$\boxed{1}$

Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ t.c. $A^3 = id$.

a) Determinare i possibili autovalori di A.

b) È vero che A dev'essere diagonalizzabile?

Soluzione a) $A^3 = id \iff A^3 - id = 0 \implies \mu_A \mid t^3 - 1 = (t-1)(t-\zeta_3)(t-\zeta_3^2)$,

con $\zeta_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque, i possibili autovalori sono $1, \zeta_3$ e ζ_3^2.

b) Sì. Infatti, per un risultato noto se μ_f si fattorizza in termini di grado 1, f è diagonalizzabile.

$\boxed{2}$

Trovare due matrici $P \in O(2)$, $D \in M(2, \mathbb{R})$ diagonale, tali che

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} P = D.$$

Soluzione Lavoriamo con il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$. Troviamo una base di autovettori per A, e poi la ortonormalizziamo usando Gram-Schmidt.

Si ha $\begin{cases} \operatorname{tr} A = 16 \\ \det A = 39 \end{cases} \implies \operatorname{Sp} A = \{3, 13\}$. Allora, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$.

$V_A(3) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \operatorname{span}(\underbrace{3e_1 - e_2}_{v_1})$; $V_A(13) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}(\underbrace{e_1 + 3e_2}_{v_2})$

Ora, sia φ il prodotto scalare standard; osserviamo che $\varphi(v_1, v_2) = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$,

$\begin{cases} \varphi(v_1, v_1) = 10 \implies w_1 = \frac{v_1}{\sqrt{10}} \text{ ha norma } 1. \\ \varphi(v_2, v_2) = 10 \implies w_2 = \frac{v_2}{\sqrt{10}} \text{ ha norma } 1. \end{cases}$

Allora, il cambio di base $\mathcal{C} \to \{w_1, w_2\}$ è la matrice richiesta,

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{3}$

Consideriamo $V = M(2,\mathbb{R})$, dotato del prodotto scalare $\varphi(X,Y) = tr(X^tY)$.
Sia $f \in End(V)$ definito da $f(X) = X - X^t$.

a) f è φ-autoaggiunto?

b) f è una φ-isometria?

c) Scrivere la matrice di f rispetto ad una base ortonormale di V, e confrontare il risultato con le risposte date in a) e b).

<u>Soluzione</u>

a) Osserviamo che • $\varphi(f(X),Y) = \varphi(X - X^t, Y) = \varphi(X,Y) - \varphi(X^t, Y) =$

$$= tr(X^tY) - tr(XY);$$

• $\varphi(X, f(Y)) = \varphi(X, Y - Y^t) = \varphi(X,Y) - \varphi(X, Y^t) = tr(X^tY) - tr(X^tY^t);$

dato che $X^tY^t = (YX)^t$, $tr(A^t) = trA$, e $tr(AB) = tr(BA)$,

$tr(X^tY^t) = tr((YX)^t) = tr(YX) = tr(XY) \Longrightarrow \varphi(f(X),Y) = \varphi(X, f(Y))$,

quindi f è φ-autoaggiunto.

b) Un'isometria è invertibile, e $Ker f = S(2,\mathbb{R}) \neq \{0\}$, da cui $f \notin O(V,\varphi)$.

c) Considero la base $\mathcal{B} = \{E_{12} - E_{21}, E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$; è facile vedere che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale.

Ora, gli ultimi tre vettori della base sono una base di $S(2,\mathbb{R})$, e

$$f(E_{12} - E_{21}) = (E_{12} - E_{21}) - (E_{12} - E_{21})^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$= 2(E_{12} - E_{21})$. Allora,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Osserviamo che a) $M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica ($\Leftrightarrow f$ è φ-autoaggiunto), e

b) Non è un'isometria, coerentemente con quanto detto prima.

4

Data $A = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ 2+i & i-1 \end{pmatrix}$, consideriamo $f_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $x \longmapsto Ax$.

a) Mostrare che $f_A \notin U(\mathbb{C}^2)$.

b) Trovare un prodotto hermitiano definito positivo rispetto al quale f_A sia unitario. Esplicitare la matrice di φ rispetto alla base canonica.

<u>Soluzione</u> a) $f_A \in U(\mathbb{C}^2)$ se e solo se $A \in U(2)$, cioè se e solo se $A^{-1} = A^H$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} i-1 & -i \\ -2-i & 1-i \end{pmatrix}$, mentre $A^H = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ -i & -1-i \end{pmatrix}$; queste due matrici sono diverse, quindi $f_A \notin U(\mathbb{C}^2)$.

b) f_A è unitario rispetto ad un prodotto hermitiano φ se $\varphi(f_A(x), f_A(y)) = \varphi(x,y)$ $\forall x,y$. Equivalentemente, possiamo richiedere che f_A sia un operatore normale con autovalori unitari. Equivalentemente (TSH) possiamo richiedere che f_A ammette una base φ-ortonormale di autovettori, e $\mathrm{sp} f_A \subseteq \{\|z\| = 1\}$.

Osserviamo che $\mathrm{sp} A = \{-i, i\}$, e che $\begin{cases} V_A(i) = \mathrm{span}((2-i)e_1 + 5e_2) = \mathrm{span}(v_1) \\ V_A(-i) = \mathrm{span}(-ie_1 + e_2) = \mathrm{span}(v_2) \end{cases}$

Ci basta dunque imporre $\varphi(v_1, v_1) = \varphi(v_2, v_2) = 1$, $\varphi(v_1, v_2) = 0$.

Allora, un prodotto hermitiano che funziona è quello rappresentato nella base $\{v_1, v_2\}$

della matrice $M_{\{v_1,v_2\}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A questo punto, basta applicare una similitudine (hermitiana) con la matrice che diagonalizza A, e cioè

$P : \mathcal{C} \to \{v_1, v_2\}$, $P = \begin{pmatrix} 2-i & -i \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad P^H A P = \begin{pmatrix} 30 & 6-2i \\ 6+2i & 2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{5}$

Consideriamo $W, U \subseteq (\mathbb{R}^4, \langle -,- \rangle)$, $U = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $W = \{x_1 + x_2 = 0\}$.

Scrivere nella base canonica la matrice di un operatore ortogonale f t.c. $f(W) = U$.

<u>Soluzione</u>

Scriviamo due basi per U e W: $U = \operatorname{span}\left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\}$.

$W = \operatorname{span}\left\{ \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{w_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$. Vogliamo costruire una mappa $f : w_j \longmapsto u_j$, e t.c. $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

Per farlo, imponiamo $w_j \longmapsto u_j$, e poi ortonormalizziamo la base in arrivo.

$$\begin{cases} f(e_1 - e_2) = e_1 - e_2 + e_3 + e_4 \\ f(e_1 - e_2 + e_3) = -e_1 + e_2 + e_3 - e_4 \\ f(e_1 - e_2 + e_4) = e_1 + e_2 - e_3 - e_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \to \\ f(e_3) = -2e_1 + 2e_2 \\ f(e_4) = 2e_2 - 2e_3 \end{cases}.$$

Poniamo $\begin{cases} f(e_1) = e_1 + e_3 \\ f(e_2) = e_2 + e_4 \end{cases}$.

Abbiamo dunque definito $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sulla base canonica;
$$\begin{cases} e_1 \longmapsto e_1 + e_3 \\ e_2 \longmapsto e_2 + e_4 \\ e_3 \longmapsto -2e_1 + 2e_2 \\ e_4 \longmapsto 2e_2 - 2e_3 \end{cases}.$$

Ortonormalizzando la base in arrivo con l'algoritmo di Gram-Schmidt, troviamo

$$v_1 = \frac{e_1}{\sqrt2} + \frac{e_3}{\sqrt2},\ v_2 = \frac{e_2}{\sqrt2} + \frac{e_4}{\sqrt2},\ v_3 = -\frac{e_1}{\sqrt2} + \frac{e_2}{\sqrt2} + \frac{e_3}{\sqrt2} - \frac{e_4}{\sqrt2},\ v_4 = \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2} - \frac{e_3}{2} - \frac{e_4}{2}.$$

La mappa $f' : e_j \longmapsto v_j$ ha matrice

$$\mathcal{M}_e(f') = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

ed è la mappa cercata.

<u>Oss</u> Dovremmo controllare che questo procedimento fissa U e W; un modo alternativo di risolvere l'esercizio potrebbe essere quello di scrivere una base di $U \cap W$, estenderla a base di $U + W = \mathbb{R}^4$, ortonormalizzarla in partenza ed in arrivo, e scrivere la matrice che codifica la composizione di questi passaggi.

$\boxed{6}$

Consideriamo $U, W \subseteq (\mathbb{R}^3, \langle -,- \rangle)$, con $U = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $W = \{x_1 - x_2 = 0\}$.
Sia $F = \{f \in End(\mathbb{R}^3) \mid f = f^*,\ f(U) \subseteq W,\ f(W) \subseteq U\}$.
F è un sottospazio di $End(\mathbb{R}^3)$? Se sì, calcolare $\dim F$.

<u>Soluzione</u>

Mostriamo che F è sottospazio di $End(\mathbb{R}^3)$.

- $0 \in F$;
- $(f+g)^* = g^* + f^* = f^* + g^* = f + g$
- $(f+g)(U) \subseteq f(U) + g(U) = W$; analoga per W.
- $(\lambda f)^* = \lambda (f^*)$
- $\lambda f(U) \subseteq \lambda W = W$.

Inoltre,

$U = span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

$W = span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Calcoliamo $\dim F$; le due condizioni $f(U) \subseteq W$ e $f(W) \subseteq U$, posta A una matrice di incognite simmetrica,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11} - 2a_{12} + a_{22} = 0 \\ a_{11} - a_{13} + a_{12} - a_{23} = 0 \\ a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + a_{13} + a_{23} = 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 0 \end{cases}$$

Adesso, basta osservare che le 4 equazioni sono indipendenti, e dunque che

$\dim F = 6 - 4 = 2$.