longrightarrow S^2$ VERSORE NORMALE UNITARIO

$dN_p : T_p(S) \to T_{N(p)}(S^2) = T_p(S)$ è UN ENDOMORFISMO AUTOAGGIUNTO

PERTANTO IL dN_p AMMETTE UNA BASE ORTONORMALE DI AUTOVETTORI.

<u>DEFINIZIONE</u> GLI AUTOSPAZI DI dN_p SI CHIAMANO <u>DIREZIONI PRINCIPALI</u>
E GLI AUTOVALORI DI $-dN_p$ SI CHIAMANO <u>CURVATURE PRINCIPALI</u>

Se $dN_p = \lambda I_d$ SI DICE CHE ~~...~~ TUTTE LE DIREZIONI SONO PRINCIPALI
E VI SONO 2 CURVATURE PRINCIPALI COINCIDENTI.

ALTRIMENTI LE DIREZIONI PRINCIPALI SONO ORTOGONALI TRA LORO.

<u>DEF</u> LA <u>CURVATURA MEDIA</u> DI S IN p è ~~LA~~ SEMISOMMA DELLE CURVATURE PRINCIPALI CIOè $-\frac{tr(dN_p)}{2}$

<u>DEFINIZIONE</u> IL PRODOTTO DELLE CURVATURE PRINCIPALI $= \det(-dN_p) =$
$= \det(dN_p)$ PERCHé dN_p è 2×2 SI CHIAMA CURVATURA DI GAUSS e SI INDICA CON $K(P)$.

<u>OSS</u> CAMBIANDO L'ORIENTAZIONE DI S CIOè SCAMBIANDO N CON $-N$ LE CURVATURE PRINCIPALI CAMBIANO DI SEGNO MA QUELLA DI GAUSS NO.

<u>DEF</u> γ DA $I \longmapsto S$ è UNA <u>LINEA DI CURVATURA</u> se $\gamma'(t)$ GIACE SU UNA CURVATURA PRINCIPALE $\forall t \in I$.

<u>DEF</u> $\gamma(t)$ è UNA <u>LINEA ASINTOTICA</u> se $\mathrm{II}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0 \quad \forall t$

<u>ESEMPIO</u> $\gamma : I \to S$ PLA v_1, v_2 BASE ORTONORMALE DI $T_{\gamma(t)}(S)$ CHE DIAGONALIZZA $dN_{\gamma(t)}$ ALLORA $\gamma'(t) = \cos\vartheta\, v_1 + \sin\vartheta\, v_2$ PER QUALCHE ϑ.

$\mathrm{II}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \mathrm{II}(\cos\vartheta\, v_1 + \sin\vartheta\, v_2, \cos\vartheta\, v_1 + \sin\vartheta\, v_2) =$ PER BILINEARITà DI II

$$= \cos^2\vartheta\, \underbrace{\mathrm{II}(v_1, v_1)}_{= k_1} + \sin^2\vartheta\, \underbrace{\mathrm{II}(v_2, v_2)}_{= k_2} + 2\sin\vartheta\cos\vartheta\, \underbrace{\mathrm{II}(v_1, v_2)}_{= 0} =$$

$$= k_1 \cos^2\vartheta + k_2 \cos^2\vartheta$$

DOVE k_1, k_2 SONO LE CURVATURE PRINCIPALI IN $\gamma(t)$.

$$\mathrm{II}(v_i, v_i) = \langle v_i, -dN_{\gamma(t)}(v_i)\rangle \underset{\substack{\downarrow \\ v_i \text{ AUTOVETTORE DI } -dN_{\gamma(t)}}}{=} \langle v_i, k_i v_i\rangle = k_i \|v_i\|^2 \underset{\substack{\downarrow \\ v_i \text{ UNITARIO}}}{=} k_i$$

$$\mathrm{II}(v_i, v_j) = \langle v_i, -dN_{\gamma(t)}(v_j)\rangle = k_j \langle v_i, v_j\rangle = 0$$

RICORDANDO CHE $\mathrm{II}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = k_n(\gamma(t))$

$\Rightarrow k_1 \cos^2\vartheta + k_2 \sin^2\vartheta = k_n(\gamma(t))$ CIOÈ SONO COMBINAZIONI CONVESSE DI $k_n(\gamma(t))$

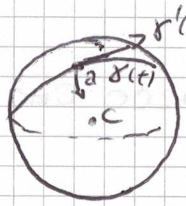
QUINDI k_1 e k_2 SONO IL MAX e MIN DELLE CURVATURE NORMALI POSSIBILI E SI OTTENGONO QUANDO $\cos\vartheta = 0$ V $\sin\vartheta = 0$ E CIOÈ QUANDO LA $\gamma(t)$ HA VETTORE VELOCITÀ LUNGO UNA DIREZIONE PRINCIPALE (QUANDO LE CURVE SONO PIÙ "CURVATE").

ESEMPI 1) Se S È UNA PORZIONE DI PIANO, POSSO SCEGLIERE N=COSTANTE

$dN_p = 0$ PER CUI TUTTE LE CURVATURE SI ANNULLANO IN QUANTO AUTOVALORI DELLA MAPPA NULLA.

2) Se $S = S^2$ POSSO PORRE $N : S^2 \longrightarrow S^2$, $p \longrightarrow p$, $N = Id$

$\Rightarrow dN_p = Id \quad \forall p \in S^2$ DUNQUE LE CURVATURE SONO ENTRAMBE -1 e $K(p) = (-1)^2 = 1 \quad \forall p \in S$



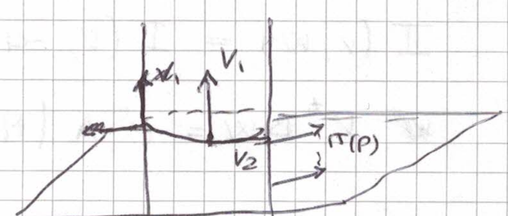
OGNI CURVA SULLA SFERA SI HA CHE $a = -N$ e QUINDI OGNI CURVA HA ACC. CHE PUNTA VERSO IL CENTRO.

3) $S = S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ CILINDRO

Se $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to (x, y)$ PROIEZIONE SULLE PRIME COORDINATE. POSSO PORRE $N = \pi(p) \quad \forall p \in S$

E POICHÉ π è LINEARE

$dN_p = d\pi_p\big|_{T_p(S)} = \pi\big|_{T_p(S)} \quad \forall p \in S$



$T_p(S)$ È GENERATO DA v_1 e v_2 TALI CHE $\pi(v_1) = 0$ v_1 VERTICALE e $\pi(v_2) = v_2$ ORIZZONTALE. CIOÈ $k_1 = 0$ e $k_2 = -1$

$\Rightarrow K(p) = 0 \quad \forall p \in S$.

DEF $p \in S$ SI DICE
- PLANARE SE $dN_p \equiv 0$
- PARABOLICO se $dN_p \not\equiv 0$ MA $K(p)=0$ cioè $rg\, dN_p = 1$
- ELLITTICO se $K(p)>0$ k_1, k_2 CONCORDI NON NULLE
- IPERBOLICO se $K(p)<0$ k_1, k_2 DISCORDI NON NULLE.

LEMMA I grafici di FUNZIONI DA $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ SONO SUPERFICI

DIM $S = \text{GRAFICO}(\varphi) \Rightarrow$ $\Omega \longrightarrow S$ $\quad$ $\varphi: S \longrightarrow \Omega$

$(u,v) \longrightarrow (u,v,\varphi(u,v))$ $\quad$ $(x,y,z) \longrightarrow (x,y)$

SONO DIFFEOMORFISMI E SONO UNA L'INVERSA DELL'ALTRA.

NOTAZIONE D'ORA IN POI LE PARAMETRIZZAZIONI LOCALI SARANNO SPESSO DENOTATE CON $x: \Omega \longrightarrow S$ E LE LORO DERIVATE PARZIALI CON $x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}$

LA SELLA Sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\varphi(u,v) = u^2 - v^2$

$\Rightarrow x(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ è LA PARAMETRIZZAZIONE DEL GRAFICO DI φ ED è UNA SUP (PER IL LEMMA) DETTA SELLA.

CALCOLIAMO LA CURVATURA IN $(0,0,0)$

APPLICHIAMO IL SEGUENTE METODO GENERALE.

1) CALCOLO x_u, x_v, $N = \dfrac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$

2) DOVREI CALCOLARE dN MA è UN CASINO! MA MI RICORDO CHE

$\mathrm{II}(a,b) = \mathrm{I}(a, -dN(b))$ PER CUI

se $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ NELLA BASE x_u, x_v

LA MATRICE M CHE RAPP. $-dN_p$ è $A^{-1}B$ INFATTI $\forall v, w \in \mathbb{R}^2$ DEVE VALERE

$\mathrm{II}(v,w) = \mathrm{I}(v, -dN_p(w))$

$v^t B w = v^t A (M(w))$ $\quad$ PER CUI $B = AM$ E PER INVERTIBILITÀ DI A $M = A^{-1}B$

OSS A è INVERTIBILE IN QUANTO RESTRIZIONE DEL PRODOTTO SCALARE EUCLIDEO CHE è DEFINITO POSITIVO.

DUNQUE DEDUCO CHE $M = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$

DOVE $E = \langle X_u, X_u \rangle$ $F = \langle X_u, X_v \rangle$ $G = \langle X_v, X_v \rangle$

$e = \langle X_{uu}, N \rangle$ $f = \langle X_{uv}, N \rangle$ $g = \langle X_{vv}, N \rangle$ ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE

~~PROP~~

PROP $K(P) = \det(A^{-1}B) = \dfrac{\det II}{\det I}$

OSS Il vero problema è ~~...~~, non solo calcolare dN_p, ma riconoscere dN_p in coord. X_u e X_v.

TORNANDO ALLA SELLA $X_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}$ $X_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix}$ $N = \dfrac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}$

$$X_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad X_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{pmatrix} \quad II = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

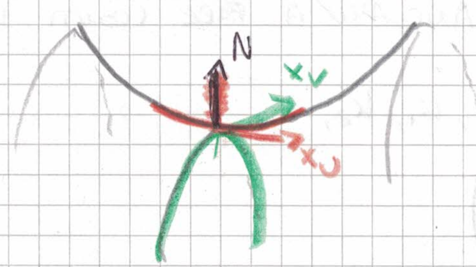
IN $(0,0,0)$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad II \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow M = (I)^{-1} II = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

E QUINDI $k_1 = 2$ e $k_2 = -2$ INOLTRE M ESSENDO DIAGONALE

SI HA CHE $X_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $X_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ SONO LE DIREZIONI PRINCIPALI

$K = -4$ DUNQUE è UN PUNTO IPERBOLICO



OSS IN UN PUNTO GENERICO $\det I > 0$

$\Rightarrow K$ DIPENDE DAL $\det II$

$\Rightarrow$ NELLA SELLA $K < 0$

SUPERFICI DI ROTAZIONE

Sia $\gamma: I \longrightarrow \{(x,y,z) \mid x>0,\ y=0\}$ UN EMBEDDING CIOÈ UNA CURVA REGOLARE CHE È DIFFEO SULL'IMMAGINE.

$\gamma(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t))$ E SIA S LA SUP OTTENUTA RUOTANDOLA INTORNO ALL'ASSE z. Sia $X: I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $X(u,v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u))$

I APERTO.

<u>PROPOSIZIONE</u>: OPPORTUNE RESTRIZIONI DI X FORNISCONO UN ATLANTE DI S CHE È PERCIÒ UNA SUPERFICIE.

<u>DIM</u> X È CHIARAMENTE SURGETTIVA SU S e C^∞

- Su $S \cap \{x>0\}$ POSSO DEFINIRE

$$S \cap \{x>0\} \longrightarrow I \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(x,y,z) \longrightarrow \left(\underbrace{\gamma^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z)}_{u}, \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

CHE DÀ UN'INVERSA C^∞ DI $X|_{I\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$

NB. PER POTER SCRIVERE QUESTA COSA HO USATO CHE γ È DIFFEO SULL'IMMAGINE.

SCRIVERE LE ALTRE CON $x<0$, $y>0$, $y<0$ È ANALOGO.

<u>LEZIONE 2/11</u>

$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ CURVA IN $\{x>0, y=0\}$ $\gamma(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t))$

S = SUP. DI ROTAZIONE DI γ PARAMETRIZZATA DA

$X(u,v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u))$ ANDIAMO A FARE I CONTI IN GENERALE PER CALCOLARE $-dN_p$, I, II, K_1, K_2, K.

$$X_u = \begin{pmatrix} \varphi'(u)\cos v \\ \varphi'(u)\sin v \\ \psi'(u) \end{pmatrix} \qquad X_v = \begin{pmatrix} -\varphi(u)\sin v \\ \varphi(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \frac{(-\psi'(u)\cancel{\varphi(u)}\cos v, -\psi'(u)\cancel{\varphi(u)}\sin v, \cancel{\varphi(u)}\varphi'(u))}{\cancel{\varphi(u)}\sqrt{(\varphi'(u))^2+(\psi'(u))^2}}$$

$$X_{uu} = \begin{pmatrix} \varphi''(u)\cos v \\ \varphi''(u)\sin v \\ \psi''(u) \end{pmatrix} \qquad X_{uv} = \begin{pmatrix} -\varphi'(u)\sin v \\ \varphi'(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{vv} = \begin{pmatrix} -\varphi(u)\cos v \\ -\varphi(u)\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} (\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2 & 0 \\ 0 & (\varphi(u))^2 \end{pmatrix} \qquad II = \frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}} \begin{pmatrix} \psi''\varphi' - \varphi''\psi' & 0 \\ 0 & \psi'\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -dN \text{ IN COORD.} = I^{-1} II = \frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{(\varphi')^2+(\psi')^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\psi'}{\varphi} \end{pmatrix}$$

<u>DEF</u> LE CURVE $t \longrightarrow x(t, v_0)$ SI CHIAMANO <u>MERIDIANI</u> e

QUELLE $t \longrightarrow x(u_0, t)$ SI CHIAMANO <u>PARALLELI</u>

<u>OSS</u> LA VELOCITÀ DEI MERIDIANI è X_u e I PARALLELI X_v.

<u>FATTI</u> 1) I FORMA DIAGONALE $\Rightarrow$ MERIDIANI E PARALLELI SONO $\perp$

2) dN è DIAGONALE $\Rightarrow$ X_u e X_v SONO GLI AUTOVETTORI

$\Rightarrow$ I MERIDIANI E I PARALLELI SONO LINEE DI CURVATURA.

3) $k_1 = \dfrac{+\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{3/2}}$ È LA CURVATURA NORMALE DEI MERIDIANI

$k_2 = \dfrac{\psi'}{\varphi\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}$ È LA CURVATURA DEI PARALLELI.

$\Rightarrow k_1$ COINCIDE CON ~~LA CURVATURA~~ NORMALE DELLA SUPERFICIE.

LA CURVATURA TOTALE DI $\gamma = (\varphi, 0, \psi)$

$$k_\gamma = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{-\varphi''\psi' + \varphi'\psi''}{((\varphi')^2 + (\psi')^2)^{3/2}} = |k_1|$$

CIOÈ CURVATURA TOTALE E NORMALE COINCIDONO.

LA CURVATURA DI GAUSS È

$$K = -\frac{\psi'\left(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi''\right)}{\varphi\left((\varphi')^2 + (\psi')^2\right)^2} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' - \varphi'\psi'\psi''}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' + (\varphi')^2\varphi''}{\varphi} = \frac{-\varphi''}{\varphi}$$

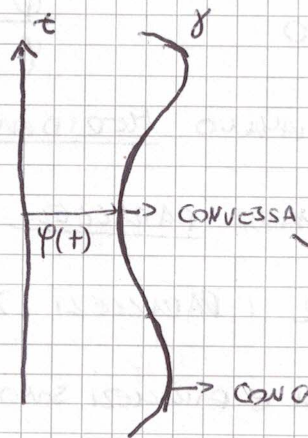
Se γ è PLA

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1 \quad \text{DERIVANDO}$$

$$2\varphi'\varphi'' + 2\psi'\psi'' = 0$$

$$\psi'\psi'' = -\varphi'\varphi''$$

DIAMO UN'INTERPRETAZIONE DI $K = -\dfrac{\varphi''}{\varphi}$



CONVESSA → CURVATURA NEGATIVA DI S

CONCAVA → CURVATURA POSITIVA DI S.

$\varphi(t) > 0$ PER COSTRUZIONE

QUINDI LA K MI RAPPRESENTA L'OPPOSTO DELLA CONCAVITÀ DI φ''

ANALIZZIAMO ADESSO LA PSEUDO SFERA CHE È OTTENUTA FACENDO RUOTARE (SOLO UNO DEI DUE RAMI DELLA) TRATTRICE

$$\gamma(t) = \left(\sin t,\ 0,\ \cos t + \log\left(\operatorname{tg}\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)\right) \qquad t \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

<u>TEOREMA</u> LA PSEUDOSFERA HA K COSTANTE $= -1$

(SPOILER: TEO DI HILBERT NON ESISTONO SUP $S \subseteq \mathbb{R}^3$ CHIUSE CON $K < -\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$)
NO DIM

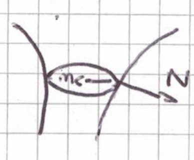
<u>DM</u> PER VARI MOTIVI GEOMETRICI $K < 0$ (AD ESEMPIO LA CONVESSITÀ DELLA FIGURA)

INOLTRE LA CURVATURA NORMALE ~~k_1~~ $=$ DEI MERIDIANI $= |k_1|$ TOTALE DELLA TRATTRICE $= \operatorname{tg} t$

k_2 = CURVATURA NORMALE DEI PARALLELI CHE SONO CIRCONFERENZE DI RAGGIO $R = \sin t \Rightarrow$ CURVATURA TOTALE DEI PARALLELI È $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sin t} = k$

ORA SE N E m SONO I VERSORI NORMALI DI S E DEL PARALLELO RISPETTIVAMENTE

$$|k_2| = |\langle km, N\rangle|$$



MA $|\langle k n, N\rangle| = \left|\frac{1}{\sin t}\langle n, N\rangle\right|$ PER CALCOLARE N CALCOLO

$$\gamma'(t) = \left(\cos t, 0, -\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) =$$

$$= \left(\cos t, 0, \frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)$$

$\Rightarrow (\sin t, 0, \cos t) = t_g$ alla trattrice

$\Rightarrow N = (\cos t, 0, -\sin t)$ È IL NORMALE ALLA TRATRICE CHE COINCIDE CON IL NORMALE ALLA SUP.

ORA PER QUESTIONI DI SIMMETRIA DELLA FIGURA (SUP DI ROTAZIONE) SVOLGERE IL CONTO SULLA TRATRICE IN ORIGINE È UGUALE CHE SU UN QUALSIASI ALTRO PUNTO SULLO STESSO PARALLELO.

$\Rightarrow N = (\cos t, 0, -\sin t)$ e $n = (-1, 0, 0)$

$$|k_2| = \frac{1}{\sin t}\,|\langle N, n\rangle| = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot g\, t$$

$\Rightarrow |K| = |k_1 k_2| = tg\, t \cdot \cot g\, t = 1$ DA CUI $K = -1$

OSS LA SCELTA DI AVER CALCOLATO K SOLO SU γ È LECITO PER

MOTIVO 1 K È INVARIANTE PER MOVIMENTI RIGIDI (SPOILER)

MOTIVO 2 K NON DIPENDE DALLA VARIABILE v QUANTO VISTO.

PROP 1 Sia $p \in S$ ALLORA ① Se $K(p) > 0$ loc S GIACE DA UN LATO DEL PIANO OSCULATORE.

② Se $K(p) < 0 \Rightarrow$ LOC GIACE DA ENTRAMBE LE PARTI.

PROP 2 TUTTE LE GRANDEZZE INTRODOTTE FINO AD ADESSO (CURVATURE PRINCIPALI, NORMALI, GAUSSIANE...) SONO INVARIANTI PER CONGRUENZA. CIOÈ SE $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ UN'ISOMETRIA POSITIVA $\Rightarrow$ LE CURVATURE DI S in p SONO UGUALI A QUELLE DI $f(p)$ in $f(S)$ (dove supponiamo che f preservi l'orientazione cioè $df_p: T_p(S) \to T_{f(p)} f(S)$ è positivo).

DIM PROP 2 Se $f(x) = Ax + b$ $A \in SO(3)$ $\forall p \in S$ $df_p = A|_{T_p(S)}$

$\forall v_1, v_2$ BASE ORTONORMALE POSITIVA DI $T_p(S) \Rightarrow v_1, v_2, N_S(p)$ è UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA DI $\mathbb{R}^3$

$$A v_1 = df_p(v_1) \quad A(v_2) = df_p(v_2) \quad A N_S(p) = df_p(N_S(p))$$

È UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA E Av_1 e Av_2 È UNA BASE ORT. POS. DI $T_{f(p)} f(S)$

DUNQUE $N_{f(S)} = A \circ N_S \circ f^{-1} \Rightarrow dN_{f(S)}(f(p)) = A \circ (dN_S)_p \circ A^{-1}(f(p))$

RICORDA $A^{-1} = df^{-1}$ E QUINDI SONO CONIUGATI E HANNO STESSI AUTOVALORI, AUTOVETTORI, ...

DIM 1 DATO $p \in S$ A MENO DI CONGRUENZA $p = (0,0,0)$ e $N_p = (0,0,1)$

$\Rightarrow T_p(S) = (N_p)^{\perp} = \{z=0\}$, LA PROIEZIONE DI $\mathbb{R}^3$ su $\{z=0\}$

INDUCE UN'ISOMORFISMO (L'ID) TRA $T_p(S)$ e $\{z=0\}$ E QUINDI PER IL TEOREMA D'INVERTIBILITÀ LOCALE $\exists U$ INTORNO DI p in S t.c. $\pi|_U : U \to \pi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ è UN DIFFEO.

DUNQUE è UNA CARTA $\Rightarrow \exists \varphi : \underset{\underset{\mathbb{R}^2}{\cap}}{\pi(U)} \to U$ DIFFEO INVERSA LOCALE DI π PER CUI φ è UNA PARAMETRIZZAZIONE LOCALE

$\varphi(u,v) = (u, v, h(u,v))$ CIOÈ S è IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE C^∞ $h(u,v)$. USO φ COME PARAMETRIZZ. LOCALE

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h_u \end{pmatrix} \quad \varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h_v \end{pmatrix} \quad \varphi_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{uu} \end{pmatrix} \quad \varphi_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{vv} \end{pmatrix} \quad \varphi_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{uv} \end{pmatrix}$$

POICHE $N = (0,0,1)$ LA MATRICE DELLA SECONDA FORMA è

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} h_{uu} & h_{uv} \\ h_{uv} & h_{vv} \end{pmatrix} = Hh(u,v) \quad \text{HESSIANA DI } h.$$

RICORDANDO CHE $K(p) = \dfrac{\det \mathrm{II}}{\boxed{\det \mathrm{I}} > 0} \Rightarrow$ SEGNO $K(p)$ = SEGNO $\det \mathrm{II}$
= SEGNO $\det Hh$

NOTANDO INOLTRE CHE φ_u e φ_v SONO $\perp$ A N e quindi MA $\langle \varphi_u, N \rangle = h_u(0,0) = 0$ e $\langle \varphi_v, N \rangle = h_v(0,0) = 0$ DA CUI $(0,0)$ ANNULLA IL ∇h ALLORA PER TEOREMI DI ANALISI p è MAX o MIN LOC (o) SE H è DEFINITO CIOÈ $K(p) > 0$ ALTRIMENTI è SELLA SE $K(p) < 0$.

LEZIONE 7/11

ELICOIDE Sia $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $X(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$

L'IDEA È QUELLO DI COLLEGARE OGNI PUNTO DELL'ELICA CON L'ASSE Z. ALLORA X È UN DIFFEO SULL'IMMAGINE PER COME COSTRUITA E PERCIÒ LA SUA IMMAGINE S È UNA SUPERFICIE DETTA ELICOIDE.

~~Se~~ VEDIAMO GIUSTO L'IDEA DELL'INVERTIBILITÀ DI X

Su $S \cap \{z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ $\psi(x,y,z) = \left(z, \frac{x}{\cos z}\right)$

Su $S \cap \{z \neq k\pi\}$ $\psi(x,y,z) = \left(z, \frac{y}{\sin z}\right)$

$$X_u = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_v = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \quad N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{(-\sin u, \cos u, -v)}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} v^2+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{uu} = \begin{pmatrix} -v\cos u \\ -v\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_{vv} = 0 \quad X_{uv} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k = \frac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}} = \frac{-\frac{1}{v^2+1}}{v^2+1} = \frac{-1}{(v^2+1)^2}$$

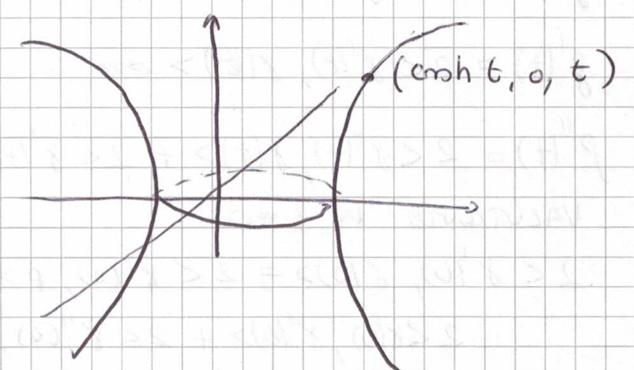
CATENOIDE LA CATENARIA È IL GRAFICO DI cosh E LA CATENOIDE È LA SUA SUPERFICI DI ROTAZIONE.

UN SUO ATLANTE È COSTITUITO DALLE RESTRIZIONI DI

$X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$X(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$

$$X_u = \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_v = \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$N = \frac{(-\cancel{\cosh u}\cos v, -\cancel{\cosh u}\sin v, \cancel{\cosh u}\sinh u)}{\cancel{\cosh u}\underbrace{\sqrt{1+\sinh^2 u}}_{\cosh u}} = \frac{(-\cos v, -\sin v, \sinh u)}{\cosh u}$$

$$I = \begin{pmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix} \quad X_{uu} = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_{uv} = \begin{pmatrix} -\sinh u \sin v \\ \sinh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

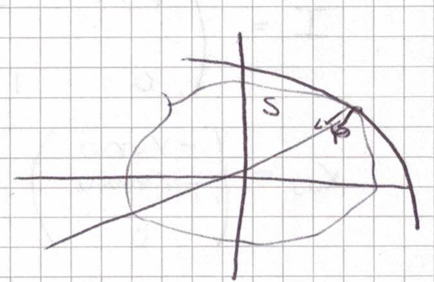
$$X_{vv} = \begin{pmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$II = \frac{1}{\cosh u} \begin{pmatrix} -\cosh u & 0 \\ 0 & \cosh u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \frac{-1}{(\cosh u)^4}$$

TEOREMA Sia S una superficie compatta allora $\exists p \in S$ con $K(p) > 0$

IDEA Se ~~$\forall$~~ S è compatta, nel suo punto di distanza max dall'origine esisterà una sfera tg esternamente ad S che ingloba S e avendo la sfera $K = -1$ le mie curvature stanno lì dentro.

DIM Sia p punto di massima distanza di S dall'origine (esiste per compattezza di S, come massimo della funzione norma al quadrato).



Sia γ una curva a supporto in S, PLA e $\gamma(0)=p$

per costruzione $t \xrightarrow{f} \underbrace{\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle}_{\|\gamma(t)\|^2}$ ha un max locale in $t=0$

$\Rightarrow f'(0) = 0 \quad f''(0) \le 0$

$f'(t) = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle$

$f''(t) = 2\langle \gamma''(t), \gamma(t) \rangle + 2\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$

valutando in $t=0$

$2\langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle = 2\langle \gamma'(0), p \rangle = 0 \quad (1)$

$2\langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle + 2\langle \gamma''(0), \gamma(0) \rangle \underset{\gamma \text{ PLA}}{=} 2 + 2\langle \gamma''(0), \gamma(0) \rangle \le 0 \quad (2)$

Da (1) segue che $p \perp \gamma'(0)$ $\forall \gamma$ a supporto in $S \Rightarrow p \perp T_p(S)$

dunque $N_p = \frac{p}{\|p\|}$

La (2) quindi diventa

$2 + 2\langle \gamma''(0), N_p \cdot \|p\| \rangle \le 0 \qquad \langle \gamma''(0), N_p \rangle \le -\frac{1}{\|p\|}$

Dunque tutte le curve passanti per p hanno curvatura normale $\le -\frac{1}{\|p\|}$

$\Rightarrow k_1 \le -\frac{1}{\|p\|}$ e $k_2 \le -\frac{1}{\|p\|} \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = K \ge \frac{1}{\|p\|^2} > 0$

OSS Se una superf. S contenuta in una palla di raggio $R \Rightarrow \exists p \in S$ tc $K(p) \ge \frac{1}{R^2}$

DEF LA DISTANZA INTRINSECA SU UNA SUPERFICIE S È DATA DA

$$d: S\times S \longrightarrow \mathbb{R} \quad d(p,q) = \inf \{ L(\gamma) \mid \gamma [0,1] \to S \ \ \gamma(0)=p, \ \gamma(1)=p \}$$

OSS È DAVVERO UNA DISTANZA.

1) ~~SIM~~ SIMMETRIA È OVVIA BASTA PERCORRERE LE CURVE AL CONTRARIO. $\gamma(1-t)$

2) TRIANGOLARE: LA LUNGHEZZA DELLE "GIUNZIONI" È LA SOMMA DELLE LUNGHEZZE

3) Se $d(p,q)=0 \Rightarrow p=q$

Se $\gamma(0)=p$ e $\gamma(1)=q \Rightarrow L(\gamma) \geq \|p-q\| \Rightarrow 0 = d(p,q) \geq \|p-q\| = 0$

$$\Downarrow$$

$$p=q$$

OSS NELLA DEFINIZIONE SI PUÒ RIMPIAZZARE C^∞ A TRATTI CON C^∞.

DEF $f: S \longrightarrow S'$ TRA SUPERFICI È UN'ISOMETRIA LOCALE se $df_p: T_p(S) \to T_{f(p)}S'$ È UN'ISOMETRIA LINEARE $\forall p \in S$.

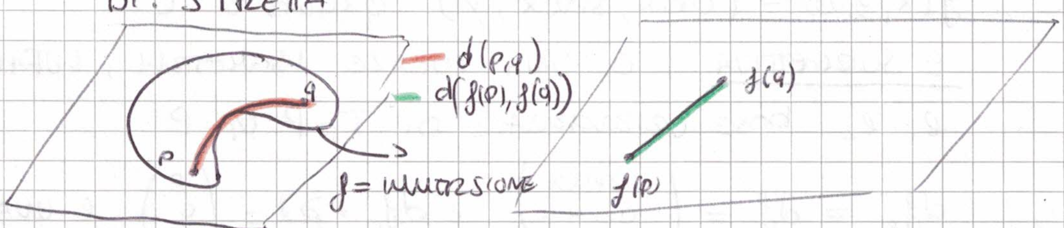
DEF UN'ISOMETRIA È UN'ISOMETRIA LOCALE BIGETTIVA

OSS (INVERSIONE DI ISOMETRIE LINEARI È UN'ISOMETRIA LINEARE).

PROP Se 1) f è un'isometria locale $\quad d(f(p), f(q)) \leq d(p,q)$ ⊛

2) se f è un'isometria $\quad d(f(p), f(q)) = d(p,q)$

⊛ BASTI PENSARE ALL'INCLUSIONE DI UN INSIEME CONVESSO DEL PIANO NEL PIANO. È UN'ISOMETRIA LOC. MA IL DISEGNO MOSTRA CHE VALE LA DI. STRETTA



DIM $\forall \gamma$ CHE $\gamma(0)=p$ e $\gamma(1)=q$ $\quad f\circ\gamma$ CONGIUNGE $f(p)$ con $f(q)$

$$L(f\circ\gamma) = \int_0^1 \|(f\circ\gamma)'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|df_{\gamma(t)} \circ \gamma'(t)\|\, dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt = L(\gamma)$$

$\|df \circ \gamma'\| = \|\gamma'\|$ perché df è un'isometria lineare quindi conserva le distanze

$$d(p,q) = \inf\{L(\gamma)\} = \inf\{L(f\circ\gamma)\} \geq \inf\{L(\bar\gamma) \mid \bar\gamma [0,1] \ \bar\gamma(0)=f(p) \ \bar\gamma(1)=f(q)\} =$$

$$= d(f(p), f(q))$$

Se f è un'isometria invece — usando 1) su f^{-1}

$$d(p,q) = d\left(f^{-1}(f(p)), f^{-1}(f(q))\right) \leq d(f(p), f(q))$$

e ricordando che valeva $\geq$ per 1) $\Rightarrow d(p,q) = d(f(p), f(q))$

TEOREMA Le "nostre" isometrie di S sono tutte e sole le isometrie di (S,d) come spazio metrico.

DIM Abbiamo visto che sono tutte, che siano le sole è tecnico.

Avendo mostrato che sicuramente la nuova topologia è più fine della vecchia perché allunga le distanze (non è difficile far vedere che in realtà è la stessa).

OSS Quelle che ho chiamato isometrie locali lo sono anche nel senso degli spazi metrici come conseguenza dell'inv. loc.

OSS Superfici congruenti sono isometriche.

Quindi ci sono isometrie che non sono congruenze? Sì.

ESEMPIO $P = \{z=0\}$ $C = \{x^2+y^2=1\}$ $Z = \{x^2+y^2=z^2, z>0\}$

DEF S, S' sono loc. isometriche se $\forall p \in S$ $\exists q \in S'$ e aperti $p \in U_p \subset S$ e $q \in V \subset S'$ tc U sia isometrico a V e viceversa cioè $\exists V' \subset S'$ e $U' \subset S'$ aperti intorno a q e p ris. isometrici.

PROP C, P, Z sono localmente isometrici.

DIM $f: P \to C$ $\quad f(x,y,0) = (\cos x, \sin x, y)$ questa è C^∞ e surgettiva, è una locale isometria, infatti e_1, e_2 base ortonormale di T_pP $\forall p \in P$

$$df_{e_1} = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad df_{e_2} = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ è una base ortonormale di $T_{f(p)}C \Rightarrow df$ è un'isometria lineare.

Dunque ne concludo che i due spazi sono loc. isometrici in quanto per la surgettività di f. $\forall q \in C$ $\exists p \in P$ tc $f(p)=q$ costruisco un $U \ni p$ e ricavo il V intorno di q cercato. (In particolare $(0,\pi)\times\mathbb{R}$ è isometrico a $C \cap \{y>0\}$)

LEZIONE 8/11 PRIMA DI CONTINUARE LA DIMOSTRAZIONE CHE IL CONO E IL PIANO SONO LOC. ISOMETRICI FACCIAMO UN PAIO DI DIMOSTRAZIONI.

LEMMA $\varphi : \Omega \to U \subset S$ e $\psi : \Omega \to V \subset S'$ (Ω lo stesso)

PARAMETRIZZAZIONI LOCALI $\Rightarrow$ LA MAPPA $\psi \circ \varphi^{-1} : U \to V$ (CHE È UN DIFFEO) È UN'ISOMETRIA $\Leftrightarrow$ I COEFF. DELLA PRIMA FORMA RISPETTO A φ e ψ SONO GLI STESSI.

DIM
$$d(\psi \circ \varphi^{-1})\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = d\psi\left(d\varphi^{-1}\left(d\varphi(e_1)\right)\right) = d\psi(e_1) = \frac{\partial \psi}{\partial u}$$
$$d(\psi \circ \varphi^{-1})\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = d\psi\left(d\varphi^{-1}\left(d\varphi(e_2)\right)\right) = d\psi(e_2) = \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

CIOÈ $d(\psi \circ \varphi^{-1})$ PORTA IL FRAME MOBILE $\frac{\partial \varphi}{\partial u}\circ\varphi^{-1}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ di U IN QUELLO DI V DATO DA $\frac{\partial \psi}{\partial u}\circ\varphi^{-1}, \frac{\partial \psi}{\partial v}\circ\varphi^{-1}$

POICHÈ I COEFFICIENTI DELLA PRIMA FORMA SONO DATI DA PRODOTTI DI $\frac{\partial \varphi}{\partial u}\circ\varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\circ\varphi$ e $\frac{\partial \psi}{\partial u}\circ\varphi$ e $\frac{\partial \psi}{\partial v}\circ\psi$ ~~RISPETTIVA~~

I COEFF SONO UGUALI $\Leftrightarrow$ $d(\psi\circ\varphi^{-1})$ LI PRESERVA $\Leftrightarrow$ $d(\psi\circ\varphi^{-1})$ È UN'ISOMETRIA LINEARE

$\Updownarrow$

$d(\psi\circ\varphi^{-1})$ È UN'ISOMETRIA

COROLLARIO S e S' SONO LOCALMENTE ISOMETRICHE $\Leftrightarrow$ $\forall p \in S$ $\exists\, p \in U_p \subset S$ e $q \in S'$ $q \in U_q \subset S'$ APERTI E DELLE PARAMETRIZZAZIONI $\varphi : \Omega \to U_p$ e $\psi : \Omega \to U_q$ CON GLI STESSI COEFFICIENTI DELLA I FORMA

DIM $\Leftarrow$) VEDI IL LEMMA PRECEDENTE.

$\Rightarrow$) DATO $p \in U_p$ e $q \in U_q$ $q \in S'$

$\exists\, f : U_p \to U_q$ ISOMETRIA.

A MENO DI RESTRINGERE U_p (E DI CONSEGUENZA U_q) POSSO SUPPORRE CHE U_p SIA IMMAGINE DI UNA PARAMETRIZZAZIONE $\varphi : \Omega \to U_p$.

$\Rightarrow$ PONGO $\psi = \underbrace{f\circ\varphi}_{\text{PARAMETRIZZAZIONE}} : \Omega \to U_q$

E I COEFF DELLA I FORMA DI φ e ψ SONO GLI STESSI PERCHÈ f IN QUANTO ISOMETRIA PRESERVA I PRODOTTI SCALARI.

DEF (NON MOLTO FORMALE) SIA S UNA SUPERFICIE, UNA GRANDEZZA SI DICE INTRINSECA SE È INVARIANTE PER ISOMETRIE.
"PER ORA NON NE ABBIAMO TROVATE MOLTE"

ESEMPI: 1) LE CURVATURE PRINCIPALI SONO INVARIANTI PER CONGRUENZA MA NON PER ISOMETRIA (VEDI CILINDRO E PIANO).
2) LA DISTANZA INTRINSECA LO È.

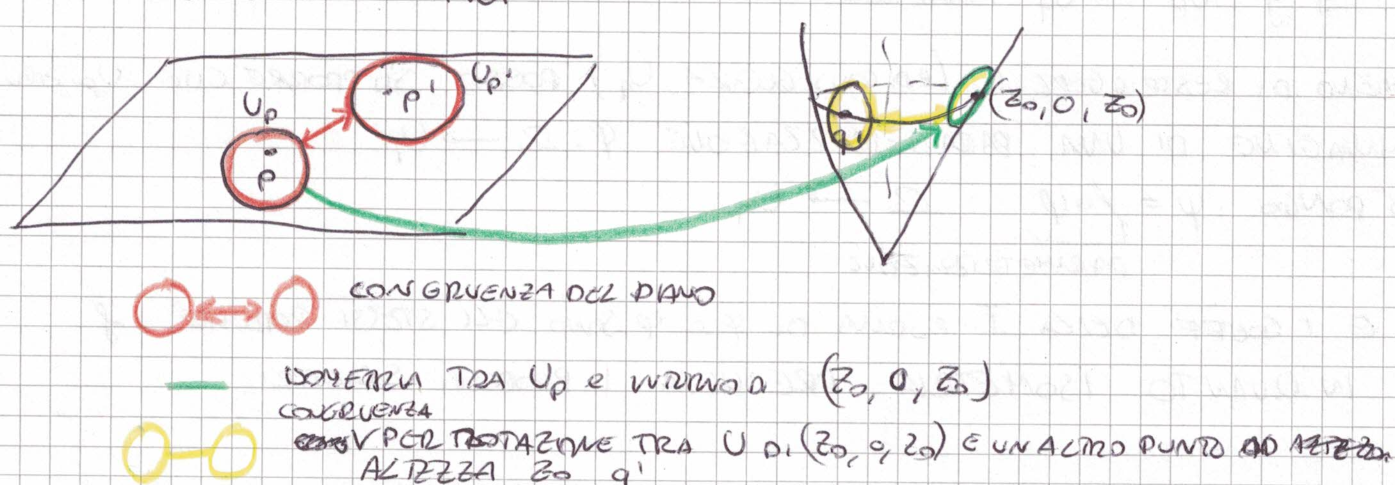
DEF UNA GRANDEZZA CHE DIPENDE DALLE COORDINATE SI DICE INTRINSECA SE È FUNZIONE SOLO DI E, F, G E DELLE LORO DERIVATE.

OSS 1) e, f, g NON SONO INTRINSECHI (VEDI PIANO E CILINDRO CHE HANNO GLI STESSI E, F, G)
2) UNA GRANDEZZA INDIPENDENTE DALLE COORDINATE È INTRINSECA $\Leftrightarrow$ LA SUA ESPRESSIONE IN COORD. LO È.

TORNANDO ALL'ESERCIZIO: LE CONGRUENZE DI $P = \{z=0\}$ AGISCONO TRANSITIVAMENTE SU P. (BASTANO LE TRASLAZIONI PER MANDARE P_1 IN P_2 CON $P_1, P_2 \in P$)
MENTRE IN $Z = \{x^2+y^2=z^2, z>0\}$ LE ROTAZIONI SULL'ASSE z DANNO DELLE CONGRUENZE CHE AGISCONO TRANSITIVAMENTE SU $Z \cap \{z=z_0\}$ (PUNTI ALLA STESSA ALTEZZA)

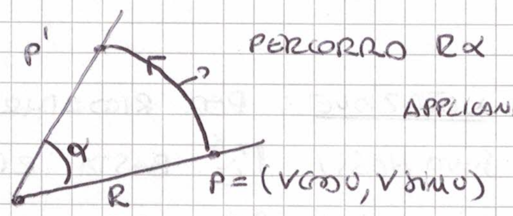
DUNQUE MI BASTA MOSTRARE CHE OGNI PUNTO DELLA FORMA $(z_0, 0, z_0) \in Z$ HA UN APERTO ISOMETRICO AD UN APERTO DEL PIANO.

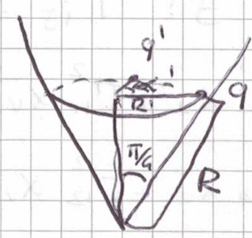
TRADUZIONE GRAFICA



QUINDI SE CONOSCESSI L'ISOMETRIA TRA UN GENERICO p E q' IN FIGURA.
BASTEREBBE FARE LA COMPOSIZIONE DELLE CONGRUENZE CON L'ISOMETRIA.

IDEA PER COSTRUIRE L'ISOMETRIA. : CIT: "L'IDEA DATA IERI ERA SBAGLIATA, INVECE GIOCANDO CON MIO FIGLIO HO RIMPARATO CHE PER FARE UN CONO CON FOGLIO BISOGNA TOGLIERNE UNO SPICCHIO"





SUL PIANO USO LE COORD POLARI.

SE f DEVE ESSERE UN'ISOMETRIA L'ARCO $\widehat{PP'}$ DEVE ANDARE IN UN ARCO $\widehat{qq'}$ DI PARI LUNGHEZZA. $\Rightarrow R' = \frac{R}{\sqrt{2}}$ PERCHÉ IL CONO È QUELLO CON APERTURA DI $\frac{\pi}{4}$ $\quad PP' = R\alpha = R'\alpha' = \frac{R}{\sqrt{2}}\alpha' = qq' \Rightarrow \alpha' = \alpha\cdot\sqrt{2}$

CIOÈ VISTO CHE IL RAGGIO SI RIDUCE DEVO "CORRERE" DI PIÙ SULL'ANGOLO.

$\Rightarrow \Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO PARAMETRIZZANTE.

$\varphi : \Omega \longrightarrow P \qquad\qquad \psi : \Omega \longrightarrow Z$

$\varphi(u,v) \longrightarrow (v\cos u, v\sin u, 0) \qquad \psi(u,v) = \left(\frac{v}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}u), \frac{v}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}u), \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$

SONO MAPPE TRA VARIETÀ. SE MOSTRO CHE $d\varphi$ E $d\psi$ SONO INVERTIBILI SI RESTRINGONO A PARAMETRIZZAZIONI LOCALI. PER FARE CIÒ BASTA CHE I COEFF DELLA PRIMA FORMA SIANO TALI CHE $\det I \neq 0$.

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_v = \begin{pmatrix} \cos u \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_u = \begin{pmatrix} -v\sin(\sqrt{2}u) \\ v\cos(\sqrt{2}u) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_v = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}u)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\sqrt{2}u)\,\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$I_\varphi = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad I_\psi = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

LE 2 I FORME SONO ANCHE UGUALI, QUINDI HO ANCHE CHE Z E P SONO LOCALMENTE ISOMETRICI PER IL COROLLARIO USANDO $\psi\circ\varphi^{-1}$ COME ISOMETRIA.

SIMBOLI DI CHRISTOFFEL

Sia $x:\Omega \longrightarrow U\subseteq S$ PARAMETRIZZAZIONE LOCALE PER S.

ALLORA $\exists!\ \Gamma_{ij}^{k}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ tc

1) $X_{uu} = \Gamma_{11}^{1} X_u + \Gamma_{11}^{2} X_v + eN$

2) $X_{uv} = \Gamma_{12}^{1} X_u + \Gamma_{12}^{2} X_v + fN$

3) $X_{vv} = \Gamma_{22}^{1} X_u + \Gamma_{22}^{2} X_v + gN$

NOTAZIONE: PER RICORDARSI COME SONO MESSI Γ_{ij}^{k} BASTA RICORDARSI CHE $u=1$ $v=1$ PER I PEDICI QUINDI X_{uu} HA Γ_{11}^{k} X_{uv} HA Γ_{12}^{k} e X_{vv} HA Γ_{22}^{k} MENTRE $k=1$ SE COEF DI X_u e $k=2$ SE COEFF DI X_v.

OSS X_u, X_v, N FORMANO UNA BASE POSITIVA QUINDI I COEFF DI CHRISTOFFEL SONO I COEFF. DELLA COMB. LINEARE DI X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} SU SPAN $\langle X_u, X_v\rangle$. È INVECE EVIDENTE CHE I COEFFICIENTI DI N SIANO PROPRIO e, f, g IN QUANTO $e=\langle X_{uu}, N\rangle$ $f=\langle X_{uv}, N\rangle$, $g=\langle X_{vv}, N\rangle$ E QUINDI PER LE PROP. DELLA PROIEZIONE LORO SONO I GIUSTI COEFF.

PROP Γ_{ij}^{k} SONO INTRINSECHI (CIOÈ DIPENDONO SOLO DA E, F, G e DERIVATE)

CONTO PRELIMINARE:

$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\langle X_u, X_u\rangle = \frac{1}{2}E_u$$

$$\langle X_{uu}, X_v\rangle = \frac{\partial}{\partial u}\langle X_u, X_v\rangle - \langle X_u, X_{uv}\rangle = \frac{\partial}{\partial u}\langle X_u, X_v\rangle - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle X_u, X_u\rangle =$$

$$= F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$\langle X_{uv}, X_u\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle X_u, X_u\rangle = \frac{1}{2}F_v$$

$$\langle X_{uv}, X_v\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\langle X_v, X_v\rangle = \frac{1}{2}G_u$$

$$\langle X_{vv}, X_u\rangle = \frac{\partial}{\partial v}\langle X_u, X_v\rangle - \langle X_v, X_{uv}\rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

$$\langle X_{vv}, X_v\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\langle X_v, X_v\rangle = \frac{1}{2}G_v$$

FATTO QUESTO MOSTRIAMO AD ESEMPIO CHE Γ_{11}^{1} e Γ_{11}^{2} SONO INTRINSECHI PER GLI ALTRI CON CONTI SOPRA LA DIMOSTRAZIONE È ANALOGA.

$$\langle X_{uu}, X_u\rangle = \frac{1}{2}E_u = \Gamma_{11}^{1}\overset{E}{\langle X_u, X_u\rangle} + \Gamma_{11}^{2}\overset{F}{\langle X_u, X_v\rangle} + e\overset{0}{\langle N, X_u\rangle}$$

$$\langle X_{uu}, X_v\rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v = \Gamma_{11}^{1}\underset{F}{\langle X_u, X_v\rangle} + \Gamma_{11}^{2}\underset{G}{\langle X_v, X_v\rangle} + e\underset{0}{\langle N, X_v\rangle}$$

DA CUI OTTENIAMO CHE:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

IL SISTEMA LINEARE IN Γ_{11}^1 Γ_{11}^2 HA COME MATRICE DEI COEFFICIENTI $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = I$ E QUINDI ESSENDO INVERTIBILE LA SOLUZIONE DEL SISTEMA ESISTE UNICA E DIPENDE SOLO DA E, F, G E LE LORO DERIVATE.

TEOREMA EGREGIUM DI GAUSS

LA CURVATURA GAUSSIANA È INTRINSECA, CIOÈ SE $f: S \to S'$ È UN'ISOMETRIA (LOCALE) ALLORA $K(f(p)) = K(p)$ $\forall p \in S$

DIM BASTA VEDERE CHE LA SUA ESPRESSIONE IN COORDINATE È INTRINSECA. SIA A LA MATRICE CHE RAPPRESENTA dN IN COORDINATE

$$dN_u = dN(x_u) = a_{11} x_u + a_{21} x_v$$
$$N_v = dN(x_v) = a_{12} x_u + a_{22} x_v$$

L'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE È SOLO UN CONTO PERVERSO E LUNGO: ANDIAMO A EGUAGLIARE I COEFFICIENTI LUNGO X_v DELL'UGUAGLIANZA

$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ CHE È VERA PER SCHWARTZ.

$$\underbrace{\left(\Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + eN\right)_v}_{①} = \underbrace{\left(\Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + fN\right)_u}_{②}$$

N.B IL CONTO SU ① TE LO SVOLGO IO INTERAMENTE CERCANDO DI RENDERTI PIÙ CHIARO COSA FACCIAMO, POI SU ② ANDRÒ A SVOLGERLO AL "VOLO" COME HA FATTO LUI A LEZIONE.

① $(\Gamma_{11}^1)_v x_u + \Gamma_{11}^1 x_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + \Gamma_{11}^2 x_{vv} + e_v N + e N_v =$

$= (\Gamma_{11}^1)_v x_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 x_v + \Gamma_{11}^1 f N + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 x_v + \Gamma_{11}^2 g N +$

$+ e_v N + e N_v =$ ROBA IN SPAN DI $\langle N, x_u \rangle + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 x_v + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 x_v + e N_v =$

$=$ RICORDO $N_v = a_{12} x_u + a_{22} x_v$ $=$ ROBA IN $\langle N, x_u \rangle + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 x_v + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 x_v + e a_{22} x_v$

② $\left(\Gamma^1_{12} X_u + \Gamma^2_{12} X_v + f N\right)_u$ = ROBA IN $<X_u, N>$ + $\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} X_u + (\Gamma^2_{12})_u X_v +$

$+ \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} X_v + f_u N_u$ = RICORDANDO $N_u = a_{11} X_u + \underline{a_{21} X_v}$ =

= ROBA IN $<N, X_u>$ = $\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} X_v + (\Gamma^2_{12})_u X_v + (\Gamma^2_{12})^2 X_v + a_{21} X_v$

UGUAGLIANDO LE SCRITTURE SI OTTIENE

$e\, a_{22}$ + FUNZIONI DI (Γ^k_{ij} e DERIVATE) = $f\, a_{21}$ + FUNZIONI DI (Γ^k_{ij} e DERIVATE)

$\Rightarrow$ $e\, a_{22} - f\, a_{21}$ = FUNZIONI DI (Γ^k_{ij} e DERIVATE) $\Rightarrow$ è INTRINSECO.

RICORDIAMO INOLTRE CHE

$$A = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = -\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{21} = \frac{Fe - Ef}{EG - F^2}$$

$$a_{22} = \frac{Ff - Eg}{EG - F}$$

$$\Rightarrow e\, a_{22} - f\, a_{21} = \frac{\cancel{eFf} - eEg - \cancel{fFe} + f^2 E}{EG - F^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{e\, a_{22} - f\, a_{21}}{-E} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = K$$

MA $\frac{e\, a_{22} - f\, a_{21}}{-E}$ è RAPPORTO DI COSE INTRINSECHE QUINDI è INTRINSECO.

LEZIONE 9/11

COROLLARIO S^2 NON È LOC ISOMETRICA AL PIANO

DIM $K_{S^2} \equiv 1$ e $K_p \equiv 0$ (RISPOSTA NEGATIVA ALLA TOPOGRAFIA SULLA COSTRUZIONE DI CARTINE).

FATTO ELICOIDE E CATENOIDE SONO LOCALMENTE ISOMETRICI

DIM IN EFFETTI $\exists f : E \longrightarrow C$ DOVE E = ELICOIDE C = CATENOIDE.

$$E = \varphi(\mathbb{R}^2) \quad \varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u) \quad K_E = -\frac{1}{(1+v^2)^2}$$

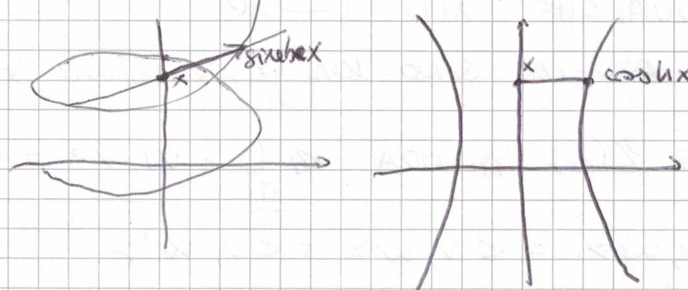
$$C = \psi(\mathbb{R}^2) \quad \psi(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \quad K_C = -\frac{1}{(\cosh u)^4}$$

OSS φ È DIFFEO. OVVIAMENTE LA f CERCATA DEVE PRESERVARE K

DUNQUE $f(\varphi(u,v)) = \psi(u',v')$ e $-\frac{1}{(1+v^2)^2} = \frac{1}{(\cosh u')^4}$

DA CUI $1+v^2 = \cosh^2 u' \Rightarrow v = \sinh u'$

(IN PRATICA MANDIAMO LE RETTE CHE RUOTANO DELL'ELICOIDE NEI MERIDIANI DEL CATENOIDE).



QUINDI MI CONVIENE CAMBIARE φ PER NON USARE $\sinh^{-1}$

$\Rightarrow \alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E \quad \alpha(u,v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$

ORA $K_E(\alpha(u,v)) = K_C(\psi(u,v))$ DUNQUE $f = \psi \circ \alpha^{-1}$ PRESERVA K.

PER FAR VEDERE CHE f È UNA LOC. ISOMETRIA MI BASTA VEDERE CHE I COEFF DELLA I FORMA SONO GLI STESSI PER α e ψ

$$\alpha_u = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_v = \begin{pmatrix} -\sinh u \sin v \\ \sinh u \cos v \\ 1 \end{pmatrix} \quad I_\alpha = \begin{pmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \underset{\cosh^2 u}{\underset{\shortparallel}{1+\sinh^2 u}} \end{pmatrix}$$

$$I_\alpha = I_\psi$$

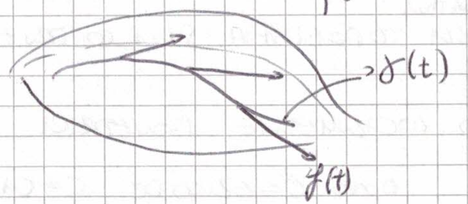
FATTO SE x È UNA PARAMETRIZZAZIONE ORTOGONALE CIOÈ $x_u \perp x_v$ IN OGNI PUNTO ($F \equiv 0$)

$$\Rightarrow K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$$

DIM DISCENDE DALLA DIM. DEL TEO EGREGIUM ESPLICITANDO i Γ^k_{ij} IN FUNZIONE DI E e G E LORO DERIVATE NELLA DIM. CHE I SIMB. DI CHRISTOFFEL SONO INTRINSECI.

DERIVATA COVARIANTE

DEF $\gamma: I \to S$ CURVA, S SUP., I CAMPI TANGENTI LUNGO γ SONO LO SPAZIO VETTORIALE $\mathcal{T}(\gamma) = \{ f: I \to \mathbb{R}^3 \ C^\infty \mid f(t) \in T_{\gamma(t)}(S) \ \forall t \in I \}$



DEF LA DERIVATA COVARIANTE È L'OPERATORE LINEARE $\frac{D}{dt}: \mathcal{T}(\gamma) \to \mathcal{T}(\gamma)$

$$V \longrightarrow \left(t \longrightarrow \underset{\shortparallel}{\pi_t \left(V'(t) \right)} \right)$$ MI GARANTISCE $\frac{D}{dt} V(t) \in T_{\gamma(t)}$

"$V'(t) - \langle V'(t), N \rangle N$" QUINDI È OVVIO C^∞

$\pi_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_{\gamma(t)}(S)$ È LA PROIEZIONE ORTOGONALE.

OSS LA DERIVATA COVARIANTE SERVE PER DERIVARE RESTANDO NELLA VARIETÀ.

DEF $V \in \mathcal{T}(\gamma)$ È PARALLELO se $\frac{D}{dt} V \equiv 0$ cioè se $V'(t) = \lambda(t) N(t)$

PER QUALCHE $\lambda(t): I \to \mathbb{R}$

OSS I CAMPI PARALLELI SONO $\ker\left(\frac{D}{dt}\right)$ e QUINDI SONO UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE.

PROP $V, W \in \mathcal{T}(\gamma)$ ALLORA $\frac{D}{dt} \langle W, V \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{D}{dt} W \rangle$

se $\frac{D}{dt}$ è definita come operatore su $\mathcal{T}(\gamma)$, che significato assume definita su $\langle , \rangle$?

DIM $\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle$

RICORDANDO CHE $V' = \frac{D}{dt} V + \lambda N$ e $W' = \frac{D}{dt} W + \mu N$ e

CHE $\langle V, N \rangle = 0$ e $\langle W, N \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle = \langle \frac{D}{dt} V, W \rangle + \langle V, \frac{D}{dt} W \rangle + \lambda \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\langle N, W \rangle}} + \mu \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\langle V, N \rangle}}$$

$$= \langle \frac{D}{dt} V, W \rangle + \langle V, \frac{D}{dt} W \rangle \quad \square$$

SUPPONIAMO $\gamma(I)$ CONTENUTO IN UNA CARTA CON PARAMETRIZZAZIONE LOCALE $x(u,v): \Omega \to U$

QUINDI $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$ e se V è UN CAMPO TANGENTE $V(t) = \alpha(t) X_u(t) + \beta(t) X_v(t) =$

$$= \alpha(t) X_u(\gamma(t)) + \beta(t) X_v(\gamma(t)) \qquad \alpha, \beta \in C^\infty$$

$$V'(t) = \alpha'(t) X_u + \alpha(u' X_{uu} + v' X_{uv}) + \beta' X_v + \beta(u' X_{uv} + v' X_{vv}) =$$

$$\left.\begin{aligned} &= \alpha' X_u + \alpha u'(\Gamma^1_{11} X_u + \Gamma^2_{11} X_v) + \alpha v'(\Gamma^1_{12} X_u + \Gamma^2_{12} X_v) + \\ &+ \beta' X_v + \beta u'(\Gamma^1_{12} X_u + \Gamma^2_{12} X_v) + \beta v'(\Gamma^1_{22} X_u + \Gamma^1_{22} X_v) + \end{aligned}\right] \frac{DV(t)}{dt}$$

$$+(\alpha u' e + \alpha v' f + \beta u' f + \beta v' g) N$$

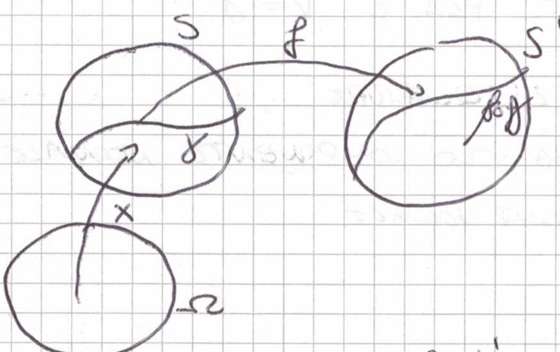
$$\frac{DV(t)}{dt} = X_u(\alpha' + \alpha u' \Gamma^1_{11} + \alpha v' \Gamma^1_{12} + \beta u' \Gamma^1_{12} + \beta v' \Gamma^1_{22}) +$$
$$X_v(\beta' + \alpha u' \Gamma^2_{11} + \alpha v' \Gamma^2_{12} + \beta u' \Gamma^2_{12} + \beta v' \Gamma^2_{22})$$

COROLLARIO LA DERIVATA COVARIANTE È INTRINSECA, CIOÈ SE f È ISOMETRIA LOC

$$\gamma : I \to S \quad V \in \mathfrak{X}(\gamma) \Rightarrow W \in \mathfrak{X}(f \circ \gamma) \quad W(t) = df_{\gamma(t)}(V(t))$$

$$\Rightarrow \forall t \in I \quad \frac{DW(t)}{dt} = df_{\gamma(t)}\left(\frac{DV(t)}{dt}\right)$$

DIM (PIÙ DA CAPIRE CHE SCRIVERE). LA DIMOSTRAZIONE DISCENDE DAL FATTO CHE I SIMBOLI DI CHRISTOFFEL SONO INTRINSECI E CHE f "TRASPORTA" LE COORDINATE α, β IN ARRIVO SENZA TOCCARLE.



BASTA SCEGLIERE $f \circ X$ COME PARA PER S' e per $f \circ \gamma$ E FARE LO STESSO CONTO DI SOPRA.

PROP V È PARALLELO $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} \alpha' = -(\alpha u' \Gamma^1_{11} + \alpha v' \Gamma^1_{12} + \beta u' \Gamma^1_{12} + \beta v' \Gamma^1_{22}) \\ \beta = -(\alpha u' \Gamma^2_{11} + \alpha v' \Gamma^2_{12} + \beta u' \Gamma^2_{12} + \beta v' \Gamma^2_{22}) \end{cases}$$

ATTENZIONE NEL SISTEMA SOPRA γ (DUNQUE u' e v') e Γ^k_{ij} SONO FISSATI, LE INCOGNITE SONO α e β CIOÈ LE COORD CHE MI DETERMINANO V.

QUINDI ABBIAMO UN SISTEMA NORMALIZZATO LINEARE CHE AMMETTE UNICA SOLUZIONE, DEFINITA SU TUTTO I UNA VOLTA FISSATI $\alpha(t_0)$ e $\beta(t_0)$.

FATTO $\forall v_0 \in T_{\gamma(t_0)} S \ \exists!$ CAMPO $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ con $V(t_0) = V_0$

DIM VEDI SOPRA.

DEF QUESTO $V(t)$ DEFINITO SI CHIAMA TRASPORTO PARALLELO DI V_0.

Se fisso $t_1 \in I$ ottengo $T_{\gamma(t_0)}S \xrightarrow{\psi} T_{\gamma(t_1)}S$

$V_0 \longrightarrow V_{\text{PARALLELO}} \to V(t_1)$

QUESTA MAPPA ψ È UN'ISOMETRIA LINEARE IN QUANTO SE V e W SONO PARALLELI $\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle \equiv 0$ PER CUI

$$\langle \psi(V_0), \psi(V_1)\rangle = \langle V_0, V_1\rangle \quad \forall\, V_0, V_1 \in T_{\gamma(t)}S$$

PERCHÉ $\langle V, W\rangle$ = COSTANTE

IN PARTICOLARE V PARALLELO $\Rightarrow \|V\|$ COSTANTE.

ESEMPIO Se $S = \{z=0\}$ $T_p(S) = \{z=0\}$ $\forall p$

Se V è UN CAMPO TANGENTE $V \in \mathcal{T}(\gamma) \Rightarrow V : I \to \{z=0\}$

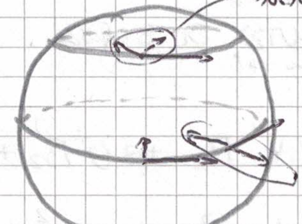
DUNQUE $V' : I \to \{z=0\}$ PERCHÉ $V' = \frac{DV}{dt}$ e DUNQUE

V è PARALLELO $\Leftrightarrow V' = 0 \Leftrightarrow V$ è COSTANTE.

INVECE Su S^2 SE γ è UN PARALLELO PLA e $V = \gamma'$

$\Rightarrow V$ è PARALLELO $\Longleftrightarrow \gamma$ è L'EQUATORE

INFATTI V PARALLELO $\Longleftrightarrow V' = \gamma''$ HA SOLO COMPONENTE NORMALE A S^2



DEF UNA CURVA $\gamma : I \to S$ È GEODETICA SE $\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0$

CIOÈ SE $\gamma'(t)$ È PARALLELO.

OSS 1) LE GEODETICHE SONO QUINDI QUELLE CURVE LA CUI ACCELERAZIONE È NORMALE A $T_{\gamma(t)}S$ $\forall t \in I$

2) γ GEODETICA $\Rightarrow \gamma'$ PARALLELO $\Rightarrow \|\gamma'\|$ = COSTANTE.

TEOREMA $\forall p \in S$ e $v \in T_p(S)$ $\exists!$ GEODETICA MASSIMALE

$\gamma : I \to S$ $\gamma(0)=p$ e $\gamma'(0)=V_0$

DIM IN COORDINATE

$\gamma' = U' X_U + V' X_V$ cioè $\alpha = U'$ $\beta = V'$

DUNQUE γ è GEODETICA $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} U'' = -\left((U')^2 \Gamma_{11}^1 + 2U'V' \Gamma_{12}^1 + (V')^2 \Gamma_{22}^1 \right) \\ V'' = -\left((U')^2 \Gamma_{11}^2 + 2U'V' \Gamma_{12}^2 + (V')^2 \Gamma_{22}^2 \right) \end{cases}$$

CHE È UN SISTEMA NORMALIZZATO (CIOÈ SI RIESCE A ISOLARE LA DERIVATA DI ORDINE MAX) DEL SECONDO ORDINE CON CONDIZIONI INIZIALI $(U(0), V(0)) = p$ e $(U'(0), V'(0)) = V_0$.

LEZIONE 14/11

PROP LE GEODETICHE SONO INTRINSECHE. CIOÈ SE $\gamma : I \to S$ È GEODETICA e $f : S \to S'$ ISOMETRIA LOCALE $\Rightarrow$ $f \circ \gamma$ È GEODETICA DI S'

DIM POICHÉ LA DERIVATA COVARIANTE È INTRINSECA.

$$\text{Se } \frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0 \Rightarrow \frac{D(f\circ\gamma)'}{dt} = \frac{D}{dt} df(\gamma'(t)) = df\left(\frac{D}{dt}(\gamma'(t))\right) \equiv df(0) \equiv 0$$

POICHÉ df ISOMETRIA ~~ESSA~~ LINEARE

ESEMPI 1) Se $S = \{z=0\}$ $\Rightarrow$ $\forall \gamma : I \to S$ $\gamma'' = 0 = \frac{D\gamma'}{dt}$

$\Rightarrow$ γ è GEODETICA $\Leftrightarrow$ $\gamma'' \equiv 0 \Leftrightarrow$ γ è UNA RETTA.

2) $C = \{x^2+y^2=1\}$ CILINDRO

Sia $f : \{z=0\} \to C$ LA LOC. ISOMETRIA DATA DA

$f(x,y,0) = (\cos x, \sin x, y)$ (CHE È SURGETTIVA).

$\forall \gamma$ GEODETICA DI $\{z=0\}$ $f\circ\gamma$ È GEODETICA DI C

~~INOLTRE~~ DUNQUE $\forall p = (p_0, p_1, 0)$ $V = (v_0, v_1, 0)$

$\gamma(t) = (p_0 + tv_0, p_1 + tv_1, 0)$ $f\circ\gamma = (\cos(p_0+tv_0), \sin(p_0+tv_0), p_1+tv_1)$

$f\circ\gamma$ = ELICHE CIRCOLARI RETTE.

DUNQUE TUTTE LE ELICHE CIRCOLARI RETTE (ANCHE DEGENERI COME CIRCONFERENZE, RETTE VERTICALI, PUNTI) SONO GEODETICHE.
SONO ANCHE LE SOLE PERCHÉ PER SURIETTIVITÀ DI f.
$\forall q \in C$ e $w \in T_q C$ $\exists\, p \in \{z=0\}$ e $v \in T_p\{z=0\}$ tc

$f(p) = q$ e $df_p(v) = w$ e QUINDI PER ESISTENZA E UNICITÀ DELLE GEODETICHE FISSATO q e w SONO ANCHE LE SOLE.
(SI POTEVA ANCHE DIRE CHE ESSENDO LE IMMAGINI DI TUTTE E SOLE LE GEODETICHE DEL PIANO TRAMITE ISOMETRIA LOCALE PER INTRINSECITÀ DELLE GEODETICHE NON ESISTONO ALTRE?).

3) SU S^2 TUTTE E SOLE LE GEODETICHE SONO LE COSTANTI O LE PARAMETRIZZAZIONI A VELOCITÀ COSTANTE DEI CERCHI DI RAGGIO MASSIMO, CIOÈ $S^2 \cap P$ CON P PIANO PER L'ORIGINE.

<u>DIM</u> BASTA VEDERE CHE QUELLE DESCRITTE SONO GEODETICHE, IN QUANTO REALIZZANO OGNI POSSIBILE COND. INIZIALE (E DUNQUE SONO TUTTE E SOLE).

BASTA VEDERE CHE γ è UN CERCHIO DI RAGGIO MAX PLA
$\Rightarrow |k_n(\gamma)| \equiv 1$ (VALIDO PER OGNI γ PLA SU S^2 IN QUANTO

$dN = \pm\, Id$) e $k(\gamma) = 1$ (PERCHÉ ARCO DI RAGGIO MAX)

DUNQUE $|\langle \gamma'', N\circ\gamma\rangle| = |k_n| = \|\gamma''\| = k$
PER CAUCHY-SCHWARTZ POICHÉ $\|N\| = 1 \Rightarrow \gamma'' = \pm N\circ\gamma$ E DUNQUE γ è GEODETICA.

<u>TEOREMA</u> (NON DIMOSTRATO) $\gamma : I \to S$ è GEODETICA $\Leftrightarrow$ $\forall t_0 \in I$
$\exists\, \varepsilon > 0$ tc $\forall\, t, t' \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ sia

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) = L(\gamma|_{[t,t']})$$ cioè γ LOC MINIMIZZANTE PER LA DISTANZA. e $\|\gamma'\| =$ COSTANTE.

TEOREMA (Hopf – Rinow) Se $\subseteq \mathbb{R}^3$ è CHIUSA (TOPOLOGICAMENTE)

TUTTE LE GEODETICHE SONO DEFINITE SU $\mathbb{R}$.

OSS IN GENERALE È FALSO, AD ESEMPIO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\gamma(0) = (1,0)$
$\gamma'(0) = (1,0)$ NON È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$ PERCHÈ SI "SCONTRA" CON $(0,0)$.

IDEA POICHÈ LE GEODETICHE HANNO VELOCITÀ A MODULO COSTANTE, se γ è GEODETICA $\Rightarrow$ $\gamma((-M,M))$ È CONTENUTA IN UN LIMITATO DI S DUNQUE PER CHIUSURA DI S $\gamma((-M,M))$ È CONTENUTA IN UN COMPATTO DI S. LA TESI SEGUE DUNQUE DA TEOREMI GENERALI DI ANALISI SU ODE (ORDINARY DIFFERENZIAL EQUATION). TEOREMA DI FUGA DAI COMPATTI + TEOREMA DI ESISTENZA GLOBALE DELLE SOLUZIONI.

OSS γ GEODETICA, ALLORA a, b COSTANTI $\Rightarrow$ $\alpha: t \to \gamma(a+bt)$ È GEODETICA. INFATTI

$$\alpha'(t) = b\,\gamma'(a+bt)$$

$$\alpha''(t) = b^2 \gamma''(a+bt) \overset{\gamma \text{ GEODETICA}}{=} \lambda(t)\, N(\gamma(a+tb)) = \lambda(t)\, N(\alpha(t))$$

GEODETICHE SU SUP. DI ROTAZIONE

SIA $x: I \times \mathbb{R} \to S$ $\quad x(u,v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u))$

$\varphi(u) > 0 \qquad (\varphi')^2 + (\psi')^2 \equiv 1$ CIOÈ LA DIRETTRICE PCA.

Se $\gamma: J \to S$ è UNA CURVA SU S $\Rightarrow$ $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$
(OVVIO LOCALMENTE E ALTRIMENTI DALLA TEORIA DEI RIVESTIMENTI).

$$x_u = \begin{pmatrix} \varphi'\cos v \\ \varphi'\sin v \\ \psi' \end{pmatrix} \qquad x_v = \begin{pmatrix} -\varphi\sin v \\ \varphi\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_{uu} = \begin{pmatrix} \varphi''\cos v \\ \varphi''\sin v \\ \psi'' \end{pmatrix} \qquad x_{uv} = \begin{pmatrix} -\varphi'\sin v \\ \varphi'\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_{vv} = \begin{pmatrix} -\varphi\cos v \\ -\varphi\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

γ è GEODETICA $\iff \langle \gamma'', x_u \circ \gamma \rangle = \langle \gamma'', x_v \circ \gamma \rangle = 0$

$\gamma' = (x \circ (u(t), v(t)))' = u' x_u + v' x_v$ $\to$ "CERCHIAMO DI ESSERE IMPRECISI MA INCISIVI" CIT

$$\gamma'' = u'' x_u + u'(u' x_{uu} + v' x_{uv}) +$$

$$+ v'' x_v + v'(u' x_{uv} + v' x_{vv}) =$$

$= U'' x_u + V'' x_v + (U')^2 x_{uu} + 2U'V' x_{uv} + (V')^2 x_{vv}$

$0 = \langle \gamma'', x_u \rangle$

$$0 = U''\cdot 1 + V''\cdot 0 + (U')^2 \underbrace{(\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'')}_{0} + 2U'V'\cdot 0 - (V')^2 \varphi\varphi'$$

0 PERCHÉ LA DIRETTRICE È PLA.

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$$
$$2\varphi'\varphi'' + 2\psi'\psi'' = 0$$

$0 = \langle \gamma'', x_v \rangle$

$$0 = U''\cdot 0 + V''\cdot \varphi^2 + (U')^2\cdot 0 + 2U'V'\varphi\varphi' + V''\cdot 0$$

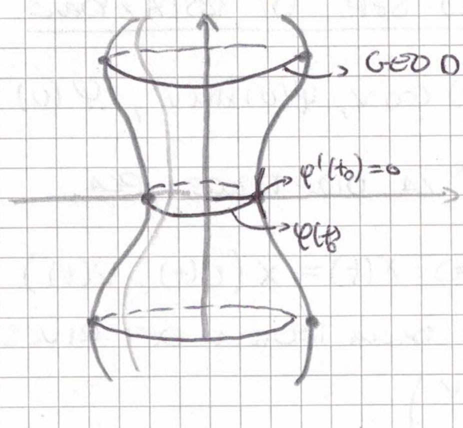
$$\Rightarrow \begin{cases} U'' = (V')^2 \varphi\varphi'' \\ V'' = -\dfrac{2U'V'\varphi'}{\varphi} \end{cases}$$

($\varphi > 0$ QUINDI HO POTUTO DIVIDERE PER φ^2)

PROP 1) I MERIDIANI PERCORSI A VELOCITÀ COSTANTE SONO GEODETICHE

2) UN PARALLELO $t \to x(t_0, t)$ È UNA GEODETICA $\Leftrightarrow \varphi'(t_0) = 0$

CIOÈ LA DISTANZA DALL'ASSE Z È UN PUNTO CRITICO PER LA DIRETTRICE.



ESEMPIO: IL CONO NESSUN PARALLELO È GEODETICA

DIM 1) PER UN MERIDIANO $V' \equiv 0$ (DUNQUE ANCHE $V'' \equiv 0$)

$$\begin{cases} U'' \equiv 0 \\ 0 \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow U = a + bt$$

$\Updownarrow$ LO PERCORRO A VELOCITÀ COSTANTE.

$t \to (a+bt, V_0)$ SONO MERIDIANI A VELOCITÀ COSTANTE, SONO GEODETICHE.

2) IL PARALLELO $t \to x(t_0, t)$ $U' \equiv 0$ e $V' \equiv 1$ DA CUI

$$\begin{cases} 0 = \varphi(t_0)\varphi'(t_0) \\ 0 \equiv 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi'(t_0) = 0$$

PERCHÉ $\varphi(t) > 0$.

OSS **NON** SONO TUTTE LE GEODETICHE, LA CARATTERIZZAZIONE COMPLETA È DIFFICILE.

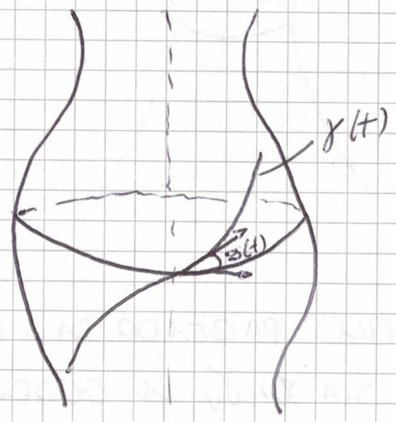
TEOREMA $\gamma : I \to S$, S superficie di rotazione, γ geodetica

e siano R e α coordinate cilindriche (rispetto asse z) su $\mathbb{R}^3$ e $\vartheta(t)$ l'angolo tra $\gamma'(t)$ e il parallelo passante per $\gamma(t)$.

Allora sono integrali primi del moto (cioè costanti) le funzioni

1) $R^2\alpha' = R^2(\gamma(t))\,\alpha'(t)$ (conservazione del momento angolare)

2) $R\cos(\vartheta(t)) = R(\gamma(t))\cos(\vartheta(t))$ (teorema di Clairaut (francese)).



OSS ϑ vicino a $\frac{\pi}{2} \Rightarrow R$ grande

ϑ vicino a $0 \Rightarrow R$ piccolo

DIM 1) se $\gamma = x \circ (u,v) \to R(\gamma(t)) = \varphi(u(t))$

Dunque $R^2\alpha' = (\varphi \circ u)^2 \cdot v'$ la cui derivata è

$$2(\varphi' \circ \varphi \cdot u') \cdot v' + \varphi^2 \cdot v'' =$$

$$= \varphi^2 \underbrace{\left(\frac{2\varphi' u' v'}{\varphi} + v'' \right)}_{\text{seconda cond. delle geodetiche sulle sup di rotazione.}} = 0$$

2) $$\cos(\vartheta(t)) = \frac{\langle \gamma', x_v \rangle}{\|\gamma'\| \cdot \|x_v\|} =$$

$$= \frac{\langle u' x_u + v' x_v, x_v \rangle}{\|\gamma'\| \cdot \|x_v\|} = \frac{v'}{\|\gamma'\|} \cdot \overset{\varphi}{\overset{\shortparallel}{\|x_v\|}} = \frac{v'\varphi}{\|\gamma'\|}$$

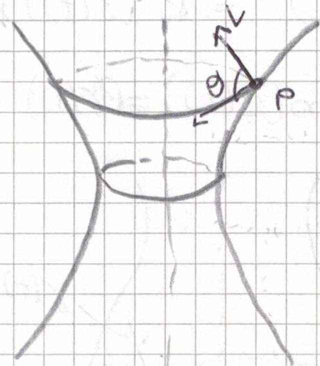
Dunque $$R\cos(\vartheta(t)) = \varphi(t) \cdot \frac{v'\varphi(t)}{\|\gamma'\|} = \frac{\overbrace{\boxed{(\varphi(t))^2 \cdot v'}}^{\text{costante } R^2 v'}}{\underbrace{\|\gamma'\|}_{\text{costante se } \gamma \text{ è geodetica.}}}$$

LEZIONE 15/11

$S = \{x^2+y^2-z^2=1\}$ è UNA SUP, ED È L'IPERBOLOIDE.

è UNA SUP. DI ROTAZIONE FACENDO RUOTARE $\gamma(t) = (\underbrace{\sqrt{1+t^2}}_{\varphi}, 0, \underbrace{t}_{\psi})$

VOGLIAMO ANDARE A DARE UNA CARATTERIZZAZIONE QUALITATIVA DELLE SUE GEODETICHE.



L'UNICO PUNTO IN CUI SI ANNULLA

$\varphi'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ è $t_0 = 0$ CIOÈ QUELLO A QUOTA 0. (QUINDI A PATTO DI RIPARAMETRIZZARE $\gamma(t)$ IN MODO TALE CHE SIA A VELOCITÀ COSTANTE).

PROVIAMO ADESSO A COSTRUIRE UNA GEODETICA PARTENDO DAL PUNTO $P = (\sqrt{2}, 0, 1)$, $v \in T_p(S)$ CON $\|v\| = 1$. SIA γ_v LA GEODETICA TALE CHE $\gamma_v(0) = P$ e $\gamma_v'(0) = v$ (CHE ESISTE PER TEOREMI PRECEDENTI).

CERCHIAMO QUINDI DI DETERMINARE PER QUALI θ γ_v INCONTRA IL PIANO $\{z=0\}$.

OSS PER HOPF-RINOW γ_v è DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

AD ESEMPIO SE $\theta=0$ (CIOÈ SE V HA LA STESSA DIREZIONE DEL PARALLELO)

DA $\underbrace{R(t)\cos(\theta(t)) = R(0)\cos(\theta(0))}_{\text{COSTANTE PER CLAIRAUT}} \Rightarrow R(t) = R(0) \boxed{\dfrac{\cos(0)}{\cos(\theta(t))}}^{>1}$

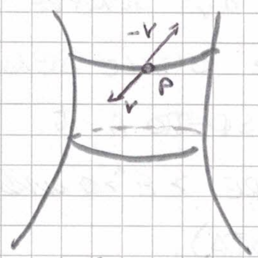
$\Rightarrow R(t) > R(0)$ CIOÈ STO SALENDO e quindi $\gamma_v(\mathbb{R}) \subseteq \{z \geq 1\}$

IN GENERALE SE $\exists\, t_0$ tc $\gamma_v(t_0) \in \{z=0\}$

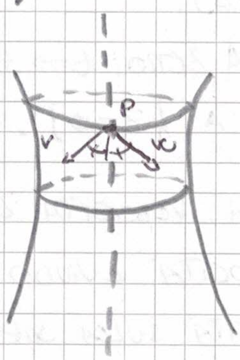
$\underset{\sqrt{2}}{\underset{\shortparallel}{R(0)}}\cos(\theta(0)) = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{R(t_0)}} \cdot \cos(\theta(t_0))$ CHIAMANDO $\theta_0 = \theta(0)$

OTTENIAMO $\cos(\theta_0) = \dfrac{\cos(\theta(t_0))}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

OSSERVAZIONE GEOMETRICA

1) 

CHE PARTA CON LA DIREZIONE V O CON LA DIREZIONE -V LA GEODETICA CHE DEFINISCO È LA STESSA A MENO DI PERCORRERLA IN SENSO OPPOSTO

2) 

CHE PARTA CON IL VETTORE V O CON IL VETTORE W (CHE È IL SIMMETRICO DI V RISPETTO A PIANO PASSANTE PER P e L'ASSE Z) PER QUESTIONI DI SIMMETRIA DELL'IPERBOLOIDE LE DUE GEODETICHE SARANNO SIMMETRICHE (E QUINDI O INTERSECHERANNO ENTRAMBE $\{z=0\}$ O NESSUNA DELLE 2).

USANDO LE OSSERVAZIONI SOPRA POSSO QUINDI SUPPORRE CHE $0 \le \vartheta_0 \le \frac{\pi}{2}$ ~~[illegible]~~ (GLI ALTRI CASI SI RICAVANO PER SIMMETRIA).

ALLORA RICORDANDO CHE $\cos(\vartheta_0) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \vartheta_0 \le \frac{\pi}{2}$

DIMOSTREREMO CHE:

1) Se $\frac{\pi}{4} < \vartheta_0 \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma_v(\mathbb{R})$ PASSA PER $\{z=0\}$

2) Se $\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$ γ_v NON PASSA PER $\{z=0\}$ MA CI TENDE SPIRALEGGIANDO.

DIM 1) Se $\vartheta_0 > \frac{\pi}{4}$ $\cos(\vartheta(t)) = \frac{\overbrace{\sqrt{2}\cos(\vartheta_0)}^{<1-\varepsilon}}{\underbrace{R(t)}_{\ge 1}} < 1-\varepsilon'$

QUESTA MAGGIORAZIONE È UNIFORME IN t (CIOÈ NON DIPENDE DA t).

QUINDI LUNGO γ_v $\cos(\vartheta(t)) < 1$, CIOÈ ~~[illegible]~~ $\vartheta(t) > 0$ CIOÈ LA GEODETICA PUNTA SEMPRE VERSO IL BASSO.

$\forall t$, UNA BASE ORTONORMALE DI $T_{\gamma(t)}S$ È DATA DA X_u, $\frac{X_v}{R(t)}$.

(SUPPONENDO LA DIRETTRICE PLA, $\|X_u\| = 1$ e $\|X_v\| = \varphi(t) = R(t)$.)

$\frac{X_v}{R}$ È LA ~~[illegible]~~ DIREZIONE DEL PARALLELO, Se $\vartheta_0 > \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \gamma_v'(t) = \alpha(t) X_u + \beta(t) \frac{X_v}{R}$ con $\cos(\vartheta(t)) = \beta(t) < 1-\varepsilon'$

~~IL~~ COSENO È IL COEFF. DELLA PROIEZIONE ORTOGONALE.

DA CUI POICHÈ $\gamma_v'(t)$ È UNITARIO (PERCHÈ V ERA UNITARIO QUINDI PER IL TRASPORTO PARALLELO LO È ANCORA).

$\Rightarrow \|\gamma_v'\|^2 = 1 = \alpha^2(t) + \beta^2(t) \Rightarrow |\alpha(t)| > \varepsilon'' \Rightarrow$ HO COMPONENTE VERTICALE (LUNGO I MERIDIANI) DELLA VELOCITÀ γ_v' SEMPRE $> \varepsilon'$ O $< \varepsilon'$, CIOÈ LA GEODETICA SCENDE SEMPRE O SALE SEMPRE.
INOLTRE RICORDANDO CHE ε' È UNIFORME RISPETTO A t
SI DEDUCE CHE LA DERIVATA DI $z \circ \gamma$ È SEMPRE $> \varepsilon'' > 0$
(DOVE z È LA FUNZIONE CHE RAPPRESENTA LA QUOTA).
DUNQUE LA VELOCITÀ VERTICALE NON TENDE MAI A ZERO $t \to \pm\infty$.
QUINDI NON PUÒ MAI SPIRALEGGIARE INTORNO A $\{z=0\}$.

<u>OSS</u> L'ε'' NON È ε' PERCHÉ L'ε' ERA RIFERITO ALLA VELOCITÀ LUNGO I MERIDIANI, MENTRE ε'' È RIFERITO ALLA VELOCITÀ LUNGO z (CIOÈ PERPENDICOLARMENTE A $\{z=0\}$ E NON ALLA VELOCITÀ SULLA SUP).

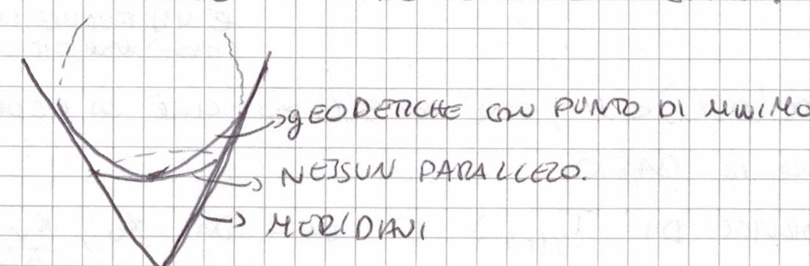
<u>DIM</u> 2) Se $\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \cos(\vartheta(t)) = \dfrac{\sqrt{2}\cos(\vartheta_0)}{R(t)} = \dfrac{1}{R(t)} \leq 1 - \varepsilon_t$

QUESTO NON È PIÙ INDIPENDENTE DAL TEMPO QUINDI NON POSSO FARE LA STIMA DI PRIMA.

Se $\exists\, t_0$ tc $\gamma(t_0) \in \{z=0\}$ $\qquad \cos(\vartheta(t_0)) = \dfrac{\sqrt{2}\cos(\vartheta_0)}{R(t_0)} = \dfrac{1}{R(t_0)} = 1$

E DUNQUE $\gamma'(t_0)$ SAREBBE PARALLELO (ORIZZONTALE). MA QUESTO È ASSURDO PERCHÉ PER UNICITÀ DELLE GEODETICHE FISSATI IL PUNTO DI PARTENZA E LA VELOCITÀ INIZIALE, $\gamma_v(t)$ DOVREBBE COINCIDERE CON IL PARALLELO A QUOTA $\{z=0\}$

<u>ESERCIZIO</u> USARE CLAIRAUT PER DESCRIZIONE QUALITATIVA DELLE GEODETICHE SUL CONO.



DEF FLUSSO INTEGRALE DI CAMPI VETTORIALI (VEDI SISTEMI DINAMICI)

"VE LO SCRIVO ALL'ABATE, CIOÈ PREPARATEVI AD UNA MIRIADE DI SIMBOLI IN POCO SPAZIO" CIT.

Sia $X \in \mathcal{T}(S)$ = CAMPI VETTORIALI TANGENTI

$\exists$ INTORNO APERTO U DI $S \times \{0\}$ IN $S \times \mathbb{R}$ ED UNA FUNZIONE

$F : U \longrightarrow S$ tc F sia C^∞ e $\forall p \in S$ LA FUNZIONE

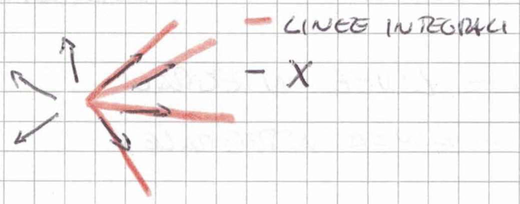
$\gamma_p : (-a_p, b_b) \longrightarrow S \quad \gamma_p(t) = F(p, t)$ SIA UNA LINEA INTEGRALE

DI X (γ_p È LINEA INT. TALE CHE $\gamma(0) = p$),

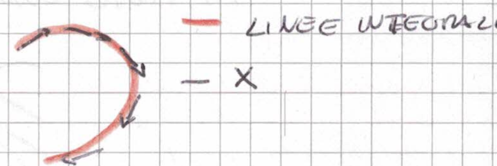
DOVE $p \times (a_p, b_b) \subseteq S \times \mathbb{R} = U \cap (\{p\} \times \mathbb{R})$ È UNA CURVA γ

È DETTA LINEA INTEGRALE PER X se $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad \forall t \in \operatorname{Dom} \gamma$

ESEMPI se X AD ESEMPIO È UN CAMPO RADIALE



SE X È UN CAMPO COSÌ:



LA DIMOSTRAZIONE CHE F ESISTE ED È C^∞ È LASCIATA AD ALTRI CORSI.

PER AVERE UN'IDEA DI COME FACCIA LA DIMOSTRAZIONE

SI SCRIVE IL PROBLEMA PER LE LINEE INTEGRALI IN COORDINATE

$$\overline{X} = a(u,v)\, x_u + b(u,v)\, x_v$$

se $\gamma = x(u,v)$ per cui $\gamma' = u' x_u + v' x_v$

basta porre $\begin{cases} u' = a(u,v) \\ v' = b(u,v) \end{cases}$ e RISOLVERE IL SISTEMA.

DEFINIZIONE Sia $\overline{X}$ UN CAMPO VETTORIALE TANGENTE, UN'INTEGRALE PRIMO per $\overline{X}$ È UNA FUNZIONE $f : S \to \mathbb{R}$ tc $df_p \neq 0 \quad \forall p \in S$ e f sia COSTANTE LUNGO LE LINEE INTEGRALI DI X OVVERO

$$df_p(X(p)) = 0 \quad \forall p \in S.$$

INFATTI se γ È LINEA INTEGRALE $(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) =$

$$= df_{\gamma(t)}(X(\gamma(t)))$$

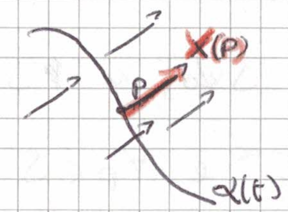
(ESEMPIO COSE COSTANTI LUNGO I MOTI, AD ESEMPIO L'ENERGIA.)

LEMMA $p \in S$ e $X \in \mathfrak{X}(S)$ con $X(p) \neq 0$

$\Rightarrow \exists U$ INTORNO DI p IN S tc $X(q) \neq 0 \ \forall q \in U$ ED ESISTE

UNA $f: U \to \mathbb{R}$ INTEGRALE PRIMO DI $X|_U$

DIM Ho $p \in X$



PRENDIAMO U tc $X|_U \neq 0$ E SIA

$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ tc $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0)$ INDIPENDENTE DA $X(P)$.

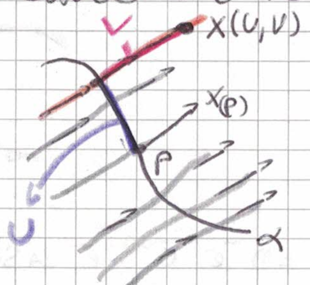
INFINE A MENO DI RESTRINGERE U e ε DEFINISCO

$$x: (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \xrightarrow{x} (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$

$$(u,v) \longrightarrow \gamma_{\alpha(u)}(v) = F(\alpha(u), v)$$

LINEA INTEGRALE DI V

MI MUOVO LUNGO α e POI SEGUO LA LINEA INTEGRALE DI $\alpha(u)$ PER UNA DISTANZA V



VOGLIO VEDERE CHE $x(u,v)$ È UNA PARAMETRIZZAZIONE LOCALE

Sia $x_u(0,0) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\gamma_{\alpha(u)}(0)\right)(0) = \alpha'(0)$

$$x_v(0,0) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\gamma_{\alpha(0)}(v)\right)(0) = X(\alpha(0)) = X(P)$$

QUINDI x_u e x_v SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI IN $(0,0)$ QUINDI A PATTO DI RESTRINGERE ANCORA AD U' LO SONO SU UN INTORNO Ω DI $(0,0)$ E QUINDI x È UNA PARAMETRIZZAZIONE LOCALE.

ORA PONGO $f = u \circ x^{-1}: U' \to \mathbb{R}$ DOVE $x: \underset{(0,0)}{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \to \underset{p}{U'}$ È DIFFEO

f È OVVIAMENTE COSTANTE SULLE LINEE INTEGRALI PERCHÉ x^{-1} DI UNA LINEA INTEGRALE HA LA STESSA COORDINATA U PER COSTRUZIONE

OPPURE SI PUÒ VEDERE: $d_x(x_v) = X$ e DUNQUE

$$d_{x^{-1}}(X) = x_v \quad e \quad du \circ dx^{-1}(X) = df(X) = 0$$

INOLTRE $df = du \circ dx^{-1}$ NON È MAI NULLO PERCHÈ u È UNA COORDINATA E x^{-1} È UN DIFFEOMORFISMO.

N.B. df MAI NULLO SI INTENDE CHE NON È MAI L'APP. LINEARE NULLA. NON CHE NON VALGA MAI ZERO. IN FONDO È UN'APP. LINEARE DA

$$df : \overset{\text{dim } 2}{T(S)} \longrightarrow \overset{\text{dim } 1}{\mathbb{R}}$$

QUINDI HA PER FORZA UN Ker NON BANALE, MA DIRE CHE NON È NULLO SIGNIFICA DIRE CHE HA SEMPRE $rg = 1$.

INOLTRE PER QUANTO VISTO

$$X = \ker df \neq T(S)$$

OSS/LEMMA IN REALTÀ CON LA DIMOSTRAZIONE PRECEDENTE HO MOSTRATO CHE ESISTE UNA PARAMETRIZZAZIONE LOCALE CON $X_u = \underline{X}$ = CAMPO NON NULLO ASSEGNATO.

VORREMMO DIRE DI PIÙ: È VERO CHE PRESI DUE CAMPI X e Y NON NULLI E LINEARMENTE INDIPENDENTI OVUNQUE SONO SEMPRE UN FRAME LOCALE? NO PERÒ...

TEOREMA: DI ESISTENZA DI PARAMETRIZZAZIONI LOCALI.

Sia $p \in S$ SUPERFICIE $\Rightarrow \exists\, x : \Omega \to U$ PARAMETRIZZAZIONE con $X_u \perp X_v$ IN OGNI PUNTO.

DIM TRAMITE GRAM-SCHMIDT COSTRUISCO UN FRAME ORTOGONALE W_1, W_2 SU U INTORNO DI p. (PER FARLO BASTA PRENDERE UNA PARAMETRIZZAZIONE E ORTONORMALIZZARLI IN OGNI PUNTO MA QUESTO MI FA PERDERE LA PARAMETRIZZAZIONE).

AMMESSO DI RESTRINGERE U, PER QUANTO VISTO NEL LEMMA PRECEDENTE, HO UN'INTEGRALE PRIMO f PER W_1 e UN INTEGRALE PRIMO g PER W_2. Sia $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ $\varphi(q) = (f(q), g(q))$

$\Rightarrow \ker d\varphi_p = \ker df_p \cap \ker dg_p = \operatorname{Span}(W_1(p)) \cap \operatorname{Span}(W_2(p)) = \{0\}$

(VEDI LEMMA PREC.)

$\operatorname{Span}(W_1) \subseteq \ker df_p$ e HANNO LA STESSA DIMENSIONE.

DISCORSO ANALOGO PER W_2 e g.

PERCHÈ ORTONORMALI OVUNQUE.

A MENO DI RESTRINGERE U, φ È UN DIFFEOMORFISMO, $\varphi: U \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO. DICO CHE $X = \varphi^{-1}: \Omega \to U$ È LA PARAMETRIZZAZIONE CERCATA.

DIM. DA FINIRE GIORNO DOPO:

LEZIONE 16/11

CONTINUO DELLA DIMOSTRAZIONE: PER COSTRUZIONE POICHÉ

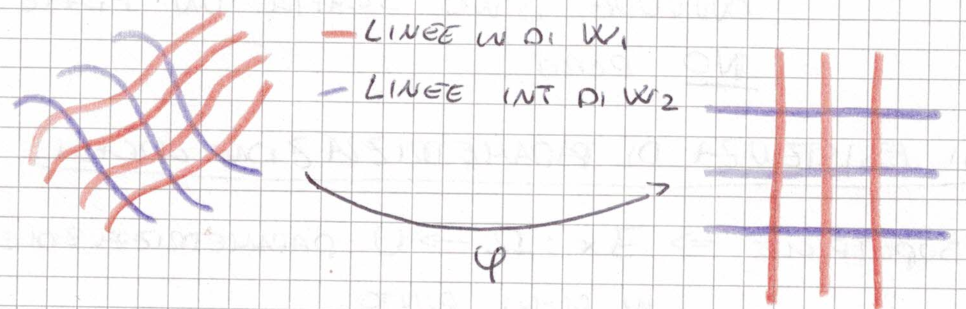
f È COSTANTE SULLE LINEE INTEGRALI DI W_1, φ PORTA LE LINEE ~~VERTICALI~~ INTEGRALI DI W_1 IN LINEE VERTICALI IN Ω

CIOÈ $d\varphi_q(W_1(q)) = \lambda(q)(0,1)$ CON $\lambda(q) \neq 0$

PIÙ PRECISAMENTE.

$$d\varphi_q(W_1(q)) = \left(df_q(W_1(q)),\ dg_q(W_1(q))\right) = (0, *) \quad * \neq 0$$

ANALOGAMENTE $d\varphi_q(W_2(q)) = (\mu(q), 0)$ $\mu(q) \neq 0$.



QUINDI $X_u = dX(e_1) = dX\left(\dfrac{d\varphi(W_2(q))}{\mu \circ X}\right) =$ FATTORE NORMALIZZANTE.

$$= \frac{\overbrace{d(X\circ\varphi)}^{Id}(W_2(q))}{\mu\circ X} = \frac{W_2(q)}{\mu \circ X}$$

ANALOGAMENTE $X_v = dX(e_2) = \dfrac{W_1(q)}{\lambda \circ X}$

DA CUI LA TESI PERCHÉ INOLTRE W_1 E W_2 SONO ORTOGONALI.

OSS ABBIAMO QUINDI VISTO CHE $\exists X: \Omega \to U$ CON $X_u = \alpha W_2$ E $X_v = \beta W_1$ DOVE W_1 E W_2 ORTONORMALI ASSEGNATI, PERÒ NON POSSIAMO CHIEDERE CHE $X_u = W_2$ E $X_v = W_1$ $(\alpha = \beta = 1)$ PERCHÉ SE FOSSE POSSIBILE PER OGNI S SUP. $\Rightarrow$ AVREI $E = G = 1$ E $F = 0$ CIOÈ TUTTE LE S SAREBBERO LOC ISOMETRICHE AL PIANO.

OSSERVAZIONE Se $v \in \mathcal{T}(\gamma)$ un campo lungo $\gamma: I \to S$ UNITARIO cioè $\|v(t)\| = 1$, UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$ (in $\gamma(t)$) è DATA DA $v(t)$, $N(\gamma(t))$ e $\bar{v}(t) = N(\gamma(t)) \wedge v(t)$

LA BASE $\{v(t), \bar{v}(t), N(\gamma(t))\}$ è ORTONORMALE POSITIVA e quindi $v(t)$, $\bar{v}(t)$ è UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA DI $T_{\gamma(t)}S$

INOLTRE POICHÉ $1 = \langle v(t), v(t) \rangle$

$$0 = \langle \frac{D}{dt} v(t), v(t) \rangle \Rightarrow \frac{D}{dt} v(t) \in T_{\gamma(t)}(t) \text{ e } \perp v(t)$$

$$\Rightarrow \frac{D}{dt} v(t) = \lambda(t) \bar{v}(t)$$

DEF $\left[\frac{D v(t)}{dt}\right] = \langle \frac{D}{dt} v(t), \bar{v}(t) \rangle$ = VALORE ALGEBRICO DELLA DERIVATA COVARIANTE.

$$\Rightarrow \frac{Dv}{dt} = \left[\frac{Dv}{dt}\right] \cdot \bar{v}$$

(OSS BASTAVA PER QUESTA DEF CHE $\|v\|$ = COSTANTE NON NECESSARIAMENTE 1)

DEF $\gamma: I \to S$ PLA LA CURVATURA GEODETICA DI γ è

$$k_g(t) = \left[\frac{D\gamma'(t)}{dt}\right]$$

CHE è BEN DEF. perché $\gamma' \in \mathcal{T}(\gamma)$ e $\|\gamma'\| = 1$

OSS $k_g \equiv 0 \iff \frac{D\gamma'}{dt}(t) \equiv 0 \iff \gamma$ è GEODETICA.

QUINDI k_g MISURA QUANTO γ DISCOSTA DA ESSERE UNA GEODETICA.

INOLTRE $\gamma'' = \underbrace{\frac{D\gamma'}{dt}}_{\text{COMPONENTE TG DI } (\gamma)'} + \underbrace{k_n N \circ \gamma}$

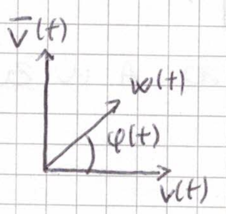
→ COMPONENTE NORMALE DEL CAMPO γ' CHE PER DEFINIZIONE è k_n.

$$\gamma'' = k_g \cdot \bar{\gamma}' + k_n \cdot (N \circ \gamma)$$

DA CUI $\|\gamma''\|^2 = k^2 = k_g^2 + k_n^2$

DEF $v, w \in \mathcal{T}(\gamma)$ UNITARI $\Rightarrow$ UNA DETERMINAZIONE DELL'ANGOLO DA v A w è UNA FUNZIONE C^∞ $\varphi: I \to \mathbb{R}$ tale che

$$w(t) = \cos(\varphi(t))\, v(t) + \sin(\varphi(t))\, \bar{v}(t) \quad \forall t \in I$$



LEMMA UNA DET φ DELL'ANGOLO ESISTE, E DUE DIFFERENTI DIFFERISCONO PER UN MULTIPLO INTERO DI 2π.

DIM LA FUNZIONE $\alpha : I \longrightarrow S^1$

$$t \to (\langle W, V\rangle, \langle W, \bar{V}\rangle) \in C^\infty$$

E DUNQUE SI SOLLEVA AD UNA MAPPA C^∞

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tc} \quad \pi \circ \varphi(t) = \alpha(t)$$

$$\text{tc} \quad \pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \qquad \pi(x) = (\cos x, \sin x)$$

DUE TALI SOLLEVAMENTI DIFFERISCONO PER UNA COSTANTE $2k\pi$.

LEMMA $V, W \in \mathcal{X}(\gamma)$, UNITARI, $\varphi(t)$ ANGOLO DA V IN W ALLORA

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] = \left[\frac{DV}{dt}\right] + \varphi'(t)$$

DIM $W = \cos\varphi\, V + \sin\varphi \cdot \bar{V}$

$$W' = -\varphi' \sin\varphi\, V + \cos\varphi\, V' + \varphi' \cos\varphi\, \bar{V} + \sin\varphi\, \bar{V}'$$

$$\bar{W} = N \wedge W = \cos\varphi\,(N\wedge V) + \sin\varphi\,(N \wedge \bar{V}) =$$

$$= \cos\varphi\, \bar{V} - \sin\varphi\, V$$

$$\left[\frac{DW}{dt}\right] = \left\langle \frac{DW}{dt}, \bar{W}\right\rangle = \langle W', \bar{W}\rangle =$$

PERCHÈ TANTO $\bar{W} \in T_g$
E QUINDI ANNULLERÀ
LA COMPONENTE NORMALE
DI W'

PERCHÈ $\|V\| = 1$ $\langle V, V\rangle = 1$
$2\langle V', V\rangle = 0$

$$= \sin^2\varphi\, \varphi' + \cos^2\varphi\, \varphi' + \cos^2\varphi \langle V', \bar{V}\rangle - \cancel{\sin\varphi\cos\varphi \underbrace{\langle V, V'\rangle}_{0}} + \cancel{\sin\varphi\cos\varphi \underbrace{\langle \bar{V}, \bar{V}'\rangle}_{0}}$$

$$- \sin^2\varphi \langle \bar{V}', V\rangle =$$

$$= \varphi' + \cos^2\varphi \langle V', \bar{V}\rangle - \sin^2\varphi \langle \bar{V}', V\rangle =$$

RICORDANDO CHE $\langle V, \bar{V}\rangle = 0$ DERIVANDO $\langle V', \bar{V}\rangle + \langle V, \bar{V}'\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \bar{V}', V\rangle = -\langle V', \bar{V}\rangle$

$$= \varphi' + \cos^2\varphi \langle V', \bar{V}\rangle + \sin^2\varphi \langle V', \bar{V}\rangle =$$

$$= \varphi' + \langle V', \bar{V}\rangle = \varphi' + \left\langle \frac{DV}{dt}, \bar{V}\right\rangle = \varphi' + \left[\frac{DV}{dt}\right].$$

PER LO STESSO ANALOGO DISCORSO FATTO A INIZIO
DIM. PER W

DEF UNA <u>REGIONE</u> è UN SOTTOINSIEME $R \subset S$ DI UNA SUPERFICIE t.

1) $\mathring{R} \neq \emptyset$ e R è COMPATTO

2) ∂R è IL SUPPORTO DI UN'UNIONE DI CURVE SEMPLICI CHIUSE SENZA CUSPIDI.

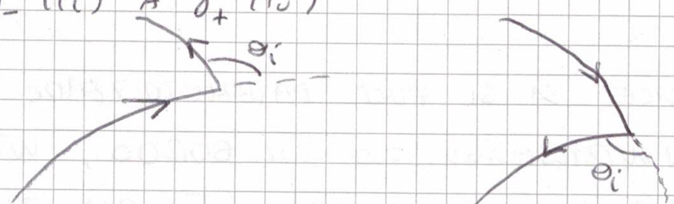
DEF R SI DICE <u>SEMPLICE</u> SE è OMEOMORFA AD UN DISCO $\overline{D^2}$ CHIUSO E CONTENUTA IN UNA CARTA CON PARAMETRIZZAZIONE ORTOGONALE.

DEF $\gamma : [0,a] \to S$ PLA è UNA CURVA SEMPLICE CHIUSA SENZA CUSPIDI se $\gamma(0) = \gamma(a)$, $\gamma|_{[0,a)}$ è INIETTIVA, è CONTINUA, C^∞ sui tratti $[t_i, t_{i+1}]$ con $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} = a$ PARTIZIONE DI $[0,a]$ e TALE CHE

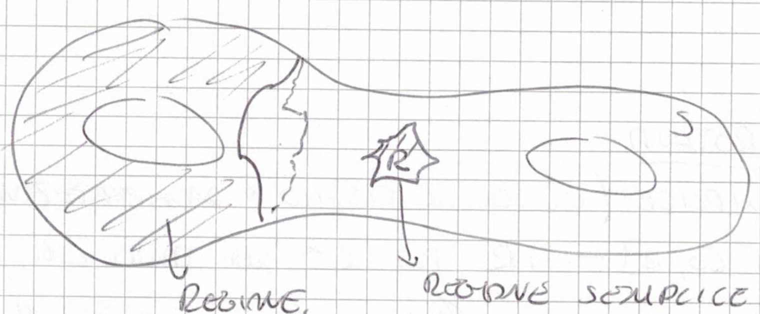
$$\gamma_-'(t_i) = \lim_{t \to t_i^-} \gamma'(t) \quad e \quad \gamma_+'(t_i) = \lim_{t \to t_i^+} \gamma'(t) \quad \text{NON SIANO OPPOSTI}$$

$\forall i \bmod m$ (NEL SENSO CHE t_0 CON t_{m-1} NON SIANO ESCLUSI DALLA DEFINIZIONE).

DEF L'ANGOLO ESTERNO è L'ANGOLO IN t_i, ED è L'ANGOLO DA $\gamma_-'(t_i)$ A $\gamma_+'(t_i)$



DISEGNI A CASO DI REGIONI



DEF Sia R una regione semplice (in questo caso basterebbe definita in una carta)

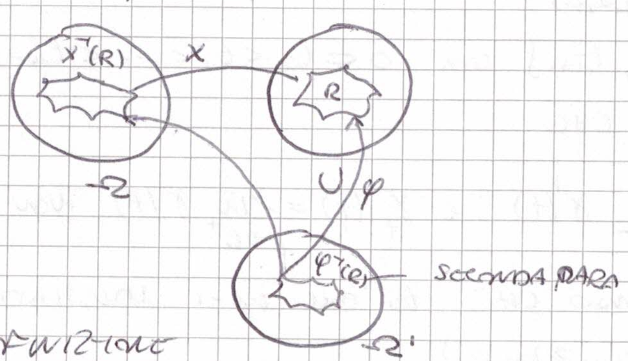
E sia $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ continua (limitata perché R è compatta)

$x : \Omega \longrightarrow U$ una parametrizzazione locale con $R \subset U$

$$\Rightarrow \int_R f = \iint_{x^{-1}(R)} f \circ x \cdot \sqrt{EG - F^2} \, du dv$$

Infatti $\|X_u \wedge X_v\|^2 = EG - F^2 = \det I$

OSS $\|X_u \wedge X_v\|$ = area del parallelogramma su T_pS di lati X_u e X_v cioè è il nuovo "elemento d'area"



OSS La ~~dimostrazione~~ definizione non dipende dalla scelta di X parametrizzazione: si ha in automatico per la formula di cambiamento di variabile tra aperti di $\mathbb{R}^2$.

OSS Se R non è semplice la si può parametrizzare in regioni semplici che si intersecano solo sul bordo, integrare sulle regioni semplici e sommare. Il risultato non dipende dalle partizioni.

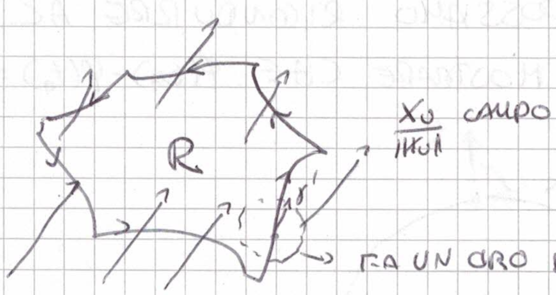
DEF $\text{Area}(R) = \int_R 1$

TEOREMA DELLE TANGENTI ROTANTI

Sia R in S una regione semplice (quindi ho fissato X parametrizzazione) con bordo parametrizzato $\gamma : [0, a] \to \partial R$ per a C^∞ sui tratti $[t_i, t_{i+1}]$ con angoli esterni $\theta_0, \dots, \theta_{m-1}$ in $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_{m-1})$ e sia φ_i una determinazione dell'angolo da $\frac{X_u}{\|X_u\|}$ (campo) e γ' nell'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$

ALLORA $$\sum_{i=0}^{m-1} \left(\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi(t_i) \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i = 2\pi .$$

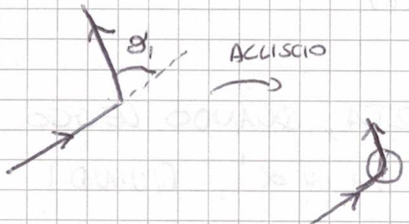
(Il teorema mi dice in sostanza che dopo un giro su ∂R γ' ha ruotato di 2π)



→ FA UN GIRO DI 2π DOPO AVER PERCORSO TUTTO ∂R

__DIM__ (SOLO UNO SKETCH DIM NON COMPLETA).

ALLISCIANDO I VERTICI il termine θ_i AFFLUISCE in $\varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i)$



QUINDI LA CURVA CHE FACCIO IN PIÙ È PROPRIO IL VECCHIO θ_i

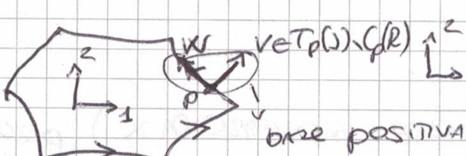
QUINDI POSSO SUPPORRE ∂R LISCIO, ALLORA $\underbrace{\varphi(t_n)-\varphi(t_0)}_{\text{ANGOLO DI PARTENZA MENO QUELLO DI ARRIVO}} \in 2\pi\mathbb{Z}$

RESTA DA VEDERE CHE IL MULTIPLO È PROPRIO 2π.

__LEZIONE 21/11__

ANDIAMO AD AGGIUNGERE UNA CONVENZIONE CHE UTILIZZEREMO E CHE CI SERVIRÀ PER ULTIMARE LA DIMOSTRAZIONE LASCIATA IN SOSPESO.

__CONVENZIONE:__ Se R è UNA REGIONE, ALLORA ORIENTEREMO OGNI "PORZIONE" DI ∂R così: Se $v \in T_p(S)-C_p(R)$ cioè v è "USCENTE" ALLORA $w \in T_p(\partial R)$ è POSITIVO se $\{v, w\}$ è UNA BASE POSITIVA DI T_pS (CIÒ HA SENSO AL DI FUORI DEI PUNTI ANGOLOSI) E TUTTE LE PARAMETRIZZAZIONI DI ∂R SARANNO POSITIVE.



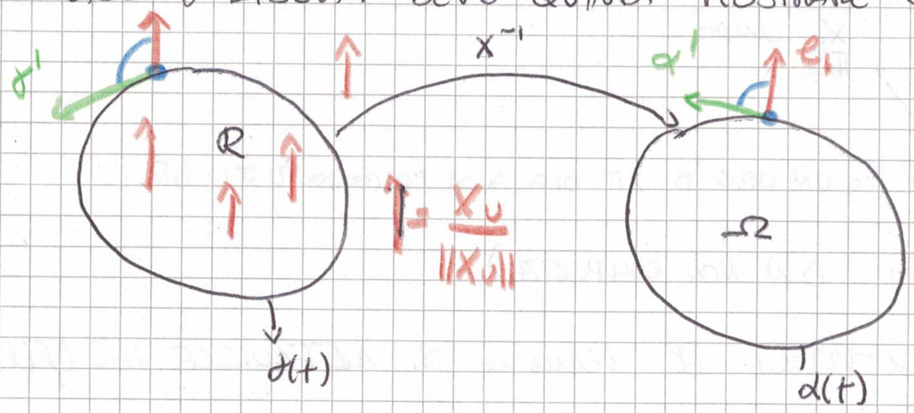
__OSS__ IL TEOREMA DELLE TANGENTI RUOTANTI FUNZIONA CON QUESTA CONVENZIONE.

__TORNANDO A TEOREMA:__ R SEMPLICE $\gamma: [0,l] \to \partial R$ P. LA PARAMETRIZZAZIONE DI ∂R

φ DETERMINAZIONE DELL'ANGOLO DA $\frac{X_u}{\|X_u\|}$ e γ'

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t_{i+1})-\varphi(t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi.$$

DIM. ABBIAMO GIÀ VISTO CHE CI POSSIAMO RICONDURRE AL CASO γ LISCIA. DEVO QUINDI MOSTRARE CHE $\varphi(t_M)-\varphi(t_0)=2\pi$



POSSO LEGGERE LE COSE IN CARTA.

SIA $\alpha = X^{-1}\circ\gamma$ LA CURVA IN UNA CERTA CARTA, QUANDO LEGGO IN CARTA $\frac{X_u}{\|X_u\|}$ VA IN UN MULTIPLO DI e_1 E γ' VA IN α', QUINDI $\varphi(t)$ IN CARTA È L'ANGOLO TRA e_1 E $\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ RISPETTO ALLA METRICA $\begin{pmatrix} E(\alpha(t)) & F(\alpha(t)) \\ F(\alpha(t)) & G(\alpha(t)) \end{pmatrix}$.

OSS QUESTO PERCHÈ UNA CARTA X PUÒ "DISTORCERE" GLI ANGOLI E QUINDI IL CAMBIO DI METRICA VA CONSIDERATO.

OSSERVIAMO CHE $\varphi(t_M)-\varphi(t_0)$ È DISCRETO IN $\mathbb{R}$ PERCHÈ $\in \mathbb{Z}2\pi$

ANDIAMO A COSTRUIRE UN'OMOTOPIA DI METRICHE PER VEDERE CHE RICONDURCI SEMPRE ALLA METRICA CLASSICA È LECITO.

$$g_s = s\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + (1-s)\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$$ UNA METRICA CON $s\in[0,1]$

OSS OVVIAMENTE LE MATRICI SIMMETRICHE SONO UN CONVESSO QUINDI $g_s \in S(n,\mathbb{R})$ $\forall s\in[0,1]$

$g_0 =$ È IL PULL-BACK (METRICA PORTATA INDIETRO DA X) DELLA METRICA IN S

$g_1 =$ METRICA DEL PIANO.

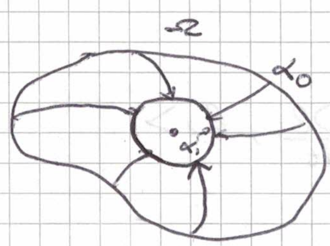
SE φ_s È UNA GENERICA DEFINIZIONE DELL'ANGOLO DA e_1 A $\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ RISPETTO A g_s POSSO SCEGLIERE $\varphi_s(t)$ CHE DIPENDA IN MODO CONTINUO DA (t,s) E $\varphi_0=\varphi$

IN PARTICOLARE HO CHE $\varphi_s(t_u)-\varphi_s(t_0)$ È CONTINUO IN S PERÒ È A VALORI IN $2\pi\mathbb{Z}$ DUNQUE È COSTANTE.
(FUNZIONE CONTINUA A IMMAGINE DISCRETA È PER FORZA COSTANTE).

CIOÈ $\varphi_s(t_u)-\varphi_s(t_0) = \varphi_0(t_u)-\varphi_0(t_0)$ $\forall s$ QUINDI POSSO CALCOLARE

$\varphi_1(t_u)-\varphi_1(t_0)$ CIOÈ LAVORARE CON LA METRICA DEL PIANO.

TRAMITE UN'ALTRA OMOTOPIA (SPOILER: È IN REALTÀ UN'ISOTOPIA) POSSO CREARE UNA FAMIGLIA α_s $s\in[0,1]$ $\alpha_0=\alpha$ e α_1 = PICCOLA CIRC.

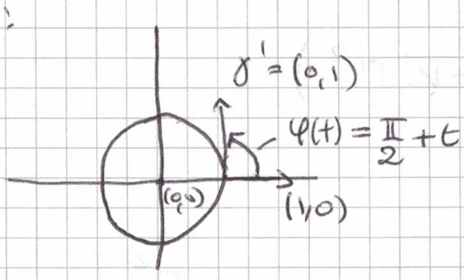


$\forall s$ α_s È UNA CURVA CHIUSA SEMPLICE C^∞.

PER ANALOGHE RAGIONI DI CONTINUITÀ $\varphi_s(t_u)-\varphi_s(t_0)$ (SE φ_s È UNA DET. DELL'ANGOLO TRA e_1 e $\frac{\alpha_s'}{\|\alpha_s'\|}$) NON DIPENDE DA S, QUINDI CALCOLEREMO PER $s=1$ CIOÈ SULLA CIRCONFERENZA.

PICCOLO RIASSUNTO: PRIMA AVEVAMO UNA CURVA FISSATA E MUOVEVAMO LA METRICA E LA DIPENDENZA DA S DEL VALORE CERCATO ERA NULLA. ADESSO ABBIAMO FISSATO LA METRICA DEL PIANO, "MUOVIAMO" LA CURVA AL VARIARE DI S E ANCHE IN QUESTO CASO IL VALORE CERCATO È INDIPENDENTE.

PER ESERCIZIO:



DOPO UN GIRO $\frac{\pi}{2}+t+2\pi$ DA CUI LA TESI.

TEOREMA DI GAUSS-BONET LOCALE

$R \subseteq S$ REGIONE SEMPLICE. ALLORA:

$$\int_R K + \int_{\partial R} k_g + \sum_{i=0}^{m-1} \theta_i = 2\pi$$

DOVE I θ_i SONO GLI ANGOLI ESTERNI DI R.

DIM Sia γ UNA PARAMETRIZZAZIONE PLA A TRATTI POSITIVA DI ∂R,

$e_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|}$ e sia $\varphi_i(t)$ UNA DETERMINAZIONE DELL'ANGOLO DA e_1 a $\gamma'(t)$

in $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$k_g(t) \underset{\text{PER DEFINIZIONE}}{=} \left[\frac{D\gamma'(t)}{dt}\right] \underset{\text{PER LEMMA (DIM)}}{=} \varphi' + \left[\frac{De_1}{dt}\right] = \varphi' + \left\langle \frac{De_1}{dt}, e_2 \right\rangle$$

CON $e_2 = \frac{X_v}{\|X_v\|}$ DOVE X È UNA PARAMETRIZZAZIONE ORTOGONALE POSITIVA

SU R $x: \Omega \longrightarrow U \supseteq R$ per cui $e_2 = N(\gamma(t)) \wedge e_1(\gamma(t))$.

PONGO $e_i(t) = e_i(\gamma(t))$

IN COOR. SE $\gamma = (u(t), v(t))$ $\quad e_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot X_u$

$$D e_1(t) = \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Span}(X_u)}}{\text{Cose in } \mathrm{Span}(e_1)} + E^{-1/2} u' \Gamma_{11}^2 X_v + E^{-1/2} v' \Gamma_{12}^2 X_v$$

PER CUI OTTENIAMO

$$k_g = \varphi' + E^{-1/2} G^{1/2} \left(u' \Gamma_{11}^2 + v' \Gamma_{12}^2\right)$$

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN$$

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = \Gamma_{11}^2 G$$

$$\| $$

$$\frac{\partial}{\partial u}\underset{\substack{\| \\ 0}}{\langle X_u, X_v \rangle} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle X_u, X_u \rangle = -\frac{1}{2} E_v \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{G}$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN$$

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\langle X_v, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u = \Gamma_{12}^2 G \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}$$

$$k_g = \varphi' + \frac{E^{-1/2}}{2} G^{-1/2} \left(-u' E_v + v' G_u \right) =$$

$$= \varphi' = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(v' G_u - u' E_v \right)$$

$$\int_{\partial R} k_g = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_i' + \left(\quad \right) dt = \sum_{i=0}^{M-1} \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) + \int_0^{t_M} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(v' G_u - u' E_v \right) =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{TEOREMA DI} \\ \text{GAUS-GREEN}}}{=} \sum_{i=0}^{M-1} \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) + \iint_{X^{-1}(R)} \underbrace{\left[\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v \right]}_{\text{PER VECCHIO LEMMA}} du dv =$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) + \iint_{X^{-1}(R)} - K \cdot \underbrace{\sqrt{EG}}_{= \sqrt{EG - F^2} \text{ con } F=0} du dv =$$

QUINDI PER TEOREMA CAMBIAMENTO DI VARIABILI

$$= \sum_{i=0}^{M-1} \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) + \iint_R - K =$$

$$= 2\pi - \sum_{i=0}^{M-1} \vartheta_i - \iint_R K$$

LEZIONE 22/11

ENUNCIATO GAUSS-BONET (LOCALE)

$R \subset S$ SEMPLICE ALLORA

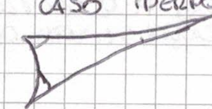
$$\int_{\partial R} k_g + \int_R K + \sum_{i=0}^{m-1} \theta_i = 2\pi$$

DEF UN TRIANGOLO È UNA REGIONE OMEOMORFA A $\overline{D^2}$ CON 3 PUNTI ANGOLOSI, DETTI VERTICI, E DUNQUE 3 PORZIONI DI BORDO C^∞ DETTE LATI.

DEF UN TRIANGOLO È GEODETICO SE I LATI SONO GEODETICI.

COROLLARIO: SIA T UN TRIANGOLO SEMPLICE GEODETICO (CON GAUSS-BONET GLOBALE TOGLIEREMO SEMPLICE) ALLORA LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI A T è $\pi + \int_T K$

CASO IPERBOLICO



CASO SFERICO

DIM $k_g \equiv 0$ PERCHÉ IL TRIANGOLO È GEODETICO, QUINDI $\int_{\partial T} k_g \equiv 0$

SE θ_i ANGOLI ESTERNI ALLORA LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI È $3\pi - \sum_{i=1}^{3} \theta_i$ (OGNI ANGOLO INTERNO È $\pi - \theta_i$)

E QUINDI $3\pi - \sum_{i=1}^{3} \theta_i \underset{\text{GAUSS-BONET}}{=} 3\pi - \left(2\pi - \int_T K\right) = \pi + \int_T K$

COROLLARIO SIA $p \in S$ T_n È UNA SUCCESSIONE DI TRIANGOLI SEMPLICI GEODETICI, $p \in T_n$ $\forall n$ E $T_n \subset S$ E $T_n \subseteq B(p, \frac{1}{n})$

SIA $\Delta(T_n)$ = SOMMA ANGOLI INTERNI A $T_n - \pi$

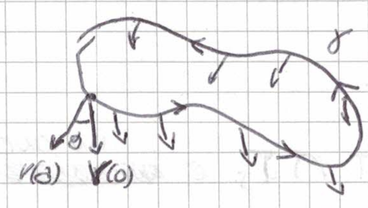
$$\Rightarrow K(p) = \lim_{n \to \infty} \frac{\Delta(T_n)}{\text{Area } T_n} \underset{\text{DIM}}{=} \frac{\int_{T_n} K}{\text{Area } T_n} \underset{\text{TEOREMA MEDIA INTEGRALE}}{=} K(p)$$

OSS ABBIAMO QUINDI RITROVATO LA CURVATURA IN TERMINI DI SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI AD UN TRIANGOLO.

ANDIAMO ADESSO A RICAVARE LA CURVATURA IN TERMINI DI TRASPORTO PARALLELO:

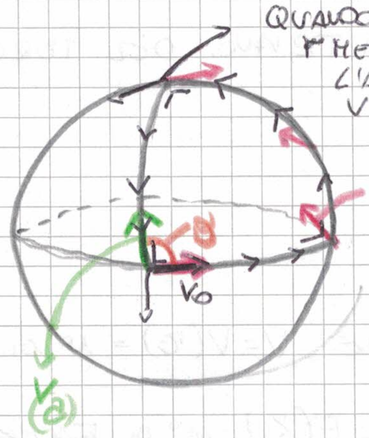
Sia $\gamma : [0,a] \to U$ PARAMETRIZZAZIONE PCA DEL BORDO DI UNA REGIONE SEMPLICE R, $\gamma(0) = \gamma(a) = p$, Sia $v_0 \in T_pS$, $\|v_0\| = 1$ e SIA $V(t)$ IL TRASPORTO PARALLELO (CAMPO) LUNGO γ CON $V(0) = V_0$

PROP $V(a) = R_\vartheta V_0$ DOVE R_ϑ È LA ROTAZIONE IN $T_p(S)$ DI ANGOLO ϑ, DOVE $\vartheta = \int_R K$. IN ALTRE PAROLE IL TRASPORTO PARALLELO LUNGO γ DA $t=0$ A $t=a$ È LA ROTAZIONE R_ϑ



VEDIAMO UN CASO PARTICOLARE SULLA SFERA, PRENDIAMO COME γ IL BORDO DI UN TRIANGOLO CHE HA 2 LATI SUI MERIDIANI E UNO SU UN CERCHIO DI RAGGIO MAX E TUTTI ANGOLI DI 90°.

QUANDO ARRIVA AL SECONDO VERTICE V È ANCORA ENTRANTE MENTRE IL VETTORE TANGENTE È USCENTE, QUINDI L'ANGOLO È PIATTO. ~~ERGO~~. DOVENDO RIMANERCI PERCHÉ V È TRASPORTO PARALLELO, V(a) SARÀ VERTICALE



V, QUANDO ARRIVA A QUESTO ~~3°~~ VERTICE CI ARRIVA ENTRANTE, MENTRE SUL SECONDO LATO DI γ I VETTORI SONO TUTTI TANGENZIALI AL MERIDIANO. PER DEFINIZIONE DI TRASPORTO TG. L'ANGOLO NON DEVE CAMBIARE QUINDI V CI RESTERÀ COSTANTE ED ENTRANTE.

DIM PROP Sia $e_1 = \frac{X_u}{\|X_u\|}$ COME NELLA DIM GAUSS-BONNET LOC, E SIA φ UNA DETERMINAZIONE DELL'ANGOLO DA e_1 A V LUNGO γ,

$$0 = \left[\frac{DV}{dt}\right] = \left[\frac{De_1}{dt}\right] + \varphi'$$

INTEGRANDO LUNGO IL BORDO ∂R (ABBIAMO SUPPOSTO ∂R LISCIO).

$$0 = \int_{\partial R} \left[\frac{DV}{dt}\right] + \varphi(a) - \varphi(0) =$$

COME GIÀ VISTO IN GAUSS BONNET

$$= -\int_R K + \underbrace{\varphi(a) - \varphi(0)}_{\vartheta}$$

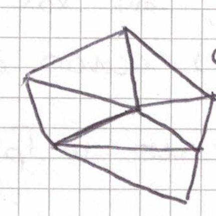
DA CUI LA TESI.

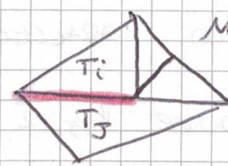
IL CASO ∂R NON LISCIO BASTA DIVIDERE ∂R DA CUI $\int_{\partial R} \varphi' = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \vartheta$.

DEF Sia ~~S~~ una superficie, R una regione, una triangolazione $\mathcal{T}$ di R è un insieme finito $T_1 \dots T_n$ di triangoli, con

$T_i \subseteq R \ \forall i$, $\bigcup T_i = R$ e $T_i \cap T_j$ o è un lato comune o un vertice.

ESEMPI:

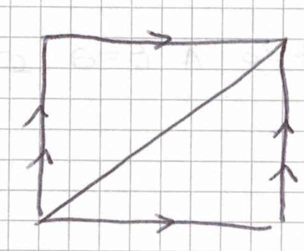

OK

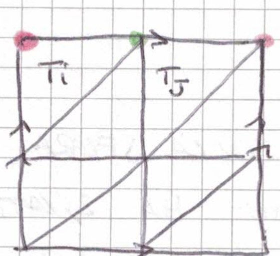


NO

— $T_i \cap T_j$ è intersezione ma è un lato solo per T_i e non per T_j

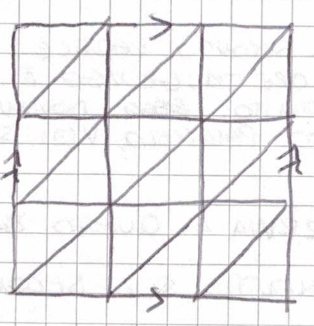
SUL TORO:


NO! Non sono triangoli



$\nexists$ $T_i \cap T_j$ è unione ~~intersezione~~ di 2 vertici distinti.

INVECE

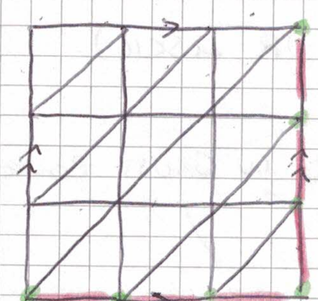

è una triang. del toro!

DEF Se $\mathcal{T}$ è una triangolazione, si pone $V = V(\mathcal{T})$ = n° di vertici

$E = E(\mathcal{T})$ = n° di lati (edges) $\quad F = F(\mathcal{T})$ = n° di facce

(chi) $\chi(\mathcal{T}) = V - E + F$ = caratteristica di Eulero-Poincaré

TORNANDO AL TORO

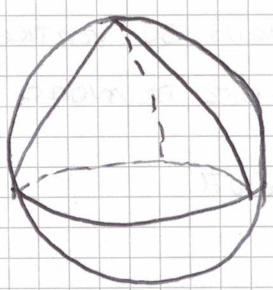


$V = 9$ perché nello schema sono 16 ma 7 sono doppi perché sul toro si identificano con i loro opposti

$E = 27$ nello schema sono 33, ma 6 si identificano con altri sul toro

$F = 18$ $\quad \chi(\mathcal{T}) = 9 - 27 + 18 = 0$

SE TRIANGOLIAMO LA SFERA COME UN TETRAEDRO



$V = 4$

$E = 6$ $\qquad \chi(\mathcal{T}) = 4 - 6 + 4 = 2$

$F = 4$

TEOREMA DI GAUSS-BONET GLOBALE

$R \subset S$ REGIONE CON TRIANGOLAZIONE $\mathcal{T}$

$$\Rightarrow \int_{\partial R} k_g + \int_R K + \sum_{\substack{\text{ANGOLI} \\ \text{ESTERNI}}} \theta_i = 2\pi \, \chi(\mathcal{T})$$

IN PARTICOLARE $\chi(\mathcal{T})$ DIPENDE SOLO DA R e NON DA $\mathcal{T}$ e QUINDI SI CHIAMA $\chi(R)$.

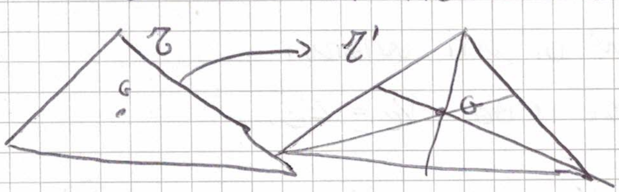
PREMESSE ALLA DIMOSTRAZIONE

① OGNI REGIONE R AMMETTE TRIANGOLAZIONE (NON LO DIMOSTRA, OVVIO A SENSO) CIT "INIZIATE A TIRARE RIGHE A CASO PRIMA O POI LA TROVATE"

② SE $\mathcal{T}$ È UNA TRIANGOLAZIONE, $\exists\ \mathcal{T}'$ DI TRIANGOLI SEMPLICI TALE CHE $\chi(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{T}')$.

DIM ② BASTA ITERARE LA SUDDIVISIONE BARICENTRICA DI $\mathcal{T}$, CHE NON CAMBIA LA χ, E DIMOSTRARE CHE AD UN CERTO PUNTO I TRIANGOLI OTTENUTI AVRANNO DIAMETRO MINORE DEL NUMERO DI LEBESQUE DEL RICOPRIMENTO ORTOGONALE ASSUNTO (CIOÈ SARANNO SUFF PICCOLI DA ENTRARE IN UNA PARAMETRIZZAZIONE LOCALE $\Rightarrow$ SEMPLICI).

ESEMPIO DI ITERAZIONE BARICENTRICA:



$V' = V + E + F$

$E' = 2E + 6F$

$F' = 6F$

$$\underbrace{V' - E' + F'}_{\chi(\mathcal{T}')} = \underbrace{V - E + F}_{\chi(\mathcal{T})}$$

QUINDI LE DUE SUDDIVISIONI NON CAMBIANO χ, POSSIAMO ALLORA DIMOSTRARE GAUSS-BONET SUPPONENDO CHE I T_i SIANO SEMPLICI.

$\forall i$ GAUSS-BONET LOCALE CI DA $\forall T_i$

$$(*)\quad \int_{\partial T_i} k_g + \int_{T_i} k + \sum_{J=1}^{3} \vartheta_i^J = 2\pi$$

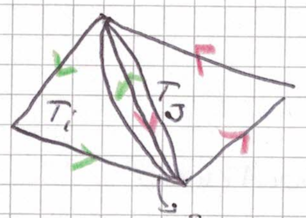
ϑ_i^J = ANGOLO ESTERNO SUL VERTICE J-ESIMO DEL TRIANGOLO i-ESIMO.

PONGO $\varphi_i^J = \pi - \vartheta_i^J$ ANGOLI INTERNI CORRISPONDENTI.

PER CUI $\displaystyle\sum_{J=1}^{3} \varphi_i^J = 3\pi - \sum_{J=1}^{3} \vartheta_i^J$

SOMMANDO (*) SU TUTTI I T_i OSSERVIAMO:

1) IL CONTRIBUTO SU $\partial T_i = \partial T_J$ DI k_g È NULLO, PERCHÉ FISSATA UN'ORIENTAZIONE SU R, IL LATO VIENE PERCORSO DAI DUE TRIANGOLO IN SENSO OPPOSTO, QUINDI GLI INTEGRALI SI ELIDONO



$$\Rightarrow \sum_i \int_{\partial T_i} k_g = \int_{\partial R} k_g$$

PERCHÉ I LATI DI BORDO SONO ATTRAVERSATI DA UN SOLO TRIANGOLO.

2) $\displaystyle\sum_i \int_{T_i} k = \int_R k$ OVVIO PERCHÉ T_i DISGIUNTI.

$\Rightarrow$ SI OTTIENE $\displaystyle\int_{\partial R} k_g + \int_R k + \underbrace{3\pi \cdot F - \sum_{iJ} \varphi_i^J = 2\pi \cdot F}$

F = N° DI FACCE = N° DI TRIANGOLI.

<u>ORA PONIAMO</u>: $V = V_e + V_i$

V_e = N° VERTICI SUL BORDO (ESTERNI)

V_i = N° VERTICI INTERNI.

$E = E_e + E_i$

E_e = N° DI LATI CONTENUTI SU ∂R

E_i = N° DI LATI INTERNI

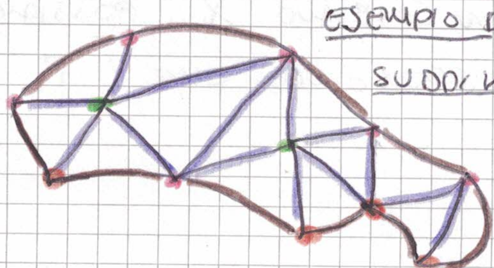
POICHÉ IL ∂R È CHIUSO POSSIAMO OSSERVARE CHE $V_e = E_e$.

I V_e SI POSSONO ANCORA DIVIDERE IN $V_e = V_{e_t} + V_{e_r}$

V_{e_r} = N° VERTICI ∂R

V_{e_t} = N° VERTICI ESTERNI MA PUNTI LISCI SU ∂R.

<u>ESEMPIO DI SUDDIVISIONE.</u>



SIANO $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ GLI ANGOLI ESTERNI DI R
(quindi $k = V_{er}$)

$$\Rightarrow \sum_{i,s} \varphi_i^s = 2\pi \cdot V_i + \underbrace{\pi V_{e_t}}_{} + \sum_{i=1}^{k} (\pi - \vartheta_i) =$$

→ È EFFETTIVAMENTE π PENSANDO AGLI ANGOLI CON I VETTORI TANGENTI

$$= 2\pi V_i + \pi V_{e_t} + \pi \overset{k}{\overset{\shortparallel}{V_{er}}} - \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i =$$

$$= 2\pi V_i + \pi V_e - \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i$$. SOSTITUIAMO NELLA FORMULA PRECEDENTE

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + 3\pi F - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = 2\pi F$$

OSSERVIAMO CHE $3F = 2E_i + E_e$, INFATTI OGNI FACCIA HA 3 LATI MA QUELLI INTERNI LI CONTO 2 VOLTE.

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = 2\pi F$$

ORA SOMMO πE_e E SOTTRAGGO πV_e TANTO SONO UGUALI IN QUANTO $E_e = V_e$ COME GIÀ OSSERVATO.

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - 2\pi V_e + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = 2\pi F$$

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + 2\pi E - 2\pi V + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = 2\pi F$$

$$\int_{\partial R} k_g + \int_R k + \sum_{i=1}^{k} \vartheta_i = 2\pi (F - E + V) = 2\pi \chi(R)$$ C.V.D

COROLLARIO 1: $\chi(\tau) = \chi(R)$ CIOÈ NON DIPENDE DA τ DATO CHE IL MEMBRO DI SINISTRA DIPENDE SOLO DA R, CIOÈ DAL TIPO DI DIFFEOMORFISMO DI R (QUINDI POSSO TRASPORTARE LA TRIANGOLAZIONE TRA COSE DIFFEOMORFE).

COROLLARIO 2: Se S è COMPATTA (SEMPRE ORIENTABILE) $\Rightarrow$

$$\int_S k = 2\pi \chi(S)$$ PERCHÉ S COMPATTA = NON BORDO E NON ANGOLI ESTERNI.

COROLLARIO 3: Se S È DIFFEOMORFA A S^2 $\Rightarrow \int_S k = 2\pi\chi(S) = 2\pi\chi(S^2) = 4\pi$

Se S È DIFFEO AL TORO $\Rightarrow \int_S k = 2\pi \chi(S) = 0$.

LEZIONE 23/11

COROLLARIO: Se T è un triangolo geodetico in S^2 con angoli interni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow \text{Area}(T) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$

DIM Sia $\vartheta_i = \pi - \alpha_i$ angolo esterno corrispondente ad α_i

per Gauss Bonnet.

$$\int_T k + \int_{\partial T} \underbrace{k_g}_{0 \,\to\, T \text{ è geodetico}} + \sum_{i=1}^{3} \vartheta_i = 2\pi \chi(T) = 2\pi(F - E + V) = 2\pi(1 - 3 + 3) = 2\pi$$

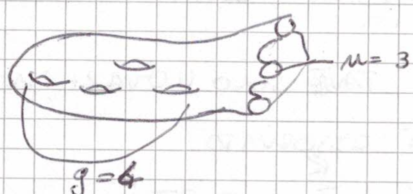
$k \equiv 1$ in S^2

$\text{Area}\, T + 3\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi$ da cui la tesi.

TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DI SUP. ORIENTABILI COMPATTE

Sia S una superficie (eventualmente con bordo) compatta e orientabile

$\Rightarrow S$ è diffeomorfa a $S_{g,m}$ $\quad g \geq 0 \quad m \geq 0$ $\qquad g$ = genere = n° buchi
m = n° di punture.



$S^2 = S_{0,0} \qquad S^1 \times S^1 = S_{1,0}$

Convenzione $S_{g,0} = S_g$

$$\chi(S_{g,m}) = 2 - 2g - m$$

COROLLARIO S compatta orientabile senza bordo con $k(p) \geq 0$ $\forall p \in S \Rightarrow S$ è diffeo a S^2

DIM S compatta $\Rightarrow \exists\, p \in S$ t.c. $k(p) > 0$ per continuità di k,

$k|_U > \varepsilon > 0$ per $U \subset S$ aperto

$$2\pi \chi(S) = \int_S k = \int_U k + \int_{S \setminus U} k^{\geq 0} \geq \int_U k \geq \varepsilon \cdot \text{Area}\, U > 0$$

$\Rightarrow \chi(S) > 0 \Rightarrow \underbrace{\chi(S) = 2}$ per il teorema di classificazione

$\chi(S) = 1$ non può esserci perché $\chi(S) = 1 \Rightarrow$ super. con bordi.

$\Rightarrow S$ è diffeo a S^2.

ESERCIZIO Sia $0<h<1$ e sia $R_h \subseteq S$

$$R_h = \{ (x,y,z) \in S^2 \mid 0 \le z \le h \}$$

1) CALCOLARE LA CURVATURA GEODETICA DELLE COMPONENTI DEL BORDO DI ∂R_h
2) CALCOLARE L'AREA DI R_h USANDO GAUSS BONET

DIM R È UNA REGIONE IN QUANTO COMPATTA (OVVIO) E IL BORDO È UN'UNIONE DI CURVE SENZA CUSPIDI. (SONO CIRCONFERENZE).

SE VOLESSI SOLO IL MODULO DI K_g POTREI USARE

$$K^2 = K_n^2 + K_g^2 \quad \text{e} \quad |K_n| = 1 \quad \text{poiché } dN = \pm Id \text{ e quindi}$$

II FORMA $= \pm$ I FORMA e DUNQUE

$|K_n| = 1$ $\forall$ CURVA IN OGNI PUNTO.

Se γ_0 PARAMETRIZZA L'EQ DEL $z=0 \Rightarrow K_n \equiv 1$ e $K \equiv 1 \Rightarrow K_g = 0$
(RISULTATO GIÀ NOTO DATO CHE È UN CERCHIO DI RAGGIO MAX).

Se γ_h PARAMETRIZZA IL PARALLELO A QUOTA $z=h$ HA RAGGIO $R = \sqrt{1-h^2}$

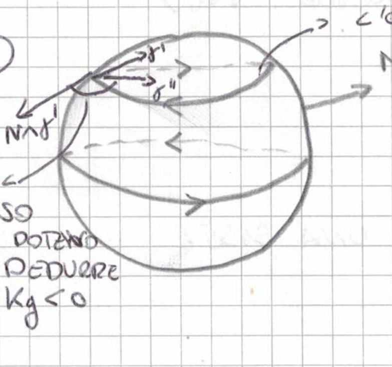
$$\Rightarrow K^2 = \frac{1}{1-h^2} \Rightarrow |K_g| = \sqrt{\frac{1}{1-h^2} - 1} = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

SE VOLESSI A QUESTO PUNTO POTREI FISSARE N E DAL DISEGNO CERCARE DI CAPIRE IL SEGNO DI K_g (DALL'ORIENTAZIONE) (*).

IN ALTERNATIVA FISSO $N(p) = p \quad \forall p \in S^2$

$\{z=0\} \cap R_h$ È UNA GEODETICA $\Rightarrow K_g \equiv 0$ SU DI ESSA.

(*)



L'ORIENTAZIONE DEL BORDO SU R_h DEVE ESSERE COERENTE CON N PER POTER USARE GAUSS-BONNET.

L'ANGOLO È OTTUSO QUINDI POTEVO GIÀ DEDURRE CHE $K_g < 0$

$$\gamma_h = \left(\sqrt{1-h^2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}\right), -\sqrt{1-h^2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}\right), h \right)$$

IN MODO TALE CHE γ_h PLA POSITIVA.

$$\gamma_h : \left[0, 2\pi\sqrt{1-h^2}\right] \longrightarrow S^2$$

$$K_g(t) = \langle \gamma'', N \wedge \gamma' \rangle (t) \qquad N = N \circ \gamma(t) = \gamma(t)$$

$$\gamma' = \left(-\sin\left(\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}\right), -\cos\left(\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}\right), 0 \right) \qquad N \wedge \gamma'(t) = \begin{pmatrix} h \cos\left(\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}\right) \\ -h \sin\left(\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}\right) \\ -\sqrt{1-h^2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma'' = \left(-\frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}\right), +\frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{1-h^2}}\right), 0 \right)$$

$$K_g(t) = \frac{-h}{\sqrt{1-h^2}}$$

② $\chi(R_h) = 0$ IN QUANTO $R_h \simeq S_{0,2}$

$$2\pi\chi(R_h) = 0 = \int_{\gamma_0} \underset{0}{k_g} + \int_{\gamma_h} \overset{\frac{-h}{\sqrt{1-h^2}}}{k_g} + \int_{R_h} \overset{1}{K} + \underset{0}{\Sigma \vartheta_i}$$

$$\Rightarrow \text{Area}(R_h) = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \int_0^{2\pi\sqrt{1-h^2}} 1 \, dt = 2\pi h$$

__ESERCIZIO__ DEF $p \in S$ SI DICE OMBELICALE se $dN_p = \lambda I$ CIOÈ SE LE CURVATURE IN p COINCIDONO.

S sup CONNESSA CON TUTTI I PUNTI OMBELICALI ALLORA S è UNA PORZIONE DI UN PIANO O UNA PORZIONE DI UNA SFERA.

DIM
↓
RIVEDERE.

FISSO $N: S \longrightarrow S^2$ MAPPA DI GAUSS., PER I POTESI ESISTE

$\lambda: S \longmapsto \mathbb{R}$ $\lambda \in C^\infty$ t.c. $dN_p = \lambda(p) Id$ ($\lambda \in C^\infty$ è FACILE)

DIMOSTRIAMO CHE $\lambda(p)$ è COSTANTE

BASTA DIMOSTRARE, PER CONNESSIONE, CHE è LOC. COSTANTE.

Sia U UN APERTO COORDINATO con $x: \Omega \longrightarrow U$ PARAMETRIZZAZIONE LOCALE, PENSO λ COME DEFINITA SU Ω (IN COORD). e ANCHE N DEFINITO SU Ω.

PER CUI DA $dN(x_u) = \lambda x_u$ e $dN(x_v) = \lambda x_v$

RISCRIVO IN COORD. $N_u = \lambda x_u$ e $N_v = \lambda x_v$

DERIVANDO ENTRAMBE LE UGUAGLIANZE PER OTTENERE N_{uv}

OTTENGO $N_{uv} = \lambda_v x_u + \lambda x_{uv} = \lambda_u x_v + \lambda x_{uv}$

$\Rightarrow \lambda_v x_u - \lambda_u x_v = 0$

$\Rightarrow \lambda_u \equiv \lambda_v \equiv 0$ perchè x_u, x_v è UNA BASE.

$\Rightarrow \lambda$ è COSTANTE SU U.

DUNQUE λ è COSTANTE.

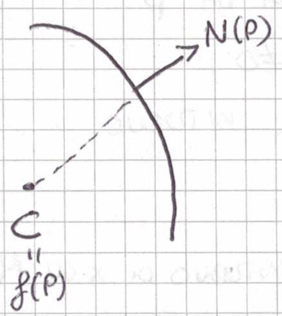
Se $\lambda \equiv 0 \Rightarrow dN_p \equiv 0 \Rightarrow N$ è COSTANTE

Se $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ $f(p) = \langle N, p \rangle$ $\forall v \in T_p(S)$ $df_p(v) = \langle N_p, v \rangle = 0$

DUNQUE f è COSTANTE CIOÈ

$S = f^{-1}(\text{costante}) = \{x : \langle x, N \rangle = a, a \in \mathbb{R}\}$ = PIANO AFFINE con $f(S) = a$

Se $\lambda \neq 0$ DEFINISCO $f: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$



$$f(P) = P - \frac{1}{\lambda} N(P)$$

$$df_p = \cancel{\ } Id - \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda Id = 0$$

DUNQUE f è COSTANTE cioè $\exists C \in \mathbb{R}^3$

t.c. $\forall p \in S$ $\quad p - \frac{1}{\lambda} N(P) = C$ cioè

$$P - C = \frac{1}{\lambda} N(P)$$

$$\underbrace{\|P - C\| = \frac{1}{|\lambda|}}_{} = \text{COSTANTE} = \text{RAGGIO}$$

DEF. DI SFERA DI CENTRO C e RAGGIO $\frac{1}{|\lambda|}$

LEZIONE 28/11

RICORDO CHE: $f: M \longrightarrow N$ TRA VARIETÀ $\Rightarrow$ $x \in M$ è UN PUNTO CRITICO PER f se $df_p(x)$ NON è SURGETTIVO e REGOLARE ALTRIMENTI.

$y \in N$ è UN VALORE CRITICO SE è IMMAGINE DI UN PUNTO CRITICO. E REGOLARE ALTRIMENTI.

OSS $y \in N$ POSSONO ESSERE IMMAGINI DI PUNTI REGOLARI CHE DI PUNTI CRITICI IN QUEL CASO SONO CRITICI.

PROP $f: M \longrightarrow N$ TRA VARIETÀ $\Rightarrow$ L'INSIEME DEI PUNTI CRITICI DI f è UN CHIUSO DI M. SE M è COMPATTA I VALORI CRITICI DI N SONO UN CHIUSO IN N (SI PUÒ RIENUNCIARE DICENDO CHE

I VALORI REGOLARI DI M SONO UN APERTO E PASSANDO A COMPLEMENTARE SI HA L'EQUIVALENZA).

DIM Se $x \in M$ è UN PUNTO REGOLARE, $\exists U \subseteq M$ APERTO CON $x \in U$ FATTO DI PUNTI REGOLARI.

SIANO $\varphi: \Omega_1 \longrightarrow U$ e $\psi: \Omega_2 \longrightarrow V$ CARTE INTORNO A x in M e A $f(x)$ in N IN MODO TALE CHE

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \text{ SIA DEFINITA.}$$

PER IPOTESI se $p = \varphi^{-1}(x) \in \Omega \Rightarrow d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_p = d\psi^{-1}_{f(x)} \circ df_x \circ d\varphi_p$ è

SURGETTIVO. MA $d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi): \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

(Dove $m = \dim M$ e $n = \dim N$) è UNA MATRICE $n \times m$

CHE è SURGETTIVA $\Leftrightarrow$ $rg(d\varphi^{-1} \circ df \circ d\varphi) = n \Leftrightarrow \exists$ UN MINORE $n \times n$ INVERTIBILE

POICHÈ IL DETERMINANTE È UNA FUNZIONE CONTINUA E LA MATRICE $d(\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi)_p$ DIPENDE IN MANIERA CONTINUA DA p NE SEGUE CHE IL MINORE FISSATO, IL CUI DET È $\neq 0$, CONTINUA A ESSERE INVERTIBILE IN UN APERTO $\Omega_1' \subseteq \Omega_1$ INTORNO DI p. $\Rightarrow d(\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi)_q$ È SURGETTIVO $\forall q \in \Omega_1'$

$\Rightarrow df_z$ È SURGETTIVO $\forall z \in Z$ DOVE $Z = \varphi(\Omega_1')$ INTORNO DI x IN M.

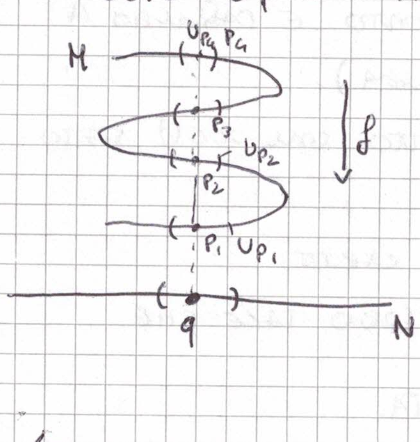
DUNQUE I PUNTI REGOLARI SONO UN APERTO E QUINDI I PUNTI CRITICI SONO UN CHIUSO. C IN M.

SE M È COMPATTA $\Rightarrow C$ È COMPATTO E DUNQUE $f(C)$ È COMPATTO PER WEIERSTRASS, DUNQUE UN CHIUSO PERCHÈ LE VARIETÀ SONO T_2, DA CUI LA SECONDA AFFERMAZIONE.

PROP $f: M \to N$ $\dim M = \dim N$, M COMPATTA E SIA $R \subseteq N$ INSIEME DEI VALORI REGOLARI DI f. ALLORA $f|_{f^{-1}(R)} : f^{-1}(R) \to R$ È UN RIVESTIMENTO A FINITI FOGLI EVENTUALMENTE SCONNESSO.

DIM $\forall p \in f^{-1}(R)$ df_p È SURGETTIVO, DUNQUE UN ISOMORFISMO PER QUESTIONI DI DIMENSIONE. PERCIÒ $f|_{f^{-1}(R)}$ È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE (PER IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE).

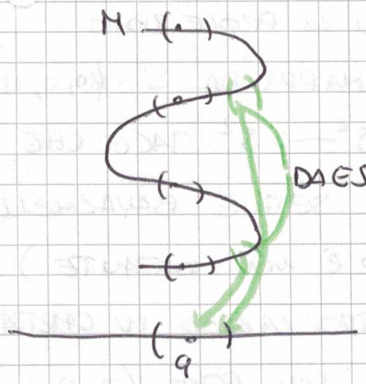
SIA $q \in R$, $\forall p \in f^{-1}(q)$ $\exists U_p$ t.c. $f|_{U_p}: U_p \to f(U_p)$ SIA UN DIFFEO DOVE U_p È UN APERTO CHE CONTIENE p



IN PARTICOLARE p È L'UNICO PUNTO IN U_p PORTATO DA f IN q. PERCIÒ $f^{-1}(q)$ HA TOPOLOGIA DISCRETA. ESSENDO QUINDI CHIUSO È ANCHE COMPATTO, IN QUANTO M È COMPATTA, CON TOPOLOGIA DISCRETA E DUNQUE È FINITO.

(**ESEMPIO** DI TOPOLOGIA DISCRETA NON CHIUSA IN $\mathbb{R}$ È $\{\frac{1}{n}\}$, PER IL SUO COMP. NON RIESCO INFATTI A TROVARE UN INTORNO DI 0 CHE NON CONTENGA ~~GLI~~ ELEMENTI DI $\{\frac{1}{n}\}$.)

ORA MI RESTA DA VEDERE CHE SE PRENDO UN INTORNO DI q, NELLA CONTROIMMAGINE DI QUESTO INTORNO NON CI SIA FINITO QUALCOSA AL DI FUORI DI INTORNI DI $f^{-1}(q)$



DEFINISCO L'INTORNO BEN RIVESTITO DI q COSÌ

$$V = \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{k} f(U_{p_i})\right)}_{\text{APERTO IN QUANTO } \cap \text{ FINITA DI APERTI}} \setminus f\underbrace{\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{p_i}\right)}_{\text{COMPATTO DI } M \text{ PERCHÉ È UN CHIUSO E } M \text{ È COMPATTA}}$$

QUINDI LA SUA IMMAGINE TRAMITE f È UN CHIUSO IN QUANTO IMMAGINE DI UN COMPATTO E N È T_2.

QUELLO CHE SONO SICURO È DI NON AVER TOLTO q. E CHE V È UN APERTO.

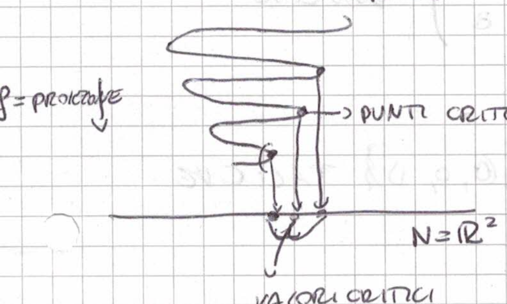
PER COSTRUZIONE SI HA

$$f^{-1}(V) = \bigcap_{i=1}^{k}\left(U_{p_i} \cap f^{-1}(V)\right) \quad \text{e} \quad f|_{f^{-1}(V)\cap U_{p_i}} : f^{-1}(V)\cap U_{p_i} \longrightarrow V \text{ è un}$$

DIFFEO $\forall i = 1, \dots, k$ PERCHÉ RESTRIZIONE DI UN DIFFEO. $\square$

ESEMPIO: VEDIAMO COME COSTRUIRE UN ESEMPIO DI M NON COMPATTA CON INSIEME DEI VALORI CRITICI NON CHIUSO:

$M \subseteq \mathbb{R}^2$



PERCHÉ IL VETTORE TG È VERTICALE E VA IN 0 E QUINDI NON HO LA SURGETTIVITÀ DI df. E QUINDI NON POSSO AVERE UN DIFFEO LOCALE

(C'È SIA IL PEZZO SOPRA CHE SOTTO VANNO NELLO STESSO PUNTO).

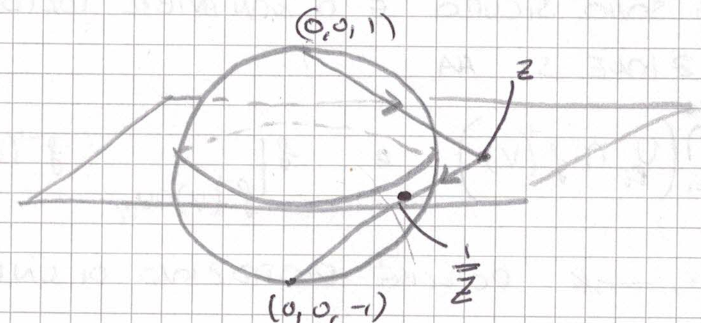
POSSO CREARE UNA CURVA I CUI VALORI CRITICI FORMANO UNA SUCC. CONVERGENTE. SE NON CI METTO IL PUNTO LIMITE LA SUCCESSIONE NON È UN'INSIEME CHIUSO

ED ECCO PERCHÉ QUESTO È UN ESEMPIO DI M NON COMPATTA CON INSIEME DEI VALORI CRITICI NON CHIUSO.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni POLINOMIO NON COSTANTE $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ È SURGETTIVO.

DIM IDENTIFICO $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ CON $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ CON LA PROIEZIONE STEREOGRAFICA, COSÌ IL POLINOMIO p DEFINISCE UNA MAPPA DA $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ IN SÈ, CHE SI PROLUNGA AD UNA FUNZIONE C^∞ $\overline{p}: S^2 \to S^2$ TALE CHE $\overline{p}(0,0,1) = (0,0,1)$. (IL FATTO CHE $\overline{p}$ SIA CONTINUA SEGUE BANALMENTE DAL FATTO CHE $\|p\| \to +\infty$ SE $\|z\| \to \infty$ poiché p è non COSTANTE).
CHE PERÒ IL PROLUNGAMENTO SIA C^∞ DEVO CONTROLLARLO IN CARTA. CONVIENE USARE L'ALTRA PROIEZIONE STEREOGRAFICA CON POLO $(0,0,-1)$ IN QUANTO RISPETTO ALLA COORD. IN $\mathbb{C}$ IL CAMBIO TRA LE 2 COORDINATE È $\frac{1}{\overline{z}}$



(SCRIVERE LA FORMA POLINOMIALE PER VEDERE CHE È C^∞)

Se $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è DERIVABILE IN SENSO COMPLESSO e

$$f'(z) = a + ib \Rightarrow df_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ è } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ DUNQUE}$$

$$z \text{ è CRITICO} \iff a^2 + b^2 = 0 \iff f'(z) = 0$$

DUNQUE I PUNTI CRITICI DI $\overline{p}$ SONO GLI $z \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ TALI CHE

$$\overline{p}'(z) = 0 \quad \text{oppure} \quad (0,0,1).$$

DUNQUE POICHÈ p È NON COSTANTE $\Rightarrow \overline{p}'$ È UN POLINOMIO CON UN NUMERO FINITO DI ZERI, PERCIÒ I PUNTI CRITICI DI $\overline{p}$ SONO FINITI. E LO SONO QUINDI ANCHE I VALORI CRITICI.

DUNQUE $R = S^2 \setminus$ VALORI CRITICI È CONNESSO.

$\overline{p}|_{\overline{p}^{-1}(R)} : \overline{p}^{-1}(R) \to R$ È UN RIVESTIMENTO TRA SPAZI CONNESSI,

e ANCHE $\overline{p}^{-1}$ LO È, DUNQUE È SURGETTIVO.

DUNQUE $R \subseteq \overline{p}(S^2)$ CHE PERÒ È COMPATTO DUNQUE CHIUSO IN S^2, MA LA CHIUSURA DI R IN S^2 È S^2 STESSO, DUNQUE $\overline{p}$ È SURGETTIVO E QUINDI ANCHE p PER DEFINIZIONE DI $\overline{p}$

QUATERNIONI

$\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$

PRODOTTO SCALARE STANDARD.

CON LA SEGUENTE STRUTTURA MOLTIPLICATIVA.

se $(a,v),(b,w) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 = \mathbb{H} \Rightarrow (a,v)\cdot_{\mathbb{H}}(b,w) = (ab - \langle v,w\rangle, v\wedge w + aw + bv)$

DI SOLITO SI SCRIVE $\mathbb{H}$ con $\langle 1, i, j, k\rangle$ con $\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k \\ jk = i \\ k\cdot i = j \end{cases}$

$\mathbb{H}$ è EFFETTIVAMENTE UNA $\mathbb{R}$-ALGEBRA NON COMMUTATIVA.

- C'È UN CONIUGIO $\overline{(a,v)} = (a,-v)$

PROP 1) $\|h^2\| = h\cdot\bar{h} = (a,v)(a,-v) = (a^2 + \|v\|^2, 0) \in \mathbb{R}$

2) $\overline{h_1\cdot h_2} = \overline{h_2}\cdot\overline{h_1} = (a,-v)(b,-w) = (ab + \langle -v,-w\rangle, \underbrace{(-v)\wedge(-w)}_{-(v\wedge w)}, -aw - bv$

$\overline{h_1\cdot h_2} = (ab - \langle v,w\rangle, -(v\wedge w) - aw - bv)$

3) $\|h_1\cdot h_2\| = \|h_1\|\cdot\|h_2\|$ SEGUE DA 1) e 2).

4) se $h\neq 0$ $\quad h^{-1} = \dfrac{\bar{h}}{\|h\|^2}$

5) $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ INFATTI

se $(a,v)(b,w) = (b,w)(a,v) \quad \forall (b,w)\in\mathbb{H}$

$(ab - \langle v,w\rangle, v\wedge w + aw + bv) = (ba - \langle w,v\rangle, w\wedge v + bv + aw)$

$\Updownarrow$

$v\wedge w = w\wedge v \quad \forall w\in\mathbb{R}^3$

$\Updownarrow$

$v = 0$

$\Updownarrow$

$(a,v)\in\mathbb{R}$

OSS DUNQUE $(\mathbb{H}\setminus\{0\}, \cdot)$ È UN GRUPPO DI LIE NON ABELIANO DIFFEOMORFO A $\mathbb{R}^4$.

LEZIONE 29/11

OSSERVAZIONE S^3 è UN SOTTOGRUPPO DI $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ IN QUANTO

$$h_1, h_2 \in S^3 \longrightarrow \|h_1 \cdot h_2\| = \|h_1\| \cdot \|h_2\| = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\|h^{-1}\| = \frac{\|\bar{h}\|}{\|h\|^2} = \frac{1}{\|h\|} = 1$$

COROLLARIO S^3 AMMETTE UNA STRUTTURA DI GRUPPO DI LIE, IN PARTICOLARE S^3 è PARALLELIZZABILE e PETTINABILE.

(AVEVAMO GIÀ VISTO CHE I GRUPPI DI LIE SONO PETTINABILI).

DIM PER VEDERE CHE UN GRUPPO DI LIE è PARALLELIZZABILE BASTA PRENDERE UNA BASE $v_1, \dots, v_m$ IN $T_e(G)$ E PORRE $V_i(g) = (dL_g)(v_i)$ $\square$

OBBIETTIVO: VOGLIAMO USARE $\mathbb{H}$ PER CARATTERIZZARE $SO(3)$

COSTRUIAMO UNA MAPPA $S^3 \longrightarrow SO(3)$

DATO $p \in S^3$ POSSO CONSIDERARE LA MAPPA $\psi(p) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

DATA DA $\psi_{(p)}(h) = p \cdot h \cdot \bar{p} = p \cdot h \cdot p^{-1}$ POICHÉ $p \in S^3$ $\bar{p} = p^{-1}$

POICHÉ $\mathbb{H}$ è UNA $\mathbb{R}$-ALGEBRA (IL CHE EQUIVALE A DIRE $\mathbb{R} \subseteq Z(\mathbb{H})$)

$\psi_{(p)}$ è $\mathbb{R}$-LINEARE CONSIDERATA COME ENDOMORFISMO DI $\mathbb{R}^4$

OSS PER DIRE CHE $p \cdot (\lambda h) \cdot p^{-1} = \lambda (p \cdot h p^{-1})$ MI SERVE $\lambda \in Z(\mathbb{H})$.

INOLTRE $\psi(p)$ è UN'ISOMETRIA

$$\|\psi(p)(h)\| = \|p \cdot h \cdot \bar{p}\| = \underbrace{\|p\|}_{=1} \cdot \|h\| \cdot \underbrace{\|\bar{p}\|}_{=1} = \|h\|$$

DUNQUE $\psi(P) \in O(4)$ E QUINDI SI HA

$$\begin{aligned} \psi : S^3 &\longrightarrow O(4) \\ p &\longrightarrow \psi(P) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ &\qquad\qquad h \longrightarrow p h \bar{p} \end{aligned}$$

INOLTRE POICHÉ S^3 È CONNESSA, $\psi(S^3)$ è CONNESSO E QUINDI DOVENDO CADERE NELLA COMPONENTE CONNESSA DI $O(4)$ CHE CONTIENE L'ID. $\Rightarrow$ $\psi : S^3 \longrightarrow SO(4)$

FATTO ψ è UN OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE

DIM PER CONTROLLARE CHE SIA C^∞ BASTA SCRIVERE LA MATRICE ASSOCIATA E VEDERE CHE VENGONO POLINOMI DI SECONDO GRADO NEI COEFFICIENTI, QUINDI è C^∞.

INOLTRE: $\psi(p\cdot q)(h) = p\cdot q\cdot h\,\overline{pq} = p(q\cdot h\,\bar q)\,\bar p = p\cdot\psi(q)(h)\,\bar p =$

$= \psi(p)\circ\psi(q)(h)$ E QUINDI È UN OMOMORFISMO.

OSS $\forall\, h\in\mathbb{R}\subset\mathbb{H}$ $(h=(a,0))$ POICHÈ $h\in Z(\mathbb{H}) \Rightarrow \psi(p)(h) = p\cdot h\cdot p^{-1} = h$

QUINDI $\psi(p)$ NON AGISCE SULLA PRIMA COMPONENTE, CIOÈ $\psi(p)(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

DUNQUE POICHÈ $\psi(p)\in SO(4)$ e FISSA LA PRIMA COMPONENTE, CIOÈ FISSA $\mathbb{R}$, FISSA ANCHE LA COMPONENTE ORTOGONALE $\mathbb{R}^\perp$

DOVE $\mathbb{R}^\perp = \{(0,x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{H}\}$ e $\psi(p)(\mathbb{R}^\perp) = \mathbb{R}^\perp$.

IDENTIFICANDO $\mathbb{R}^\perp$ con $\mathbb{R}^3$ e CHIAMANDO $\varphi(p) = \psi(p)|_{\mathbb{R}^\perp}$

HO OTTENUTO $\varphi(p): S^3 \longrightarrow O(3)$ ED È ANCORA OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE.

RICORDIAMO INOLTRE CHE $\dim S^3 = 3 = \frac{3\cdot(3-1)}{2} = \dim O(3)$

ADESSO CALCOLO $d\varphi_e : T_e S^3 \longrightarrow T_{Id}\, O(3)$

OSS $e\in S^3$ $e=(1,0,0,0)$ ELEMENTO NEUTRO MOLTIPLICATIVO IN $\mathbb{H}$ e DUNQUE

$$T_e S^3 = (1,0,0,0)^\perp = \{(0,v),\ v\in\mathbb{R}^3\}$$

Sia $\tilde\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow End(\mathbb{H})$

$p \longrightarrow \tilde\varphi(p) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

$h \longrightarrow ph\bar p$

L'ESTENSIONE C^∞ DI φ A $\mathbb{H}$

con $End(\mathbb{H}) \supseteq O(4)$ "$\supseteq$" $O(3)$

NEL SENSO VISTO PRIMA, CIOÈ QUELLE ISOMETRIE DI $O(4)$ CHE FISSANO $\mathbb{R}$ e MUOVONO $\mathbb{R}^\perp$ IN $\mathbb{H}$.

ALLORA $(0,v)\in Ker\,\varphi_e \Leftrightarrow (0,v)\in Ker\,\tilde\varphi_e$

VADO A CALCOLARE IL NUCLEO DI φ SOLO IN e PERCHÈ ESSENDO OMO TRA GRUPPI DI LIE HA RANGO COSTANTE.

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\varphi}(e + t(0,v)) \iff \forall h \in \mathbb{H} \quad 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\varphi}(e+t(0,v))(h)$$

$$\tilde{\varphi}(e + t(0,v))(h) = \tilde{\varphi}((1,tv))(h) = (1,tv)\, h\, \overline{(1,tv)} =$$
$$= (1,tv)\, h\, (1,-tv)$$

OSS DOVENDO DERIVARE IN t POSSO DIRE CHE VALE LA LEGGE SUL PRODOTTO PER LA LINEARITÀ ~~DEL~~ DEL PRODOTTO IN $\mathbb{H}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\varphi}((1,tv))(h) = (0,v)\cdot h \cdot (1,0) + (1,0)\cdot h\,(0,-v) =$$
$$= (0,v)h - h(0,v) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{H}$$
$$\Updownarrow$$
$$(0,v) \in Z(\mathbb{H}) \iff v = 0$$

QUINDI $\ker d\varphi_e = \{e\}$ QUINDI È INIETTIVO, E PER MOTIVI DIMENSIONALI $d\varphi_{id}$ È UN ISOMORFISMO. POICHÉ $rg\, d\varphi_p$ NON DIPENDE DA $p \in S^3$, $d\varphi_p$ È UN ISOMORFISMO $\forall p \in S^3$, DUNQUE TUTTI I PUNTI SONO REGOLARI E TUTTI I VALORI SONO REGOLARI. PER CONNESSIONE DI S^3 $\varphi(S^3) \subseteq SO(3)$ CIOÈ LA COMPONENTE CONNESSA DI $O(3)$ CHE CONTIENE Id, e $\varphi(S^3)$ È CONNESSO. QUINDI PER IL TEOREMA DI IERI $\varphi : S^3 \to SO(3)$ È UN RIVESTIMENTO A FINITI FOGLI, PERCHÉ S^3 È COMPATTA, QUINDI IN PARTICOLARE È SURGETTIVO.

VEDIAMO QUANTI SONO I FOGLI, PER FARLO BASTA VEDERLO NELLA PREIMMAGINE DELL'IDENTITÀ, CIOÈ IN $\ker \varphi$.

$$p \in \ker\varphi \iff \forall h \in \mathbb{H} \quad \varphi(p)(h) = h \iff p h p^{-1} = h \iff$$
$$ph = hp \iff p \in Z(\mathbb{H}) \cap S^3 = \{\pm e\}$$

DUNQUE $\varphi(p) = \varphi(q) \iff p = \pm q$ SI HANNO QUINDI 2 FOGLI.

INOLTRE PER FATTI NOTI DELLA TOPOLOGIA, S^3 COMPATTO e $SO(3)$ È T_2 ALLORA

$$SO(3) \cong S^3/_{\pm Id} \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \quad \text{COME GIÀ VISTO.}$$

PROP (NON DIM) USANDO LA MAPPA $S^3 \times S^3 \longrightarrow End(\mathbb{H})$

$(p,q) \longrightarrow \varphi(p,q) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

$h \rightarrow p h \bar{q}$

(CHE È ANCORA IN $SO(4)$)

SI DIMOSTRA CHE $SO(4) \cong \dfrac{S^3 \times S^3}{\pm Id}$

IN PARTICOLARE $\pi_1(SO(3)) = \pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

IN REALTÀ PIÙ IN GENERALE $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (NO DIM.).

ESERCIZIO Sia $\gamma : I \longrightarrow S^2$ UNA CURVA PCA

γ è PIANA $\Longleftrightarrow$ $k \equiv$ COSTANTE.

$\Rightarrow$) Se γ è PIANA ALLORA È CONTENUTA NELL'INTERSEZIONE DI UN PIANO AFFINE CON $S^2 \Rightarrow \gamma$ è A SUPPORTO IN UNA CIRCONFERENZA $\Rightarrow k \equiv$ COSTANTE.

$\Leftarrow$) POICHÈ γ è A SUPPORTO IN S^2 $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = 1$

DERIVANDO $\langle \gamma'(s), \gamma(s) \rangle = \langle t(s), \gamma(s) \rangle = 0$

PCA DUNQUE $\gamma(s) \in Span(n(s), b(s))$.

$\forall s \in I$

(ADESSO CAMBIAMO LA DIM. RISPETTO A QUELLA SU INTERNET).

ESISTONO $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ tc $\gamma(s) = \alpha(s) n(s) + \beta(s) b(s)$

DERIVO

$$t(s) = \alpha'(s) n(s) + \alpha(s)\left(-k(s)\, t(s) - \tau(s) b(s)\right) + \beta'(s) b(s) + \beta(s)\tau(s) n(s).$$

$$\Rightarrow 0 = t(s)\left(-1 - \alpha(s) k(s)\right) + n(s)\left(\alpha'(s) + \beta(s)\tau(s)\right) + b(s)\left(-\alpha(s)\tau(s) + \beta'(s)\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \alpha(s) k(s) = 0 \\ \alpha'(s) + \beta(s)\tau(s) = 0 & (2) \\ -\alpha(s)\tau(s) + \beta'(s) = 0 & (3) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $k(s)$ PER IPOTESI È COSTANTE IN PIÙ $k(s) \neq 0$ PERCHÈ LA CURVA ESSENDO A SUPPORTO IN S^2 $k_n \equiv 1$ DUNQUE k NON PUÒ ESSERE 0.

NE SEGUE CHE ANCHE $\alpha(s)$ È COSTANTE $\neq 0$ e $\alpha'(s) = 0$

TENTAZIONE: DA (2) $\beta(s) \cdot \tau(s) = 0 \Rightarrow \beta(s) \equiv 0 \vee \tau(s) \equiv 0$ OK PERCHÈ γ TORSIONE NULLA $\Rightarrow \gamma$ è PIANA.

$\beta(s) \equiv 0 \Rightarrow$ (3) $\alpha(s) \cdot \tau(s) \equiv 0 \Rightarrow \tau(s) \equiv 0$ PERCHÈ $\alpha(s)$ COSTANTE $\neq 0$

QUESTO RAGIONAMENTO NEI COMPITI DEVE ESSERE SVOLTO IN MODO PIÙ RAFFINATO.

$B(S)\cdot \tau(S) \equiv 0$ Sia $S \in I$. Se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c.

su $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ $\beta(S) \equiv 0$ ALLORA

$\beta'(S) \equiv 0$ in $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$

$\Downarrow$

$-\alpha(S)\tau(S) + \beta'(S) \equiv -\alpha(S)\,\tau(S) \equiv 0 \Rightarrow \tau(S) \equiv 0$ su $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$

PERCHÉ α È COSTANTE $\neq 0$

ALTRIMENTI SE NON ESISTE APERTO DI S IN CUI $\beta \equiv 0$

$\Rightarrow \exists\, S_n \longrightarrow S$ $\beta(S_n) \neq 0$ $\forall n$ PER COSTRUIRLA BASTA PRENDERE $S_n \in \left(S-\frac{1}{n}, S+\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow 0 = \tau(S_n)$ $\forall n \Rightarrow \tau(S) = 0$ PER CONTINUITÀ DI τ

DUNQUE $\tau \equiv 0 \Rightarrow \gamma$ è PIANA.

<u>ESERCIZIO</u> SI CALCOLI L'AREA DEL TORO T OTTENUTA FACENDO RUOTARE LA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R CENTRATA IN $(a,0,0)$ CON $a > R$.

UNA PARAMETRIZZAZIONE DI T è

$$X(u,v) = \big((a+R\cos u)\cos v,\ (a+R\cos u)\sin v,\ R\sin u \big)$$

con $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$

$X : [0,2\pi]^2 \longrightarrow T$ è QUASI BIGETTIVA (A MENO DI UN'INSIEME A MISURA NULLA)

$$X_u = \begin{pmatrix} -R\sin u \cos v \\ -R\sin u \sin v \\ R\cos u \end{pmatrix} \qquad X_v = \begin{pmatrix} -(a+R\cos u)\sin v \\ (a+R\cos u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

RICORDIAMO $\sqrt{EG-F^2} = \|X_u \wedge X_v\|$ CALCOLIAMO $X_u \wedge X_v$

$$X_u \wedge X_v = \begin{pmatrix} -R(a+R\cos u)\cos u \cos v \\ -R(a+R\cos u)\cos u \sin v \\ -R(a+R\cos u)\sin u \end{pmatrix}$$

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = R^2 (a+R\cos u)^2 \Rightarrow \sqrt{EG-F^2} = R(a+R\cos u)$$

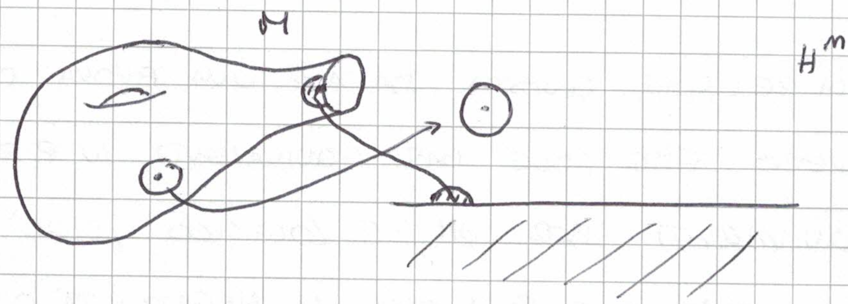
$$\text{Area}(T) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG-F^2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R(a+R\cos u)\,du\,dv =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} Ra + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{R^2\cos u}}\ du = (2\pi a)\cdot(2\pi R)$$

LEZIONE 30/11

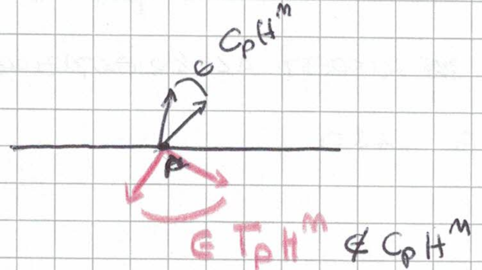
DEF: SIA $H^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$ UNA

<u>m-VARIETÀ CON BORDO</u> M È UN SOTTOINSIEME $M \subseteq \mathbb{R}^N$ TALE CHE OGNI $x \in M$ HA UN INTORNO APERTO $U_x \subseteq M$ DIFFEOMORFO AD UN APERTO DI H^m



CARTE, PARAMETRIZZAZIONI LOCALI, ATLANTI SI DEFINISCONO COME NEL CASO SENZA BORDO.

DEF $\partial M = \{p \in M, \text{ tc } T_pM \neq C_pM\}$, POICHÈ QUESTA DEFINIZIONE È INVARIANTE PER DIFFEO E SE $p \in H^m$ $T_pH^m = C_pH^m$ $\iff x_m(p) > 0$



FATTI:

1) $\partial H^m = \{x \in H^m \mid x_m = 0\}$ CIOÈ COINCIDE EFFETTIVAMENTE CON IL BORDO TOPOLOGICO.

OSS H^m È UNA VARIETÀ CON BORDO CON ATLANTE BANALE.

2) Se $\varphi: \Omega \to U \subseteq M$, $\Omega \subseteq H^m$ APERTO È UNA PARA LOC. (IN PARTICOLARE UN DIFFEO SULL'IMMAGINE)

$\Rightarrow \partial M = \varphi(\Omega \cap \partial H^n)$

COROLLARIO Se M è UNA m-VARIETÀ CON BORDO $\Rightarrow \partial M$ È UNA $m-1$ VARIETÀ SENZA BORDO.

DIM Se IDENTIFICHIAMO ∂H^m CON $\mathbb{R}^{m-1}$ e $\Omega \subseteq H^m$ È APERTO $\Rightarrow \Omega \cap \partial H^m$ È UN APERTO DI $\mathbb{R}^{m-1}$, LA RESTRIZIONE AL BORDO ∂H^m DI UN ATLANTE PER M, DANNO UN ATLANTE PER ∂M.

LEMMA / DEFINIZIONE: Se M è orientata, ∂M ammette un'orientazione indotta così definita: ("il primo punta fuori")

Cioè $p \in \partial M$ e $v_1 \in T_pM \setminus C_pM$ dico che $v_2, \dots, v_m$ è una base positiva per $T_p\partial M$ se $v_1, \dots, v_m$ è una base positiva per T_pM

DIM Dovrei verificare che questa data è una buona definizione sia puntuale, ovvero che due basi equivalenti in p per M vadano in basi equivalenti per ∂M, e locale, cioè esiste un frame locale che conserva la negatività o la positività ~~dell~~ in un un intorno di p.

Lo si può però dedurre anche dalle seguenti osservazioni.

OSS ① Sia $e_1, \dots, e_{m-1}$ la base positiva di $\mathbb{R}^{m-1} = \partial H^m = T_p(\partial H^m)$ $\forall p \in \partial H^m$, $e_1 \dots e_{m-1}$ è positiva $\forall p$ ~~se~~ rispetto all'orientazione di ∂H^m $\Leftrightarrow$ scelto un v uscente a caso

$$v = \sum_{i=1}^{m-1} a_i e_i + \lambda e_m \quad \text{con } \lambda < 0$$

la base $v, e_1, \dots, e_{m-1}$ deve essere positiva.

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{\det\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \\ a_{m-1} & & \ddots & \\ \lambda & & & 1 \end{pmatrix} > 0} \qquad \det\left(\begin{array}{c|c} a_1 & \\ \vdots & Id_{m-1} \\ a_{m-1} & \\ \hline \lambda & 0 \end{array}\right)$$

$\det = (-1)^{m-1} \cdot \lambda = (-1)^m (-\lambda)$ e quindi ha lo stesso segno di $(-1)^m$, dunque l'orientazione di ∂H^m coincide con quella canonica di $\mathbb{R}^{m-1} \Leftrightarrow m$ è pari.

In particolare un atlante orientato per M induce un atlante orientato per ∂M, che induce la giusta orientazione se m è pari, la inversa altrimenti.

OSS ② Una volta mostrata la buona definizione puntuale l'oss① mostra la locale coerenza dell'orientazione sul bordo di M.

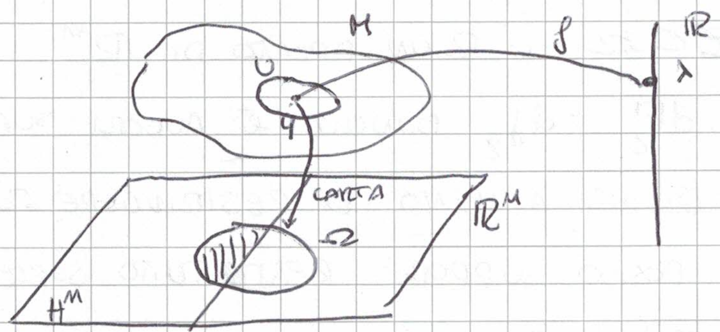
PROP Sia M una varietà senza bordo, $f: M \to \mathbb{R}$ C^∞, $\lambda \in \mathbb{R}$ valore regolare $\Rightarrow f^{-1}((-\infty, \lambda])$ o $f^{-1}([\lambda, +\infty))$ sono varietà con bordo della stessa dimensione di M, e il bordo è $f^{-1}(\lambda)$.

DIM Sia $N = f^{-1}((-\infty, \lambda])$, sia $q \in N$ se $f(q) < \lambda$

$\Rightarrow q \in f^{-1}((-\infty, \lambda))$ che è un aperto di M, perché controimmagine tramite f di un aperto, e dunque ha un intorno aperto di $\mathbb{R}^m$ ($m = \dim M$)

Se $f(q) = \lambda$, a meno di passare in carta, q ha un intorno $U \subset M$ diffeo ad un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, tale che f letta in carta sia la proiezione su una coordinata (per teo di forma normale per le mappe a diff. suriettivo) posso ad esempio scegliere l'ultima.

Dunque $U \cap N$ è diffeomorfo a $\Omega \cap \{x_m \leq \lambda\}$ che a sua volta è diffeomorfo ad un aperto di H^m.



TEOREMA Sia M una m-varietà con bordo, N una n-varietà ~~con~~ senza bordo e sia $f : M \to N$ C^∞ e sia $q \in N$ un valore regolare sia per f sia $\boxed{\text{per } f|_{\partial M}}$ (ipotesi molto importante). Allora $f^{-1}(q)$ è una $(m-n)$-varietà con bordo il cui bordo è $f^{-1}(q) \cap \partial M$.

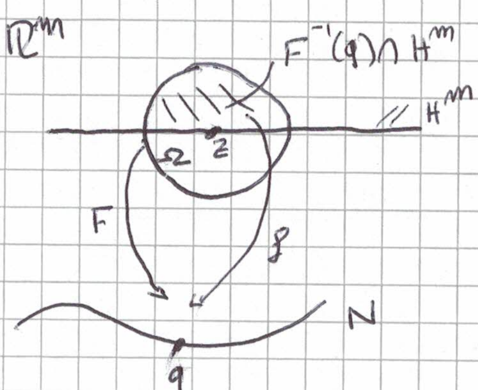
DIM Sia $Z = f^{-1}(q)$ e $g = f|_{\partial M} : \partial M \to N$.

Sia $z \in Z$, se $z \notin \partial M \Rightarrow z \in M - \partial M$ che è una m-varietà senza bordo, quindi, poiché gli aperti di H^m sono ovviamente aperti anche di $\mathbb{R}^m$, posso applicare il teorema al caso senza bordo per trovare un aperto $U_z \subset M \setminus \partial M$, dunque anche in M, diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$.

Se $z \in \partial M$ posso supporre $M = H^m$ e $z \in \partial H^m$ (tanto essendo una dim locale posso passare in carta).

Per definizione di mappa C^∞ f si estende a F

$F : \Omega \to N$ dove $Z \subset \Omega$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^m$



e $dF_z = df_z$ dunque è ancora suriettivo quindi a meno di restringere Ω posso supporre resti tutto suriettivo.

$\Rightarrow F^{-1}(q)$ è una $(m-n)$-varietà dentro Ω.

Un intorno di z in $f^{-1}(q)$ è dato da $F^{-1}(q) \cap \underset{\{x_m \geq 0\}}{\overset{\shortparallel}{H^m}} =$

$= \underbrace{F^{-1}(q)}_{\text{varietà}} \cap \underbrace{x_m^{-1}}_{\text{è } C^\infty}([0,+\infty))$ dove $x_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è la proiezione sull'ultima coordinata.

$F^{-1}(q) \cap H^m$ È UNA $(m-n)$ VARIETÀ CON BORDO

SE 0 È UN VALORE REGOLARE PER x_m (PER TEO PRECEDENTE)

CON BORDO $F^{-1}(q) \cap \{x_m = 0\}$

QUINDI PRENDIAMO $x_m : F^{-1}(q) \longrightarrow \mathbb{R}$ E VEDIAMO SE

0 È REGOLARE.

STUDIO $(dx_m^+)_z : T_z F^{-1}(q) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\mathrm{Ker}\,(dx_m^+)_z = \underbrace{\mathrm{Ker}\,(x_m)}_{\text{VISTA } x_m : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}} \cap T_z F^{-1}(q) =$$

(DIFF DI APP. LINEARE È L'APP. LINEARE)

OSS: $\{x_m = 0\} = \partial H^m = T_z(\partial M)$

$$= T_z F^{-1}(q) \cap \{x_m = 0\} =$$

$$= T_z F^{-1}(q) \cap T_z \partial M =$$

$$= \mathrm{Ker}\left(dF\big|_{\partial M}\right)_z = \mathrm{Ker}\,(dg)_z$$ PERCHÉ f E F COINCIDONO SU ∂M PER DEFINIZIONE

CHE POICHÉ q È REGOLARE PER g,

(ECCO DOVE SI USA L'IPOTESI DI REGOLARITÀ SUL BORDO).

ALLORA $\dim \mathrm{Ker}\,(dg)_z = \dim \partial M - \dim N = (m-1) - n$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}(dg\, x_m) = \overset{\dim F^{-1}(q)}{(m-n)} - \underbrace{(m-n-1)}_{\dim \mathrm{Ker}} = 1$$ E CHE MOSTRA

$dx_m : T_z F^{-1}(q) \longrightarrow \mathbb{R}$ È SURGETTIVO E QUINDI

0 È UN VALORE REGOLARE.

<u>DEF</u> SIA M UNA m-VARIETÀ, UN SOTTOINSIEME $Z \subset M$ È A MISURA NULLA, SE $\forall$ CARTA $\varphi : U \subseteq M \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ $\varphi(U \cap Z)$ È A MISURA DI LEBESGUE NULLA.

<u>OSS ①</u> Z DI MISURA NULLA $\Rightarrow$ $M \setminus Z$ È DENSO

<u>OSS ②</u> LA DEFINIZIONE SOPRA DATA NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLE CARTE PERCHÉ MAPPE C^∞ TRA APERTI DI $\mathbb{R}^m$ MANDANO OGGETTI DI MISURA NULLA IN OGGETTI DI MISURA NULLA, E QUINDI, ESSENDO UN CAMBIO DI CARTA UNA MAPPA C^∞ TRA APERTI DI $\mathbb{R}^m$ SI HA CHE LA DEF NON DIPENDE DALLA SCELTA DI UN ATLANTE.

TEOREMA DI SARD (NO DIM) : $f: M \to N$ TRA VARIETÀ
ALLORA L'INSIEME DEI VALORI CRITICI DI f HA MISURA NULLA IN N.

ESEMPIO : $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \|x\|^2$

1 È REGOLARE PER f
$\Rightarrow D^n = f^{-1}((-\infty, 1])$ È UNA n-VARIETÀ CON BORDO S^{n-1}

LEZIONE 5/12

TEOREMA (NO DIM) CLASSIFICAZIONE 1-VARIETÀ.
SIA M UNA 1-VARIETÀ CONNESSA, ALLORA M È DIFFEOMORFA A UNA DELLE SEGUENTI:

1) $\mathbb{R} \cong (0,1)$
2) $[0,+\infty) \cong [0,1)$
3) $[0,1]$
4) S^1

PER LA DIM. CERCARE SU GOOGLE.

COROLLARIO: SE N È 1-VARIETÀ COMPATTA ALLORA N È UNIONE FINITA DI COPIE DI S^1 E DI $[0,1]$

DIM ~~OSS~~ LA FINITEZZA SI HA PER COMPATTEZZA, IL FATTO DI S^1 E $[0,1]$ SI HA PER CHIUSURA.

TEOREMA DI NON RETRAZIONE
SIA M UNA VARIETÀ COMPATTA CON BORDO, ALLORA NON ESISTE UNA MAPPA $r: M \to \partial M$ C^∞ tc $r(x) = x$ $\forall x \in \partial M$ (retrazione)

DIM SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $r: M \to \partial M$ ESISTA E SIA $y \in \partial M$ UN VALORE REGOLARE (ESISTE PER SARD), y È ANCHE UN VALORE REGOLARE PER $r|_{\partial M} = id|_{\partial M}$ E QUINDI È DIFFEO SUL BORDO.

NE SEGUE CHE $N = r^{-1}(y)$ È UNA VARIETÀ IN M IN QUANTO $1 = \dim M - \dim \partial M$. (PER TEO LEZIONE PRECEDENTE).

INOLTRE $\partial N = r^{-1}(y) \cap \partial M = \{ p \in \partial M \, , \, r(p) = y \} = \{ y \}$

POICHÉ M È COMPATTA $\Rightarrow N$ È COMPATTA E IL PERCHÉ $r|_{\partial M} = id|_{\partial M}$

PERCHÉ N È UN CHIUSO (CONTROIMMAGINE DI UN PUNTO) IN UN COMPATTO. ALLORA PER IL COROLLARIO N È ANCHE UNIONE FINITA DI S^1 E DI $[0,1]$. $\Rightarrow \# \partial M$ È PARI, IL CHE È ASSURDO.

OSS H^n SI RETRAE A ∂H^n, QUINDI L'IPOTESI DI COMPATTEZZA È FONDAMENTALE NEL TEOREMA.

TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROWER

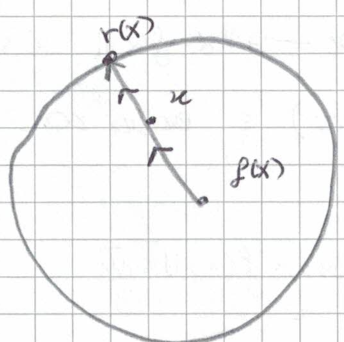
SIA $f : D^n \longrightarrow D^n$ CONTINUA $\Rightarrow \exists x \in D^n$ TC $f(x) = x$

RICORDA: $D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$

DIM PRIMA DIMOSTRIAMO CHE È VERA PER C^∞ E POI RICAVIAMO CHE SIA VERA PER C^0.

SUPPONIAMO $f \in C^\infty$ E CHE PER ASSURDO $f(x) \neq x \;\; \forall x \in D^n$.

SE COSÌ FOSSE DIMOSTRO CHE RIUSCIREI A COSTRUIRE UNA RETRAZIONE C^∞ DA D^n SU $\partial D^n = S^{n-1}$



COME FUNZIONE RETRAZIONE PRENDO L'INTERSEZIONE DALLA PARTE DI x, DELLA SEMIRETTA USCENTE DA $f(x)$ VERSO X.

$$r(x) = f(x) + (x - f(x))\, t(x) \cap S^{n-1}$$

CON $t(x) \geq 1$ ($t(x) \geq 0$ NON DOVREBBE ANDARE PERCHÉ SE $f(x) \in S^{n-1}$ $t = 0$ NON È IL PUNTO CHE VOGLIO)

$r(x) \in C^\infty$: $x \in \mathbb{R}^n$ $t(x) \geq 1$ e $f(x) + t(x)(x - f(x)) \in S^{n-1}$

$$1 = \| f(x) + t(x)(x - f(x)) \|^2$$

$$1 = \|f(x)\|^2 + 2t(x) \cdot \langle f(x), x - f(x) \rangle + t^2(x) \|x - f(x)\|^2$$

HO UNA SOLUZIONE $t(x)$ POSITIVA CHE DIPENDE IN MODO C^∞ DA X e $f(x)$, DUNQUE DA X.

DUNQUE $R(x) \in C^\infty$ E CIÒ CONTRADDICE IL TEOREMA DI NON RETRAZIONE, CIÒ MOSTRA CHE $f(x)$ HA ALMENO UN PUNTO FISSO.

SUPPONIAMO f SOLO C^0, DICO CHE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists g : D^n \to D^n$ C^∞ CON $\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D^n$. APPLICANDO STONE-WEIERSTRASS ALLE COMPONENTI DI f, TROVO $g' : D^n \to \mathbb{R}^n$ t.c. $\|g' - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in D^n$

PONGO $g(x) = \dfrac{g'(x)}{1+\frac{\varepsilon}{3}}$ PER FAR ~~xxx~~ IN MODO TALE CHE ~~xxx~~ L'IMMAGINE DI g SIA CONTENUTA IN D^n.

$$\|g(x)\| = \frac{\|g'(x)\|}{1+\frac{\varepsilon}{3}} = \frac{\|g'(x) - f(x) + f(x)\|}{1+\frac{\varepsilon}{3}} \leq \frac{\|g'(x) - f(x)\| + \|f(x)\|}{1+\frac{\varepsilon}{3}} \leq$$

$$\leq \frac{\frac{\varepsilon}{3} + 1}{1+\frac{\varepsilon}{3}} = 1.$$

INOLTRE $\|g(x) - f(x)\| \leq \|g(x) - g'(x)\| + \|g'(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{2}{3}\varepsilon$.

SUPPONIAMO CHE $f(x) \neq x \quad \forall x \in D^n$, LA MAPPA
$$D^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x - f(x)\|$$
È CONTINUA.

E PER WEIERSTRASS AMMETTE MINIMO (D^n È COMPATTO) E ~~xxxx~~ LO CHIAMO $\bar{m} > 0$ PERCHÉ $f(x) \neq x$.

PRENDO $g \in C^\infty$ COME SOPRA, TALE CHE $\|g(x) - f(x)\| \leq \frac{\bar{m}}{3}$

$$g : D^n \to D^n$$

$$\Rightarrow \|g(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - \|g(x) - f(x)\| \geq \bar{m} - \frac{\bar{m}}{3} = \frac{2}{3}\bar{m} > 0$$

E DUNQUE PER ASSURDO $g(x) : D^n \to D^n$ C^∞ NON AMMETTE PUNTO FISSO.

DEF M, N VARIETÀ, $f, g : M \to N$ C^∞ ALLORA

UN'OMOTOPIA TRA f e g È UNA MAPPA C^∞

$$H : M \times [0,1] \longrightarrow N \quad \text{t.c.} \quad \begin{aligned} H(x,0) &= f(x) \\ H(x,1) &= g(x) \end{aligned} \quad \forall x \in M.$$

SE UNA TALE H ~~f/g~~ ESISTE f e g SI DICONO OMOTOPE

DEF M, N VARIETÀ, $f, g : M \to N$ C^∞

SE f e g SONO EMBEDDING e $\exists H$ COME SOPRA.

$\Rightarrow H$ SI DICE ISOTOPIA se $\forall t$ $H(x,t) : M \to N$ È UN EMBEDDING

E f e g SI DICONO ISOTOPE

DEF COME SOPRA DOVE AL POSTO DI "EMBEDDING" POSSO METTERE DIFFEOMORFISMO.

OSSERVAZIONE 1 SE M È UNA VARIETÀ SENZA BORDO

$M \times [0,1]$ È UNA VARIETÀ CON BORDO DATO DA $M \times \{0\}$ e $M \times \{1\}$

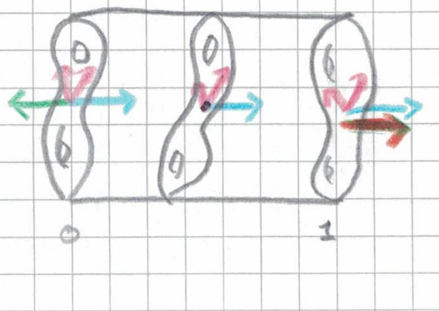
SE TALE M È ORIENTATA LO È ANCHE $M \times [0,1]$, INFATTI $\forall (x,t) \in M \times [0,1]$

UNA BASE POSITIVA $T_{(x,t)}(M \times [0,1])$ È DATA DA

$d_i(v_1), \dots, d_i(v_m), d_j(1)$

DOVE $v_1, \dots, v_m$ È UNA BASE POSITIVA DI $T_x M$ e "1" È UNA BASE POSITIVA DI $T_t [0,1]$ e $i : M \to M \times \{t\}$ e $j : [0,1] \to \{x\} \to [0,1]$

OSS SE FISSIAMO SU M LA SUA ORIENTAZIONE E DOTIAMO $M \times \{0\}$ e $M \times \{1\}$ DELL'ORIENTAZIONE INDOTTA DA M, ALLORA LE INCLUSIONI $i_0 : M \to M \times \{0\}$ e $i_1 : M \to M \times \{1\}$ SONO DIFFEOMORFISMI DI SEGNO OPPOSTO. (CIOÈ UNA PRESERVA L'ORIENTAZIONE E L'ALTRA NO). PERCHÉ $d_j(1)$ È ENTRANTE IN $M \times \{0\}$ e USCENTE IN $M \times \{1\}$



— $d_i(v_i)$
— $d_j(1)$
→ VETTORE USCENTE DA $M \times \{0\} = d_{i_0}$
→ VETTORE USCENTE DA $M \times \{1\}$ d_{i_1}

ATTENZIONE

COME SI VEDE IN $M \times \{0\}$ e $M \times \{1\}$ LE DIREZIONI IN UN CASO SONO CONCORDI IN UN CASO NO MA QUALE SIA TRA i_0 e i_1 DIPENDE DALLA DIMENSIONE.

OSSERVAZIONE ② OMOTOPIA E ISOTOPIA SONO RELAZIONI DI EQUIVALENZA

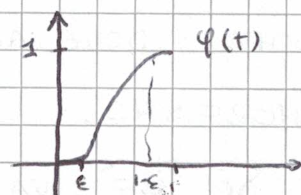
DIM RIFLESSIVA $f \sim f$ TRAMITE $H(x,t) = f(x)$

SIMMETRICA BASTA PRENDERE $H'(x,t) = H(x, 1-t)$

TRANSITIVITÀ: GIUSTAPPONENDO 2 OMOTOPIE C^∞ OTTENGO SOLO UN'OMOTOPIA C^0.

OSSERVO PERÒ CHE SE $f \sim g$ TRAMITE $H(x,t)$ POSSO COSTRUIRE $H'(x,t)$ t.c. $H'(x,t) = f(x)$ $\forall\, t \in [0,\varepsilon)$
e
$H'(x,t) = g(x)$ $\forall\, t \in (1-\varepsilon, 1]$

INFATTI FISSATA $\varphi(t) : [0,1] \to [0,1]$ C^∞ t.c. $\varphi(t) = 0$ su $[0,\varepsilon)$ e $\varphi(t) = 1$ su $(1-\varepsilon, 1]$



$H'(x,t) = H(x, \varphi(t))$ è ANCORA C^∞.

GIUSTAPPONENDO 2 OMOTOPIE DI QUESTO TIPO OTTENGO UN'OMOTOPIA C^∞ IN QUANTO NELLA GIUNZIONE SIA DA DESTRA CHE DA SINISTRA HO LA COSTANTE.

PER LE ISOTOPIE È DEL TUTTO ANALOGO.

OSSERVAZIONE ③ $f : M \to \mathbb{R}^n$ C^∞ ALLORA

f è OMOTOPA ALLA COSTANTE $g(x) = 0$ $\forall x \in M$

DIM $H(x,t) = (1-t) f(x)$ PERCHÈ $\mathbb{R}^n$ È CONTRAIBILE A 0.

IN PARTICOLARE LE MAPPE $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ RIFLESSIONE DELLA i-esima COMPONENTE

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ -x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

SONO OMOTOPE (PERCHÈ SONO OMOTOPE ALLA COSTANTE)

VEDIAMO PERÒ CHE NON SONO ISOTOPE,

PERCHÈ SE H FOSSE UN'ISOTOPIA TRA Id e r_i

POSTO $\varphi_t(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\forall t$

$$x \longrightarrow H(x,t)$$

φ_t SAREBBE DIFFEO SE H FOSSE UN'ISOTOPIA

$\Rightarrow \det J_{\varphi_t} \neq 0 \ \forall t$ MA $\det J_{\varphi_0} = \det Id = 1$

$\det J_{\varphi_1} = \det r_i = -1$

E $\det J_{\varphi_t}$ è UNA FUNZIONE CONTINUA IN t, IL CHE È ASSURDO.

<u>LEMMA</u> SIA n FISSATO, ALLORA ESISTE UN INTORNO U DELL'ORIGINE DI $\mathbb{R}^n$ TALE CHE $\exists$ UN DIFFEOMORFISMO $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tc $\varphi(0) = p$ ($\forall p \in U$) E φ SIA ISOTOPO ALL'IDENTITÀ TRAMITE UN'ISOTOPIA $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ $H(x,t) = x$ con $\|x\| \geq 1$ (IN PARTICOLARE $\varphi(x) = x$ $\|x\| \geq 1$)

<u>DIM</u> PER INDUZIONE SU n.

$n=1$ SCELGO $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CON $\varphi(0) = 1$ $\varphi(x) = 0$ $\forall x$ $|x| > \frac{1}{2}$

e PONGO $M = \max |\varphi'(x)|$ (CHE ESISTE PERCHÈ φ È A SUPPORTO COMPATTO)

PONGO $U = \left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right)$ [TEORICAMENTE INTERSECATO $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ MA NON NECESSARIO PERCHÈ PER LAGRANGE ESISTE ALMENO UN PUNTO CON $\varphi'(x) = \pm\frac{1}{2}$] DATO $p \in U$

PONGO $H(x,t) = x + t\,\boxed{\varphi(x)}\,p$ NO METTERCELO AVREBBE TRASLATO TUTTO MENTRE COSÌ LA PARTE FUORI RESTA FERMA.

$H(x,0) = x$

$H(0,1) = p$

Se $|x| > \frac{1}{2}$ $H(x,t) = x$ perchè $\varphi(x) = 0$

DEVO MOSTRARE CHE $\varphi_t(x) = H(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SIA UN DIFFEO $\forall t$.

PERÒ $\varphi_t'(x) = \frac{d}{dx}\left(x + t\varphi(x) \cdot p\right) = 1 + tp\,\varphi'(x) > 0$ $\forall x$

PERCHÈ $|t\varphi(x) \cdot p| \leq |t| \cdot |\varphi'(x)| \cdot \underbrace{|p|}_{<\frac{1}{M}} < 1 \cdot M \cdot \frac{1}{M} < 1$

PERCHÈ $|p| < \frac{1}{M}$

INOLTRE POICHÈ $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi_t(x) = \pm\infty$ e $\varphi_t'(x) > 0 \ \forall x$

$\varphi_t(x)$ È UN DIFFEO $\Rightarrow$ CIÒ CONCLUDE LA DIM $m=1$

LEZIONE 6/12

CONTINUO LA DIMOSTRAZIONE LEMMA DI IERI.

Se $m \geq 2$ sia $\sigma : \mathbb{R}^{m-1} \longrightarrow [0,1]$ $\sigma(0) = 1$ e $\sigma(x) = 0$ se $\|x\| > \frac{1}{2}$

A MENO DI CONIUGARE (*) CON UNA ROTAZIONE

POSSO SUPPORRE $P = (p_0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ E SCELGO

$U = B(0, \frac{1}{M})$ $p_0 \in \left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right)$ CON M COME NEL CASO $m=1$ (PER $\sigma(x)$).

OSS (*) L'IMPORTANZA DI CONIUGARE CON UNA ROTAZIONE (E NON SEMPLICEMENTE COMPORRE) È PER FARE IN MODO CHE LA φ SIA POI EFFETTIVAMENTE A SUPPORTO IN D^m

PONGO $H(\underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m-1}}{(x,y)}, t) = (x + t\varphi(x)\cdot\sigma(y) p_0, y) \in C^\infty$

~~PONGO~~ Se $(x,y) \notin D^m \Rightarrow \|x\| > \frac{1}{2}$ o $\|y\| \geq \frac{1}{2}$ PER CUI $\varphi(x)\cdot\sigma(y) = 0$

$\Rightarrow$ L'ISOTOPIA È L'ID. FUORI DI D^m $\left(H(x,y) = (x,y)\right)$

$H((0,0), 1) = (0 + p_0, 0) = P$

DEVO VEDERE CHE $\varphi_t(x) = H(\cdot, t)$ SIA UN DIFFEO $\forall t$,

BASTA QUINDI VEDERE CHE SIA UN DIFFEO LOCALE BIGETTIVO.

LA $J_{\varphi_t} = \begin{pmatrix} 1 + t\varphi'(x)\sigma(y)p_0 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & Id & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ E $|t\varphi'(x)\sigma(y)p_0| < 1$ ESATTAMENTE COME NEL CASO $m=1$

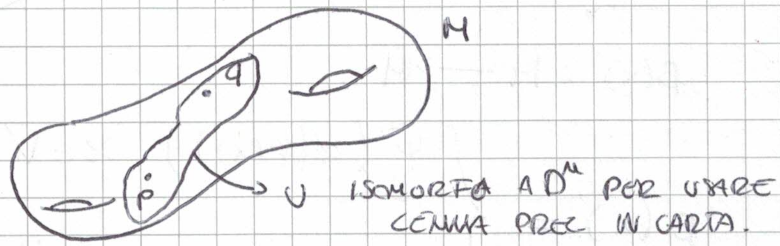
$\Rightarrow \det J_{\varphi_t} \neq 0 \Rightarrow$ ~~SIA~~ φ_t È UN DIFFEO LOCALE.

PER AVERE LA BIGETTIVITÀ BASTA OSSERVARE CHE OGNI RETTA A y_0 FISSATA VA IN SÈ. INFATTI LA PRIMA COMPONENTE CHE È $x + t\,\varphi(x)\,\sigma(y_0)\,p_0$ È BIGETTIVO COME VISTO IERI MENTRE LA SECONDA COMP. È FISSATA y_0.

TEOREMA : LEMMA DI OMOGENEITÀ

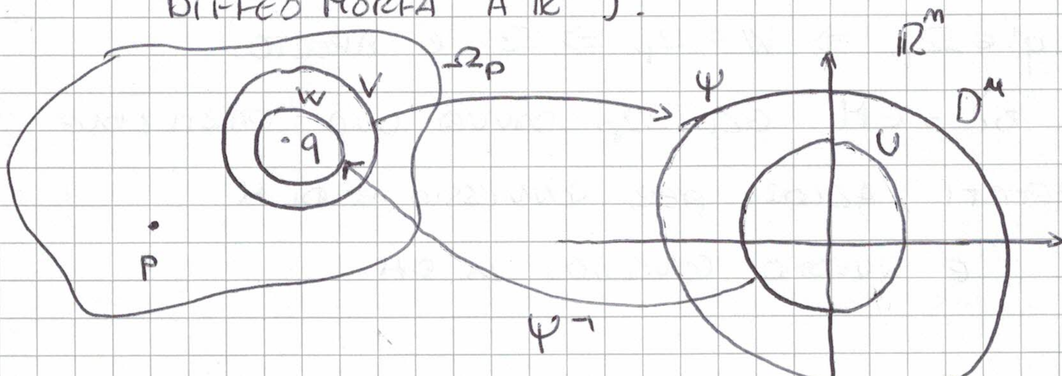
M VARIETÀ CONNESSA, ALLORA $\forall p, q \in M$ $\exists$ UN DIFFEOMORFISMO $\varphi : M \to M$ ISOTOPO ALL'IDENTITÀ TALE CHE $\varphi(p) = q$.

DIM IDEA:



$\forall p \in M$ SIA Ω_p UN INSIEME DEI PUNTI $q \in M$ PER CUI $\exists \varphi$ COME NELL'ENUNCIATO. PER IL LEMMA PRECEDENTE Ω_p ESISTE, INFATTI DATO $q \in \Omega_p$ PRENDO UNA CARTA $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, V INTORNO DI q e $\psi(q) = 0$

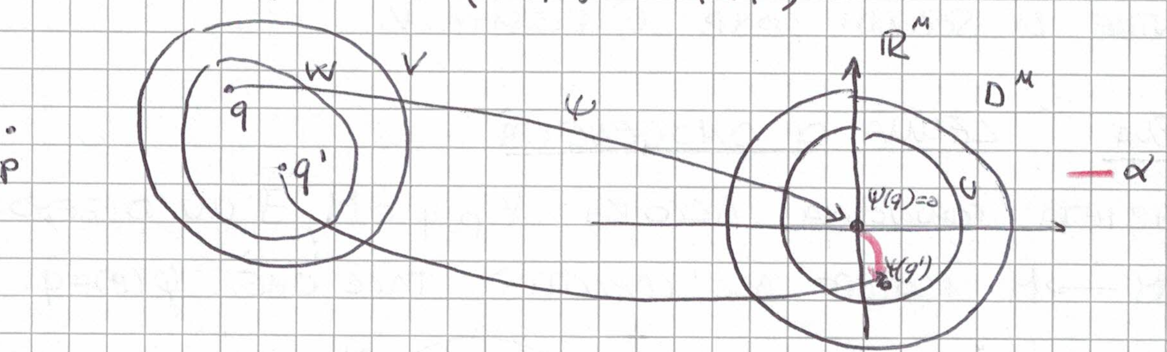
(EX: INTORNO AD OGNI PUNTO ESISTE SEMPRE UN INTORNO A $\mathbb{R}^n$ $\overset{\text{DIM}}{\vee}$ IN QUANTO OGNI PALLA DI CENTRO 0 E RAGGIO ε È DIFFEOMORFA A $\mathbb{R}^n$).



Sia W intorno a q, con $W = \psi^{-1}(U)$ DOVE U È L'INTORNO DELL'ORIGINE NEL LEMMA PRECEDENTE., W È UN APERTO CHE CONTIENE q QUINDI PER VEDERE CHE Ω_p È APERTO BASTA VEDERE CHE $W \subseteq \Omega_p$.

$\forall q' \in W$ PER IL LEMMA PRECEDENTE $\exists\ \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ISOTOPA ALL'IDENTITÀ, COSTANTE FUORI DA D^n

tc $\alpha(0) = \alpha(\varphi(q)) = \varphi(q')$



PONGO $\beta(x) : M \to M$

$$\beta(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\alpha(\varphi(x))) & x \in V \\ x & x \in M \setminus (\varphi^{-1}(D^n)) \end{cases}$$

β È UN BEN DEFINITO DIFFEOMORFISMO ISOTOPO ALL'IDENTITÀ (L'ISOTOPIA È DATA DALLA COSTRUZIONE) e $\beta(q) = q'$

POICHÈ $q \in \Omega_p$ $\exists\ \gamma : M \to M$ ISOTOPO ALL'IDENTITÀ

CON $\gamma(p) = q$ $\Rightarrow$ $\beta \circ \gamma : M \to M$ È ISOTOPO ALL'IDENTITÀ

PERCHÈ L'ISOTOPIA È DI EQUIVALENZA e $\beta\circ\gamma(p) = q'$

$\Rightarrow q' \in W$ e $q' \in \Omega_p \Rightarrow W \subseteq \Omega_p \Rightarrow \Omega_p$ È APERTO.

AL VARIARE DI $p \in M$ GLI Ω_p DANNO UNA PARTIZIONE DI M IN APERTI, ALLORA PER CONNESSIONE DI M

$\Omega_p = M$, E QUESTO CONCLUDE LA DIM.

DEF SIANO M, N VARIETÀ DELLA STESSA DIM ORIENTATE CON M COMPATTA E N CONNESSA. SIA $f: M \to N$ E SIA $y \in N$ UN VALORE REGOLARE PER f.

ALLORA $\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(df_x)$ DOVE

$\varepsilon(df_x) = \pm 1$ A SECONDA SE f PRESERVI O INVERTA L'ORIENTAZ.

FATTO ① y È REGOLARE E M È COMPATTA, ALLORA $f^{-1}(y)$ È FORMATA DA UN NUMERO FINITO DI PUNTI QUINDI LA SOMMA SOPRA È BEN DEFINITA, E $\deg(f, y) \in \mathbb{Z}$ SI CHIAMA GRADO INTERO

OSS $\deg(f, y)$ È LOCALMENTE COSTANTE, PERCHÈ $R \subseteq N$ IN y È L'INSIEME DEI VALORI REGOLARI, R È APERTO E $f\big|_{f^{-1}(R)}$ È UN "RIVESTIMENTO" CIOÈ $\deg(f, y) = \deg(f, z)$
$\forall z \in$ STESSA COMPONENTE CONNESSA DI R CONTENENTE y.

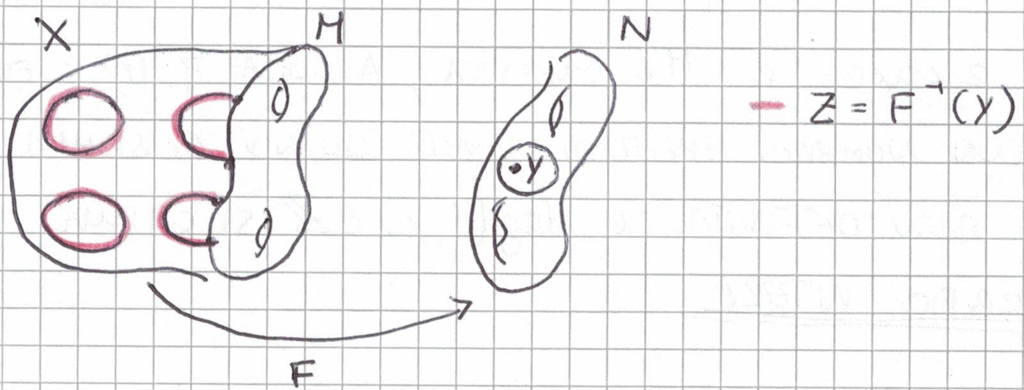
RICORDA: CHE PER "RIVESTIMENTO" CHIEDO SOLO L'ESISTENZA DI INTORNI BEN RIVESTITI, NON VOGLIO NÈ LA CONNESSIONE NÈ LA SURGETTIVITÀ.

IL NOSTRO OBBIETTIVO SARÀ QUELLO DI DIMOSTRARE CHE $\deg(f, y) = \deg(f)$ CIOÈ NON DIPENDE DA $y \in R \subseteq N$ (RICORDIAMO CHE PER SARD $R \neq \emptyset$) E CHE $\deg(f)$ DIPENDE SOLO DALLA CLASSE DI OMOTOPIA DI f, CIOÈ f OMOTOPO A $g \Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$.

IPOTESI DI LAVORO: DI QUI IN AVANTI, SE NON DETTO DIVERSAMENTE, f, M, N SARANNO COME NELLE IPOTESI DELLA DEF DI GRADO.

TEOREMA Sia $f: M \to N$ nelle ipotesi di lavoro, $y \in R \subset N$ e supponiamo che $M = \partial X$ dove X è una varietà orientata compatta $(m+1)$-dimensionale e che $f = F|_{\partial X}$ dove $F: X \to N$ C^∞.

Allora $\deg(f, y) = 0$ $\forall y \in N$.

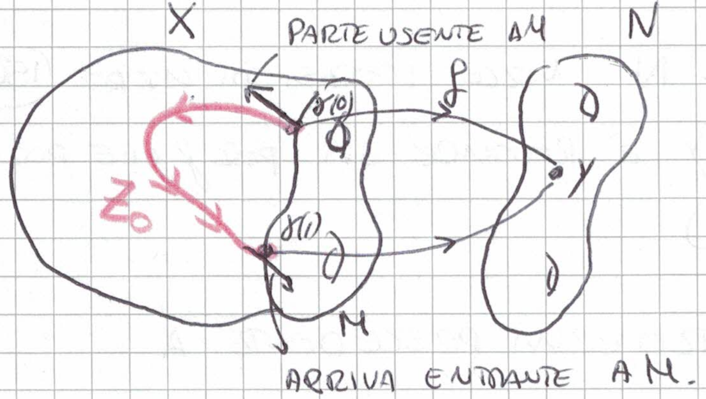


DIM Poiché ~~valor~~ $\deg(f, y)$ è localmente costante e i valori regolari di F (per Sard) sono densi in N posso supporre che y regolare anche per F.

(cioè in un intorno di y in cui il $\deg(f,y)$ si conserva per densità dei valori regolari per F, ci sarà almeno valore regolare anche per F, quindi a patto di rinominare lui y lo posso prendere come punto y, tanto $\deg(f)$ lì non cambia).

Adesso quindi posso usare il teorema che aveva come ipotesi ~~y~~ y regolare per F e y regolare per $F|_{\partial X} = f$, per osservare che $Z = F^{-1}(y)$ è una $[(m+1) - m]$-varietà in X, e poiché X è compatta e Z è chiusa $\Rightarrow Z$ è compatta ~~quindi~~ dunque per il corollario delle 1-varietà è unione finita di cerchi e $[0,1]$,

e $f^{-1}(y) = Z \cap M = Z \cap \partial X = \partial Z$, dunque i punti che contribuiscono in $\deg(f, y)$ sono gli estremi degli archi e se $\gamma : [0,1] \to Z$ è un diffeo tra un arco e $[0,1]$ basta vedere che $\varepsilon(df_{\gamma(0)}) = -\varepsilon(df_{\gamma(1)})$.



OSS
L'ARCO DISEGNATO È SOLO UNO PER TANTI DI Z, TANTO SU GLI ALTRI È ANALOGO (LO CHIAMO Z_0)

ORIENTO $Z_0 = \gamma([0,1])$ COME SEGUE. $v \in T_z Z_0$ $z \in Z_0$ è

POSITIVO SE COMPLETANDO v A BASE $v, v_1 \dots v_n$ POSITIVA DI $T_z X$, ALLORA $\partial F_z(v_1), \dots, \partial F_z(v_m)$ È UNA BASE POSITIVA DI $T_y N$

OSS 1 $F|_{Z_0} \equiv$ COSTANTE PERCIÒ $dF(v)=0$, $dF: T_z X \to T_y N$

È SURGETTIVO PER REGOLARITÀ DI y, QUINDI PER QUESTIONI DI DIMENSIONE $\partial F_z(v_1), \dots, \partial F_z(v_m)$ è EFFETTIVAMENTE UNA BASE PER $T_y N$.

ALLORA A MENO DI SCAMBIARE γ con $\bar\gamma(t) = \gamma(1-t)$ POSSO SUPPORRE CHE γ PRESERVI L'ORIENTAZIONE.

Sia $v_1, \dots, v_m$ BASE POSITIVA DI $T_{\gamma(0)} M$, POICHÉ $\gamma'(0)$ è ENTRANTE ALLORA $\gamma'(0), v_1 \dots, v_m$ è UNA BASE NEGATIVA DI $T_{\gamma(0)} X$, QUINDI $\partial f_{\gamma(0)}(v_1), \dots, \partial f_{\gamma(0)}(v_m)$ è UNA

BASE NEGATIVA DI $T_y N$. CIOÈ $\varepsilon(\partial f_{\gamma(0)}) = -1$

PER RAGIONAMENTO ANALOGO, FISSANDO $w_1, \dots w_m$ BASE POSITIVA PER $T_{\gamma(1)} M$, POICHÉ $\gamma'(1)$ è USCENTE ALLORA $\gamma_1'(1), w_1 \dots w_m$ È POSITIVA PER $T_{\gamma(1)} X$, ALLORA $\partial f_{\gamma(1)}(w_1) \dots \partial f_{\gamma(1)}(w_m)$ È POSITIVA PER $T_y N$

DONQUE $\varepsilon(d f_{\gamma(1)}) = 1$ E QUESTO CONCLUDE.

COROLLARIO $f, g : M \longrightarrow N$ NELLE IPOTESI DI LAVORO

E f OMOTOPA A g, SE y È REGOLARE SIA PER f CHE PER g

$\Rightarrow \deg(f, y) = \deg(g, y)$

DIM BASTA APPLICARE IL TEOREMA PRECEDENTE A

$X = M \times [0,1]$ $\quad F : X \longrightarrow N$ OMOTOPIA TRA f e g

E QUINDI SI HA CHE $0 = \deg\left(F|_{\partial X}\right) =$

$$0 = \deg\left(F|_{\partial X}\right) = \deg\left(F|_{\partial(M\times[0,1])}\right) =$$

$$= \deg\left(F|_{M\times\{0\}}\right) + \deg\left(F|_{M\times\{1\}}\right) =$$

$$= \overset{*}{\pm}\left(\deg(f, y) - \deg(g, y)\right)$$ DA CUI LA TESI.

OSS* $\pm$ NECESSARIO PERCHÉ IERI ABBIAMO VISTO CHE LE INCLUSIONI $i_0 : M \times ~~\{0\}~~ \longrightarrow M \times \{0\}$ e $i_1 : M \longrightarrow M \times \{1\}$ HANNO SEGNO OPPOSTO MA NON SI SA QUALE PERCHÉ 2 INVERTE

OSS HO USATO CHE DATA $f : M \longrightarrow N$ CAMBIO L'ORIENTAZIONE DI M CON QUELLA OPPOSTA (DEVO SPECIFICARE OPPOSTA PERCHÉ SE M HA h COMP. CONNESSE HA 2^h ORIENTAZIONI QUINDI QUELLA OPPOSTA È QUELLA CHE CAMBIA IN TUTTE LE COMP. CONNESSE) ALLORA $\deg(f, y)$ CAMBIA DI SEGNO, È INOLTRE VERO ANCHE SE CAMBIO ~~DI SEGNO~~ ORIENTAZIONE SU N (SU N NON È NECESSARIO SOTTOLINEARE OPPOSTA PERCHÉ N è CONNESSA DUNQUE HA SOLO 2 SCELTE).

LEZIONE 7/12

PROP $f: M \longrightarrow N$ DELLA STESSA DIMENSIONE, ORIENTATE, M COMPATTA e N CONNESSA, ALLORA SE y_1, y_2 SONO VALORI REGOLARI PER f, ALLORA $\deg(f, y_1) = \deg(f, y_2)$.
DUNQUE È BEN DEFINITO $\deg(f) = \deg(f, y)$ $\forall y \in R \subset N$.

DIM PER IL LEMMA DI OMOGENEITÀ E POICHÉ N È CONNESSA $\exists \varphi: N \longrightarrow N$ DIFFEOMORFISMO, ISOTOPO ALL'IDENTITÀ E TALE CHE $\varphi(y_1) = y_2$, ESSENDO ISOTOPO ALL'IDENTITÀ φ PRESERVA ~~L'IDENTITÀ~~ L'ORIENTAZIONE DI N IN OGNI PUNTO (VEDERE PER ESERCIZIO).
HO INOLTRE CHE f È OMOTOPA A $\varphi \circ f$ IN QUANTO φ È ISOTOPA ALL'IDENTITÀ e $id \circ f = f$ È OMOTOPO A $\varphi \circ f$, DUNQUE PER INVARIANZA OMOTOPICA HO CHE $\deg(f, y_2) = \deg(\varphi \circ f, y_2)$

CIÒ HA SENSO PERCHÉ y_2 È REGOLARE ANCHE PER $\varphi \circ f$ IN QUANTO $(\varphi \circ f)^{-1}(y) = f^{-1}(\varphi^{-1}(y_2)) = f^{-1}(y_1)$

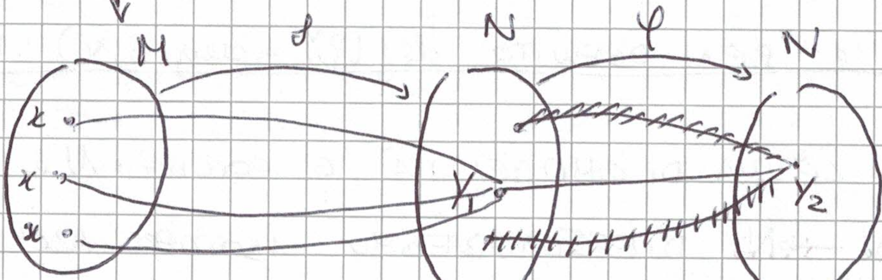
E $\forall x \in f^{-1}(y_1)$ $d(\varphi \circ f)_x = \underbrace{d\varphi_{y_1}}_{\substack{\varphi \text{ È DIFFEO} \\ \text{QUINDI È} \\ \text{INVERTIBILE}}} \circ \underbrace{df_x}_{\substack{\text{È BIGETTIVO PERCHÉ} \\ y_1 \text{ È REGOLARE} \\ \text{PER } f.}}$ $\Rightarrow$ È BIGETTIVO

$\Rightarrow$ y_2 È REGOLARE PER $\varphi \circ f$.
INOLTRE $\forall x \in f^{-1}(y_1)$ $\varepsilon(df_x) \underset{\downarrow}{=} \varepsilon(d(\varphi \circ f)_x)$
PERCHÉ $d\varphi_{y_1}$ È POSITIVO IN QUANTO PRESERVA L'ORIENTAZIONE PERCHÈ È OMOTOPO ALL'IDENTITÀ.

DUNQUE $\deg(f, y_1) = \sum_{x \in f^{-1}(y_1)} \varepsilon(df_x) =$

$$= \underbrace{\sum_{x \in (\varphi \circ f)^{-1}(y_2)}} \varepsilon(d(f \circ \varphi)_x) = \deg(\varphi \circ f, y_2) = \deg(f, y_2)$$

$\rightarrow$ AVEVAMO GIÀ VISTO CHE $(\varphi \circ f)^{-1}(y_2) = f^{-1}(y_1)$



FINALMENTE ABBIAMO FINITO CON LA DEFINIZIONE DI $\deg f$ PERCHÈ ABBIAMO MOSTRATO CHE È INDIPENDENTE DALLA SCELTA DI y.

COROLLARIO: $\deg(f)$ È BEN DEFINITO E SE g È OMOTOPA AD $f \Rightarrow \deg(g) = \deg(f)$

DIM BASTA PRENDERE $y \in R_f \cap R_g$ REGOLARE SIA PER g CHE PER f (CHE ESISTE SEMPRE PER SARD).

E LA TESI È DATA DAI TEOREMI PRECEDENTI.

OSS ① Se f NON È SURGETTIVA, PRESO $y \in N \setminus f(M)$

$\deg(f) = \deg(f, y) = 0$ PERCHÈ LA CONTROIMMAGINE È VUOTA (UN PUNTO A CONTROIMMAGINE VUOTA È REGOLARE).

OSS ② Se f È UN DIFFEOMORFISMO, $\deg f = \pm 1$ A SECONDA CHE PRESERVI O INVERTA L'ORIENTAZIONE.

(f è DIFFEO $\Rightarrow$ $f^{-1}(y)$ = UN SOLO PUNTO E LUI DETERMINA IL SEGNO).

OSS 3 ①+② SE f È OMOTOPA AD UN DIFFEO $\Rightarrow$ f È SURGETTIVA.

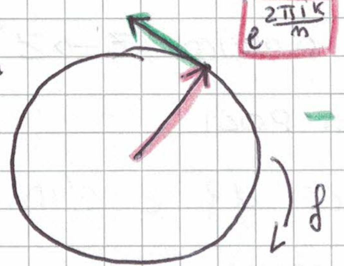
ESEMPI DI CALCOLO DI deg f

- CONSIDERIAMO $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ QUINDI GLI $z \in \mathbb{C}$ $\|z\| = 1$

CONSIDERIAMO $f : S^1 \longrightarrow S^1$, $z \longmapsto z^m$ HA GRADO m $\forall m \in \mathbb{Z}$

INFATTI $f^{-1}(1) = \{ e^{\frac{2\pi i k}{m}}, \ k = 0, \dots, m-1 \}$ È L'INSIEME DELLE RADICI n-esime DELL'UNITÀ. (HA CARDINALITÀ m).

S_1 $\boxed{e^{\frac{2\pi i k}{m}}}$

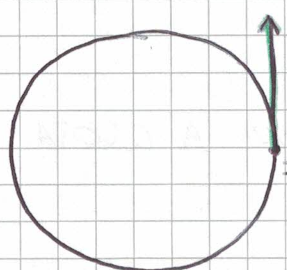


$i e^{\frac{2\pi i k}{m}}$ PERCHÈ IN $\mathbb{C}$ BASTA MOLTIPLICARE PER i PER RUOTARE DI $\frac{\pi}{2}$

f

IDENTIFICO $df_z = f'(z)$ E ABBIAMO CHE $f' = m z^{m-1}$ (CIOÈ VALUTARE IN df_z È COME MOLTIPLICARE PER $f'(z)$)

S_1



$df_{e^{\frac{2\pi i k}{m}}}\left(i e^{\frac{2\pi i k}{m}}\right) = im$

1

UN GENERATORE POSITIVO DI $T_{e^{\frac{i 2\pi k}{m}}} S^1$ È $i e^{\frac{i 2\pi k}{m}}$ LA CUI IMMAGINE TRAMITE

$$df_{e^{\frac{i2\pi k}{m}}} = f'\left(e^{\frac{2\pi k i}{m}}\right) \cdot i e^{\frac{2\pi k i}{m}} =$$

$$= m \left(e^{\frac{2\pi k i}{m}}\right)^{m-1} i e^{\frac{2\pi k i}{m}} = im$$

- Se $m > 0 \Rightarrow im$ È UN VETTORE POSITIVO IN $T_1 S^1$ $\uparrow$
- Se $m = 0 \Rightarrow i0$ È NULLO
- Se $m < 0 \Rightarrow im$ È UN VETTORE NEGATIVO IN $T_1 S^1$ $\downarrow$

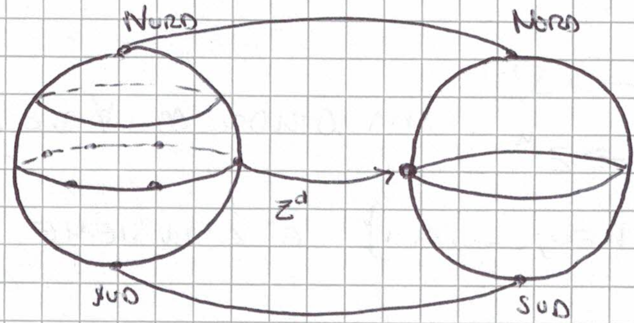
$\Rightarrow \deg(f) = \deg(f, 1) = m$

CIT "ALL'ORALE NON MI SERVE IL CONTO COMPLETO MI BASTA UN DISEGNINO".

OSS $\forall d \in \mathbb{Z}$ $\exists f : S^n \to S^n$ DI GRADO d.

PER INDUZIONE SU n.

$n = 2$



SU OGNI PARALLELO, LO RISCALO A S^1 POI APPLICO $z \to z^d$ SULLA QUOTA z, E I POLI LI MANDO NEI POLI, QUINDI RISTRETTO ALLA PARTE ORIZZONTALE df È L'ID. QUINDI NON INFLUENZA IL GRADO, E SI CONTA SOLO LA PARTE PARALLELA PER IL GRADO.

STESSO RAGIONAMENTO IN S^n SU SEZIONI A QUOTA FISSATA (CHE SONO DELLE S^{n-1}).

PROP $f : M \to N$, $g : N \to Z$ MAPPE TRA VARIETÀ COMPATTE CONNESSE, ALLORA $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$

DIM PRESO $z \in Z$ REGOLARE SIA PER g, CHE PER $g \circ f$ (ESISTE PER SARD).

$$\deg(g \circ f) = \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(z)} \varepsilon\left(d(g \circ f)_x\right) = \sum_{y \in g^{-1}(z)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon\left(dg(y)\right) \cdot \varepsilon\left(df_x\right) =$$

QUESTO PERCHÉ f E g O INVERTONO O PRESERVANO L'ORIENTAZIONE E LA COMPOSIZIONE ALLA FINE SEGUE IL SEGNO DEL PRODOTTO DEI SEGNI.

OSS PER INVERTIBILITÀ DI $d(g \circ f)_x$ HO MOSTRATO CHE TUTTI GLI y SONO REGOLARI PER f.

$$= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \varepsilon\left(dg_y\right) \cdot \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon\left(df_x\right) = \sum_{y \in g^{-1}(z)} \varepsilon\left(dg_y\right) \cdot \deg(f) =$$

$$= \deg f \cdot \sum_{y \in g^{-1}(y)} \varepsilon\left(dg_y\right) = \deg f \cdot \deg g.$$

CIOÈ IL GRADO È MOLTIPLICATIVO PER LA COMPOSIZIONE.

PROP $r : S^n \to S^n$ UNA RIFLESSIONE RISPETTO AD UN IPERPIANO COORDINATO. Allora $\deg(r) = -1$

DIM $r \circ r = Id$, DUNQUE r È UN DIFFEOMORFISMO

$\Rightarrow \deg r = \pm 1$ E QUINDI BASTA VEDERE CHE r INVERTE L'ORIENTAZIONE DI S^n

ATTENZIONE: QUESTA COSA NON È COSÌ BANALE DA OTTENERE OSSERVANDO SOLO CHE r INVERTE L'ORIENTAZIONE DI $\mathbb{R}^{n+1}$.

SE PER ESEMPIO $r(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$

PRENDO p tc $r(p) = p$ AD ESEMPIO $p = (0, 1, 0 \dots 0)$

INOLTRE $r^{-1}(p) = p$ PERCHÈ r È DIFFEO.

$p = e_2$ $T_{e_2}(S^n) = e_2^{\perp} = \mathrm{Span}(e_1, e_3, \dots e_{n+1})$ e

$dr : T_p(S^n) \to T_p(S^n) \Rightarrow dr = r|_{T_p(S)}$ PERCHÈ r = RIFLESSIONE È LINEARE.

$r(e_1) = -e_1$ e $r(e_i) = e_i$ $i = 3, \dots n+1$

$\Rightarrow$ RISPETTO ALLA BASE $\{e_1, e_3, \dots, e_{n+1}\}$ dr in T_pS è RAPPRESENTATO DA $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ e quindi $\varepsilon(dr_p) = -1$

$$\Rightarrow \deg(r) = \sum_{x \in r^{-1}(p)} \varepsilon(dr_{p x}) = \varepsilon(dr_p) = -1.$$

PERCHÈ p È L'UNICO $x \in r^{-1}(p)$.

DEF LA MAPPA ANTIPODALE $A : S^n \to S^n$

$p \to -p$

$A = -Id|_{S^n}$.

PROP $A: S^n \longrightarrow S^n \quad \deg(A) = (-1)^{n+1}$

DIM $r_i : S^n \longrightarrow S^n \quad \Rightarrow A = r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{n+1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ -x_i \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \Downarrow \qquad \deg A = \prod_{i=1}^{n+1} \deg r_i = (-1)^{n+1}$$

TEOREMA SONO FATTI EQUIVALENTI

1. S^n è PETTINABILE
2. n è DISPARI
3. $A: S^n \longrightarrow S^n$ è OMOTOPA ALL'IDENTITÀ

OSS IL VERO RISULTATO È L'EQ TRA 1 e 2 ; 3 È SOLO UNA CONDIZIONE DI PASSAGGIO DA UNA ALL'ALTRA.

DIM 2 $\Rightarrow$ 1 PER MOSTRARLO ESIBISCO UN CAMPO NON NULLO IN $T_pS^n \ \forall p \in S^n$.

SE n È DISPARI $\Rightarrow n+1$ È PARI, DEFINISCO

$$V: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \\ \vdots \\ -x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

HA SENSO FARLO PERCHÉ HO UN NUMERO PARI DI COMPONENTI.

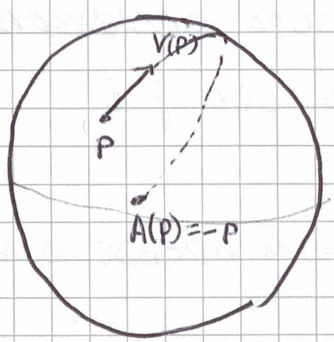
PER COSTRUZIONE $V(p) \in C^\infty$, $V(p) \neq 0 \ \forall p \in S^n$

INOLTRE $\langle V(p), p \rangle = 0 \Rightarrow V(p) \in p^\perp \ \forall p \in S^n$ MA $p^\perp = T_pS^n$

DUNQUE $V(p) \in T_pS^n$.

(1) $\Rightarrow$ (3) NORMALIZZANDO POSSO SUPPORRE DI AVERE UN CAMPO TANGENTE UNITARIO $v : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ (PERCHÈ v NON È MAI NULLO QUINDI POSSO NORMALIZZARLO)

IDEA



$\forall p$ PRENDO IL CERCHIO DI RAGGIO MAX PER p CON VETTORE TG $v(p)$ E PORTO $v(p)$ IN $A(p)$ SEGUENDO QUEL CERCHIO. CIOÈ PRENDO

$$H : S^n \times [0,1] \longrightarrow S^n$$

$$H(p,t) = \cos(\pi t)\, p + \sin(\pi t)\, v(p)$$

$$H(p,0) = Id(p) \qquad \forall p \in S^n$$

$$H(p,1) = A(p)$$

INOLTRE $\|H(p,t)\|^2 = \cos^2(\pi t) \cdot \underbrace{\|p\|^2}_{\substack{=1 \\ p \in S^n}} + \sin^2(\pi t) \cdot \underbrace{\|v(p)\|}_{\substack{=1 \\ v \text{ è unitari}}} +$

$$+ 2 \cos(\pi t) \sin(\pi t) \cdot \underbrace{\langle v(p), p \rangle}_{\substack{=0 \\ v(p) \text{ è tangente}}} =$$

$$= 1$$

ALLORA H È EFFETTIVAMENTE A VALORI IN S^n $\forall t$, QUINDI È BEN DEFINITA.

(3) $\Rightarrow$ (2) SE A È OMOTOPA ALL'IDENTITÀ $\Rightarrow 1 = \deg Id =$

$$= \deg A = (-1)^{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$(-1)^{n+1} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$n+1$ PARI

$$\Updownarrow$$

n DISPARI.

ESERCIZIO (CHE CHIEDO MOLTO SPESSO ALL'ORALE).

n PARI $f: S^n \to S^n$ ALLORA $\exists\, p \in S^n$ tc $f(p) = p$ o $f(p) = -p$

DIM $\forall p$ TALE CHE $f(p) \neq p \Rightarrow$ PRENDO IL CERCHIO DI RAGGIO MAX TRA p e $f(p)$ E PORTO CON UN OMOTOPIA $f(p)$ su $-p \Rightarrow f(p)$ È OMOTOPA ALL'~~IDENTITÀ~~ ANTIPODALE.

SE $\exists\, p$ tc $f(p) = p$ ALLORA RIESCO A DIRE CHE f È OMOTOPA ALL'IDENTITÀ.

ALLORA $A(p)$ SAREBBE OMOTOPA ALL'IDENTITÀ $\Rightarrow n$ SAREBBE DISPARI.

DA CHIEDERE ANCHE COSA DICE BENE L'ENUNCIATO.

PROP $\forall f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, EMBEDDING, Ω STELLATO RISPETTO ALL'ORIGINE, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ APERTO. ALLORA f È ISOTOPO TRAMITE EMBEDDING ALL'IDENTITÀ, O A UNA RIFLESSIONE. ASSUMIAMO $f(0) = 0$. L'ISOTOPIA FISSA ~~L'IDEN~~ L'ORIGINE IN OGNI t.

DIM FATTO NOTO $f(0) = 0$, $f \in C^\infty \Rightarrow f(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, g_i(x_1, \dots x_n)$

$g_i \in C^\infty \quad g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ $\boxed{\text{TAYLOR PER TOPOLOGI}}$

COSTRUISCO UN'ISOTOPIA TRA f e df_0 PONENDO

$$H(p,t) = \begin{cases} df_0(p) & \text{se } t = 0 \\ \frac{f(tp)}{t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

H È C^∞ AL PIÙ IN $\Omega \times \{0\}$ e $H(p,t)$ È UN'EMBEDDING $\forall t$

INOLTRE PER LA LISCEZZA DI H BISOGNA OSSERVARE CHE

$$\forall (p,t) \quad H(p,t) = \left(\frac{f(t,p)}{t} = \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cancel{t} x_i\, g_i(tx_1, \dots, tx_n)}{\cancel{t}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\, g_i(tx_1, \dots, tx_n) \quad H \text{ è } C^\infty \text{ e } t \to 0 \ \sum_{i=1}^{n} x_i g_i = df_0$$

SE AVESSI SCRITTO H SUBITO COSÌ NON AVREI VISTO FACILMENTE CHE ERA UN EMBEDDING.

PROP $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ STELLATO rispetto a O, APERTO, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ EMBEDDING

$f(0) = 0$, ALLORA f È ISOTOPO TRAMITE EMBEDDING ALL'ID

O A UNA RIFLESSIONE TRAMITE UN'ISOTOPIA CHE FISSA L'ORIGINE

DIM $\exists g_1, \dots, g_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ LISCE TALI CHE

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \dots x_n) \qquad g(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

BASTA MOSTRARE L'ANALOGA FORMULA PER $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E QUINDI APPLICARLA PER COMPONENTE PER COMPONENTE.

QUINDI PER IL TEO FONDAMENTALE DEL CALCOLO

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \dots, tx_n)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n)}\, dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \overbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n)}^{g_i(x_1, \dots x_n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \dots x_n)$$

$\hookrightarrow$ qui sto usando Ω stellato in O se $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \Rightarrow (tx_1, \dots tx_n) \in \Omega \quad t \in [0,1]$

E $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$

USANDO QUESTA FORMULA ABBIAMO COSTRUITO UN ISOTOPIA TRA f E df_0 COSTANTE IN O. $df_0 \in GL(n, \mathbb{R})$ CHE HA 2 COMPONENTI CONNESSE PER ARCHI CHE CONTENGONO RISPETTIVAMENTE Id E UNA LA RIFLESSIONE, UN ARCO C^∞ IN $GL(n, \mathbb{R})$ DÀ UN'ISOTOPIA TRA I SUOI ESTREMI E CIÒ CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE (COMPONENDO H CON L'ARCO IN $GL(n, \mathbb{R})$ SI HA L'ISOTOPIA CERCATA).

INDICI DI ZERI ISOLATI E CAMPI VETTORI

DEF Sia V un campo vettoriale su M, $V \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ è uno <u>zero isolato di V</u> se $\exists U$ intorno di p in M $V(p) = 0$ e $V(q) \neq 0 \quad \forall q \in U \setminus \{p\}$

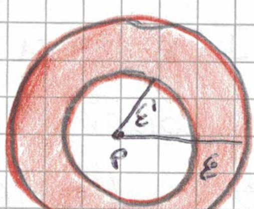
<u>PROBLEMATICA</u> per dare la prossima def su M passiamo prima da $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$

DEF Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto $V \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e $p \in \Omega$ zero isolato di V. Sia $\overline{B(p,\varepsilon)}$ una palla chiusa di centro p contenuto in Ω e tale che p sia l'unico 0 di V in $\overline{B(p,\varepsilon)}$.

Sia $\overline{V} := \frac{V}{\|V\|} : \underset{\underset{S^{m-1}}{\cong}}{\partial B(p,\varepsilon)} \longmapsto S^{m-1}$ oriento $\partial B(p,\varepsilon)$ come bordo di $\overline{B(p,\varepsilon)}$ e S^{m-1} come bordo di D^m e pongo <u>l'indice di p di V</u> $= i_p(V) = \deg \overline{V}$
(all'opera non dimenticarsi di non partire con M).

Vediamo che $i_p(V)$ è ben definito (non dipende da ε)
Se ε' ha le stesse proprietà di ε, supponiamo senza perdita di generalità $\varepsilon' < \varepsilon$ (altrimenti scambio).

Se $X = \overline{B(p,\varepsilon)} \setminus \mathrm{int}\, B(p,\varepsilon')$ corona sferica chiusa



$= X$ posso definire $\overline{V} = \frac{V}{\|V\|} : X \to S^{m-1}$

Poiché X è una varietà compatta con bordo m dim e S^{m-1} è connessa $m-1$ dim e ci sono tutte le ipotesi di regolarità necessarie.

Allora $0 = \deg\left(\overline{V}\big|_{\partial X}\right) = \deg \overline{V}\big|_{\partial B(p,\varepsilon)} - \deg \overline{V}\big|_{\partial B(p,\varepsilon')}$ la tesi.

ESEMPIO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ $\quad v(z) = z^m$ $\quad m \geq 1$ CHE HA

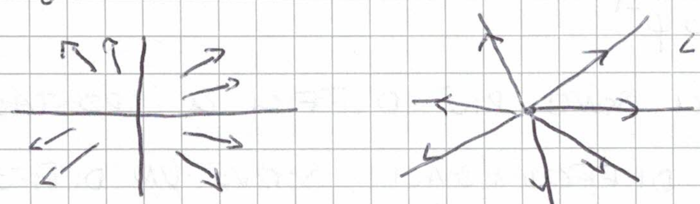
UN SOLO ZERO ISOLATO IN 0. COME PALLA POSSO PRENDERE

$\varepsilon = 1$ e $\|v\| = 1$ SU S^1 $\quad \tilde{v} = v$

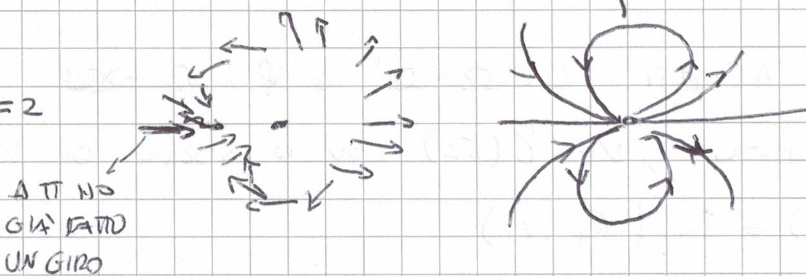
$\Rightarrow \quad i_0(v) = m$

LINEE DI FLUSSO

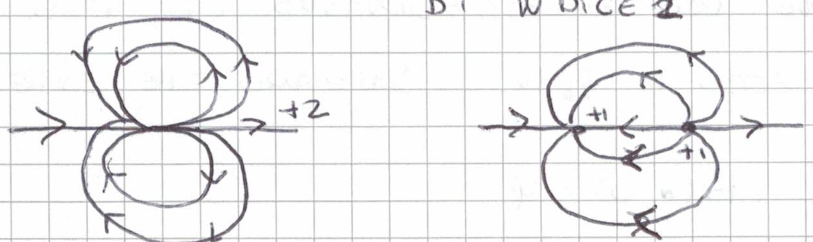
$m = 1$



$m = 2$

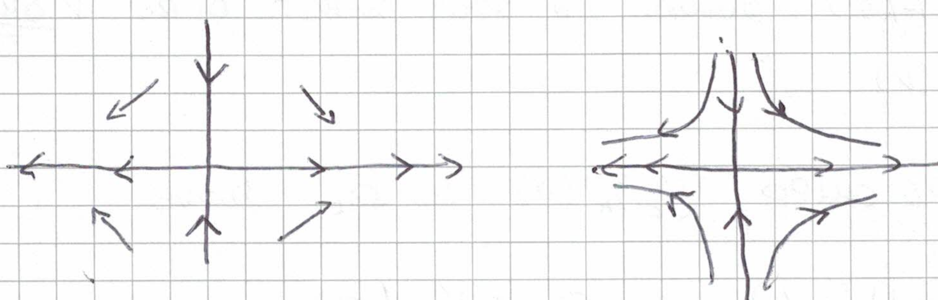


COSA INFORMALE: SCAMBIO UN PUNTO CON INDICE 2 CON 2 PUNTI DI INDICE 1



$\tilde{v}: S^1 \to S^1$ $\quad$ è $A(p)$ è in $m=2$ $\quad \deg A = (-1)^{1+2} = -1$
$\quad p \to -p$

$z \to \bar{z}^m$ HA INDICE $-m$ IN 0, PER QUESTO $z \to \bar{z}$ HA INDICE -1



PERCHÉ È UNA RIFLESSIONE E HA GRADO -1, IL GRADO È MOLTIPLICATIVO.

DEF Sia $\varphi : A \to B$ DIFFEOMORFISMO TRA APERTI DI VARIETÀ E SIA $V \in \mathfrak{X}(A)$

DEFINISCO $\varphi^*(V) \in \mathfrak{X}(B)$ COME SEGUE

$$\varphi^*(V)_q = d\varphi_{\varphi^{-1}(q)}\left(V_{\varphi^{-1}(q)}\right) \quad \text{CIOÈ}$$

$$\varphi^*(V) = d\varphi \circ V \circ \varphi^{-1}$$

OSS I CAMPI VETTORIALI SONO PIÙ DIFFICILI DA SPOSTARE A DIFFERENZA DEI DIFFERENZIALI, SERVE UN DIFFEOMORFISMO

PROP $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTI $0 \in \Omega \cap \Omega'$ e $\varphi : \Omega \to \Omega'$ DIFFEO CON $\varphi(0) = 0$, $V \in \mathfrak{X}(\Omega)$ CON 0 ISOLATO DI V

ALLORA $i_0(V) = i_0(\varphi_*(V))$

DIM GLI ZERI ISOLATI DI $\varphi_*(V)$ SONO GLI ZERI DI V PERCHÉ IL TRASPORTO AVVIENE PER DIFFEOMORFISMO CHE FISSA LO ZERO $\Rightarrow$ 0 È ZERO DI $\varphi_*(V)$. SAPPIAMO CHE ESISTE

$H : \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$

$$H(\cdot, 0) = \varphi$$
$$H(\cdot, 1) = Id \text{ o RIFLESSIONE}$$
$$H(0,t) = 0 \quad \forall t \in [0,1]$$ ~~PER PROP.~~

(VEDI PROP. INIZIO LEZIONE).

OSS MAI DIRE V ISOTOPO A QUALCOSA, PERCHÉ V NON È DIFFEO, QUINDI HA SOLO SENSO DIRE V OMOTOPO A $\varphi_*(V)$

$\forall t$ DEFINISCO IL CAMPO $(\varphi_t)_*(V)$ SU Ω_t DOVE

$$(\varphi_t) = H(\cdot, t) \quad \text{E} \quad \Omega_t = \varphi_t(\Omega)$$

L'ORIGINE È UNO ZERO ISOLATO DI $(\varphi_t)_*(V)$ PER COMPATTEZZA DI $[0,1]$

∃ UNA PALLA CENTRATA IN 0 TALE CHE $\forall t$ 0 È ZERO ISOLATO PER $(\varphi_t)_*(V)$ CIOÈ ∃ ε > 0 TALE CHE

$\mathcal{B}(0,\varepsilon) \subseteq \Omega_t \ \forall t \in [0,1]$, $0 \in \mathcal{B}(0,\varepsilon)$ È L'UNICO ZERO DI $(\varphi_t)_*(V)$ SU $\mathcal{B}(0,\varepsilon)$.

PONGO $\bar{V}_t = \dfrac{(\varphi_t)_*(V)}{\|(\varphi_t)_*(V)\|} : \partial B \longrightarrow S^{n-1}$

E HO UN'OMOTOPIA $\partial(B(0,\varepsilon)) \times [0,1] \longrightarrow S^{n-1}$

$$K(q,t) = \bar{V}_t(q)$$

E DUNQUE $\underset{\substack{\| \\ i_0(\varphi_*(V))}}{\deg \bar{V}_0} = \deg \bar{V}_1 \Rightarrow i_0(\varphi_*(V)) = \begin{cases} i_0(\mathrm{Id}(V)) = i_0(V) \\ i_0(R_*(V)) \end{cases}$

A SECONDA SE φ PRESERVA O MENO L'ORIENTAZIONE.

NEL PRIMO CASO HO LA TESI, NEL SECONDO

$i_0(R_*(V))$ $\quad R_*(V) = dR \circ V \circ R^{-1} \overset{\text{POICHÉ } R \text{ È LINEARE}}{=}$

$= R \circ V \circ R^{-1}$

INOLTRE POICHÉ R È UN'ISOMETRIA IL NORMALIZZATO DI $R_*(V)$ È $\overline{R_*(V)} = R \circ \bar{V} \circ R^{-1}$

$$\Rightarrow i_0(R_*(V)) = \deg\left(\overline{R_* V}\big|_{\partial B(0,\varepsilon)}\right) =$$

$$= \deg\left(R \circ \bar{V} \circ R^{-1}\big|_{\partial B(0,\varepsilon)}\right) \overset{\Downarrow}{=}$$

POICHÉ IL GRADO È MOLTIPLICATIVO E IL GRADO DI UNA RIFLESSIONE È -1

$$= \deg\left(\bar{V}\big|_{\partial B(0,\varepsilon)}\right) = i_0(V)$$

OSS L'INDICE NON DIPENDE DALL'ORIENTAZIONE IMPOSTA POICHÉ I CONTI SI FANNO LOCALMENTE.

DEF M m-VARIETÀ $V \in \mathfrak{X}(M)$ $p \in M$ ZERO ISOLATO DI V

ALLORA $i_p(V) = i_0(\varphi_*(V))$ dove $\varphi : U \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ È UNA CARTA TALE CHE $\varphi(p) = 0$

OSS È UNA DEFINIZIONE BEN POSTA, CIOÈ NON DIPENDE DA φ, PERCHÉ PER QUANTO APPENA DIMOSTRATO SE $\psi : U \to \Omega'$ È UN'ALTRA CARTA

$\psi_*(V) = (\psi \circ \varphi^{-1})_*(\varphi_*(V))$ HA LO STESSO INDICE DI $\varphi_*(V)$ IN QUANTO $\psi \circ \varphi^{-1} : \Omega \to \Omega'$ È UN DIFFEO.

OSS HO IN REALTÀ ANCHE MOSTRATO $(fg)_* = f_* g_*$

LEMMA $M \subseteq \mathbb{R}^N$ VARIETÀ E $V \in \mathfrak{X}(V)$ CON $V(p) = 0$

ALLORA $dV_p(T_p(M)) \subseteq T_p(M)$

(NON È OVVIO PERCHÉ A PRIORI $V : M \to \mathbb{R}^N$)

DIM IN COORDINATE $u_1, \dots, u_m$ VICINO A p

$V = \sum_{i=1}^{m} a_i X_{u_i}$ DOVE X_{u_i} SONO I FRAME INDOTTI DALLA PARAMETRIZZAZIONE

$$\forall i \quad dV(X_{u_i}) = \frac{\partial \overset{\substack{V \text{ composto} \\ \text{in coord.}}}{V}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_i}(a_j X_{u_j}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial u_i} \cdot X_{u_j}}_{\in\, T_pM} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_j X_{u_i u_j}}_{\text{NON APPARTIENE A } T_pM}$$

MA SE p È TC $V(p) = 0 \Rightarrow a_j = 0 \ \forall j$

$$\Rightarrow dV_p(X_{u_i}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial u_i}(p) \cdot X_{u_j}(p) \in T_p(M)$$

E LA TESI SEGUE PERCHÉ I $X_{u_j}(p)$ GENERANO $T_p(M)$.

DEF p È UNO ZERO <u>NON</u> DEGENERE DI V

SE $dV_p : T_pM \to T_pM$ È UN ISOMORFISMO, IN TAL CASO POSSO ANCHE DIRE, CHE POICHÉ $\partial V_p : T_pM \to \mathbb{R}^n$ È INIETTIVO

$\Rightarrow$ V È INIETTIVO SU UN INTORNO DI p $\Rightarrow$ p È UNO ZERO ISOLATO.

PROP $p \in M$ ZERO NON DEGENERE PER $V \in \mathfrak{X}(M)$ ALLORA

$i_p(V) = \pm 1$ A SECONDA CHE $\det dV_p : T_pM \to T_pM$

SIA POSITIVO O NEGATIVO

OSS PREFERISCO PARLARE DI det DATO CHE IL GRADO NON "VEDE" L'ORIENTAZIONE, QUINDI SAREBBE SUPERFLUO METTERLA.

DIM SIA $\varphi : U \to \Omega$ È UNA CARTA INTORNO A p

$$i_p(V) = i_0(\varphi_*(V))$$

$$d(\varphi_*(V))_0 = \underbrace{d\varphi_p \circ dV_p \circ d\varphi_0^{-1}}_{\text{SONO UNA L'INVERSA DELL'ALTRA.}} \Rightarrow \det(dV_p) = \det d(\varphi_*(V))_0$$

QUINDI PER LA DIM POSSO ASSUMERE $M = \Omega$ APERTO DI $\mathbb{R}^n$ E $p = 0$.

$V : \Omega \to \mathbb{R}^n$ HA DIFFERENZIALE CHE È UN ISOMORFISMO IN 0, PER CUI, A MENO DI RESTRINGERE Ω, V È UN EMBEDDING ED È PERCIÒ ISOTOPO ALL'IDENTITÀ SE $\det(dV_0) > 0$ A R SE $\det(dV_0) < 0$

ESATTAMENTE COME PRIMA CIÒ IMPLICA CHE

$$i_0(V) = \begin{cases} +1 & \text{se } \det(dV_0) > 0 \\ -1 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$ IN QUANTO DALL'ISOTOPIA SOPRA DEDUCO UN'OMOTOPIA TRA

$\bar{V}$ e $W(x) = x$ (CAMPO IDENTICO) se $\det(dV_0) > 0$

con $W(x) = R(x)$ (CAMPO DI RIFLESSIONE) se $\det(V_0) < 0$

LEZIONE 13/12

LEMMA DI HOPF

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^m$ m-varietà con bordo compatta
(cioè la chiusura di un aperto relativamente compatto perché $\boxed{\dim M = \dim \mathbb{R}^m}$)

Sia $v \in \mathfrak{X}(M)$ con zeri isolati e uscente da M,
cioè $v \in T_p(M) \setminus C_p(M)$ $\forall p \in \partial M$
(in particolare $v(p)=0$ $\forall p \in \partial M$ perché lo 0 ~~non~~ sta in $C_p M$)

Allora $\sum_{v(p)=0} i_p(v) = \deg N$ dove $N : \partial M \longrightarrow S^{m-1}$ è la normale uscente

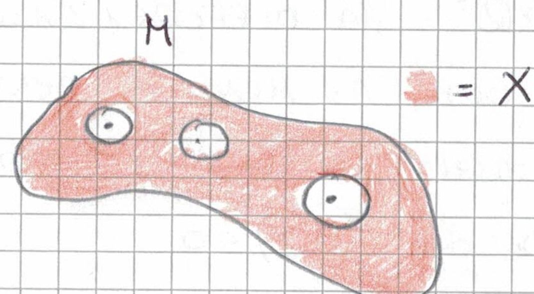
Dim: Gli zeri di V sono un discreto (perché sono isolati) in un compatto ⇒ sono in numero finito.

$\exists \varepsilon > 0$ tc $\overline{B(p,\varepsilon)}$ al variare di p tra gli zeri

sono a 2 a 2 disgiunte e contenute in int M

Sia $X = M \setminus \bigcup_{v(p)=0} B(p,\varepsilon)$ ← stavolta aperte

⇒ X è una m-varietà con bordo orientata da $\mathbb{R}^m$



Su X è ben definita $\bar{v} : X \longrightarrow S^{m-1}$ avendo tolto gli zeri.
Mentre ∂M eredita la stessa orientazione sia da M che da X dunque

$$0 = \deg(\bar{V}|_{\partial X}) = \deg(\bar{V}|_{\partial V}) - \sum_{v(p)=0} \deg(\bar{V}|_{\partial B(p,\varepsilon)}) =$$

$$= \deg(\bar{V}|_{\partial M}) - \sum_{v(p)} i_p(v)$$

PER CONCLUDERE RESTA DA VEDERE CHE

$$\deg\left(\bar{V}|_{\partial M}\right) = \deg N$$

MA SONO DATO CHE $\bar{V}$ È USCENTE e N È IL CAMPO UNITARIO USCENTE. E QUINDI BASTA VEDERE CHE SONO OMOTOPE.

$$H(q,t) = \frac{t\bar{V}(q) + (1-t)N(q)}{\| t\bar{V}(q) + (1-t)N(q)\|}$$ → COMB CONVESSA DI VETTORI USCENTI È SEMPRE USCENTE E $\neq 0$.

⇒ H È BEN DEFINITA E QUINDI LA TESI.

FIBRATO NORMALE

DEF SIA M UNA VARIETÀ $M \subseteq \mathbb{R}^N$ SENZA BORDO

IL FIBRATO NORMALE DI M È

$$N(M) = \{(p,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mid p \in M,\ v \in N_p(M) = (T_pM)^\perp\}$$
$$\subseteq \mathbb{R}^{2N}$$

TEOREMA $N(M)$ È UNA N-VARIETÀ.

DIM SIA $k = N - m$ $m = \dim M$ k = CODIMENSIONE DI M IN $\mathbb{R}^N$

SIA $U \subseteq M$ APERTO

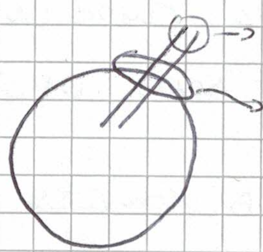
$$N(U) = (U \times \mathbb{R}^N) \cap N(M) \text{ È APERTO IN } N(M) \subseteq M \times \mathbb{R}^N \subseteq \mathbb{R}^{2N}$$
$$\| \quad \{(p,v) \in N(M) \mid p \in U\}$$

DUNQUE BASTA MOSTRARE CHE SE $\varphi : \Omega \to U$ È UNA PARAMETRIZZAZIONE PER M E $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$

⇒ $N(U)$ È DIFFEO AD UN APERTO DI $\mathbb{R}^N$

POSSO COSTRUIRE UN FRAME TANGENTE ORTONORMALE 167

$V_1, \dots V_M : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ COME AL SOLITO BASTA ORTONORMALIZZARE IL FRAME ASSOCIATO A φ



$\to$ UNIONE DI QUESTE SFERE IN $\mathbb{R}^{2N}$ È IL FIBRATO

PARAMETRIZZO IL T_q E CERCO DI PORTARLO COERENTEMENTE (C^∞) PER AVERE UN CAMPO ORTONORMALE CHE SI MUOVE IN MODO C^∞.

DATO $p \in U$ COMPLETO $V_1(P), \dots V_M(P)$ A BASE ORTONORMALE $V_1(P), \dots, V_M(P), W_1, \dots W_K$ DI $\mathbb{R}^N$

QUINDI $W_1, \dots, W_K$ È BASE ORTONORMALE DI $N_p(M)$

POICHÉ $q \longmapsto \det\left(V_1(q), \dots, V_M(q), W_1, \dots W_K\right)$ È CONTINUA, A MENO DI RESTRINGERE U, $V_1(q), \dots, V_M(q)$ $W_1 \dots W_K$ È BASE DI $\mathbb{R}^N$ $\forall q \in U$

ORA CON GRAM-SCHMIDT ORTONORMALIZZO QUESTA BASE OTTENENDO $V_1(q), \dots, V_M(q), \underbrace{W_1(q), \dots W_K(q)}$

DIVENTANO DIPENDENTI DA q AVENDO USATO GRAM-SCHMIDT.

HO COSÌ OTTENUTO UN FRAME, DEL NORMALE, ORTONORMALE E C^∞ $W_1, \dots, W_K : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ IN MODO TALE CHE $W_1(q), \dots, W_K(q)$ È BASE ORTONORMALE DI $N_q(M)$

ORA PONGO $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^K \longrightarrow N(U)$

$$\psi(x, a_1, \dots, a_K) = (\overset{q}{\overset{\shortparallel}{\varphi(x)}}, a_1 W_1(q) + \dots + a_K W_K(q))$$

$\varphi(x) \in U$

È C^∞ PERCHÉ $\varphi \in C^\infty$ E $W_i(q)$ DIPENDONO IN MODO C^∞ DA q.

E LA BIGETTIVITÀ DIPENDE DALLE COSTRUZIONI FATTE

INFATTI φ È BIGETTIVA, E $w_i(q)$ SONO UNA BASE

INOLTRE ~~OPPURE~~ ψ^{-1} $N(U) \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^k$

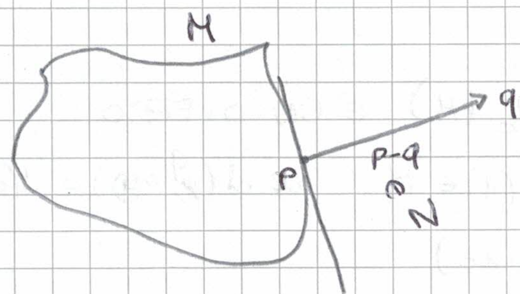
$(q, v) \longrightarrow (\varphi^{-1}(q), \langle v, w_1(q)\rangle, \dots, \langle v, w_k(q)\rangle)$ È C^∞

$\Omega \times \mathbb{R}^k$ È UN APERTO DI $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^N$ CIÒ CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE.

LEMMA $M \subseteq \mathbb{R}^N$ VARIETÀ, $q \in \mathbb{R}^N$ SE $p \in M$ TALE CHE

$$d(p, q) = d(M, q) = \inf_{p' \in M} \{ d(p', q) \mid p \in M \}$$

ALLORA $q - p \in N_p(M)$



OSS IN REALTÀ OGNI PUNTO CRITICO DELLA FUNZIONE DISTANZA HA QUESTA PROP.

DIM p ESSENDO IL MINIMO È UN PUNTO CRITICO DI

$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \|x - q\|^2 = \langle x - q, x - q \rangle$

$df_p(v) = 2\langle v, p - q \rangle$ CHE DEVE ESSERE NULLO $\forall v \in T_pM$

PERCHÉ $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R})$ È NULLO PERCHÉ SE

$v \longrightarrow df_p(v)$ $\quad$ p È IL MINIMO

PER CUI $p - q \in (T_pM)^\perp = N_p(M)$

$\forall \varepsilon > 0$ SIA $N_\varepsilon(M) = \{ (p,v) \in N(M) \mid \|v\| < \varepsilon \}$ APERTO DI $N(M)$ 169

$M \subseteq U_\varepsilon(M) = \{ q \in \mathbb{R}^N \mid d(q,M) < \varepsilon \} \subseteq \mathbb{R}^N$ APERTO

$\downarrow$

INTORNO TUBOLARE

SIA $\Theta : N_\varepsilon(M) \longrightarrow U_\varepsilon(M)$ $\quad \Theta(p,v) = p+v$ È BEN DEFINITA

POICHÉ $d(p+v, M) \leq$

$\leq d(p,M) + d(v,M) \leq$

$= 0 + \|v\| < \varepsilon$

TEOREMA SIA M COMPATTA SENZA BORDO, ALLORA $\exists \varepsilon > 0$ TALE CHE

1. $\Theta : N_\varepsilon(M) \longrightarrow U_\varepsilon(M)$ È UN DIFFEO
2. $\forall q \in U_\varepsilon M \ \exists! \ r(q) \in M$ T.C. $d(q, r(q)) = d(q,M)$ (r È UNA RETRAZIONE)
3. $r : U_\varepsilon \longrightarrow M \in C^\infty$
4. $\overline{U_{\varepsilon/2}(M)}$ È UNA N-VARIETÀ CON BORDO LA CUI NORMALE ESTERNA È $\dfrac{-r(q)+q}{\|-r(q)+q\|}$

A POSTO DI $\varepsilon/2$ VA BENE $0 < \varepsilon' < \varepsilon$

DIM ① Θ È UN DIFFEO LOCALE $\forall (p,0) \in N(M)$

INFATTI SE $i : M \longrightarrow M \times \{0\} \subseteq N_\varepsilon(M)$

E $j : N_{(p,0)}(M) \longrightarrow \{p\} \times N_p(M) \subseteq N(M)$

SONO LE INCLUSIONI OVVIE.

$\Theta \circ i(q) = \Theta(q,0) = q \qquad d(\Theta \circ i)_p = Id|_{T_p(M)}$

$\Theta \circ j(v) = \Theta(p,v) = p+v$

$Img\, d\Theta_{(p,0)} \supseteq Img\, d(\Theta \circ i)_p = Img\left(Id|_{T_pM} \right) = T_p(M)$

$\Rightarrow \operatorname{Img} d\theta_{(p,0)} \supseteq \operatorname{Img} d(\theta \circ J)_0 = \operatorname{Img}\left(d\, Id|_{N_p(M)}\right) = N_p(M)$ 170

DUNQUE $\operatorname{Img} d\theta_{(p,0)} \supseteq T_pM \oplus N_p(M) = \mathbb{R}^N$

PER CUI $d\theta_{(p,0)}$ È INVERTIBILE PER MOTIVI DIMENSIONALI

PER COMPATTEZZA DI M PIÙ $d\theta_{(p,0)}$ INVERTIBILE $\forall p \in M$

$\Rightarrow d\theta_{(p,v)}$ È INVERTIBILE $\forall (p,v) \in N_\varepsilon(M)$ PURCHÉ ε SIA PICCOLO

DIMOSTRIAMO CHE A MENO DI RESTRINGERE ULTERIORMENTE ε

$\Theta : N_\varepsilon(M) \longrightarrow U_\varepsilon(M)$ È UN DIFFEO. AVENDO GIÀ MOSTRATO CHE È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE, BASTA VEDERE CHE È BIGETTIVO.

<u>SURGETTIVITÀ</u> SE $q \in U_\varepsilon(M)$ PER COMPATTEZZA DI M $\exists\, p \in M$ DI MINIMA DISTANZA DA q, DUNQUE $\|q-p\| = d(p,q) < \varepsilon$

PER IL LEMMA VISTO PRIMA $q - p = v \in N_p(M)$

DUNQUE $(p,v) = (p, q-p) \in N_\varepsilon(M)$ e $\Theta(p,v) = q$.

<u>INIETTIVITÀ</u> PER ASSURDO SE $\nexists\, \varepsilon > 0$ t.c. $\Theta|_{N_\varepsilon(M)}$ SIA INIETTIVA

$\Rightarrow$ ESISTONO SUCCESSIONI $(p_n, v_n), (p_n', v_n') \in N_{\frac{1}{n}}(M)$ e $\Theta(p_n, v_n) = \Theta(p_n', v_n')$ PER COMPATTEZZA DI M

POSSO SUPPORRE (A MENO DI PRENDERE UNA SOTTOSUCCESSIONE)

$p_n \longrightarrow \bar{p} \in M$ e $p_n' \longrightarrow \bar{p}' \in M$ INOLTRE

$\|v_n\| < \frac{1}{n}$ e $\|v_n'\| < \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $v_n \longrightarrow 0$ e $v_n' \longrightarrow 0$

$\Rightarrow (p_n, v_n) \longrightarrow (\bar{p}, 0)$ e $(p_n', v_n') \longrightarrow (\bar{p}', 0)$

$\Rightarrow \quad \overline{p} = \lim_{n\to\infty} \Theta(p_n, v_n) = \lim_{n\to\infty} \Theta(p_n', v_n') = \overline{p}'$

DUNQUE $\overline{p} = \overline{p}'$ DUNQUE DEFINITIVAMENTE

$(\vec{p}_n, v_n)$ e (p_n', v_n') STANNO NELLO STESSO INTORNO

DI $(\overline{p}, 0) = (\overline{p}', 0)$, MA PER LOCALE INIETTIVITÀ

DI Θ SUI PUNTI $(\overline{p}, 0)$ ESSENDO $\Theta(p_n, v_n) = \Theta(p_n', v_n')$

$\Rightarrow (p_n, v_n) = (p_n', v_n')$ DEFINITIVAMENTE E CHE

CONTRADDICE L'IPOTESI ASSURDA

LEZIONE 14/12

CONTINUO LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI IONI

(1) Θ È UN DIFFEO DIMOSTRATA

(2) $\forall q \in U_\varepsilon M \quad \exists! \ r(q) \in M$ tc $d(q, r(q)) = d(q, M)$

DATO $q \in U_\varepsilon M$ $p \in M$ È TALE $d(p, q) = d(p, M)$

$\Rightarrow$ PER IL LEMMA $q - p \in N_p(M)$ e $\underset{d(q,M)}{\overset{\shortparallel}{\|q-p\|}} < \varepsilon$

DUNQUE $(p, q-p) \in N_\varepsilon M$ E ANCHE $\Theta(p, q-p) = q$

DUNQUE $(p, q-p) = \Theta^{-1}(q)$ PERCHÉ Θ È INVERTIBILE

$\Rightarrow \quad p = \pi_M(\Theta^{-1}(q))$ DOVE $\pi_M : N(M) \to M$

$(p, v) \longrightarrow p$

$\Rightarrow p$ È L'UNICO PUNTO DI MINIMA DISTANZA DA q

E $r : U_\varepsilon \to M$ $\quad r = \pi_M \circ \Theta^{-1}$ È C^∞

PERCHÈ COMPOSIZIONE DI COSE C^∞.

E QUINDI DIMOSTRA (3)

DM 4

SE $0 < R < \varepsilon$ $\overline{U_R(M)} = \{q \in U_\varepsilon M \mid d(q, M) \leq R\} =$

$$= \{q \in U_\varepsilon M \mid \|q - r(q)\|^2 \leq R^2\}$$

PER MOSTRARE CHE $\overline{U_R(M)}$ È UNA VARIETÀ CON BORDO BASTA MOSTRARE CHE R^2 È UN VALORE REGOLARE PER

$$f : U_\varepsilon(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$q \longmapsto \|q - r(q)\|^2 = \langle q - r(q), q - r(q) \rangle$$

E IN QUEL CASO $\overline{U_R(M)} = f^{-1}((-\infty, R^2])$

DATO $q \in f^{-1}(R^2)$ $df_q(v) = 2 \langle \underbrace{q - r(q)}_{\in N_{r(q)}(M)}, \overset{Id(v)}{v} - \underbrace{dr_q(v)}_{\in T_{r(q)}(M)} \rangle =$

PERCHÉ $r(q)$ È A VALORI IN M $\Rightarrow dr_{(q)}$ È A VALORI IN $T_{r(q)} M$.

$= 2 \langle q - r(q), v \rangle$ $\neq 0$ PERCHÈ $q \notin M$

$\Rightarrow df_q : \mathbb{R}^N = T_q(\underbrace{U_\varepsilon(M)}_{\text{APERTO DI } \mathbb{R}^N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ È SURIETTIVO PERCHÈ È UN PRODOTTO SCALARE PER UN FUNZIONALE MAI NULLO

E $\ker df_q = (q - r(q))^\perp$

QUESTO MOSTRA CHE R^2 È UN VALORE REGOLARE PER f E QUINDI $\overline{U_R(M)}$ È UNA VARIETÀ CON BORDO

E $T_q(\partial \overline{U_R(M)}) = \ker df_q = (\langle q - r(q) \rangle)^\perp \Rightarrow$ UN NORMALE USCENTE È $\dfrac{q - r(q)}{\|q - r(q)\|}$.

TEOREMA DI POINCARÉ - HOPF

SIA M UNA VARIETÀ SENZA BORDO COMPATTA, $M \subseteq \mathbb{R}^N$

SIA $V \in \mathcal{T}(M)$ CON ZERI ISOLATI ALLORA

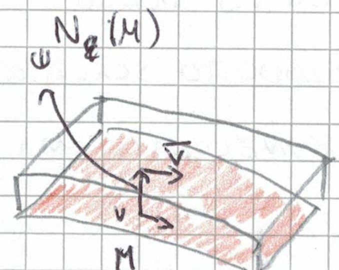
$$\sum_{V(p)=0} i_p(V) = \deg N \quad \text{dove } N : \partial \overline{U_\varepsilon(M)} \longrightarrow S^{N-1}$$

CIOÈ NON DIPENDE DA V.

DIM LO DIMOSTRIAMO ASSUMENDO CHE GLI ZERI SIANO NON DEGENERI PER 2 MOTIVI:

1) SE HO UNO ZERO DEGENERE, PER PERTURBO V TROVO DEGLI ZERI NON DEGENERI E UN V NON TROPPO DIVERSO
2) LA DIMOSTRAZIONE CAMBIA UN PO' MA SOLO IN UN PUNTO.

DATO $V \in \mathcal{T}(M)$ COSTRUIAMO $\overline{V} \in \mathcal{T}(\overline{U_\varepsilon(M)})$ COSÌ:



CIOÈ COPIO V E POI GLI SOMMO UNA COMPONENTE NORMALE PERCHÉ LOCALMENTE LO VOGLIO TANGENTE.

$\overline{V}(q) = V(r(q)) + q - r(q)$ è C^∞

Se $q \in M$ $r(q) = q \Rightarrow \overline{V}(q) = V(q)$

Se $q \in \overline{U_\varepsilon M}$ è uno zero di $\overline{V}$ $\quad 0 = \overline{V}(q) = V(r(q)) + q - r(q)$

$V(r(q)) \in T_{r(q)}M$ e $q - r(q) \in N_{r(q)}M \Rightarrow$ T e N SONO IN SOMMA DIRETTA $\Rightarrow V(r(q)) = 0$ e $q - r(q) = 0$ $\quad q \in M \Rightarrow$

$\Downarrow$ $\quad\Rightarrow$

$r(q)$ è uno zero per V $\quad$ MA $r(q) = q \Rightarrow q$ è zero per V.

QUINDI ZERI DI V E DI $\bar{V}$ COINCIDONO.

INOLTRE $\bar{V}$ È USCENTE DA $\overline{U_\varepsilon(M)}$ IN QUANTO

$\forall q \in \partial U_\varepsilon M$

$$\langle \bar{V}(q), N(q)\rangle = \langle \underset{\in\, T_{\pi(q)}M}{V(\pi(q))} + q - \pi(q), \frac{q-\pi(q)}{\|q-\pi(q)\|}\rangle =$$

$= \|q-\pi(q)\| > 0$ PERCHÉ $q \notin M$ E QUINDI È USCENTE.

PERCHÉ PUNTA DALLA STESSA PARTE DI $N(q)$

PERCIÒ PER IL LEMMA DI HOPF

$$\sum_{\bar{V}(p)=0} i_p(\bar{V}) = \deg N = \sum_{V(p)=0} i_p(\bar{V})$$

SE $\forall p$ ZERO DI $\bar{V}$ MOSTRO CHE $i_p(\bar{V}) = i_p(V)$ HO FINITO.

(QUI FA COMODO LAVORARE CON ZERI NON DEGENERI).

p NON DEGENERE $\Rightarrow dV_p : T_pM \to T_pM$ $\det df_p > 0$

POICHÉ $\bar{V}|_M = V$ $\quad d\bar{V}_p|_{T_pM} = dV_p$

SIA $w \in N_pM$ E $\gamma(t) = p + tw$

$$\bar{V}(\gamma(t)) = V(p+tw) + p + tw - \pi(p+tw)$$

(NOTA $\pi(p+tw) = p \ \forall t$)

$$d\bar{V}_p(w) = \frac{d}{dt}\bar{V}(\gamma(t))_0 = \frac{d}{dt}\bar{V}(p+tw)_0 =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(V(p+tw) + tw\Big)_0 = w$$

PERCIÒ RISPETTO AD UN'UNIONE DI BASI DI T_pM E N_pM

$$d\overline{V}_p = \left(\begin{array}{c|c} dv_p & 0 \\ \hline 0 & I_d \end{array}\right)$$

$$i_p(\overline{V}) = \operatorname{sgn}\left(\det\left(\begin{array}{c|c} dv_p & 0 \\ \hline 0 & I_d \end{array}\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(\det\left(dv_p\right)\right) = i_p(v)$$