RIGIDITÁ DI MOSTOW PER 3-VARIETÁ IPERBOLICHE

1) Volume dei simplessi ideali
2) Omologia e volume simpliciale
3) Rigiditá di Mostow

GT = Martelli, "Introduction to Geometric Topology"

HG = Benedetti, Petronio, "Lectures in Hyperbolic Geometry"

Volume dei simplessi ideali

<u>Def</u> Definiamo la funzione di Lobachevskij come $\Lambda(\vartheta) = \int_0^\vartheta -\log|2\sin t|\,dt$.

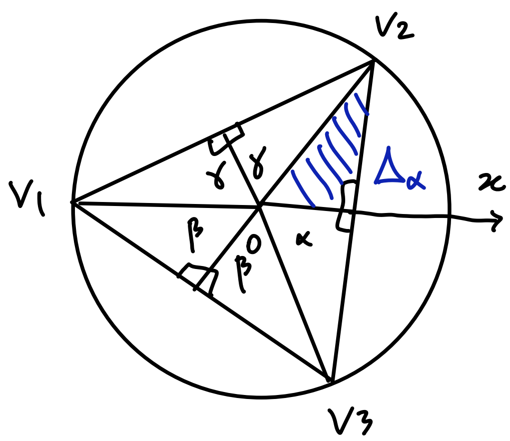
<u>Oss</u> $\log|2\sin t|$ ha poli su $\pi\mathbb{Z}$ ed é integrabile, dunque Λ é b. def e continua su tutto $\mathbb{R}$.

Dal corso, sappiamo che dato un tetraedro ideale Δ, per ogni coppia di lati opposti esiste un unica geodetica ρ ortogonale ad entrambi, tale che Δ sia simmetrico rispetto alla rotazione di π rispetto a ρ (i lati opposti sono ultraparalleli).

<u>Oss</u> In un tetraedro ideale, due lati opposti hanno angoli diedrali coincidenti, e vale che $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, dato che un'orosfera abbastanza piccola interseca ogni vertice in un triangolo euclideo di angoli α, β, γ.

<u>Proposizione</u> Sia Δ un tetraedro ideale con angoli diedrali α, β e γ. Allora, $Vol(\Delta) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$.

<u>DIM (Idea)</u> Si rappresenta Δ in $\mathbb{H}^3$, mandando un vertice v_0 in ∞, e $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}$. Se $T = [v_1, v_2, v_3] \subseteq \mathbb{C}$ contiene 0, cioé se $\alpha, \beta, \gamma \le \frac{\pi}{2}$, si decompone T nel seguente modo:



Mostrando che Δ_α ha volume $\frac{1}{2}\Lambda(\alpha)$, si conclude.

La dimostrazione è un integrale in 2 variabili e non la riportiamo. $\square$

<u>Corollario</u> I tetraedri ideali regolari hanno volume massimo tra tutti i tetraedri.

<u>Dim</u> È un facile argomento analitico su $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(\alpha,\beta) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\pi-\alpha-\beta)$.

$\{0 \leq \alpha, \beta,\ \alpha+\beta \leq \pi\}$

È nulla su ∂T, >0 dentro, e ha punto critico quando i seni dei tre argomenti sono uguali, cioè $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$. $\square$

<u>Omologia e volume simpliciale</u> (Discorsetto su cos'è)

Costruiamo il volume simpliciale di una varietà M come segue:
dato un ciclo $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n \in Z_*(M;\mathbb{R})$, definiamo la sua norma come $|\alpha| := |\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n|$. Definiamo la norma di una classe $[\alpha] \in H_j(M;\mathbb{R})$ come

$$|[\alpha]| = \inf_{[\beta]=[\alpha]} \{|\beta| \mid \beta \in Z_j(M;\mathbb{R})\}.$$

<u>Prop</u> La norma su Z_* induce una seminorma su H_*.

<u>Oss</u> Se M è chiusa e orientata, ha una classe fondamentale $[M] \in H_n(M;\mathbb{Z})$, che sta anche in $H_n(M;\mathbb{R})$.

<u>Def</u> Il volume simpliciale di M è $\|M\| := |[M]|$. Se M è non orientabile, definiamo $\|M\| := \frac{1}{2}\|\tilde{M}\|$.

Proprietà 1) Data $f: M \to N$ di grado d, si ha $\|M\| \geq d\|N\|$.

2) Se M, N sono chiuse, orientabili e omotopicamente equivalenti, $\|M\| = \|N\|$

3) Se M ha una self map di grado almeno 2, $\|M\| = 0$.

4) $\|S^n\| = 0$, e $\|M \times S^n\| = 0$ $\forall M$ chiusa.

DIM 1) $[M] = \lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_k \alpha_k$ induce una scrittura $f_*[M] = d[N]$ come ciclo di uguale norma
$\lambda_1(f\alpha_1) + \ldots + \lambda_k(f\alpha_k)$. Ci potrebbe essere cancellazione.

2) Segue da 1).

3) $\|M\| \geq 2\|M\| \Rightarrow \|M\| \leq 0 \Rightarrow \|M\| = 0$.

4) Ogni sfera ammette una mappa di grado ≥ 2, e dunque anche $M \times S^n$.

Prop Se $f: M \to N$ è un rivestimento a d fogli, $\|M\| = d\|N\|$.
DIM Sia $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_k \alpha_k$ un rappresentante di $[N]$. Ogni α_i è una mappa $\alpha_i : \Delta_n \to N$; dato che Δ_n è semplicemente connesso, α_i si solleva a d mappe distinte $\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^d : \Delta_n \to M$. La catena $\tilde{\alpha} := \sum_{i,j} \lambda_i \alpha_i^j$ è un ciclo in M, e $f_* \tilde{\alpha} = d \cdot \alpha$, da cui $\|M\| \leq d\|N\|$. $\square$

C'è una relazione tra volume simpliciale e volume iperbolico?

Teorema Sia M una 3-varietà iperbolica chiusa. Allora, $\mathrm{Vol}(M) = v_3 \|M\|$.

Osserviamo innanzitutto che a meno di sostituire M con $\tilde{M}$, la possiamo supporre orientabile. Infatti, l'identità verrebbe moltiplicata per 2 da entrambi i lati.

Def Definiamo il k-simplesso singolare dritto con vertici $v_0, \ldots, v_k$ come la mappa

$\alpha : \Delta_k \longrightarrow \mathbb{H}^n$, $(t_0, \ldots, t_k) \longmapsto t_0 v_0 + \ldots + t_k v_k$.

Se $v_0, \ldots, v_k$ sono in posizione generale, parliamo di simplesso dritto non degenere, e l'immagine è un simplesso iperbolico.

Def Dato un k-simplesso singolare $\alpha : \Delta_k \longrightarrow \mathbb{H}^n$, definiamo il suo raddrizzamento $\bar{\alpha}$ come il simplesso dritto con gli stessi vertici di α.

Oss Possiamo definire il raddrizzamento su una qualsiasi varietà iperbolica $M = \mathbb{H}^n/_{\Gamma}$ sollevando, raddrizzando in $\mathbb{H}^n$ e proiettando di nuovo su M.
Osserviamo anche che sollevamenti diversi producono lo stesso raddrizzamento, dato che le deck map sono isometrie.

Per linearità, estendiamo il raddrizzamento ad una mappa $st : C_*(M) \to C_*(M)$ che commuta con ∂, cioè passa in omologia.

Proposizione La mappa $st_* : H_*(M;\mathbb{R}) \longrightarrow H_*(M;\mathbb{R})$ è l'identità.

DIM Basta prendere $\sigma_t(x) = t\sigma(x) + (1-t)\bar{\sigma}(x)$. Questa è un'omotopia, in C_*, tra st e id. $\square$

Def Definiamo il volume astratto di un simplesso come il volume del suo sollevamento ad $\mathbb{H}^n$, $\left|\int_\alpha \omega\right|$, dove ω è la forma volume di M pullbackata usando α.

Oss Dato che un simplesso dritto è compatto, il suo volume astratto è minore di v_3.

Pertanto,

Proposizione M come sopra; allora, $Vol(M) \leq v_3 \|M\|$.

DIM WLOG supponiamo M orientabile. Prendiamo un rappresentante dritto di $[M]$, $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \_ + \lambda_k\alpha_k$; se ω è la forma volume di M, si ha

$$Vol(M) = \int_M \omega = \int_\alpha \omega = \lambda_1 \int_{\alpha_1}\omega + \_ + \lambda_k\int_{\alpha_k}\omega \quad ; \forall i, \left|\int_{\alpha_i}\omega\right| < v_3, \text{ e dunque}$$

$Vol(M) < (|\lambda_1| + \_ + |\lambda_k|) v_3$; dato che questo vale $\forall \alpha$, $Vol(M) \leq v_3 \|M\|$. □

Con una condizione in più, possiamo facilmente mostrare la disuguaglianza inversa:

Def Dato $\varepsilon > 0$, un ciclo ε-efficiente su M è un ciclo dritto $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \_ + \lambda_k\alpha_k$ che rappresenti $[M]$, tale che $AVol(\alpha_i) > v_3 - \varepsilon$ $\forall i$, e $\lambda_i\int_{\alpha_i}\omega > 0$ $\forall i$.

Lemma Se M ammette un ciclo ε-efficiente $\forall \varepsilon$, allora $Vol(M) \geq v_3\|M\|$.
DIM Sia $\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \_ + \lambda_k\alpha_k$ ε-efficiente; se ω è la fv di M, si ha

$$Vol(M) = \int_M \omega = \lambda_1\int_{\alpha_1}\omega + \_ + \lambda_k\int_{\alpha_k}\omega \geq (|\lambda_1| + \_ + |\lambda_k|)(v_3 - \varepsilon) \ \forall \varepsilon > 0. \text{ Tesi.}$$
□

Mostriamo ora che ogni M ammette cicli ε-efficienti.

Oss Se T_i è una successione di tetraedri i cui vertici tendono a quelli di uno ideale regolare, $Vol(T_i) \to v_3$.

Sia ora $t > 0$, e $\Delta(t)$ un tetraedro regolare ottenuto come segue: prendo $x \in \mathbb{H}^3$, un tetraedro regolare in $T_x\mathbb{H}^3$ centrato nell'origine e con i vertici nella sfera di raggio t. Proietto i vertici su $\mathbb{H}^3$ con la mappa esponenziale, e ne prendo l'inviluppo convesso.

Un t-simplesso è un tetraedro isometrico a $\Delta(t)$ con un ordinamento dei vertici. L'ordinamento serve per il raddrizzamento. Sia $S(t)$ l'insieme dei t-simplessi in $\mathbb{H}^3$.

Fatto $Isom(\mathbb{H}^3)$ agisce liberamente e transitivamente su $S(t)$.

Sappiamo anche che l'azione di $Isom(\mathbb{H}^3)$ fa indurre dalla misura di Haar una misura $Isom(\mathbb{H}^3)$-invariante su $S(t)$.

Sia $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ una 3-varietà iperbolica chiusa, e $\pi : \mathbb{H}^3 \longrightarrow M$ il rivestimento universale. Prendiamo un p.to base x_0, e consideriamo la sua orbita $O = \Gamma x_0$.

Consideriamo $\Sigma = \Gamma^4/\Gamma$, con Γ che agisce per moltiplicazione a sx.

Un elemento $\sigma = (g_0, g_1, g_2, g_3)$ determina un simplesso singolare in $\mathbb{H}^3$, con vertici dati da $g_0(x_0), g_1(x_0), g_2(x_0), g_3(x_0) \in O$. Notiamo che questo è ben definito solo a meno di traslazione per un elemento di Γ, e dunque dà una buona definizione su M di un simplesso singolare σ.

Sia $S_\sigma^+(t)$ l'insieme dei t-simplessi positivi t.c. $v_i \in D(g_i(x_0))$, $S_\sigma^-(t)$ è analogo, e siano $\lambda_\sigma^\pm(t) = m(S_\sigma^\pm(t))$. Definiamo $\lambda_\sigma(t) = \lambda_\sigma^+(t) - \lambda_\sigma^-(t)$, e sia

$$\alpha(t) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \lambda_\sigma(t)\, \sigma .$$

Lemma $\alpha(t)$ ha finiti addendi, è un ciclo, e se t è abb. grande rappresenta un multiplo positivo di $[M]$ in $H_3(M;\mathbb{R})$.

Lemma Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t_0 > 0$ t.c. $\forall t > t_0$, $\bar{\alpha}(t) : \dfrac{\alpha(t)}{k_t}$, con $\alpha(t) = k_t [M]$, è ε-efficiente.

DIM Sia d il diametro di $D(x_0)$; se un simplesso ha i vertici a distanza $< d$ da quelli di un t-simplesso, diciamo che è un quasi t-simplesso.
Per costruzione, $\bar{\alpha}$ è combinazione lineare di quasi t-simplessi.

Mostriamo che $\forall \varepsilon > 0\ \exists t_0$ t.c. $\forall t > t_0$ i quasi t-simplessi hanno volume $> V_3 - \varepsilon$.
Se così non fosse, considero una successione Δ_n^t di quasi-t-simplessi di volume minore di V_3. I vertici di Δ_n^t sono più vicini di d a quelli di un t-simplesso Δ_*^t, e possiamo muovere con un'isometria Δ_n^t e Δ_*^t di modo che i baricentri coincidano.
Allora, sia Δ_*^t che Δ_n^t tendono ad avere gli stessi vertici di un tetraedro regolare ideale, assurdo.

$\square$

Corollario Sia M una 3-varietà iperbolica chiusa. Allora, $Vol(M) \geq v_3 \|M\|$.

Corollario Due 3-varietà iperboliche chiuse omotopicamente equivalenti hanno lo stesso volume.

Oss Se mostriamo che v_n è il volume massimo di ogni n-simplesso iperbolico, la dimostrazione sopra si generalizza a dimensione $n \geq 3$.

Rigidità di Mostow

Ricordiamo che l'obiettivo è dimostrare il seguente

Teorema (Mostow) Siano M, N 3-varietà iperboliche connesse chiuse e orientabili. Ogni isomorfismo $\pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N)$ è indotto da un'unica isometria.

Osserviamo che M e N sono asferiche, dato che hanno rivestimento universale $\mathbb{H}^3$, e dunque un isomorfismo $\pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N)$ viene da un'equivalenza omotopica. Dobbiamo solo mostrare che l'eq. omotopica è indotta da un'isometria.

Sia $f: M \longrightarrow N$ un'equiv. omotopica liscia. Sappiamo che f si solleva a una mappa tra rivestimenti universali, e che questa si estende in modo continuo ad un omeomorfismo delle sfere di bordo, $\tilde{f}: \overline{\mathbb{H}^3} \longrightarrow \overline{\mathbb{H}^3}$, si restringe a $\tilde{f}: \partial\mathbb{H}^3 \longrightarrow \partial\mathbb{H}^3$.

Lemma L'estensione $\tilde{f}: \partial\mathbb{H}^3 \longrightarrow \partial\mathbb{H}^3$ manda i vertici di simplessi regolari ideali in vertici di simplessi regolari ideali.

DIM (Idea) Prendo $v_0, \ldots, v_3$ vertici di SRI che vanno in vertici di SI non regolare, che dunque ha volume $< v_3 - 2\delta$ per un certo δ.
Esistono degli intorni U_i di v_i in $\overline{\mathbb{H}^3}$ t.c. i volumi dei tetraedri con vertici $\tilde{f}(u_i)$ è $< v_3 - \delta$ $\forall u_i \in U_i$.

La dimostrazione si conclude mostrando che il ciclo $\alpha(t)$ definito sopra ha una porzione lunga $C > 0$ in cui è combinazione di simplessi singolari bad. Questo implicherebbe che $Vol(M) = Vol(N)$, assurdo.

$\square$

Osserviamo anche che in $\mathbb{H}^3$, ogni triangolo ideale è faccia di due tetraedri regolari ideali.
Infatti, consideriamo la retta ortogonale al piano generato dal triangolo e passante per il baricentro, il quarto vertice dovrà trovarsi su uno dei due p.ti all'infinito.
Per mostrare che sono tutti validi, basta dire che i triangoli in $\mathbb{H}^3$ sono tutti isometrici, e mostrare un esempio pratico.

<u>Lemma</u> Sia f un'equivalenza omotopica liscia tra due 3-varietà iperboliche chiuse e orientabili. Allora, la restrizione al bordo di $\tilde{f}$ coincide con la restrizione al bordo di un'isometria $\psi \in Isom(\mathbb{H}^3)$.

<u>DIM (Idea)</u> Se $v_0, \dots, v_3$ sono vertici di un SRI di $\mathbb{H}^3$, $\tilde{f}$ li manda in altri vertici di SRI. Sia ψ l'unica isometria che coincide con $\tilde{f}$ sui v_i. Allora, esiste un unico punto v_4 t.c. v_0, v_1, v_2, v_4 sono vertici di un TRI, e $\psi(v_4)$ sia l'unico altro punto t.c. $v_0, v_1, v_2, \psi(v_4)$ sono vertici di un TRI: sempre per il Lemma $\psi(v_4) = \tilde{f}(v_4)$.

Specchiando Δ lungo una faccia e iterando, si ottiene una tassellazione di $\mathbb{H}^3$ in tetraedri i cui vertici sono densi in $\partial\mathbb{H}^3$. Allora, $\tilde{f}$ e ψ coincidono su un denso di $\partial\mathbb{H}^3$, tesi.

$\square$

<u>Teorema (di rigidità di Mostow)</u> Sia $f: M \to N$ un'equivalenza omotopica tra 3-varietà iperboliche chiuse orientabili. Allora, f è omotopa ad un'isometria.

<u>DIM</u> Siano $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ e $N = \mathbb{H}^3/\Gamma'$, e sia $\tilde{f}$ un sollevamento. Si ha $\tilde{f} \circ \gamma = f_* \gamma \circ \tilde{f}$ $\forall \gamma \in \Gamma$. L'estensione al bordo di $\tilde{f}$ è la traccia di un'isometria ψ, e dunque $\psi \circ \gamma = f_* \gamma \circ \psi$ $\forall \gamma \in \Gamma$, e dato che un'isometria è caratterizzata dall'azione sul bordo, questo vale per ogni punto in $\overline{\mathbb{H}^3}$. Allora, ψ passa al quoziente a un'isometria $\psi: M \to N$.

Un'omotopia tra $\tilde{f}$ e ψ si costruisce come combinazione convessa in $\mathbb{H}^3$, che è ancora Γ-equivariante e quindi passa al quoziente.

$\square$