$\boxed{1}$

Osserviamo che $\det(U-I) = p_U(1)$. Se riusciamo a trovare gli autovalori di U, ne troviamo il polinomio caratteristico, e valutando in 1 avremo il risultato voluto.

Innanzitutto, osserviamo che se L_U è la mappa lineare associata a U, $L_U(e_i) = e_1 + \_ + e_n \ \forall i$. Pertanto, U ha $n-1$ colonne dipendenti, da cui $\dim \operatorname{Ker} U = \dim V_U(0) = n-1$, da cui $n-1 \leq m_A(0) \leq n$.

Osserviamo anche che $L_U(e_1 + \_ + e_n) = n(e_1 + \_ + e_n)$, da cui $\dim V_U(n) = 1$, e $\begin{cases} m_A(n) = 1 \\ m_A(0) = n-1 \end{cases}$. Allora, $p_U(t) = (-t)^{n-1} \cdot (n-t)$, che valutato in 1 ci dà

$$\det(U-I) = p_U(1) = (-1)^{n-1}(n-1).$$

$\boxed{2}$

Calcolare il determinante di $f: M(n,\mathbb{K}) \longrightarrow M(n,\mathbb{K})$, $A \longmapsto A^t$.

<u>Soluzione</u>

Sappiamo (ricordate l'esercizio 1 dell'8/11/23) che $M(n,\mathbb{K}) = S(n,\mathbb{K}) \oplus A(n,\mathbb{K})$.

Osserviamo che, detta $f(A) = A^t$, vale $f|_{S(n,\mathbb{K})} = id$, $f|_{A(n,\mathbb{K})} = -id$, cioè $S(n,\mathbb{K}) = V_f(1)$, $A(n,\mathbb{K}) = V_f(-1)$. Dato che il determinante di un endomorfismo è il prodotto degli autovalori, contati con molteplicità, e che $m_A(-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, si ha che $\det f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$\boxed{3}$

Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare $p_A(t)$, e mostrare che $1 \in Sp(A)$.

b) Trovare gli autovalori di A e una base per ogni autospazio

c) Usare le basi trovate per triangolare A

<u>Soluzione</u>

a)
$$p_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1-t \end{pmatrix}.$$ Sviluppando lungo l'ultima colonna, si ha che $\det(A - tI) = (1-t)\det\begin{pmatrix} 3-t & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2(2-t)(3-t) =$

$= t^4 - 7t^3 + 17t^2 - 17t + 6$, di cui 1 è radice.

b) Gli autovalori sono 1, di molteplicità algebrica 2, 2, di molteplicità algebrica 1, e 3, di molteplicità algebrica 1.

Segue che $1 \leq m_G(1) \leq 2$, $m_G(2) = 1$, $m_G(3) = 1$.

Per trovare degli autovettori per λ, si risolve il sistema lineare $(A - \lambda I)X = \underline{0}$.

Osserviamo anche che $A(e_4) = e_4$, e che $rk(A - I) = 3$, dunque

$V_A(1) = span(e_4)$.

$$(A - 2I)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 2x_2 = x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A(2) = span\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underline{0} \longrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -2x_4 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \; V_A(3) = \text{span}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

c) Completiamo i tre autovettori a base di $\mathbb{K}^4$: abbiamo $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,

consideriamo $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Chiamiamo P il cambio di base $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$. Si ha

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ come voluto.

$\boxed{14}$

Consideriamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $L_A : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$, $L_A(x) = Ax$.

a) Calcolare $Sp(A)$.

b) Calcolare basi degli autospazi.

c) Unendo le basi del punto b, si trova una base di $\mathbb{C}^4$?

<u>Soluzione</u>

Osserviamo che A è triangolare a blocchi. Questo comporta che il polinomio caratteristico di A sia il prodotto dei polinomi caratteristici dei blocchi sulla diagonale, e dunque che $Sp(A)$ sia l'unione dei singoli spettri.

Inoltre, detti $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, si osserva che $A_2 = -A_1$.

Sappiamo che, se $\lambda \in Sp(f)$, $-\lambda \in Sp(-f)$, e quindi calcolando gli autovalori di A_1 possiamo determinare quelli di A.

$$\det(A_1 - tI) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ -1 & -1-t \end{pmatrix} = -(1+t)(1-t) + 2 = t^2 - 1 + 2 = t^2 + 1.$$

Allora, gli autovalori di A, sono $\pm i$, da cui $Sp(A) = \{i, -i\}$.

b) Per trovare gli autospazi, calcoliamo prima la molteplicità geometrica dei due autovalori.

$$(A - iI) = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1-i & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1-i & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix}$$ ha rango 2, e $\begin{cases} A^{(2)} - (1+i)A^{(1)} = 0 \\ (1+i)A^{(1)} + (i-1)A^{(3)} + A^{(4)} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow V_A(i) = Ker(A - iI) = span(-(1+i)e_1 + e_2, (1+i)e_1 + (i-1)e_3 + e_4)$.

$$(A + iI) = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 0 & -2 \\ -1 & i-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & i-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$$ ha rango 2, e $\begin{cases} A^{(2)} - (i-1)A^{(1)} = 0 \\ (1-i)A^{(1)} - (1+i)A^{(3)} + A^{(4)} = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow V_A(-i) = Ker(A + iI) = span((i-1)e_1 + e_2, (1-i)e_1 - (i+1)e_3 + e_4)$.

c) Per quanto detto al punto b), A è diagonalizzabile, e ammette dunque una base di autovettori. La base è quella trovata.