TEORIA PER ORALE

II PARTE DA PAG 35 A 66 COMPRESE

IV PARTE DA PAG 123 IN POI

DEF Se $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ (X QUALSIASI) $f: X \to Y$ è C^∞ SE $\forall p \in X$, $\exists U$ APERTO, $p \in U$ e $\exists F: U \to \mathbb{R}^m$ C^∞ t.c

$$F|_{U\cap X} = f|_{U \cap X}$$

OSS 1 f è $C^\infty \Rightarrow f$ è LOCALMENTE CONTINUA $\Rightarrow f$ è CONTINUA

OSS 2 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ C^∞

$\Rightarrow g \circ f: X \to Z$ è C^∞

PER VERIFICARLO SCELGO $\forall p \in X$ UN APERTO $I_{f(p)} \subseteq Y$ tc $\exists G: I_{f(p)} \mapsto Z$ C^∞ $G|_{I_{f(p)}\cap Y} = g|_{I_{f(p)}\cap Y}$

POICHÈ PER OSS 1 f È CONTINUA $f^{-1}(I_{f(p)})$ È UN APERTO ~~...~~ CHE CONTIENE P, CERCO U APERTO, ~~$\subseteq f^{-1}(I_{f(p)})$~~ tc $\exists F: U \to Y$ C^∞ e $F|_{U\cap X} = f|_{U\cap X}$, $U \cap f^{-1}(I_{f(p)})$ È L'APERTO CERCATO PER $g \circ f$

OSS 3 $Id_X: X \to X$ è C^∞

DEF DIFFERENZIALE IN INSIEMI APERTI:

SIANO $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTI, $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ C^∞

ALLORA $\forall p \in \Omega_1$ $\exists!$ APPLICAZIONE LINEARE $df_p: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tc $f(p+v) = f(p) + df_p(v) + o(\|v\|)$ $\forall v$ tc $p+v \in \Omega_1$

PROPRIETÀ ~~PROPOSIZIONE~~ DEL DIFFERENZIALE SUGLI APERTI

① $df_p(v) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(p+tv) - f(p)}{t}$

② Se $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ $d\gamma_0(1) = \gamma'(0)$

(3) $f:\Omega_1 \to \Omega_2 \quad g:\Omega_2 \to \Omega_3 \quad C^\infty$

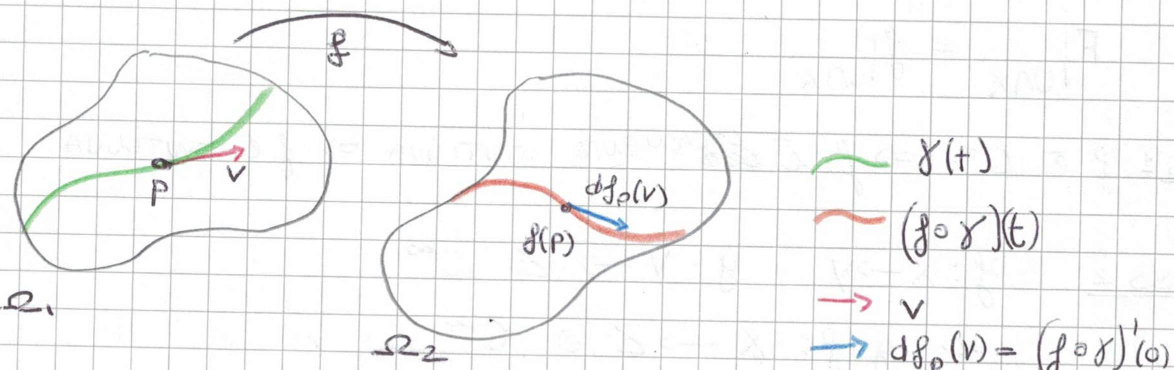
$\forall p \in \Omega_1 \quad d(g\circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$

(4) $f:\Omega_1 \to \Omega_2 \quad \gamma:(-\varepsilon,\varepsilon) \to \Omega_1$ t.c. $\gamma'(0)=v$ e $\gamma(0)=p$

ALLORA $df_p(v) = (f\circ\gamma)'(0)$

DIM $(f\circ\gamma)'(0) = d(f\circ\gamma)_0(1) = df_{\gamma(0)} \circ \gamma_0'(1) = df_p \circ \gamma'(0) = df_p(v)$

IDEA



(5) $df_p = Jf_p = (Jf_p)_{ij} = \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}$ (USARE CON CAUTELA!)

OSS LA (4) È BEN DEFINITA ANCHE SE $\gamma:[0,\varepsilon) \to \mathbb{R}^m$, INFATTI SE È C^∞ $\exists\, \varepsilon'$ t.c. SI POSSA ESTENDERE A $(-\varepsilon',\varepsilon)$ e γ' e $(f\circ\gamma)'$ SONO DERIVATE DESTRE.

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE SU APERTI

$f:\Omega_1 \to \Omega_2 \in C^\infty$ TRA APERTI DI $\mathbb{R}^n$, SE $p \in \Omega_1$ t.c. $df_p:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ È INVERTIBILE $\Rightarrow \exists\, U_1 \subseteq \Omega_2$ e $U_2 \subseteq \Omega_2$ APERTI t.c. $f|_{U_1}: U_1 \to U_2$ È UN DIFFEOMORFISMO

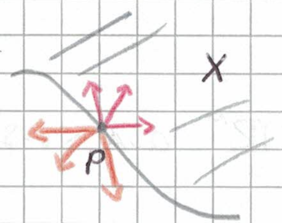
RICORDA: UN DIFFEOMORFISMO È UNA FUNZIONE C^∞ CON INVERSA C^∞

CONO E SPAZIO TANGENTE.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ QUALSIASI, $p \in X$

DEF CONO TG A X IN p $C_p(X) = \{ v \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, \gamma:[0,\varepsilon) \to X \;\; \gamma(0)=p \;\; \gamma'(0)=v \}$ = INSIEME DELLE DIREZIONI AMMISSIBILI

DEF SPAZIO TG A X IN p $\quad T_p(X) = \text{Span}(C_p(X))$



$v \in C_p(X)$

$v \notin C_p(X)$ MA $\in T_p(X)$

ESEMPI 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $\Rightarrow C_p(X) = T_p(X) = \mathbb{R}^n$

INFATTI $\forall p \in \Omega$ $\exists$ UNA PALLA DI CENTRO p E RAGGIO ε TC

$\forall v \in \mathbb{R}^n$ $\quad \gamma(t) = p + tv \in \Omega \quad t \in [0, \varepsilon) \Rightarrow C_p(X) = \mathbb{R}^n$

2) Sia $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_p(X) = H^n \text{ e } T_p(X) = \mathbb{R}^n & \text{se } p \in \partial H^n \\ C_p(X) = T_p(X) = \mathbb{R}^n & \text{se } p \in H^n \setminus \partial H^n \end{cases}$$

3) Se $X = p + V$ SPAZIO AFFINE CON GIACITURA V

$\Rightarrow C_p(X) = T_p(X) = V$

DIM $\quad \forall v \in V \quad \gamma : p + tv \quad \gamma : [0, +\infty) \longrightarrow X$ GIACE SU X

$\gamma(0) = p \quad \gamma'(0) = v$

QUINDI $\quad V \subseteq C_p(X)$

VICEVERSA SE $v \in C_p(X)$ $\exists\, \gamma : [0, \varepsilon) \to X$ TC $\gamma(t) \in X$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \boxed{\frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}} = v \in V \Rightarrow C_p(X) \subseteq V$$

V PERCHÈ PER DEFINIZIONE DI SPAZIO AFFINE È UN CHIUSO QUINDI ANCHE IL SUO LIMITE $\in V$

$\Rightarrow C_p(X) = V \Rightarrow T_p(X) = V$ PER DEF DI SPAZIO VETTORIALE.

TORNIAMO QUINDI AL PROBLEMA DI DEFINIRE IL DIFFERENZIALE SU X QUALSIASI

DEF - PROP $f: X \to Y$ C^∞ $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ QUALSIASI

SIA $v \in C_p(X)$, SCELGO ARBITRARIAMENTE $\gamma: [0,\varepsilon) \to X$
$\gamma(0) = p$ $\gamma'(0) = v$ E $F: U \to \mathbb{R}^n$ $U \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO
F è C^∞ t.c. $F|_{U\cap X} = f|_{U\cap X}$ ESTENSIONE LOC DI f.

$$\Rightarrow dF_p(v) = (f\circ\gamma)'(0)$$

OSS SE VALE L'UGUAGLIANZA È UNA BUONA DEFINIZIONE PERCHÉ NON DIPENDE NÈ DALLA SCELTA DI γ NÈ DA QUELLA DI F.

DIM CALCOLIAMO $dF_p(v) = (F\circ\gamma)'(0) = (f\circ\gamma)'(0)$

QUESTA È VERA PERCHÉ F è DEFINITO SU UN APERTO $\gamma(0)=p$ e $\gamma'(0)=v$

RICORDANDO CHE γ È A VALORI IN X LÌ F e f COINCIDONO

DUNQUE NÈ $dF_p(v)$ NÈ $(f\circ\gamma)'(0)$ DIPENDONO DALLA SCELTA DI γ.

OSS 1 $(f\circ\gamma)'(0) \in C_{f(p)}(Y)$ PER DEFINIZIONE QUINDI È SENSATO DEFINIRE $df_p: C_p(X) \to C_{f(p)}(Y)$ COME $df_p(v) = dF_p(v) = (f\circ\gamma)'(0)$

OSS 2 $df_p = dF_p|_{C_p(X)}$ DA DEFINIZIONE, QUINDI ESSENDO UNA RESTRIZIONE DI UN'APPLICAZIONE LINEARE SI ESTENDE BENE SULLE COMB LINEARI DEL SUO DOMINIO CIOÈ È SENSATO DEFINIRE
$df_p: T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ è LINEARE.

OSS 3 OVVIAMENTE PER LE PROPRIETÀ DEGLI SPAZI VETTORIALI L'ESTENSIONE APPENA SCRITTA È UNICA.

PROP $f: X \to Y \quad g: Y \to Z$

① $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$

② $d(Id_X)_p = Id_{T_p(X)} \quad \forall p \in X$

③ DA ① e ② DISCENDE CHE $f: X \to Y$ È UN DIFFEO (ANCHE SOLO LOCALE) SE $df_p: T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ È UN ISOMORFISMO

CENNO DIM L'IDEA È DI COSTRUIRE F e G ESTENSIONI SU APERTI E USARE LA BUONA DEFINIZIONE APPENA DATA DI DIFFERENZIARE SU INSIEME QUALSIASI.

VARIETÀ

DEF $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è UNA VARIETÀ K-DIMENSIONALE SE LOCALMENTE È DIFFEOMORFA AD APERTI DI $\mathbb{R}^k$, CIOÈ $\forall p \in X \ \exists U \subseteq X$ INTORNO APERTO E $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ APERTO, $\varphi: U \to \Omega$ DIFFEOMORFISMO.

DEF UNA TALE φ SI DICE CARTA

DEF UN INSIEME DI CARTE, TALI CHE IL DOMINIO RICOPRE X, SI DICE ATLANTE

DEF $\varphi^{-1}: \Omega \to U$ SI DICE PARAMETRIZZAZIONE LOCALE

~~DIMOSTRAZIONE~~ $\cancel{\varphi^{-1}: \Omega \to U}$ ~~È UN DIFFEOMORFISMO, DUNQUE~~ $\cancel{\forall q \in \Omega}$

LEMMA X VARIETÀ K-DIMENSIONALE $\Rightarrow \forall p \in X \ C_p(X) = T_p(X)$ e $\dim T_p(X) = k$, INOLTRE $\forall \varphi: U \to \Omega$ CARTA $\forall p \in U \quad T_p(X) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k)$

DIM $\varphi^{-1}: \Omega \to U$ È UN DIFFEOMORFISMO QUINDI $\forall q \in \Omega$ $d\varphi^{-1}_q$ DÀ UNA BIEZIONE TRA GLI SPAZI TANGENTI

DUNQUE $T_{\varphi^{-1}(q)}(X) = d\varphi^{-1}_{\varphi(q)}(T_q(\Omega)) = d\varphi^{-1}_q(C_q(\Omega)) = d\varphi^{-1}_q(\mathbb{R}^k)$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ È APERTO QUINDI $T_q(\Omega) = C_p(\Omega) = \mathbb{R}^k$

INDICANDO CON $p = \varphi^{-1}(q)$ e $q = \varphi(p)$ SI HA

$$T_p(X) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k) \quad \text{e INOLTRE}$$

$$d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^k) = d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}\left(C_{\varphi(p)}(\Omega)\right) =$$

$$= C_p(X)$$

PERCHÈ φ^{-1} DIFFEO QUINDI $d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$ È UNA BIGEZIONE TRA CONI

E QUINDI SI OTTIENE CHE $T_p(X) = C_p(X)$.

UTILIZZANDO ANCORA CHE $d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$ È BIGEZIONE TRA $T_p(X)$ e $\mathbb{R}^k$ CI DA LA DIMENSIONE VOLUTA.

OSS IN TUTTA LA DIMOSTRAZIONE È STATO USATO CHE $C_p(U) = C_p(X)$. A PRIORI $C_p(U) \subseteq C_p(X)$ MA ~~HO~~ POICHÈ U È APERTO IN X, HA TUTTE LE DIREZIONI DI X, QUINDI A PATTO DI RESTRINGERLE GLI E HO L'UGUALE. INOLTRE $T_p(U) = T_p(X)$ PORCHÈ U è APERTO.

COROLLARIO VARIETÀ DIFFEOMORFE HANNO LA STESSA DIMENSIONE.

DIM UN DIFFEOMORFISMO DA ISOMORFISMI TRA SPAZI TANGENTI, QUINDI CONSERVA LE DIMENSIONI DEGLI SPAZI TANGENTI, DUNQUE ANCHE QUELLE DELLE VARIETÀ.

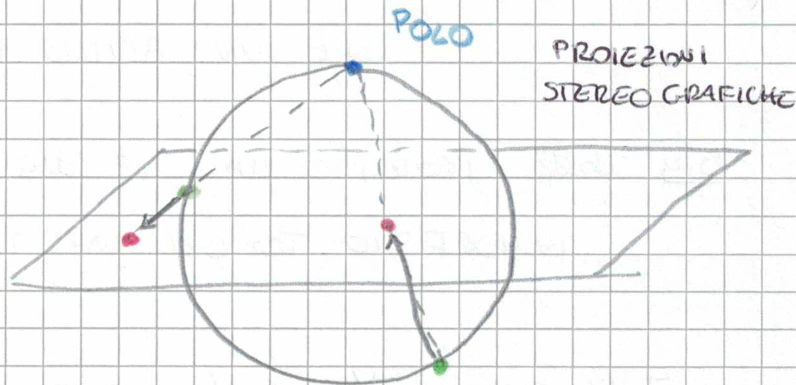
ESEMPI 1) OGNI APERTO DI $\mathbb{R}^n$ È UNA n-VARIETÀ, INFATTI È DIFFEOMORFO A SÈ CON $Id_{\mathbb{R}^n}$

2) OGNI APERTO DI UNA K-VARIETÀ È UNA K-VARIETÀ BASTA SOLO RESTRINGERE LE CARTE.

ESERCIZIO

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ è UNA n-VARIETÀ

UN MODO ECONOMICO DAL PUNTO DI VISTA DEL NUMERO DI CARTE SAREBBE USARE PROIEZIONI STEREOGRAFICHE MA NON SONO FACILI DA SCRIVERE (2 SOLE CARTE, 2 POLI)



ANDIAMO QUINDI A PROIETTARE LE 2i-SEMISFERE SUI PIANI $\{x_i = 0\}$

QUINDI $\forall i = 1, \dots, n+1$

$U_i^+ = \{x_i > 0\} \cap S^n$

$U_i^- = \{x_i < 0\} \cap S^n$

POSTO $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^{n}$

$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \longrightarrow \mathcal{B}$

$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$

$\mathcal{B}$ È EFFETTIVAMENTE IL CODOMINIO INFATTI

$$\|\varphi^\pm(x)\|^2 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_j^2 = 1 - x_i^2 < 1 \quad \text{perché } x_i > 0 \ (o\ x_i < 0)$$

$\varphi^\pm$ è C^∞ PERCHÉ È SOLO UNA RESTRIZIONE.

$(\varphi_i)^\pm : \mathcal{B} \longrightarrow U_i^\pm$

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \left(x_1, \dots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} x_j^2}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}\right)$$

NON HA PROBLEMI DI DERIVABILITÀ PERCHÉ LA RADICE NON SI ANNULLA MAI, E SONO UNA L'INVERSA DELL'ALTRA.

OSS PER $\varphi_i^\pm$ BASTAVA DIRE CHE FOSSERO UNA RESTRIZIONE DI FUNZIONI C^∞ MENTRE $(\varphi_i^\pm)^{-1}$ DOVEVO VERIFICARE FOSSERO C^∞ IN QUANTO DEFINITE SU UN APERTO.

CONCLUDO DICENDO CHE $S^n = \bigcup_i (U_i^+) \cup \bigcup_i (U_i^-)$

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ TRA VARIETÀ

$f: X \to Y$ TRA VARIETÀ, $p \in X$ SE $df_p : T_pX \to T_{f(p)}Y$ È UN ISOMORFISMO $\Rightarrow \exists U_1 \subseteq X$, $U_2 \subseteq Y$ $p \in U_1$, $f(p) \in U_2$ APERTI TALI CHE $f|_{U_1} : U_1 \to U_2$ è UN DIFFEOMORFISMO.

<u>PENSIERO ASTRATTO</u> VICINO AD UN PUNTO p UNA VARIETÀ È PRATICAMENTE COME UN APERTO DI $\mathbb{R}^k$.

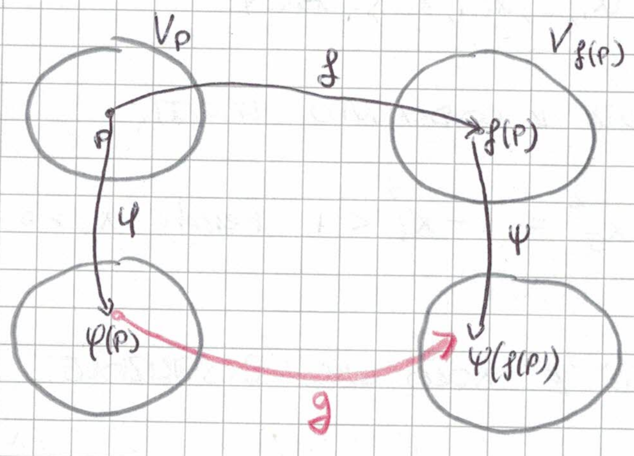
<u>DIM</u> dalle IPOTESI SI HA CHE $\dim X = \dim Y$ PERCHÉ df_p è UN ISOMORFISMO TRA GLI SPAZI TANGENTI. $\Rightarrow \underbrace{\dim T_p(X)}_{\dim X} = \underbrace{\dim_{f(p)}(Y)}_{\dim Y}$

$\exists V_p \subset X$ e $V_{f(p)} \subset Y$ APERTI, $p \in V_p$ e $f(p) \in V_{f(p)}$ tc

$\exists$ $\varphi : V_p \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ e $\psi : V_{f(p)} : \Omega_2 \to \mathbb{R}^k$ Ω_i APERTI DI $\mathbb{R}^k$

φ e ψ SONO CARTE.

<u>IDEA</u>



— VOGLIO RAPPRESENTARE f TRAMITE g.

<u>OSS</u> A MENO DI RESTRINGERE V_p POSSO SUPPORRE $f(V_p) \subseteq V_{f(p)}$ POICHÉ f è CONTINUA E POSSO CONSIDERARE

$$g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega_1 \to \Omega_2$$

VOGLIO APPLICARE IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ SUGLI APERTI A g. QUINDI CALCOLO $dg_{\varphi(p)}$

$$dg_{\varphi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}$$

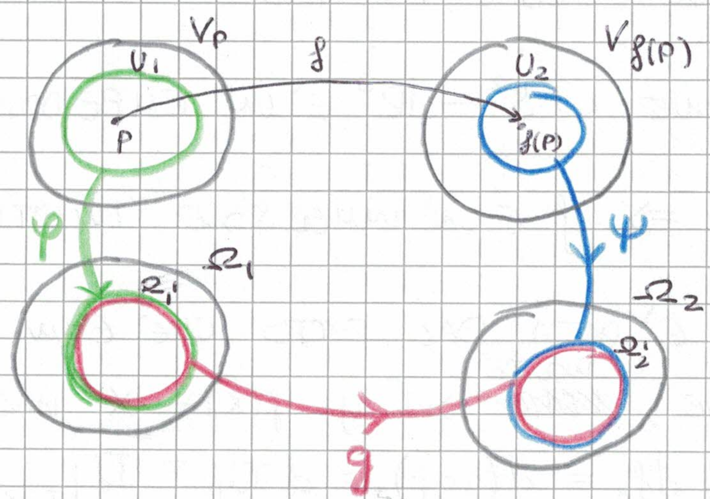
$d\psi$ e $d\varphi^{-1}$ SONO ISOMORFISMI PERCHÉ φ e ψ SONO CARTE.

df_p È UN ISOMORFISMO PER IPOTESI

$\Rightarrow$ $dg_{\varphi(p)}$ È UN ISOMORFISMO PERCHÈ COMPOSIZIONE DI ISOMORFISMI

$\Rightarrow$ g È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE PER IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE SUGLI APERTI.

QUINDI ESISTONO $\Omega_1' \subseteq \Omega_1$ e $\Omega_2' \subseteq \Omega_2$ T.C $g: \Omega_1' \to \Omega_2'$ è DIFFEO.



PONIAMO $U_1 = \varphi^{-1}(\Omega_1')$ e $U_2 = \psi^{-1}(\Omega_2')$ CHE SONO APERTI DI X e Y RISPETTIVAMENTE PERCHÈ CONTROIMMAGINI DI APERTI TRAMITE DIFFEOMORFISMI.

$\Rightarrow$ $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ È UN DIFFEOMORFISMO, PERCHÈ COMPOSIZIONE DI DIFFEOMORFISMI. RESTA DA PROVARE CHE $f(U_1) = U_2$ MA PER ~~DEFINIZIONE~~ COSTRUZIONE

$$f(U_1) = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi(U_1) = \psi^{-1} \circ g(\Omega_1') =$$
$$= \psi^{-1}(\Omega_2') = U_2$$

DEF $f: X \to Y$ TRA VARIETÀ SI DICE IMMERSIONE SE $df_p : T_p(X) \to T_{f(p)}Y$ È INIETTIVO $\forall p \in X$.

N.B NON È RICHIESTA L'INIETTIVITÀ DI f.

DEF $f: X \to Y$ È UN EMBEDDING SE È UN DIFFEOMORFISMO CON L'IMMAGINE, CIOÈ $f : X \to f(X)$ È DIFFEO.

ESEMPI 1) UNA CURVA REGOLARE È UN'IMMERSIONE IN QUANTO IL SUO DIFFERENZIALE È INIETTIVO PERCHÈ COINCIDE CON LA SUA VELOCITÀ ED È $\neq 0$ PER IPOTESI DI REGOLARITÀ.

2) L'INCLUSIONE $i: S^2 \to \mathbb{R}^3$ È UN EMBEDDING.

PROP f EMBEDDING $\Rightarrow$ f È UN'IMMERSIONE INIETTIVA.

DIM L'INIETTIVITÀ È DATA DAL FATTO CHE È UN DIFFEO SULL'IMMAGINE, INOLTRE SIA $g: f(X) \to X$ INVERSA C^∞

$$\Rightarrow \forall p \in X \quad dg_{f(p)} \circ df_p = d(g \circ f)_p = d\,Id_p = Id|_{T_p(X)}$$

|| IDENTITÀ TRA SPAZI TANGENTI.

DA CUI df_p È INIETTIVO ALTRIMENTI LA SUA COMPOSIZIONE A DESTRA NON DAREBBE MAI L'IDENTITÀ.

N.B UN'IMMERSIONE INIETTIVA PUÒ NON AVERE INVERSA C^∞ SULL'IMMAGINE E QUINDI NON È UN DIFFEO SULL'IMMAGINE (CIOÈ NON È UN EMBEDDING).

ESEMPIO: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad f(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^2}{1+t^4} \right)$ IL FIOCCO

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t^4)^2} \left(1-3t^4, 2t(1-t^2) \right) \neq (0,0) \quad \forall t$$

QUINDI È UNA CURVA REGOLARE, OVVERO UN'IMMERSIONE

INOLTRE f È INIETTIVA: INFATTI SE $f(t_1)=f(t_2)$

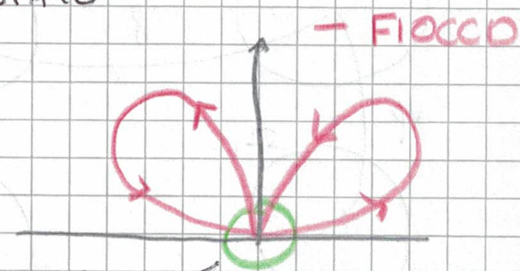
e $t_1 \neq 0 \Rightarrow f(t_1)$ e $f(t_2)$ HA ASCISSA NON NULLA.

$$\Rightarrow t_1 = \frac{y(f(t_1))}{x(f(t_1))} = \frac{y(f(t_2))}{x(f(t_2))} = t_2$$

INVECE SE $t_1=0 \Rightarrow f(t_1)=f(t_2)=(0,0) \Leftrightarrow t_2=0$ DUNQUE $f(t)$ È INIETTIVA. PERÒ SE COSTRUIAMO

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{y}{x} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

g È INVERSA DI f.



UN QUALSIASI INTORNO DI $(0,0)$ HA COME PREIMMAGINE SIA PUNTI VICINO A 0 CHE PUNTI VICINI A $\pm\infty$ (SU $\mathbb{R}$). QUINDI g NON È CONTINUA SU $(0,0)$ DUNQUE NON È C^∞ QUINDI f NON È EMBEDDING.

OSS Se X È UNA VARIETÀ e $f: X \to f(X)$ EMBEDDING $\Rightarrow f(X)$ È VARIETÀ

CIOÈ COSE DIFFEOMORFE A VARIETÀ SONO VARIETÀ PERCHÉ BASTA PRENDERE UN ATLANTE PER X, COMPORLO CON f ED ECCO UN ATLANTE PER $f(X)$ PERCHÉ COMPOSIZIONE DI DIFFEO È UN DIFFEO.

TEOREMA FORMA NORMALE DELLE IMMERSIONI.

A PAROLE: SE $f: X \to Y$ È UN'IMMERSIONE TRA VARIETÀ, ALLORA f È LOCALMENTE L'INCLUSIONE DI UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE A MENO DI UN'OPPORTUNA SCELTA DELLE COORDINATE IN ARRIVO.

IN SOSTANZA: $\forall p \in X$ e $\forall \varphi: U_p \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ CARTA INTORNO A p

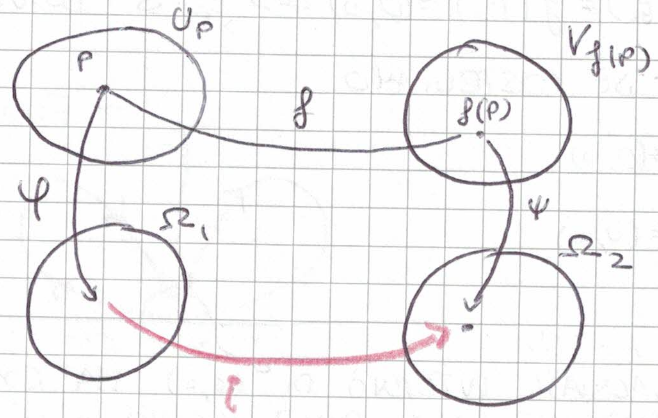
$\exists \psi: V_{f(p)} \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ CARTA TALE CHE A MENO DI RESTRINGERE U_p AFFINCHÉ $g: \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \Omega_1 \to \Omega_2$ SIA DEFINITA (CIOÈ $f(U_p) \subseteq V_{f(p)}$) È TALE CHE

$$g(x) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x,0) \quad \forall x \in \Omega_1 \quad (0 \in \mathbb{R}^{n-m})$$

OSS LA

(COSTRUZIONE/ OSSERVAZIONE PRELIMINARE CHE CI PERMETTERÀ DI ALLEGGERIRE LA NOTAZIONE, MA È MOLTO IMPORTANTE PERCHÈ SI FA SEMPRE COSÌ).

CAPIAMO MEGLIO COSA DICE IL TEOREMA.



FISSATA φ TROVO ψ TALE CHE i SIA UN'IMMERSIONE.

<u>ANALOGIA CON ALGEBRA LINEARE</u>

CAMBIARE COORDINATE O COMPORRE CON ISOMORFISMI È UN MODO EQUIVALENTE DI CAMBIARE LA RAPPRESENTAZIONE DELLE MATRICI. QUI CAMBIO COORDINATE O COMPONGO PER DIFFEOMORFISMI.

INOLTRE QUESTO TEOREMA È PIÙ PRECISO RISPETTO ALL'ALGEBRA LINEARE, PERCHÈ FISSATA φ MI PERMETTE SEMPRE DI TROVARE LA ψ CHE VOGLIO.

<u>DIM</u> SIA $\psi : V_{f(p)} \to \Omega_2$ UNA CARTA QUALSIASI INTORNO A $f(p)$ E SI RESTRINGE U_p INTORNO A p IN MODO TALE CHE $f(U_p) \subseteq V_{f(p)}$ CHE SI PUÒ FARE PER CONTINUITÀ DI f.

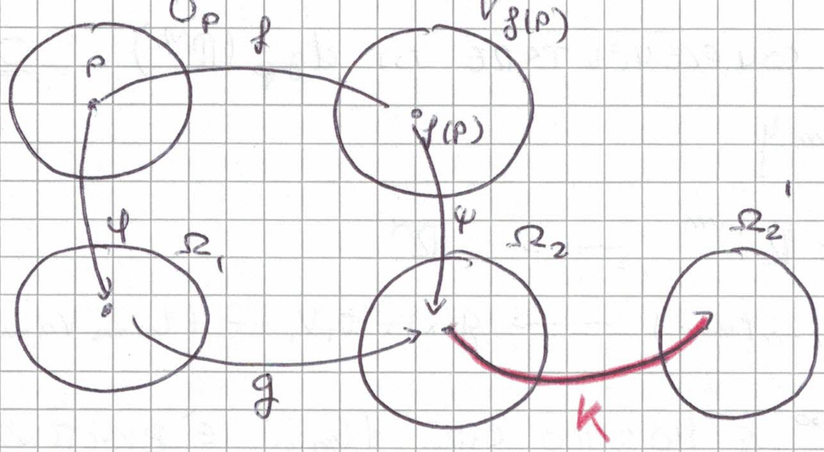
QUINDI È BEN DEFINITA $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \Omega_1 \to \Omega_2$

g È UNA MAPPA TRA APERTI DI $\mathbb{R}^m$ E $\mathbb{R}^n$ E

$$dg_{\varphi(p)} = \underbrace{d\psi_{f(p)} \circ \overbrace{df_p}^{\text{INIETTIVO PER IPOTESI}} \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)}}_{\text{INIETTIVE PERCHÈ } \varphi \text{ E } \psi \text{ SONO CARTE}} \Rightarrow dg_{\varphi(p)} \text{ È INIETTIVO}$$

$$\Downarrow$$

$$m \leq n$$



SE TROVO $k : \Omega_2 \to \Omega_2'$ ~~FARLO~~ DIFFEOMORFISMO TRA APERTI DI $\mathbb{R}^n$ TC. $k \circ g(x) = (x, 0)$ HO FINITO PERCHÉ BASTA PRENDERE $\bar{\psi} = k \circ \psi$ ERA RISOLVE.

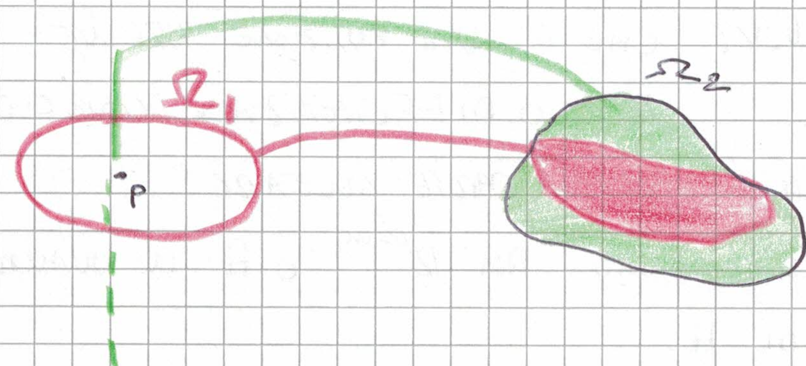
IN ALTRE PAROLE POSSO SOSTITUIRE U_p CON Ω_1 A PATTO DI SOSTITUIRE φ CON L'IDENTITÀ E $V_{f(p)}$ CON Ω_2 CIOÈ MI DIMENTICO DI U_p e $V_{f(p)}$ E IDENTIFICO p CON $\varphi(p)$ E $f(p)$ CON $g(p)$ IN QUANTO HO GIÀ MOSTRATO CHE $dg_{\varphi(p)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ È INIETTIVA.

IN CONCLUSIONE HO DIMOSTRATO CHE POSSO RIDURRE A STUDIARE IL PROBLEMA CON $p \in \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO E $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ APERTI DI $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, TANTO SE df_p È INIETTIVO LO È ANCHE $dg_{\varphi(p)}$ E SE k RADDRIZZA g $k \circ \psi$ RADDRIZZ f.

NOTAZIONE IMPORTANTE

<u>DUNQUE</u> $g \ \Omega_1 \to \Omega_2$ $p \in \Omega_1$ dg_p INIETTIVA

<u>IDEA</u>



— Ω_1 VA NELLA SUA IMMAGINE

— DIMENSIONI AGGIUNTIVE VANNO NEL COMPLEMEN

QUELLO CHE BISOGNA FARE È AGGIUNGERE DIMENSIONI A Ω_1 E MANDARE LE DIREZIONI AGGIUNTE IN UN COMPLEMENTA DELL'IMMAGINE DI Ω_1

PRENDO H IN $\mathbb{R}^n$ COMPLEMENTARE DI $dg_p(\mathbb{R}^m)$
CON BASE $\{v_1, \dots, v_{n-m}\}$

COSTRUISCO $G : \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x, t_1, \dots, t_{n-m}) \longrightarrow g(x) + t_1 v_1 + \dots + t_{n-m} v_{n-m}$$

G È OVVIAMENTE C^∞ E MOSTRO CHE $dG_{(p,0)}$ È BIGETTIVO DATO CHE ORA HA SENSO FARLO VISTO CHE LE DIMENSIONI SONO LE STESSE IN PARTENZA E ARRIVO.

PER QUESTIONI DI DIMENSIONE BASTA AVERE CHE SIA SURGETTIVO PER AVERE L'INIETTIVITÀ.

PRENDIAMO $i : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-m}$, $x \longrightarrow (x, 0)$ SI HA CHE $g = G \circ i$

$$\Rightarrow dg_p = dG_{(p,0)} \circ di_p$$

PER CUI PER L'INIETTIVITÀ DI di_p SI HA $dg_p(\mathbb{R}^m) \subseteq dG_{i(p)}(\mathbb{R}^n)$
CIOÈ $dG_{(p,0)}$ CONTIENE L'IMMAGINE DI dg_p.

SIA $J : \mathbb{R}^{n-m} \longrightarrow \Omega_1 \times \mathbb{R}^{n-m}$

$$(t_1, \dots, t_{n-m}) \longrightarrow (p, t_1, \dots, t_{n-m})$$

$G \circ J = g(p) + \sum_{i=1}^{n-m} t_i v_i$ CHE È UNA FUNZIONE AFFINE QUINDI IL SUO DIFFERENZIALE COINCIDE CON LA SUA PARTE LINEARE

~~E $d(G\circ J)_0$ [illegible]~~

E $d(G \circ J)_0$ È UN'ISOMORFISMO TRA $\mathbb{R}^{n-m}$ E H IN QUANTO I v_i SONO UNA BASE DI H.

QUINDI $H = d(G \circ J)_0(\mathbb{R}^{n-m}) = dG_{(p,0)} \circ dJ_0(\mathbb{R}^{n-m})$ CIOÈ $dG_{(p,0)}$ CONTIENE TUTTO H PERCHÉ ALTRIMENTI LA SUA COMP A SINISTRA NON POTREBBE MAI DARE H.

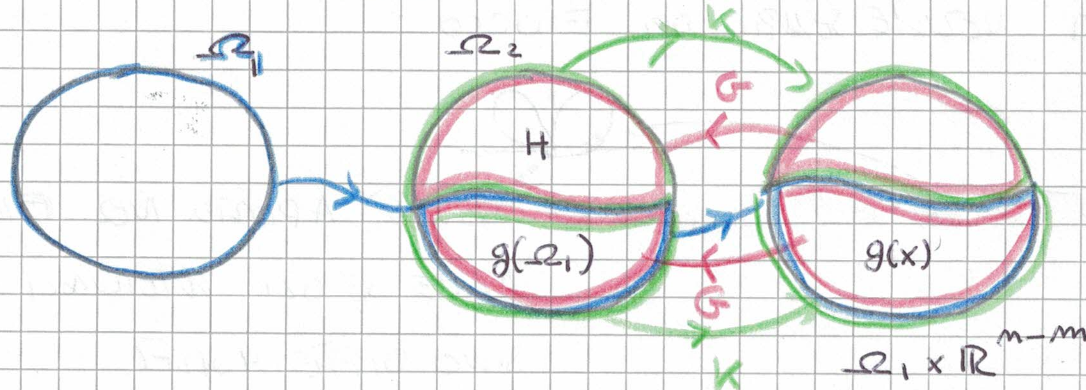
<u>CONCLUDENDO</u> $dG_{(p,0)}(\mathbb{R}^n) \supseteq H + dg_p(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$

PERCHÈ H È COMPLEMENTARE DI $dg_p(\mathbb{R}^m)$ IN $\mathbb{R}^n$.

E QUINDI $dG_{(p,0)}$ È SURGETTIVO $\Rightarrow$ BIGETTIVO.

ALLORA POSSO APPLICARE IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE SU APERTI A G, E QUINDI ESISTONO $\Omega_1' \subseteq \Omega_1$ e $B \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, $\Omega_2' \subseteq \Omega_2$ APERTI TALI CHE $G|_{\Omega_1' \times B} : \Omega_1' \times B \to \Omega_2'$ SIA DIFFEO.

PONGO $K = G^{-1}$ VEDIAMO PERCHÈ È SENSATO



CIOÈ SE G È QUELLA CHE PARTE DAL DOMINIO RADDRIZZATO $\Rightarrow$ IL TRAGITTO $\rightsquigarrow$ CHE APPLICA g e POI K (INVERSA DI G) DEVE FINIRE NEL CODOMINIO RADDRIZZATO.

<u>FORMALIZZANDO</u> $G(K(g(x))) = Id(g(x)) = g(x) = G(x,0)$

$\downarrow$ APPLICANDO K

$$K \circ g(x) = K(g(x)) = K(G(x,0)) = (x,0)$$

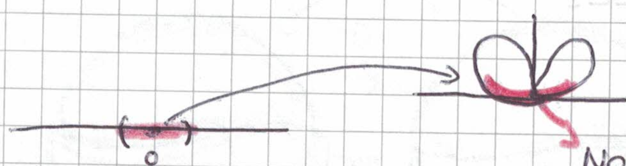
COME VOLUTO.

<u>COROLLARIO</u> $f: X \to Y$ IMMERSIONE $\Rightarrow \forall p \in X \; \exists U_p$ APERTO IN X $p \in U_p$ t.c. $f|_{U_p}: U_p \to f(U_p)$ È UN DIFFEO

<u>DIM</u> A MENO DI UN'OPPORTUNA SCELTA DI COORD. SI PUÒ OTTENERE $f(x) = (x,0)$ IN UN INTORNO DI p, DA CUI LA TESI PERCHÈ L'IMMERSIONE È UN DIFFEO.

ATTENZIONE IL COROLLARIO APPENA SCRITTO PUÒ SEMBRARE UNA CONTRADDIZIONE CON CIÒ CHE È STATO DETTO ALL'INIZIO TRA EMBEDDING E IMMERSIONI. MA LA COSA DA OSSERVARE PER NON CADERE IN ERRORE È CHE $f(U_p)$ PUÒ NON ESSERE APERTO IN $f(X)$ E CHE QUINDI f NON È DIFFEO SULL'IMMAGINE TOTALE. IL PROBLEMA È QUINDI DI NATURA GLOBALE.

INFATTI NELL'ESEMPIO DEL FIOCCO



NON È APERTO NEL FIOCCO. ANCHE SE GLI INTERVALLI EVIDENZIATI SONO DIFFEOMORFI.

LEMMA $f: X \to Y$ IMMERSIONE INIETTIVA, SONO EQUIVALENTI:

① f È APERTA SULL'IMMAGINE

② f È OMEOMORFISMO ($f: X \to f(X)$ CONTINUA CON INVERSA CONTINUA)

③ f È UN ~~...~~ EMBEDDING (DIFFEO SULL'IMMAGINE).

OSS IL LEMMA CHIARISCE LA DIFFERENZA TRA EMBEDDING E UN'IMMERSIONE INIETTIVA, CIOÈ È UNA QUESTIONE DI NATURA TOPOLOGICA GLOBALE (E NON LOCALE.)

③ ⇒ ② ⇒ ① OVVIO PERCHÉ SONO CONDIZIONI SEMPRE + FORTI.

① ⇒ ② f È BIGETTIVA TRA X E $f(X)$ DUNQUE È OMEOMORFISMO SE È APERTA (SE PENSATA A VALORI IN $f(X)$)

② ⇒ ③ Sia $g: f(X) \to X$ l'inversa ~~che~~ di f che è continua.

$\forall p \in X$ $\exists U_p$ aperto in X tc $f: U_p \to f(U_p)$ è un diffeo ma $f(U_p)$ è aperto in $f(X)$ (perché ② ⇒ ①) dunque $g: f(U_p) \to U_p$ è diffeo. Deduco che $\forall q \in f(X)$ $\exists$ un aperto su cui g è C^∞, dunque g è C^∞ su tutto $f(X)$, e quindi f è un diffeo sull'immagine.

LEMMA $f: X \to Y$ immersione iniettiva tra varietà della stessa dimensione ⇒ f è un embedding.

DIM f è aperta per il teorema di inversione locale e quindi la tesi perché ① ⇒ ③.

TEOREMA DELLA FORMA NORMALE DELLE SOMMERSIONI

DEF $f: X \to Y$ una mappa tra varietà è una sommersione se $\forall p \in X$ $df_p: T_p(X) \to T_{f(p)}Y$ è surgettivo.

f sommersione ⇒ $\forall$ carta $\psi: V_{f(p)} \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ con $V_{f(p)}$ intorno aperto di $f(p)$ in Y e Ω_2 aperto di $\mathbb{R}^n$ a meno di restringere $V_{f(p)}$ $\exists \varphi: U_p \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ U_p intorno di p in X, talecché $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \Omega_1 \to \Omega_2$ sia ben definita e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = \pi(x)$, dove se $m = \dim X$ e $n = \dim Y$ $\pi: \Omega_1 \to \Omega_2$ è la proiezione sulle prime n coordinate, cioè f localmente è una proiezione.

DIM Per ipotesi df_p è surgettivo ⇒ $m \geq n$ come nel teorema per le immersioni posso supporre $X = \Omega_1$ e $Y = \Omega_2$ e $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ tra aperti $p \in \Omega_1$ e df_p surgettivo.

OSS QUANDO VADO DA Ω_1 A Ω_2 È SENSATO PENSARE

CHE LE DIREZIONI CHE NON DANNO CONTRIBUTO NELL'IMMAGINE SONO QUELLE DI $\ker df_p$ PERCHÉ AL PRIMO ORDINE QUELLE DIREZIONI NON SI MUOVONO, E SONO QUELLE CHE AVREMO AD AGGIUNGERE AD Ω_2 PER COMPLETARLO A BASE

$df_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ CHIAMO $K = \ker df_p$ $\dim K = m-n$ PER SURGETTIVITÀ

SIA $\pi_K : \mathbb{R}^m \to K$ LA PROIEZIONE ORTOGONALE

SIA $F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \times K$

$x \longrightarrow (f(x), \pi(x))$ PER COSTRUZIONE F È C^∞ PERCHÉ LO È SU ENTRAMBE LE COMPONENTI.

INOLTRE $\Omega_2 \times K$ È DIFFEOMORFO A $\Omega_2 \times \mathbb{R}^{m-n}$ CIOÈ AD UN APERTO DI $\mathbb{R}^m$, DUNQUE F È UNA MAPPA TRA VARIETÀ DELLA STESSA DIMENSIONE

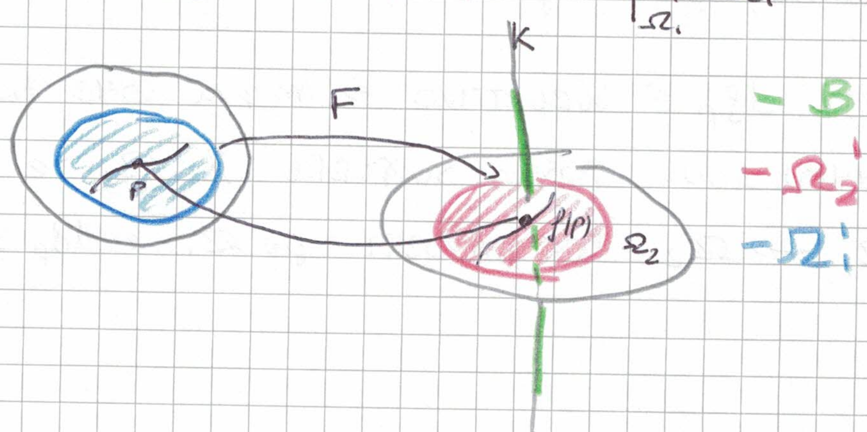
VOGLIO MOSTRARE CHE dF_p È BIUNIVOCO. AL SOLITO PER QUESTIONI DI DIMENSIONE BASTA L'INIETTIVITÀ.

POICHÉ π È LINEARE $d\pi = \pi$

DUNQUE $v \in \ker F_p \iff (df_p(v), \pi(v)) = (0,0) \iff 0 = df_p(v) \wedge \pi(v) = 0$

$\iff \underbrace{v \in \ker df_p}_{K}$ e $\underbrace{\pi(v)}_{\substack{\Uparrow \\ K}} = 0 \iff v = 0$

QUINDI dF_p È UN ISOMORFISMO $\Rightarrow$ PER INVERTIBILITÀ LOCALE A MENO DI RESTRIZIONI A Ω_1', Ω_2', B CON B INTORNO $\pi(p)$ in K F SI RESTRINGE A UN DIFFEO $F|_{\Omega_1'} : \Omega_1' \longrightarrow \Omega_2' \times B$



CHIAMO $G = \left(F|_{\Omega_1'}\right)^{-1}$ IL CAMBIO DI COORDINATE CERCATO.

$f \circ G : \Omega_2' \times B \longrightarrow \Omega_2'$ È LA PROIEZIONE CERCATA E CIÒ CONCLUDE

INFATTI PER COSTRUZIONE $\forall (x,v) \in \Omega_2' \times B$

$$(x,v) = F(G(x,v)) = \left(f(G(x,v)), \pi(G(x,v))\right)$$

$$x = (f \circ G)(x,v)$$ CIOÈ LA DEFINIZIONE DI PROIEZIONE.

<u>DEFINIZIONI</u> Sia $f : X \longrightarrow Y$ TRA VARIETÀ

1) $p \in X$ SI DICE <u>PUNTO CRITICO</u> PER f SE df_p <u>NON</u> È SURGETTIVO
2) $p \in X$ SI DICE <u>PUNTO REGOLARE</u> PER f SE df_p È SURGETTIVO
3) L'IMMAGINE DEI ~~VALORI~~ PUNTI CRITICI DEFINISCE L'INSIEME DEI <u>VALORI CRITICI</u>
4) $q \in Y$ tc q NON È CRITICO $\Rightarrow$ q È <u>VALORE REGOLARE</u>

<u>OSS</u> LA DEFINIZIONE POSTA DEI VALORI REGOLARI SERVE PERCHÈ q POTREBBE ESSERE IMMAGINE SIA DI UN PUNTO CRITICO CHE NON (E QUINDI SAREBBE CRITICO) OPPURE POTREBBE NON ESSERE IMMAGINE DI NIENTE (ALLORA SAREBBE REGOLARE) PERÒ COSÌ FACENDO $\forall q \in Y$ O È CRITICO O È REGOLARE. NON CI SONO NÈ ALTRE ALTERNATIVE NÈ AMBIGUITÀ.

<u>OSS</u> VALE CHE $q \in Y$ VALORE REGOLARE $\Leftrightarrow$ $\forall p \in X$ tc $f(p) = q$ p È REGOLARE.

TEOREMA Sia $f: X \longrightarrow Y$ TRA VARIETÀ, $m = \dim X$ e $n = \dim Y$

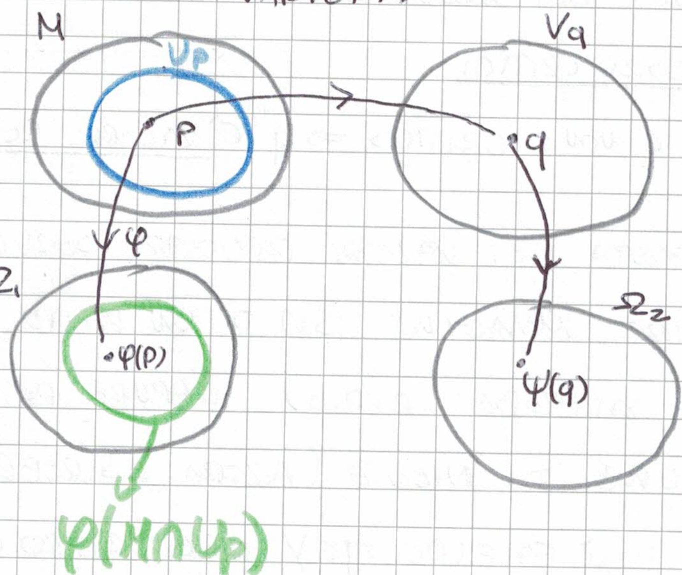
SIA $q \in Y$ VALORE REGOLARE $\Rightarrow f^{-1}(q)$ È UNA VARIETÀ DI DIMENSIONE $m-n$ E INOLTRE $\forall p$ IN $f^{-1}(q)$

$$T_p\left(f^{-1}(q)\right) = \operatorname{Ker} df_p \subseteq T_p(X)$$

DIM Sia $M = f^{-1}(q) \subseteq X$ CANDIDATA VARIETÀ.

DATO $p \in M$, POICHÉ df_p È SURGETTIVO, PER IL TEOREMA DELLA FORMA NORMALE DELLE SOMMERSIONI, $\exists\ \varphi: U_p \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\psi: V_q \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ CARTE, TALE CHE $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \Omega_1 \to \Omega_2$ È LA PROIEZIONE SULLE PRIME n COORDINATE.

OBBIETTIVO VOGLIAMO MOSTRARE CHE LA CONTROIMMAGINE DELLA PROIEZIONE È UNO SPAZIO AFFINE E QUINDI UNA VARIETÀ.



N.B

LE PREIMMAGINI DI UNA PROIEZIONE ORTOGONALE SONO SPAZI AFFINI DELLA DIM. $m-n$

~~DALLO SCHEMA L'$\varphi(M \cap U_p)$~~ $M \cap U_p$ È UN APERTO DI M ED È DIFFEOMORFO A $\varphi(M \cap U_p)$, BASTA QUINDI VEDERE CHE $\varphi(M \cap U_p)$ È UNA VARIETÀ.

MA $\varphi(M \cap U_p) = \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)^{-1}(\psi(q))$ (VEDI SCHEMA).

DUNQUE È LA PREIMMAGINE DI UN PUNTO TRAMITE UNA PROIEZIONE ORTOGONALE (INTERSECATA CON Ω_1) CIOÈ UN APERTO DI UNO SPAZIO AFFINE DELLA GIUSTA DIMENSIONE.

SIA ORA $p \in M$, $\forall \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ $\gamma(0) = p$

$f \circ \gamma \equiv q$ È COSTANTE QUINDI $0 \equiv (f \circ \gamma)'(0) = df_p(\gamma'(0))$

$\Rightarrow T_pM \subseteq \operatorname{Ker} df_p$ E L'ALTRA INCLUSIONE È OVVIA PER QUESTIONI DI DIMENSIONE.

<u>OSS 1</u> IL TEOREMA DESCRITTO È EQUIVALENTE AL TEOREMA DEL DINI.

<u>OSS 2</u> ESATTAMENTE COME IL TEOREMA DEL DINI È UNA CONDIZIONE SOLO SUFFICIENTE. BASTI CONSIDERARE $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ ~~ABBIAMO~~ df_p NON È SURGETTIVO IN $(0,0,0)$ COME CONTROIMMAGINE DI 0 (DEFINIZIONE DI CONO) MA IL CONO È UNA VARIETÀ.

<u>OSS 3</u> SE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $df_p = {}^t(\nabla f_p)$ dove $\nabla f_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} df_p = \nabla f_p^{\perp}$ DUNQUE ~~PER~~ p REGOLARE $\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{R}$ REGOLARE E $p \in f^{-1}(q)$

$\Rightarrow T_p(M) = (\nabla f_p)^{\perp}$

<u>DEF</u> UN <u>GRUPPO DI LIE</u> G È UNA VARIETÀ C^∞ CON LA STRUTTURA DI GRUPPO TALE CHE LE FUNZIONI

$$\left.\begin{array}{lll} m : & G \times G \longrightarrow G & \text{MOLTIPLICAZIONE} \\ & (g,h) \longrightarrow m(g,h) = g \cdot h & \\ i : & G \longrightarrow G & \text{INVERSIONE} \\ & g \longrightarrow i(g) = g^{-1} & \end{array}\right] \text{ SIANO } C^\infty \text{ SU } G$$

<u>OSS</u> Se X e Y SONO VARIETÀ $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ ALLORA $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ è UNA VARIETÀ (BASTA COSTRUIRE UN ATLANTE CHE SULLE PRIME COMPONENTI FUNZIONI PER X E SULLE SECONDE PER Y) E $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$

ESEMPIO $GL(n,\mathbb{R})$ È UN GRUPPO DI LIE DI DIM n^2

INFATTI IN QUANTO APERTO DI $M(n,\mathbb{R})$ CHE È UNO SPAZIO DI DIM $= n^2$

INFATTI $\det \; M(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE CONTINUA

$$GL(n,\mathbb{R}) = \Big(\underbrace{\{M \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det M = 0\}}_{\text{È UN CHIUSO}}\Big)^c$$

È UN CHIUSO $\Rightarrow$ COMP. DI UN CHIUSO È APERTO.

INOLTRE $A \cdot B$ È UNA POLINOMIALE QUINDI È C^∞

E A^{-1} È UNA POLINOMIALE FRATTA CON DENOMINATORE $\det A$ QUINDI $\neq 0 \Rightarrow$ È C^∞

DEF UN ~~OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE È UN OMOMORFISMO~~ ~~C^∞~~

G GRUPPO DI LIE, $g \in G$

$\Rightarrow L_g : G \to G$, $h \mapsto gh$ $\qquad R_g : G \to G$, $h \mapsto h \cdot g$ $\qquad$ MOLTIPLICAZIONE DESTRA E SINISTRA

SONO DIFFEOMORFISMI.

INFATTI

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & G \times G & \longrightarrow & G \\ h & \longrightarrow & (g,h) & \longrightarrow & g \cdot h \end{array}$$

INVERSA DELLA PROIEZIONE $\qquad m$

$L_g =$ COMPOSIZIONE DI FUNZIONI C^∞ QUINDI È C^∞.

INOLTRE $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ (ANALOGO PER R_g).

DEF UN OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE È UN OMO C^∞

LEMMA Sia $f : G \to H$ OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE

$\Rightarrow rg(df_g)$ È COSTANTE (NON DIPENDE DA $g \in G$)

DIM f OMOMORFISMO CIOÈ $\forall g,h \quad f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h)$

$$f \circ L_g(h) = L_{f(g)} \circ f(h) \qquad \forall g \in G$$

DIFFERENZIANDO IN $h = e$

$$df_g \circ \underbrace{dL_g(e)}_{\text{ISOMORFISMI}} = dL_{f(g)}(f(e)) \circ df_e \Rightarrow rg(df_g) = rg(df_e) \quad \forall g \in G$$

DEF $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$

PROP $SL(n,\mathbb{R})$ È UNA ~~VARIETÀ~~ GRUPPO DI LIE DI DIM n^2-1

DIM PER BINET $SL(n,\mathbb{R})$ È UN SOTTOGRUPPO DI $GL(n,\mathbb{R})$ CHE È UNA VARIETÀ DI DIM n^2. SE MOSTRO CHE 1 È UN VALORE REGOLARE PER $\det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ HO FINITO PERCHÉ CHE MOLT. E INV SIANO C^∞ LO SO PERCHÈ LO ERANO SU $GL(n,\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^*$ È UNA VARIETÀ 1-DIMENSIONALE PERCHÈ È UN APERTO DI $\mathbb{R}$

$GL(n,\mathbb{R})$ È UNA VARIETÀ DI DIM n^2

OSSERVO INOLTRE CHE $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ È UN GRUPPO DI LIE E CHE $\det$ È UN OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE.

DUNQUE PER QUANTO VISTO $rg\left(d(\det)_A\right)$ NON DIPENDE DA $A \in GL(n,\mathbb{R})$

RICORDIAMO INOLTRE CHE $d(\det)_A : T_A(GL(n,\mathbb{R})) \to T_{\det A}(\mathbb{R}^*)$, con $T_A(GL(n,\mathbb{R})) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ e $T_{\det A}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}$

DUNQUE $rg(\det)_A$ È $=0$ o $=1$

SE 1 NON FOSSE REGOLARE AVREI $rg\left(d(\det)_A\right) = 0 \ \forall A \in GL(n,\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow d(\det)_A = 0 \ \forall A \in GL(n,\mathbb{R})$ DUNQUE A SAREBBE LOCALMENTE COSTANTE. (LA LOC COSTANZA È PERCHÈ NON HO IPOTESI DI CONNESSIONE)

(PER ESERCIZIO: $f : N \to M$ TRA VARIETÀ, CON DIFFERENZIALE IDENTICAMENTE NULLO $\Rightarrow f$ È LOC. COSTANTE. $\S$. BASTA PASSARE IN CARTA)

MA CIÒ È FALSO PERCHÈ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1+t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in GL(n,\mathbb{R})$ PER t PICCOLI E $\det(\gamma(t)) = 1+t$ NON È COSTANTE QUANDO $\gamma(t)$ È VICINA A Id, QUINDI IL RANGO NON PUÒ ESSERE 0

<u>ESERCIZIO</u> $d(\det)_{Id} : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ CALCOLARLO.

$$X \longmapsto tr\, X$$

<u>SUGGERIMENTO</u>: PRENDO $\gamma(t) = Id + tX \Rightarrow d(\det)_{Id} = (\det \circ \gamma)'(0)$

SCRIVO $(\det \circ \gamma)$ COME POLINOMIALE E MOSTRO CHE TERMINE DI PRIMO GRADO È $tr\, X$.

PROP $O(n)$ È UN GRUPPO DI LIE DI ORDINE $\frac{n(n-1)}{2}$

DIM BASTA VEDERE CHE È UNA VARIETÀ (CHE È UN GRUPPO È NOTO)

IDEA SBAGLIATA: $F: GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow M(n,\mathbb{R})$

$A \longrightarrow A\cdot A^t$ con $O(n)=\{AA^t=I\}$

E VERIFICARE CHE I È REGOLARE

MA AVREI $\dim O(n) = n^2 - n^2 = 0$!!

ALLORA FISSO $F_A: GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow S(n)$

$A \longrightarrow AA^t$

$\dim S(n) = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$ se $\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

ALLORA MI BASTA VEDERE CHE

$dF_A : T_A GL(n) \longrightarrow T_{F(A)} S(n)$ È SURGETTIVO

$$\begin{array}{ccc} \cong & \longleftrightarrow & \cong \\ GL(n) & \downarrow & S(n) \end{array}$$

PERCHÉ SONO SPAZI VETTORIALI

AVRÒ CHE $O(n)$ È UNA VARIETÀ E PER QUANTO OSSERVATO DELLA DIM. GIUSTA.

FISSO $A \in O(n)$ E PRENDO $X \in T_A(GL(n,\mathbb{R})) \simeq M(n,\mathbb{R})$

CALCOLO $dF_A(X)$ PER FARLO PRENDO $\gamma(t) = A + tX \quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$

e $\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to GL(n)$

γ È A VALORI IN GL PER UN CERTO ε PER CONTINUITÀ DEL DET

$\gamma(0)=A \quad \gamma'(0)=X \Rightarrow dF_A(X) = (F\circ\gamma)'(0)$

$F\circ\gamma = {}^t(A+tX)(A+tX) = A^tA + t(X^tA + A^tX) + t^2\cdot X^t\cdot X$

DUNQUE $(F\circ\gamma)'(0) = X^tA + A^tX$

PER MOSTRARE CHE È SURGETTIVO DEVO MOSTRARE $\forall S \in S(n)$

$\exists X \in M(n,\mathbb{R})$ tc $X^tA + A^tX = S$ PRENDERE

$X = \frac{A\cdot S}{2}$ $\qquad \frac{S^t \overbrace{A^t\cdot A}^{I}}{2} + \frac{\overbrace{A^t\cdot A}^{I}\cdot S}{2} \underset{A\in O(n)}{=} \frac{S^t}{2} + \frac{S}{2} = \frac{S}{2} + \frac{S}{2} = S$

OSS RICORDANDO IL TEOREMA SULLE VARIETÀ $T_{Id}(O(n)) = A(n)$ LE ANTISIMMETRICHE. PERCHÉ $X \in T_{Id}(O(n)) = \ker(dF_{Id})$

$\iff 0 = {}^{t}IX + X^{t} \cdot I \iff X = -X^{t}$ CIOÈ $X \in A(n)$

PROP $O(n)$ CONSISTE DI 2 COMPONENTI CONNESSE, $SO(n)$ e $O(n) \setminus SO(n)$

OSS PER VARIETÀ CONNESSO $\iff$ CONNESSO PER ARCHI C^0

$\iff$ CONNESSO PER ARCHI C^∞ A TRATTI $\iff$ CONNESSO PER ARCHI C^∞

DIM PUNTO 1 DIMOSTRO CHE $SO(n)$ È CONNESSO (PER ARCHI)

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

DATA $A \in SO(n)$ LA VOGLIO COLLEGARE ALL'Id CON UN ARCO. DALLA TEORIA DI GAAL È NOTO. $\exists B \in O(n)$ t.c.

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{R(\theta_1)} & & & & \\ & \boxed{R(\theta_2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \boxed{R(\theta_j)} & & \\ & & & & \boxed{Id_h} & \\ & & & & & \boxed{-Id_k} \end{pmatrix}$$

$\det(B^{-1}AB) = \det A = 1$

$\phantom{\det(B^{-1}AB)} \overset{\shortparallel}{(-1)^k}$ DA CUI k PARI.

QUINDI POSSO SOSTITUIRE $\boxed{-Id_k}$ CON $\frac{k}{2}$ BLOCCHI $R(\pi)$

$$\Rightarrow B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \boxed{R(\theta_1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{R(\theta_j)} & \\ & & & \boxed{Id_h} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1, \dots, j$ DEFINISCO

$\bar\theta_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\bar\theta_i(0) = 0$ $\bar\theta_i(1) = \theta_i$

PRENDO
$$\gamma(t) = B^{+1} \begin{pmatrix} \boxed{R(\bar\theta_1(t))} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{R(\bar\theta_j(t))} & \\ & & & \boxed{Id_h} \end{pmatrix} B^{-1} \quad t \in [0,1]$$

$\gamma(0) = B^{+1} \, Id \, B^{-1} = Id$ $\quad \gamma(1) = \cancel{B^{+1}AB}\, B(B^{-1}AB)B^{-1} = A$

- $\gamma(t)$ è C^∞ BASTA PRENDERE $\bar\theta_i(t) \in C^\infty$ e $\bar\theta_i(t) = t\theta_i \in C^\infty$
- $\gamma(t) \in O(n)$ PERCHÉ PRODOTTO DI MATRICI IN $O(n)$
- $\gamma(t) = SO(n)$ PERCHÉ CONIUGATA DI UNA MATRICE DI $SO(n)$.

PASSO 2 ANCHE $O(n) \setminus SO(n)$ È CONNESSO

INFATTI SE $B \in O(n) \setminus SO(n)$ $L_B : O(n) \longrightarrow O(n)$ È UN DIFFEO CHE SCAMBIA $SO(n)$ CON $O(n) \setminus SO(n)$ QUINDI SONO DIFFEOMORFI.

PASSO 3 DIMOSTRO CHE $O(n)$ È SCONNESSO.

INFATTI $\det : O(n) \to \mathbb{R}$ HA IMMAGINE SCONNESSA $\{-1, 1\}$ E QUINDI $O(n)$ HA ESATTAMENTE 2 COMPONENTI CONNESSE.

PROP $GL(n,\mathbb{R})$ SI RETRAE PER DEFORMAZIONE FORTE SU $O(n)$ IN MODO TALE CHE $GL^+(n,\mathbb{R})$ ($\det > 0$) SI RETRAE SU $SO(n)$ E $GL^-(n,\mathbb{R})$ ($\det < 0$) SI RETRAE SU $O(n) \setminus SO(n)$

CIOÈ $\exists\, F : GL(n,\mathbb{R}) \times [0,1] \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ CONTINUA (OMOTOPIA

$$F(A,0) = A \qquad \forall A \in GL(n,\mathbb{R})$$

$$F(A,1) \in O(n) \qquad \forall A \in GL(n,\mathbb{R}) \to \text{RETRAZIONE}$$

$$F(A,t) = A \qquad \forall A \in O(n) \to \text{STRETTA CIOÈ VALE L'IDENTITÀ SU } O(n).$$

OSS IN REALTÀ F è ANCHE C^∞ SU $GL(n,\mathbb{R}) \times [t_i, t_{i+1})$ PER QUALCHE $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$, DUNQUE F SE SERVE POTRÀ ESSERE C^∞ SU $[0,1]$

L'IDEA È $A = (v_1 | \dots | v_n)$ $F(A, 1) = (v_1' | \dots | v_n')$

DOVE I v_i' SONO IL RISULTATO DI GRAM-SCHMIDT

$$v_i'' = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, v_j' \rangle \cdot v^j \qquad v_i' = \frac{v_i''}{\|v_i''\|}$$

(VEDI APPUNTI CORSO PAG 58 CONTO COMPLETO)

OSS LA COSA IMPORTANTE È NOTARE CHE GRAM-SCHMIDT CONSERVA LA BASE A BANDIERA. QUINDI $F(A,t) \in GL(n)$ $\forall t$.

COROLLARIO $GL(n)$ HA 2 COMPONENTI CONNESSE $GL^+(n)$ E $GL^-(n)$

DIM $F(\cdot, 1)$ È UN'EQUIVALENZA OMOTOPICA TRA $GL(n)$ E $O(n)$

PROP $SO(2) \cong S^1$

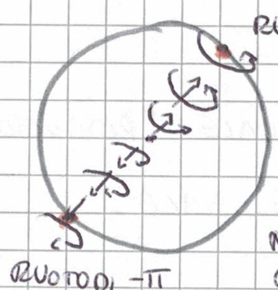
DIM $S^1 \longrightarrow SO(2)$

$$(x,y) \longrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$ È UN DIFFEO

PROPOSIZIONE $SO(3) \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (OMEOMORFI)

DIM $D^3 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| \leq 1\}$

INTUITIVAMENTE $\psi : D^3 \longrightarrow SO(3)$



$v \neq 0 \longrightarrow$ ROTAZIONE DI ASSE SPAN DI v

e $\vartheta = \pi \cdot \|v\|$ POSITIVA RISPETTO A v

$v = 0 \longrightarrow Id$

NEI PUNTI • OTTENGO LO STESSO RISULTATO.

ψ È SURIETTIVA e $\psi(v) = \psi(w) \Leftrightarrow v = -w$ e $\|v\| = \|w\| = 1$

PER COSE NOTE DI TOPOLOGIA $SO(3)$ è T_2 e D^3 È COMPATTO

$\Rightarrow$ ψ INDUCE UN OMEO TRA $D^3/\sim$ e $SO(3)$ DOVE $v \sim w \Leftrightarrow \psi(v) = \psi(w)$

QUINDI $SO(3)$ SI INDENTIFICA CON IL BORDO DELLA PALLA A MENO DI IDENTIFICARE I PUNTI ANTIPODALI, CHE È LA COSTRUZIONE CANONICA DI $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

DEF $M \subseteq \mathbb{R}^N$ È UNA K-VARIETÀ ALLORA UN <u>CAMPO TANGENTE</u> È UNA FUNZIONE C^∞ $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ t.c. $v(p) \in T_p(M)$ $\forall p \in M$

ATTENZIONE IL CODOMINIO DI v È $\mathbb{R}^N$ E NON $T_p(M)$ PERCHÈ $\forall p \in M$ $T_p(M)$ È DIFFERENTE !!

NOTAZIONE SE NON DICHIARATO DIVERSAMENTE QUANDO SI SCRIVE SOLO CAMPO SI INTENDE TANGENTE.

DEF UN CAMPO NORMALE È UNA FUNZIONE C^∞ $m: M \to \mathbb{R}^N$
tc $m(p) \perp T_p(M)$ $\forall p \in M$

ESEMPIO $m_\pm : S^M \longrightarrow \mathbb{R}^{M+1}$
$p \longrightarrow \pm p$ SONO ENTRAMBI CAMPI NORMALE.

DEFINIZIONE UN FRAME (BASI MOBILI IN ITALIANO) GLOBALE SU M È UN K-UPLA DI CAMPI TANGENTI, TALI CHE $V_1(p), \dots, V_k(p)$ SIA UNA BASE DI $T_p(M)$ $\forall p \in M$ CON $k = \dim M$.

DEF UN FRAME LOCALE È UN FRAME SU UN APERTO DI M.

DEF M SI DICE PETTINABILE SE $\exists$ UN CAMPO TG. TALE CHE $V(p) \neq 0$ $\forall p \in M$.

NOTA: CIOÈ V MI DA LA DIREZIONE LUNGO LA QUALE "PETTINARE" M.

DEF PARALLELIZZABILE SE AMMETTE UN FRAME GLOBALE.

OSS PARALLELIZZABILE $\Rightarrow$ PETTINABILE INFATTI OGNI V_i DEL FRAME ESSENDO UN VETTORE DI UNA BASE NON PUÒ MAI ESSERE $= 0$

PROPOSIZIONE S^2 NON È PETTINABILE.

SIA $U_M \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \{(p, v) \mid p \in S^3, v \in T_p(S^2), \|v\| = 1\} =$

$=$ FIBRATO TANGENTE UNITARIO $(\|v\| = 1)$

CIOÈ L'"UNIONE" DI TUTI GLI SPAZI TANGENTI IN OGNI PUNTO

- SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE S^2 SIA PETTINABILE E SIA QUINDI $v : S^2 \to \mathbb{R}^3$ UN CAMPO TANGENTE MAI NULLO PER LA NON NULLITÀ POSSO RINOMINARLO E SUPPORRE $\|v(p)\| = 1$ $\forall p \in S^2$

IDEA

* L'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE STA NEL MOSTRARE CHE U È DIFFEOMORFO SIA A $SO(3)$ (E QUESTO È EFFETTIVAMENTE VERO) MA CON L'IPOTESI ASSURDA DIMOSTRO CHE U È DIFFEO A $S^2 \times S^1$. CONCLUDO OSSERVANDO CHE $SO(3)$ e $S^2 \times S^1$ NON SONO NEANCHE OMEOMORFI.

- DIMOSTRO CHE U È DIFFEO A $SO(3)$

SE $(p, v) \in U \Rightarrow v \in (T_p(S^2)) = p^{\perp} \Rightarrow p$ E v SONO SEMPRE ~~ORTOGONALI~~ ORTONORMALI. (PER FIBRATO)

$\Rightarrow \{p, v, p \wedge v\}$ È ~~UNA~~ L'UNICA BASE POSITIVA DI $\mathbb{R}^3$ ORTONORMALE CON PRIMI 2 VETTORI p E v

DUNQUE $U \longrightarrow SO(3)$

$(p, v) \longrightarrow (p \mid v \mid p \wedge v)$ è C^∞ INIETTIVA E SURIETTIVA E HA INVERSA C^∞

L'UNICA COSA DA CONTROLLARE È CHE PARTENDO DA $SO(3)$ APPLICANDO LA RESTRIZIONE ALLE PRIME 2 COLONNE E POI RIAPPLICANDO LA FUNZIONE OTTENGO $Id_{SO(3)}$

$$(p \mid v \mid v_3) \longrightarrow (p, v) \longrightarrow (p \mid v \mid p \wedge v)$$

e $v_3 = p \wedge v$ PER UNICITÀ DELLA BASE OSSERVATA SOPRA.

- ORA DIMOSTRIAMO PER ASSURDO CHE U È DIFFEO A $S^2 \times S^1$

$\forall p \in S^2$ $v(p)$ E ~~PA~~ $\underbrace{p \wedge v(p)}_{\in T_p(S^2)}$ FORMANO UN FRAME GLOBALE SU S^2

PERCHÉ $p \in (T_p(S^2))^{\perp}$

SIA $\psi : S^2 \times S^1 \longrightarrow U$

$(p, (\cos\theta, \sin\theta)) \quad (p, \underbrace{\cos\theta\, v(p) + \sin\theta\, (p \wedge v(p))}_{})$

FUNZIONA PERCHÉ $v(p)$ e $p \wedge v(p)$ SONO BASE ORTONORMALE DI $T_p(S)$ E QUINDI QUESTO È UN VETTORE UNITARIO.

ψ È UNA BIGEZIONE E OVVIAMENTE C^∞ CON INVERSA C^∞.

DUNQUE $U \cong SO(3) \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ MA $\pi_1(\mathbb{P}^3(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$U \cong S^2 \times S^1$

e $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$ E QUINDI

È ASSURDO CHE SIANO OMEOMORFI.

ORIENTAZIONI TRA VARIETÀ

DEF SIA $M \subseteq \mathbb{R}^N$ UNA k-VARIETÀ. UN'ORIENTAZIONE SU M È LA SCELTA DI UN'ORIENTAZIONE SU T_pM $\forall p \in M$ IN MODO TALE CHE LA SCELTA SIA LOCALMENTE COERENTE, $\forall p \in M$ $\exists U_p \subseteq M$ APERTO IN M E UN FRAME LOCALE $v_1, \dots, v_k : U_p \longrightarrow \mathbb{R}^N$ t.c. $v_1(q) \dots v_k(q)$ SIA UNA BASE POSITIVA $\forall q \in U_p$

DEF Sia $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow U \subseteq M$ UNA PARAMETRIZZAZIONE LOCALE $k = \dim M$ ALLORA

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \circ \varphi^{-1} \Big| \dots \Big| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \circ \varphi^{-1} \right) = \left(d\varphi_{\varphi^{-1}(\cdot)}(e_1) \Big| \dots \Big| d\varphi_{\varphi^{-1}(\cdot)}(e_k) \right)$$

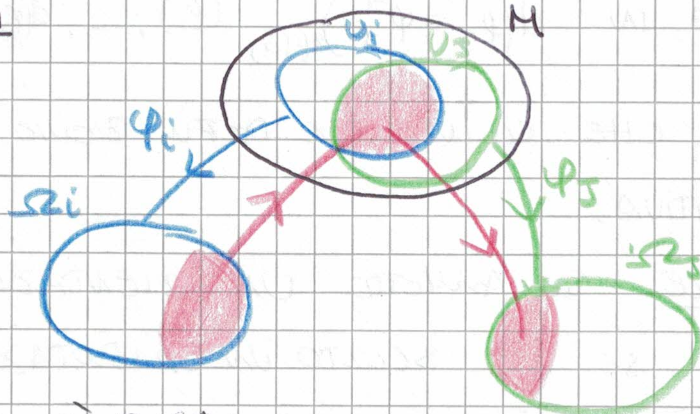
È UN FRAME LOC. SU U. CHE È INDOTTO DA φ. CIOÈ IL DIFFERENZIALE AGISCE IN MODO C^∞ SULLA BASE CANONICA $\{e_i\}$ BASE POSITIVA DEL TG IN Ω E LA PORTA IN UNA BASE POSITIVA DI $T_p(M)$ $\forall p \in U$ IN MODO C^∞.

OSS AVENDO MOSTRATO CHE LE PARAMETRIZZAZIONI (QUINDI ANCHE LE CARTE) INDUCONO SEMPRE UN FRAME LOCALE. QUINDI LA DEFINIZIONE DI ORIENTAZIONE È BEN POSTA.

DEF $M \subseteq \mathbb{R}^N$ K-VARIETÀ, UN **ATLANTE ORIENTATO** DI M È UN ATLANTE $\{(U_i, \varphi_i) : \varphi_i : U_i \longrightarrow \Omega_i\}_{i \in I}$ TALE CHE

JACOBIANA $\left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\right)_p$ ABBIA DETERMINANTE POSITIVO DOVE È DEFINITO, CIOÈ $\forall p \in \varphi_i(U_i \cap U_j)$

IDEA



L'IDEA È QUELLA CHE SE UN PUNTO APPARTIENE A PIÙ U_i CHE L'ORIENTAZIONE SIA COERENTE IN ENTRAMBI.

LEMMA SIA $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ UN ATLANTE ORIENTATO $\Rightarrow \exists$ UN'ORIENTAZIONE SU M PER CUI I FRAME LOCALI ASSOCIATI AI φ_i SIANO POSITIVI IN OGNI PUNTO. TALE ORIENTAZIONE SI DICE INDOTTA DALL'ATLANTE.

DIM $\forall p \in M$ DICO CHE LE BASI DEFINITE SU T_pM DALLE φ_i SONO EQUIVALENTI. MOSTRATO QUESTO HO FINITO PERCHÉ DICHIARANDOLI POSITIVI HO, PER COSTRUZIONE, UNA SCELTA DELL'ORIENTAZIONE DI T_pM. CIOÈ MI RESTA SOLO DA CONTROLLARE DOVE LE φ_i SI SOVRAPPONGONO.

SIANO QUINDI $\varphi_i : U_i \longrightarrow \Omega_i$ e $\varphi_j : U_j \longrightarrow \Omega_j$ CARTE CON $p \in U_i \cap U_j$

DEVO QUINDI CONFRONTARE LE BASI

$$d\varphi^{-1}_{i\ \varphi_i(p)}(e_1), \dots, d\varphi^{-1}_{i\ \varphi_i(p)}(e_k)$$

$$d\varphi^{-1}_{j\ \varphi_j(p)}(e_1), \dots, d\varphi^{-1}_{j\ \varphi_j(p)}(e_k)$$

QUESTE DUE BASI SONO EQUIVALENTI $\iff$ LO SONO LA LORO COMPOSIZIONE CON UNO STESSO ISOMORFISMO.

SCELGO COME ISOMORFISMO $(d\varphi_J)_p$ IN MODO CHE LA SECONDA DIVENTI $e_1, \dots, e_k$ BASE POSITIVA.
LA PRIMA INVECE VA IN $d(\varphi_J \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi(p)}(e_1), \dots, d(\varphi_J \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)}(e_k)$

$=$ COLONNE DI $J(\varphi_J \circ \varphi_i^{-1})$ CHE QUINDI PER DEFINIZIONE DI ATLANTE ORIENTATO È POSITIVA.

DEF M È ORIENTABILE SE AMMETTE UN'ORIENTAZIONE

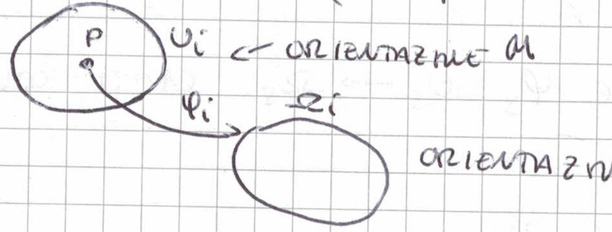
DEF M È ORIENTATA SE HO SCELTO UN'ORIENTAZIONE.

PROP M È ORIENTABILE $\iff$ M AMMETTE UN ATLANTE ORIENTATO

$\Leftarrow$) VEDI LEMMA PRECEDENTE

$\Rightarrow$) SUPPONIAMO DI METTERE SU M UN'ORIENTAZIONE E PRENDIAMO (U_i, φ_i) UN ATLANTE QUALSIASI. (NON ORIENTATO)
POSSIAMO SUPPORRE, A PATTO DI PRENDERE UN ATLANTE PIÙ GRANDE CHE U_i SIA CONNESSO $\forall i$.
DICO CHE $(d\varphi_i)_p$ O È POSITIVO O È NEGATIVO $\forall p \in U_i$

IDEA: $\forall p \in U_i$ ($T_p(M) = \mathbb{R}^k$ CON ORIENTAZIONE STANDARD) ~~PERCHÉ~~
$(d\varphi_i)_p$ INDUCE UN'ORIENTAZIONE SU Ω_i



INFATTI A MENO DI RESTRINGERE U_i POSSO ASSUMERE $\exists\, V_1 \dots V_k : U \to \mathbb{R}^N$ FRAME LOCALE CHE INDUCE L'ORIENTAZIONE DI $T_p(M)$
$\forall p \in U_i \Rightarrow (d\varphi_i)(V_1(p)), \dots, (d\varphi_i)(V_k(p))$ È UNA BASE DI $\mathbb{R}^k$ CHE DIPENDE IN MANIERA C^∞ DA p.

PER CUI LA FUNZIONE

$p \longrightarrow \det \left((d\varphi_i)_p (v_1(p)) \mid \dots \mid (d\varphi_i)_p (v_k(p)) \right)$ DIPENDE IN

MODO C^∞ DA p E NON SI ANNULLA MAI PERCHÉ $d\varphi_i$ È ~~DIFF~~ ISOMOR.

PERCHÉ ~~$d\varphi_i$~~ φ_i È DIFFEO E $\{v_i(p)\}$ È UNA BASE. QUINDI UN ISOMORFISMO MANDA BASI IN BASI. INOLTRE PER CONNESSIONE DI U_i QUEL DETERMINANTE È SEMPRE O POSITIVO O NEGATIVO $\forall p \in U_i$ DUNQUE.

- ~~se~~ $(d\varphi_i)_p > 0 \Rightarrow \psi_i = \varphi_i \quad \psi_i : U_i \longrightarrow \Omega_i$
- Se $(d\varphi_i)_p < 0 \Rightarrow \psi_i = r \circ \varphi_i$ DOVE ~~r~~ È UNA RIFLESSIONE ~~RISPETTO ALL'ASSE~~ DI $\mathbb{R}^k$ (ES $r(x_1 \dots x_k) = (-x_1, \dots, x_k)$)

  ψ_i È DIFFEO PERCHÉ COMPOSIZIONE DI DIFFEOMORFISMI E $\psi_i : U_i \longrightarrow \underbrace{r(\Omega_i)}_{\text{APERTO DI } \mathbb{R}^k} = \Omega_i'$

  È TALE CHE $(d\psi_i)_p > 0 \quad \forall p \in U_i$.

QUINDI $\{(U_i, \psi_i)\}$ È UN ATLANTE ORIENTATO IN QUANTO

$d(\psi_j \circ \psi_i^{-1}) = d\psi_j \circ d\psi_i^{-1}$ È COMPOSIZIONE, LADDOVE È DEFINITO $\left(\psi_i(U_i \cap U_j)\right)$, DI ISOMORFISMI POSITIVI ED È QUINDI POSITIVO, CHE EQUIVALE AD AVERE DET. DELLA JACOBIANA POSITIVO.

<u>PROP</u> M CONNESSA ORIENTABILE $\Rightarrow$ AMMETTE ESATTAMENTE 2 ORIENTAZIONI.

SICURAMENTE $\exists\, O_1$ ORIENTAZIONE SU M, INVERTENDOLA PUNTUALMENTE (COME FATTO SOPRA QUANDO $d\varphi_i < 0$) SE NE OTTIENE UN'ALTRA (RESTA DA VEDERE CHE L'INVERSIONE LASCIA L'ORIENTAZIONE COERENTE). ADESSO DETTE O_1 E O_2 LE ORIENTAZIONI SOPRA SUPPONIAMO PER ASSURDO $\exists\, O_3$ ~~ALTRA~~ DIFFERENTE.

Sia $K_i = \{p \mid O_i(p) = O_3(p)\}$ CIOÈ L'INSIEME DEI PUNTI DOVE O_3 COINCIDE CON O_i. UTILIZZANDO LA LOCALE COERENZA SI DIMOSTRA CHE SE $p \in K_1$ $\exists\, U_p \subseteq K_1$ TALE CHE O_1, O_3 CONSERVANO LA STESSA ORIENTAZIONE, QUINDI QUESTO MOSTRA CHE K_1 È APERTO E ANCHE K_2 CON DIMOSTRAZIONE ANALOGA. OVVIAMENTE $M = K_1 \cup K_2$
$\Rightarrow K_1 = \emptyset$ O $K_2 = \emptyset$ PERCHÉ M È CONNESSA
IN QUALUNQUE CASO $O_1 \equiv O_3$ O $O_2 \equiv O_3$.

<u>GENERALIZZANDO</u> M ~~ORIENTABILE~~ CON K COMPONENTI CONNESSE ORIENTABILI
$\Rightarrow M$ AMMETTE 2^k ORIENTAZIONI.

<u>DIM</u> BASTA RIPETERE IL RAGIONAMENTO SU OGNI COMP. CONNESSA E SI HANNO 2^k SCELTE.

<u>PROP</u> $M \subseteq \mathbb{R}^N$ IPERSUPERFICIE $(\dim M = N-1)$
M È ORIENTABILE $\Leftrightarrow$ AMMETTE UN CAMPO NORMALE MAI NULLO.

$\Leftarrow)$ SIA $n: M \to \mathbb{R}^N$ CAMPO NORMALE, DICO CHE

$(v_1, \dots, v_{N-1})$ È BASE POSITIVA DI $T_p(M) \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_{N-1}, n(p))$ È BASE POSITIVA DI $\mathbb{R}^N$

DEVO CONTROLLARE CHE
1) LA DEFINIZIONE È BEN POSTA PUNTUALMENTE. (CIOÈ STO INDICANDO UNA CLASSE DI EQUIVALENZA DI BASI)
2) È LOC. COERENTE.

1) Se $v_1', \dots, v_{N-1}'$ È UN'ALTRA BASE DI $T_p(M)$ CON MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE A DA $v_1, \dots, v_{N-1}$, LA MATRICE DI CAMBIAMENTO DA $v_1, \dots, v_{N-1}, n(p)$ A $v_1', \dots, v_{N-1}', n(p)$ È
$A' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ e $\det A' = \det A$ DA CUI LA BUONA DEF.

$\Rightarrow$) PER IPOTESI $\exists$ UN RICOPRIMENTO APERTO $\{U_i\}_{i \in I}$ DI M TC SU OGNI U_i SIA DEFINITO UN FRAME LOCALE $\{V_1^i, \dots, V_{N-1}^i\} : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^N$ TALE CHE SE $p \in U_i \cap U_J$ $\Rightarrow \{V_1^i(p), \dots, V_{N-1}^i(p)\}$ e $\{V_1^J(p), \dots, V_{N-1}^J(p)\}$ SONO BASI EQUIVALENTI DI p.

<u>IDEA</u>: È QUELLA DI PRENDERE I VETTORI NORMALI AI FRAME

POSSO SUPPORRE CHE $V_1^i, \dots, V_{N-1}^i$ SIA UNA ~~BASE~~ FRAME ORTONORMALE A PATTO DI USARE GRAM-SCHMIDT CHE NON MUTA L' ~~ORIENTAZIONE~~ EQUIVALENZA TRA LE BASI, DATO CHE LA MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE È TRIANGOLARE CON ELEMENTI SULLA DIAG >0 $(\|V_i\|>0)$ E QUINDI IL CAMBIO DI BASE È EQUIVALENTE.

PONGO $N_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^N$
$N_i(p) = V_1^i(p) \wedge \dots \wedge V_{N-1}^i(p)$ E OTTENGO COSÌ UN CAMPO UNITARIO NORMALE $\forall\, U_i$

E $\forall i$ $V_1^i(p), \dots, V_{N-1}^i(p), N_i(p)$ È UNA BASE ORTONORMALE POSITIVA DI $\mathbb{R}^N$. $N_i \in C^\infty$ POICHÉ PRODOTTO VETTORE DI FUNZIONI C^∞. PER CONCLUDERE MI BASTA VERIFICARE CHE LA DEFINIZIONE SIA BEN POSTA, CIOÈ $N_i \overset{?}{=} N_J$ in $p \in U_i \cap U_J$. (COSÌ DA POTER DEFINIRE N GLOBALMENTE)

SIA A LA MATRICE DI CAMBIO DI BASE DA $\{V_h^i\}$ A $\{V_h^J\}$ CON $h = 1, \dots, N-1$. ALLORA POICHÈ I FRAME SONO EQUIVALENTI E ORTONORMALI $\Rightarrow \det A = 1$

INOLTRE N_i e N_J SONO ORTONORMALI IN $(T_p(M))^\perp$ CHE È UNO SPAZIO DI DIMENSIONE 1 $\Rightarrow N_i = \varepsilon N_J$ CON $\varepsilon = \pm 1$

SIA A' LA MATRICE DI CAMBIAMENTO DI BASE DA $V_1^i(p), \dots V_{N-1}^i(p), N_i(p)$ A $V_1^j(p), \dots, V_{N-1}^j(p), N_j(p)$

$$\Rightarrow \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon \end{array}\right)$$

$\det A' = 1$ POICHÉ LE DUE BASI SOPRA SONO ORTONORMALI POSITIVE

MA $1 = \det A' = \det A \cdot \varepsilon = 1 \cdot \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow N_i = N_j$

$\Rightarrow N : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tc $N|_{U_i} : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^M$ $N|_{U_i} = N_i$ È BEN DEFINITO ED È IL CAMPO CERCATO.

<u>COROLLARIO</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ APERTO $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ SE $\lambda \in \mathbb{R}$ È UN VALORE REGOLARE PER $f \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = M$ (CHE È UN'IPERSUPERFICIE) È ORIENTABILE.

<u>DIM</u> $\forall p \in M$ DEF $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$

$$p \longrightarrow (\nabla f)_p = {}^t(df_p)$$

POICHÉ λ È REGOLARE $df_p \neq 0 \; \forall p \Rightarrow N_p \neq 0 \; \forall p \in M$

INOLTRE $(T_pM)^\perp = (df_p)^\perp$ DA CUI $N_p \in (T_p(M))^\perp$ e $N \in C^\infty$

QUINDI ESISTE UN CAMPO NORMALE MAI NULLO, DA CUI LA TESI.

<u>COROLLARIO</u> S^M È ORIENTABILE E $\mathcal{X}(n, \mathbb{R})$ È ORIENTABILE.

<u>OSS</u> PARALLELIZZABILE $\Rightarrow$ ORIENTABILE MA S^2 DIMOSTRA CHE IL CONTRARIO È FALSO.

FINE PARTE II

PROP $f: M \to N$ TRA VARIETÀ $\Rightarrow$ L'INSIEME DEI PUNTI CRITICI DI f È UN CHIUSO DI M. SE N È COMPATTA $\Rightarrow$ I VALORI CRITICI IN N SONO UN ~~compatto~~ CHIUSO IN N

DIM SE $x \in M$ È UN PUNTO REGOLARE $\exists U \subseteq M$ APERTO CON $x \in U$ FATTO DI PUNTI REGOLARI.

SIANO $\varphi: \Omega_1 \to U$ e $\psi: \Omega_2 \to V$ PARAMETRIZZAZIONI INTORNO A x IN M E A $f(x)$ IN N IN MODO TALE CHE

$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ SIA BEN DEFINITA.

PER IPOTESI SE $p \in \varphi^{-1}(x) \in \Omega_1 \Rightarrow d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_p =$

$= d\psi^{-1}_{f(x)} \circ df_x \circ d\varphi_p$ È SURGETTIVO. MA $d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

dove $m = \dim M$ E $n = \dim N$ È UNA MATRICE $n \times m$ CHE È SURGETTIVA $\Leftrightarrow rg(d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_p) = n \Leftrightarrow \exists$ UN MINORE $n \times n$ INVERTIBILE

POICHÉ IL DETERMINANTE È UNA FUNZIONE CONTINUA E LA MATRICE $d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_p$ DIPENDE IN MODO CONTINUO DA p, NE SEGUE CHE IL MINORE $n \times n$ FISSATO CONTINUA AD AVERE $\det \neq 0$ IN UN INTORNO $\Omega_1' \subseteq \Omega_1$ INTORNO DI p.

$\Rightarrow d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_q$ È SURGETTIVO $\forall q \in \Omega_1' \Rightarrow df_z$ È SURGETTIVO $\forall z \in Z = \varphi(\Omega_1')$ APERTO INTORNO A x IN M.

DUNQUE I PUNTI REGOLARI SONO UN APERTO $\Rightarrow$ I PUNTI CRITICI SONO UN CHIUSO C IN M.

SE M È COMPATTA $\Rightarrow C$ CHIUSO IN UN COMPATTO È COMPATTO

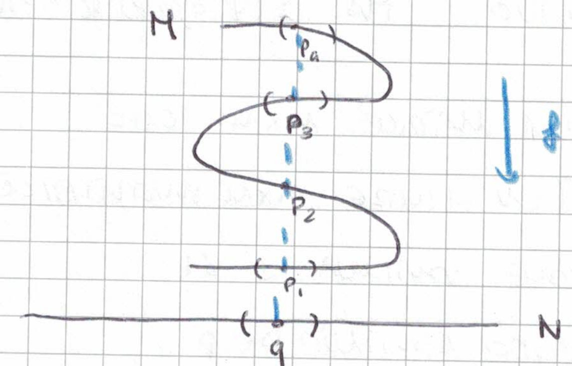
$\Rightarrow f(C)$ È COMPATTO PER WEIERSTRASS, DUNQUE CHIUSO PERCHÉ LE VARIETÀ SONO T_2

PROP $f: M \to N$ $\dim M = \dim N$ M COMPATTA E SIA $R \subseteq N$ INSIEME DEI VALORI REGOLARI DI f. ALLORA

$$f|_{f^{-1}(R)} : f^{-1}(R) \to R$$ È UN RIVESTIMENTO A FINITI FOGLI EVENTUALMENTE SCONNESSO.

DIM $\forall p \in f^{-1}(R)$ df_p È SURIETTIVO, DUNQUE È UN ISOMORFISMO PER QUESTIONI DI DIMENSIONE. PERCIÒ $f|_{f^{-1}(R)}$ È UN DIFFEOMORFISMO LOCALE PER IL TEOREMA DI INVERTIBILITÀ LOCALE.

SIA $q \in R$, $\forall p \in f^{-1}(q)$ $\exists U_p$ t.c. $f|_{U_p} : U_p \to U_p$ SIA UN DIFFEO, DOVE U_p È UN APERTO CHE CONTIENE p.

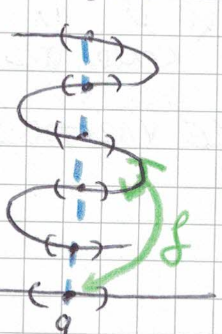


IN PARTICOLARE P È L'UNICO PUNTO IN U_p PORTATO DA f IN q PERCIÒ $f^{-1}(q)$ HA TOPOLOGIA DISCRETA. ESSENDO QUINDI UN CHIUSO È ANCHE COMPATTO <u>PERCHÉ M È COMPATTA</u>

TOPOLOGIA DISCRETA + COMPATTO = FINITO.

(ESEMPIO DI TOPOLOGIA DISCRETA NON CHIUSA IN $\mathbb{R}$ È $\{\frac{1}{n}\}$ PERCHÈ PER IL SUO COMPLEMENTARE NON RIESCO A TROVARE UN INTORNO DI $\{0\}$ CHE NON CONTENGA ELEMENTI DI $\{\frac{1}{n}\}$)

ORA MI RESTA DA VEDERE CHE SE PRENDO UN INTORNO DI q NELLA SUA CONTROIMMAGINE NON DEVE ESSERE FINITO NIENTE DI DIVERSO DEGLI INTORNI DI $f^{-1}(q)$



DEFINISCO L'INTORNO BEN RIVESTITO DI q COME

$$V = \left(\bigcap_{i=1}^{k} f(U_{p_i})\right) \setminus f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{p_i}\right)$$

OSSERVAZIONI TOPOLOGICHE

1) $\bigcap_{i=1}^{k} f(U_{p_i})$ È APERTO IN QUANTO INTERSEZIONE FINITA DI APERTI

2) $M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{p_i}$ È UN COMPATTO DI M POICHÈ $M \setminus \bigcup_{i=1}^{p} U_{p_i} = M \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} U_{p_i}\right)^c =$

QUINDI È INTERSEZIONE DI CHIUSI È UN CHIUSO E PER COMPATTEZZA DI M È ANCHE COMPATTO.

3) $f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_{p_i}\right)$ È UN ~~PO~~ COMPATTO DI N PER WEIERSTRASS E POICHÈ N È T_2 È UN CHIUSO.

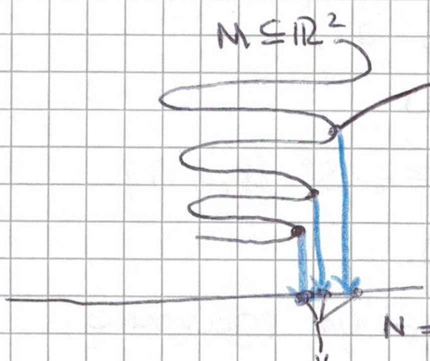
4) $V =$ APERTO $\setminus$ CHIUSO $=$ APERTO $\cap$ (CHIUSO)^c $=$ APERTO $\cap$ APERTO $=$ APERTO QUINDI È APERTO.

SICURAMENTE $q \in V$

$$f^{-1}(V) = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} \left(U_{p_i} \cap f^{-1}(V)\right)}_{\text{L'UNIONE DEI FINITI FOGLI CERCATA.}} \quad e \quad f\big|_{f^{-1}(V)\cap U_{p_i}} : f^{-1}(V) \cap U_{p_i} \longrightarrow V$$

È UN DIFFEO. $\forall i = 1 \ldots k$ POICHÈ RESTRIZIONE DI UN DIFFEO

<u>ESEMPIO</u> VEDIAMO DI COSTRUIRE M NON COMPATTA CON INSIEME DEI VALORI CRITICI NON CHIUSO



PUNTI CRITICI: POICHÈ IL VETTORE TG È VERTICALE QUINDI VA IN 0 E QUINDI NON HO LA SURGETTIVITÀ DI df.

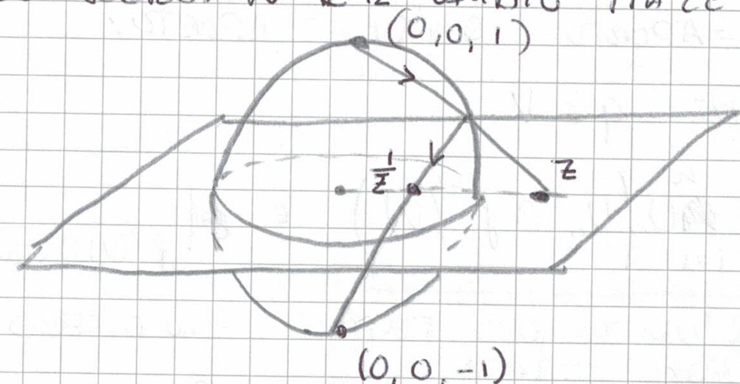
$f =$ PROIEZIONE

VALORI CRITICI: POSSO CREARE UNA CURVA I CUI VALORI ~~...~~ CRITICI FORMANO UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE. SE NON CI METTO IL PUNTO LIMITE L'INSIEME NON È UN CHIUSO.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

OGNI POLINOMIO NON COSTANTE $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ È SURIETTIVO

DIM IDENTIFICO $\mathbb{C}$ CON $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ CON $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ CON LA PROIEZIONE STEREOGRAFICA. COSÌ IL POLINOMIO p DEFINISCE UNA MAPPA DA $S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ IN SÈ CHE SI PROLUNGA AD UNA FUNZIONE C^∞ $\bar{p} : S^2 \to S^2$ TALE CHE $p(0,0,1) = (0,0,1)$ (IL FATTO CHE $\bar{p}$ SIA CONTINUA DISCENDE DAL FATTO CHE $\|p\| \to \infty$ con $\|z\| \to \infty$ POICHÈ p NON È COSTANTE.). CHE PERÒ IL PROLUNGAMENTO SIA C^∞ DEVO CONTROLLARLO IN CARTA. CONVIENE USARE L'ALTRA PROIEZIONE CON POLO $(0,0,-1)$ IN QUANTO RISPETTO ALLE COORD. IN $\mathbb{C}$ IL CAMBIO TRA LE 2 COORD. È $\cancel{\frac{1}{\bar{z}}}$ $\frac{1}{z}$



SE $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ È DERIVABILE IN SENSO COMPLESSO E $f'(z) = a + ib \Rightarrow df_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ È $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ DUNQUE

z È CRITICO $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow f'(z) = 0$

DUNQUE I PUNTI CRITICI DI $\bar{p}$ SONO GLI $z \in S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ TALI CHE $\bar{p}'(z) = 0$ OPPURE $(0,0,1)$

DUNQUE POICHÈ p È NON COSTANTE $\Rightarrow p'$ È UN POLINOMIO CON UN NUMERO FINITO DI ZERI, PERCIÒ I PUNTI CRITICI DI $\bar{p}$ SONO FINITI, E LO SONO ANCHE I VALORI CRITICI.

DUNQUE $R = S^2 \setminus$ VALORI CRITICI È UN CONNESSO

$\Rightarrow \bar{P}|_{\bar{P}^{-1}(R)} : P^{-1}(R) \to R$ È UN RIVESTIMENTO (VEDI TEO PREC)

TRA SPAZI CONNESSI, E ANCHE

P^{-1} LO È, DUNQUE È SURGETTIVO.

DUNQUE $R \subseteq \bar{P}(S^2)$ CHE PERÒ È COMPATTO DUNQUE CHIUSO IN S^2, MA LA CHIUSURA DI R IN S^2 È S^2 STESSO, DUNQUE $\bar{P}$ È SURGETTIVO E ANCHE P PER DEFINIZIONE

QUATERNIONI

$\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$

↳ PRODOTTO SCALARE STANDARD CON LA SEGUENTE STRUTTURA MOLTIPLICATIVA

SE $(a, v), (b, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H} \Rightarrow (a, v) \cdot_{\mathbb{H}} (b, w) = (ab - \langle v, w \rangle, v \wedge w + aw + bv)$

DI SOLITO SI SCRIVE COME $\langle 1, i, j, k \rangle$ $\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k \\ jk = i \\ ki = j \end{cases}$

$\mathbb{H}$ È EFFETTIVAMENTE UNA $\mathbb{R}$-ALGEBRA NON COMMUTATIVA.

- C'È UN CONIUGIO $\overline{(a, v)} = (a, -v)$

PROP 1) $\|h^2\| = h \cdot \bar{h} = (a, v) \cdot (a, -v) = (a^2 + v^2, 0) \in \mathbb{R}^+$

2) $\overline{h_1 \cdot h_2} = \bar{h}_2 \cdot \bar{h}_1$

3) $\|h_1 \cdot h_2\| = \|h_1\| \cdot \|h_2\|$

4) SE $h \neq 0$ $h^{-1} = \frac{\bar{h}}{\|h\|}$

5) $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ INFATTI

$(a, v) \cdot (b, w) = (b, w)(a, v) \quad \forall (b, w) \in \mathbb{H}$

$(ab - \langle v, w \rangle, aw + bv + v \wedge w) = (ab - \langle w, v \rangle, bv + aw + w \wedge v)$

$\Updownarrow$

$v \wedge w = w \wedge v \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$

$\Updownarrow$

$v = 0 \iff (a, v) = (a, 0) \in \mathbb{R}$

OSS DUNQUE $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$ È UN GRUPPO DI LIE NON ABELIANO DIFFEOMORFO A $\mathbb{R}^4$.

OSS ~~Se~~ S^3 è un sottogruppo di $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ in quanto

$$h_1, h_2 \in S^3 \Rightarrow \|h_1 h_2\| = \|h_1\| \cdot \|h_2\| = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow h_1 h_2 \in S^3$$

$$\|h^{-1}\| = \frac{\|\bar{h}\|}{\|h\|^2} = \frac{1}{\|h\|} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow h^{-1} \in S^3$$

COROLLARIO S^3 ammette la struttura di gruppo di Lie, in particolare S^3 è parallelizzabile e pettinabile.

(Avevamo già visto che i gruppi di Lie sono pettinabili)

DIM Per vedere che un gruppo di Lie è parallelizzabile basta prendere $v_1 \dots v_n$ in $T_e(G)$ e porre $V_i(g) = (dL_g)(v_i)$

Vogliamo usare $\mathbb{H}$ per caratterizzare $SO(3)$

Costruiamo una mappa $S^3 \to SO(3)$ dato $p \in S^3$

considero $\varphi_p : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

$$h \to p h \bar{p} = p h p^{-1} \quad (p \in S^3 \Rightarrow p^{-1} = \bar{p})$$

Poiché $\mathbb{H}$ è una $\mathbb{R}$-algebra (cioè $Z(\mathbb{H}) \supseteq \mathbb{R}$)

φ_p è $\mathbb{R}$-lineare considerata come endomorfismo di $\mathbb{R}^4$

OSS Per dire $p(\lambda h) \cdot p^{-1} = \lambda(php^{-1})$ mi serve $\lambda \in Z(\mathbb{H})$

Inoltre $\varphi(p)$ è un'isometria

$$\|\varphi_p(h)\| = \|php^{-1}\| = \overset{1}{\|p\|} \cdot \|h\| \cdot \overset{1}{\|p^{-1}\|} = \|h\|$$

Dunque $\varphi_p \in O(4)$ e quindi si ha.

$$\varphi : S^3 \to O(4)$$

$$p \to \varphi_p : \|\cdot\| \to \|\cdot\|$$

$$h \to php^{-1}$$

Inoltre poiché S^3 è connessa $\varphi(S^3)$ è connesso e quindi dovendo stare nella parte connessa che contiene l'id.

$\Rightarrow \varphi : S^3 \to SO(4)$

FATTO φ È UN OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE

DIM PER CONTROLLARE CHE SIA C^∞ BASTA SCRIVERE LA MATRICE ASSOCIATA E VEDERE CHE VENGONO POLINOMI DI SECONDO GRADO NEI COEFF. QUINDI C^∞.

INOLTRE $\varphi_{p\cdot q}(h) = p\cdot q\, h \overline{pq} = p(q\cdot h\overline{q})\overline{p} = p\cdot\varphi_q(h)\cdot\overline{p} =$

$= \varphi_p\cdot(\varphi_q(h))$ E QUINDI È OMOMORFISMO.

OSS $\forall h\in\mathbb{R}\subseteq\mathbb{H}$ $(h=(a,0))$ POICHÉ $h\in Z(\mathbb{H})$ $\varphi_p(h)=php^{-1}=h$ QUINDI φ_p NON AGISCE SULLA PRIMA COMPONENTE CIOÈ $\varphi_p(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. QUINDI POICHÉ $\varphi\in SO(4)$ E FISSA LA PRIMA COMPONENTE $\mathbb{R}$, FISSA ANCHE $\mathbb{R}^\perp$ DOVE $\mathbb{R}^\perp=\{(0,x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{H}\}$ e $\varphi_p(\mathbb{R}^\perp)=\mathbb{R}^\perp$

IDENTIFICANDO $\mathbb{R}^\perp$ CON $\mathbb{R}^3$ E CHIAMANDO $\varphi_p=\varphi_p|_{\mathbb{R}^\perp}$

HO OTTENUTO $\varphi_p: S^3\to O(3)$ ED È ANCORA OMOMORFISMO DI GRUPPI DI LIE.

RICORDA INOLTRE $\dim S^3 = 3 = \frac{3\cdot(3-1)}{2} = \dim(O(3))$

ADESSO CALCOLO $d\varphi_e$ $T_e S^3\to T_{id}O(3)$

OSS $e\in S^3$ $e=(1,0,0,0)$ ELEMENTO NEUTRO MOLTIPLICATIVO DI $\mathbb{H}$

$$T_e S^3 = (1,0,0,0)^\perp = \{(0,v)\mid v\in\mathbb{R}^3\}$$

Sia $\tilde\varphi: \mathbb{H}\longrightarrow End(\mathbb{H})$

$p\longrightarrow \tilde\varphi_p: \mathbb{H}\to\mathbb{H}$

$h\longrightarrow ph\overline{p}$

L'ESTENSIONE C^∞ DI φ AD $\mathbb{H}$ CON $End(\mathbb{H})\supseteq O(4)$ "$\supseteq$" $O(3)$

NEL SENSO VISTO PRIMA DELLE ISOMETRIE CHE FISSANO $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^\perp$ IN $\mathbb{H}$

ALLORA $(0,v)\in\ker\varphi_e \Leftrightarrow (0,v)\in\ker\tilde\varphi_e$

$\Downarrow$

VADO A CALCOLARE IL NUCLEO DI φ SOLO IN e TANTO ESSENDO OMO TRA GRUPPI DI LIE HA RANGO COSTANTE

$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\varphi}(e + t(0,v)) \iff \forall h \in \mathbb{H} \quad 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\varphi}(e + t(0,v))(h)$

$\tilde{\varphi}(e, t(0,v))(h) = \tilde{\varphi}((1,tv))(h) = (1,tv)\, h\, \overline{(1,tv)} =$

$= (1,tv)\, h\, (1,-tv)$

OSS DOVENDO DERIVARE IN t POSSO DIRE CHE VALE LA LEGGE SUL PRODOTTO PER LA LINEARITÀ DEL PRODOTTO IN $\mathbb{H}$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\varphi}((1+tv))(h) = (0,v)\, h\, (1,0) + (1,0)\, h\, (0,-v) =$

$= (0,v)\, h - h\, (0,v) = 0 \quad \forall h \in \mathbb{H}$

$\Updownarrow$

$(0,v) \in Z(\mathbb{H}) \iff v = 0$

QUINDI $\ker d\varphi_e = \{e\}$ QUINDI È INIETTIVO E PER MOTIVI DIMENSIONALI È SURGETTIVO. POICHÉ $rg\, d\varphi_p$ NON DIPENDE DA $p \in S^3$ $d\varphi_p$ È ISO $\forall p \in S^3$ DUNQUE TUTTI I PUNTI SONO REGOLARI E TUTTI I VALORI SONO REGOLARI. PER CONNESSIONE DI S^3 $\varphi(S^3) \subseteq SO(3)$ CIOÈ LA COMPONENTE CONNESSA DI $O(3)$ CHE CONTIENE L'IDENTITÀ.

ALLORA (PER TEO PREC) $\varphi: S^3 \to SO(3)$ È UN RIVESTIMENTO A FINITI FOGLI PERCHÉ S^3 È COMPATTA, QUINDI IN PARTICOLARE, $d\varphi_p$ È SURGETTIVO. VEDIAMO QUANTI SONO I FOGLI, E PER VEDERLO BASTA VEDERLO NELLA PREIMMAGINE DELL'IDENTITÀ CIOÈ IN $\ker \varphi$

$p \in \ker\varphi \iff \forall h \in \mathbb{H} \ \varphi_p(h) = h \iff p h \bar{p} = h \iff$

$ph = hp \iff p \in Z(\mathbb{H}) \cap S^3 = \{\pm e\}$ DUNQUE $\varphi(p) = \varphi(q)$

$\iff p = \pm q$ SI HANNO QUINDI 2 FOGLI INOLTRE PER FATTI DI TOPOLOGIA NOTI S^3 COMPATTO, $SO(3)$ T_2

ALLORA $SO(3) \cong S^3/_{\pm Id} \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

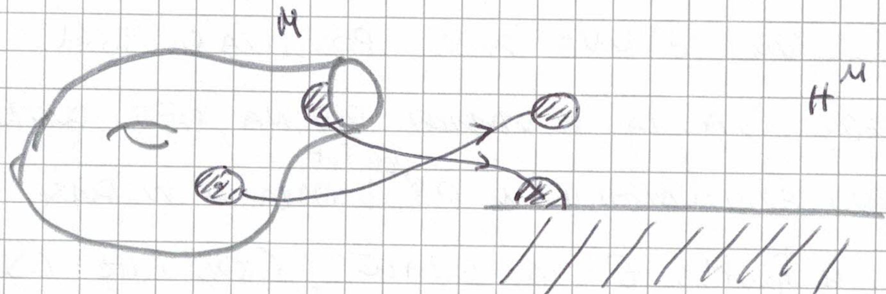
QUINDI $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ IN GENERALE $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$

DEF Sia $H^m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_m \geq 0\}$ UNA

<u>M-VARIETÀ CON BORDO</u> M È UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^N$ TALE

CHE OGNI ~~INTORNO~~ $x \in M$ HA UN INTORNO APERTO $U_x \subseteq M$

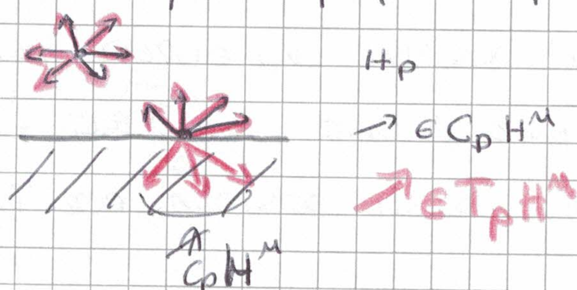
DIFFEOMORFO AD UN APERTO DI H^m



CARTE, PARAMETRIZZAZIONI LOCALI E ATLANTI SI DEFINISCONO NELLO STESSO MODO DI VARIETÀ SENZA BORDO.

DEF $\partial M = \{p \in M \mid T_pM \neq C_pM\}$, POICHÈ QUESTA DEFINIZIONE È INVARIANTE PER DIFFEO

E SE $p \in H^m$ $T_pH^m = C_pH^m$ $\Longleftrightarrow$ $x_m^{(p)} > 0$



<u>FATTI</u> 1) $\partial H^m = \{x \in H^m \mid x_m = 0\}$ CIOÈ COINCIDE CON IL BORDO TOPOLOGICO.

<u>OSS</u> H^m è UNA VARIETÀ CON ATLANTE BANALE.

2) Se $\varphi : \Omega \to U \subseteq M$, $\Omega \subseteq H^m$ È UNA PARAMETRIZZAZIONE LOCALE $\partial M \cap U = \varphi(\Omega \cap \partial H^m)$

<u>COROLLARIO</u> Se M È UNA m-VARIETÀ CON BORDO $\Rightarrow$ ∂M È UNA $m-1$ VARIETÀ SENZA BORDO.

<u>DIM</u> SE ~~...~~ IDENTIFICHIAMO CON ∂H^m $\mathbb{R}^{m-1}$ e $\Omega \subseteq H^m$ È APERTO $\Rightarrow$ $\Omega' = \Omega \cap \partial H^m$ È UN APERTO DI $\mathbb{R}^{m-1}$, LA RESTRIZIONE AL BORDO ∂H^m DI UN ATLANTE PER M DÀ UN ATLANTE PER ∂M.

LEMMA / DEFINIZIONE

SE M È ORIENTATA, ∂M AMMETTE UN'ORIENTAZIONE INDOTTA COSÌ DEFINITA ("IL PRIMO PUNTA FUORI") CIOÈ $p \in \partial M$ E $v_1 \in T_pM \setminus C_pM$ DICO CHE $v_2, \dots, v_m$ È UNA BASE POSITIVA DI $T_p\partial M$ SE $v_1 \dots v_m$ È UNA BASE POSITIVA DI T_pM.

DIM DOVREI VERIFICARE SIA LA ~~PUNTUALE~~ BUONA DEF PUNTUALE, CIOÈ CHE 2 BASI EQUIVALENTI IN PY per T_pM VADANO IN BASI EQUIVALENTI PER $T_p\partial M$. E LA LOCALE, CIOÈ CHE ESISTE UN FRAME LOCALE CHE CONSERVA LA NEGATIVITÀ O LA POSITIVITÀ IN UN INTORNO DI p.

LO SI DEDUCE DALLE SEGUENTI OSS.

OSS 1 SIA $e_1, \dots, e_{m-1}$ LA BASE POSITIVA DI $\mathbb{R}^{m-1} = \partial H^m = T_p(\partial H^m)$ $\forall p \in \partial H^m$ $e_1, \dots, e_{m-1}$ È POSITIVA $\forall p$ RISPETTO ALL'ORIENTAZIONE DI $\partial H^m \iff$ SCELTO v USCENTE A CASO $v = \sum_{i}^{m-1} a_i e_i + \lambda e_m$ $\lambda < 0$ LA BASE $v, e_1 \dots e_{m-1}$ DEVE ESSERE POSITIVA PER T_pH^m

$$\iff \det \left(\begin{array}{c|c} a_1 & \\ \vdots & Id_{m-1} \\ a_{m-1} & \\ \hline \lambda & 0 \end{array} \right) > 0 \ \text{~~[illegible]~~}$$

$\det = (-1)^{m+1}\lambda = (-1)^m \cdot (-\lambda)$ QUINDI HA IL SEGNO DI $(-1)^m$

DUNQUE L'ORIENTAZIONE DI ∂H^m COINCIDE CON QUELLA CANONICA DI $\mathbb{R}^{m-1} \iff m$ È PARI.

IN PARTICOLARE UN ATLANTE ORIENTATO PER M INDUCE UN ATLANTE ORIENTATO SU ∂M, CHE INDUCE LA STESSA ORIENTAZIONE SE m È PARI, ALTRIMENTI LA INVERTE.

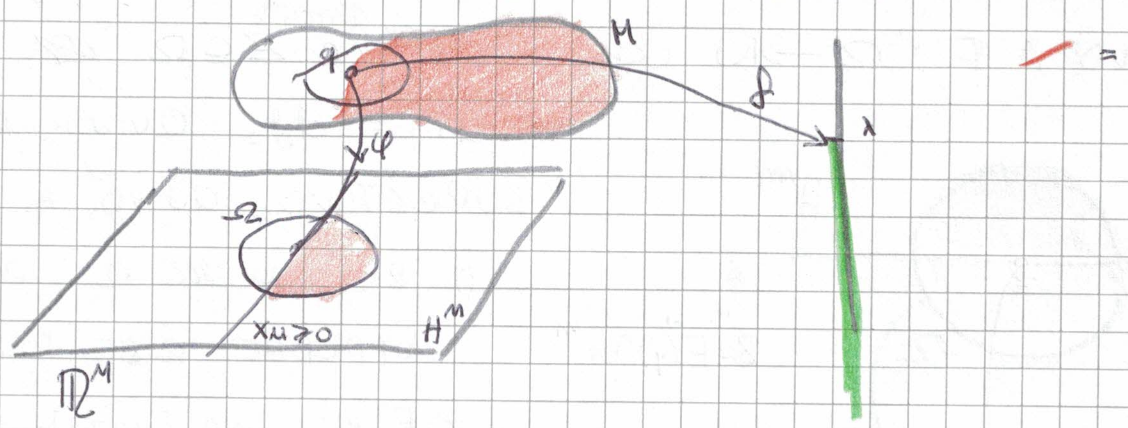
OSS 2 UNA VOLTA MOSTRATA LA ~~COERENZA~~ BUONA DEF PUNTUALE (CONTO ANALOGO A SENZA BORDO) L'OSS 1 MOSTRA LA LOCALE COERENZA DELL'ORIENTAZIONE SUL BORDO.

PROP SIA M UNA VARIETÀ SENZA BORDO, $f: M \to \mathbb{R}$ C^∞, λ VALORE REGOLARE $\Rightarrow f^{-1}((-\infty, \lambda])$ o $f^{-1}([\lambda, +\infty))$ SONO VARIETÀ CON BORDO DELLA STESSA DIMENSIONE DI M E IL BORDO È $f^{-1}(\lambda)$

DIM Sia $N = f^{-1}((-\infty, \lambda])$ Sia $q \in N$ SE $f(q) < \lambda$

$\Rightarrow q \in f^{-1}((-\infty, \lambda))$ CHE È UN APERTO DI M PERCHÈ CONTROIMMAGINE DI UN APERTO E QUINDI È DIFFEO AD UN INTORNO DI $\mathbb{R}^m$ ($m = \dim M$)

Se $f(q) = \lambda$, A MENO DI PASSARE IN CARTA, q HA UN INTORNO $U \subset M$ DIFFEO AD UN APERTO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ TALE CHE f LETTA IN CARTA SIA UNA PROIEZIONE SU UNA COORDINATA (PER TEO FORMA NORMALE DELLE MAPPE A DIFF SURIETT) POSSO AD ESEMPIO SCEGLIERE L'ULTIMA. DUNQUE $U \cap N$ È DIFFEO AMMITE φ A $\Omega \cap \{x_m \leq \lambda\}$ CHE È A SUA VOLTA DIFFEO AD UN APERTO DI H^m



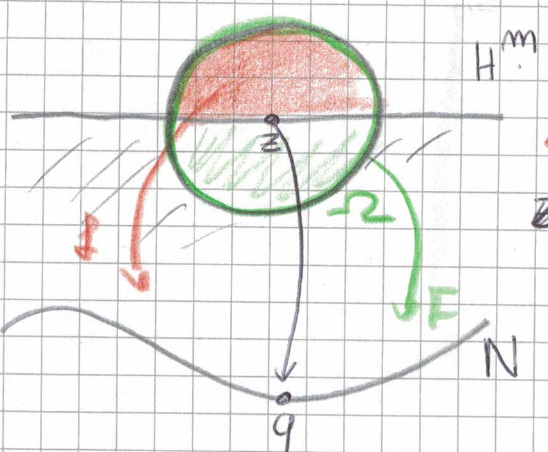
TEOREMA Sia M una m-varietà con bordo, N una n-varietà senza bordo e $f: M \to N$ C^∞ e sia $q \in N$ un valore regolare sia per f che per $\boxed{f|_{\partial M}}$ → <u>MOLTO</u> IMPORTANTE. Allora $f^{-1}(q)$ è una $(m-n)$-varietà con bordo, il cui bordo è $f^{-1}(q) \cap \partial M$

<u>DIM</u> Sia $Z = f^{-1}(q)$ e $g = f|_{\partial M} : \partial M \to N$

Sia $z \in Z$, se $z \notin \partial M \Rightarrow z \in M \setminus \partial M$ che è una m-varietà senza bordo, quindi, poiché gli aperti di H^m sono anche aperti di $\mathbb{R}^m$, posso applicare il teorema per varietà senza bordo per trovare U_z aperto di $M \setminus \partial M$ e quindi anche di M isomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$

Se $z \in \partial M$ posso supporre $H^m = M$ e $z \in \partial H^m$ (tanto essendo una condizione locale posso passare in carta).

Per definizione di mappa C^∞ posso supporre che f si estende a $F: \Omega \to N$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto e $Z \subseteq \Omega$ e $dF_z = df_z$ quindi ancora surgettivo, quindi a meno di restringere Ω, posso supporre resti tutto suriettivo $\Rightarrow F^{-1}(q)$ è una $(m-n)$-varietà dentro Ω.



$\cancel{Z} = F^{-1}(q) \cap H^m$

Un intorno in $f^{-1}(q)$ di z è dato da $F^{-1}(q) \cap H^m =$

$$= \underbrace{F^{-1}(q)}_{\text{varietà}} \cap \underbrace{x_m^{-1}([0,+\infty))}_{\text{è } C^\infty}$$

dove $x_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ è la proiezione sull'm-esima coordinata.

$F^{-1}(q) \cap H^m$ È UNA $(m-n)$ VARIETÀ CON BORDO

SE 0 È UN VALORE REGOLARE PER x_m (PER IL TEO PRECEDENTE)

CON BORDO $F^{-1}(q) \cap \{x_m = 0\}$

QUINDI PRENDIAMO $x_m : F^{-1}(q) \to \mathbb{R}$ E VEDIAMO SE 0 È REGOLARE.

<u>STUDIO</u> $d(x_m)_z : T_z F^{-1}(q) \to \mathbb{R}$

$$\ker(dx_m)_z = \underbrace{\ker(x_m)}_{\text{VISTA } x_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}} \cap T_z F^{-1}(q) =$$

OSS $\{x_m = 0\} = \partial H^m = T_z(\partial M)$

$$= T_z F^{-1}(q) \cap \{x_m = 0\} =$$

$$= T_z F^{-1}(q) \cap T_z \partial M =$$

$$= \ker\left(dF|_{\partial M}\right)_z = \ker(dg)_z$$ POICHÉ f e F COINCIDONO SU ∂M PER DEFINIZIONE.

POICHÉ q <u>È REGOLARE PER g</u>, ALLORA $\dim \ker(dg)_z =$

$$= \dim \partial M - \dim N = (m-1) - n \Rightarrow \dim \operatorname{Img}(dg_z) =$$

$$= \underset{\dim F^{-1}(q)}{\overset{\|}{(m-n)}} - (m-n-1) = 1 \Rightarrow dx_m : F^{-1}(q) \to \mathbb{R}$$ È

SURGETTIVO E QUINDI 0 È UN VALORE REGOLARE.

<u>DEF</u> SIA M UNA m-VARIETÀ, UN SOTTOINSIEME $Z \subseteq M$ È A MISURA NULLA, SE $\forall$ CARTA $\varphi : U \subset M \to \Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\varphi(Z \cap U)$ È A MISURA NULLA DI LEBESGUE.

<u>OSS 1</u> Z A MISURA NULLA $\Rightarrow M \setminus Z$ È DENSO

<u>OSS 2</u> LA DEFINIZIONE SOPRA DATA NON DIPENDE DALLA SCELTA DELLE CARTE POICHÉ MAPPE C^∞ TRA APERTI DI $\mathbb{R}^n$ MANDANO OGGETTI DI MISURA NULLA IN OGGETTI DI MISURA NULLA, ESSENDO QUINDI ESSENDO UN CAMBIO DI CARTA UNA FUNZIONE C^∞ NON DIPENDE DALLA SCELTA.

TEOREMA DI SARD (NO DIM) $f: M \to N$ TRA VARIETÀ

$\Rightarrow$ L'INSIEME DEI VALORI CRITICI DI f HA MISURA NULLA

(R = REGOLARI È DENSO IN N).

TEOREMA (NO DIM) CLASSIFICAZIONE 1-VARIETÀ

SIA M UNA 1-VARIETÀ CONNESSA, ALLORA M È DIFFEOMORFA A UNA DELLE SEGUENTI

1) $\mathbb{R} \cong (0,1)$
2) $[0,+\infty) \cong [0,1)$
3) $[0,1]$
4) S^1

COROLLARIO N è UNA 1-VARIETÀ COMPATTA $\Rightarrow$ N È UNIONE FINITA DI COPIE DI S^1 e $[0,1]$

DIM LA FINITEZZA SI HA PER COMPATTEZZA, ~~E~~ IL FATTO DI S^1 e $[0,1]$ PER CHIUSURA.

TEOREMA DI NON RETRAZIONE

IMPORTANTE: H^n SI RETRAE A ∂H^n, H^n NON COMPATTA.

SIA M UNA VARIETÀ COMPATTA CON BORDO, ALLORA NON ESISTE UNA MAPPA $r: M \to \partial M$ TC $r(x) = x$ $\forall x \in \partial M$

DIM SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $r: M \to \partial M$ ESISTA E SIA $y \in \partial M$ UN VALORE REGOLARE PER r (CHE ESISTE PER SARD).

y È ~~ANCH~~ ANCHE UN VALORE REGOLARE PER $r|_{\partial M} = id|_M$

QUINDI È DIFFEO SUL BORDO

NE SEGUE CHE $r^{-1}(y) = N$ È UNA 1-VARIETÀ IN M

IN QUANTO $1 = \dim M - \dim \partial M$

INOLTRE $\partial N = r^{-1}(y) \cap \partial M = \{p \in M, r(p) = y\} = \{y\}$

POICHÈ M È COMPATTA $\Rightarrow$ N È COMPATTA, PERCHÈ N È UN CHIUSO (CONTROIMMAGINE DI UN PUNTO) IN UN COMPATTO

ALLORA N È UNIONE DI S^1 e $[0,1]$ MA $\#\partial N$ È PARI MA $\partial N = \{y\}$ ASSURDO.

TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROWER

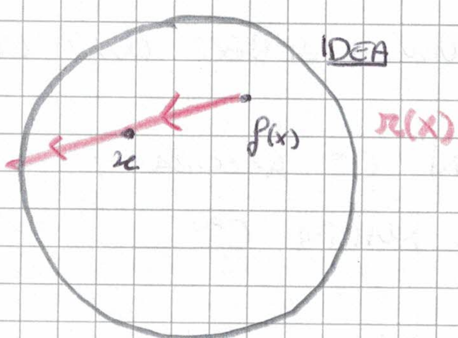
Sia $f: D^n \to D^n$ CONTINUA $\Rightarrow \exists x \in D^n$ tc $f(x) = x$

RICORDA $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

DIM PRIMA DIMOSTRIAMO CHE È VERA PER C^∞ E POI RICAVIAMO CHE È VERA PER C^0

SUPPONIAMO CHE $f \in C^\infty$ E CHE PER ASSURDO $f(x) \neq x \ \forall x \in D^n$

SE COSÌ FOSSE DIMOSTRO CHE RIUSCIREI A COSTRUIRE UNA RETRAZIONE C^∞ DA D^n SU $\partial D^n = S^{n-1}$



IDEA

COME FUNZIONE RETRAZIONE CONSIDERO L'INTERSEZIONE DALLA PARTE DI x DELLA SEMIRETTA USCENTE DA $f(x)$ A x

$r(x) = f(x) + (x - f(x)) \cdot t(x) \cap S^{n-1}$

CON $t(x)$ ~~…~~ > 0

$r(x) \in C^\infty$; $x \in \mathbb{R}^n$ $t(x) \geq 1$ E $f(x) + t(x)(x - f(x)) \in S^{n-1}$

$1 = \|f(x) + t(x)(x - f(x))\|^2$

$1 = \|f(x)\|^2 + 2t(x) < f(x), x - f(x) > + t^2(x) \cdot \|x - f(x)\|^2$

HO UNA SOLUZIONE $t(x)$ POSITIVA CHE DIPENDE IN MODO C^∞ DA x e $f(x)$, DUNQUE DA x.

DUNQUE $r(x)$ È UNA RETRAZIONE C^∞ E CIÒ CONTRADDICE IL TEOREMA DI NON RETRAZIONE, CIÒ MOSTRA CHE $f(x)$ HA ALMENO UN PUNTO FISSO.

SUPPONIAMO f SOLO C^0, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists D^n \to D^n$ C^∞ CON $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon \ \forall x D^n$

APPLICANDO STONE-WEIERSTRASS ALLE COMPONENTI DI f. TROVO $g': D^n \to \mathbb{R}^n$ tc $\|g' - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in D^n$ PONGO $g(x) = \frac{g'(x)}{1 + \frac{\varepsilon}{3}}$

PER FAR IN MODO CHE IMMAGINE DI g SIA CONTENUTA IN D^n

$$\|g(x)\| = \frac{\|g'(x)\|}{1+\frac{\varepsilon}{3}} = \frac{\|(g'(x) - f(x) + f(x)\|}{1+\frac{\varepsilon}{3}} \leq \frac{\|g'(x) - f(x)\| + \|f(x)\|}{1+\frac{\varepsilon}{3}} \leq \frac{\frac{\varepsilon}{3} + 1}{1+\frac{\varepsilon}{3}} = 1$$

SUPPONIAMO CHE $f(x) \neq x \ \forall x \in D^n$ LA MAPPA

$x \longmapsto \|x - f(x)\|$ DEFINITA DA D^n IN $\mathbb{R}$ È CONTINUA.

E PER WEIERSTRASS AMMETTE MINIMO (D^n È COMPATTO), E

LO CHIAMO $\overline{m} > 0$ PERCHÈ $f(x) \neq x \ \forall x \in D^n$.

PRENDO $g \in C^\infty$ COME SOPRA TALE CHE $\|g(x) - f(x)\| < \frac{\overline{m}}{3}$

$$g : D^n \longrightarrow D^n$$

$$\Rightarrow \|g(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - \|g(x) - f(x)\| \geq \overline{m} - \frac{\overline{m}}{3} = \frac{2\overline{m}}{3} > 0$$

E DUNQUE PER ASSURDO g NON AVREBBE PUNTI FISSI.

DEF M, N VARIETÀ, $f, g : M \longrightarrow N$ C^∞ ALLORA UN'OMOTOPIA TRA f e g È UNA MAPPA C^∞

$$H : M \times [0,1] \longrightarrow N \quad \text{tc} \quad \begin{matrix} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = g(x) \end{matrix} \quad \forall x \in M$$

SE UNA TALE H ESISTE f E g SI DICONO OMOTOPE

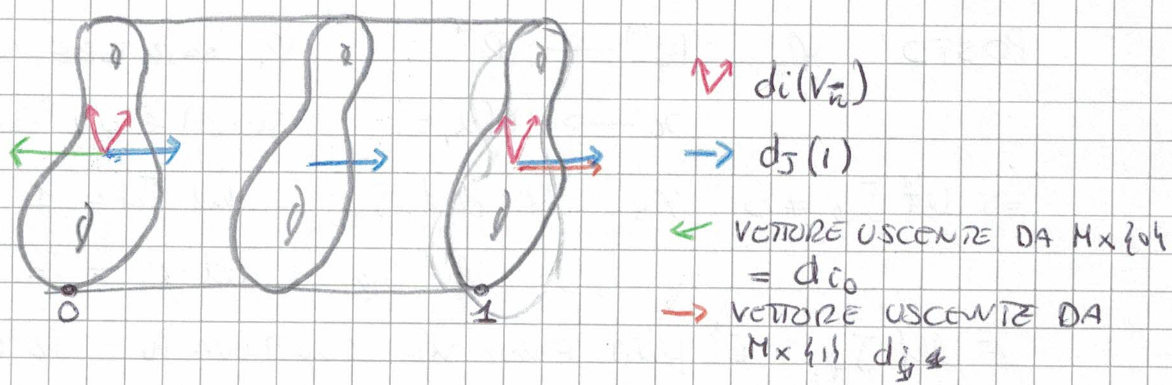
DEF M, N VARIETÀ, $f, g : M \longrightarrow N$ C^∞ SE f E g SONO EMBEDDING E $\exists H$ COME SOPRA $\Rightarrow$ H SI DICE ISOTOPIA se $\forall t \in [0,1]$ $H(x,t) : M \longrightarrow N$ È UN EMBEDDING. IN QUEL CASO f E g SI DICONO ISOTOPE

~~DEF~~ DEF COME SOPRA DOVE AL POSTO DI "EMBEDDING" POSSO METTERE DIFFEOMORFISMO

OSS 1 SE M È UNA VARIETÀ SENZA BORDO $\Rightarrow M \times [0,1]$ È UNA VARIETÀ CON BORDO DATO DA $M \times \{0\}$ e $M \times \{1\}$. SE TALE M È ORIENTATA $\Rightarrow$ ANCHE $M \times [0,1]$ LO È. ~~IN~~ INFATTI $\forall$ $(x,t) \in M \times [0,1]$ UNA BASE POSITIVA DI $T_{(x,t)}(M \times [0,1])$ È $d_i(v_1), \dots, d_i(v_m), d_j(1)$ DOVE $v_1, \dots, v_m$ BASE POSITIVA DI $T_x M$ E "1" BASE POSITIVA DI $T_t[0,1]$ E

$i : M \longrightarrow M \times \{t\}$ e $j : [0,1] \longrightarrow \{x\} \times [0,1]$

OSS SE FISSIAMO SU M LA SUA ORIENTAZIONE E DOTIAMO ~~DA~~ $M \times \{0\}$ E $M \times \{1\}$ DELL'ORIENTAZIONE INDOTTA DA M ALLORA LE INCLUSIONI $i_0 : M \to M \times \{0\}$ E $i_1 : M \to M \times \{1\}$ SONO DIFFEOMORFISMI DI SENSO OPPOSTO, CIOÈ UNA PRESERVA L'ORIENTAZIONE E L'ALTRA NO. PERCHÉ $d_J(1)$ È ENTRANTE IN $M \times \{0\}$ E USCENTE IN $M \times \{1\}$. PERÒ QUALE SIA QUELLA CHE LA PRESERVA O MENO DIPENDE DALLA DIMENSIONE (COME VISTO NELLA DEF. DI VARIETÀ CON BORDO ORIENTATA).



OSSERVAZIONE ② OMOTOPIA E ISOTOPIA SONO RELAZIONI DI EQUIVALENZA

DIM RIFLESSIVA $f \sim f$ TRAMITE $H(x,t) = f(x)$

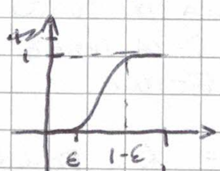
SIMMETRICA $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ PRENDENDO $H'(x,t) = H(x, 1-t)$

TRANSITIVITÀ GIUSTAPPONENDO 2 OMOTOPIE C^∞ OTTENGO SOLO UN'OMOTOPIA C^0

OSSERVO PERÒ CHE SE $f \sim g$ TRAMITE $H(x,t)$, POSSO COSTRUIRE $H'(x,t)$ tc $H'(x,t) = f(x)$ $t \in [0, \varepsilon)$ e

$H'(x,t) = g(x)$ $t \in (1-\varepsilon, 1]$ INFATTI

FISSATA $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ C^∞ tc $\varphi(t) = 0$ su $[0,\varepsilon)$ e $\varphi(t) = 1$ su $(1-\varepsilon, 1]$



$\Rightarrow H'(x,t) = H(x, \varphi(t))$

GIUSTAPPONENDO 2 OMOTOPIE DI QUESTO TIPO OTTENGO UN'OMOTOPIA C^∞ IN QUANTO SIA A DESTRA CHE A SINISTRA DELLA CONGIUNZIONE HO LA FUNZIONE COSTANTE.

PER LE ISOTOPIE È DEL TUTTO ANALOGO.

OSSERVAZIONE ③ $f: M \to \mathbb{R}^n$ C^∞ ALLORA f È OMOTOPA ALLA COSTANTE $g(x)=0$ $\forall x \in M$

DIM $H(x,t) = (1-t) f(x)$ PERCHÈ $\mathbb{R}^n$ È CONTRAIBILE A 0, IN PARTICOLARE LE MAPPE Id e $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (r_i RIFLESSIONE DELL'IESIMA COMPONENTE) SONO OMOTOPE PERCHÈ SONO ENTRAMBE OMOTOPE ALLA COSTANTE.

VEDIAMO CHE PERÒ NON SONO ISOTOPE.

PERCHÈ SE H FOSSE UN'ISOTOPIA TRA Id e r_i

POSTO $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \to H(x,t)$ φ_t SAREBBE UN DIFFEO SE H È UN'ISOTOPIA

$\Rightarrow \det J\varphi_t \neq 0$ $\forall t$ MA $\det J\varphi_0 = \det Id = 1$

$\det J\varphi_1 = \det r_i = -1$

E $\det J\varphi_t$ È UNA FUNZIONE CONTINUA IN t IL CHE È ASSURDO

LEMMA SIA n FISSATO, ALLORA ESISTE UN INTORNO U DELL'ORIGINE DI $\mathbb{R}^n$ TALE CHE $\forall p \in U$ $\exists$ UN DIFFEOMORFISMO $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ TALE CHE $\varphi(0) = p$ ~~[illegible]~~ E φ SIA ISOTOPO ALL'IDENTITÀ TRAMITE UN'ISOTOPIA $H: \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ $H(x,t) = x$ PER $\|x\| \geq 1$

(IN PARTICOLARE $\varphi(x) = x$ $\|x\| \geq 1$)

DIM PER INDUZIONE SU n.

$n=1$ SCELGO $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CON $\varphi(0)=1$ $\varphi(x)=0$ $\forall x$ $|x| \geq \frac{1}{2}$

E PONGO $M = \max |\varphi'(x)|$, CHE ESISTE PERCHÈ φ È A SUPPORTO COMPATTO. PONGO $U = \left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right)$ DATO $p \in U$

PONGO $H(x,t) = x + t\,\varphi(x)\,p$ → NON AVENDOLO MESSO AVREBBE TRASLATO TUTTO MENTRE COSÌ LA PARTE FUORI RESTA FERMA.

$H(x,0) = x$

$H(0,1) = p$

SE $|x| \geq \frac{1}{2}$ $H(x,t) = x$ PERCHÈ $\varphi(x) = 0$

Devo mostrare che $\varphi_t(x) = H(\cdot, t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia un diffeo $\forall t$.

Però $\varphi_t'(x) = \frac{d}{dx}\left(x + t\varphi(x)p\right) = 1 + tp\varphi'(x) > 0 \quad \forall x$

perché $|t\varphi'(x)p| \leq \underbrace{|t|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\varphi'(x)|}_{\leq M} \cdot \underbrace{|p|}_{< 1/M} < 1 \cdot M \cdot \frac{1}{M} = 1$

Inoltre poiché $\lim_{x \to \pm\infty} \varphi_t(x) = \pm\infty$ e $\varphi_t'(x) > 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow \varphi_t(x)$ è iniettiva e suriettiva ed è un diffeo $\Rightarrow$ ciò conclude la dim $m=1$.

Se $m \geq 2$ sia $\sigma : \mathbb{R}^{m-1} \to [0,1]$ $\sigma(0) = 1$ e $\sigma(x) = 0$ se $\|x\| > \frac{1}{2}$

A meno di coniugare con una rotazione (coniugo e non compongo serve a fare in modo che φ sia a supporto in D^m) posso supporre $p = (p_0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$

e scelgo $B = B\left(0, \frac{1}{M}\right)$ $p_0 \in \left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right)$ con M come nel caso $m=1$ per $\sigma(x)$

Pongo $H((x,y), t) = (x + t\varphi(x)\sigma(y)p_0, y) \in C^\infty$
$x \in \mathbb{R}$
$y \in \mathbb{R}^{m-1}$

Se $(x,y) \notin D^m \Rightarrow \|x\| \geq \frac{1}{2}$ o $\|y\| \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi(x) = 0 \lor \sigma(y) = 0$

$\Rightarrow$ l'isotopia è l'identità fuori da D^m

$H((0,0),1) = (0 + p_0, 0) = p$

Devo vedere che $\varphi_t(x,y) = H(\cdot, t)$ sia un diffeo $\forall t$. Basta vedere che sia un diffeo locale bigettivo.

$$J\varphi_t f = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 + t\varphi'(x)\sigma(y)p_0 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Id_{m-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

e $|t\varphi'(x)\sigma(y)| < 1$ esattamente come nel caso $m=1$

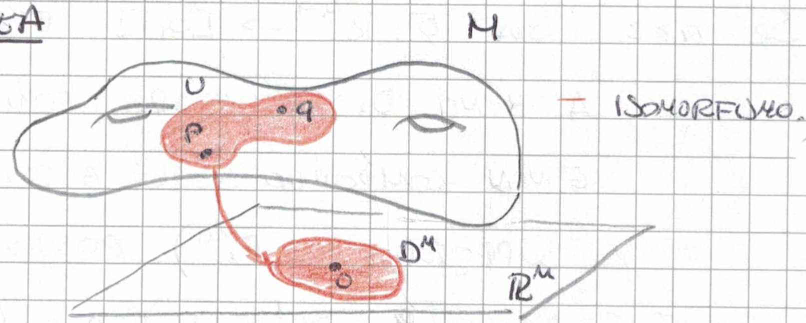
$\Rightarrow \det J\varphi_t \neq 0 \Rightarrow \varphi_t$ è un diffeo locale

PER AVERE LA BIGETTIVITÀ BASTA OSSERVARE CHE OGNI RETTA A y_0 FISSATA VA IN SÈ. INFATTI LA PRIMA COMPONENTE $x + t\varphi(x)\sigma(y_0)$ È BIGETTIVA ($n=1$) E LE ALTRE COMPONENTI SONO A y_0 FISSATE.

TEOREMA **LEMMA DI OMOGENEITÀ**

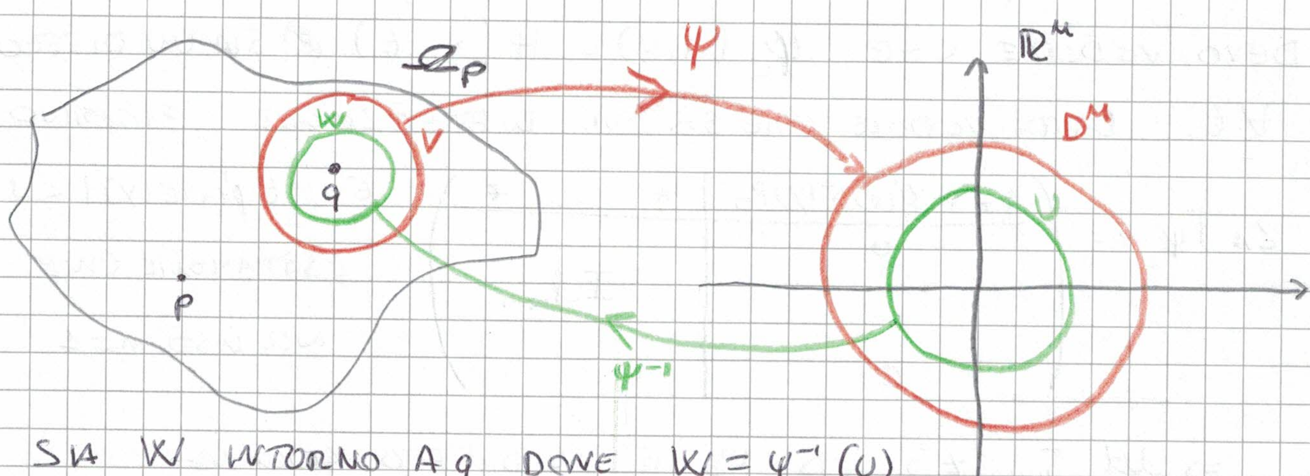
M VARIETÀ CONNESSA, $\forall\, p,q \in M$ $\exists$ UN DIFFEOMORFISMO $\varphi: M \to M$ ISOTOPO ALL'IDENTITÀ TALE CHE $\varphi(p) = q$

DIM ~~POSSIBILITÀ~~ **IDEA**



$\forall p \in M$ SIA Ω_p UN INSIEME DEI PUNTI $q \in M$ PER CUI ESISTE φ COME NELL'ENUNCIATO. PER IL LEMMA PRECEDENTE ESISTE Ω_p, INFATTI PRESO $q \in \Omega_p$ PRENDO UNA CARTA $\psi: V \to \mathbb{R}^n$ V INTORNO DI q E $\psi(q) = 0$

(EX: INTORNO AD OGNI PUNTO ESISTE SEMPRE UN INTORNO ISOMORFO A $\mathbb{R}^n$. DIM INFATTI OGNI PALLA DI CENTRO L'ORIGINE E RAGGIO ε È DIFFEOMORFA A $\mathbb{R}^n$)



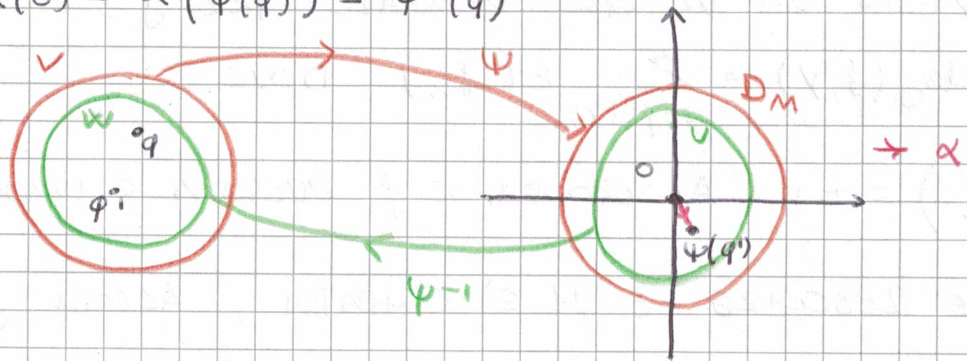
SIA W INTORNO A q DOVE $W = \psi^{-1}(U)$

DOVE U È L'INTORNO DELL'ORIGINE DEL LEMMA PRECEDENTE.

W È UN APERTO CHE CONTIENE q, QUINDI PER VEDERE Ω_p APERTO BASTA VEDERE ~~..~~ $W \subseteq \Omega_p$.

$\forall q' \in W$ PER IL LEMMA PRECEDENTE $\exists\, \alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ISOTOPO ALL'IDENTITÀ COSTANTE FUORI DA D^n TC

$\alpha(0) = \alpha(\psi(q)) = \psi(q')$



PONGO $\beta : M \to M$

$$\beta(x) = \begin{cases} \psi^{-1}(\alpha(\psi(x))) & \text{SE } x \in V \\ x & x \in M \setminus (\psi^{-1}(D^n)) \end{cases}$$

β È UN BEN DEFINITO ISOMORFISMO ISOTOPO ALL'IDENTITÀ (ISOTOPIA DATA DALLA COSTRUZIONE) E $\beta(q) = q'$

POICHÉ $q \in \Omega_p$ $\exists\, \gamma : M \to M$ ISOTOPA ALL'IDENTITÀ CON $\gamma(p) = q$
$\Rightarrow$ $\beta \circ \gamma : M \to M$ È ISOTOPO ALL'IDENTITÀ POICHÉ L'ISOTOPIA È UNA REL DI EQUIVALENZA E $\beta \circ \gamma(p) = q'$
$\Rightarrow q' \in \Omega_p \Rightarrow W \subseteq \Omega_p \Rightarrow \Omega_p$ È APERTO.

AL VARIARE DI $p \in M$ Ω_p COSTITUISCONO UN RICOPRIMENTO APERTO DI M, MA PER CONNESSIONE DI M, $\Omega_p = M$ E QUESTO CONCLUDE.

DEF Siano M, N varietà della stessa dimensione orientate con M compatta e N connessa. Sia $f: M \to N$ e sia $y \in N$ un valore regolare per f.
Allora $\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(df_x)$ dove

$\varepsilon(df_x) = \pm 1$ a seconda se f preservi o inverta l'orientazione

FATTO ① y è regolare e M è compatta, allora $f^{-1}(y)$ è formata da un numero finito di punti, quindi la somma sopra è ben definita e prende il nome di grado intero

OSS $\deg(f, y)$ è localmente costante, perché $R \subseteq N$ è l'insieme dei valori regolari, R è aperto e $f|_{f^{-1}(R)} : f^{-1}(R) \to R$ è un "rivestimento" cioè
$\deg(f, y) = \deg(f, z)$ $\forall z$ nella stessa componente connessa di R

RICORDA che per "rivestimento" chiedo solo l'esistenza di intorni ben rivestiti, non voglio nè la connessione nè la surgettività.

Il nostro obbiettivo sarà quello di dimostrare che $\deg(f, y) = \deg(f)$ cioè non dipende da $y \in R \subseteq N$ (per saro $R \neq \emptyset$) e che $\deg(f)$ dipende solo dalla classe di isotopia di f, cioè f omotopo a $g \Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$

IPOTESI DI LAVORO: se non dichiarato diversamente, da qui in avanti, f, M, N saranno come nelle ipotesi della definizione di $\deg(f)$

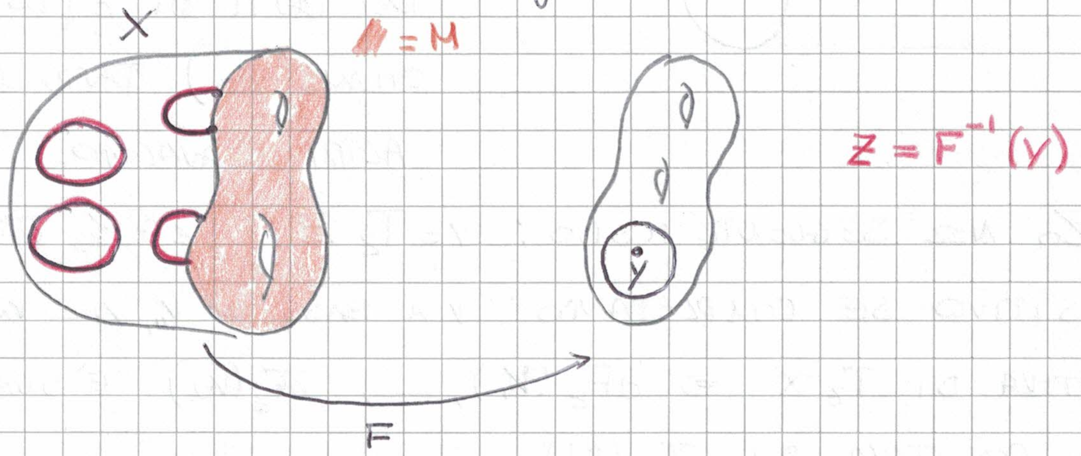
TEOREMA

SIA $f: M \to N$ NELLE IPOTESI DI LAVORO

$y \in R \subseteq N$ E SUPPONIAMO $M = \partial X$ DOVE X È UNA VARIETÀ

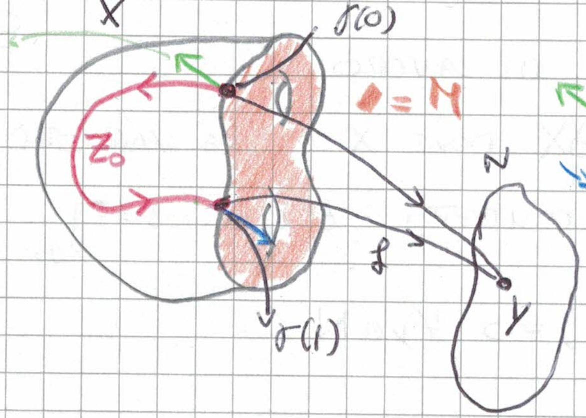
$(m+1)$-DIMENSIONALE ORIENTATA COMPATTA E CHE $f = F|_{\partial X}$ DOVE

$F: X \to N$ C^∞ $\Rightarrow deg(f, y) = 0$ $\forall y \in N$



DIM POICHÉ $deg(f, y)$ È LOC. COSTANTE E I VALORI REGOLARI PER F SONO DENSI IN N (PER SARD) POSSO SUPPORRE y REGOLARE PER F. (CIOÈ SE COSÌ NON FOSSE IN UN INTORNO DI y DOVE SI CONSERVA $deg(f, y)$, PER DENSITÀ DEI VALORI REGOLARI PER F, CI SARÀ ANCHE UN VALORE REGOLARE PER F, QUINDI A MENO DI RINOMINARLO SUPPONGO SIA y).

ADESSO POSSO USARE IL TEOREMA CHE DICEVA y REGOLARE PER F e y REGOLARE PER $F|_{\partial X} = f$ PER OSSERVARE CHE $F^{-1}(y) = Z$ È UNA $(m+1)-m$ VARIETÀ IN X, E POICHÉ X È COMPATTA E Z È CHIUSA $\Rightarrow$ Z È COMPATTA $\Rightarrow$ Z È UNIONE FINITA DI S^1 O $[0,1]$ E $f^{-1}(y) = Z \cap \partial X = Z \cap M = \partial Z$ DUNQUE I PUNTI CHE CONTRIBUISCONO IN $deg(f, y)$ SONO GLI ESTREMI DEGLI ARCHI $[0,1]$ E SE $\gamma: [0,1] \to Z$ È UN DIFFEO TRA UN ARCO E $[0,1]$ BASTA VEDERE CHE $\varepsilon(df_{\gamma(0)}) = -\varepsilon(df_{\gamma(1)})$



$\nwarrow$ γ PARTE USCENTE AD M

$\searrow$ γ ARRIVA ENTRANTE AD M

<u>OSS</u> L'ARCO DISEGNATO È UNO DEI TANTI DI Z (LO CHIAMO Z_0) TANTO SUGLI ALTRI È ANALOGO.

ORIENTO Z_0 NEL SEGUENTE MODO: $v \in T_z Z_0$ $z \in Z_0$ È POSITIVO SE COMPLETANDO v A BASE $v_0, v_1 \dots v_m$ POSITIVA DI $T_z X \Rightarrow \partial F_z(v_1), \dots, \partial F_z(v_m)$ È UNA BASE POSITIVA DI $T_y(N)$

<u>OSS</u> $F|_{Z_0} \equiv$ COSTANTE PERCIÒ $\partial F(v) = 0$ $dF: T_z X \to T_y N$ È SURGETTIVO PER REGOLARITÀ DI y, QUINDI PER QUESTIONI DI DIMENSIONI $\partial F(v_1), \dots, \partial F(v_m)$ È EFFETTIVAMENTE UNA BASE DI $T_y N$

ALLORA A MENO DI SCAMBIARE $\gamma(t)$ CON $\gamma(1-t) = \bar{\gamma}(t)$ POSSO SUPPORRE CHE γ PRESERVI L'ORIENTAZIONE

SIA $v_1, \dots v_m$ BASE POSITIVA DI $T_{\gamma(0)} M$ PERCHÉ $\gamma'(0)$ È USCENTE $\Rightarrow \gamma'(0), v_1 \dots v_m$ È BASE POSITIVA DI $T_{\gamma(0)} X$ E QUINDI $\partial\gamma_{\gamma(0)}(v_1), \dots, \partial\gamma_{\gamma(0)}(v_m)$ $(= \partial F_{\gamma(0)}(v_1), \dots, \partial F_{\gamma(0)}(v_m)$ PER RESTRIZIONE) È UNA BASE POSITIVA DI $T_y N$

$\Rightarrow \varepsilon(d\gamma)_{\gamma(0)} = 1$

PER RAGIONAMENTO ANALOGO IN $\gamma(1)$ FISSO $w_1 \dots w_m$ BASE POSITIVA PER $T_{\gamma(1)} M \Rightarrow \gamma'(1), w_1 \dots w_m$ È NEGATIVA PERCHÉ $\gamma'(1)$ È ENTRANTE A M E QUINDI $\partial\gamma(w_1), \dots, \partial\gamma(w_m)$ BASE NEGATIVA DI $T_y N$ $\Rightarrow \varepsilon(d\gamma)_{\gamma(1)} = -1$

$\Rightarrow$ CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE.

COROLLARIO Se $f, g \; M \longrightarrow N$ NELLE IPOTESI DI LAVORO E f e g SONO OMOTOPE, SE y È REGOLARE SIA PER f CHE PER g $\Rightarrow \deg(f, y) = \deg(g, y)$

DIM BASTA APPLICARE IL TEOREMA PRECEDENTE A

$X = M \times [0,1] \qquad F: X \longrightarrow N$ OMOTOPIA TRA f e g

E QUINDI SI HA $0 = \deg\left(F|_{\partial X}\right) =$

$$0 = \deg\left(F|_{\partial X}\right) = \deg\left(F|_{\partial (M \times [0,1])}\right) =$$

$$= \deg\left(F|_{M \times \{0\}}\right) + \deg\left(F|_{M \times \{1\}}\right) =$$

$$= \pm^{*}\left(\deg(f, y) - \deg(g, y)\right)$$

OSS $\pm^{*}$ NECESSARIO PERCHÉ PER QUANTO VISTO SOLO UNA TRA i_0, i_1 CAMBIANO LE ORIENTAZIONI MA NON SI SA QUALE TRA LE 2. INVERTE.

OSS HO USATO CHE DATA $f: M \longrightarrow N$ CAMBIO L'ORIENTAZIONE CON QUELLA OPPOSTA (DEVO SPECIFICARE OPPOSTA PERCHÉ SE M HA k COMPONENTI CONNESSE HA 2^k ORIENTAZIONI, QUINDI QUELLA OPPOSTA È QUELLA CHE CAMBIA TUTTE LE COMPONENTI CONNESSE). ALLORA $\deg(f, y)$ CAMBIA DI SEGNO, È INOLTRE VERO CHE SE CAMBIO ORIENTAZIONE SU N (SU N NON È NECESSARIO SPECIFICARE OPPOSTA PERCHÉ CONNESSA).

PROP $f: M \to N$ DELLA STESSA DIMENSIONE, ORIENTATE, M COMPATTA e N CONNESSA, ALLORA SE y_1, y_2 SONO VALORI REGOLARI PER f, ALLORA $\deg(f, y_1) = \deg(f, y_2)$

DUNQUE È BEN DEFINITO $\deg f = \deg(f, y)$ $\forall y \in R \subseteq N$

DIM PER IL LEMMA DI OMOGENEITÀ, E POICHÉ N È CONNESSA $\exists\, \varphi: N \to N$ DIFFEOMORFISMO ISOTOPO ALL'IDENTITÀ E TALE CHE $\varphi(y_1) = y_2$, ESSENDO ISOTOPO ALL'ID. φ PRESERVA L'ORIENTAZIONE DI N IN OGNI PUNTO (DA GIUSTIFICARE)

HO INOLTRE CHE f È OMOTOPA A $\varphi \circ f$ IN QUANTO φ È OMOTOPA ALL'IDENTITÀ E $id \circ f = f$ È OMOTOPO A $\varphi \circ f$, DUNQUE PER INVARIANZA OMOTOPICA HO CHE $\deg(f, y_2) = \deg(\varphi \circ f, y_2)$, CIOÈ

HA SENSO PERCHÉ y_2 È REGOLARE PER $\varphi \circ f$ IN QUANTO $(\varphi \circ f)^{-1}(y_2) = f^{-1}(\varphi^{-1}(y_2)) = f^{-1}(y_1)$

$$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y_1) \quad d(\varphi \circ f)_x = d\varphi_{y_1} \circ \underbrace{df_x} \Rightarrow \text{È BIGETTIVO}$$

$d\varphi_{y_1}$: φ È DIFFEO QUINDI $d\varphi_{y_1}$ È INVERTIBILE

df_x: È BIGETTIVO PERCHÉ y_1 È REGOLARE PER f

$\Rightarrow y_2$ È REGOLARE PER $\varphi \circ f$.

INOLTRE $\forall x \in f^{-1}(y_1)$ $\quad \varepsilon(df_x) = \varepsilon(d(\varphi \circ f)_x)$

PERCHÉ $d\varphi_{y_1}$ È POSITIVO IN QUANTO PRESERVA L'ORIENTAZIONE PERCHÉ È OMOTOPO ALL'IDENTITÀ.

DUNQUE $\deg(f, y_1) = \sum_{x \in f^{-1}(y_1)} \varepsilon(df_x) =$

$$= \underbrace{\sum_{x \in (\varphi \circ f)^{-1}(y_2)}}_{} \varepsilon\left(d(f \circ \varphi)_x\right) = \deg(\varphi \circ f, y_2) = \deg(f, y_2)$$

↳ AVEVAMO VISTO $f^{-1}(y_1) = (\varphi \circ f)^{-1}(y_2)$

FINALMENTE ABBIAMO FINITO CON LA DEFINIZIONE DI $\deg f$ PERCHÈ ABBIAMO ANCHE MOSTRATO CHE È INDIPENDENTE DA y.

<u>COROLLARIO</u> $\deg(f)$ È BEN DEFINITO E SE g È OMOTOPA A f $\Rightarrow \deg(g) = \deg(f)$

<u>DIM</u> BASTA PRENDERE $y \in R_g \cap R_f$ REGOLARE SIA PER f CHE PER g (ESISTE PER SARD) E USARE I TEOREMI PRECEDENTI

<u>OSS</u> ① SE f NON È SURGETTIVA, PRESO $y \in N - f(M)$, y È REGOLARE e $\deg(f) = \deg(f, y) = 0$ PERCHÈ LA CONTROIMMAGINE È VUOTA

<u>OSS ②</u> SE f È UN DIFFEO, $\deg f = \pm 1$ A SECONDA CHE PRESERVI O INVERTA L'ORIENTAZIONE

(f È DIFFEO $\Rightarrow f^{-1}(y) = \{$UN SOLO PUNTO$\}$

<u>OSS ③</u> SE f È OMOTOPA AD UN DIFFEO $\Rightarrow$ È SURGETTIVA

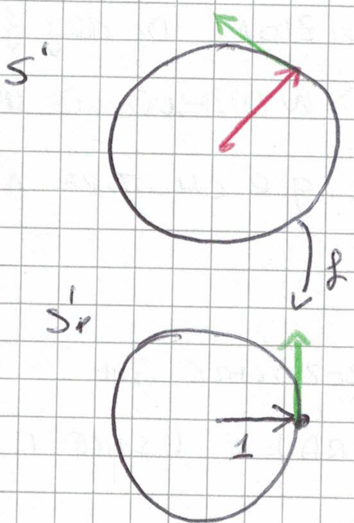
ESEMPI DI CALCOLO DI $\deg(f)$

- CONSIDERIAMO $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ QUINDI GLI $z \in \mathbb{C}$ $|z|=1$

  CONSIDERIAMO $f: S^1 \to S^1$ HA GRADO m $\forall m \in \mathbb{Z}$

  $z \mapsto z^m$

INFATTI $f^{-1}(1) = \{ e^{\frac{2\pi i k}{m}} \mid k=0, \dots, m-1 \}$ HA CARDINALITÀ m



$e^{i\frac{2\pi k}{m}}$

$i e^{i\frac{2\pi k}{m}}$ $\rightarrow$ PERCHÉ IN $\mathbb{C}$ BASTA MOLTIPLICARE PER i PER RUOTARE DI $\pi/2$

$df_{e^{\frac{2\pi k i}{m}}}\Big(\underbrace{i e^{\frac{2\pi k i}{m}}} \Big)$

IDENTIFICO $df_z = f'(z)$

$f' = m z^{m-1}$ (MOLTIPLICARE CON $f'(z)$ È COME VALUTARE df)

È UN GENERATORE POSITIVO DI $T_{e^{\frac{i2\pi k}{m}}} S^1$

$$\Rightarrow df_{e^{\frac{i2\pi k}{m}}}\left(i e^{\frac{i2\pi k}{m}} \right) = m \cdot \left(e^{\frac{i2k\pi k}{m}}\right)^{m-1} \cdot i \cdot e^{\frac{i2k\pi k}{m}} =$$

$$= i \cdot m$$

- SE $m>0 \Rightarrow im$ È UN VETTORE POSITIVO IN $T_1 S^1$ $\uparrow$
- SE $m=0 \Rightarrow i \cdot 0$ È NULLO
- SE $m<0 \Rightarrow im$ È UN VETTORE NEGATIVO IN $T_1 S^1$ $\downarrow$

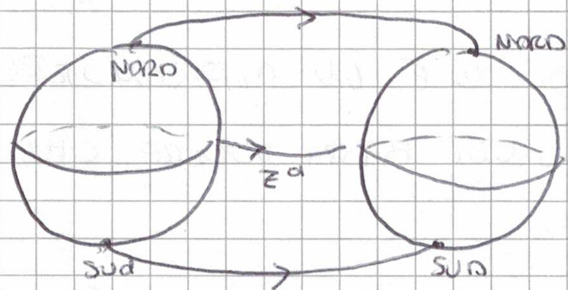
$$\Rightarrow \deg(f) = \deg(f,1) = m$$

CIT! "ALL'ORALE MI BASTA UN DISEGNINO NON MI SERVE IL CONTO COMPLETO"

OSS $\forall d \in \mathbb{Z} \quad \exists f: S^n \to S^n$ DI GRADO d

MEZZI PER INDUZIONE SU n

$n = 2$



SU OGNI PARALLELO, LO RISCALO A S^1 E POI APPLICO $z \to z^d$ SULLA QUOTA z, E I POLI LI MANDO NEI POLI, QUINDI RISTRETTO ALLA PARTE VERTICALE df È L'IDENTITÀ QUINDI NON INFLUENZA IL GRADO E SI CONTA SOLO LA PARTE PARALLELA PER IL GRADO. STESSO RAGIONAMENTO SU S^n SU SEZIONE A QUOTA FISSATA PORTANDOLE IN S^{n-1}.

PROP $f: M \to N \quad g: N \to Z$ MAPPE TRA VARIETÀ COMPATTE E CONNESSE

ALLORA $\deg(g \circ f) = \deg(f) \cdot \deg(g)$

DIM PRESO $z \in Z$ REGOLARE SIA PER g CHE PER $g \circ f$ (ESISTE PER SARD)

$$\deg(g \circ f)_z = \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(z)} \varepsilon(d(g \circ f)_x) = \sum_{y \in g^{-1}(z)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(dg_y) \cdot \varepsilon(df_x) =$$

QUESTO PERCHÉ f o g INVERTONO E QUINDI LA COMPOSIZIONE SI COMPORTA COME IL SEGNO PER PRODOTTO.

OSS PER INVERTIBILITÀ DI $d(g \circ f)_x$ HO MOSTRATO CHE TUTTI GLI y SONO REGOLARI PER f

$$= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \varepsilon(dg_y) \cdot \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varepsilon(df_x) = \sum_{z \in g^{-1}(z)} \varepsilon(dg)_y \cdot \deg f =$$

$$= \deg f \cdot \sum_{y \in g^{-1}(z)} \varepsilon(dg_y) = \deg f \cdot \deg g.$$

CIOÈ IL GRADO È MOLTIPLICATIVO PER LA COMPOSIZIONE.

PROP $r: S^n \to S^n$ UNA RIFLESSIONE RISPETTO AD UN ~~U~~ IPERPIANO COORDINATO. Allora $\deg(r) = -1$.

DIM $r \circ r = Id$, QUINDI r È UN DIFFEOMORFISMO

$\Rightarrow \deg r = \pm 1$ E QUINDI BASTA VEDERE CHE r INVERTE L'ORIENTAZIONE DI S^n.

ATTENZIONE: QUESTA COSA NON È COSÌ FACILE DA OTTENERE OSSERVANDO SOLO CHE r INVERTE L'ORIENTAZIONE DI $\mathbb{R}^{n+1}$

SE PER ESEMPIO $r(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$

PRENDO p t.c. $r(p) = p$ TIPO $p = (0, 1, 0, \ldots, 0)$

INOLTRE $r^{-1}(p) = p$ PERCHÈ r È DIFFEO

$p = e_2$ $\quad T_{e_2} S^n = e_2^\perp = \mathrm{Span}(e_1, e_3, \ldots, e_{n+1})$ E

$dr: T_p(S^n) \to T_p(S^n) \Rightarrow dr = r|_{T_p S^n}$ PERCHÈ r = RIFLESSIONE È LINEARE

$r(e_1) = -e_1$ e $r(e_i) = e_i \quad i = 3, \ldots, n+1$

$\Rightarrow$ RISPETTO ALLA BASE $\{e_1, e_3, \ldots, e_{n+1}\}$ dr in $T_p S^n$ È RAPP. DA

$$\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

E QUINDI $\varepsilon(dr_p) = -1$

$$\Rightarrow \deg(r) = \sum_{x \in r^{-1}(p)} \varepsilon(dr)_x \underset{\uparrow}{=} \varepsilon(dr)_p = -1$$

per l'unico ~~in~~ x in $r^{-1}(p)$

DEF LA MAPPA ANTIPODALE $A: S^n \to S^n$

$p \to -p$

$A = -Id|_{S^n}$

PROP $A: S^n \longrightarrow S^n$ $\quad \deg A = (-1)^{n+1}$

DIM $r_i : S^n \longrightarrow S^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ -x_i \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow A = r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{n+1}$$

$$\Rightarrow \deg A = \prod_{i=1}^{n+1} \deg(r_i) = (-1)^{n+1}$$

TEOREMA SONO FATTI EQUIVALENTI:

① S^n È PETTINABILE

② n È DISPARI

③ $A: S^n \longrightarrow S^n$ È OMOTOPA ALL'IDENTITÀ

DIM ② $\Rightarrow$ ① PER MOSTRARLO ESIBISCO UN CAMPO MAI NULLO IN $T_p S^n$ $\forall p \in S^n$

SE n È DISPARI $\Rightarrow n+1$ È PARI

$v: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \\ \vdots \\ -x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

HA SENSO FARLO POICHÉ ~~x~~ $n+1$ È PARI.

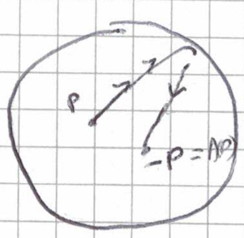
PER COSTRUZIONE $v(P)$ È C^∞, $v(P) \neq 0$ $\forall p \in S^n$

INOLTRE $\langle v(P), p \rangle = 0 \Rightarrow v(P) \in p^\perp$ $\forall p \in S^n$ MA $p^\perp = T_p S^n$

DUNQUE $v(P) \in T_p S^n$

① $\Rightarrow$ ③ POICHÉ $\exists$ $v(P)$ MAI NULLO POSSO SUPPORRE DI AVERE UN CAMPO TANGENTE UNITARIO $v: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ A PATTO DI NORMALIZZARLO.

IDEA



$\forall p$ PRENDO ~~PER~~ IL CERCHIO DI RAGGIO MAX PER P CON VETTORE TG $v(P)$ E PORTO P IN $A(P)$ SEGUENDO QUEL CERCHIO.

CIOÈ PRENDO: $H: S^n \times [0,1] \longrightarrow S^n$

$$H(p,t) = \cos(\pi t)\cdot p + \sin(\pi t)\, v(p)$$

$$H(p,0) = Id(p)$$

$$H(p,1) = A(p) \qquad \forall p \in S^n$$

INOLTRE $\|H(p,t)\|^2 = \cos^2(\pi t)\cdot \underset{1}{\underset{\parallel}{\|p\|^2}} + \sin^2(t\pi)\underset{1}{\underset{\parallel}{\|v(p)\|^2}} + 2\underset{v(p)\in T_p}{\underset{0}{\underset{\parallel}{\langle p, v\rangle}}} \cos(\pi t)\sin(\pi t)$

$= 1$ QUINDI H È BEN DEFINITA A VALORI IN S^n

QUINDI È L'OMOTOPIA CERCATA.

③ => ② SE A È OMOTOPA ALL'IDENTITÀ => $\deg A = (-1)^{n+1} = 1$

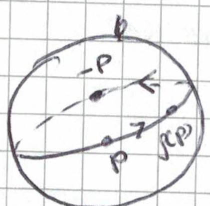
$\Longleftrightarrow$ $n+1$ PARI

$\Updownarrow$

n È DISPARI

<u>ESERCIZIO</u> n PARI $f: S^n \longrightarrow S^n$ ALLORA $\exists p \in S^n$ tc $f(p)=p$ o $f(p)=-p$

<u>DIM</u> $\forall p$ tc $f(p)\neq p$ => PRENDO IL CERCHIO DI RAGGIO MAX TRA p E $f(p)$ E PORTO $f(p)$ IN $-p$ CON UN'OMOTOPIA => $f(p)$ È OMOTOPA ALL'ANTIPODALE.



Se $\exists p$ tc $f(p)=p$ => A È OMOTOPA ALL'IDENTITÀ ALLORA $A(p)$ SAREBBE OMOTOPA ALL'ID => n SAREBBE DISPARI.

SEGUE DA PAG. 158 APPUNTI.