Formule dell'indice e teoremi del punto fisso in geometria complessa: un'introduzione

Enrico Berni

Università di Pisa

e.berni@studenti.unipi.it

December 1, 2023

Introduzione

Le formule dell'indice sono identità che mettono in relazione l'azione coomologica di una mappa $f : M \to M$ con il suo comportamento intorno ad eventuali punti fissi.

Introduzione

Le formule dell'indice sono identità che mettono in relazione l'azione coomologica di una mappa $f : M \to M$ con il suo comportamento intorno ad eventuali punti fissi.

Problema

Sia $f : M \to M$ una mappa con un grado adatto di regolarità; possiamo dire qualcosa sull'esistenza e comportamento di eventuali punti fissi?

Introduzione

Le formule dell'indice sono identità che mettono in relazione l'azione coomologica di una mappa $f : M \to M$ con il suo comportamento intorno ad eventuali punti fissi.

Problema

Sia $f : M \to M$ una mappa con un grado adatto di regolarità; possiamo dire qualcosa sull'esistenza e comportamento di eventuali punti fissi?
Se sì, esiste un tipo di struttura su M che ci consenta di determinarli a priori?

Nel corso di questo seminario, esamineremo il problema dal punto di vista delle varietà lisce e complesse, prestando particolare attenzione al caso dei proiettivi complessi.

Sommario

Per strutture lisce

Sia M una n-varietà liscia, compatta e orientabile, e sia $f : M \to M$ una mappa liscia.

Per strutture lisce

Sia M una n-varietà liscia, compatta e orientabile, e sia $f : M \to M$ una mappa liscia.

Osservazione

Un punto fisso di f corrisponde all'intersezione del grafico di f, Γ_f con la diagonale Δ in $M \times M$.
Inoltre, il numero di intersezioni di Γ_f e Δ è determinato dal valore che la forma di intersezione assume sulle loro classi di omologia in $H_*(M \times M)$.

Definizione

Diciamo che $f : M \to M$ è una mappa trasversa se il grafico Γ_f è trasverso alla diagonale Δ in $T(M \times M)$.

Per strutture lisce

Definizione

Un punto fisso p per f è non degenere se è isolato, e in una carta centrata in p vale

$$det(I - J_f(p)) \neq 0$$

Se p è non degenere, definiamo l'indice di f in p, indicato con $\iota_f(p)$, come il segno del determinante di cui sopra.

Per strutture lisce

Definizione

Un punto fisso p per f è non degenere se è isolato, e in una carta centrata in p vale

$$det(I - J_f(p)) \neq 0$$

Se p è non degenere, definiamo l'indice di f in p, indicato con $\iota_f(p)$, come il segno del determinante di cui sopra.

Definizione

Definiamo l'indice di Lefschetz di f come

$$L(f) = \sum_k (-1)^k tr(f^*|_{H^k(M)})$$

Per strutture lisce

Formula del punto fisso di Lefschetz

Sia f una mappa trasversa. Allora,

$$L(f) = \sum_{p \in Fix(f)} \iota_f(p)$$

Per strutture lisce

Siano $\{\psi_{i,k}\}$ una famiglia di k-forme chiuse che rappresentino una base di $H^k(M \times M)$, e sia $\{\psi'_{i,2n-k}\}$ una famiglia di $(2n-k)$-forme che rappresentino la base duale per $H^{2n-k}(M \times M)$, cioè tale che

$$\int_M \psi_{i,k} \wedge \psi'_{j,2n-k} = \delta_{ij}$$

Per strutture lisce

Siano $\{\psi_{i,k}\}$ una famiglia di k-forme chiuse che rappresentino una base di $H^k(M \times M)$, e sia $\{\psi'_{i,2n-k}\}$ una famiglia di $(2n-k)$-forme che rappresentino la base duale per $H^{2n-k}(M \times M)$, cioè tale che

$$\int_M \psi_{i,k} \wedge \psi'_{j,2n-k} = \delta_{ij}$$

Per la formula di Künneth, le forme

$$\{\varphi_{i,j,p,q} := \pi_1^* \psi_{i,p} \wedge \pi_2^* \psi'_{j,q}\}$$

dove $p+q=k$ e π_1 e π_2 sono le proiezioni canoniche, rappresentano una base di $H^k(M \times M)$, e la base duale di $H^{2n-k}(M \times M)$ è rappresentata dalla famiglia

$$\{\varphi'_{i,j,n-p,n-q} := (-1)^{q(p+q)} \pi_1^* \psi'_{i,n-p} \wedge \pi_2^* \psi_{j,n-q}\}$$

Per strutture lisce

Si vede semplicemente calcolando l'integrale

$$\int_{M\times M} \varphi_{i,j,p,q} \wedge \varphi'_{i',j',n-p',n-q'}$$

Per strutture lisce

Si vede semplicemente calcolando l'integrale

$$\int_{M\times M} \varphi_{i,j,p,q} \wedge \varphi'_{i',j',n-p',n-q'} = \delta_{ii'} \cdot \delta_{jj'} \cdot \delta_{pp'} \cdot \delta_{qq'}$$

Per strutture lisce

Si vede semplicemente calcolando l'integrale

$$\int_{M\times M} \varphi_{i,j,p,q} \wedge \varphi'_{i',j',n-p',n-q'} = \delta_{ii'} \cdot \delta_{jj'} \cdot \delta_{pp'} \cdot \delta_{qq'}$$

Allora, la classe duale di Poincaré della classe di omologia della diagonale $\Delta \subseteq M \times M$ è la classe rappresentata da

$$\varphi_\Delta := \sum_{i,j,p} c_{i,j,p} \varphi_{i,j,p,2n-p}$$

dove

$$c_{i,j,p} = \int_\Delta \varphi'_{i,j,2n-p,p} = (-1)^{2n-p} \delta_{i,j}$$

Osserviamo che possiamo riscrivere la somma come

$$\varphi_\Delta = \sum_{i,p} (-1)^p \varphi_{i,i,p,2n-p}$$

Per strutture lisce

Diamo adesso un'altra interpretazione delle nozioni di non degeneratezza e indice. Il grafico Γ_f è una sottovarietà liscia di $M \times M$, a cui diamo l'orientazione indotta dalla mappa $\tilde{f} = 1_M \times f$ nel seguente modo: sia p un punto fisso per f, $x_1, ..., x_n$ un sistema di coordinate locali orientate per M centrate in p.

Per strutture lisce

Diamo adesso un'altra interpretazione delle nozioni di non degeneratezza e indice. Il grafico Γ_f è una sottovarietà liscia di $M \times M$, a cui diamo l'orientazione indotta dalla mappa $\tilde{f} = 1_M \times f$ nel seguente modo: sia p un punto fisso per f, $x_1, ..., x_n$ un sistema di coordinate locali orientate per M centrate in p. Come coordinate per $(p, p) \in M \times M$ prendiamo le funzioni

$$y_i = \pi_1^{-1}(x_i) \qquad z_i = \pi_2^{-1}(x_i)$$

Allora, una base orientata per $T_{(p,p)}\Delta \subseteq T_{(p,p)}(M \times M)$ è data da

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n} + \frac{\partial}{\partial z_n} \right)$$

Per strutture lisce

Similmente, una base orientata per $T_{(p,p)}\Gamma_f \subseteq T_{(p,p)}(M \times M)$ è data da

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n} + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial}{\partial z_i}\right)$$

Per strutture lisce

Similmente, una base orientata per $T_{(p,p)}\Gamma_f \subseteq T_{(p,p)}(M \times M)$ è data da

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n} + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial}{\partial z_i}\right)$$

Osserviamo che la famiglia

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n} + \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n} + \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial}{\partial z_i}\right)$$

è ottenuta dalla base orientata standard

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}, \frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$$

Per strutture lisce

Moltiplicando per la matrice

$$\begin{pmatrix} I & I \\ I & J_f(p) \end{pmatrix}$$

Osservazione

I cicli Δ e Γ_f si intersecano trasversalmente in omologia in (p, p) se e solo se $\det(J_f(p) - I) \neq 0$, cioè se e solo se p è un punto fisso non degenere.

Per strutture lisce

Moltiplicando per la matrice

$$\begin{pmatrix} I & I \\ I & J_f(p) \end{pmatrix}$$

Osservazione

I cicli Δ e Γ_f si intersecano trasversalmente in omologia in (p, p) se e solo se $\det(J_f(p) - I) \neq 0$, cioè se e solo se p è un punto fisso non degenere. L'indice di intersezione dei cicli è nient'altro che l'indice di f in p.

Per strutture lisce

Dunque, se f è trasversa, vale

$$\sum_{p \in Fix(f)} \iota_f(p) = (\Delta \cap \Gamma_f)$$

Per strutture lisce

Dunque, se f è trasversa, vale

$$\sum_{p \in Fix(f)} \iota_f(p) = (\Delta \cap \Gamma_f)$$

Formula dell'indice di Lefschetz

Sia f una mappa trasversa. Allora,

$$L(f) = \sum_{p \in Fix(f)} \iota_f(p)$$

Per strutture lisce

Dimostrazione.

Possiamo calcolare il numero di intersezione con l'accoppiamento dato dal prodotto wedge,

$$(\Delta \cap \Gamma_f) = \int_{\Gamma_f} \varphi_\Delta = \sum_k (-1)^{2n-k} \int_{\Gamma_f} \sum_i \pi_1^* \psi_{i,k} \wedge \pi_2^* \psi'_{i,2n-k}$$

Per strutture lisce

Dimostrazione.

Possiamo calcolare il numero di intersezione con l'accoppiamento dato dal prodotto wedge,

$$(\Delta \cap \Gamma_f) = \int_{\Gamma_f} \varphi_\Delta = \sum_k (-1)^{2n-k} \int_{\Gamma_f} \sum_i \pi_1^* \psi_{i,k} \wedge \pi_2^* \psi'_{i,2n-k}$$

Dato che $\tilde{f}^* \pi_2^* = f^*$, si ha

$$= \sum_k (-1)^{2n-k} \int_M \sum_i \psi_{i,k} \wedge f^* \psi'_{i,2n-k} =$$

$$= \sum_k (-1)^k tr(f^*|_{H^{n-k}(M)}) = \sum_k (-1)^k tr(f^*|_{H^k(M)})$$

$\square$

Per strutture lisce

Osservazione

Tralasciando i segni dei vari indici, troviamo che $\#Fix(f) \geq |L(f)|$.

Per strutture lisce

Osservazione

Tralasciando i segni dei vari indici, troviamo che $\#Fix(f) \geq |L(f)|$.

In particolare, vale il seguente

Teorema del punto fisso di Lefschetz

Sia M una varietà liscia, e sia $f : M \to M$ una mappa liscia. Se $L(f) \neq 0$, f ha un punto fisso.

Perché la struttura complessa?

Consideriamo la sfera $S^2 = \hat{\mathbb{C}}$, con l'atlante dato da due carte contrattili, e sia $f : S^2 \to S^2$ ottenuta mollificando una rotazione di $\theta \in (0, 2\pi)$ sulla carta contenente 0, e l'identità sulla carta contenente ∞.
La f è liscia, e $L(f) = tr(f^*|_{H^0(S^2)}) + tr(f^*|_{H^2(S^2)}) = 2$, dato che la f è omotopa all'identità.

Perché la struttura complessa?

Consideriamo la sfera $S^2 = \hat{\mathbb{C}}$, con l'atlante dato da due carte contrattili, e sia $f : S^2 \to S^2$ ottenuta mollificando una rotazione di $\theta \in (0, 2\pi)$ sulla carta contenente 0, e l'identità sulla carta contenente ∞.
La f è liscia, e $L(f) = tr(f^*|_{H^0(S^2)}) + tr(f^*|_{H^2(S^2)}) = 2$, dato che la f è omotopa all'identità.
Dal teorema del punto fisso sappiamo che la f dovrà avere almeno due punti fissi: questi sono proprio 0 ed ∞, di cui però non possiamo determinare a priori il comportamento.
Per sperare di farlo, abbiamo bisogno di una struttura più rigida.

Per strutture complesse

Sia ora M una n-varietà complessa compatta, e sia $f : M \to M$ una mappa olomorfa e trasversa.
In analogia con il caso reale, possiamo considerare l'azione di f^* sulla coomologia di Dolbeault, e mostrare che una tale azione è determinata dal comportamento locale di f attorno ai suoi punti fissi.

Per strutture complesse

Sia ora M una n-varietà complessa compatta, e sia $f : M \to M$ una mappa olomorfa e trasversa.
In analogia con il caso reale, possiamo considerare l'azione di f^* sulla coomologia di Dolbeault, e mostrare che una tale azione è determinata dal comportamento locale di f attorno ai suoi punti fissi.
Come prima, calcoliamo la classe di coomologia di Dolbeault della diagonale:

Per strutture complesse

Dati p e q, sia $\{\psi_{p,q,i}\}$ una famiglia di forme $\bar{\partial}$-chiuse che rappresenti una base di $H^{p,q}(M)$, e sia $\{\psi'_{n-p,n-q,i}\}$ una famiglia di rappresentanti della base duale di Kodaira-Serre di $H^{n-p,n-q}(M)$[1].

[1] Cioè, la base duale secondo l'acoppiamento $\psi \otimes \varphi \mapsto \int_M \psi \wedge \varphi$

Per strutture complesse

Dati p e q, sia $\{\psi_{p,q,i}\}$ una famiglia di forme $\bar{\partial}$-chiuse che rappresenti una base di $H^{p,q}(M)$, e sia $\{\psi'_{n-p,n-q,i}\}$ una famiglia di rappresentanti della base duale di Kodaira-Serre di $H^{n-p,n-q}(M)^1$.
Usando la formula di Künneth, una base di $H^{n,n}(M \times M)$ è rappresentata, come nel caso liscio, da

$$\{\varphi_{p,q,i,j} := \pi_1^*\psi_{p,q,i} \wedge \pi_2^*\psi'_{n-p,n-q,j}\}$$

con base duale

$$\{\varphi^*_{n-p,n-q,i,j} := \pi_1^*\psi'_{n-p,n-q,i} \wedge \pi_2^*\psi_{p,q,j}\}$$

[1] Cioè, la base duale secondo l'acoppiamento $\psi \otimes \varphi \mapsto \int_M \psi \wedge \varphi$

Per strutture complesse

Allora, la classe di Dolbeault della diagonale è data da

$$\varphi_\Delta = \sum_{p,q,i} (-1)^{p+q} \varphi_{p,q,i,i}$$

Per strutture complesse

Allora, la classe di Dolbeault della diagonale è data da

$$\varphi_\Delta = \sum_{p,q,i} (-1)^{p+q} \varphi_{p,q,i,i}$$

Sia ora $f : M \to M$ una mappa olomorfa trasversa, e consideriamo il suo grafico $\Gamma_f \subseteq M \times M$. Il semplice calcolo del numero di intersezione $(\Delta \cap \Gamma_f)$ non dà informazioni particolarmente interessanti sulla struttura complessa:

$$L(f) = \int_{\Gamma_f} \varphi_\Delta = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \int_{\Gamma_f} \sum_i \pi_1^* \psi_{p,q,i} \wedge \pi_2^* \psi'_{n-p,n-q,i} =$$

$$= \sum_{p,q} (-1)^{p+q} tr(f^*|_{H^{p,q}(M)})$$

Per strutture complesse

Infatti, se per esempio M è di Kähler, questo segue già in maniera banale dalla formula dell'indice di Lefschetz nel caso liscio e dalla decomposizione di Hodge. In generale, per mostrarlo serve la successione spettrale di Fröhlicher che mette in relazione la coomologia di Dolbeault con quella di de Rham.

Per strutture complesse

Infatti, se per esempio M è di Kähler, questo segue già in maniera banale dalla formula dell'indice di Lefschetz nel caso liscio e dalla decomposizione di Hodge. In generale, per mostrarlo serve la successione spettrale di Fröhlicher che mette in relazione la coomologia di Dolbeault con quella di de Rham.
Per avere delle informazioni più fini, usiamo la formula di Künneth sulla classe della diagonale: sia $\varphi_\Delta^{p,q}$ la (p,q)-esima componente della classe della diagonale nella decomposizione

$$H^{n,n}(M \times M) = \bigoplus_{p,q} (\pi_1^* H^{p,q}(M) \otimes \pi_2^* H^{n-p,n-q}(M))$$

e sia $\varphi_\Delta^0 = \sum_q \varphi_\Delta^{0,q} = \sum_{q,i} (-1)^q \varphi_{0,q,i,i}$.

Per strutture complesse

Il valore di φ^0_Δ sul ciclo Γ_f è dato da

Per strutture complesse

Il valore di φ^0_Δ sul ciclo Γ_f è dato da

$$\varphi^0_\Delta(\Gamma_f) = \int_{\Gamma_f} \varphi^0_\Delta = \sum_q (-1)^q \int_M \sum_i \psi_{0,q,i} \wedge f^* \psi'_{n,n-q,i} =$$

$$= \sum_q (-1)^q tr(f^*|_{H^{n,n-q}(M)}) = \sum_q (-1)^q tr(f^*|_{H^{0,q}(M)})$$

per dualità di Kodaira-Serre.

Per strutture complesse

Il valore di φ^0_Δ sul ciclo Γ_f è dato da

$$\varphi^0_\Delta(\Gamma_f) = \int_{\Gamma_f} \varphi^0_\Delta = \sum_q (-1)^q \int_M \sum_i \psi_{0,q,i} \wedge f^* \psi'_{n,n-q,i} =$$

$$= \sum_q (-1)^q tr(f^*|_{H^{n,n-q}(M)}) = \sum_q (-1)^q tr(f^*|_{H^{0,q}(M)})$$

per dualità di Kodaira-Serre.

Definizione

Il numero $L_{\mathcal{O}}(f) = \sum_q (-1)^q tr(f^*|_{H^{0,q}(M)})$ si chiama indice di Lefschetz olomorfo di f.

Per strutture complesse

Sia dunque $f : M \to M$ una mappa olomorfa trasversa, siano $\{p_\alpha\}$ i punti fissi. Siano z_α^i delle coordinate locali attorno a p_α; approssimando f al secondo ordine come

$$f(z_\alpha)^i = \sum b_{ij} z_\alpha^j + [2]$$

cioè

$$f(z_\alpha) = B_\alpha z_\alpha + [2]$$

con $B_\alpha = (b_{ij})$.

Per strutture complesse

Sia dunque $f : M \to M$ una mappa olomorfa trasversa, siano $\{p_\alpha\}$ i punti fissi. Siano z_α^i delle coordinate locali attorno a p_α; approssimando f al secondo ordine come

$$f(z_\alpha)^i = \sum b_{ij} z_\alpha^j + [2]$$

cioè

$$f(z_\alpha) = B_\alpha z_\alpha + [2]$$

con $B_\alpha = (b_{ij})$.
Per non degeneratezza dei punti fissi sappiamo che $I - B_\alpha$ è invertibile.

Per strutture complesse

Sia dunque $f : M \to M$ una mappa olomorfa trasversa, siano $\{p_\alpha\}$ i punti fissi. Siano z_α^i delle coordinate locali attorno a p_α; approssimando f al secondo ordine come

$$f(z_\alpha)^i = \sum b_{ij} z_\alpha^j + [2]$$

cioè

$$f(z_\alpha) = B_\alpha z_\alpha + [2]$$

con $B_\alpha = (b_{ij})$.
Per non degeneratezza dei punti fissi sappiamo che $I - B_\alpha$ è invertibile.

Formula dell'indice di Lefschetz olomorfo

$$L_{\mathcal{O}}(f) = \sum_{p_\alpha \in Fix(f)} \frac{1}{\det(I - B_\alpha)}$$

Teoria delle correnti

Prima di dimostrare la formula appena enunciata, abbiamo bisogno di una breve introduzione alla teoria delle correnti:

Teoria delle correnti

Prima di dimostrare la formula appena enunciata, abbiamo bisogno di una breve introduzione alla teoria delle correnti:

Definizione

Sia $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, e sia $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1}^{\alpha_1} ... \frac{\partial}{\partial x_n}^{\alpha_n}$. Definiamo la topologia C^p su $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicendo che una successione $\varphi_n \to 0$ se esiste un compatto K contenente tutti i supporti, e tale che

$$D_\alpha \varphi_n(x) \longrightarrow 0$$

uniformemente in n puntualmente su K per ogni α tale che $\alpha_1 + ... + \alpha_n \leq p$. Definiamo la topologia C^∞ come l'intersezione delle C^p.

Teoria delle correnti

Prima di dimostrare la formula appena enunciata, abbiamo bisogno di una breve introduzione alla teoria delle correnti:

Definizione

Sia $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, e sia $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_1}^{\alpha_1} ... \frac{\partial}{\partial x_n}^{\alpha_n}$. Definiamo la topologia C^p su $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicendo che una successione $\varphi_n \to 0$ se esiste un compatto K contenente tutti i supporti, e tale che

$$D_\alpha \varphi_n(x) \longrightarrow 0$$

uniformemente in n puntualmente su K per ogni α tale che $\alpha_1 + ... + \alpha_n \leq p$. Definiamo la topologia C^∞ come l'intersezione delle C^p.

Definizione

Una distribuzione su $\mathbb{R}^n$ è una mappa lineare $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ continua nella topologia C^∞.

Qualche esempio:

1. Se ψ è in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, possiamo definire una distribuzione T_ψ ponendo $T_\psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)dx$, dove con dx indichiamo la forma volume standard di $\mathbb{R}^n$.
2. La δ di Dirac, definita ponendo $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, è una distribuzione.

Teoria delle correnti

Qualche esempio:

1. Se ψ è in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, possiamo definire una distribuzione T_ψ ponendo $T_\psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)dx$, dove con dx indichiamo la forma volume standard di $\mathbb{R}^n$.
2. La δ di Dirac, definita ponendo $\delta(\varphi) = \varphi(0)$, è una distribuzione.

Possiamo estendere gli operatori differenziali alle distribuzioni, semplicemente ponendo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T(\varphi) = -T(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi)$$

e usando il teorema di Stokes si può mostrare che $\frac{\partial}{\partial x_i} T_\psi(\varphi) = T_{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}(\varphi)$.

Teoria delle correnti

Sia ora $\Omega_c^q(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle q-forme differenziali a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$. In maniera naturale possiamo usare sulle componenti la topologia C^∞ su $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ per rendere $\Omega_c^q(\mathbb{R}^n)$ uno spazio vettoriale topologico completo.

Teoria delle correnti

Sia ora $\Omega_c^q(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle q-forme differenziali a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$. In maniera naturale possiamo usare sulle componenti la topologia C^∞ su $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ per rendere $\Omega_c^q(\mathbb{R}^n)$ uno spazio vettoriale topologico completo.

Definizione

Lo spazio delle correnti su $\mathbb{R}^n$ di grado q, $\mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n)$, è il duale topologico di $\Omega_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$.

Teoria delle correnti

Sia ora $\Omega^q_c(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle q-forme differenziali a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$. In maniera naturale possiamo usare sulle componenti la topologia C^∞ su $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ per rendere $\Omega^q_c(\mathbb{R}^n)$ uno spazio vettoriale topologico completo.

Definizione

Lo spazio delle correnti su $\mathbb{R}^n$ di grado q, $\mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n)$, è il duale topologico di $\Omega^{n-q}_c(\mathbb{R}^n)$.

Per esempio, se Γ è una $(n-q)$-sottovarietà di $\mathbb{R}^n$, Γ definisce una corrente in modo canonico, ponendo

$$T_\Gamma(\varphi) = \int_\Gamma \varphi$$

Se invece ω è una q-forma con coefficienti localmente assolutamente integrabili, possiamo definire la corrente $T_\omega(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega \wedge \varphi$

Teoria delle correnti

La derivata esterna delle forme differenziali induce un operatore $d : \mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{D}^{q+1}(\mathbb{R}^n)$, definito come

$$(dT)(\varphi) = (-1)^{q+1} T(d\varphi)$$

Teoria delle correnti

La derivata esterna delle forme differenziali induce un operatore $d : \mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{D}^{q+1}(\mathbb{R}^n)$, definito come

$$(dT)(\varphi) = (-1)^{q+1} T(d\varphi)$$

Si può osservare che $d^2 = 0$, e che per il teorema di Stokes valgono le identità $dT_\omega(\varphi) = T_{d\omega}(\varphi)$, e $dT_\Gamma(\varphi) = (-1)^{q+1} T_{\partial\Gamma}(\varphi)$.
Anche se fuori dallo scopo del seminario, osserviamo che possiamo definire una coomologia del complesso delle correnti; questa sarà isomorfa sia alla coomologia di de Rham, che a quella singolare.

Teoria delle correnti

La derivata esterna delle forme differenziali induce un operatore $d : \mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{D}^{q+1}(\mathbb{R}^n)$, definito come

$$(dT)(\varphi) = (-1)^{q+1} T(d\varphi)$$

Si può osservare che $d^2 = 0$, e che per il teorema di Stokes valgono le identità $dT_\omega(\varphi) = T_{d\omega}(\varphi)$, e $dT_\Gamma(\varphi) = (-1)^{q+1} T_{\partial\Gamma}(\varphi)$.
Anche se fuori dallo scopo del seminario, osserviamo che possiamo definire una coomologia del complesso delle correnti; questa sarà isomorfa sia alla coomologia di de Rham, che a quella singolare.
Osserviamo anche che le definizioni riportate si possono generalizzare facilmente a $\mathbb{C}^n$ ed a varietà, sia lisce che complesse.

Definizione

Il nucleo di Bochner-Martinelli su $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ è definito come la $(n, n-1)$-forma

$$\omega(z, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum(\overline{z}_j - \overline{w}_j)}{||z-w||^{2n}} dz \wedge \hat{d\overline{z}_j}$$

Definizione

Il nucleo di Bochner-Martinelli su $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ è definito come la $(n, n-1)$-forma

$$\omega(z, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum(\overline{z}_j - \overline{w}_j)}{||z-w||^{2n}} dz \wedge d\hat{\overline{z_j}}$$

Formula di Bochner-Martinelli

Il nucleo di Bochner-Martinelli è una forma $\bar{\partial}$-esatta su $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, e per ogni $f \in \mathcal{O}_n$ vale

$$f(0) = \int_{\partial B_r(0)} f(z)\omega(z, 0)$$

Per strutture complesse

Forti dei risultati di teoria delle correnti, usando una partizione dell'unità possiamo definire una corrente che sia uguale a

$$T^0_\Delta(\psi) = \int_\Delta \psi$$

nella palla di raggio ε centrata nel punto fisso (p_α, p_α), una corrente rappresentata da una forma $\bar{\partial}$-esatta $S = -\bar{\partial} k$ fuori dalla palla di raggio 2ε, e che sia liscia tra le due.

Per strutture complesse

Forti dei risultati di teoria delle correnti, usando una partizione dell'unità possiamo definire una corrente che sia uguale a

$$T^0_\Delta(\psi) = \int_\Delta \psi$$

nella palla di raggio ε centrata nel punto fisso (p_α, p_α), una corrente rappresentata da una forma $\bar{\partial}$-esatta $S = -\bar{\partial}k$ fuori dalla palla di raggio 2ε, e che sia liscia tra le due.
Allora, il numero di intersezione $\varphi^0_\Delta(\Gamma_f)$ è

$$\varphi^0_\Delta(\Gamma_f) = \sum_{p_\alpha \in Fix(f)} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon(p_\alpha, p_\alpha)} \omega(z_\alpha, f(z_\alpha))$$

Per strutture complesse

Posto $w_\alpha = z_\alpha - f(z_\alpha)$, si ha

$$dw_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dw_{\alpha_n} = \det(I - J_f) dz_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_{\alpha_n}$$

[2] Usando la formula di Bochner-Martinelli

Per strutture complesse

Posto $w_\alpha = z_\alpha - f(z_\alpha)$, si ha

$$dw_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dw_{\alpha_n} = \det(I - J_f) dz_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_{\alpha_n}$$

e abbiamo[2]

$$\int_{B_\varepsilon(p_\alpha, p_\alpha)} \omega(z_\alpha, f(z_\alpha)) = \frac{1}{\det(I - J_f(0))} = \frac{1}{\det(I - B_\alpha)}$$

Mettendo tutto insieme, troviamo la seguente

[2] Usando la formula di Bochner-Martinelli

Per strutture complesse

Posto $w_\alpha = z_\alpha - f(z_\alpha)$, si ha

$$dw_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dw_{\alpha_n} = \det(I - J_f) dz_{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dz_{\alpha_n}$$

e abbiamo[2]

$$\int_{B_\varepsilon(p_\alpha, p_\alpha)} \omega(z_\alpha, f(z_\alpha)) = \frac{1}{\det(I - J_f(0))} = \frac{1}{\det(I - B_\alpha)}$$

Mettendo tutto insieme, troviamo la seguente

Formula dell'indice di Lefschetz olomorfo

$$L_{\mathcal{O}}(f) = \sum_{p_\alpha \in Fix(f)} \frac{1}{\det(I - B_\alpha)}$$

[2] Usando la formula di Bochner-Martinelli

Un esempio pratico

Sia $M = \mathbb{CP}^1$ la sfera di Riemann, e sia $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ la rotazione di un angolo θ fissato, $f(z) = e^{i\theta} z$.

La f ha due punti fissi, $p_1 = 0$ e $p_2 = \infty$, ed il suo differenziale nell'origine è $df_0 = e^{i\theta}$. La f è chiaramente omotopa all'identità, e la formula del punto fisso di Lefschetz, a questo punto, ci dice che

$$L(f) = \dim H^0_{dR}(\mathbb{CP}^1) + \dim H^2_{dR}(\mathbb{CP}^1) = 2$$

Un esempio pratico

Sia $M = \mathbb{CP}^1$ la sfera di Riemann, e sia $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ la rotazione di un angolo θ fissato, $f(z) = e^{i\theta} z$.
La f ha due punti fissi, $p_1 = 0$ e $p_2 = \infty$, ed il suo differenziale nell'origine è $df_0 = e^{i\theta}$. La f è chiaramente omotopa all'identità, e la formula del punto fisso di Lefschetz, a questo punto, ci dice che

$$L(f) = \dim H^0_{dR}(\mathbb{CP}^1) + \dim H^2_{dR}(\mathbb{CP}^1) = 2$$

Usando la decomposizione di Hodge, sappiamo anche che in grado 2 la coomologia di Dolbeault è concentrata in grado $(1, 1)$, da cui segue che

$$L_{\mathcal{O}}(f) = 1$$

Dalla formula dell'indice olomorfo segue che, detto λ l'autovalore di df_∞, vale l'identità

$$\frac{1}{1 - e^{i\theta}} + \frac{1}{1 - \lambda} = 1,$$

Un esempio pratico

da cui $\lambda = e^{-i\theta}$.

Un esempio pratico

da cui $\lambda = e^{-i\theta}$.
Cambiando coordinate come $w = \frac{1}{z}$, la f è data dalla composizione

$$w \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{w} \cdot e^{i\theta}} = we^{-i\theta}$$

da cui segue che effettivamente $df_\infty = df_{w=0} = e^{-i\theta}$.

Un esempio pratico

da cui $\lambda = e^{-i\theta}$.
Cambiando coordinate come $w = \frac{1}{z}$, la f è data dalla composizione

$$w \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{w} \cdot e^{i\theta}} = we^{-i\theta}$$

da cui segue che effettivamente $df_\infty = df_{w=0} = e^{-i\theta}$.
Con lo stesso argomento di prima, possiamo mostrare che la coomologia di Dolbeault di un qualsiasi $\mathbb{CP}^n$ è concentrata nei gradi (k, k), e dunque che

Un esempio pratico

da cui $\lambda = e^{-i\theta}$.
Cambiando coordinate come $w = \frac{1}{z}$, la f è data dalla composizione

$$w \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{w} \cdot e^{i\theta}} = we^{-i\theta}$$

da cui segue che effettivamente $df_\infty = df_{w=0} = e^{-i\theta}$.
Con lo stesso argomento di prima, possiamo mostrare che la coomologia di Dolbeault di un qualsiasi $\mathbb{CP}^n$ è concentrata nei gradi (k, k), e dunque che

Fatto

Ogni mappa olomorfa di $\mathbb{CP}^n$ in sé ha indice di Lefschetz olomorfo 1.

Perché generalizzare?

Sappiamo, usando il teorema di Dolbeault, che i gruppi di coomologia antiolomorfi $H^{0,q}(M)$ sono isomorfi ai gruppi di coomologia a coefficienti nel fascio di struttura,

$$H^{0,q}(M) \cong H^q(M; \mathcal{O}_M)$$

Perché generalizzare?

Sappiamo, usando il teorema di Dolbeault, che i gruppi di coomologia antiolomorfi $H^{0,q}(M)$ sono isomorfi ai gruppi di coomologia a coefficienti nel fascio di struttura,

$$H^{0,q}(M) \cong H^q(M; \mathcal{O}_M)$$

È dunque naturale chiedersi cosa succeda se sostituiamo $\mathcal{O}_M$ con un fascio generico, che mantenga però alcune delle proprietà algebriche del nostro spazio anellato.
Il risultato finale del seminario ci consentirà di generalizzare le formule viste, e di

Formula di Atiyah-Bott

Sia $(M, \mathcal{O}_M)$ uno spazio anellato.

Definizione

Un fascio $\mathscr{S}$ su uno spazio anellato $(M, \mathcal{O}_M)$ si dice analitico se le spighe $\mathscr{S}_x$ hanno una struttura di $\mathcal{O}_{M,x}$-modulo con prodotto continuo.

Definizione

Un fascio di $\mathcal{O}_M$-moduli si dice coerente se:

1. È di tipo finito, cioè per ogni $x \in M$ esiste un intorno U tale che esista un morfismo suriettivo $\mathcal{O}_U^n \to \mathscr{S}_U$ per un qualche naturale n.
2. Per ogni aperto $U \subseteq M$, ogni naturale n ed ogni morfismo $\varphi : \mathcal{O}_U^n \to \mathscr{S}_U$, $Ker\varphi$ è di tipo finito.

Formula di Atiyah-Bott

Sia $(M, \mathcal{O}_M)$ uno spazio anellato.

Definizione

Un fascio $\mathscr{S}$ su uno spazio anellato $(M, \mathcal{O}_M)$ si dice analitico se le spighe $\mathscr{S}_x$ hanno una struttura di $\mathcal{O}_{M,x}$-modulo con prodotto continuo.

Definizione

Un fascio di $\mathcal{O}_M$-moduli si dice coerente se:

1. È di tipo finito, cioè per ogni $x \in M$ esiste un intorno U tale che esista un morfismo suriettivo $\mathcal{O}_U^n \to \mathscr{S}_U$ per un qualche naturale n.
2. Per ogni aperto $U \subseteq M$, ogni naturale n ed ogni morfismo $\varphi : \mathcal{O}_U^n \to \mathscr{S}_U$, $Ker\varphi$ è di tipo finito.

Teorema (Oka, 1950)

Se M è una varietà complessa, il fascio di struttura $\mathcal{O}_M$ è coerente.

Formula di Atiyah-Bott

Sia ora M una varietà complessa compatta, sia $\mathscr{S}$ un fascio analitico coerente su M, e sia $f : M \to M$ una mappa olomorfa.
Osserviamo che la f non induce un endomorfismo in coomologia, ma una mappa

$$H^*(M; \mathscr{S}) \longrightarrow H^*(M; f^*\mathscr{S})$$

Vogliamo quindi un modo di "aggiustare" la f^* per ottenere un endomorfismo di $H^*(M; \mathscr{S})$.

Formula di Atiyah-Bott

Sia ora M una varietà complessa compatta, sia $\mathscr{S}$ un fascio analitico coerente su M, e sia $f : M \to M$ una mappa olomorfa.
Osserviamo che la f non induce un endomorfismo in coomologia, ma una mappa

$$H^*(M;\mathscr{S}) \longrightarrow H^*(M;f^*\mathscr{S})$$

Vogliamo quindi un modo di "aggiustare" la f^* per ottenere un endomorfismo di $H^*(M;\mathscr{S})$.

Definizione

Un sollevamento di f a $\mathscr{S}$ è un morfismo di fasci $\varphi : f^*\mathscr{S} \to \mathscr{S}$ che si restringa ad un omomorfismo di $\mathcal{O}_M$-moduli sulle spighe.

Formula di Atiyah-Bott

Consideriamo quindi la mappa $\tilde{\varphi} = f^* \circ \varphi : H^*(M; \mathscr{S}) \to H^*(M; \mathscr{S})$;

Formula di Atiyah-Bott

Consideriamo quindi la mappa $\tilde{\varphi} = f^* \circ \varphi : H^*(M; \mathscr{S}) \to H^*(M; \mathscr{S})$;

Definizione

Definiamo l'indice di Lefschetz di f con sollevamento φ come

$$L(f, \varphi, \mathscr{S}) = \sum_k (-1)^k tr(\tilde{\varphi}|_{H^k(M;\mathscr{S})})$$

Formula di Atiyah-Bott

Consideriamo quindi la mappa $\tilde{\varphi} = f^* \circ \varphi : H^*(M;\mathscr{S}) \to H^*(M;\mathscr{S})$;

Definizione

Definiamo l'indice di Lefschetz di f con sollevamento φ come

$$L(f,\varphi,\mathscr{S}) = \sum_k (-1)^k tr(\tilde{\varphi}|_{H^k(M;\mathscr{S})})$$

Se $\mathscr{S}_x$ è la spiga di $\mathscr{S}$ su x, definiamo la fibra di $\mathscr{S}$ in x come

$$\mathscr{S}(x) = \mathscr{S}_x \otimes_{\mathcal{O}_{M,x}} (\mathcal{O}_{M,x}/\mathfrak{m}_x)$$

Osservazione

Le $\mathscr{S}(x)$ sono spazi vettoriali complessi di dimensione finita, e dotano il fascio $\mathscr{S}$ di una struttura di fibrato vettoriale complesso su M.

Dato che per definizione φ induce dei morfismi di $\mathcal{O}_M$-moduli sulle spighe,

$$\varphi_x : \mathscr{S}_{f(x)} = (f^*\mathscr{S})_x \longrightarrow \mathscr{S}_x$$

se p è un punto fisso di f la φ induce un endomorfismo sia sulla spiga $\mathscr{S}_p$ che sulla fibra $\mathscr{S}(p)$.

Dato che per definizione φ induce dei morfismi di $\mathcal{O}_M$-moduli sulle spighe,

$$\varphi_x : \mathscr{S}_{f(x)} = (f^*\mathscr{S})_x \longrightarrow \mathscr{S}_x$$

se p è un punto fisso di f la φ induce un endomorfismo sia sulla spiga $\mathscr{S}_p$ che sulla fibra $\mathscr{S}(p)$.
Dal momento che sia le fibre che le spighe hanno dimensione finita, la traccia della mappa indotta ha una buona definizione.

Dato che per definizione φ induce dei morfismi di $\mathcal{O}_M$-moduli sulle spighe,

$$\varphi_x : \mathscr{S}_{f(x)} = (f^*\mathscr{S})_x \longrightarrow \mathscr{S}_x$$

se p è un punto fisso di f la φ induce un endomorfismo sia sulla spiga $\mathscr{S}_p$ che sulla fibra $\mathscr{S}(p)$.
Dal momento che sia le fibre che le spighe hanno dimensione finita, la traccia della mappa indotta ha una buona definizione.
Possiamo dunque enunciare il risultato finale del seminario:

Formula di Atiyah-Bott

Sia $f : M \to M$ una mappa olomorfa trasversa, e sia $\mathscr{S}$ un fascio analitico coerente su M. Allora,

$$L(f, \varphi, \mathscr{S}) = \sum_{p \in Fix(f)} \frac{tr(\varphi(p))}{det(I - df(p))}$$

Applicazioni

Qualche osservazione: se prendiamo $\mathscr{S} = \Omega^k_M$, e $\varphi = \wedge^k df$, la formula diventa

$$L(f, \wedge^k df, \Omega^k_M) = \sum_{p \in Fix(f)} \frac{tr(df(p))}{det(I - df(p))}$$

Notiamo che il membro destro dell'equazione dipende solamente dallo spettro di df ai punti fissi, mentre il membro sinistro dipende dall'azione di f sulla coomologia di Dolbeault.

Applicazioni

Qualche osservazione: se prendiamo $\mathscr{S} = \Omega^k_M$, e $\varphi = \wedge^k df$, la formula diventa

$$L(f, \wedge^k df, \Omega^k_M) = \sum_{p \in Fix(f)} \frac{tr(df(p))}{det(I - df(p))}$$

Notiamo che il membro destro dell'equazione dipende solamente dallo spettro di df ai punti fissi, mentre il membro sinistro dipende dall'azione di f sulla coomologia di Dolbeault.
Nel caso in cui $M = \mathbb{CP}^n$ e f ha grado $d > 1$, l'azione sulla coomologia di Dolbeault dipende solo da d; la formula diventa

$$\sum_{p \in Fix(f)} \frac{tr(\wedge^k df(p))}{det(I - df(p))} = (-1)^k d^k$$

Applicazioni

Possiamo dire di più:

Teorema

Una mappa $f : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ di grado d ha almeno $\frac{d^{n+1}-1}{d-1}$ punti fissi.

Applicazioni

Possiamo dire di più:

Teorema

Una mappa $f : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ di grado d ha almeno $\frac{d^{n+1}-1}{d-1}$ punti fissi.

Dimostrazione.

Innanzitutto, sia A una mappa lineare $V \to V$; osserviamo che il coefficiente di grado $n-k$ del suo polinomio caratteristico è

$$\sum_{\binom{n}{k}} \lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_k}$$

Applicazioni

Possiamo dire di più:

Teorema

Una mappa $f : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ di grado d ha almeno $\frac{d^{n+1}-1}{d-1}$ punti fissi.

Dimostrazione.

Innanzitutto, sia A una mappa lineare $V \to V$; osserviamo che il coefficiente di grado $n-k$ del suo polinomio caratteristico è

$$\sum_{\binom{n}{k}} \lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_k}$$

Osserviamo anche che questo coincide con la traccia della mappa indotta da A sullo spazio vettoriale $\wedge^k V$.

Dimostrazione.

Allora,

$$\det(I - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \operatorname{tr}(\wedge^k A)$$

Dimostrazione.

Allora,
$$\det(I - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \operatorname{tr}(\wedge^k A)$$
Consideriamo ora l'algebra esterna totale $\wedge^* \Omega^1_{\mathbb{CP}^n}$, e solleviamo f con $\wedge^k df$ sulla componente di grado k.
Svolgendo calcoli combinatorici, si mostra che l'indice $L(f, \wedge^* df, \wedge^* \Omega^1_{\mathbb{CP}^n})$ è uguale alla somma di una serie geometrica troncata di ragione d,
$$L(f, \wedge^* df, \wedge^* \Omega^1_{\mathbb{CP}^n}) = \sum_{k=0}^{n} d^k = \frac{d^{n+1} - 1}{d - 1}$$
da cui segue la tesi. □

Grazie per l'attenzione!