$\boxed{1}$

Usando gli assiomi, calcolare il determinante di $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Soluzione</u>

Dagli assiomi, possiamo dedurre il seguente fatto:

se $A = (A_1 | \text{---} | A_n) \in M(n, \mathbb{K})$,

$\det A = \det(A_1 | \_ | A_i + \lambda A_j | \_ | A_n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, e $\forall i, j \leq n$.

Infatti, per (multi) linearità si ha

$$\det(A_1 | \_ | A_i + \lambda A_j | \_ | A_n) = \det A + \lambda \underbrace{\det(A_1 | \_ | A_j | \_ | A_j | \_ | A_n)}^{\text{due colonne uguali}} = \det A.$$

Sappiamo anche che per una matrice triangolare T, vale $\det T = \prod T_{ii}$.

Facciamo dunque una riduzione a scala di A usando mosse di Gauss.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow[A^{(3)} - A^{(5)},\ A^{(4)} - A^{(5)}]{A^{(1)} - A^{(5)},\ A^{(2)} - A^{(5)}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{A_{(3)} - \frac{2}{3} A_{(2)}}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora, $\det A = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 120$.

$\boxed{2}$

Sia $A_k \in M(k, \mathbb{R})$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & a_{k-1} \end{pmatrix}$.

Usando gli assiomi e/o lo sviluppo di Laplace, mostrare che

$$\det(t\,Id - A_k) = t^k - a_{k-1}t^{k-1} - \dots - a_1 t - a_0 .$$

<u>Soluzione</u>

Per induzione su k.

$\underline{k=1}$ $\quad A_1 = (a_0)$, $\; tI - A_1 = t - a_0$, $\det(tI - A_1) = t - a_0$ $\quad$ ok

$\underline{k>1}$ $\quad tI - A_k = \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & & & & \\ 0 & & \boxed{tI - A_{k-1}} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$. Usando lo sviluppo di Laplace sulla prima riga, si ha che

$$\det(tI - A_k) = t\det(tI - A_{k-1}) + (-1)^k a_0 \det B,$$

dove B è una matrice triangolare superiore, con -1 sulla diagonale e t sulla sopradiagonale, di taglia $k-1$.

Allora, $\det B = (-1)^{k-1}$, e $\det(tI - A_k) = t\det(tI - A_{k-1}) + (-1)^{2k-1}a_0 =$

$= t(t^{k-1} - a_{k-1}t^{k-2} - \dots - a_1) - a_0 = t^k - a_{k-1}t^{k-1} - \dots - a_1 t - a_0$, come voluto.

$\boxed{3}$

In $\mathbb{R}^3$, consideriamo la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, con $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$, $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Sia $\mathcal{B}^*$ la base duale.

a) Determinare vettori riga w_1, w_2, w_3 tali che $v_i^*(x) = w_i x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

b) Detto F il funzionale $F(x) = x_1 + x_2 - x_3$, calcolare le coordinate $[F]_{B^*}$ verificando che $(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3) \cdot x = F(x)$ $\forall x$.

Soluzione

Ricordiamo che, data una base B di V, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, la base duale B^* di V^* è definita da $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, con $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$.

Calcoliamo i vettori della base duale di $B = \{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3\}$, usando le relazioni di cui sopra. Scrivendole in forma matriciale, si ha

$$\begin{pmatrix} (v_1^*)_1 & (v_1^*)_2 & (v_1^*)_3 \\ (v_2^*)_1 & (v_2^*)_2 & (v_2^*)_3 \\ (v_3^*)_1 & (v_3^*)_2 & (v_3^*)_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

esplicitando il prodotto a sinistra, e uguagliando le due matrici entrata per entrata,

si trova che $\begin{cases} v_1^* = e_1^* - e_2^* \\ v_2^* = e_2^* - e_3^* \\ v_3^* = e_3^* \end{cases}$.

Volendoli scrivere come funzionali,

$$\begin{cases} v_1^*(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 \\ v_2^*(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3 \\ v_3^*(x_1, x_2, x_3) = x_3 \end{cases}.$$

Osserviamo anche che

$$\begin{cases} (1,-1,0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 = v_1^*(x) \\ (0,1,-1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 - x_3 = v_2^*(x) \\ (0,0,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 = v_3^*(x) \end{cases}$$

$w_1 = (1,-1,0)$, $w_2 = (0,1,-1)$, $w_3 = (0,0,1)$.

b) Basta osservare che $[F]_{B^*} = (F(v_1), F(v_2), F(v_3))$, e dunque

$F(v_1) = F(e_1) = 1$;

$F(v_2) = F(e_1) + F(e_2) = 2$; $\implies [F]_{B^*} = (1, 2, 1)$.

$F(v_3) = F(e_1) + F(e_2) + F(e_3) = 1$;

$\boxed{4}$

Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$, equipaggiato con il prodotto scalare $\varphi(p,q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$. Sia $R : V^* \longrightarrow V$ tale che $R(F)$ è il rappresentante per φ di F, cioè $F(-) = \varphi(R(F), -)$. Calcolare $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(R)$, dove $\mathcal{B} = \{x, x+1, x^2+x\}$.

<u>Soluzione</u> Troviamo il comportamento di R sulla base $\mathcal{B}^*$, e scriviamone l'immagine nella base $\mathcal{B}$.

Ora, sappiamo che
$$\begin{cases} 1 = x^*(x) = \varphi(R(x^*), x) = R(x^*)(1) + 2R(x^*)(2) \\ 0 = x^*(x+1) = \varphi(R(x^*), x+1) = R(x^*)(0) + 2R(x^*)(1) + 3R(x^*)(2) \\ 0 = x^*(x^2+x) = \varphi(R(x^*), x^2+x) = 2R(x^*)(1) + 6R(x^*)(2) \end{cases},$$

da cui il sistema lineare
$$\begin{cases} R(x^*)(1) + 2R(x^*)(2) = 1 \\ R(x^*)(0) + 2R(x^*)(1) + 3R(x^*)(2) = 0 \\ 2R(x^*)(1) + 6R(x^*)(2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R(x^*)(0) = -3 \\ R(x^*)(1) = 3 \\ R(x^*)(2) = -1 \end{cases}$$

Ricordando che $R(x^*)$ è un polinomio di grado ≤ 2, scriviamo $R(x^*) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, e troviamo il sistema $\begin{cases} p_0 = -3 \\ p_2 + p_1 + p_0 = 3 \\ 4p_2 + 2p_1 + p_0 = -1 \end{cases}$, che ha soluzione $\begin{cases} p_0 = -3 \\ p_1 = 11 \\ p_2 = -5 \end{cases}$. Pertanto,

$R(x^*) = -5x^2 + 11x - 3$. Ripetendo lo stesso procedimento per $(x+1)^*$ e $(x^2+x)^*$, troviamo

$$R((x+1)^*) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1, \quad R((x^2+x)^*) = \frac{7}{4}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Scriviamo nella base $\mathcal{B}$ i polinomi trovati:
- $R(x^*) = 19v_1 - 3v_2 - 5v_3$
- $R(x+1^*) = -3v_1 + v_2 + \frac{1}{2}v_3$
- $R(x^2+x^*) = -\frac{22}{4}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{7}{4}v_3$

Allora,
$$M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{B}}(R) = \begin{pmatrix} 19 & -3 & -22/4 \\ -3 & 1 & 1/2 \\ -5 & 1/2 & 7/4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$

Calcolare la segnatura del prodotto scalare $\varphi \in PS(\mathbb{R}^4)$ che è rappresentato nella base canonica dalla matrice

$$A = M_e(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trovare poi un sottospazio di dimensione massima t.c. $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$.

Soluzione

Osserviamo innanzitutto che la matrice ha rango 2, e che $\begin{cases} 2A^{(1)} - A^{(2)} - A^{(4)} = 0, \\ A^{(1)} + A^{(2)} - A^{(3)} = 0 \end{cases}$

da cui $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Rad} \varphi = \operatorname{span}(e_1 + e_2 - e_3, 2e_1 - e_2 - e_4)$.

Osserviamo anche che $\varphi|_{\operatorname{span}(e_1)} > 0$, e che $\varphi|_{\operatorname{span}(e_2)} < 0$.

Allora, $\operatorname{sgn} \varphi = (1, 1, 2)$.

Ora, ricordiamo che una decomposizione della forma $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ è possibile se e solo se $\varphi|_W$ è non degenere, cioè se e solo se $W \cap W^\perp = \operatorname{Rad} \varphi|_W = \{\underline{0}\}$.

Però, in generale vale che se $W \cap \operatorname{Rad} \varphi = \{\underline{0}\}$, allora $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$.

Cerchiamo dunque un sottospazio che non intersechi il radicale, di modo che la restrizione sia non degenere. La dimensione massima di un tale sottospazio sarà 2.

$\operatorname{Rad} \varphi = \operatorname{span}(e_1 + e_2 - e_3, 2e_1 - e_2 - e_4)$, come complementare prendiamo $\operatorname{span}(e_1, e_2)$.

Osserviamo ora che $\varphi|_W$ è rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, che ha rango 2, e dunque $\operatorname{Rad} \varphi|_W = \{\underline{0}\}$, come voluto.

Oss Non è detto che se $W \cap \operatorname{Rad} \varphi = \{\underline{0}\}$, $\operatorname{Rad} \varphi|_W = \{\underline{0}\}$. Infatti, preso $\psi \in PS(\mathbb{R}^2)$, $M_e(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e $W = \operatorname{span}(e_1)$, si ha $W^\perp = \operatorname{span}(e_1) \Rightarrow W \cap W^\perp = W \neq \{\underline{0}\}$.

W e $W^\perp$ non sono dunque in somma diretta, anche se ψ è globalmente non degenere.

$\boxed{6}$

Sia (V, φ) uno spazio munito di prodotto scalare con segnatura (i_+, i_-, i_0). Mostrare che esiste un sottospazio $W \subseteq V$, con $\dim W = i_+$ e $\varphi_{|W} < 0$ se e solo se $i_+ \leq i_-$.

Soluzione $\boxed{\Longrightarrow}$ Segue dalla definizione di i_+ ed i_-.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sappiamo che esiste un sottospazio U di dimensione i_- tale che $\varphi_{|U} < 0$.
Dato che la restrizione di un prodotto scalare definito è ancora definito, scegliendo un opportuno sottospazio $W \subseteq U$ di dimensione i_+, si ha che $\varphi_{|W} < 0$.