

Mappa pseudo-sviluppante per triangolazioni ideali di 3-varietà topologicamente finite

Enrico Berni

Università di Pisa

e.berni@studenti.unipi.it

25 luglio 2024

In un articolo del 1985, Neumann e Zagier studiano la variazione del volume di una 3-varietà iperbolica con cuspidi di volume finito, usando una triangolazione iperbolica ideale della varietà. Il lavoro si basa su una precedente costruzione dovuta a Thurston (1978), che associa alla triangolazione ideale "topologica" uno spazio di parametri, in cui variano le forme dei tetraedri iperbolici che soddisfano certe equazioni polinomiali.

In un articolo del 1985, Neumann e Zagier studiano la variazione del volume di una 3-varietà iperbolica con cuspidi di volume finito, usando una triangolazione iperbolica ideale della varietà. Il lavoro si basa su una precedente costruzione dovuta a Thurston (1978), che associa alla triangolazione ideale "topologica" uno spazio di parametri, in cui variano le forme dei tetraedri iperbolici che soddisfano certe equazioni polinomiali. Questa costruzione si generalizza al caso di una qualsiasi triangolazione ideale di una 3-varietà non compatta con cuspidi toriche (Francaviglia, Yoshida, Tillman, Segerman), ed un passo fondamentale è quello di costruire una cosiddetta mappa pseudo-sviluppante per produrre una rappresentazione del gruppo fondamentale in $Isom_+(\mathbb{H}^3) \cong PSL(2, \mathbb{C})$.

Nel 2013, Feng Luo ha iniziato lo studio dello spazio dei parametri per triangolazioni ideali di varietà arbitrarie, che emergono da triangolazioni di 3-varietà chiuse a cui vengono rimossi i vertici.

Nel corso del seminario, considereremo il caso più generale; l'obiettivo sarà il seguente risultato:

Nel 2013, Feng Luo ha iniziato lo studio dello spazio dei parametri per triangolazioni ideali di varietà arbitrarie, che emergono da triangolazioni di 3-varietà chiuse a cui vengono rimossi i vertici.

Nel corso del seminario, considereremo il caso più generale; l'obiettivo sarà il seguente risultato:

Teorema 1

Sia N una 3-varietà topologicamente finita, orientabile e idealmente triangolata. Se esiste una soluzione delle equazioni di incollamento iperboliche, esistono una mappa pseudo-sviluppante $\tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$ ed una rappresentazione $\pi_1(N) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ che rende tale mappa equivariante. Entrambe le costruzioni dipendono dalla triangolazione.

- 1 Triangolazioni con lati essenziali
- 2 Varietà delle deformazioni
- 3 Corpi con manici
- 4 Strutture con singolarità coniche

Ricordiamo la definizione di triangolazione ideale:

Definizione

Una triangolazione ideale \mathcal{T} di una 3-varietà topologicamente finita N è una famiglia disgiunta a due a due di semplici euclidei $\tilde{\Delta} = \bigcup \tilde{\Delta}_k$, dotata di una famiglia Φ di isometrie euclidee tra le facce dei tetraedri (accoppiamenti), tali che $N = (\tilde{\Delta} \setminus \tilde{\Delta}^{(0)})/\Phi$.

Triangolazioni con lati essenziali

Ricordiamo la definizione di triangolazione ideale:

Definizione

Una triangolazione ideale \mathcal{T} di una 3-varietà topologicamente finita N è una famiglia disgiunta a due a due di semplici euclidei $\tilde{\Delta} = \bigcup \tilde{\Delta}_k$, dotata di una famiglia Φ di isometrie euclidee tra le facce dei tetraedri (accoppiamenti), tali che $N = (\tilde{\Delta} \setminus \tilde{\Delta}^{(0)})/\Phi$.

Fatto

Ogni 3-varietà non compatta topologicamente finita ammette una triangolazione ideale.

Triangolazioni con lati essenziali

In seguito, $P = \tilde{\Delta}/\Phi$ sarà la pseudo-varietà associata ad N , con proiezione $p : \tilde{\Delta} \rightarrow P$.

Osservazione

Se σ è un k -simpleso in $\tilde{\Delta}$, $p(\sigma)$ è un semplice (possibilmente singolare) in P .

Estendiamo dunque tutta la terminologia delle triangolazioni ideali ai semplici singolari; da ora in poi non faremo distinzioni tra N e P .

Triangolazioni con lati essenziali

In seguito, $P = \tilde{\Delta}/\Phi$ sarà la pseudo-varietà associata ad N , con proiezione $p : \tilde{\Delta} \rightarrow P$.

Osservazione

Se σ è un k -simpleso in $\tilde{\Delta}$, $p(\sigma)$ è un semplice (possibilmente singolare) in P .

Estendiamo dunque tutta la terminologia delle triangolazioni ideali ai semplici singolari; da ora in poi non faremo distinzioni tra N e P .

Definizione

Definiamo il grado di un lato e in P come il numero di 1-simplessi della triangolazione che vengono mappati in e .

Triangolazioni con lati essenziali

Sia C il cuore compatto di N :

Osservazione

Il rivestimento universale \tilde{P} ha una triangolazione naturale, proveniente dalla decomposizione di \tilde{C} in tetraedri troncati e dalla costruzione della compattificazione alle fini.

\tilde{N} è idealmente triangolata dal sollevamento della triangolazione ideale di N ; equivalentemente, possiamo vederla idealmente triangolata dalla restrizione della triangolazione su \tilde{P} al complementare dei vertici.

Triangolazioni con lati essenziali

Definizione

Una triangolazione \mathcal{T} di P è non singolare se nessun tetraedro ammette auto-identificazioni.

Una triangolazione è quasi non singolare se le uniche auto-identificazioni sono sui vertici.

Triangolazioni con lati essenziali

Definizione

Una triangolazione \mathcal{T} di P è non singolare se nessun tetraedro ammette auto-identificazioni.

Una triangolazione è quasi non singolare se le uniche auto-identificazioni sono sui vertici.

Definizione

Una triangolazione \mathcal{T} di P è virtualmente non singolare se la triangolazione indotta su \tilde{P} è non singolare.

Una triangolazione è virtualmente quasi non singolare se la triangolazione indotta su \tilde{P} è quasi non singolare.

Triangolazioni con lati essenziali

Definizione

Una triangolazione \mathcal{T} di P è non singolare se nessun tetraedro ammette auto-identificazioni.

Una triangolazione è quasi non singolare se le uniche auto-identificazioni sono sui vertici.

Definizione

Una triangolazione \mathcal{T} di P è virtualmente non singolare se la triangolazione indotta su \tilde{P} è non singolare.

Una triangolazione è virtualmente quasi non singolare se la triangolazione indotta su \tilde{P} è quasi non singolare.

Fatto

Una triangolazione \mathcal{T} di P è virtualmente quasi non singolare se e solo se ogni tetraedro ideale in \tilde{N} è embedded.

Triangolazioni con lati essenziali

Definizione

Un lato e in P è essenziale se $e \cap C$ non è omotopo nel bordo.

Triangolazioni con lati essenziali

Definizione

Un lato e in P è essenziale se $e \cap C$ non è omotopo nel bordo.

Lemma

\mathcal{T} è virtualmente non singolare se e solo se ogni lato in P è essenziale.

Triangolazioni con lati essenziali

Definizione

Un lato e in P è essenziale se $e \cap C$ non è omotopo nel bordo.

Lemma

\mathcal{T} è virtualmente non singolare se e solo se ogni lato in P è essenziale.

Dimostrazione.

Suopponiamo che e sia non essenziale, cioè che $e \cap C$ sia omotopo nel bordo; il suo sollevamento \tilde{e} è un lato in \tilde{P} con estremi sullo stesso vertice. Questo implica che ogni tetraedro contenente \tilde{e} non è embedded.

Triangolazioni con lati essenziali

Definizione

Un lato e in P è essenziale se $e \cap C$ non è omotopo nel bordo.

Lemma

\mathcal{T} è virtualmente non singolare se e solo se ogni lato in P è essenziale.

Dimostrazione.

Suopponiamo che e sia non essenziale, cioè che $e \cap C$ sia omotopo nel bordo; il suo sollevamento \tilde{e} è un lato in \tilde{P} con estremi sullo stesso vertice. Questo implica che ogni tetraedro contenente \tilde{e} non è embedded.

Viceversa, se \mathcal{T} non è virtualmente non singolare, esiste un tetraedro in $\tilde{P}^{(3)}$ contenente un lato con estremi identificati su un solo vertice. Allora, gli estremi di $\alpha = e \cap \tilde{C}$ sono nella stessa componente di bordo di \tilde{C} ; connettendoli con un arco β , sappiamo che $\alpha \cup \beta$ borda un disco in \tilde{C} ; la proiezione di α su C è dunque omotopa a quella di β , ed il lato che la contiene non è essenziale. □

Osservazione

Se e non è essenziale in P , è omotopicamente nullo.

Osservazione

Se e non è essenziale in P , è omotopicamente nullo.

Il viceversa non vale: per esempio, la triangolazione ideale di un link in S^3 dà origine ad una pseudo-varietà semplicemente connessa, con lati non omotopi nel bordo.

Sia Δ^3 il 3-simplesso standard con un'orientazione scelta. Etichettiamo i lati uscenti da un vertice come z , z' , z'' , di modo che lati opposti abbiano lo stesso nome. Allora, l'ordine ciclico di z , z' , z'' dipende soltanto dall'orientazione data.

Da questo segue che a meno di simmetrie che preservino l'orientazione, esistono due decorazioni possibili; fissiamone una.

Sia Δ^3 il 3-simplesso standard con un'orientazione scelta. Etichettiamo i lati uscenti da un vertice come z, z', z'' , di modo che lati opposti abbiano lo stesso nome. Allora, l'ordine ciclico di z, z', z'' dipende soltanto dall'orientazione data.

Da questo segue che a meno di simmetrie che preservino l'orientazione, esistono due decorazioni possibili; fissiamone una.

Le etichette date si chiamano parametri di forma del simplesso.

Supponiamo che $P^{(3)} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$; per ogni σ_i , fissiamo una mappa simpliciale che preservi l'orientazione, $f_i : \Delta^3 \rightarrow \sigma_i$.

Sia $P^{(1)} = \{e_1, \dots, e_k\}$, e sia $a_{ij}^{(k)}$ il numero di lati in $f_i^{-1}(e_j)$ con etichetta $z^{(k)}$.

Supponiamo che $P^{(3)} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$; per ogni σ_i , fissiamo una mappa simpliciale che preservi l'orientazione, $f_i : \Delta^3 \rightarrow \sigma_i$.

Sia $P^{(1)} = \{e_1, \dots, e_k\}$, e sia $a_{ij}^{(k)}$ il numero di lati in $f_i^{-1}(e_j)$ con etichetta $z^{(k)}$.

Definizione

Definiamo, per $1 \leq i \leq n$,

$$p_i = z_i(1 - z_i'') - 1, \quad p_i' = z_i'(1 - z_i) - 1, \quad p_i'' = z_i''(1 - z_i') - 1$$

Le relazioni $p_i = p_i' = p_i'' = 0$ si chiamano relazioni parametriche.

Definizione

Per $1 \leq j \leq k$, definiamo

$$g_j = \prod_{i=1}^n z_i^{a_{ij}} (z'_i)^{a'_{ij}} (z''_i)^{a''_{ij}} - 1.$$

Le equazioni $g_j = 0$ si chiamano equazioni di incollamento iperboliche.

Definizione

Per $1 \leq j \leq k$, definiamo

$$g_j = \prod_{i=1}^n z_i^{a_{ij}} (z'_i)^{a'_{ij}} (z''_i)^{a''_{ij}} - 1.$$

Le equazioni $g_j = 0$ si chiamano equazioni di incollamento iperboliche.

Definizione

La varietà delle deformazioni $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ è la varietà in $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^{3n}$ definita dalle equazioni di incollamento iperboliche e dalle relazioni parametriche.

Dato $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, ogni tetraedro ha una decorazione sui lati che può essere sollevata ad \tilde{N} in modo equivariante. Vogliamo definire una mappa continua $\Phi : \tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$, in modo che

Dato $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, ogni tetraedro ha una decorazione sui lati che può essere sollevata ad \tilde{N} in modo equivariante. Vogliamo definire una mappa continua $\Phi : \tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$, in modo che

- ogni tetraedro $\sigma \subseteq \tilde{N}$ sia mappato in un tetraedro iperbolico ideale $\Delta(\sigma)$;
- Le decorazioni dei lati di $\Delta(\sigma)$ corrispondano ai parametri di forma determinati dalla struttura iperbolica.

Dato $Z \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$, ogni tetraedro ha una decorazione sui lati che può essere sollevata ad \tilde{N} in modo equivariante. Vogliamo definire una mappa continua $\Phi : \tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$, in modo che

- ogni tetraedro $\sigma \subseteq \tilde{N}$ sia mappato in un tetraedro iperbolico ideale $\Delta(\sigma)$;
- Le decorazioni dei lati di $\Delta(\sigma)$ corrispondano ai parametri di forma determinati dalla struttura iperbolica.

Pertanto, da ora in poi assumeremo che ogni triangolazione sia virtualmente quasi non singolare.

Inoltre, per avere una scelta coerente di parametrizzazioni per le mappe $\sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$, supporremo che queste mappe siano semplici dritti.

Ogni 3-simplesso in \tilde{N} eredita un'etichettatura dei vertici da Z . Prendiamo un tetraedro $\sigma \subseteq \tilde{N}$, ed un embedding in \mathbb{H}^3 della forma data.

Osservazione

Ogni tetraedro che condivide una faccia con σ ha un solo embedding in \mathbb{H}^3 che coincida con la restrizione dell'embedding di σ alla faccia comune, e che abbia forma determinata da Z .

Varietà delle deformazioni

Ogni 3-simplesso in \tilde{N} eredita un'etichettatura dei vertici da Z . Prendiamo un tetraedro $\sigma \subseteq \tilde{N}$, ed un embedding in \mathbb{H}^3 della forma data.

Osservazione

Ogni tetraedro che condivide una faccia con σ ha un solo embedding in \mathbb{H}^3 che coincida con la restrizione dell'embedding di σ alla faccia comune, e che abbia forma determinata da Z .

Osservazione

Se i parametri di forma del nuovo tetraedro danno ad un tetraedro ideale un'orientazione opposta a quella del primo, la mappa appena costruita non è localmente iniettiva lungo la faccia in comune.

Per questo, diamo a Φ il nome di mappa pseudo-sviluppante.

Lemma

Dato un embedding di $\sigma \subseteq \tilde{N}$, esiste un'unico modo di estenderlo ad una mappa continua e ben definita $\Phi_Z : \tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$, in modo che ogni tetraedro ideale in \tilde{N} venga mappato in un tetraedro iperbolico ideale della forma specificata.

Lemma

Dato un embedding di $\sigma \subseteq \tilde{N}$, esiste un'unico modo di estenderlo ad una mappa continua e ben definita $\Phi_Z : \tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$, in modo che ogni tetraedro ideale in \tilde{N} venga mappato in un tetraedro iperbolico ideale della forma specificata.

Lemma

Se $\mathcal{D}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ e \mathcal{T} è virtualmente quasi non singolare, allora \mathcal{T} è virtualmente non singolare.

Dimostrazione.

Sia $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$; supponiamo che il semplice ideale $\sigma \subseteq \tilde{N}$ abbia due vertici ideali nello stesso vertice materiale di \tilde{P} . Siano t e t' i triangoli normali in $\sigma \cap \partial\tilde{C}$ duali a tali vertici; dato che t e t' sono nel link dello stesso vertice di \tilde{P} , esiste un cammino in $\partial\tilde{C}$ che collega t e t' , e che passa attraverso finiti triangoli normali.

Dimostrazione.

Sia $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$; supponiamo che il semplice ideale $\sigma \subseteq \tilde{N}$ abbia due vertici ideali nello stesso vertice materiale di \tilde{P} . Siano t e t' i triangoli normali in $\sigma \cap \partial\tilde{C}$ duali a tali vertici; dato che t e t' sono nel link dello stesso vertice di \tilde{P} , esiste un cammino in $\partial\tilde{C}$ che collega t e t' , e che passa attraverso finiti triangoli normali. Il cammino corrisponde ad una sequenza finita $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ di tetraedri ideali in \tilde{N} , e ad una corrispondente sequenza finita di vertici ideali dei σ_i , duali ai triangoli.

Dimostrazione.

Sia $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$; supponiamo che il semplice ideale $\sigma \subseteq \tilde{N}$ abbia due vertici ideali nello stesso vertice materiale di \tilde{P} . Siano t e t' i triangoli normali in $\sigma \cap \partial\tilde{C}$ duali a tali vertici; dato che t e t' sono nel link dello stesso vertice di \tilde{P} , esiste un cammino in $\partial\tilde{C}$ che collega t e t' , e che passa attraverso finiti triangoli normali. Il cammino corrisponde ad una sequenza finita $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ di tetraedri ideali in \tilde{N} , e ad una corrispondente sequenza finita di vertici ideali dei σ_i , duali ai triangoli.

La mappa Φ_Z si estende per mappare questi vertici ideali in $\overline{\mathbb{H}^3}$, e sviluppando lungo la successione di tetraedri, osserviamo che $\Phi_Z(v_1) = \dots = \Phi_Z(v_k)$. Tuttavia, essendo v_1 e v_k due vertici distinti di σ , la sua immagine non è un semplice iperbolico ideale, e dunque la mappa di Yoshida non è ben definita, contraddicendo l'assunzione fatta su \mathcal{T} . \square

Corollario

Se la mappa di Yoshida $\Phi_Z : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{H}^3$ è ben definita, si estende ad una mappa continua $\bar{\Phi}_Z : \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{H}^3$.

Supponiamo da ora in avanti che la mappa di Yoshida sia ben definita. Per ogni $Z \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$, Φ_Z può essere usata per definire una rappresentazione $\rho_Z : \pi_1(N) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ nel modo seguente:

Supponiamo da ora in avanti che la mappa di Yoshida sia ben definita. Per ogni $Z \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$, Φ_Z può essere usata per definire una rappresentazione $\rho_Z : \pi_1(N) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ nel modo seguente: una rappresentazione in $PSL(2, \mathbb{C})$ non è altro che un'azione per isometrie positive su \mathbb{H}^3 , data da $\Phi_Z(\gamma \cdot x) = \rho_Z(\gamma)\Phi_Z(x)$.

Supponiamo da ora in avanti che la mappa di Yoshida sia ben definita. Per ogni $Z \in \mathfrak{D}(\mathcal{T})$, Φ_Z può essere usata per definire una rappresentazione $\rho_Z : \pi_1(N) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ nel modo seguente: una rappresentazione in $PSL(2, \mathbb{C})$ non è altro che un'azione per isometrie positive su \mathbb{H}^3 , data da $\Phi_Z(\gamma \cdot x) = \rho_Z(\gamma)\Phi_Z(x)$.

Osservazione

Dato che ρ_Z dipende soltanto dall'embedding di un tetraedro iniziale, è ben definita soltanto a meno di coniugio.

Abbiamo dunque ben definito una mappa $\chi_{\mathcal{T}} : \mathfrak{D}(\mathcal{T}) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(N)$ nella varietà dei caratteri in $PSL(2, \mathbb{C})$.

Osservazione

La rappresentazione associata ad una soluzione delle equazioni di incollamento iperboliche potrebbe essere riducibile, o anche triviale.

Osservazione

La rappresentazione associata ad una soluzione delle equazioni di incollamento iperboliche potrebbe essere riducibile, o anche triviale.

Definizione

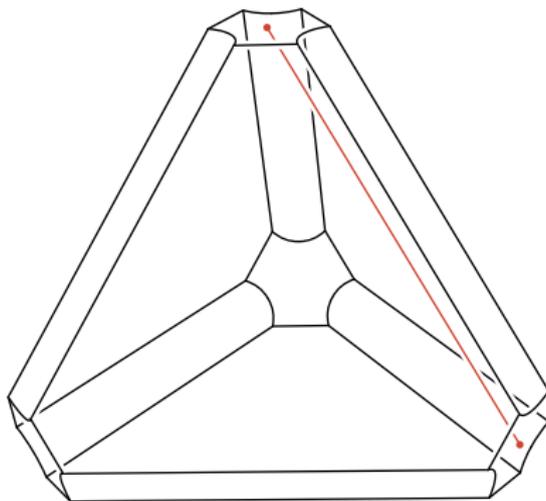
Un accoppiamento elementare di un tetraedro iperbolico ideale Δ è un elemento di $PSL(2, \mathbb{C})$ che mandi una faccia di Δ in un'altra.

Se il morfismo di rivestimento $\gamma \in \pi_1(N)$ mappa il triangolo ideale $\tau \subseteq \tilde{N}$ nel triangolo ideale $\gamma \cdot \tau$, e $\sigma_0, \dots, \sigma_k$ è una sequenza sviluppante di tetraedri tali che $\tau \subseteq \sigma_0$, $\gamma \cdot \tau \subseteq \sigma_k$, questo ci fornisce una sequenza associata di accoppiamenti elementari, tali che ρ_Z sia il loro prodotto.

Consideriamo la varietà compatta $H := C \setminus \nu(P^{(1)})$; H è anche un corpo con manici, ed eredita da \mathcal{T} una decomposizione in tetraedri doppiamente troncati, sia ai vertici che ai lati:

Corpi con manici

Consideriamo la varietà compatta $H := C \setminus \nu(P^{(1)})$; H è anche un corpo con manici, ed eredita da \mathcal{T} una decomposizione in tetraedri doppiamente troncati, sia ai vertici che ai lati:



Osserviamo che un tetraedro doppiamente troncato ha:

- Quattro facce esagonali di bordo, contenute in ∂C ;
- Sei facce rettangolari in $\partial H \setminus \partial C$;
- Quattro facce esagonali interne.

Osserviamo che un tetraedro doppiamente troncato ha:

- Quattro facce esagonali di bordo, contenute in ∂C ;
- Sei facce rettangolari in $\partial H \setminus \partial C$;
- Quattro facce esagonali interne.

Consideriamo la decomposizione di ∂H dato dall'unione del bordo relativo ai vertici, $\partial_v H = \partial H \cap \partial C$, composto dalle facce esagonali di bordo, e del bordo relativo ai lati, $\partial_l H$, composto dalle facce rettangolari.

Dato un rivestimento K di H , definiamo uno spazio topologico K^* come segue: solleviamo innanzitutto la decomposizione di H a K . ∂K si decompone a sua volta come ∂H , e le componenti relative ai lati sono della forma $S^1 \times [0, 1]$ o $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Dato un rivestimento K di H , definiamo uno spazio topologico K^* come segue: solleviamo innanzitutto la decomposizione di H a K . ∂K si decompone a sua volta come ∂H , e le componenti relative ai lati sono della forma $S^1 \times [0, 1]$ o $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Definiamo K^* come il collassamento successivo prima delle componenti di bordo relative ai lati, poi delle componenti di bordo restanti (nel quoziente).

Dato un rivestimento K di H , definiamo uno spazio topologico K^* come segue: solleviamo innanzitutto la decomposizione di H a K . ∂K si decompone a sua volta come ∂H , e le componenti relative ai lati sono della forma $S^1 \times [0, 1]$ o $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

Definiamo K^* come il collassamento successivo prima delle componenti di bordo relative ai lati, poi delle componenti di bordo restanti (nel quoziente).

Osservazione

- Esattamente come nella costruzione della pseudo-varietà P , possiamo costruire K^* in modo equivalente incollando dei coni su K , invece di quozientare;
- K^* è unione di tetraedri identificati lungo delle facce;
- K^* può avere lati incidenti con infiniti tetraedri.

Siamo adesso interessati a studiare i due spazi \tilde{H} e \tilde{H}^* ; dato che H è un corpo con manici, \tilde{H} è omotopicamente equivalente ad un albero, e la costruzione ci dà una proiezione naturale $\tilde{H}^* \rightarrow P$.

Siamo adesso interessati a studiare i due spazi \tilde{H} e \tilde{H}^* ; dato che H è un corpo con manici, \tilde{H} è omotopicamente equivalente ad un albero, e la costruzione ci dà una proiezione naturale $\tilde{H}^* \rightarrow P$.

Lemma

Ogni tetraedro in \tilde{H}^ è non singolare.*

Dimostrazione.

Diamo un'idea della dimostrazione; se c'è un tetraedro con delle auto-identificazioni di qualche tipo, esisterà una coppia di vertici che viene identificata, e dunque un lato e con gli estremi identificati. Supponiamo per assurdo che questo sia il caso.

Dimostrazione.

Allora, esisterebbe un arco β avente gli stessi estremi di e , contenuto in una componente di $\partial_v \tilde{H}$, e che non interseca alcun lato oltre ad e . Prendiamo un tale β che intersechi il numero minimo di tetraedri: dato che i tetraedri formano un albero, ci deve essere un tetraedro "foglia" σ lungo β , il quale entra ed esce da σ dallo stesso lato; allora, possiamo applicare un'omotopia per trasformare β in un cammino che non interseca σ , contraddicendo la minimalità. □

Dimostrazione.

Allora, esisterebbe un arco β avente gli stessi estremi di e , contenuto in una componente di $\partial_v \tilde{H}$, e che non interseca alcun lato oltre ad e . Prendiamo un tale β che intersechi il numero minimo di tetraedri: dato che i tetraedri formano un albero, ci deve essere un tetraedro "foglia" σ lungo β , il quale entra ed esce da σ dallo stesso lato; allora, possiamo applicare un'omotopia per trasformare β in un cammino che non interseca σ , contraddicendo la minimalità. \square

Osservazione

Dato che i lati di \tilde{H}^* hanno tutti grado infinito, non ci sono vincoli sui parametri di forma possibili per i tetraedri. Possiamo quindi definirli a piacere, e costruire una mappa pseudo-sviluppante $D : \tilde{H}^* \rightarrow \overline{\mathbb{H}^3}$.

Fatto

Se i parametri di forma in \tilde{H}^* sono i sollevamenti dei parametri di forma di H , esiste una ben definita rappresentazione $\rho : \pi_1(H) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$.

Teorema 1

Teorema

Sia N una 3-varietà topologicamente finita, orientabile e idealmente triangolata. Se esiste una soluzione delle equazioni di incollamento iperboliche, i lati della triangolazione sono tutti essenziali.

Teorema

Sia N una 3-varietà topologicamente finita, orientabile e idealmente triangolata. Se esiste una soluzione delle equazioni di incollamento iperboliche, i lati della triangolazione sono tutti essenziali.

Osserviamo innanzitutto che l'inclusione $H \hookrightarrow C$ induce un omomorfismo suriettivo $\pi_1(H) \rightarrow \pi_1(C)$. Il nucleo di questa mappa è generato dai lacci intorno agli anelli in $\partial_I H$. Dato un lato e , denotiamo con γ_e il laccio attorno all'anello corrispondente ad e , con un'orientazione arbitraria.

Teorema 1

Dimostrazione.

Per dimostrare il teorema, assumiamo per assurdo che esista una soluzione $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, ma che \mathcal{T} non sia virtualmente quasi non singolare, cioè che esista un lato non essenziale. Lavoreremo nel cuore compatto C di N . Diamo ai tetraedri in \tilde{H}^* i parametri di forma determinati da Z ; vi sono associate una mappa pseudo-sviluppante $D : \tilde{H}^* \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^3$ ed una rappresentazione $\rho : \pi_1(H) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$. Sia adesso e un lato non essenziale in N .

Teorema 1

Dimostrazione.

Per dimostrare il teorema, assumiamo per assurdo che esista una soluzione $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, ma che \mathcal{T} non sia virtualmente quasi non singolare, cioè che esista un lato non essenziale. Lavoreremo nel cuore compatto C di N . Diamo ai tetraedri in \tilde{H}^* i parametri di forma determinati da Z ; vi sono associate una mappa pseudo-sviluppante $D : \tilde{H}^* \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^3$ ed una rappresentazione $\rho : \pi_1(H) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$. Sia adesso e un lato non essenziale in N .

Consideriamo un cammino $\alpha' : [0, 1] \rightarrow H$, che sia la spina di una faccia rettangolare di un tetraedro doppiamente troncato, incidente all'anello di bordo corrispondente ad e .

Teorema 1

Dimostrazione.

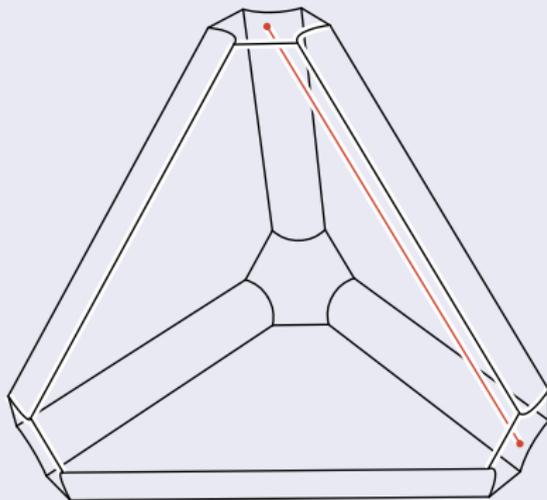
Per dimostrare il teorema, assumiamo per assurdo che esista una soluzione $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, ma che \mathcal{T} non sia virtualmente quasi non singolare, cioè che esista un lato non essenziale. Lavoreremo nel cuore compatto C di N . Diamo ai tetraedri in \tilde{H}^* i parametri di forma determinati da Z ; vi sono associate una mappa pseudo-sviluppante $D : \tilde{H}^* \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^3$ ed una rappresentazione $\rho : \pi_1(H) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$. Sia adesso e un lato non essenziale in N .

Consideriamo un cammino $\alpha' : [0, 1] \rightarrow H$, che sia la spina di una faccia rettangolare di un tetraedro doppiamente troncato, incidente all'anello di bordo corrispondente ad e .

Sia α il risultato di un'omotopia ad estremi fissi di α' verso l'interno, rendendolo parallelo ad e .

Teorema 1

Dimostrazione.

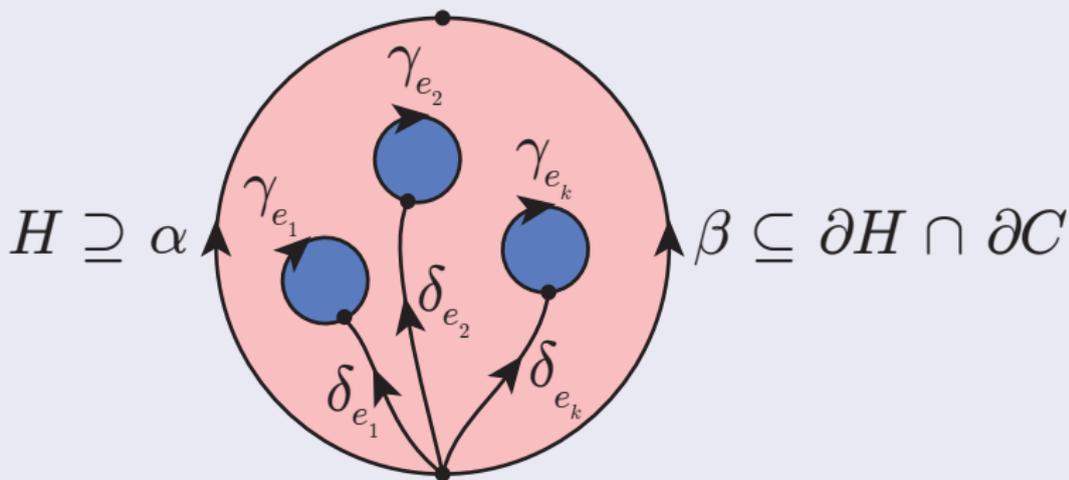


Dato che e è inessenziale, esiste una sua omotopia ad estremi fissi nel bordo ∂C , ed essendo α ed e paralleli, possiamo usare la stessa omotopia per spingere α nel bordo.

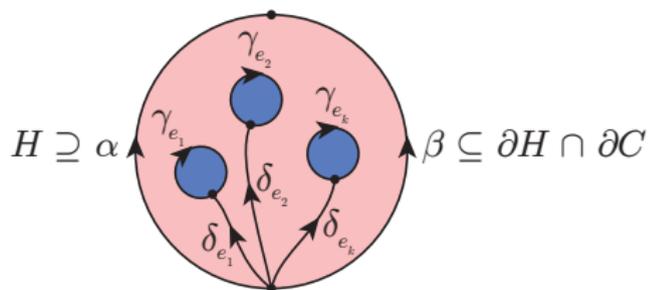
Teorema 1

Dimostrazione.

In particolare, a meno di piccole deformazioni possiamo supporre che una tale omotopia sia trasversa a $P^{(1)}$; sia essa h . Possiamo supporre che $h(D^2) \cap \partial(\nu(P^{(1)}))$ consista di un numero finito di cerchi, ognuno dei quali bordi un disco contenuto in $\nu(e_j)$ che interseca e_j una volta sola, e trasversalmente.



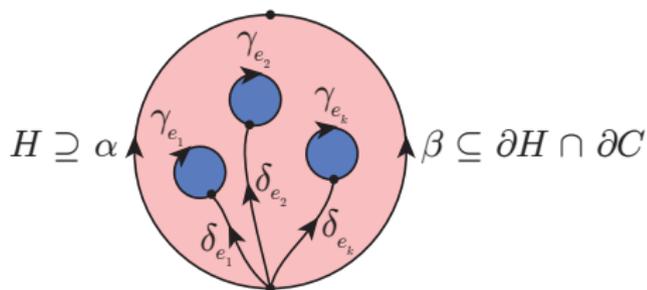
Teorema 1



Dimostrazione.

Allora, ogni cerchio circonda la parte cilindrica di ∂C corrispondente ad un lato di N , ed è omotopo ad un γ_e . In particolare, sia $\beta : [0, 1] \rightarrow \partial_v H$ il cammino risultante dall'omotopia.

Teorema 1



Dimostrazione.

Allora, ogni cerchio circonda la parte cilindrica di ∂C corrispondente ad un lato di N , ed è omotopo ad un γ_e . In particolare, sia $\beta : [0, 1] \rightarrow \partial_v H$ il cammino risultante dall'omotopia.

Scegliamo un punto base per H in $\alpha(0)$; $D^2 \cap h^{-1}(H)$ è una sfera con un certo numero di componenti di bordo, dove $\partial D^2 = \alpha\beta^{-1}$, ed ogni altra componente corrisponde a dei cerchi γ_k . Per ognuno di essi, scegliamo un cammino semplice $\delta_k \subseteq D^2 \cap h^{-1}(H)$ che colleghi $\alpha(0)$ e $\gamma_k(0)$.

Teorema 1

Dimostrazione.

Allora, in $\pi_1(H, \alpha(0))$ vale la relazione

$$[\alpha\beta^{-1}] = \prod[\delta_k\gamma_k\delta_k^{-1}] \quad (1)$$

Adesso, scegliamo un sollevamento di $\alpha(0)$ in \tilde{H} , e solleviamo α opportunamente. Siano $\tilde{\alpha}^*$ la composizione con la proiezione al quoziente, e $D\tilde{\alpha}^*$ l'immagine attraverso la mappa pseudo-sviluppante; definiamo $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}^*$ e $D\tilde{\beta}^*$ allo stesso modo.

Teorema 1

Dimostrazione.

Allora, in $\pi_1(H, \alpha(0))$ vale la relazione

$$[\alpha\beta^{-1}] = \prod [\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}] \quad (1)$$

Adesso, scegliamo un sollevamento di $\alpha(0)$ in \tilde{H} , e solleviamo α opportunamente. Siano $\tilde{\alpha}^*$ la composizione con la proiezione al quoziente, e $D\tilde{\alpha}^*$ l'immagine attraverso la mappa pseudo-sviluppante; definiamo $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta}^*$ e $D\tilde{\beta}^*$ allo stesso modo.

Fatte tutte queste scelte, $\rho([\alpha\beta^{-1}])$ è un'isometria di $\overline{\mathbb{H}}^3$ che manda $D\tilde{\alpha}^*(0)$ in $D\tilde{\alpha}^*(1)$.

Teorema 1

Dimostrazione.

Affermiamo adesso che per ogni termine del membro destro dell'identità (1), vale $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}]) = 1$.

Teorema 1

Dimostrazione.

Affermiamo adesso che per ogni termine del membro destro dell'identità (1), vale $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}]) = 1$.

Infatti, $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}])$ può essere espresso come prodotto di accoppiamenti elementari, ed i prodotti dovuti a δ_k e δ_k^{-1} sono inversi; dunque, $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}])$ è banale se e solo se lo è $\rho([\gamma_k])$.

Teorema 1

Dimostrazione.

Affermiamo adesso che per ogni termine del membro destro dell'identità (1), vale $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}]) = 1$.

Infatti, $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}])$ può essere espresso come prodotto di accoppiamenti elementari, ed i prodotti dovuti a δ_k e δ_k^{-1} sono inversi; dunque, $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}])$ è banale se e solo se lo è $\rho([\gamma_k])$. Tuttavia, γ_k si rappresenta come una rotazione che ha come autovalore il prodotto dei parametri di forma attorno al lato che corrisponde al laccio. Per ipotesi, questo è proprio 1, da cui segue che $\rho([\alpha \beta^{-1}]) = 1$, assurdo. □

Teorema 1

Dimostrazione.

Affermiamo adesso che per ogni termine del membro destro dell'identità (1), vale $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}]) = 1$.

Infatti, $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}])$ può essere espresso come prodotto di accoppiamenti elementari, ed i prodotti dovuti a δ_k e δ_k^{-1} sono inversi; dunque, $\rho([\delta_k \gamma_k \delta_k^{-1}])$ è banale se e solo se lo è $\rho([\gamma_k])$. Tuttavia, γ_k si rappresenta come una rotazione che ha come autovalore il prodotto dei parametri di forma attorno al lato che corrisponde al laccio. Per ipotesi, questo è proprio 1, da cui segue che $\rho([\alpha \beta^{-1}]) = 1$, assurdo. □

Corollario (Teorema 1)

Sia N una 3-varietà topologicamente finita, orientabile e idealmente triangolata. Se esiste una soluzione delle equazioni di incollamento iperboliche, esistono una mappa pseudo-sviluppante $\tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$ ed una rappresentazione $\pi_1(N) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ che rende tale mappa equivariante.

Strutture con singolarità coniche

Possiamo generalizzare senza particolare sforzo il lavoro fatto finora nel modo seguente:

dato un lato $e \in P^{(1)}$, introduciamo una variabile $\xi_e \in S^1$, e definiamo le equazioni di incollamento cono-iperboliche come

Definizione

$$g_e(\xi_e) = \prod_{i=1}^n z_i^{a_{ij}} (z'_i)^{a'_{ij}} (z''_i)^{a''_{ij}} - \xi_e = 0.$$

Strutture con singolarità coniche

Possiamo generalizzare senza particolare sforzo il lavoro fatto finora nel modo seguente:

dato un lato $e \in P^{(1)}$, introduciamo una variabile $\xi_e \in S^1$, e definiamo le equazioni di incollamento cono-iperboliche come

Definizione

$$g_e(\xi_e) = \prod_{i=1}^n z_i^{a_{ij}} (z'_i)^{a'_{ij}} (z''_i)^{a''_{ij}} - \xi_e = 0.$$

Dato che il prodotto dei parametri di forma associati ad un vertice deve essere 1, abbiamo che

$$\prod_{e \in P^{(1)}} \xi_e = 1.$$

Definizione

Data una triangolazione con n tetraedri e m lati, la varietà delle deformazioni conica $\mathcal{D}(\mathcal{T}, \star)$ è la sottovarietà di $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^{3n} \times (S^1)^m$ definita dalle relazioni parametriche e dalle equazioni di incollamento cono-iperboliche.

Definizione

Data una triangolazione con n tetraedri e m lati, la varietà delle deformazioni conica $\mathcal{D}(\mathcal{T}, \star)$ è la sottovarietà di $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^{3n} \times (S^1)^m$ definita dalle relazioni parametriche e dalle equazioni di incollamento cono-iperboliche.

Fatto

- $\mathcal{D}(\mathcal{T}, \star)$ è sempre non vuota.
- Se $Z \in \mathcal{D}(\mathcal{T}, \star)$ è tale che i parametri di forma dei lati hanno tutti parte immaginaria positiva, Z dà ad N una struttura iperbolica con singolarità coniche (possibilmente incompleta), con angolo conico $\arg(\xi_e)$ attorno ad e .

Strutture con singolarità coniche

Osserviamo che se $z = \zeta_3$, i parametri di forma sono tutti radici terze dell'unità, e determinano il tetraedro iperbolico regolare ideale; questo è l'unico caso in cui tutti i parametri di forma sono radici dell'unità.

Strutture con singolarità coniche

Osserviamo che se $z = \zeta_3$, i parametri di forma sono tutti radici terze dell'unità, e determinano il tetraedro iperbolico regolare ideale; questo è l'unico caso in cui tutti i parametri di forma sono radici dell'unità.

Proposizione

Data N idealmente triangolata, esiste una struttura iperbolica con singolarità coniche completa, non compatta, con luogo singolare contenuto in $N^{(1)}$, e di volume $\text{Vol}(N) = n_\sigma \cdot v_3$,
dove n_σ è il numero di tetraedri della triangolazione, e v_3 è il volume del tetraedro regolare ideale.

Strutture con singolarità coniche

Ogni soluzione delle equazioni di incollamento cono-iperboliche genera una rappresentazione ρ di $\pi_1(H)$, e se $o(\xi_e) < \infty$, abbiamo un rivestimento ramificato naturale N_o di N , corrispondente a $\text{Ker}\rho$. Ancora, il luogo di ramificazione è contenuto in $N^{(1)}$, e l'indice di ramificazione in e è $o(\xi_e)$.

Strutture con singolarità coniche

Ogni soluzione delle equazioni di incollamento cono-iperboliche genera una rappresentazione ρ di $\pi_1(H)$, e se $o(\xi_e) < \infty$, abbiamo un rivestimento ramificato naturale N_o di N , corrispondente a $\text{Ker}\rho$. Ancora, il luogo di ramificazione è contenuto in $N^{(1)}$, e l'indice di ramificazione in e è $o(\xi_e)$.

Osservazione

- Non è detto che N_o sia una varietà.
- Se $o(\xi_e) = 1$, $N_o = N$.

Strutture con singolarità coniche

Ogni soluzione delle equazioni di incollamento cono-iperboliche genera una rappresentazione ρ di $\pi_1(H)$, e se $o(\xi_e) < \infty$, abbiamo un rivestimento ramificato naturale N_o di N , corrispondente a $\text{Ker}\rho$. Ancora, il luogo di ramificazione è contenuto in $N^{(1)}$, e l'indice di ramificazione in e è $o(\xi_e)$.

Osservazione

- Non è detto che N_o sia una varietà.
- Se $o(\xi_e) = 1$, $N_o = N$.

Theorem

Sia N idealmente triangolata. Se esiste una soluzione delle equazioni di incollamento cono-iperboliche per N , i lati della triangolazione indotta su N_o sono essenziali.

Grazie per l'attenzione!