$\boxed{1}$

Calcolare il polinomio minimo delle matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione

Osserviamo che $A^2 = 0$, da cui $\mu_A(t) \mid t^2$, e che $A \neq 0$. Dunque, $\mu_A(t) = t^2$.

Osserviamo anche che $B^2 = B$, da cui $\mu_B(t) \mid t^2 - t$. Dato che sia 0 che 1 sono autovalori per B, $\mu_B(t) = t^2 - t$.

$\boxed{2}$

Trovare, se esiste, una matrice $A \in M(4, \mathbb{R})$ tale che $\mu_A(t) = t^3 - 2t^2 + t$.

Soluzione

Scomponendo $\mu_A(t)$, troviamo $\mu_A(t) = t(t-1)^2$. Dunque, gli autovalori dovranno essere 0 e 1. Inoltre, vogliamo che $\mu_A(A) = 0$, e $A(A-I) \neq \underline{0}$.

Per soddisfare queste richieste, scegliamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Osserviamo subito che $\mu_A(A) = 0$, e

che $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, da cui $A(A-I) \neq \underline{0}$, come voluto.

$\boxed{3}$

Date due matrici quadrate A e B, calcolare il polinomio minimo di $N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ in funzione del polinomio minimo di A e B.

<u>Soluzione</u>

Vogliamo mostrare che $\mu_N(t) = \text{mcm}(\mu_A(t), \mu_B(t))$.

Osserviamo innanzitutto che se $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, $p(N) = \left(\begin{array}{c|c} p(A) & 0 \\ \hline 0 & p(B) \end{array}\right)$.

Dato che $\mu_N(N) = 0$, deve valere $\left(\begin{array}{c|c} \mu_N(A) & 0 \\ \hline 0 & \mu_N(B) \end{array}\right) = 0$, cioè $\begin{cases} \mu_N(A) = 0 \\ \mu_N(B) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \mu_A(t) \mid \mu_N(t) \\ \mu_B(t) \mid \mu_N(t) \end{cases} \Rightarrow \text{mcm}(\mu_A, \mu_B) \mid \mu_N$.

Viceversa, preso un polinomio $q \in \mathbb{K}[t]$ t.c. $\mu_A \mid q$, $\mu_B \mid q$, sicuramente $q(A) = q(B) = 0$, da cui $\mu_N \mid q$; in particolare questo vale per $q = \text{mcm}(\mu_A, \mu_B)$. $\square$

$\boxed{4}$

Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Esprimere A^5 come combinazione lineare di A^2, A e I.

<u>Soluzione</u>

Calcoliamo innanzitutto $p_A(t)$. $p_A(t) = \det\begin{pmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ 1 & 2-t & 3 \\ 1 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (2-t)\det\begin{pmatrix} 3-t & 1 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} =$

$= (2-t)((3-t)^2 - 1) = (2-t)(9+t^2-6t-1) = (2-t)(t^2-6t+8) = (2-t)^2(4-t)$

Trovato $p_A(t)$, troviamo $\mu_A(t)$. Sappiamo che $(2-t)(4-t) \mid \mu_A(t) \mid (2-t)^2(4-t)$, quindi se mostriamo che $A^2-6A+8I \neq 0$, seguirà che $\mu_A(t) = -p_A(t)$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 8 & 4 & 16 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, da cui $A^2-6A+8I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$, da cui

$\mu_A(t) = -p_A(t) = t^3 - 8t^2 + 20t - 16$.

Allora, $A^3 = 8A^2 - 20A + 16I \longrightarrow A^5 = 8A^4 - 20A^3 + 16A^2 =$

$= 8A(8A^2-20A+16I) - 20(8A^2-20A+16I) + 16A^2 =$

$= 64A^3 - 160A^2 + 128A - 160A^2 + 400A - 320I + 16A^2 =$

$= 64(8A^2-20A+16I) - 160A^2 + 128A - 160A^2 + 400A - 320I + 16A^2 =$

$= 512A^2 - 1280A + 1024I - 160A^2 + 128A - 160A^2 + 400A - 320I + 16A^2 = 208A^2 - 752A + 704I$.

$\boxed{5}$

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare $Ae_1, A^2e_1, A^3e_1, A^4e_1$.

b) Usare il teorema di Hamilton-Cayley per mostrare che $-p_A(t) = t^5 - a_4t^4 - a_3t^3 - a_2t^2 - a_1t - a_0$.

Potete usare un esercizio precedente.

Soluzione

a) Dalla matrice si vede che $Ae_1 = e_2$, $A^2e_1 = e_3$, $A^3e_1 = e_4$, $A^4e_1 = e_5$.

b) Osserviamo anche che $\mu_A(t)$ non può avere grado < 5: infatti, preso un polinomio $q(t) = \alpha_4t^4 + \alpha_3t^3 + \alpha_2t^2 + \alpha_1t + \alpha_0$, si ha
$q(A)(e_1) = \alpha_4e_5 + \alpha_3e_4 + \alpha_2e_3 + \alpha_1e_2 + \alpha_0e_1$. Questa combinazione si annulla
$\Leftrightarrow q(t) = 0$, assurdo.

Allora, $\mu_A(t)$ ha grado 5 ed è monico; $-p_A(t)$ ha grado 5 ed è monico, e per Hamilton-Cayley $\mu_A | -p_A \longrightarrow \mu_A = -p_A$.

A questo punto, basta osservare che il polinomio $a(t) = t^5 - a_4t^4 - a_3t^3 - a_2t^2 - a_1t - a_0$

é t.c. $a(A)e_1 = \underline{0}$, e $b(A)e_1 \neq \underline{0}$ per ogni suo divisore $b(t)$, da cui per lo stesso argomento usato sopra troviamo $\mu_A(t) = -p_A(t) = a(t)$.
