$\boxed{1}$

Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ rappresentato nella base canonica dalla matrice

$$M_e(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Trovare $M_B(\varphi)$, dove $B = \{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4\}$

b) Calcolare $\mathrm{Rad}\,\varphi$ lavorando in entrambe le basi, e confrontare i risultati.

Soluzione

Ricordiamo che un prodotto è una forma bilineare; pertanto, se v_1, v_2, w_1, w_2 sono vettori, vale $\varphi(v_1+w_1, v_2+w_2) = \varphi(v_1,v_2) + \varphi(w_1,v_2) + \varphi(v_1,w_2) + \varphi(w_1,w_2)$.

Ricordiamo anche che è simmetrico, cioè $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$ $\forall v,w$, e che nella matrice che lo rappresenta nella base $\{v_1, -, v_n\}$, le entrate sono date da $(a_{ij}) = \varphi(v_i, v_j)$.

a) $\cdot\, \varphi(v_1,v_1) = \varphi(e_1,e_1) = 1$;

$\cdot\, \varphi(v_1,v_2) = \varphi(v_1,v_1) + \varphi(v_1,e_2) = 1+1 = 2$;

$\cdot\, \varphi(v_1,v_3) = \varphi(v_1,v_2) + \varphi(v_1,e_3) = 2+2 = 4$;

$\cdot\, \varphi(v_1,v_4) = \varphi(v_1,v_3) + \varphi(v_1,e_4) = 4+1 = 5$;

$\cdot\, \varphi(v_2,v_2) = \varphi(e_1+e_2, e_1+e_2) = \varphi(e_1,e_1) + 2\varphi(e_1,e_2) + \varphi(e_2,e_2) = 1+2-1 = 2$;

$\cdot\, \varphi(v_2,v_3) = \varphi(v_2,v_2) + \varphi(v_2,e_3) = 2 + \varphi(e_1,e_3) + \varphi(e_2,e_3) = 2+2+0 = 4$;

$\cdot\, \varphi(v_2,v_4) = \varphi(v_2,v_3) + \varphi(e_1,e_4) + \varphi(e_2,e_4) = 4+1+3 = 8$;

- $\varphi(v_3, v_3) = \varphi(e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3) = \varphi(v_2, v_2) + 2\varphi(v_2, e_3) + \varphi(e_3, e_3) =$
$= 2 + 2\varphi(e_1, e_3) + \varphi(e_3, e_3) = 2+4+2 = 8$;
- $\varphi(v_3, v_4) = \varphi(v_3, v_3) + \varphi(v_3, e_4) = 8 + \varphi(e_1, e_4) + \varphi(e_2, e_4) + \varphi(e_3, e_4) =$
$= 8+1+3+4 = 16$;
- $\varphi(v_4, v_4) = \varphi(v_3, v_3) + 2\varphi(v_3, e_4) + \varphi(e_4, e_4) = 8 + 2(1+3+4) - 1 = 23$;

Allora, la matrice che rappresenta φ nella base $\mathcal{B}$ è

$$m_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 16 \\ 5 & 8 & 16 & 23 \end{pmatrix}.$$

$v_3 - 2v_2$

$-2e_1 - 2e_2 + e_1 + e_2 + e_3$

$-e_1 - e_2 + e_3$

b) Per calcolare $\mathrm{Rad}\,\varphi$, possiamo guardare il nucleo della matrice che rappresenta φ nella base data. $A = m_e(\varphi)$, $B = m_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Facendo mosse di Gauss, si nota che la matrice ha rango 2, da cui segue che $\dim(\mathrm{Ker}\,A) = 4-2 = 2$.

Osserviamo anche che $A^{(1)} + A^{(2)} - A^{(3)} = 0$, e $2A^{(1)} - A^{(2)} - A^{(4)} = 0$.

Allora, una base di $\mathrm{Rad}\,\varphi$ è $\{e_1 + e_2 - e_3, 2e_1 - e_2 - e_4\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 16 \\ 5 & 8 & 16 & 23 \end{pmatrix}$$

Anche questa matrice ha un nucleo di dimensione 2, e una base è data da $\{v_3 - 2v_2, 3v_1 + v_2 - v_4\} =$
$= \{e_1 + e_2 - e_3, 3e_1 - e_3 - e_4\}$, che ha lo stesso span di quella sopra.

$\boxed{2}$

Scrivere nella base canonica la matrice che rappresenti un prodotto scalare $\varphi \in PS(\mathbb{R}^3)$, tale che

a) $\operatorname{sgn}(\varphi) = (2,1,0)$

b) $\operatorname{sgn}(\varphi_{|W}) = (1,1,0)$, con $W = \{x+y+z=0\}$

c) $\varphi(e_1, e_1) = 0$.

<u>Soluzione</u>

Scriviamo una base di W; $W = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$\varphi(e_1, e_1) = 0$ da richiesta. Scegliamo quale dei due vettori della base di W sarà "positivo", per esempio $e_1 - e_2$. Dovremo avere $\varphi(e_1 - e_3, e_1 - e_3) < 0$.

Dato che
$$\varphi(e_1 - e_3, e_1 - e_3) = \varphi(e_1, e_1) - 2\varphi(e_1, e_3) + \varphi(e_3, e_3) = \varphi(e_3, e_3) - 2\varphi(e_1, e_3)$$

poniamo $\varphi(e_3, e_3) = 1$, $\varphi(e_1, e_3) = 1$. Similmente, poniamo $\begin{cases} \varphi(e_1, e_2) = 1 \\ \varphi(e_2, e_2) = 3 \end{cases}$.

La matrice a questo punto ha la forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$;

vogliamo che la segnatura sia $(2,1,0)$; ci basta trovare due vettori indipendenti positivi. Mettiamo a 0 le due entrate libere, trovando

$$M_e(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo anche che $\{e_2, e_1 - e_2, e_1 - e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e che
$$\begin{cases} \varphi_{|\operatorname{span}(e_2, e_1 - e_2)} \text{ è definito positivo} \\ \varphi_{|\operatorname{span}(e_1 - e_3)} \text{ è definito negativo} \end{cases}$$

Quindi, la matrice trovata funziona.

$\boxed{3}$

Per una data quaterna di numeri reali (a_0, a_1, a_2, a_3), si consideri il prodotto scalare $\varphi_{\underline{a}}$ su $\mathbb{R}_3[x]$ dato da
$$\varphi_{\underline{a}}(p(x), q(x)) = \sum_{k=0}^{3} a_k\, p(k)\, q(k).$$

a) Calcolare una base di $\mathbb{R}_3[x]$ ortogonale per $\varphi_{(1,1,0,-1)}$.

b) Calcolare la segnatura di $\varphi_{(1,1,0,-1)}$

c) Calcolare la segnatura di $\varphi_{\underline{a}}$, al variare di $\underline{a} \in \mathbb{R}^4$.

Soluzione

a)
$$\varphi_{(1,1,0,-1)}(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1) - p(3)q(3).$$

Considero la base $\mathcal{B} = \{1,\ x-3,\ x^2-4x+3,\ x^3-4x^2+3x\} := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Dopo aver osservato che $v_3 = (x-1)(x-3)$, $v_4 = x(x-1)(x-3)$, calcoliamo φ sui vettori della base.

- $\varphi(v_1, v_1) = 1$;
- $\varphi(v_1, v_2) = -3 - 2 + 0 = -5$;
- $\varphi(v_1, v_3) = 3 + 0 + 0 = 3$;
- $\varphi(v_1, v_4) = 0$;
- $\varphi(v_2, v_2) = 9 + 4 - 0 = 13$;
- $\varphi(v_2, v_3) = -9 + 0 + 0 = -9$;
- $\varphi(v_2, v_4) = 0$;
- $\varphi(v_3, v_3) = 9 + 0 + 0 = 9$;
- $\varphi(v_3, v_4) = 0$;
- $\varphi(v_4, v_4) = 0$;

Allora,
$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 0 \\ -5 & 13 & -9 & 0 \\ 3 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ortogonalizzare la base trovata, usiamo l'algoritmo di Lagrange.
Scegliamo come vettore non isotropo v_1, e ortogonalizziamo gli altri.

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \longrightarrow \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, con
$$\begin{cases} w_1 = v_1 ; \\ w_2 = v_2 - \dfrac{\varphi(v_1,v_2)}{\varphi(v_1,v_1)} v_1 ; \\ w_3 = v_3 - \dfrac{\varphi(v_1,v_3)}{\varphi(v_1,v_1)} v_1 ; \\ w_4 = v_4 - \dfrac{\varphi(v_1,v_4)}{\varphi(v_1,v_1)} v_1 . \end{cases}$$

In particolare abbiamo

$$w_2 = x-3 - \frac{(-5)}{1} \cdot 1 = x+2 ;$$

$$w_3 = x^2 - 4x + 3 - \frac{3}{1} \cdot 1 = x^2 - 4x ;$$

$v_4 \in \operatorname{Rad}\varphi$, dunque lasciamo $w_4 = v_4$. Iteriamo l'algoritmo, ponendo

$p(0)q(0) + p(1)q(1) - p(3)q(3)$

$$\begin{cases} u_1 = w_1 = v_1 \\ u_2 = w_2 = x+2 \\ u_3 = w_3 - \dfrac{\varphi(w_2,w_3)}{\varphi(w_2,w_2)} w_2 = x^2 - 4x + \frac{1}{2}x + 1 \Longrightarrow 2x^2 - 7x + 2 \\ u_4 = w_4 = v_4 \end{cases}$$

La base trovata è dunque $\mathcal{B}' = \{1, x+2, 2x^2-7x+2, x^3-4x^2+7x\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$
Volendo controllare, scriviamo $M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

- $\varphi(u_1,u_1) = 1$;
- $\varphi(u_1,u_2) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 - 1\cdot 5 = 0$;
- $\varphi(u_1,u_3) = 2 - 3 - (18-21+2) = 0$;
- $\varphi(u_2,u_2) = 4 + 9 - 25 = -12$;
- $\varphi(u_2,u_3) = 4 - 9 + 5 = 0$;
- $\varphi(u_3,u_3) = 4 + (-3)^2 + 1^2 = 14$;

Infine, $\varphi(u_4, -) \equiv 0$. Allora, $M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) È chiaro dalla matrice che $\operatorname{sgn}(\varphi) = (2,1,1)$.

c) $\varphi_{\underline{a}}(p(x),q(x)) = \sum_{k=0}^{3} a_k p(k) q(k)$; calcoliamo $\varphi_{\underline{a}}$ sui vettori di una base, ad esempio $\mathcal{D} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{x^3 - 6x^2 + 11x - 6,\ x^3 - 5x^2 + 6x,\ x^3 + 4x^2 + 3x,\ x^3 - 3x^2 + 2x\}$.

$\mathcal{D}$ è una base perché la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{D}}(id) = \begin{pmatrix} -6 & 11 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ ha effettivamente rango 4, dove $\mathcal{E}$ è la base dei monomi.

Calcolando $\varphi_{\underline{a}}$ su $\mathcal{D}$, si trova

- $\varphi_{\underline{a}}(v_1, v_1) = 36a_0$; • $\varphi_{\underline{a}}(v_1, v_2) = 0$; • $\varphi_{\underline{a}}(v_1, v_3) = 0$; • $\varphi_{\underline{a}}(v_1, v_4) = 0$
- $\varphi_{\underline{a}}(v_2, v_2) = 4a_1$; • $\varphi_{\underline{a}}(v_2, v_3) = 0$; • $\varphi_{\underline{a}}(v_2, v_4) = 0$;
- $\varphi_{\underline{a}}(v_3, v_3) = 900a_2$; • $\varphi_{\underline{a}}(v_3, v_4) = 0$; • $\varphi_{\underline{a}}(v_4, v_4) = 36a_3$;

Allora, $M_{\mathcal{D}}(\varphi_{\underline{a}}) = \begin{pmatrix} 36a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 900a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36a_3 \end{pmatrix}$.

Dalla matrice, si vede che

$\mathrm{sgn}(\varphi) = \mathrm{sgn}(a_0, a_1, a_2, a_3)$.

$\boxed{4}$

Sia φ il prodotto scalare di $\mathbb{R}^5$ rappresentato nella base canonica dalla matrice

$$M_e(\varphi) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base di $\operatorname{Rad}\varphi$.

b) Calcolare $\operatorname{sgn}\varphi$.

c) Indicare un sottospazio isotropo di dimensione massima.

Soluzione

a) Troviamo prima di tutto il rango di A. Facendo mosse di Gauss, si trova che la matrice ha rango 4, e si osserva che $2A^{(1)} - A^{(2)} - A^{(3)} = 0$, da cui

$\operatorname{Rad}\varphi = \operatorname{span}(2e_1 - e_2 - e_3)$.

b) Osserviamo innanzitutto che $\varphi_{|\operatorname{span}(e_2,e_3)} > 0$, e $\varphi_{|\operatorname{span}(e_4,e_5)} < 0$.

Da questo, segue che $\operatorname{sgn}\varphi = (2,2,1)$.

c) Prendiamo una base di Sylvester per φ : $S = \left\{2e_1 - e_2 - e_3,\ e_2,\ \frac{e_3+e_5}{\sqrt{2}},\ e_4,\ e_5\right\}$.

Qui, la matrice di φ è $M_S(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Allora, la massima dimensione di un sottospazio isotropo è 3, ed uno di essi è

$W = \operatorname{span}(2e_1 - e_2 - e_3,\ e_2 + e_4,\ e_3 + (1-\sqrt{2})\,e_5)$.