



Appunti di Elementi di Topologia Algebrica

Dalle lezioni del prof.
Riccardo Benedetti

SIMONE CAPPELLINI

A.a. 2016/2017

11 novembre 2018

<http://poisson.phc.unipi.it/~cappellini>

Indice

1 Omotopia	4
1.1 Lezione 1 - 26/09	4
1.1.1 Nozioni Preliminari	4
1.1.2 Gruppi di Omotopia	6
1.2 Lezione 2 - 29/09	7
1.2.1 Spazi di Lacci Iterati	7
1.2.2 Linguaggio delle Categorie	8
1.3 Lezione 3 - 03/10	10
1.3.1 Versione Relativa dei π_n	11
1.3.2 n -Simplessi	12
1.4 Lezione 4 - 06/10	14
1.4.1 Orientazione	14
1.4.2 Complessi Simpliciali Finiti	15
1.5 Lezione 5 - 10/10	16
1.5.1 Categorie di Complessi Simpliciali Finiti	16
1.5.2 Suddivisione di Complessi Simpliciali Finiti	17
1.6 Lezione 6 - 13/10	19
1.6.1 Complessi Simpliciali di Cardinalità Arbitraria	19
1.6.2 Δ -Complessi	20
1.7 Lezione 7 - 17/10	22
1.7.1 Interpretazione Catoriale dei Δ -Complessi	22
1.7.2 Δ -Complessi $K(G, 1)$	23
1.7.3 CW-Complessi	24
1.8 Lezione 8 - 20/10	24
1.8.1 Insiemi Simpliciali	25
1.8.2 Esempi di CW-Complessi	25
1.9 Lezione 9 - 24/10	26
1.9.1 Proprietà dei CW-Complessi	26
1.9.2 Applicazioni Cellulari	27
2 Omologia	30
2.1 Lezione 10 - 27/10	30
2.1.1 Complessi di R -moduli	30
2.2 Lezione 11 - 03/11	33
2.2.1 Omologia Singolare su \mathbb{Z}	33
2.2.2 Omologia Singolare e Ridotta in versione Relativa	34
2.2.3 Approccio Assiomatico all'Omologia	36
2.3 Lezione 12 - 07/11	38
2.3.1 Coppie Buone e semplici \mathcal{U} -piccoli	39

2.4	Lezione 13 - 10/11	41
2.4.1	Successione di Mayer-Vietoris	41
2.4.2	Teoria del Grado	42
2.5	Lezione 14 - 14/11	43
2.5.1	Omologia Simpliciale	44
2.6	Lezione 15 - 17/11	46
2.6.1	Omologia Cellulare	46
2.6.2	Esempi di Calcolo di Omologia	48
2.7	Lezione 16 - 21/11	49
2.7.1	Coefficienti per l'Omologia	50
2.7.2	Caratteristica di Eulero-Poincaré	51
2.8	Lezione 17 - 24/11	52
2.8.1	Teoremi di Sconnessione	52
2.9	Lezione 18 - 28/11	55
2.9.1	Omologia Singolare Cubica	55
2.9.2	Omologia Singolare Geometrica	55
3	Coomologia e Dualità di Poincaré	58
3.1	Lezione 19 - 01/12	58
3.1.1	Coomologia di un Complesso a coefficienti in G	59
3.1.2	Funtore Ext	60
3.2	Lezione 20 - 12/12	63
3.2.1	Teorema dei Coefficienti Universali in Coomologia	63
3.2.2	Funtore Tor	64
3.2.3	Coomologia Singolare, Simpliciale e Cellulare	65
3.2.4	Struttura Moltiplicativa su H^n	65
3.3	Lezione 21 - 15/12	67
3.3.1	Prodotto "cap"	67
3.3.2	Dualità di Poincaré	67
3.3.3	Varietà PL	69
3.4	Lezione 22 - 19/12	71
3.4.1	DP-PL-Prima Versione	71
3.4.2	DP-PL-Seconda Versione	72
3.5	Lezione 23 - 22/12	73
3.5.1	Coomologia a Supporto Compatto	75

Capitolo 1

Omotopia

1.1 Lezione 1 - 26/09

1.1.1 Nozioni Preliminari

Ovunque in questi appunti, tranne dove diversamente specificato, X, Y, \dots saranno spazi topologici, ed ogni applicazione $f: X \rightarrow Y$ sarà da considerarsi continua.

Fissiamo adesso alcune notazioni che serviranno a snellire gli enunciati.

DEFINIZIONE: Definiamo coppia di spazi una coppia (X, A) in cui $A \subseteq X$. Denotiamo con $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ una funzione tale che $f(A) \subseteq B$.

Identifichiamo inoltre X con (X, \emptyset) .

DEFINIZIONE: Si dice spazio puntato (X, x_0) la coppia di spazi $(X, \{x_0\})$ con x_0 detto punto base. Denotiamo come sopra $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una funzione tale che $f(x_0) = y_0$.

DEFINIZIONE: Date $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ si dice omotopia tra f_0 e f_1 una $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che, posto $H_t = H|_{X \times \{t\}} \forall t \in [0, 1]$, valga $H_0 = f_0$ e $H_1 = f_1$.

DEFINIZIONE: Sia $\mathcal{C}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y . Consideriamo su di esso la topologia più fine tra quelle che rendono continue tutte le applicazioni del tipo $\gamma_H: [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ tale che $\gamma_H(t) = H_t$ con H una qualsiasi omotopia tra $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$.

Osservazione. La relazione di omotopia può essere dunque vista attraverso la connessione per archi in $\mathcal{C}(X, Y)$: $f \sim g \Leftrightarrow f, g$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di $\mathcal{C}(X, Y)$.

PROPOSIZIONE: La relazione di omotopia è di equivalenza su $\mathcal{C}(X, Y)$.

Dimostrazione. È riflessiva:

$f \sim f$ tramite $H(x, t) = f(x) \forall t \in [0, 1]$ (cammino costante f);

È simmetrica:

$f \sim g$ tramite $H \Rightarrow g \sim f$ tramite $\hat{H}(x, t) = H(x, 1 - t)$ (cammino inverso $\gamma_{H'}$);

È transitiva:

$f \sim g$ tramite H , $g \sim h$ tramite $H' \Rightarrow f \sim h$ tramite

$$G(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H'(x, 2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (\text{giunzione di cammini } \gamma_H * \gamma_{H'}). \quad \square$$

DEFINIZIONE: Possiamo dunque definire lo spazio quoziente $[X, Y] := \mathcal{C}(X, Y) / \sim$.

Osservazione. $f, f': X \rightarrow Y; g, g': Y \rightarrow Z; f \sim f', g \sim g' \Rightarrow (g \circ f) \sim (g' \circ f')$.

DEFINIZIONE: Date $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ si dice omotopia relativa una $H: (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B)$ tale che $H_t(A) \subseteq B \forall t \in [0, 1]$ e $H_0 = f_0, H_1 = f_1$.

DEFINIZIONE: Date $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ tali che $f_0|_A = f_1|_A = f: A \rightarrow B$, si dice che f_0 e f_1 sono omotope relativamente in senso forte se $\exists H$ omotopia relativa tale che $\forall t \in [0, 1] H_t|_A = f$.

DEFINIZIONE: $f: X \rightarrow Y$ è equivalenza omotopica se ammette una inversa omotopica, ossia $\exists g: Y \rightarrow X$ tale che $g \circ f \sim id_X$ e $f \circ g \sim id_Y$.

Osservazione. Tale relazione è di equivalenza nella classe degli spazi topologici. Se $X \sim Y$ si dice che X e Y hanno lo stesso tipo di omotopia.

DEFINIZIONE: X è contrattile se ha il tipo di omotopia di un punto.

Osservazione. Sia $c: X \rightarrow \{z\}$ l'applicazione costante e sia $g: \{z\} \rightarrow X$ tale che $g(z) = x_0$. Allora $c \circ g = id_{\{z\}}$. Denotando con $r: X \rightarrow \{x_0\}$ la retrazione canonica e con i l'inclusione di $\{x_0\}$ in X si ha che $g \circ c = i \circ r$, per cui X è contrattile $\Leftrightarrow \exists x_0 \in X$ tale che $i \circ r \sim id_X$.

Osservazione. Sia X uno spazio contrattile su x_0 e sia H l'omotopia tra $i \circ r$ e id_X . Definendo $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\sigma(t) = H_t(x_0)$ si può notare che $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ ma non è necessariamente vero che σ sia costante.

DEFINIZIONE: Dato (X, A) , una retrazione di X su A è una funzione $r: X \rightarrow A$ tale che $r|_A = id_A$.

DEFINIZIONE: A è un retratto per deformazione di X se esiste una retrazione $r: X \rightarrow A$ tale che $i \circ r \sim id_X$ relativamente ad A in senso forte.

Osservazione. Se $A = \{x_0\}$ ed è un retratto per deformazione di X allora, chiamando H l'omotopia tra $i \circ r$ e id_X , il cammino $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ definito come sopra ($\sigma(t) = H_t(x_0)$) è il cammino costante x_0 .

Osservazione. Ciò permette di cogliere la differenza tra spazio contrattile e spazio retrattile per deformazione a un punto (la seconda implica la prima ma non è sempre vero il viceversa).

DEFINIZIONE: Data $f: X \rightarrow Y$ si definisce cilindro dell'applicazione f lo spazio quoziente $\mathcal{C}_f := (X \times [0, 1]) \sqcup Y / *$ con l'identificazione di $(x, 1)$ con $f(x) \forall x \in X$.

1.1.2 Gruppi di Omotopia

Siano $I^0 = \{*\}$, $I = [0, 1]$, $I^n = \underbrace{I \times \dots \times I}_{n \text{ volte}}$, $\partial I^n = I^n \setminus \overset{\circ}{I}^n$, oppure induttivamente $\partial I = \{0, 1\}$, $\partial I^{n+1} = \partial(I^n \times I) = (I^n \times \partial I) \cup (\partial I^n \times I)$.

DEFINIZIONE: Definiamo l'insieme $\pi_n(X, x_0) := [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$. Per $n = 0$, dato che $\partial I^0 = \emptyset$, poniamo per definizione $\pi_0(X, x_0) = \{\text{componenti connesse per archi di } X\}$.

$\forall n \geq 1$ definiamo su $\pi_n(X, x_0)$ un'operazione che lo renda un gruppo (n -esimo gruppo di omotopia di (X, x_0)):

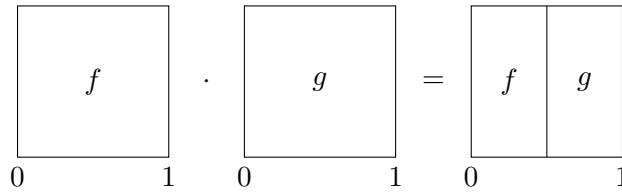
date $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$ definisco $[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$ con

$$(f \cdot g)(t_1, t_2, \dots, t_n) := \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Tale operazione è ben definita, è associativa, ha come elemento neutro l'applicazione costante $= x_0$ e ha come elemento inverso $[f]^{-1} := [\bar{f}]$ con

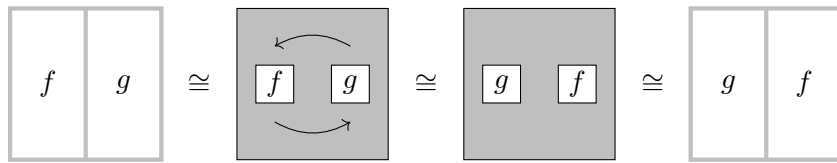
$$\bar{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) := f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Graficamente l'operazione tra gli elementi di $\pi_n(X, x_0)$ risulta essere:



PROPOSIZIONE: $\forall n \geq 2$ $\pi_n(X, x_0)$ è abeliano.

Dimostrazione. Diamo una breve idea tramite disegni:

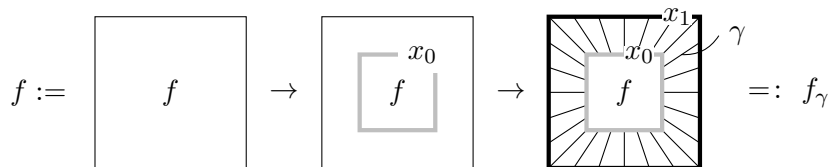


dove tutti i passaggi sono fatti tramite deformazioni. □

PROPOSIZIONE: Se X è connesso per archi, allora $\forall x_0, x_1 \in X$ $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1)$.

Dimostrazione. Essendo X connesso per archi, esiste un arco γ da x_0 che giunge a x_1 .

Consideriamo l'applicazione $\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\beta_\gamma} \pi_n(X, x_1)$ con f_γ definita come segue:



Si dimostra che β_γ è ben definita ed è un isomorfismo di gruppi con inversa $(\beta_\gamma)^{-1}$ che si costruisce allo stesso modo utilizzando il cammino inverso γ^{-1} . \square

Osservazione. Possiamo definire quindi una azione di $\pi_1(X, x_0)$ su $\pi_n(X, x_0)$ per $n \geq 1$ che generalizza l'azione per gli automorfismi interni nel caso $n = 1$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{\beta} & \pi_n(X, x_0) \\ ([\gamma], [f]) & \mapsto & [f_\gamma] \end{array}$$

con f_γ costruito come nella dimostrazione precedente. Si ottiene quindi l'omomorfismo di gruppi $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(X, x_0))$ che a $[\gamma]$ associa β_γ .

Osservazione. L' n -esimo gruppo di omotopia può essere descritto anche in altri modi equivalenti a quello dato. Ad esempio:

poiché $I^n / \partial I^n \cong S^n$, consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} (I^n, \partial I^n) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \\ \downarrow \pi & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\ (S^n, s) & & \end{array}$$

e l'applicazione $\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & [(S^n, s), (X, x_0)] \\ [f] & \longmapsto & [\tilde{f}] \end{array}$ che è ben definita e bigettiva. Possiamo quindi "ricopiare" l'operazione di $\pi_n(X, x_0)$ su $[(S^n, s), (X, x_0)]$ ed ottenere un isomorfismo di gruppi.

L'operazione su $[(S^n, s), (X, x_0)]$ si definisce come $[f] \cdot [g] := [(f \vee g) \circ c]$ con c l'applicazione che collassa ad un punto un equatore di S^n e il wedge di f e g l'applicazione dal wedge di due S^n in X definita in modo naturale.

1.2 Lezione 2 - 29/09

Oltre ai due modi di definire l' n -esimo gruppo di omotopia $\pi_n(X, x_0)$ già visti ne esiste un terzo:

1.2.1 Spazi di Lacci Iterati

Dato (X, x_0) , poniamo su $\mathcal{C}(I, X)$ la topologia *compatta-aperta*, ovvero la topologia che ha come base di aperti tutti gli insiemi della forma

$$[K, U] := \{f \in \mathcal{C}(I, X) \mid f(K) \subseteq U\} \text{ con } K \text{ compatto in } I, U \text{ aperto in } X$$

Osservazione. Se X è metrizzabile tramite d , allora anche $\mathcal{C}(I, X)$ è metrizzabile tramite $d^*(f, g) := \max_{t \in I} d(f(t), g(t))$.

Osservazione. $\omega: \mathcal{C}(I, X) \times I \rightarrow X$ tale che $\omega(f, t) = f(t)$ è continua.

DEFINIZIONE: $\Omega(X, x_0) := \{f \in \mathcal{C}(I, X) \mid f(0) = f(1) = x_0\}$ si dice spazio dei lacci in X puntati in x_0 .

Osservazione. Se $\{x_0\}$ è chiuso in X (ad esempio se X è T_2) allora $\Omega(X, x_0)$ è chiuso in $\mathcal{C}(I, X)$.

Osservazione. $\sigma, \tau \in \Omega(X, x_0)$ stanno nella stessa componente connessa per archi di $\Omega(X, x_0) \Leftrightarrow \sigma$ e τ sono omotopi relativamente a x_0 .

Dunque si ha che $\pi_1(X, x_0) = \{\text{componenti conn. per archi di } \Omega(X, x_0)\}$, ovvero

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega(X, x_0))$$

L'idea adesso è quella di iterare il procedimento per costruire il π_n : su $\Omega(X, x_0)$ consideriamo il punto base canonico $c_1: I \rightarrow X$ tale che $c_1(t) = x_0 \forall t \in I$ (il laccio costante) e definiamo $\Omega^2(X, x_0) := \Omega(\Omega(X, x_0), c_1)$.

Analogamente si definisce induttivamente $c_n: I \rightarrow \Omega^{n-1}(X, x_0)$ il laccio (di lacci) costante $c_n(t) = c_{n-1} \forall t \in I$ (che fa da punto base) e $\Omega^n(X, x_0) := \Omega(\Omega^{n-1}(X, x_0), c_{n-1})$.

PROPOSIZIONE: $\forall n \geq 2, \pi_n(X, x_0) \cong \pi_1(\Omega^{n-1}(X, x_0), c_{n-1})$.

1.2.2 Linguaggio delle Categorie

DEFINIZIONE: Una categoria \mathcal{C} consiste di:

1. Una classe di oggetti $\text{Obj}(\mathcal{C})$;
2. $\forall X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, un insieme $\text{Mor}(X, Y)$, detto insieme dei morfismi o frecce tale che
 - $\forall X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C}), \forall X \xrightarrow{f} Y, \forall Y \xrightarrow{g} Z$ è definito $g \circ f \in \text{Mor}(X, Z)$;
 - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \forall f, g, h$ frecce di \mathcal{C} sensate;
 - $\forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ esiste (unico) $1_X \in \text{Mor}(X, X)$ tale che $\forall V, W \in \text{Obj}(\mathcal{C}), \forall f \in \text{Mor}(V, X), \forall g \in \text{Mor}(X, W), 1_X \circ f = f$ e $g \circ 1_X = g$.

ESEMPI:

- **Set**, la categoria degli insiemi, che ha come oggetti gli insiemi e come frecce le applicazioni tra essi ($1_X = id_X$);
- **Top**, la categoria degli spazi topologici, che ha come oggetti gli spazi topologici e come frecce le applicazioni continue tra essi ($1_X = id_X$);
- **Top***, la categoria degli spazi topologici puntati, che ha come oggetti gli spazi topologici puntati e come frecce le applicazioni continue puntate;
- **Top_H**, la categoria che ha come oggetti gli spazi topologici e come frecce le classi di omotopia di applicazioni continue tra essi, ovvero $\text{Mor}(X, Y) \ni [f]$ con $f: X \rightarrow Y$. In questa categoria $1_X = [id_X]$.
- **Path_X**, la categoria dei cammini di X , che ha come oggetti i punti di X e come frecce le classi di omotopia relativa di cammini tra essi, ovvero $\text{Mor}(x_0, x_1) \ni [\sigma]$ con $\sigma: I \rightarrow X, \sigma(0) = x_0$ e $\sigma(1) = x_1$. In questa categoria $1_{x_0} = [x_0]$.
- **Cat_G**, con G gruppo, che ha come oggetti il solo G e come frecce tutti gli elementi di G , interpretando $g \in G$ come l'applicazione di moltiplicazione a sinistra per g .

- $\mathbf{Cat}_{(X, \leq)}$, con X un insieme parzialmente ordinato, che ha come oggetti i punti di X e $\text{Mor}(x, y) = \emptyset$ se $x \not\leq y$ e $\text{Mor}(x, y) = \{x \rightarrow y\}$ se $x \leq y$.

DEFINIZIONE: Data una categoria \mathbf{C} e $f \in \text{Mor}(X, Y)$, f si dice un'equivalenza (o isomorfismo) in \mathbf{C} se $\exists g \in \text{Mor}(Y, X)$ tale che $f \circ g = 1_Y$ e $g \circ f = 1_X$.

ESEMPIO: In \mathbf{Top} le equivalenze sono gli omeomorfismi, in \mathbf{Top}_H le equivalenze sono le equivalenze omotopiche.

DEFINIZIONE: Si definisce funtore covariante una mappa $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ tra due categorie \mathbf{C} e \mathbf{D} tale che $\forall X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ si ha $F(X) \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, $\forall f \in \text{Mor}(X, Y)$ si ha $F(f) \in \text{Mor}(F(X), F(Y))$ e per cui valga $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ e $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Osservazione. Se f è una equivalenza in \mathbf{C} allora $F(f)$ è una equivalenza in \mathbf{D} .

Possiamo quindi definire dei funtori tra le categorie \mathbf{Top} e \mathbf{Groups} (di tutti i gruppi con omomorfismi come frecce) per trovare degli invarianti per omeomorfismo tra spazi topologici.

PROPOSIZIONE:

$$\begin{array}{rcl} F_n: \mathbf{Top}_* & \longrightarrow & \mathbf{Groups} \\ (X, x_0) & \longmapsto & \pi_n(X, x_0) \\ \text{Mor}((X, x_0), (Y, y_0)) \ni f & \longmapsto & f_*: \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ & & [\sigma] \longmapsto [f \circ \sigma] \end{array}$$

è un funtore covariante.

COROLLARIO: Se $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ è un omeomorfismo puntato (oppure una equivalenza omotopica puntata) allora f_* è un isomorfismo di gruppi.

COROLLARIO: Se $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sono omotope (in modo relativo), allora $f_* = g_*$.

Osservazione. Si può definire dunque anche il funtore $\mathbf{Top}_* H \xrightarrow{F_n} \mathbf{Groups}$ allo stesso modo rispetto a sopra.

PROPOSIZIONE: Sia $f: X \rightarrow Y$ una equivalenza di omotopia. Scelto $x_0 \in X$, sia $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ tale che $f_*([\sigma]) = [f \circ \sigma]$. Allora f_* è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sia più in generale $H_t: X \rightarrow Y$ una omotopia di mappe (non puntate). Sia inoltre $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$.

$$\begin{array}{rcl} t & \longmapsto & H_t(x_0) \end{array}$$

Abbiamo quindi il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{H_{0*}} & \pi_n(Y, H_0(x_0)) \\ & \searrow H_{1*} & \downarrow \beta_\gamma \text{ isomorfismo} \\ & & \pi_n(Y, H_1(x_0)) \end{array}$$

Applichiamo adesso queste considerazioni generali per la dimostrazione della proposizione: sia $g: Y \rightarrow X$ l'inversa omotopica di f . Allora dato

$$\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_n(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, f(g(f(x_0))))$$

le due composizioni g_*f_* e f_*g_* sono isomorfismi e dunque f_* è sia iniettiva che surgettiva, cioè è un isomorfismo. \square

Osservazione. $f: X \rightarrow Y$ equivalenza omotopica è diverso da $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, f(x_0))$ equivalenza omotopica: nel primo caso non è detto che esista una omotopia H tale che $H(x_0, t) = f(x_0) \forall t \in [0, 1]$.

COROLLARIO: Se X è contrattile e connesso per archi allora $\pi_n(X, x_0) \cong 0 \forall n$.

PROPOSIZIONE: Sia $n \geq 2$. Allora $\forall 1 \leq k \leq n - 1 \pi_k(S^n, s) \cong 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione si riduce a dimostrare un lemma preliminare:

LEMMA: Sia $\sigma: (S^k, x_0) \rightarrow (S^n, s)$. Allora σ è omotopo a $\tilde{\sigma}$ tale che $\tilde{\sigma}(S^k) \neq S^n$.

Dimostrazione. Poniamo $D_r^i := \{x \in \mathbb{R}^i \mid \|x\| < r\}$ e $N_\varepsilon(S^i) := D_{1+\varepsilon}^{i+1} \setminus \overline{D_{1-\varepsilon}^{i+1}}$ la corona sferica aperta contenente S^i di ampiezza ε .

Sia anche $p_i: \overline{N_\varepsilon(S^i)} \rightarrow S^i$ la proiezione tale che $p_i(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

Estendiamo ora l'applicazione σ alla funzione $\tau = \sigma \circ p_k: \overline{N_\varepsilon(S^k)} \rightarrow S^n$ e applichiamo il Teorema di Stone-Weierstrass a τ , che permette di approssimarla tramite una funzione polinomiale g .

Prendiamo l'approssimazione g in modo tale che $\text{Im}(g) \subseteq N_\varepsilon(S^n)$ e definiamo $\tilde{\sigma} := (p_n \circ g)|_{S^k}$. A questo punto abbiamo $\tilde{\sigma}: S^k \rightarrow S^n$ che è un'approssimazione di σ , e dunque è omotopa ad essa. Per di più, essendo una funzione semi-razionale (in cui compaiono soltanto polinomi e radici quadrate), non può provocare spiacevoli effetti "alla Peano", cioè non può essere surgettiva su S^n . \square

Dimostriamo adesso la proposizione.

Prendiamo $[\sigma] \in \pi_k(S^n, s)$ e diciamo che $[\sigma] = [s]$.

Per il lemma $[\sigma] = [\tilde{\sigma}]$ con $\tilde{\sigma}$ non surgettiva. Senza perdita di generalità possiamo considerare $N = (0, \dots, 0, 1) \notin \text{Im}(\tilde{\sigma})$. Componiamo adesso $\tilde{\sigma}$ con la proiezione stereografica p_N dal polo Nord N su \mathbb{R}^n . Qui di sicuro esiste una omotopia tra questa composizione e il punto $p_N(s)$. Basta dunque rimontare su S^n questa omotopia per ottenere una omotopia tra $\tilde{\sigma}$ e s . \square

1.3 Lezione 3 - 03/10

Da ora in avanti considereremo X sempre connesso per archi, e dunque grazie alla funtorialità e all'invarianza per omotopia possiamo denotare per semplicità $\pi_n(X, x_0) =: \pi_n(X)$.

LEMMA: Supponiamo che X ammetta un rivestimento universale p da \tilde{X} (ad esempio questo accade se X è localmente contrattile) $p: \tilde{X} \rightarrow X$. Allora l'applicazione $p_*: \pi_n(\tilde{X}) \rightarrow \pi_n(X)$ è un isomorfismo $\forall n \geq 2$.

Dimostrazione. Sappiamo già che p_* è un omomorfismo. p_* è surgettivo:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{\sigma} & \downarrow p \\ S^k & \xrightarrow{\sigma} & X \end{array}$$

Dato che $\pi_1(S^k) = 0$, σ si solleva all'applicazione $\tilde{\sigma}$ tale che $p_*([\tilde{\sigma}]) = [\sigma]$.
 p_* è iniettiva grazie all'esistenza del sollevamento di omotopie. \square

COROLLARIO: Se \tilde{X} è contrattile allora $\pi_n(X) = 0 \forall n \geq 2$.

ESEMPIO: $\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{k \text{ volte}} \cong \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k \xleftarrow{p} \mathbb{R}^k$, p rivestimento. Allora

$$\pi_n(\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{k \text{ volte}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^k & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

TEOREMA (DI HOPF): $\forall n \geq 1$ si ha che $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ed è generato da $[id_{S^n}]$.

COROLLARIO: Invarianza Topologica della Dimensione. Se $n \neq m$ allora \mathbb{R}^n non è omeomorfo a \mathbb{R}^m .

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta in due modi equivalenti:

“Aggiungendo un punto”: consideriamo le compattificazioni di Alexandrov di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , che sono rispettivamente S^n e S^m . Se \mathbb{R}^n fosse omeomorfo a \mathbb{R}^m , allora anche le relative compattificazioni lo sarebbero, ma (senza perdita di generalità $n < m$) $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z} \not\cong 0 = \pi_n(S^m)$.

“Togliendo un punto”: se $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, f(0))$ fosse un omeomorfismo, allora anche $f_1: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ restrizione di f lo sarebbe. Chiamando S_x^{n-1} la sfera di raggio unitario di centro x , si ha che S_0^{n-1} è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $S_{f(0)}^{m-1}$ è un retratto di $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$. Con le stesse argomentazioni di prima si conclude. \square

1.3.1 Versione Relativa dei π_n

Cediamo adesso come definire i gruppi di omotopia sulle coppie di spazi puntate (X, A, x_0) in cui $x_0 \in A \subseteq X$.

DEFINIZIONE: $\forall n \geq 1$ $\pi_n(X, A, x_0) := [(D^n, S^{n-1}, s), (X, A, x_0)]$, ovvero l'insieme delle classi di omotopia relativa di applicazioni di triple $(f: D^n \rightarrow X$ tale che $f(S^{n-1}) \subseteq A$ e $f(s) = x_0)$.

L'operazione è definita allo stesso modo del caso assoluto, ovvero $[f] \cdot [g] := [(f \vee g) \circ c]$ con c l'applicazione che collassa ad un punto un “cerchio” massimo (un D^{n-1}) avente come bordo un equatore di S^{n-1} e il wedge di f e g l'applicazione naturale definita dal wedge di due D^n .

Osservazione. $\pi_n(X, x_0, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$ in modo canonico. Possiamo quindi identificare i risultati del caso assoluto all'interno della teoria relativa.

Data una tripla (X, A, x_0) si possono definire le due applicazioni naturali di inclusione $i: (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ e $j: (X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$.

Di conseguenza abbiamo

$$\dots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \dots$$

con $\partial[f] = [f|_{(S^{n-1}, s)}]$ detto omomorfismo di bordo.

PROPOSIZIONE: Tale successione è esatta.

ESEMPIO: Dato X , sia \mathcal{C}_X il cono su X , ovvero $\mathcal{C}_X := (X \times [0, 1]) / \sim$ con la relazione di equivalenza $(x, 1) \sim (y, 1) \forall x, y \in X$ (e $(x, t) \sim (x, t)$).

Il cono su X è sempre contrattile per ogni X , e quindi

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\pi_2(\mathcal{C}_X)}_{=0} \longrightarrow \pi_2(\mathcal{C}_X, X) \xrightarrow{\partial} \pi_1(X) \longrightarrow \underbrace{\pi_1(\mathcal{C}_X)}_{=0}$$

si ha che ∂ è un isomorfismo.

1.3.2 n -Simplessi

DEFINIZIONE: $\mathbb{R}^m \supseteq X$ finito. $Q = \sum_{P \in X} a_P P$ con $a_P \in \mathbb{R}$ e $\sum_{P \in X} a_P = 1$ si dice combinazione affine di punti di X . In tal caso, dato $P_0 \in X$, $\mathbb{R}^m \ni Q := P_0 + \sum_{P \in X} a_P \overrightarrow{P_0 P}$.

Osservazione. $A(X) := \{Q \mid Q \text{ comb. affine di punti di } X\}$ e, fissato un qualsiasi $P_0 \in X$, $T(X) := \text{Span} \left\{ \overrightarrow{P_0 P} \mid P \in X \right\}$ non dipendono dalla scelta del punto origine P_0 .

$A(X)$ è il sottospazio affine di \mathbb{R}^m generato da X , $T(X)$ è lo spazio tangente a $A(X)$ (la giacitura).

$\forall Z \in A(X)$ si ha che $A(X) = Z + T(X)$.

DEFINIZIONE: $f: A(X) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ si dice mappa affine se $\forall Q$ combinazione affine di punti di X , $f(Q)$ è combinazione affine dei punti $f(P)$ al variare di P in X . Dunque f è affine se $\text{Im } f \subseteq A(f(X))$.

Una mappa affine è sempre del tipo $f(x) = F(x) + P$ con $F: T(X) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lineare e $P \in \mathbb{R}^k$.

DEFINIZIONE: Sia $X \subseteq \mathbb{R}^m$ tale che $|X| = n + 1$. X è fatto di punti geometricamente indipendenti se $\dim T(X) = n$.

Dato un insieme X di punti geometricamente indipendenti, ogni funzione $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ si estende in modo unico ad una mappa affine $\tilde{f}: A(X) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tale che $\tilde{f}|_X = f$.

DEFINIZIONE: Dato $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $|X| = n + 1$ di punti geometricamente indipendenti, si dice n -simpleso geometrico in \mathbb{R}^m

$$\Delta(X) := \left\{ Q = \sum_{P \in X} a_P P \mid \sum_{P \in X} a_P = 1, a_P \geq 0 \forall P \in X \right\}$$

DEFINIZIONE: Si dice n -simpleso geometrico un n -simpleso geometrico in \mathbb{R}^m per un qualche m .

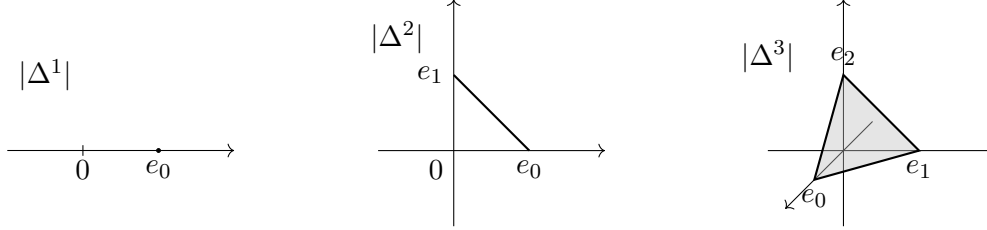
DEFINIZIONE: Si dice n -simpleso un n -simpleso geometrico con un ordinamento dei punti di X , ovvero

$$\Delta[P_0, \dots, P_n] := \left(\Delta(X), \rho: \begin{array}{ccc} \{0, \dots, n\} & \longrightarrow & X \\ i & \longmapsto & P_i \end{array} \right)$$

con ρ bigettiva.

DEFINIZIONE: Si dice n -simpleso standard $\Delta^n := \Delta[e_0, \dots, e_n]$ dove $\{e_i\}_{0 \leq i \leq n}$ è la base canonica ordinata di \mathbb{R}^{n+1} .

ESEMPI:



PROPOSIZIONE: Per ogni n -simpleso esiste un unico isomorfismo affine $f: A(e_0, \dots, e_n) \longrightarrow A(P_0, \dots, P_n)$ tale che $f(e_i) = P_i$ per ogni i e $f(\Delta^n) = \Delta[P_0, \dots, P_n]$.

DEFINIZIONE: Un n -simpleso geometrico si dice anche supporto geometrico dell' n -simpleso, e si denota anche $\Delta(X) = |\Delta[P_0, \dots, P_n]|$.

Osservazione. $\Delta(X)$ è l'involuppo convesso dei punti di X .

Osservazione. $(|\Delta[P_0, \dots, P_n]|, \partial|\Delta[P_0, \dots, P_n]|)$ è omeomorfo a (D^n, S^{n-1}) .

DEFINIZIONE: Si dice n -simpleso astratto un qualsiasi insieme $Y = \{P_0, \dots, P_n\}$. La realizzazione geometrica di un n -simpleso astratto vive in $\mathbb{R}^Y = \{f: Y \longrightarrow \mathbb{R}\}$ ed è $\Delta^n = \Delta[E_0, \dots, E_n]$ dove $E_i: Y \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $E_i(P_j) = \delta_{ij}$.

DEFINIZIONE: Sia $\sigma: |\Delta[P_0, \dots, P_n]| \longrightarrow |\Delta^n|$ tale che $\sigma(\sum_{i=0}^n t_i P_i) = (t_0, \dots, t_n)$. Si dicono coordinate baricentriche di Q l'immagine di Q tramite σ .

Osservazione. Il baricentro di $|\Delta[P_0, \dots, P_n]|$ è il punto $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+1} P_i$, che dunque ha coordinate $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$.

DEFINIZIONE: Sia $\{n\text{-simplessi}\} \xrightarrow{d_j} \{(n-1)\text{-simplessi}\}$ tale che:

$$d_j(\Delta[P_0, \dots, P_n]) = \Delta[P_0, \dots, \hat{P}_j, \dots, P_n]$$

con

$$\Delta[P_0, \dots, \hat{P}_j, \dots, P_n] = (|\Delta[P_0, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_n]|, \rho_j)$$

e

$$\begin{array}{ccc} \rho_j: \{0, \dots, n-1\} & \longrightarrow & \{P_0, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_n\} \\ i < j & \longmapsto & P_i \\ i \geq j & \longmapsto & P_{i+1} \end{array}$$

Le immagini tramite d_j al variare di $j \in \{0, \dots, n\}$ di $\Delta[P_0, \dots, P_n]$ sono dette $(n-1)$ -facce del simpleso.

Allo stesso modo possiamo definire le facce iterate di un n -simpleso come facce di facce. Se τ è una faccia (anche non propria) di σ si indica $\tau \triangleleft \sigma$.

Osservazione. $\forall i < j$ si ha $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$.

1.4 Lezione 4 - 06/10

1.4.1 Orientazione

DEFINIZIONE: Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione finita. Due basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' determinano la stessa orientazione se la matrice di cambiamento di base ha determinante positivo, ovvero se $\det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id) > 0$.

Osservazione. La relazione di orientazione di uno spazio è di equivalenza.

DEFINIZIONE: Sia $A \subseteq V$ è un sottospazio affine non vuoto. Una orientazione di A è una orientazione dello spazio tangente $T(A)$.

Dato uno spazio vettoriale V di dimensione m , un suo sottospazio W di dimensione $m-1$ e P, Q semispazi disgiunti tali che $V \setminus W = P \cup Q$ e $\partial \overline{P} = \partial \overline{Q} = W$, vogliamo stabilire una procedura per determinare su W una orientazione che dipenda da un'orientazione ω_V di V e da P .

Sia $v_0 \in V \setminus W$, cioè tale che $\text{Span}(v_0) \cap W = \{0\}$. v_0 è detto vettore trasversale a W .

Se $v_0 \in P$ si dice vettore trasversale entrante rispetto a P .

Se $v_0 \in Q$ si dice vettore trasversale uscente rispetto a P .

Dato che $V = W \oplus \text{Span}(v_0) = \text{Span}(v_0) \oplus W$, per ogni base \mathcal{C} di W si possono definire $\{v_0, \mathcal{C}\}$ e $\{\mathcal{C}, v_0\}$ basi di V .

LEMMA: Fissato v_0 come sopra:

1. $[v_0, \mathcal{C}]$ e $[\mathcal{C}, v_0]$ dipendono solamente da $[\mathcal{C}]$ in W ;
2. $[v_0, [\mathcal{C}]]$ e $[[\mathcal{C}], v_0]$ dipendono solamente dal carattere entrante o uscente di v_0 rispetto a P .

Fissata una orientazione ω_W su W si hanno quindi 4 possibili risultati per la scelta di una base di V :

$E \oplus \omega_W, \omega_W \oplus E, U \oplus \omega_W$ e $\omega_W \oplus U$ con E che indica v_0 nel caso entrante e U nel caso uscente.

Scelta una orientazione ω_V su V , per ognuno dei 4 ordinamenti possibili esiste un'unica orientazione ω_W su W tale che l'orientazione ottenuta eseguendo la procedura da ω_V coincida con la ω_W data.

La procedura che useremo da ora in poi sarà quella "prima la trasversale uscente" (cioè $U \oplus \omega_W$).

Dato un n -simpleso $(\Delta(X), \rho)$, con $X = \{P_0, \dots, P_n\} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, possiamo determinare da ρ una base $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ di $T(X)$.

Quindi, invece di considerare su un n -simpleso geometrico un ordinamento dei punti ρ , possiamo considerare un'orientazione dello spazio tangente $T(X)$ indotta da ρ (scriveremo $(\Delta(X), \omega_\rho)$).

Così come l'operatore d_j induce sulla $(n-1)$ -faccia $d_j(\Delta[P_0, \dots, P_n])$ un ordinamento ρ_j dei punti (lo shift degli ultimi $n-j$ indici) dovuto a ρ , a sua volta induce anche un'orientazione dovuta a ω_ρ : stabilita la procedura "prima la trasversale uscente" e considerato come semispazio P quello contenente P_j , si ottiene univocamente una orientazione (in quanto bordo di $\Delta[P_0, \dots, P_n]$) $\partial_j \omega_\rho$ dello spazio tangente $T(X \setminus \{P_j\})$.

Osservazione. Sulla faccia $|\Delta[P_0, \dots, \hat{P}_j, \dots, P_n]|$, data l'orientazione combinatoria ω_{ρ_j} e quella di bordo $\partial_j \omega_\rho$, si ha che $\omega_{\rho_j} = (-1)^j \partial_j \omega_\rho$.

Osservazione. In un n -simpleso ogni $(n-2)$ -faccia è faccia comune di esattamente 2 $(n-1)$ -facce, e le orientazioni di bordo indotte dalle orientazioni di bordo delle $(n-1)$ -facce risultano sempre essere l'una l'opposto dell'altra.

1.4.2 Complessi Simpliciali Finiti

DEFINIZIONE: Un complesso simpliciale finito è una famiglia \mathcal{F} finita di semplici geometrici in un qualche \mathbb{R}^m che verifica le seguenti proprietà:

1. Se $\sigma \in \mathcal{F}$ allora anche ogni faccia (iterata) di σ appartiene a \mathcal{F} ;
2. $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$, $|\sigma| \cap |\tau| \neq \emptyset \Rightarrow |\sigma| \cap |\tau|$ è una faccia (iterata) comune a σ e τ .

Osservazione. Se gli n -simplessi di un complesso simpliciale finito sono orientati, allora sulle facce comuni a più simplessi gli ordinamenti devono coincidere.

DEFINIZIONE: $|\mathcal{F}|$ si dice supporto geometrico del complesso ed è l'unione dei supporti geometrici dei simplessi di \mathcal{F} .

DEFINIZIONE: $\dim \mathcal{F} = n$ se n è la massima dimensione di suoi simplessi.

DEFINIZIONE: Per ogni $0 \leq k \leq n$ si indica \mathcal{F}_k la famiglia dei simplessi di \mathcal{F} di dimensione minore o uguale a k . \mathcal{F}_k si dice k -scheletro combinatorio di \mathcal{F} .

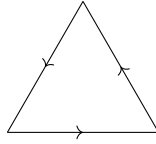
DEFINIZIONE: $|\mathcal{F}_k| := \mathcal{F}^k$ è detto k -scheletro geometrico.

Osservazione. \mathcal{F}_k è un complesso simpliciale finito di dimensione minore o uguale a k .

DEFINIZIONE: Un poliedro compatto è un $P \subseteq \mathbb{R}^m$ per un qualche m tale che $\exists \mathcal{F}$ complesso simpliciale finito geometrico tale che $P = |\mathcal{F}|$.

LEMMA: Ogni poliedro compatto è il supporto di \mathcal{F} ordinato, ovvero un complesso simpliciale finito i cui simplessi sono tutti ordinati (e gli ordinamenti sono compatibili).

Osservazione. È falso che in generale esista sempre un ordinamento globale del complesso simpliciale finito. Infatti non è possibile ordinare globalmente il seguente complesso formato da 3 1-simplessi e dalle relative facce:



1.5 Lezione 5 - 10/10

DEFINIZIONE: \mathcal{H} si dice sottocomplesso di \mathcal{K} complesso simpliciale finito se è una sottofamiglia di \mathcal{K} che è a sua volta un complesso simpliciale finito.

ESEMPIO: \mathcal{K}_n è un sottocomplesso di \mathcal{K} .

1.5.1 Categorie di Complessi Simpliciali Finiti

DEFINIZIONE: \mathcal{A} si dice complesso simpliciale finito astratto se è una famiglia finita di insiemi finiti (che possono essere ordinati o meno) tale che $\forall Y \subseteq X$ con $X \in \mathcal{A}$ si ha $Y \in \mathcal{A}$.

DEFINIZIONE: Dati \mathcal{A} e \mathcal{B} complessi simpliciali finiti astratti, si dice che $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ è un morfismo simpliciale astratto se, posti $E_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{B}}$ le unioni degli insiemi delle rispettive famiglie \mathcal{A} e \mathcal{B} , si ha che $f(P) \in E_{\mathcal{B}} \forall P \in E_{\mathcal{A}}$ e inoltre $\forall X \in \mathcal{A}$ vale $f(X) = \{f(P) \mid P \in X\} \in \mathcal{B}$ (rispettando l'ordinamento in senso largo nel caso ordinato).

Osservazione. La composizione di due morfismi simpliciali astratti è un morfismo simpliciale astratto.

Si può dunque definire la categoria dei complessi simpliciali finiti astratti, che ha come frecce i morfismi simpliciali astratti.

DEFINIZIONE: Dato un complesso simpliciale finito \mathcal{K} , possiamo associargli un complesso simpliciale finito astratto: ponendo $\forall \sigma \in \mathcal{K}$ l'insieme \mathcal{A}_{σ} come l'insieme dei vertici di σ , si definisce $\mathcal{A}_{\mathcal{K}} := \{\mathcal{A}_{\sigma}\}_{\sigma \in \mathcal{K}}$ che è detto schema dei vertici di \mathcal{K} .

DEFINIZIONE: Dati \mathcal{H} e \mathcal{K} complessi simpliciali e dato un morfismo simpliciale astratto $g: \mathcal{A}_{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{K}}$, si definisce morfismo simpliciale $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ l'unico rimontato "affine a tratti" di g vista come applicazione tra \mathcal{H}_0 e \mathcal{K}_0 .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \overset{f}{\dashrightarrow} & \mathcal{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_{\mathcal{H}} & \xrightarrow{g} & \mathcal{A}_{\mathcal{K}} \end{array}$$

Possiamo quindi definire la categoria dei complessi simpliciali finiti, che ha come frecce i morfismi simpliciali.

Osservazione. Abbiamo anche trovato in modo naturale dei funtori tra le categorie definite finora: ad esempio, la realizzazione geometrica di un complesso astratto è un complesso simpliciale finito e un qualsiasi morfismo simpliciale astratto induce un morfismo

simpliciale sulle realizzazioni geometriche (come visto sopra nella definizione).

Analogamente possiamo definire un funtore tra la categoria dei complessi simpliciali finiti e la categoria degli spazi topologici: il supporto di un complesso è uno spazio topologico e un morfismo simpliciale induce una mappa continua tra i supporti (affine se ristretta ad un qualsiasi spazio tangente di un simpleso del complesso).

Osservazione. Dato \mathcal{K} complesso simpliciale finito, si ha che $\mathcal{K}_{\mathcal{A}\mathcal{K}}$ è canonicamente isomorfo a \mathcal{K} , dove con $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ si intende la realizzazione geometrica del complesso simpliciale astratto \mathcal{A} .

Viceversa, si ha che $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{K}\mathcal{A}}$, con \mathcal{A} complesso simpliciale astratto.

1.5.2 Suddivisione di Complessi Simpliciali Finiti

Vogliamo adesso definire delle applicazioni tra poliedri compatti che diano loro una struttura categoriale.

DEFINIZIONE: Dati P e Q poliedri compatti, $f: P \rightarrow Q$ è un morfismo poliedrale (detto anche lineare a pezzi o mappa PL) se esistono \mathcal{H}, \mathcal{K} tali che $P = |\mathcal{H}|$ e $Q = |\mathcal{K}|$ e f sia l'applicazione indotta sui supporti di una qualche applicazione $g: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ simpliciale.

DEFINIZIONE: Se $P = |\mathcal{K}|$ si dice che \mathcal{K} è una triangolazione di P .

DEFINIZIONE: Siano \mathcal{H} e \mathcal{K} due complessi simpliciali finiti. \mathcal{H} è una suddivisione di \mathcal{K} (e si scrive $\mathcal{H} < \mathcal{K}$) se $|\mathcal{H}| = |\mathcal{K}|$ e ogni simpleso di \mathcal{K} è unione di semplici di \mathcal{H} .

ESEMPI: Esistono numerosi metodi di suddivisione di un complesso:

- Procedendo induttivamente sui k -scheletri, a partire dai semplici 0-dimensionali (che essendo punti non vengono suddivisi): preso un simpleso, se su almeno una delle sue facce è stata fatta una suddivisione si inserisce un nuovo punto nella parte interna del simpleso e si considera i coni finiti di vertice il punto e basi le facce (suddivise) del simpleso.
- Suddivisione pseudobaricentrica: a prescindere dalla presenza o meno di suddivisioni sulle facce del simpleso si inserisce sempre un nuovo punto nella parte interna del simpleso e si considerano tutti i coni finiti come sopra.
- Suddivisione baricentrica: come la suddivisione pseudobaricentrica, ma di volta in volta il punto che si introduce è il baricentro del rispettivo simpleso. Si indica con $\mathcal{K}^{(n)}$ l' n -esima iterazione del procedimento di suddivisione baricentrica.

LEMMA: Sia \mathcal{K} un complesso simpliciale finito. $\forall \varepsilon > 0 \exists n > 0$ tale che ogni simpleso di $\mathcal{K}^{(n)}$ ha diametro $< \varepsilon$.

PROPOSIZIONE: Siano \mathcal{K} e \mathcal{K}' due triangolazioni dello stesso poliedro. Allora \mathcal{K} e \mathcal{K}' hanno una suddivisione comune.

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia delle intersezioni $\mathcal{H} = \{|\sigma| \cap |\sigma'| \mid \sigma \in \mathcal{K}, \sigma' \in \mathcal{K}'\}$. Tale famiglia è un complesso di celle convesse (generalizzazione della nozione di complesso simpliciale).

In modo induttivo rispetto alla dimensione degli scheletri di \mathcal{H} triangoliamo tutte le celle in modo da ottenere un complesso simpliciale finito.

Ipotizziamo di aver triangolato \mathcal{H}_n ; su ogni $(n + 1)$ -cella C introduciamo $w \in \overset{\circ}{C}$ e per ogni $[v_0, \dots, v_n] \subseteq \partial C$ aggiungiamo il semplice $[w, v_0, \dots, v_n]$.

La triangolazione ottenuta risulta quindi essere una suddivisione comune a \mathcal{K} e a \mathcal{K}' . \square

Grazie a questa proposizione si dimostra banalmente che la composizione di morfismi poliedrali è un morfismo poliedrale.

Dunque è possibile definire la categoria dei poliedri compatti che ha come frecce le applicazioni PL.

Osservazione. La categoria dei poliedri compatti si immerge banalmente nella categoria **Top**.

DEFINIZIONE: Sia τ un semplice di \mathcal{H} complesso simpliciale finito. Definiamo $\text{St}(\tau, \mathcal{H}) := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{H}, \sigma \triangleright \tau} |\sigma|$ detto stella chiusa di τ in \mathcal{H} (è il supporto di un sottocomplesso).

Definiamo inoltre la stella aperta $\text{st}(\tau, \mathcal{H}) := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{H}, \sigma \triangleright \tau} (|\sigma| \setminus \partial|\sigma|)$.

LEMMA: Siano v_1, \dots, v_k dei vertici di \mathcal{H} complesso simpliciale finito. Se $\text{st}(v_1, \mathcal{H}) \cap \dots \cap \text{st}(v_k, \mathcal{H}) \neq \emptyset$ allora v_1, \dots, v_k sono vertici di un semplice di \mathcal{H} .

TEOREMA (DI APPROSSIMAZIONE SIMPLICIALE): Sia $f: P \rightarrow Q$ continua con P, Q poliedri compatti. Allora $\forall \mathcal{K}, \mathcal{H}$ triangolazioni rispettivamente di P e Q $\exists n$ tale che $f: \mathcal{K}^{(n)} \rightarrow \mathcal{H}$ è omotopa ad una applicazione simpliciale.

Dimostrazione. Le stelle aperte dei vertici v in \mathcal{H} formano un ricoprimento aperto (finito) di \mathcal{H} .

Dunque, presa $f: |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{H}|$, la famiglia $\{f^{-1}(\text{st}(v, \mathcal{H}))\}_{v \in \mathcal{H}_0}$ è un ricoprimento aperto di $|\mathcal{K}|$.

Sia $\varepsilon > 0$ il numero di Lebesgue del ricoprimento. Sia n tale che $\forall \sigma$ semplice di $\mathcal{K}^{(n)}$ si abbia che il diametro di σ sia minore di $\frac{\varepsilon}{2}$.

Dunque $\forall w$ vertice di $\mathcal{K}^{(n)}$ il diametro della stella aperta di w ha diametro minore di ε . Per di più $\forall w$ vertice di $\mathcal{K}^{(n)}$ troviamo un vertice v di \mathcal{H} tale che $f(\text{st}(w, \mathcal{K}^{(n)})) \subseteq \text{st}(v, \mathcal{H})$.

Abbiamo così definito naturalmente una applicazione g_0 dall'insieme dei vertici di $\mathcal{K}^{(n)}$ all'insieme dei vertici di \mathcal{H} .

Questa determina una applicazione simpliciale $g: \mathcal{K}^{(n)} \rightarrow \mathcal{H}$ perché, grazie al lemma, se w_1, \dots, w_k sono i vertici di un semplice σ di $\mathcal{K}^{(n)}$, allora $\text{st}(g_0(w_1), \mathcal{H}) \cap \dots \cap \text{st}(g_0(w_k), \mathcal{H}) \neq \emptyset$, e dunque $g_0(w_1), \dots, g_0(w_k)$ sono vertici di un semplice di \mathcal{H} .

Inoltre g è omotopa a f perché lo è semplice per semplice. L'omotopia è data in modo baricentrico $tg + (1 - t)f$. \square

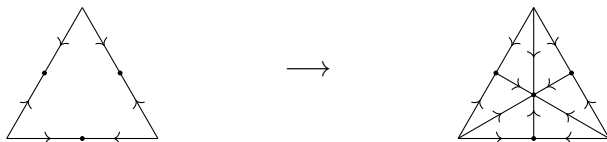
COROLLARIO: $\forall n < m$, $f: S^n \rightarrow S^m$ è omotopa ad una applicazione $g: S^n \rightarrow S^m$ non surgettiva.

Dimostrazione. S^n è omeomorfa a $\partial\Delta^{n+1}$, S^m è omeomorfa a $\partial\Delta^{m+1}$; dunque f induce una applicazione continua \tilde{f} sui semplici. Ma allora esiste un'omotopia H che rende \tilde{f} una applicazione simpliciale (e che a livello dei vertici non può essere surgettiva). Quindi H trasforma f in una applicazione continua non surgettiva su S^m . \square

1.6 Lezione 6 - 13/10

Osservazione. Sia \mathcal{K} un complesso simpliciale finito geometrico. Allora $\mathcal{K}^{(1)}$ ha un ordinamento canonico indotto dalla suddivisione baricentrica. Tale ordinamento è compatibile con un ordinamento globale dei vertici del complesso.

Infatti: induttivamente sulla dimensione dei semplici, se $\sigma \in \mathcal{K}_n$, $\dim \sigma = n$, v_0, \dots, v_n sono i vertici di σ e ogni faccia è già stata suddivisa allora l'introduzione di un punto w nella parte interna di σ porta alla definizione di n -simplessi ordinati $[\dots, \dots, \dots, w] \in \mathcal{K}_n^{(1)}$.



L'ordinamento indotto è compatibile con un qualsiasi ordinamento globale in cui ogni nuovo vertice aggiunto viene posto dopo ogni vertice già presente al passo precedente della suddivisione.

DEFINIZIONE: Sia P un poliedro compatto. Si dice $\dim P = \dim |\mathcal{K}|$ con \mathcal{K} una triangolazione di P .

Osservazione. Si tratta di una buona definizione. Questo perché esiste sempre una suddivisione comune e dunque la dimensione massima di un semplice non varia da triangolazione a triangolazione.

1.6.1 Complessi Simpliciali di Cardinalità Arbitraria

DEFINIZIONE: Si dice complesso simpliciale astratto una famiglia \mathcal{A} di insiemi finiti (ordinati o meno) tale che se $Y \subseteq X$ e $X \in \mathcal{A}$ allora $Y \in \mathcal{A}$ (eventualmente con l'ordinamento indotto).

Fissato un insieme E di cardinalità arbitraria, consideriamo l' \mathbb{R} -spazio vettoriale $\mathbb{R}^E = \{f: E \rightarrow \mathbb{R}\}$.

All'interno di \mathbb{R}^E consideriamo il sottospazio vettoriale

$$\bigoplus_E \mathbb{R} = \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ a supporto finito}\}$$

con la sua base canonica non ordinata $\{\varphi_e\}_{e \in E}$ dove $\varphi_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = e \\ 0 & \text{se } x \neq e \end{cases}$

È possibile anche definire una distanza su $\bigoplus_E \mathbb{R}$: $d(f, g) := \max_{e \in E} |f(e) - g(e)|$.

Inoltre, dato un sottoinsieme $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \bigoplus_E \mathbb{R}$, esiste un'immersione canonica del sottoinsieme in $\mathbb{R}^{\cup \text{Supp } v_i}$ che è isomorfo ad un certo \mathbb{R}^n con $n \in \mathbb{N}$.

Possiamo dunque generalizzare le definizioni di semplice e complesso simpliciale:

DEFINIZIONE: Si definisce n -simpleso in $\bigoplus_E \mathbb{R}$ l'involuppo convesso delle funzioni $\{v_1, \dots, v_k\}$.

DEFINIZIONE: Si dice complesso simpliciale una famiglia arbitraria \mathcal{K} di semplici (geometrici) in qualche $\bigoplus_E \mathbb{R}$ tale che sia chiusa rispetto alle facce (iterate) e tale che, se $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$

allora $\sigma \cap \tau = \emptyset$ oppure è una faccia comune.

Analogamente si definiscono i sottocomplessi e gli n -scheletri (con $n \in \mathbb{N}$).

Dato un complesso \mathcal{K} in $\bigoplus_E \mathbb{R}$, la realizzazione geometrica $|\mathcal{K}| := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} |\sigma|$ ha una struttura naturale di spazio topologico munito della topologia finale rispetto a tutte le inclusioni dei simplessi.

In altre parole $X \subseteq |\mathcal{K}|$ è aperto se e solo se $\forall \sigma \in \mathcal{K}$ si ha che $|\sigma| \cap X$ è aperto in $|\sigma|$.

Osservazione. In generale $|\mathcal{K}|$ non è N_1 (ovvero esiste almeno un punto che non ammette sistema fondamentale di intorni numerabile), e dunque non è metrizzabile.

Osservazione. Ogni punto di $|\mathcal{K}|$ è chiuso ($|\mathcal{K}|$ è T_1).

Osservazione. Se $A, B \subseteq |\mathcal{K}|$ sono due chiusi, allora esistono aperti $U \supseteq A, V \supseteq B$ tali che $U \cap V = \emptyset$ (cioè lo spazio è normale).

Dunque $|\mathcal{K}|$ è T_4, T_3, T_2, T_1, T_0 .

Dimostrazione. Dato un chiuso $A \subseteq |\mathcal{K}|$ costruiamo $N_\varepsilon(A)$, un ε -intorno aperto di A induttivamente nel seguente modo:

Sia $\varepsilon: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ che ad ogni $\sigma \in \mathcal{K}$ associa un valore ε_σ .

$N_\varepsilon^0(A) = N_\varepsilon(A) \cap \mathcal{K}^0 := \mathcal{K}^0 \cap A$. Ipotizzando di aver definito $N_\varepsilon^n(A) = N_\varepsilon(A) \cap \mathcal{K}^n$, per ogni $(n+1)$ -simplexso σ di \mathcal{K} ci aggiungiamo un $N_{\varepsilon_\sigma}(A \cap |\overset{\circ}{\sigma}|)$ unito ad un $N_{\varepsilon_\sigma}(A \cap \partial|\sigma|)$ tale che la sua intersezione con $\partial|\sigma|$ sia uguale a $N_\varepsilon^n(A) \cap \partial|\sigma|$.

Dato che i simplessi sono T_4 e grazie alla topologia su $|\mathcal{K}|$, se $A \cap B = \emptyset$ allora $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2$ tali che $N_{\varepsilon_1}(A) \cap N_{\varepsilon_2}(B) = \emptyset$. \square

Osservazione. Se \mathcal{H} è un sottocomplesso di \mathcal{K} , allora esiste un ε -intorno di $|\mathcal{H}|$ in $|\mathcal{K}|$ tale che $|\mathcal{H}|$ è retrato per deformazione di $N_\varepsilon(|\mathcal{H}|)$.

Osservazione. Sia $A \subseteq |\mathcal{K}|$ compatto. Allora esiste un sottocomplesso finito \mathcal{H} di \mathcal{K} tale che $A \subseteq |\mathcal{H}|$.

Dimostrazione. $\forall \sigma \in \mathcal{K}$, se $|\overset{\circ}{\sigma}| \cap A \neq \emptyset$ scegliamo un punto $x_\sigma \in |\overset{\circ}{\sigma}| \cap A$. La topologia indotta da $|\mathcal{K}|$ su $\bigcup_\sigma \{x_\sigma\}$ è la topologia discreta. Poiché A è compatto, $\bigcup_\sigma \{x_\sigma\}$ è finito. Dunque $\mathcal{H} := \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_n$ (chiuso con le relative facce iterate) è un sottocomplesso finito di \mathcal{K} tale che $A \subseteq |\mathcal{H}|$. \square

DEFINIZIONE: \mathcal{H} è una suddivisione di \mathcal{K} complesso simpliciale se ogni $\tau \in \mathcal{H}$ è contenuto in un $\sigma \in \mathcal{K}$ e se ogni $\sigma \in \mathcal{K}$ è unione di un insieme finito di simplessi di \mathcal{H} .

Osservazione. La richiesta di finitezza nella seconda condizione è necessaria per ottenere una uguaglianza tra $|\mathcal{H}|$ e $|\mathcal{K}|$ come spazi topologici.

1.6.2 Δ -Complessi

DEFINIZIONE: Dato uno spazio topologico X , si dice n -simplexso singolare una coppia (Δ^n, f) con $f: \Delta^n \rightarrow X$.

DEFINIZIONE: Si dice faccia di un n -simplesso singolare (Δ^n, f) un $(n-1)$ -simplesso singolare $(\Delta^{n-1}, f \circ D_j)$, con $D_j: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ che immerge Δ^{n-1} come j -esima faccia di Δ^n .

DEFINIZIONE: Dato X uno spazio topologico T_2 , un Δ -complesso su X è una famiglia di semplici singolari $\{(\Delta^{n_\sigma}, \varphi_\sigma)\}_{\sigma \in \Lambda}$ tali che:

- La famiglia sia chiusa rispetto alle facce iterate;
- $\forall \sigma \in \Lambda, \varphi_\sigma|_{\dot{\Delta}^{n_\sigma}}: \dot{\Delta}^{n_\sigma} \rightarrow X$ è un omeomorfismo sull'immagine;
- $\forall x \in X$ esiste un unico $\varphi_\sigma: \Delta^{n_\sigma} \rightarrow X$ tale che $x \in \varphi_\sigma(\dot{\Delta}^{n_\sigma})$;
- X è dotato della topologia finale rispetto alla famiglia, ovvero $A \subseteq X$ è aperto se e solo se $\forall \sigma \in \Lambda$ si ha che $\varphi_\sigma^{-1}(A)$ è aperto in Δ^{n_σ} .

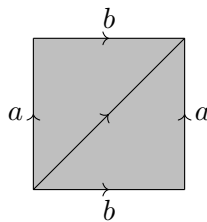
Osservazione. Data una struttura di Δ -complesso su X , si ha che X è omeomorfo a $\bigsqcup_{\sigma} \Delta^{n_\sigma} / \{\varphi_\sigma\}_{\sigma}$ (vengono identificati i punti che hanno la stessa immagine su X).

Osservazione. La nozione di Δ -complesso estende in modo naturale quella di complesso simpliciale. Infatti, sia $X = |\mathcal{K}|$ (è uno spazio topologico T_2) con \mathcal{K} un complesso simpliciale ordinato. Allora $\forall \sigma \in \mathcal{K}$ si definisce φ_σ come

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n_\sigma} & \xrightarrow{\quad} & |\sigma| \xleftarrow{i} |\mathcal{K}| \\ & \searrow \varphi_\sigma & \nearrow \end{array}$$

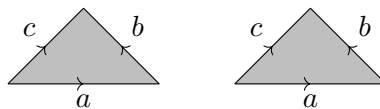
con $\Delta^{n_\sigma} \rightarrow |\sigma|$ l'applicazione naturale indotta dall'ordinamento dei vertici di σ . La famiglia così definita rispetta le 4 condizioni necessarie di un Δ -complesso; in questo caso si ha una condizione più forte della seconda, si ha cioè che $\forall \sigma \in \mathcal{K} \varphi_\sigma: \Delta^{n_\sigma} \rightarrow X$ è un omeomorfismo sull'immagine.

ESEMPIO: $X = S^1 \times S^1$.



Questo diagramma porta ad una struttura di Δ -complesso su X che non è un complesso simpliciale. Infatti questa famiglia ha 2 2-simplessi, 3 1-simplessi e 1 0-simplesso, e l'intersezione dei 2-simplessi è l'unione di tutti gli 1-simplessi, che non è una faccia comune perché non è un semplice.

ESEMPIO: $X = S^2$, come complesso simpliciale, può essere visto come $\partial\Delta^3$, mentre come Δ -complesso si può vedere come



Uno dei vantaggi dati da una struttura di Δ -complesso è il minor numero di simplessi necessari alla descrizione dello spazio.

Osservazione. La nozione di suddivisione (baricentrica) si estende ai Δ -complessi in modo naturale. Una suddivisione baricentrica di un Δ -complesso risulta essere un complesso simpliciale.

1.7 Lezione 7 - 17/10

DEFINIZIONE: Siano \mathcal{D}, \mathcal{C} categorie e siano $H, R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtori covarianti. Una trasformazione naturale di funtori $T: H \rightarrow R$ è una famiglia di frecce

$$\{T_X: H(X) \rightarrow R(X)\}_{X \in \text{Obj}(\mathcal{D})}$$

tale che il seguente diagramma commuti per ogni freccia $f \in \text{Mor}(\mathcal{D})$.

$$\begin{array}{ccc} X & & H(X) \xrightarrow{T_X} R(X) \\ \downarrow f & & \downarrow H(f) \quad \downarrow R(f) \\ Y & & H(Y) \xrightarrow{T_Y} R(Y) \end{array}$$

Analogamente si definisce una trasformazione naturale di funtori controvarianti.

1.7.1 Interpretazione Catoriale dei Δ -Complessi

Sia \mathcal{D} la categoria i cui oggetti sono gli insiemi ordinati standard $\mathcal{D}^n = \{0, \dots, n\} \quad \forall n \geq 0$ (n -simplessi astratti standard).

Come morfismi della categoria consideriamo le $\mathcal{D}^m \rightarrow \mathcal{D}^n$ con $m \leq n$ e strettamente crescenti.

Dato un Δ -complesso su X , poniamo $X(n) = \{(\Delta^{n_\lambda}, \varphi_\lambda) \mid n_\lambda = n\}$ l'unione degli n -simplessi singolari di X .

DEFINIZIONE: Sia X un Δ -complesso. Si definisce Δ -complesso astratto su X il funtore (controvariante)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbf{Set} \\ \mathcal{D}^n & \mapsto & X(n) \\ \left(\mathcal{D}^m \xrightarrow{f} \mathcal{D}^n \right) & \mapsto & \left(X(n) \xrightarrow{f^*} X(m) \right) \end{array}$$

dove f^* associa ad ogni n -simpleso singolare la m -faccia corrispondente (che dipende dall'inclusione f).

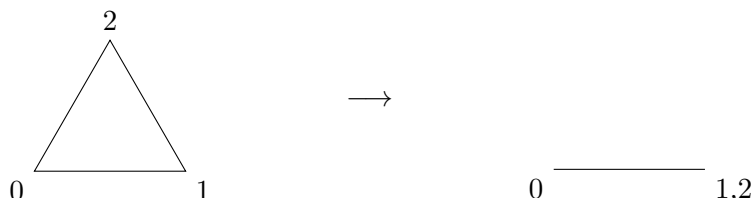
Osservazione. Si ha dunque un omeomorfismo tra X e

$$\left(\bigsqcup_n (X(n) \times \Delta^n) \right) / \sim$$

dove $X(n)$ viene considerato con la topologia discreta e si ha una relazione tra i punti $(f^*(x), y) \sim (x, f_*(y))$ con $f_*: \Delta^m \rightarrow \Delta^n$ la realizzazione geometrica di f .

DEFINIZIONE: Dati due Δ -complessi astratti $\mathcal{D} \xrightarrow{H} \mathbf{Set}$ e $\mathcal{D} \xrightarrow{R} \mathbf{Set}$, una Δ -applicazione tra di essi è una trasformazione naturale di funtori (controvarianti).

Osservazione. Una Δ -applicazione manda dunque n -simplessi in n -simplessi (in modo non degeneri). Gli isomorfismi simpliciali rientrano perciò nella definizione di Δ -applicazione, mentre più in generale i morfismi simpliciali non sono Δ -applicazioni. Infatti, ad esempio:



non è una Δ -applicazione.

1.7.2 Δ -Complessi $K(G, 1)$

DEFINIZIONE: Sia G un gruppo. Uno spazio topologico X si dice $K(G, 1)$ se è connesso e $\pi_1(X) \cong G$, $\pi_n(X) = 0 \forall n \geq 2$.

Analogamente si definiscono gli spazi $K(G, n)$, con la condizione che G sia abeliano quando $n > 1$.

Data una struttura di Δ -complesso su X , se X ammette rivestimento universale \tilde{X} allora la struttura si solleva ad un Δ -complesso di \tilde{X} .

Fissato un gruppo G , costruiamo esplicitamente un Δ -complesso connesso $B(G)$ tale che $\pi_1(B(G)) \cong G$ e che ammetta un rivestimento universale $E(G)$ contrattile.

Questa seconda condizione assicura che $\pi_n(B(G)) = 0 \forall n \geq 2$.

Iniziamo dal definire il Δ -complesso $E(G)$ come la realizzazione geometrica del Δ -complesso astratto $\mathcal{D} \xrightarrow{E(G)} \mathbf{Set}$ tale che $\mathcal{D}^n \xrightarrow{E(G)} G^{n+1} := \{(g_0, \dots, g_n) \mid g_i \in G \forall i\}$.

Per definire $B(G)$ consideriamo l'azione di gruppo di G su $E(G)$ di moltiplicazione: $\forall h \in G$ si ha $h \cdot [g_0, \dots, g_n] := [hg_0, \dots, hg_n]$.

Tale azione è libera (tutti gli stabilizzatori sono banali) e propriamente discontinua, ovvero $\forall K$ compatto in $E(G)$ si ha $|\{h \in G \mid hK \cap K \neq \emptyset\}| < +\infty$, che segue dal fatto che l'azione induce un Δ -isomorfismo di $E(G)$ in sé.

Dunque $E(G)$ riveste $B(G) := E(G)/G$ e $\pi_1(B(G)) \cong G$.

Vediamo adesso che $E(G)$ è contrattile: ogni $[g_0, \dots, g_n]$ semplice di $E(G)$ è faccia di $[e, g_0, \dots, g_n]$ con e l'elemento neutro del gruppo G , che si retrae mediante retrazione radiale su e .

Dunque $E(G)$ si retrae per deformazione su $\{e\}$ (dato che lo fa semplice per semplice).

Osservazione. La costruzione fatta sopra è molto poco efficiente, dato che $E(G)$ è sempre infinito a prescindere dalla cardinalità di G .

Osservazione. La corrispondenza $G \leftrightarrow (E(G) \xrightarrow{p} B(G))$ è funtoriale, ovvero esiste un

funtore **Groups** $\rightarrow \Delta\text{-Complex}$ che manda G in $E(G)$ e ogni omomorfismo $f: G \rightarrow H$ induce una Δ -applicazione $E(G) \rightarrow E(H)$ tale che $[g_0, \dots, g_n] \mapsto [f(g_0), \dots, f(g_n)]$.

1.7.3 CW-Complessi

DEFINIZIONE: $e_\alpha^n = (D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n)$ viene detta n -cella, e per ogni α si ha che D_α^n è una copia di D^n .

DEFINIZIONE: Un CW-complesso è uno spazio topologico X munito di una struttura aggiuntiva che lo costruisce in modo induttivo sugli n -scheletri per $n \geq 0$.

- Si definisce lo 0-scheletro X^0 come un insieme arbitrario di punti di X dotato della topologia discreta;
- Avendo definito l' $(n-1)$ -scheletro X^{n-1} si definisce X^n tramite l'incollamento di n -celle $e_\lambda^n := (D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1})$ a X^{n-1} attraverso una famiglia di mappe di attaccamento $\{f_\lambda: S_\lambda^{n-1} \rightarrow X^{n-1}\}_{\lambda \in \Lambda}$ con f_λ continua per ogni λ .
Dunque poniamo $X^n := (X^{n-1} \sqcup \{D_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda}) / \sim$, con $S_\lambda^{n-1} \ni x \sim f_\lambda(x) \in X^{n-1}$, munito della topologia quoziente;
- Infine consideriamo $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ dotato della topologia finale rispetto alla famiglia delle inclusioni $\{X^n \hookrightarrow X\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Osservazione. Ogni complesso simpliciale e più in generale ogni Δ -complesso è un CW-complesso, e le rispettive nozioni di scheletri si sovrappongono.

DEFINIZIONE: Ogni $f_\lambda: S_\lambda^n \rightarrow X^{n-1}$ viene detta funzione di attaccamento.

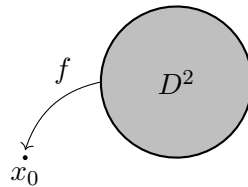
Osservazione. $X^n \setminus X^{n-1}$ è omeomorfo a $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathring{D}_\lambda^n$.

DEFINIZIONE:

$$\underbrace{D_\lambda^n \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda^n \xrightarrow{\pi} X^n \hookrightarrow X}_{\phi_\lambda}$$

ϕ_λ è detta funzione caratteristica che estende l'applicazione di attaccamento f_λ . Per ogni $\lambda \in \Lambda$ si ha che $\phi_\lambda(D_\lambda^n) = e_\lambda^n$ n -cella aperta del CW-complesso.

ESEMPIO: Lo spazio topologico S^2 può essere visto come complesso simpliciale finito ($\partial\Delta^3$), come Δ -complesso (esempio fatto alla fine della Lezione 6), oppure come CW-complesso nel modo seguente:



1.8 Lezione 8 - 20/10

Vogliamo adesso generalizzare la categoria \mathcal{D} per ottenere in modo naturale un funtore con la categoria dei complessi simpliciali: gli oggetti si corrispondono già a questo livello di generalizzazione, ma non le frecce.

1.8.1 Insiemi Simpliciali

Si definisce la categoria $\tilde{\mathcal{D}}$ come estensione di \mathcal{D} , prendendo gli stessi oggetti (ovvero gli n -simplessi astratti standard), e come frecce tutte le applicazioni $\mathcal{D}^m \rightarrow \mathcal{D}^n$ crescenti (non necessariamente strettamente, dunque con m e n qualsiasi).

Dato un Δ -complesso X , possiamo definire come per \mathcal{D} un funtore controvariante

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ \mathcal{D}^n & \longmapsto & X(n) \\ \left(\mathcal{D}^m \xrightarrow{f} \mathcal{D}^n \right) & \longmapsto & \left(X(n) \xrightarrow{f^*} X(m) \right) \end{array}$$

che estende quello definito in precedenza.

Osservazione. Si ha dunque un omeomorfismo tra X e la realizzazione geometrica del Δ -complesso astratto:

$$\left(\bigsqcup_n (X(n) \times \Delta^n) \right) / \sim$$

dove $X(n)$ viene considerato con la topologia discreta e si ha una relazione tra i punti $(f^*(x), y) \sim (x, f_*(y))$ con $f_*: \Delta^m \rightarrow \Delta^n$ la realizzazione geometrica di f .

Definendo a questo punto le Δ -applicazioni come trasformazioni naturali di funtori controvarianti tra $\tilde{\mathcal{D}}$ e \mathbf{Set} , si ottiene una estensione naturale della categoria dei complessi simpliciali.

Osservazione. Per lavorare con i Δ -complessi astratti c'è un'effettiva necessità di introdurre gli insiemi simpliciali. Un Δ -complesso di dimensione finita X infatti non può essere astrattizzato senza passare agli insiemi simpliciali, poiché deve esistere $X(n) \forall n$.

1.8.2 Esempi di CW-Complessi

DEFINIZIONE: Dato X un CW-complesso, $A \subseteq X$ è un sottocomplesso se A è unione di celle aperte di X e la chiusura di ogni tale cella è contenuta in A .

Come sempre, possiamo ridefinire il tutto in versione relativa, chiamando (X, A) una CW-coppia se è considerata su di essa la struttura di CW-complesso.

ESEMPIO: Possiamo considerare la struttura di CW-complesso su $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = D^n / \sim$ con \sim la relazione antipodale sul bordo $\partial D^n = S^{n-1}$.

Vediamo come sono fatti gli scheletri di X : $X^0 = \{\text{pt}\}$; $X(1)$ è costituito da una 1-cella con la mappa di attaccamento che collassa il bordo su X^0 (e dunque $X(1)$ è omeomorfo a $\mathbb{P}(\mathbb{R})$); $X(2)$ è formato da una 2-cella e dalla funzione di attaccamento da $\partial D^2 = S^1$ su X^1 che lo riveste doppiamente; in modo analogo si definiscono tutti i k -scheletri per $k \leq n$.

Questa costruzione ci permette di definire anche $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, munito della topologia finale rispetto alle inclusioni dei $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{ccccccc} S^0 & \subseteq & S^1 & \subseteq & \dots & \subseteq & S^n & \subseteq & \dots & \subseteq & S^\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & & & \downarrow \pi & & & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^0 & \subseteq & \mathbb{P}^1 & \subseteq & \dots & \subseteq & \mathbb{P}^n & \subseteq & \dots & \subseteq & \mathbb{P}^\infty \end{array}$$

S^∞ è il rivestimento universale di $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ di grado 2, e dunque $\pi_1(\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

S^∞ è contrattile, in quanto $\pi_n(S^\infty) = 0 \forall n$: ogni laccio infatti può essere visto dentro $S^{n+1} \subseteq S^\infty$ in cui è omotopo a costante.

Dunque $\pi_n(\mathbb{P}^\infty) = 0 \forall n \geq 2$, ovvero \mathbb{P}^∞ è un CW-complesso $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$.

TEOREMA: Per ogni gruppo G i CW-complessi $K(G, 1)$ sono unici a meno di equivalenza omotopica.

ESEMPIO: $\forall n, \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n \text{ volte}$ è un $K(\mathbb{Z}^n, 1)$.

1.9 Lezione 9 - 24/10

1.9.1 Proprietà dei CW-Complessi

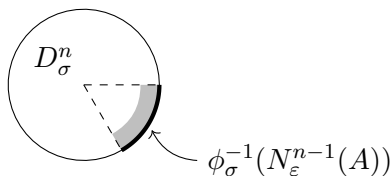
DEFINIZIONE: Sia X un CW-complesso e $A \subseteq X$ chiuso.

Per ogni applicazione $\varepsilon: \{\text{celle di } X\} \rightarrow (0, 1)$ si definisce l' ε -intorno di A (si indica con $N_\varepsilon(A)$) induttivamente sugli scheletri nel modo seguente:

$$N_\varepsilon^0(A) = A \cap X^0;$$

supponendo di aver definito $N_\varepsilon^{n-1}(A)$, si costruisce $N_\varepsilon^n(A)$ considerando $\forall \phi_\sigma$ con $\dim \sigma = n$ ($\phi_\sigma: D_\sigma^n \rightarrow X$) un ε_σ -intorno di $A \cap \dot{D}_\sigma^n$ in \dot{D}_σ^n unito ad un ε_σ -intorno di $\phi_\sigma^{-1}(N_\varepsilon^{n-1}(A))$ in D_σ^n "radiale", vale a dire che $\forall 0 \neq x \in D_\sigma^n$, $x \in \varepsilon_\sigma$ -intorno $\Leftrightarrow \frac{x}{|x|} \in \phi_\sigma^{-1}(N_\varepsilon^{n-1}(A))$ e $|x| > 1 - \varepsilon_\sigma$.

Graficamente l' ε_σ -intorno di $\phi_\sigma^{-1}(N_\varepsilon^{n-1}(A))$ si può visualizzare così:



Osservazione. Usando gli ε -intorni si può dimostrare che X è T_2 , normale, localmente contrattile, e che se (X, A) è una CW-coppia, allora A è un retratto per deformazione di $N_\varepsilon(A)$ in X .

PROPOSIZIONE: Sia X un CW-complesso, $K \subseteq X$ compatto. Allora K è contenuto in un sottocomplesso finito.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella per i complessi di cardinalità arbitraria. □

Dati X e Y due CW-complessi, ci chiediamo se lo spazio topologico $X \times Y$ sia in modo naturale un CW-complesso "prodotto" dei due iniziali.

Chiamando $\{\phi_\alpha\}_\alpha$ la famiglia delle funzioni caratteristiche di X e $\{\psi_\beta\}_\beta$ quella di Y , il candidato più ovvio ad essere la famiglia di funzioni caratteristiche di $X \times Y$ è $\{\phi_\alpha \times \psi_\beta\}_{(\alpha, \beta)}$ (il prodotto di dischi è omeomorfo ad un disco).

Dato Z uno spazio topologico T_2 , considerando la famiglia \mathcal{C} dei compatti di Z , possiamo definire la topologia "generata dai compatti" $Z_{\mathcal{C}}$ tale per cui A è chiuso in $Z_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \forall K \in \mathcal{C} A \cap K$ è chiuso in K .

Tale topologia è più fine di quella di Z , ma Z e Z_C hanno la stessa famiglia di compatti.

Non è difficile verificare che $\{\phi_\alpha \times \psi_\beta\}_{(\alpha,\beta)}$ è famiglia di funzioni caratteristiche per una struttura di CW-complesso “prodotto” su $(X \times Y)_C$.

DEFINIZIONE: Una coppia di spazi topologici (X, A) verifica la proprietà di estensione delle omotopie (P.E.O.) se $\forall Y, \forall f_0: X \rightarrow Y$ continua e per ogni omotopia $g_t: A \rightarrow Y$ (per $t \in [0, 1]$), con $g_0 = f_0|_A$, si ha che g_t si estende ad un’omotopia $f_t: X \rightarrow Y$.

LEMMA: Una coppia (X, A) verifica P.E.O. se e solo se $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è un retratto per deformazione di $X \times I$.

Dimostrazione. \Rightarrow .

Prendendo $f_0 = i: X \hookrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ e $g_t: A \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ per ipotesi esiste una retrazione $r: X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$. La dimostrazione che esista un’omotopia tra $id_{X \times I}$ e $j \circ r$ con $j: (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \hookrightarrow X \times I$ è lasciata per esercizio. \square

Dimostrazione. \Leftarrow .

Se $r: X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è la retrazione, f_t si ottiene componendo r con $(g_t \cup f_0)$. \square

TEOREMA (P.E.O. PER CW-COPPIE): Sia (X, A) una CW-coppia. Allora $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ è retratto per deformazione di $X \times I$ (e dunque (X, A) verifica P.E.O.).

Dimostrazione. Innanzitutto vediamo che il teorema vale nel caso delle celle, ovvero in cui $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$:

infatti, immergendo $D^n \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, la proiezione stereografica dal punto $(0, \dots, 0, 2)$ fornisce in modo naturale una retrazione per deformazione di $D^n \times I$ su $(D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)$.

Nel caso generale, posti X^n e A^n gli n -scheletri di X e A rispettivamente, utilizzando il caso base si ha per ogni n una retrazione di $X^n \times I$ su $(X^n \times \{0\}) \cup ((X^{n-1} \cup A^n) \times I)$. Infatti per ogni n -cella e_α^n di $X \setminus A$, il prodotto $e_\alpha^n \times I$ si retrae su $(e_\alpha^n \times \{0\}) \cup (\partial e_\alpha^n \times I)$, la quale si attacca tramite la funzione di incollamento su $(X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I)$. Concatenando tutte le retrazioni di tutte le celle di ogni scheletro si ottiene la retrazione di $X \times I$ su $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$. \square

1.9.2 Applicazioni Cellulari

DEFINIZIONE: Dati X, Y due CW-complessi, $f: X \rightarrow Y$ continua si dice cellulare se $\forall n \in \mathbb{N} f(X^n) \subseteq Y^n$.

TEOREMA (DI APPROSSIMAZIONE CELLULARE): Siano X, Y dei CW-complessi. Allora ogni $f: X \rightarrow Y$ continua è omotopa a una $g: X \rightarrow Y$ cellulare.

Dimostrazione. Per induzione sugli scheletri:

Se $f(X^0) \not\subseteq Y^0$, per ogni 0-cellula e_α^0 (i punti), $f(e_\alpha^0)$ è contenuto in una k -cellula (con $k > 0$ il minimo) e_β^k di Y , dunque $\exists y_0 \in e_\beta^k \setminus f(e_\alpha^0)$. Costruiamo una retrazione radiale di $(e_\beta^k \setminus \{y_0\})$ su ∂e_β^k , e andiamo avanti fino ad ottenere una omotopia che manda $f(e_\alpha^0)$ in una 0-cellula di Y (grazie alla P.E.O. le omotopie locali si estendono ad omotopie globali).

Per il passo induttivo iteriamo ancora lo stesso metodo unito al fatto che ogni $D^n \rightarrow D^k$ con $n < k$ è omotopa ad una mappa non surgettiva. \square

TEOREMA (DI WHITEHEAD): Siano X, Y dei CW-complessi connessi. Se $f: X \rightarrow Y$ continua è tale che $\forall n \geq 1$ si ha $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ isomorfismo, allora f è una equivalenza di omotopia.

Dimostrazione. Grazie al teorema di approssimazione cellulare possiamo assumere f applicazione cellulare.

Sia \mathcal{C}_f il cilindro di applicazione di f :

$$\mathcal{C}_f := ((X \times I) \sqcup Y) / \sim$$

con $(x, 1) \sim f(x) \forall x \in X$. Abbiamo che $Y \hookrightarrow \mathcal{C}_f$ è una equivalenza di omotopia (poiché \mathcal{C}_f si retrae per deformazione su Y); dunque basta dimostrare che $i: X \cong X \times \{0\} \hookrightarrow \mathcal{C}_f$ è una equivalenza di omotopia.

Per ipotesi, essendo f composizione dell'inclusione $i: X \hookrightarrow \mathcal{C}_f$ con la retrazione di \mathcal{C}_f su Y , $\forall n \geq 1$ $i_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(\mathcal{C}_f)$ è un isomorfismo. Considerando la coppia (\mathcal{C}_f, X) con la struttura di CW-complesso (che risulta ben definita essendo f cellulare), e la successione esatta lunga dei gruppi di omotopia relativa per la coppia:

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(\mathcal{C}_f, X) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X) \xrightarrow{i_*} \pi_n(\mathcal{C}_f) \xrightarrow{j_*} \pi_n(\mathcal{C}_f, X) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

si ha che $\pi_n(\mathcal{C}_f, X) = 0 \forall n \geq 1$.

A questo punto dimostriamo che $id_{(\mathcal{C}_f, X)}$ è omotopa a una $g: \mathcal{C}_f \rightarrow X$.

Supponiamo induttivamente su n che la restrizione dell'identità di (\mathcal{C}_f, X) all' $n-1$ scheletro $(\mathcal{C}_f^{n-1}, X^{n-1})$ sia omotopa ad una $g_{n-1}: \mathcal{C}_f^{n-1} \rightarrow X$ (per il passo base ciò è vero grazie alla connessione della coppia). Per ogni n -cella, consideriamo la composizione della sua funzione caratteristica con (id, g_{n-1}) e l'inclusione in (\mathcal{C}_f, X) :

$$(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \xrightarrow{\phi_\alpha} (\mathcal{C}_f^n, \mathcal{C}_f^{n-1}) \xrightarrow{(id, g_{n-1})} (\mathcal{C}_f^n, X) \xleftarrow{i} (\mathcal{C}_f, X)$$

Essendo $\pi_n(\mathcal{C}_f, X) = 0$, la composizione $i \circ (id, g_{n-1}) \circ \phi_\alpha$ rappresenta la classe nulla, e dunque è possibile trovare una omotopia con una applicazione a valori in X .

La tesi si ottiene ricolando tutte le omotopie e usando P.E.O. □

Osservazione. Non basta che $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y) \forall n \geq 1$ affinché valga la tesi; gli isomorfismi devono essere tutti indotti da una stessa $f: X \rightarrow Y$ continua.

ESEMPIO: $S^2 \times S^\infty$ è il rivestimento universale di $S^2 \times \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$, mentre S^2 è il rivestimento universale di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Dunque $\pi_1(\mathbb{P}^2) \cong \pi_1(S^2 \times \mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

S^∞ è un CW-complesso connesso tale che $\pi_n(S^\infty) = 0 \forall n \geq 1$. Quindi S^∞ è contrattile, dato che l'applicazione costante $c: S^\infty \rightarrow \{\text{punto}\}$ verifica le ipotesi del teorema di Whitehead.

Allora i due rivestimenti sono omotopicamente equivalenti, il che implica $\pi_n(\mathbb{P}^2) \cong \pi_n(S^2 \times \mathbb{P}^\infty) \forall n$.

Vedremo però in seguito che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e $S^2 \times \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ non sono omotopicamente equivalenti.

TEOREMA (UNICITÀ DEI $K(G, 1)$): Sia G un gruppo e X, Y due CW-complessi $K(G, 1)$. Allora X e Y sono omotopicamente equivalenti.

Dimostrazione. Dimostriamo prima il risultato nel caso particolare in cui $X^0 = \{x_0\}$: X^1 dunque è un "bouquet" con (eventualmente infiniti) petali. Sia $\varphi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow$

$\pi_1(Y, y_0)$ un isomorfismo qualunque. Vediamo che φ è indotto da una $f: X \rightarrow Y$ continua per poter applicare Whitehead e concludere ($\pi_n(X) = \pi_n(Y) = 0 \forall n > 1$). Costruiamo f per induzione sugli scheletri. Poniamo $f(x_0) = y_0$; per ogni 1-cella e_α^1 scegliamo come sua immagine tramite f un rappresentante di $\varphi([e_\alpha^1]) \in \pi_1(Y, y_0)$. Abbiamo così per adesso definito $f: X^1 \rightarrow Y$. Denotando con $i: X^1 \hookrightarrow X$, si ha che $f_* = \varphi \circ i_*$. Per poter estendere f alle 2-celle e_β^2 (con funzioni di attaccamento ψ_β) è sufficiente che $[f \circ \psi_\beta] = [0]$. Ciò è banalmente verificato poiché $i_*([\psi_\beta(\partial e_\beta^2)]) = 0$. Allo stesso modo è possibile estendere f ad ogni scheletro dato che $\forall n > 1, \pi_n(X) = 0$ e dunque ogni immagine è nullomotopa.

Nel caso generale in cui $|X^0| > 1$, basta osservare che X^1 è connesso (perché X lo è e ∂D^n è sconnesso solo per $n = 1$). Aggiungendo eventualmente dei punti possiamo supporre che X^1 sia un 1-complesso simpliciale. Allora contiene un albero massimale T (che risulta essere un sottocomplesso contrattile), ovvero un sottografo aciclico massimale. Dunque $\tilde{X} = X/T$ è omotopicamente equivalente a X e $\#\tilde{X}^0 = 1$. \square

Osservazione. Dunque ogni invariante di omotopia applicato a qualsiasi modello di $K(G, 1)$ è un invariante del gruppo G a meno di isomorfismo.

Capitolo 2

Omologia

2.1 Lezione 10 - 27/10

2.1.1 Complessi di R -moduli

Ricordiamo alcuni risultati preliminari di Algebra.

LEMMA (DEI 5): Sia R un anello commutativo con unità, e siano A_i, B_j con $i, j = 1, \dots, 5$ degli R -moduli.

Consideriamo il seguente diagramma commutativo in cui le righe sono successioni esatte, i quadrati commutano e le applicazioni f_1, f_2, f_3, f_4 sono isomorfismi:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{g_1} & A_2 & \xrightarrow{g_2} & A_5 & \xrightarrow{g_3} & A_3 & \xrightarrow{g_4} & A_4 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_5 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\ B_1 & \xrightarrow{h_1} & B_2 & \xrightarrow{h_2} & B_5 & \xrightarrow{h_3} & B_3 & \xrightarrow{h_4} & B_4 \end{array}$$

Allora f_5 è un isomorfismo.

DEFINIZIONE: Un R -modulo A si dice libero se ammette una base $\mathcal{B} = \{a_j\}_{j \in J}$ tali che \mathcal{B} genera A ed è formato da elementi R -linearmente indipendenti.

Dato un insieme arbitrario $A \neq \emptyset$, all'interno di $R^A = \{f: A \rightarrow R\}$ (con la struttura canonica di R -modulo libero) possiamo considerare il sottomodulo delle funzioni a supporto finito $E(A)$. Si ha quindi un'inclusione naturale di A in $E(A)$ attraverso $x \mapsto f_x$, dove $f_x: A \rightarrow R$ è tale che $f_x(y) = 0_R \forall y \neq x$ e $f_x(x) = 1_R$. Ne risulta che $\{f_x\}_{x \in A}$ è una base di $E(A)$.

TEOREMA: Se R è un PID, allora ogni sottomodulo di un R -modulo libero è libero.

Supponiamo che R sia tale che ogni sottomodulo di un qualsiasi R -modulo libero è libero; allora ogni R -modulo A ha la seguente risoluzione libera (è una successione esatta corta):

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \xleftarrow{i} E(A) \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$$

dove $\varphi(\sum a_x f_x) = \sum a_x x$, con $a_x \in R$.

DEFINIZIONE: Definiamo la categoria dei complessi di R -moduli come la categoria avente come oggetti i complessi di R -moduli, ovvero dei $(C, d) := \{(C_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ dove i C_i sono

R -moduli e le d_i sono applicazioni R -lineari tali che $d_i \circ d_{i+1} = 0 \forall i$ (ovvero $\text{Im}(d_{i+1}) \subseteq \text{Ker}(d_i)$):

$$\dots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} C_{i-2} \longrightarrow \dots$$

mentre i morfismi sono applicazioni $(C, d) \xrightarrow{f} (C', d')$ con $f := \{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ famiglia di applicazioni R -lineari, tali per cui i quadrati del seguente diagramma commutano:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & C_{i-2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_{i-2} & & \\ \dots & \longrightarrow & C'_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & C'_i & \xrightarrow{d'_i} & C'_{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & C'_{i-2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

DEFINIZIONE: Dato un complesso di R -moduli (C, d) si dice modulo degli i -bordi del complesso il sottomodulo $B_i(C) = \text{Im}(d_{i+1})$ di C_i .

DEFINIZIONE: Dato un complesso di R -moduli (C, d) si dice modulo degli i -cicli del complesso il sottomodulo $Z_i(C) = \text{Ker}(d_i)$ di C_i .

PROPOSIZIONE: Esiste una famiglia di funtori covarianti $\{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tra la categoria dei complessi di R -moduli nella categoria degli R -moduli tali che:

$$(C, d) \longrightarrow H_i(C) := Z_i(C)/B_i(C), \text{ detto } i\text{-esimo modulo di omologia del complesso } (C, d);$$

$$\left((C, d) \xrightarrow{f} (C', d') \right) \longrightarrow \left(H_i(C) \xrightarrow{f_*^i} H_i(C') \right) \text{ con } f_*^i([z]) = [f_i(z)].$$

Dimostrazione. C'è da verificare soltanto che f_*^i sia ben definita e che sia un morfismo di R -moduli.

Tutto diventa ovvio osservando che f manda bordi in bordi e cicli in cicli. Infatti:

Se $z \in Z_i(C)$ allora $d_i(z) = 0$. Per la commutatività dei quadrati $0 = f_{i-1}(d_i(z)) = d'_i(f_i(z))$, dunque $f_i(z) \in Z_i(C')$.

Se $b \in B_i(C)$ allora $b = d_{i+1}(x)$. Per la commutatività dei quadrati $f_i(b) = f_i(d_{i+1}(x)) = d'_{i+1}(f_{i+1}(x))$, dunque $f_i(b) \in B_i(C')$. \square

DEFINIZIONE: Date $f, g: (C, d) \longrightarrow (C', d')$ morfismi di complessi di R -moduli, f è omotopa a g se esiste un morfismo $s := \{s_i: C_i \longrightarrow C'_{i+1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & C_{i-2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{i+1} & \swarrow s_i & \downarrow f_i & \swarrow s_{i-1} & \downarrow f_{i-1} & \swarrow s_{i-2} & \downarrow f_{i-2} & & \\ \dots & \longrightarrow & C'_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & C'_i & \xrightarrow{d'_i} & C'_{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & C'_{i-2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

tale che $\forall i \in \mathbb{Z} (d'_{i+1} \circ s_i) + (s_{i-1} \circ d_i) = f_i - g_i$, ovvero $g_i = f_i - (d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i)$.

PROPOSIZIONE: Siano $f, g: (C, d) \longrightarrow (C', d')$ morfismi di complessi di R -moduli. Se $f \sim g$ tramite s , allora $\forall i \in \mathbb{Z} f_*^i = g_*^i$.

Dimostrazione. Va verificato soltanto che $\forall z \in Z_i(C), [f_i(z)] = [g_i(z)]$.

Se $z \in Z_i(C)$, allora $f_i(z) - g_i(z) = s_{i-1}(d_i(z)) + d'_{i+1}(s_i(z)) = s_{i-1}(0) + d'_{i+1}(s_i(z)) = d'_{i+1}(s_i(z))$, e dunque $[f_i(z) - g_i(z)] = [0]$, cioè $[f_i(z)] = [g_i(z)]$. \square

DEFINIZIONE: Denotando con 0 il complesso di R -moduli $(0, 0)$ in cui tutti gli spazi e le applicazioni sono nulli, si definisce una successione esatta corta di morfismi di complessi di R -moduli

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

dove A, B, C sono complessi di R -moduli e f, g morfismi di complessi, come il seguente diagramma di morfismi in cui i quadrati commutano e ogni colonna è una successione esatta corta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & A_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & A_i & \xrightarrow{d_i} & A_{i-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & B_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & B_i & \xrightarrow{d'_i} & B_{i-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow g_{i+1} & & \downarrow g_i & & \downarrow g_{i-1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & C_{i+1} & \xrightarrow{d''_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{d''_i} & C_{i-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Osservazione. $\forall i$, f_i è iniettiva e g_i è surgettiva.

LEMMA: Data una successione esatta corta di morfismi di complessi di R -moduli (con notazioni come sopra), $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\forall c \in Z_i(C)$, esistono $a \in A_{i-1}$, $b \in B_i$ tali che:

$$\begin{cases} g_i(b) = c \\ f_{i-1}(a) = d'_i(b) \\ d_{i-1}(a) = 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Sicuramente esiste $b \in B_i$ tale che $g_i(b) = c$ grazie alla surgettività di g_i . Inoltre poiché $g_{i-1}(d'_i(b)) = d''_i(g_i(b)) = d''_i(c) = 0$ (essendo $c \in Z_i(C)$), si ha che $d'_i(b) \in \text{Ker}(g_{i-1}) = \text{Im}(f_{i-1})$.

Dunque $\exists a \in A_{i-1}$ tale che $f_{i-1}(a) = d'_i(b)$.

Osserviamo infine che $f_{i-2}(d_{i-1}(a)) = d'_{i-1}(f_{i-1}(a)) = d'_{i-1}(d'_i(b)) = 0$, e dato che f_{i-2} è iniettiva si ottiene $d_{i-1}(a) = 0$. \square

TEOREMA (DELLA SUCC.ESATTA LUNGA IN OMOLOGIA): Sia $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una successione esatta corta di morfismi di complessi di R -moduli. Definendo $\forall i$ l'applicazione $\partial_i: H_i(C) \longrightarrow H_{i-1}(A)$ tale che $\partial_i([c]) = [a]$ con $a \in Z_{i-1}(A)$ che verifica le conclusioni del lemma precedente, si ha che ∂_i è un ben definito morfismo di R -moduli e che la successione

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} H_i(A) \xrightarrow{f_*^i} H_i(B) \xrightarrow{g_*^i} H_i(C) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(A) \longrightarrow \dots$$

è esatta (e viene detta successione esatta lunga in omologia associata alla successione esatta corta di morfismi di complessi di R -moduli).

2.2 Lezione 11 - 03/11

DEFINIZIONE: Sia $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una successione esatta corta. Si dice che la successione spezza se esiste un isomorfismo $\varphi: B \longrightarrow A \oplus C$ tale che

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & B & & & \\
 & & f \nearrow & \downarrow \varphi & \searrow g & & \\
 0 & \longrightarrow & A & & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow i & & \nearrow \pi & & \\
 & & & A \oplus C & & &
 \end{array}$$

è un diagramma commutativo dove $i(a) = (a, 0)$ e $\pi(a, c) = c$.

LEMMA: Data una successione esatta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, i seguenti fatti sono equivalenti:

1. La successione spezza;
2. \exists proiezione $p: B \longrightarrow A$ tale che $p \circ f = id_A$;
3. \exists sezione $s: C \longrightarrow B$ tale che $g \circ s = id_C$.

LEMMA: Se C è un modulo libero, allora ogni successione esatta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ spezza.

LEMMA: Se R è tale che ogni sottomodulo di un R -modulo libero è libero, e se fissato C ogni successione esatta corta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ spezza allora si ha che C è libero.

Dimostrazione. Fissato un R -modulo C , consideriamo la sua risoluzione libera

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \xleftarrow{i} E(C) \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow 0$$

Tale successione spezza per ipotesi, dunque $E(C) \cong \text{Ker}(\varphi) \oplus C$, dunque C è isomorfo ad un sottomodulo di $E(C)$, che è un modulo libero, quindi è libero. \square

2.2.1 Omologia Singolare su \mathbb{Z}

DEFINIZIONE: Dato X uno spazio topologico, $\forall n \geq 0$ si definisce $C_n(X)$ lo \mathbb{Z} -modulo libero generato dall'insieme degli n -simplessi singolari su X .

$C_n(X)$ viene detto \mathbb{Z} -modulo delle n -catene singolari su X , e $C_n(X) \ni c = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma$ combinazione lineare finita di n -simplessi singolari su X .

DEFINIZIONE: $\forall n \geq 1$ si definisce l'applicazione $\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ come l'unica applicazione continua tale che $\partial_n(\sigma) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_j$, dove $\sigma: \Delta^n \longrightarrow X$ e $\sigma_j = \sigma \circ D_j$, con $D_j: \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$ che immerge Δ^{n-1} come j -esima faccia di Δ^n .

Osservazione. Il motivo del fattore di correzione $(-1)^j$ è dovuto al fatto che ogni faccia ha due orientazioni naturalmente indotte: una determinata dall'ordinamento dei vertici in quanto faccia e l'altra in quanto orientazione di bordo.

Ogni faccia deve essere considerata con la propria orientazione di bordo (e quindi si giustifica la presenza del fattore di correzione), così che si abbia $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Infatti, dato che ogni $(n-2)$ -faccia è faccia comune di esattamente 2 $(n-1)$ -facce e le rispettive orientazioni di bordo sono l'una l'opposto dell'altra, gli addendi della somma si cancellano a due a due.

A questo punto per definire il complesso $\{(C_n(X), \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ci resta da definire i $C_n(X)$ per $n < 0$ e di conseguenza le applicazioni. Possiamo farlo in due modi distinti:

- $C_n(X) = 0 \forall n < 0$, e dunque si ottiene il complesso

$$\dots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

- $C_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ e $C_n(X) = 0 \forall n < -1$, e dunque si ottiene il complesso

$$\dots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \longrightarrow \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

dove $\tilde{\partial}_0(\sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma) = \sum_{\sigma} n_{\sigma}$.

Quest'ultima costruzione del complesso si indica con $\{(\tilde{C}_n(X), \tilde{\partial}_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ per distinguerla dall'altra definizione.

Risulta naturale dunque costruire due funtori covarianti dalla categoria **Top** alla categoria dei complessi di \mathbb{Z} -moduli che manda uno spazio topologico X in $\{(C_n(X), \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ oppure in $\{(\tilde{C}_n(X), \tilde{\partial}_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e una applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ nel morfismo di complessi $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dove $f_n(\sigma) = f \circ \sigma$.

Componendo tali funtori con la famiglia di funtori $\{H_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ si ottengono due diversi funtori che ad ogni spazio topologico associano successioni di \mathbb{Z} -moduli (cioè gruppi abeliani):

DEFINIZIONE: $\{H_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definiti attraverso il complesso $\{(C_n(X), \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ si dicono gruppi di omologia singolare di X .

DEFINIZIONE: $\{\tilde{H}_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definiti attraverso il complesso $\{(\tilde{C}_n(X), \tilde{\partial}_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ si dicono gruppi di omologia ridotta di X .

Osservazione. $\forall n \neq 0 H_n(X) = \tilde{H}_n(X)$. Per $n = 0$ invece, poiché $\text{Im}(\partial_1) \subseteq \text{Ker}(\tilde{\partial}_0)$, si ha che $\tilde{\partial}_0$ induce un omomorfismo $d: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$. Dunque la seguente successione è esatta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(d) \xrightarrow{i} H_0(X) \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ed essendo \mathbb{Z} uno \mathbb{Z} -modulo libero tale successione spezza, ovvero $H_0(X) \cong \text{Ker}(d) \oplus \mathbb{Z} \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

2.2.2 Omologia Singolare e Ridotta in versione Relativa

Vogliamo adesso estendere le definizioni assolute in un contesto relativo.

DEFINIZIONE: Data una coppia (X, A) , si definisce $C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A)$ con la struttura di \mathbb{Z} -modulo quoziente.

Poiché la mappa di bordo $\partial_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ manda n -catene a valori in A in $(n-1)$ -catene a valori in A , essa induce una applicazione sul quoziente $\partial_n: C_n(X, A) \longrightarrow C_{n-1}(X, A)$.

Ovviamente anche per le mappe indotte sui quozienti vale $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$.

Osservazione. I $C_n(X, A)$ sono degli \mathbb{Z} -moduli liberi perché isomorfi al modulo libero generato dai simplessi singolari $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$ tali che $\sigma(\Delta^n) \not\subseteq A$.

Considerando il complesso $\{(C_n(X, A), \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ possiamo allora definire l'omologia singolare (e ridotta) $\{H_n(X, A)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\{\tilde{H}_n(X, A)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Osservazione. Considerando la definizione della mappa di bordo sui quozienti si ha che gli elementi di $H_n(X, A)$ sono gli $\alpha \in C_n(X)$ tali che $\partial_n(\alpha) \in C_{n-1}(A)$. Essi vengono detti n -cicli relativi ad A .

Osservazione. Un n -ciclo relativo $[\alpha] \in H_n(X, A)$ rappresenta l'elemento nullo se è del tipo $\alpha = \partial_{n+1}(\beta) + \gamma$ con $\beta \in C_{n+1}(X)$ e $\gamma \in C_n(A)$. Esso viene chiamato n -bordo relativo ad A .

DEFINIZIONE: Definiamo $Z_n(X, A)$ come il modulo degli n -cicli relativi e $B_n(X, A)$ come il modulo degli n -bordi relativi.

Osservazione. $B_n(X, A) \subseteq Z_n(X, A)$. Infatti $\partial_n(\partial_{n+1}(\beta) + \gamma) = \partial_n(\gamma) \in C_{n-1}(A)$.

LEMMA: $H_n(X, A) \cong Z_n(X, A)/B_n(X, A)$.

Dimostrazione. La dimostrazione è banale.

$\text{Ker}(\partial_n) = Z_n(X, A)/C_n(A)$ e $\text{Im}(\partial_{n+1}) = B_n(X, A)/C_n(A)$.

Dunque, essendo $H_n(X, A) = \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1})$ si giunge alla tesi. \square

Osservazione. Possiamo quindi vedere il caso assoluto all'interno del caso relativo vedendo X come la coppia (X, \emptyset) .

Grazie alla definizione di $C_n(X, A)$ come quoziente si ha $\forall n$ una successione esatta corta di \mathbb{Z} -moduli

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{\bar{i}} C_n(X) \xrightarrow{\bar{j}} C_n(X, A) \longrightarrow 0$$

dove $A \xrightarrow{i} X$ e $X = (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A)$.

Si ha dunque una successione esatta corta di complessi di \mathbb{Z} -moduli

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & C_{i+1}(A) & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i(A) & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \bar{i} & & \downarrow \bar{i} & & \downarrow \bar{i} & & \\
 \dots & \longrightarrow & C_{i+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i(X) & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(X) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \bar{j} & & \downarrow \bar{j} & & \downarrow \bar{j} & & \\
 \dots & \longrightarrow & C_{i+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & C_i(X, A) & \xrightarrow{\partial_i} & C_{i-1}(X, A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

che induce una successione esatta lunga in omologia

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

dove δ_n è detto morfismo di connessione e, dato $[\alpha] \in H_n(X, A)$, con α n -ciclo relativo, è definito come $\delta_n([\alpha]) = [\partial_n(\alpha)]$.

Osservazione. $H_n(X, A)$ "misura" la differenza tra $H_n(X)$ e $H_n(A)$. In particolare, $H_n(X, A) = 0 \forall n$ se e solo se $i_*: H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ è un isomorfismo per ogni n .

Nel caso dell'omologia ridotta è tutto analogo con la successione esatta corta di complessi che si modifica soltanto al livello -1 :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C_0(A) & \xrightarrow{\bar{i}} & C_0(X) & \xrightarrow{\bar{j}} & C_0(X, A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \tilde{\partial}_0 & & \downarrow \tilde{\partial}_0 & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{id} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & &
 \end{array}$$

Osservazione. Se X è connesso per archi e $A \neq \emptyset$ allora $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X, A)$ per ogni n .

Osservazione. Se X è connesso per archi e $x_0 \in X$ allora $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$ per ogni n .

2.2.3 Approccio Assiomatico all'Omologia

Dopo aver definito i gruppi di omologia sorge spontanea la domanda se questa possa essere l'unica definizione possibile oppure se costruzioni diverse possano portare agli stessi risultati. Per rispondere a tale quesito proveremo adesso a introdurre degli "assiomi" che caratterizzino in modo completo i gruppi di omologia di uno spazio topologico X .

Per prima cosa vogliamo che esista una teoria relativa che includa quella assoluta, e che valga il Teorema della successione esatta lunga in Omologia.

Inoltre vogliamo assiomatizzare l'omologia di un punto (assioma della dimensione) e il comportamento dei gruppi di omologia riguardo alle componenti connesse per archi (assioma delle componenti connesse per archi).

PROPOSIZIONE: Sia $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ partizione di X in componenti connesse per archi. Allora $H_n(X) = \bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$ per ogni n .

Dimostrazione. $\forall \sigma: \Delta^n \rightarrow X$ si ha che $\sigma(\Delta^n) \subseteq X_{\alpha}$ per un qualche α .

Sia z un ciclo su X : chiamando z_{α} la somma dei semplici con immagine in X_{α} abbiamo che $z = \sum_{\alpha} z_{\alpha}$ e che, per ogni α , z_{α} è un ciclo in X_{α} .

Risulta ovvio quindi l'isomorfismo tra $H_n(X)$ e $\bigoplus_{\alpha} H_n(X_{\alpha})$. \square

PROPOSIZIONE: Se X è connesso per archi allora $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ e $\tilde{H}_0(X) = 0$.

Dimostrazione. Poiché abbiamo visto che $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$, è sufficiente dimostrare che $\tilde{H}_0(X) = 0$, ovvero che $\text{Im}(\partial_1) = \text{Ker}(\tilde{\partial}_0)$.

Sia $\sum_i n_i \sigma_i$ tale che $\sum_i n_i = 0$. Ogni $\sigma \in C_0(X)$ è una applicazione da $\Delta^0 = \{\text{pt}\}$ in X ; dunque $\sigma_i(\Delta^0) \in X$. Essendo X connesso per archi, scelto arbitrariamente un $x_0 \in X$, per ogni i esiste un 1-simplesso singolare $\tau_i: \Delta^1 \rightarrow X$ tale che $\tau_i(e_0) = x_0$ e $\tau_i(e_1) = \sigma_i(\Delta^0)$. Ma allora $\partial_1(\sum_i n_i \tau_i) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i x_0 = \sum_i n_i \sigma_i$, ovvero $\text{Ker}(\tilde{\partial}_0) \subseteq \text{Im}(\partial_1)$, che equivale alla tesi. \square

COROLLARIO: $H_0(\{\text{pt}\}) \cong \mathbb{Z}$ e $\tilde{H}_0(\{\text{pt}\}) = 0$.

PROPOSIZIONE: $H_n(\{\text{pt}\}) = 0 \forall n \neq 0$.

Dimostrazione. $\forall n \geq 1$ esiste un unico n -simplesso singolare $\sigma_n: \Delta^n \rightarrow \{\text{pt}\}$ e si ha che

$$\partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \sigma_{n-1} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Dunque il complesso delle catene è della forma

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots$$

da cui si deduce, passando all'omologia, che $H_n(\{\text{pt}\}) = 0 \forall n \geq 1$. \square

Un altro assioma da introdurre è quello di omotopia: mappe omotope tra spazi devono indurre lo stesso morfismo tra le rispettive omologie.

TEOREMA (DI OMOTOPIA): Siano $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ omotope come applicazioni di coppie. Allora per ogni $n \geq 0$ $f_* = g_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.

In particolare, se f è equivalenza di omotopia relativa f_* è isomorfismo.

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo il caso assoluto. Per giungere alla tesi è sufficiente costruire un'omotopia $\{p_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tra f e g , con f, g le applicazioni indotte sui complessi di catene da f e g .

Preso una $F: X \times I \rightarrow Y$ omotopia tra f e g e un n -simplesso singolare $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, possiamo considerare la composizione $F \circ (\sigma, id): \Delta^n \times I \rightarrow Y$.

Costruiamo una triangolazione sull'\$(n+1)\$-prisma \$\Delta^n \times I\$ così definita: ordiniamo innanzitutto i suoi vertici, ponendo i vertici di \$\Delta^n \times \{0\}\$ minori di quelli di \$\Delta^n \times \{1\}\$, e per i vertici di ognuno rispettiamo l'ordinamento di \$\Delta^n\$. Fissiamo poi una orientazione del prisma in modo tale che l'orientazione di bordo indotta su \$\Delta^n \times \{0\}\$ sia quella di \$\Delta^n\$ (di conseguenza l'orientazione su \$\Delta^n \times \{1\}\$ risulterà essere quella opposta).

Utilizzando l'ordinamento globale dei vertici triangoliamo il prisma senza introdurre nuovi vertici induttivamente: supponiamo di aver già triangolato tutte le celle convesse di \$\partial(\Delta^n \times I)\$ (quelle "orizzontali" sono semplici, quelle "verticali" sono dei \$\Delta^{n-1} \times I\$); gli \$(n+1)\$-simplessi della triangolazione sono tutti e soli quelli della forma \$\Delta[v_0, w_1, \dots, w_n]\$ con \$v_0\$ il vertice più piccolo di tutto il prisma e \$w_1, \dots, w_n\$ sono vertici di un \$n\$-simpleso già costruito su \$\partial(\Delta^n \times I)\$.

Possiamo adesso definire l'operatore prisma \$p_n: C_n(X) \to C_{n+1}(Y)\$ come l'applicazione che manda ogni \$\sigma: \Delta^n \to X\$ in \$p_n(\sigma) = \sum_{\tau} \varepsilon(\tau)[F \circ (\sigma, id) \circ \tau]\$ con \$\tau\$ gli \$(n+1)\$-simplessi della triangolazione sul prisma \$\Delta^n \times I\$ ed \$\varepsilon(\tau)\$ fattore di correzione per l'orientazione, ovvero \$\varepsilon(\tau) = 1\$ se e solo se l'orientazione indotta sul prisma da \$\tau\$ (via l'ordinamento dei vertici) coincide con quella già posta sul prisma.

Con questa definizione abbiamo ovviamente che \$\partial_n(p_n(\sigma)) \in C_n(Y)\$. Vediamo adesso che l'operatore prisma soddisfa l'uguaglianza per le omotopie tra complessi:

\$\partial_n(p_n(\sigma))\$ è una somma di tutti gli \$n\$-simplessi (con un fattore di correzione) facce degli \$(n+1)\$-simplessi della triangolazione del prisma, per cui:

- Ogni simpleso "interno" al prisma è faccia di esattamente 2 \$(n+1)\$-simplessi che inducono su di esso orientazioni opposte; dunque l'apporto nella somma di questo pezzo è nullo.
- La parte della sommatoria data dagli \$n\$-simplessi di bordo "orizzontali" (che si riduce ai 2 soli simplessi \$\Delta^n \times \{0\}\$ e \$\Delta^n \times \{1\}\$) dà la quantità \$\bar{f}(\sigma) - \bar{g}(\sigma)\$.
- I simplessi di bordo "verticali", per come si è definita la triangolazione, forniscono la quantità \$-p_{n-1}(\partial_n(\sigma))\$.

Dunque rimettendo tutto assieme si ha l'uguaglianza \$\partial_n p_n = \bar{f} - \bar{g} - p_{n-1} \partial_n\$, che era ciò a cui volevamo arrivare. \$\square\$

COROLLARIO: Se \$X\$ è contrattile \$H_n(X) \cong H_n(\{\text{pt}\}) \forall n\$, e dunque \$\tilde{H}_n(X) = 0 \forall n\$.

2.3 Lezione 12 - 07/11

DEFINIZIONE: Data una tripla \$(X, A, Z)\$, l'applicazione \$i: (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)\$ è un'escissione se \$i_*: H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \to H_n(X, A)\$ è un isomorfismo \$\forall n\$.

Oppure, equivalentemente: dati \$A \subseteq X, B \subseteq X\$, tali che \$X = \mathring{A} \cup \mathring{B}\$, l'applicazione \$i: (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)\$ è una escissione se induce isomorfismi \$i_*\$ per ogni \$n\$.

TEOREMA (DI ESCISSIONE): Siano \$X \supseteq A \supseteq Z\$. Se \$\bar{Z} \subseteq \mathring{A}\$ allora \$i: (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)\$ è una escissione.

Dimostrazione. Rimandiamo a più avanti la dimostrazione del teorema. \$\square\$

2.3.1 Coppie Buone e semplici \mathcal{U} -piccoli

DEFINIZIONE: Una coppia (X, A) si dice buona se A è chiuso in X ed esiste un intorno aperto V di A in X tale che A è un retratto per deformazione di V .

Osservazione. (D^n, S^{n-1}) è una coppia buona, e più in generale ogni CW-coppia è una coppia buona.

PROPOSIZIONE: Sia (X, A) una coppia buona. Sia $q: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ la mappa che collassa A ad un punto. Allora $q_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ è un isomorfismo $\forall n$.

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A), & \xrightarrow{\alpha} & H_n(X, V) & \xleftarrow{\beta} & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{\bar{\beta}} & H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A) \end{array}$$

Le mappe $\alpha, \bar{\alpha}$ sono isomorfismi per via del teorema di omotopia; le mappe $\beta, \bar{\beta}$ sono anch'esse isomorfismi per il teorema di escissione. Inoltre $q_*: H_n(X \setminus A, V \setminus A) \rightarrow H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A)$ è un isomorfismo perché stiamo lavorando soltanto su catene nel complementare di A .

Per commutatività del diagramma dunque sono tutti isomorfismi. \square

COROLLARIO: Sia (X, A) una coppia buona Allora esiste la seguente successione esatta lunga:

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

ESEMPIO: $\tilde{H}_k(D^n) = 0 \forall k$, usando gli assiomi di omotopia e dimensione. (D^n, S^{n-1}) è una coppia buona e $D^n/S^{n-1} \cong S^n$, dunque usando la successione esatta lunga delle coppie buone

$$\dots \longrightarrow \underbrace{\tilde{H}_m(D^n)}_{=0} \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_m(S^n) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{m-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \underbrace{\tilde{H}_{m-1}(D^n)}_{=0} \longrightarrow \dots$$

si ha che δ è un isomorfismo.

Per induzione su n , con passo base $S^0 = \{\pm 1\}$, si ha quindi che

$$\tilde{H}_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Alternativamente, usando la successione esatta lunga della coppia (D^n, S^{n-1}) , si ottiene

$$\tilde{H}_k(D^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Introduciamo adesso degli strumenti utili alla dimostrazione del Teorema di Escissione.
DEFINIZIONE: Sia $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di X . Un n -simplesso singolare si

dice \mathcal{U} -piccolo se $\exists j$ tale che $\sigma(\Delta^n) \subseteq U_j$.

Consideriamo $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ lo \mathbb{Z} -modulo libero generato dagli n -simplessi \mathcal{U} -piccoli.

$\partial_n^{\mathcal{U}} = \partial_n|_{C_n^{\mathcal{U}}(X)}$ è a valori in $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$, quindi $\{(C_n^{\mathcal{U}}(X), \partial_n^{\mathcal{U}})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è un complesso.

TEOREMA: Per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X , l'inclusione $i: C_n^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_n(X)$ induce un isomorfismo $i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow H_n(X)$ per ogni n .

Dimostrazione. Costruiamo un morfismo di complessi $s = \{s_n: C_n(X) \longrightarrow C_n(X)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tale che sia omotopo all'identità, che rispetti le coppie (ovvero che possa essere utilizzato anche nel caso relativo), che $\forall c \in C_n(X) \exists r > 0 : s^r(c) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ e tale che se $c \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ allora $s(c) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Definiamo $s_n(\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X)$ per ogni generatore di $C_n(X)$ nel modo seguente: consideriamo Δ^n come complesso simpliciale finito e facciamone la suddivisione baricentrica $(\Delta^n)^{(1)}$. Tale complesso viene globalmente ordinato tramite l'ordinamento dei vertici induttivamente ponendo $\forall k$ i baricentri dei $(k+1)$ -simplessi maggiori di tutti i baricentri dei simplessi del k -scheletro.

Ogni n -faccia τ della suddivisione baricentrica ha un proprio ordinamento indotto dall'ordinamento globale, che può coincidere o meno con l'ordinamento di Δ^n ; in tal senso definiamo il fattore di correzione $\varepsilon(\tau) = \pm 1$.

Definiamo quindi $s_n(\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X) = \sum_{\tau \in \Gamma} \varepsilon(\tau)(\sigma \circ \tau)$ con Γ l'insieme degli n -simplessi del complesso $(\Delta^n)^{(1)}$.

Verifichiamo che con tale definizione il morfismo s sia omotopo all'identità costruendo l'omotopia T , ovvero delle $T_n: C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$ tali che $id_{C_n(X)} - s_n = \partial_{n+1}T_n + T_{n-1}\partial_n$.

Prendiamo $\Delta^n \times I$ in cui $\Delta^n \times \{1\}$ è suddiviso come $(\Delta^n)^{(1)}$. Esso è un complesso di celle convesse. Ordiniamone i vertici ponendo i vertici della suddivisione $\Delta^n \times \{1\}$ maggiori di quelli di $\Delta^n \times \{0\}$. Usando questo ordinamento globale, triangoliamo in modo sistematico $\Delta^n \times I$ senza aggiungere nuovi vertici induttivamente considerando tutti i coni finiti di centro il baricentro di $\Delta^n \times \{1\}$ e base tutti i simplessi (già suddivisi) di $(\Delta^n \times \{0\}) \cup (\partial\Delta^n \times I)$.

A questo punto, posta $p: \Delta^n \times I \longrightarrow \Delta^n$ la proiezione sulla prima componente, definiamo, per ogni n -simpleso singolare σ , $C_{n+1}(X) \ni T_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Lambda} \varepsilon(\tau)(\sigma \circ p \circ \tau)$, dove Λ è l'insieme degli $(n+1)$ -simplessi della triangolazione del complesso $\Delta^n \times I$ e $\varepsilon(\tau)$ è il fattore di correzione per l'orientazione avendo fissato su $\Delta^n \times I$ l'orientazione che su $\Delta^n \times \{0\}$ coincida con quella di Δ^n .

Come nella dimostrazione del teorema di omotopia, $\partial_{n+1}T_n(\sigma)$ non fornisce contributi per le facce interne, mentre fornisce $id - s_n$ sulle facce "orizzontali" e $-T_{n-1}\partial_n$ sulle facce verticali.

Dunque abbiamo dimostrato che $s \sim id$ tramite T .

Vediamo adesso che $\forall c \in C_n(X) \exists r > 0$ tale che $s^r(c) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Poiché c è una combinazione lineare finita di simplessi singolari, è sufficiente provarlo sui $\sigma: \Delta^n \longrightarrow X$.

\mathcal{U} è un ricoprimento aperto di X , dunque $\sigma^{-1}(\mathcal{U})$ è un ricoprimento aperto di Δ^n (che è metrico compatto). Preso ϵ il numero di Lebesgue del ricoprimento, si ha che $\exists r > 0$ tale che ogni simpleso di $(\Delta^n)^{(r)}$ ha diametro minore di ϵ , e di conseguenza $s^r(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Con le stesse argomentazioni vediamo banalmente che se $c \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ allora $s(c) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

A questo punto siamo pronti a dimostrare iniettività e surgettività di i_* .

i_* è surgettiva: dato $z \in Z_n(X, A)$, esiste un $r > 0$ tale che $s^r(z) \in Z_n^{\mathcal{U}}(X, A)$, dunque $[z] = [s^r(z)]$.

i_* è iniettiva: dato $[z] = 0 \in H_n(X, A)$, esiste un $r > 0$ tale che $s^r(z) \in B_n^{\mathcal{U}}(X, A)$, dunque $[0] = [s^r(z)]$ in $H_n^{\mathcal{U}}(X)$. \square

2.4 Lezione 13 - 10/11

Riprendiamo il Teorema di Escissione ed andiamo a dimostrarlo utilizzando quanto appena fatto:

TEOREMA (DI ESCISSIONE): Siano $X \supseteq A \supseteq Z$. Se $\bar{Z} \subseteq \mathring{A}$ allora $i: (X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ è una escissione.

Dimostrazione. Scegliamo $\mathcal{U} = \{X \setminus \bar{Z}, \mathring{A}\}$.

Vediamo che i_* è surgettiva: sia $\alpha \in H_n(X, A)$, ovvero $\alpha = [z]$ con $z \in Z_n(X, A)$. Per il teorema degli \mathcal{U} -piccoli possiamo supporre che z sia \mathcal{U} -piccolo. Ogni simpleso con immagine non contenuta in $X \setminus \bar{Z}$ ha immagine in $\mathring{A} \subseteq A$. Quindi $z = z_1 + z_2$ con z_1 ad immagine in $X \setminus \bar{Z}$ e z_2 ad immagine in \mathring{A} . Ma allora $\alpha = [z_1] \pmod{A}$.

i_* è iniettiva: sia $z \in Z_n(X \setminus Z, A \setminus Z)$ tale che $[z] = 0$ in $H_n(X, A)$. Dunque $z = \partial\beta + \gamma$ con $\beta \in C_{n+1}(X)$ e $\gamma \in C_n(A)$. Come sopra, posso supporre che β sia \mathcal{U} -piccolo, e quindi scriverlo come $\beta = \beta_1 + \beta_2$, il primo ad immagine in $X \setminus \bar{Z}$, il secondo ad immagine in \mathring{A} . Dunque $z - \partial\beta_1 = \partial\beta_2 + \gamma$, ed ogni membro dell'uguaglianza è a valori in uno dei due aperti di \mathcal{U} , ovvero hanno entrambi valori nell'intersezione $A \setminus Z$. Ma allora $[z] = [\partial\beta_1] = 0$ in $H_n(X \setminus Z, A \setminus Z)$. \square

Osservazione. Assumendo soltanto che valgano gli assiomi di funtorialità, successione esatta lunga, omotopia, componenti connesse per archi, dimensione ed escissione, si ha che il calcolo di $H_k(D^n)$, $H_k(D^n, S^{n-1})$, $H_k(S^n)$ di basa soltanto su questi e non dipende dalla definizione di omologia che stiamo usando.

Osservazione. Segue che S^n è omeomorfa a S^m se e solo se $n = m$.

Un altro metodo rispetto a quello già visto per calcolare gli $H_k(S^n)$ utilizza il seguente risultato:

2.4.1 Successione di Mayer-Vietoris

Sia $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Indichiamo con $C_n(A + B)$ lo \mathbb{Z} -modulo libero generato dall'unione degli n -simplessi singolari che hanno immagine in A o in B .

L'operatore $\partial' = \partial|_{C_n(A+B)}$ è a valori in $C_{n-1}(A + B)$, dunque si può considerare il complesso $\{(C_n(A + B), \partial'_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

L'inclusione $C_n(A + B) \hookrightarrow C_n(X)$ induce isomorfismi in omologia grazie al teorema sugli \mathcal{U} -piccoli, considerando $\mathcal{U} = \{\mathring{A}, \mathring{B}\}$.

Si ha quindi che la successione esatta corta di complessi

$$0 \longrightarrow C_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{\psi} C_n(A + B) \longrightarrow 0$$

dove $\varphi(c) = (c, -c)$ e $\psi(c_1, c_2) = c_1 + c_2$, induce una successione esatta lunga in omologia

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

con l'operatore di bordo δ definito come $\delta\alpha = [\partial x] = [-\partial y]$, dove $\alpha = [z] = [x + y]$ con $x \in C_n(A)$ e $y \in C_n(B)$.

PROPOSIZIONE: Siano $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti. Se $\varphi: U \rightarrow W$ è un omeomorfismo allora $n = m$.

Dimostrazione. Sia $x \in U$.

Usando la successione esatta della coppia si ha $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ e per omotopia $\tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{m-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

D'altra parte per escissione $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong H_k(U, U \setminus \{x\})$, dunque se φ è un omeomorfismo allora per funtorialità $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(W, W \setminus \{\varphi(x)\})$ e dunque $n = m$. \square

2.4.2 Teoria del Grado

DEFINIZIONE: Data $f: S^n \rightarrow S^n$, si definisce grado di f $\deg(f) := d$ dove $f_*(1) = d \in \mathbb{Z}$.

Osservazione. $\deg(id) = 1$.

Osservazione. Se f e g sono omotope allora $\deg(f) = \deg(g)$.

Osservazione. $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

Osservazione. Se f non è surgettiva allora $\deg(f) = 0$.

Osservazione. Se f è un omeomorfismo allora $\deg(f) = \pm 1$.

DEFINIZIONE: Una $f: S^n \rightarrow S^n$ si dice buona se esiste $y \in S^n$ tale che $f^{-1}(y) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ ed esiste un sistema di intorni aperti disgiunti $U_i \ni x_i$ ed esiste un intorno aperto V di y tale che $f|_{U_i}: U_i \rightarrow V$ è un omeomorfismo.

PROPOSIZIONE: Ogni $f: S^n \rightarrow S^n$ è omotopa ad una g buona.

Per calcolare il grado di una funzione buona consideriamo le notazioni della definizione e vediamo che

$H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) \cong \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$ per escissione e componenti connesse per archi.

Inoltre si ha, per ogni i , $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \cong H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ per omotopia (e analogamente $H_n(V, V \setminus \{y\})$), e dunque $f_*: \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$ può essere vista in componenti $f_{*i}: H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \cong \mathbb{Z} \rightarrow H_n(V, V \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$. Per una delle osservazioni precedenti, $d_i = f_{*i}(1) = \pm 1 \forall i$.

Quindi si ha che $d = \deg(f) = \sum_{i=1}^k d_i$.

Osservazione. Sia $r: S^n \rightarrow S^n$ restrizione di una riflessione di \mathbb{R}^{n+1} lungo un sottospazio di codimensione 1. Allora $\deg(r) = -1$.

2.5.1 Omologia Semplice

Sia X un Δ -complesso, ovvero sia $\mathcal{K} = \left\{ \Delta^{n_\sigma} \xrightarrow{\sigma} X \right\}_{\sigma \in \Lambda}$ una struttura di Δ -complesso su X .

$\forall n \geq 0$ consideriamo $\mathcal{K}(n) = \{(\Delta^{n_\sigma}, \sigma) \in \mathcal{K} \mid n_\sigma = n\}$ e l' m -scheletro su X , definito come $X^m = \bigcup_{n=0}^m \{\sigma(\Delta^{n_\sigma}) \subseteq X \mid (\Delta^{n_\sigma}, \sigma) \in \mathcal{K}(n)\}$.

Sia $C_n^\Delta(X)$ lo \mathbb{Z} -modulo generato da $\mathcal{K}(n)$, detto lo \mathbb{Z} -modulo delle n -catene simpliciali di X . L'applicazione $\partial_n^\Delta = \partial_n|_{C_n^\Delta(X)}: C_n^\Delta(X) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$ è ben definita e rende $\{(C_n^\Delta(X), \partial_n^\Delta)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un complesso di \mathbb{Z} -moduli liberi.

Possiamo dunque costruirne l'omologia $H_n^\Delta(X)$ detta n -omologia simpliciale del complesso.

In modo analogo possiamo trattare il caso relativo, per cui se (X, A) è una coppia di Δ -complessi, si definisce $C_n^\Delta(X, A) := C_n^\Delta(X)/C_n^\Delta(A)$ e, dopo aver verificato che la mappa ∂_n^Δ passa al quoziente si può considerare l'omologia simpliciale della coppia $H_n^\Delta(X, A)$.

TEOREMA: Date le inclusioni $C_n^\Delta(X) \hookrightarrow C_n(X)$, i morfismi indotti $i_n: H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$ sono isomorfismi $\forall n$.

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema abbiamo bisogno di qualche risultato preliminare. \square

Osservazione. Se (X, A) è una coppia di Δ -complessi, allora l'omologia simpliciale verifica la successione esatta della coppia (e vale anche per le triple). Vale anche l'assioma della dimensione. Infatti:

$H_k^\Delta(\Delta^0) = 0 \forall k \neq 0$, mentre per $k = 0$:

$$\begin{array}{ccc} H_0^\Delta(\Delta^0) & \xrightarrow{i_0} & H_0(\Delta^0) \\ \left[\Delta^0 \xrightarrow{id} \Delta^0 \right] & \mapsto & \left[\Delta^0 \xrightarrow{id} \Delta^0 \right] \end{array}$$

che sono entrambi generatori dei rispettivi gruppi di omologia (entrambi isomorfi a \mathbb{Z}). Dunque i_0 è isomorfismo.

Dimostriamo adesso che il teorema vale per $(X, A) = (D^n, S^{n-1})$ per ogni $n \geq 1$. $(D^n, S^{n-1}) \cong (\Delta^n, \partial\Delta^n)$, e poiché $C_k^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) = 0$ per $k \neq n$, si ha $H_k^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) = 0$ se $k \neq n$ (e dunque $H_k^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong H_k(D^n, S^{n-1}) = 0$ e i_k è banalmente isomorfismo). Per $k = n$ invece $C_n^\Delta(\Delta^n, \partial\Delta^n) = \{k \cdot id \mid k \in \mathbb{Z}, id: \Delta^n \rightarrow \Delta^n\} \cong \mathbb{Z}$, e poiché $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ occorre dimostrare che $\left[D^n \xrightarrow{id} D^n \right]$ è generatore di $H_n(D^n, S^{n-1})$.

Proviamolo per induzione su $n \geq 0$. Il passo base $n = 0$ è stato già fatto sopra; per il passo induttivo invece consideriamo $\Lambda^n := \partial\Delta^n \setminus \{\text{parte interna di una } (n-1)\text{-faccia}\}$. Dico che

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow[\cong]{\delta_1} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda^n) \xleftarrow[\cong]{\delta_2} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

dove Δ^{n-1} è stato identificato con la $(n-1)$ -faccia tolta da Δ^n per la definizione di Λ^n .

Per la definizione di δ_1 consideriamo la terna $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda^n)$ e la successione esatta lunga in omologia indotta

$$\dots \rightarrow \underbrace{H_n(\Delta^n, \Lambda^n)}_{\cong H_n(\Lambda^n, \Lambda^n)=0} \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\delta_1 := \delta} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda^n) \rightarrow \underbrace{H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda^n)}_{\cong H_{n-1}(\Lambda^n, \Lambda^n)=0} \rightarrow \dots$$

dove $H_n(\Delta^n, \Lambda^n) \cong H_n(\Lambda^n, \Lambda^n)$ perché Δ^n si retrae per deformazione su Λ^n .

Per la definizione di δ_2 consideriamo le coppie buone $(\partial\Delta^n, \Lambda^n)$ e $(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$. Per un risultato precedente si hanno gli isomorfismi $q_{1*}: H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda^n) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n/\Lambda^n)$ e $q_{2*}: H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1})$.

Poichè per la definizione di Λ^n si ha l'uguaglianza insiemistica $\partial\Delta^n/\Lambda^n = \Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}$, posso definire $\delta_2 := (q_{1*})^{-1} \circ q_{2*}$ che è un isomorfismo.

Poiché banalmente $\delta_2^{-1}(\delta_1(id_{\Delta^n})) = id_{\Delta^{n-1}}$ a meno di un segno dovuto alla scelta della $(n-1)$ -faccia, si chiude l'induzione.

LEMMA: Sia $\{X_\alpha, x_\alpha\}_\alpha$ una famiglia di spazi puntati e consideriamo il wedge degli X_α definito come $\bigvee_\alpha X_\alpha := (\bigsqcup_\alpha X_\alpha)/(\bigsqcup_\alpha x_\alpha)$. Supponiamo che ogni coppia (X_α, x_α) sia buona. Allora $\bigoplus_\alpha i_{\alpha*}: \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \rightarrow \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ è un isomorfismo per ogni n .

Dimostrazione. Per ogni n si ha $\tilde{H}_n(X_\alpha) \cong H_n(X_\alpha, x_\alpha)$. Analogamente $\tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha) \cong H_n(\bigvee_\alpha X_\alpha, x_0)$ con $x_0 \in \bigvee_\alpha X_\alpha$. A questo punto è sufficiente applicare la proposizione sulle coppie buone alla coppia $(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha x_\alpha)$.

Infatti $\bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha, x_\alpha) \cong H_n(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha x_\alpha) \cong \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$, dove il secondo isomorfismo è dovuto all'assioma delle componenti connesse e l'ultimo alla proposizione sulle coppie buone. \square

COROLLARIO: Se X è un CW-complesso, allora $X^k/X^{k-1} \cong \bigvee_\alpha S_\alpha^k$.

Quindi $\tilde{H}_n(X^k/X^{k-1}) = 0$ se $n \neq k$ e $\tilde{H}_k(X^k/X^{k-1}) \cong \langle e_\alpha^k \mid e_\alpha^k \in X^k \setminus X^{k-1} \rangle$ lo \mathbb{Z} -modulo libero generato dalle k -celle.

Siamo pronti adesso per dimostrare completamente il teorema di isomorfismo tra omologia simpliciale e singolare.

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo il teorema nel caso particolare in cui $A = \emptyset$ e $X = X^h$ per un certo h , ovvero X di dimensione finita. Consideriamo $\forall n, k$ il diagramma (estratto dalla successione esatta lunga in omologia per le coppie)

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \rightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ \downarrow 1 & & \downarrow 2 & & \downarrow 5 & & \downarrow 3 & & \downarrow 4 \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_n(X^{k-1}) & \rightarrow & H_n(X^k) & \rightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}) \end{array}$$

Le frecce 1 e 3 sono isomorfismi grazie al lemma precedente e al passo base già dimostrato per (D^k, S^{k-1}) .

Le frecce 2, 4 e 5 sono isomorfismi per induzione su k : il passo base risulta da una verifica diretta; nel passo induttivo, supponendo che valgano gli isomorfismi per ogni n per $k-1$ (e dunque nel diagramma che 2 e 4 siano isomorfismi), si applica il lemma dei cinque e dunque anche la freccia 5 è un isomorfismo, che conclude la dimostrazione poiché X è di dimensione finita.

Dimostriamo adesso il teorema nel caso intermedio in cui $A = \emptyset$ e X arbitrario.

$i_n: H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$ è surgettiva: preso un $\alpha \in H_n(X)$, $\alpha = [z]$, l'immagine di z è compatta in X , e dunque è contenuto in un X^k per un certo k . A questo punto si conclude applicando la dimostrazione del caso particolare.

i_n è iniettiva: sia $\alpha \in H_n^\Delta(X)$, $\alpha = [z]$, tale che $i_n(\alpha) = 0$. Allora esiste $(n+1)$ -catena c tale che $\partial c = z$. L'immagine di c è compatta in X , dunque contenuta in uno scheletro di dimensione finita. Ma allora possiamo utilizzare la dimostrazione del caso particolare per vedere che z è un bordo simpliciale.

Concludiamo infine la dimostrazione nel caso generale di una coppia (X, A) arbitraria.

Considerando la successione esatta lunga per la coppia e il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^\Delta(A) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(A) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X) \\ \downarrow 1 & & \downarrow 2 & & \downarrow 5 & & \downarrow 3 & & \downarrow 4 \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}$$

si ha che le frecce 1, 2, 3 e 4 sono isomorfismi perché rientrano nel caso assoluto. Quindi per il lemma dei cinque anche la freccia centrale è un isomorfismo. \square

Osservazione. A meno di isomorfismo $H_n^\Delta(X, A)$ dipende soltanto dalla coppia (X, A) ; inoltre se (X, A) è un Δ -complesso di dimensione finita (ovvero $X = X^n$ per un certo n) allora $H_k(X, A) = 0$ se $k > n$. Infine se (X, A) è un Δ -complesso finito allora $H_k(X, A)$ è calcolabile $\forall k$.

2.6 Lezione 15 - 17/11

2.6.1 Omologia Cellulare

Generalizziamo la definizione dell'omologia simpliciale ad ogni CW-complesso in modo tale che tutto dipenda solamente dagli assiomi.

Per come abbiamo visto, nel caso di Δ -complessi $C_n^\Delta(X)$ può essere identificato con $H_n(X^n, X^{n-1}) \cong \tilde{H}_n(X^n/X^{n-1}) \cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$.

Dunque $\partial_n^\Delta: C_n^\Delta(X) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$ può essere rimontata come morfismo $d_n: H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ in modo che il complesso $\{(H_n(X^n, X^{n-1}), d_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ abbia omologia $H_m^\Delta(X)$.

In generale, preso un CW-complesso X qualsiasi e considerate le coppie (X^n, X^{n-1}) e (X^{n-1}, X^{n-2}) possiamo definire la mappa d_n come la composizione

$$\begin{array}{ccc} H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(X^{n-1}) \\ & \searrow d_n & \downarrow \bar{j}_{n-1} \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \end{array}$$

dove δ_k è l'operatore di bordo della successione esatta lunga in omologia della coppia e \bar{j}_k è l'applicazione indotta dall'inclusione $X^k \xrightarrow{j} (X^k, X^{k-1})$. Dunque dato un qualsiasi CW-complesso ha senso definire il complesso di moduli $\{(H_n(X^n, X^{n-1}), d_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Cerchiamo adesso di caratterizzare le applicazioni d_n completamente.

Per $n = 1$ è semplice perché $d_1: H_1(X^1, X^0) \rightarrow H_0(X^0)$ e dunque $d_1 = \partial_1^\Delta$.

Per $n > 1$, essendo $H_n(X^n, X^{n-1})$ generato dalle n -celle (aperte) $\{e_\alpha^n\}_\alpha$ di X , si ha che $d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta a_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$ a supporto finito. Quindi per capire come è fatta d_n cerchiamo di caratterizzare gli $a_{\alpha\beta}$.

$\overline{e_\alpha^n} \subseteq X$ è compatto, quindi interseca un numero finito di $\{e_\beta^{n-1}\}_\beta$. Tale insieme finito di indici contiene il supporto della combinazione lineare di $d_n(e_\alpha^n)$.

Scelti un α e un β , la cella $e_\alpha^n = (D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1})$ ha una funzione di attaccamento $f_\alpha: S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Definiamo la funzione $g_{\alpha\beta}$

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ S_\alpha^{n-1} & \xrightarrow{f_\alpha} & X^{n-1} & \xrightarrow{\pi} & X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}) \cong S_\beta^{n-1} \end{array}$$

PROPOSIZIONE: Sia X un CW-complesso. $\forall e_\alpha^n \in X^n \setminus X^{n-1}$ si ha che $d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta a_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$ con $a_{\alpha\beta} = \deg(g_{\alpha\beta})$.

Dimostrazione. Data una n -cella $e_\alpha^n = (D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1})$, la relativa funzione di attaccamento $f_\alpha: S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ e la funzione caratteristica $\phi_\alpha: D_\alpha^n \rightarrow X^n$ si ha:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) & \xrightarrow[\cong]{\delta_n} & \tilde{H}_{n-1}(S_\alpha^{n-1}) & \xrightarrow{g_{\alpha\beta*}} & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\ \downarrow \phi_{\alpha*} & & \downarrow f_{\alpha*} & & \uparrow q_{\beta*} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\delta_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \searrow d_n & \downarrow \tilde{j}_{n-1} & & \downarrow \cong \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}) \end{array}$$

in cui $q: X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ proiezione al quoziente, $q_\beta: X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}) \cong S_\beta^{n-1}$ collassa il complementare della cella e_β^{n-1} , mentre $g_{\alpha\beta} = q_\beta \circ q \circ f_\alpha$ è la stessa applicazione definita sopra.

Grazie al fatto che tutti i quadrati commutano si giunge facilmente alla tesi. \square

COROLLARIO: Se X è un Δ -complesso allora $\partial_n^\Delta = d_n$ per ogni n .

Riprendendo il concetto di CW-complesso $K(G, 1)$, è ben definita l'omologia del gruppo G :

$H_n(G) := H_n(K(G, 1))$, essendo il $K(G, 1)$ unico a meno di omotopia. Tra gli spazi $K(G, 1)$ c'è anche il Δ -complesso canonico $B(G)$ costruito in precedenza, e si ha $H_n(K(G, 1)) \cong H_n^{CW}(K(G, 1)) \cong H_n^\Delta(B(G))$.

Tutto questo dipende solamente dagli assiomi.

2.6.2 Esempi di Calcolo di Omologia

ESEMPIO: Consideriamo $X = \Sigma_g$ la superficie di genere g con la struttura di CW-complesso. Abbiamo che X^0 è costituito da un solo punto, $X^1 \setminus X^0$ è formato da $2g$ segmenti, $X^2 \setminus X^1$ ha una sola cella e non ci sono n -celle per $n > 2$. Dunque calcolando

l'omologia di Σ_g attraverso l'omologia cellulare si trova che $H_0(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, $H_2(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$ e gli altri gruppi di omologia sono tutti banali.

Osservazione. Se $g \neq g'$ allora Σ_g non è omeomorfo a $\Sigma_{g'}$.

ESEMPIO: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, visto come CW-complesso, ha 1 punto, 1 segmento e una 2-cella. Dal complesso delle catene si ha

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{d_2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{d_1} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & A & \longmapsto & 2a \\ & & & & & & a \longmapsto 0 \end{array}$$

e quindi $H_0(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $H_2(\mathbb{P}^2) = 0$.

Come per i tori (che si possono "incollare" per creare le Σ_g), possiamo considerare l'incollamento di k spazi proiettivi $\underbrace{\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2}_{k \text{ volte}} =: U_k$.

Si dimostra che $H_0(U_k) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(U_k) \cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $H_n(U_k) = 0$ per $n \geq 2$.

Dunque U_k e $U_{k'}$ non sono omeomorfi e neanche U_k con Σ_g (per ogni k per ogni g). Abbastanza sorprendentemente invece si ha che $\Sigma_1 \# \mathbb{P}^2 \cong U_3$.

ESEMPIO: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ può essere visto induttivamente come CW-complesso, poiché, per ogni n , ∂D^{n+1} riveste doppiamente \mathbb{P}^n . Infatti per definire il CW-complesso \mathbb{P}^n a partire da \mathbb{P}^{n-1} basta aggiungere una n -cella la cui funzione di attaccamento sia proprio il rivestimento. In questo modo abbiamo una k -cella per ogni $k \leq n$. Per calcolare la mappa di bordo d_k calcoliamo il grado della mappa $g: S^{k-1} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{P}^{k-1}/\mathbb{P}^{k-2} \cong S^{k-1}$, dove f è il rivestimento e q è la proiezione al quoziente. L'applicazione g ristretta ad ogni componente connessa di $S^{k-1} \setminus S^{k-2}$ è un omeomorfismo, e su una si comporta come l'identità mentre sull'altra come la mappa antipodale. Dunque $\deg(g) = 1 + (-1)^k$.

Scriviamo quindi i complessi di catene cellulari per $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \text{ pari}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

da cui

$$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } k = 0 \text{ o } k = n \text{ con } n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{per } k \text{ dispari, } 0 < k < n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ESEMPIO: Nel caso di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si hanno celle soltanto sulle dimensioni pari. Tutte le argomentazioni del caso reale però continuano a valere, per cui si ha

$$H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } k \text{ pari, } 0 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2.7 Lezione 16 - 21/11

ESEMPIO: $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ è un $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$, e in particolare $H_q(\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ per ogni q dispari. Dunque ha infiniti gruppi di omologia non banali.

Consideriamo $\forall m \geq 2$ l'azione di $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ su S^∞ vista come $S^1 \subseteq S^3 \subseteq S^5 \subseteq \dots \subseteq S^{2n-1} \subseteq \dots \subseteq S^\infty$ con la struttura complessa:

$$[i] \cdot (z_1, z_3, z_5, \dots) \mapsto e^{\frac{2\pi i}{m}} (z_1, z_3, z_5, \dots)$$

Per costruzione si ha che $Y_\infty := S^\infty / \sim_m$ è un $K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 1)$. Definendo $Y_{2n-1} := S^{2n-1} / \sim_m$ per ogni n si ottiene

$$H_k(Y_{2n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{per } k = 0 \text{ e } k = 2n - 1 \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \text{per } k \text{ dispari, } 0 < k < 2n - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da cui al limite $H_q(Y_\infty) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ per ogni q dispari.

COROLLARIO: $\forall m \geq 2$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ non ammette alcun $K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 1)$ di dimensione finita.

COROLLARIO: Se X è un CW-complesso tale che $\pi_1(X)$ ha elementi di torsione allora $K(\pi_1(X), 1)$ non può avere dimensione finita.

Osservazione. A proposito delle ipotesi sul Teorema di Whitehead, avevamo visto che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e $S^2 \times \mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ hanno tutti i gruppi fondamentali isomorfi. I due spazi però non sono omotopicamente equivalenti avendo omologie non isomorfe.

2.7.1 Coefficienti per l'Omologia

Fino ad ora abbiamo sempre costruito i moduli su \mathbb{Z} , ma fin dall'inizio possiamo sostituire \mathbb{Z} con un anello commutativo con unità R .

In questo modo definiamo l' R -modulo delle n -catene per la coppia (X, A) usando la notazione $C_n(X, A; R)$, da cui passando all'omologia si definisce per ogni n $H_n(X, A; R)$ come R -modulo.

In questa accezione generale l'assioma della dimensione si traduce in

$$H_n(\{\text{pt}\}; R) = \begin{cases} R & \text{per } n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre $H_n(D^n, \partial D^n; R) \cong \tilde{H}_n(S^n; R) \cong R$, da cui per $n > 0$ data una $f: S^n \rightarrow S^n$ di grado m si ha che $f_*: \tilde{H}_n(S^n; R) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n; R)$ è la moltiplicazione per m .

ESEMPIO:

$$H_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); R) = \begin{cases} R & \text{per } q = 0 \text{ o } q = n \text{ con } n \text{ dispari} \\ R_2 = \text{Ker}(x \mapsto 2x) & \text{per } q \text{ pari, } 1 \leq q \leq n \\ R/2R & \text{per } q \text{ dispari, } 0 < q < n \\ 0 & \text{per } q > n \end{cases}$$

Per esempio nel caso $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si ha che $H_q(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ per ogni $q \leq n$.

Generalizzando ancora di più, sia G un R -modulo. Definiamo il complesso di n -catene per la coppia (X, A) a coefficienti in G come $C_n(X, A; R) \otimes_R G$ che forma, assieme alle

mappe $\partial_n \otimes id$ un complesso di catene aventi omologia $H_n(X, A; G)$.

PROPOSIZIONE: Sia G un R -modulo e (X, A) una coppia di spazi topologici. Allora $\forall n$ esiste un omomorfismo naturale $\alpha: H_n(X, A; R) \otimes_R G \rightarrow H_n(X, A; G)$ tale che $\alpha([z] \otimes g) = [gz]$.

Inoltre, sotto ulteriori ipotesi su R e G (ad esempio se R è un PID e G è libero), α è un isomorfismo.

ESEMPIO: Poniamo $R = \mathbb{Z}$. Sia X un CW-complesso finito di dimensione n . Dunque $H_k(X) = 0 \forall k > n$; per ogni $k \leq n$, $H_k(X)$ è uno \mathbb{Z} -modulo finitamente generato, quindi $H_k(X) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus T_k$ con T_k gruppo finito (la parte di torsione) e $\text{rank}(H_k(X)) = b_k$. Quindi, tensorizzando (su \mathbb{Z}) i gruppi di omologia per \mathbb{Q} si ottiene $H_k(X; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{b_k}$ e $b_k = \dim_{\mathbb{Q}}(H_k(X; \mathbb{Q}))$.

ESEMPIO: Sia $\pi: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow S^2 \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R})/\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la proiezione al quoziente. Possiamo chiederci se essa sia omotopa all'applicazione costante o meno.

Lavorando a coefficienti in \mathbb{Z} e studiando π_* sull'omologia ridotta abbiamo che $\pi_* = 0$ ad ogni livello dell'omologia, dato che i gruppi di omologia ridotta non banali per $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e S^2 appaiono in dimensioni diverse, e dunque non possiamo concludere niente. Lavorando invece a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ abbiamo $H_2(\mathbb{P}^2) \cong H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e considerando la successione esatta lunga della coppia (per l'omologia ridotta)

$$\dots \longrightarrow 0 = \tilde{H}_2(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \tilde{H}_2(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\pi_*} \tilde{H}_2(S^2) \longrightarrow \dots$$

si ha che π_* è iniettiva, dunque un isomorfismo. Allora possiamo concludere che π non è omotopa all'applicazione costante.

2.7.2 Caratteristica di Eulero-Poincaré

DEFINIZIONE: Dato un CW-complesso X finito di dimensione n e fissato un campo \mathbb{F} abbiamo che gli \mathbb{F} -moduli (spazi vettoriali) $H_k(X; \mathbb{F})$ sono nulli per $k > n$.

Inoltre per ogni $k \leq n$ si ha che $\dim_{\mathbb{F}}(H_k(X; \mathbb{F}))$ è un numero finito.

Possiamo quindi definire la caratteristica di Eulero-Poincaré di X su \mathbb{F} come

$$\chi_{\mathbb{F}}(X) := \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim_{\mathbb{F}}(H_j(X; \mathbb{F}))$$

TEOREMA: Dato un CW-complesso finito X , chiamando $c_j := |\{j\text{-celle di } X\}|$, per ogni campo \mathbb{F} si ha $\chi_{\mathbb{F}}(X) = \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j$.

Dunque la caratteristica di Eulero-Poincaré non dipende dalla scelta del campo \mathbb{F} .

Dimostrazione. Consideriamo il complesso delle catene per l'omologia cellulare

$$0 \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}; \mathbb{F}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}; \mathbb{F}) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(X^0; \mathbb{F}) \xrightarrow{d_0} 0$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \mathbb{F}^{c_n} & & \mathbb{F}^{c_0} \end{array}$$

Si ha $\dim_{\mathbb{F}}(H_j(X; \mathbb{F})) = \dim_{\mathbb{F}}(\text{Ker}(d_j)) - \dim_{\mathbb{F}}(\text{Im}(d_{j+1}))$

Dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\mathbb{F}}(X) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j (\dim_{\mathbb{F}}(\text{Ker}(d_j)) - \dim_{\mathbb{F}}(\text{Im}(d_{j+1}))) = \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim_{\mathbb{F}}(\text{Ker}(d_j)) + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} \dim_{\mathbb{F}}(\text{Im}(d_{j+1}))\end{aligned}$$

Ma poiché $c_j = \dim_{\mathbb{F}}(\text{Ker}(d_j)) + \dim_{\mathbb{F}}(\text{Im}(d_j))$,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{\mathbb{F}}(X) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim_{\mathbb{F}}(\text{Ker}(d_j)) + \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j \dim_{\mathbb{F}}(\text{Im}(d_j)) = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^j c_j + \dim_{\mathbb{F}}(\text{Ker}(d_0)) + (-1)^{n+1} \dim_{\mathbb{F}}(\text{Im}(d_{n+1})) = \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j\end{aligned}$$

□

Osservazione. Abbiamo dimostrato che la caratteristica di Eulero non dipende da \mathbb{F} , ma i singoli numeri di Betti (ovvero $\dim_{\mathbb{F}}(H_j(X; \mathbb{F}))$) dipendono da \mathbb{F} .

COROLLARIO: Sia P un poliedro omeomorfo a S^2 . Allora $\mathcal{X}(P) = V - E + F = 2$ con V = vertici, E = lati, F = facce.

Osservazione. $\mathcal{X}(\Sigma_g) = 2 - 2g$.

COROLLARIO: Dato un CW-complesso X finito, chiamando b_j il rango della parte intera di $H_j(X; \mathbb{Z})$, ovvero $H_j(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_j} \oplus T_j$, si ha che $\mathcal{X}(X) = \sum_{j=0}^n (-1)^j b_j$.

PROPOSIZIONE: Per ogni coppia (X, A) di CW-complessi finiti, si ha $\mathcal{X}(X, A) = \mathcal{X}(X) - \mathcal{X}(A)$.

2.8 Lezione 17 - 24/11

PROPOSIZIONE: Siano X, X_1, X_2, Y dei CW-complessi finiti tali che $X = X_1 \cup X_2$ e $Y = X_1 \cap X_2$. Allora vale $\mathcal{X}(X) = \mathcal{X}(X_1) + \mathcal{X}(X_2) - \mathcal{X}(Y)$.

PROPOSIZIONE: Siano X, Y CW-complessi finiti. Allora $\mathcal{X}(X \times Y) = \mathcal{X}(X) \cdot \mathcal{X}(Y)$.

Questa proprietà è compatibile con un caso particolare della Formula di Künneth:

PROPOSIZIONE: Siano X, Y due CW-complessi e \mathbb{F} un campo. Allora

$$H_n(X \times Y; \mathbb{F}) \cong \bigoplus_{i+j=n} (H_i(X; \mathbb{F}) \times H_j(Y; \mathbb{F}))$$

2.8.1 Teoremi di Sconnessione

PROPOSIZIONE:

1. Sia H^k con $0 \leq k \leq n$ un k -disco topologico in S^n . Allora $\tilde{H}_q(S^n \setminus H^k) = 0$ per ogni q ;
2. Sia Z^k con $0 \leq k < n$ una k -sfera topologica in S^n . Allora $\tilde{H}_q(S^n \setminus Z^k) \cong \mathbb{Z}$ se $q = n - k - 1$ e 0 altrimenti.

Dimostrazione. 1.

Per definizione di H^k esiste un omeomorfismo $\varphi: D^k \cong I^k \longrightarrow H^k \subseteq S^n$. Dimostriamo la proposizione per induzione su k :

il passo base $k = 0$ è banale poiché $H^0 = \{\text{pt}\}$ e $S^n \setminus \{\text{pt}\} \cong \mathbb{R}^n$ che è contrattile.

Per il passo induttivo consideriamo $A = S^n \setminus \varphi(I^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}])$ e $B = S^n \setminus \varphi(I^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$.

Si ha che $A \cap B = S^n \setminus \varphi(I^k)$ e $A \cup B = S^n \setminus \varphi(I^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$, dunque per ipotesi induttiva

$\tilde{H}_q(A \cup B) = 0$ per ogni q .

Per Mayer-Vietoris quindi $\tilde{H}_q(S^n \setminus \varphi(I^k)) \cong \tilde{H}_q(A) \oplus \tilde{H}_q(B)$.

Se per assurdo esistesse un q -ciclo α non banale (non bordo) allora senza perdita di generalità esso non sarebbe un bordo in A (poniamo quindi $I_0 = [0, \frac{1}{2}]$). Iterando la costruzione fatta sopra per S^n sull'insieme A otteniamo una successione di intervalli $I \supseteq I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ che converge ad un punto $\bar{p} \in [0, 1]$ e tale che α non è un bordo in nessuno degli $S^n \setminus \varphi(I^{k-1} \times I_m)$.

Per ipotesi induttiva α è bordo in $S^n \setminus \varphi(I^{k-1} \times \{\bar{p}\})$, ma la catena di cui è bordo, per compattezza, deve essere contenuta in uno degli $S^n \setminus \varphi(I^{k-1} \times I_m)$, che è assurdo. \square

Dimostrazione. 2.

Per definizione di Z^k esiste un omeomorfismo $\psi: S^k \longrightarrow Z^k \subseteq S^n$. Siano E_+^k e E_-^k gli emisferi chiusi di S^k e definiamo $A = S^n \setminus \psi(E_-^k)$ e $B = S^n \setminus \psi(E_+^k)$. Concludiamo per induzione su k :

per $k = 0$, si ha $S^n \setminus Z^0 \cong S^{n-1}$ da cui la tesi; per il passo induttivo consideriamo la successione di Mayer-Vietoris e utilizziamo il primo punto (essendo $E_+^k \cong E_-^k \cong D^k$):

$\tilde{H}_q(S^n \setminus \psi(S^{k-1})) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^n \setminus \psi(S^k))$.

Per ipotesi induttiva $\tilde{H}_q(S^n \setminus Z^{k-1}) \cong \mathbb{Z}$ se $q = n - k$ ed è nullo altrimenti; quindi si ha $\tilde{H}_q(S^n \setminus Z^k) \cong \mathbb{Z}$ se $q = n - k - 1$ e 0 altrimenti. \square

COROLLARIO: Nessun disco in S^n sconnette S^n .

COROLLARIO: Z^k sconnette S^n se e solo se $k = n - 1$ e in tal caso $S^n \setminus Z^k$ ha esattamente due componenti connesse che hanno ognuna l'omologia di un disco.

TEOREMA (DI INVARIANZA DEL DOMINIO): Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\varphi: U \longrightarrow W$ un omeomorfismo con $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora W è aperto in \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Consideriamo la compattificazione di Alexandrov di \mathbb{R}^n e dimostriamo che W è aperto in S^n . Per fare ciò è sufficiente provare che $\varphi(D^n \setminus \partial D^n)$ è aperto in S^n .

Per i teoremi di sconnessione $S^n \setminus \varphi(\partial D^n)$ ha due componenti connesse per archi che sono $S^n \setminus \varphi(D^n)$ e $\varphi(D^n \setminus \partial D^n) \cong D^n \setminus \partial D^n$ (φ è omeomorfismo). Infatti sono connessi e sono l'uno il complementare dell'altro, quindi sono le componenti connesse per archi, e perciò $\varphi(D^n \setminus \partial D^n)$ è un aperto. \square

TEOREMA: Supponiamo esista un prodotto bilineare commutativo senza divisori di zero su \mathbb{R}^n . Allora $n = 1, 2$.

Dimostrazione. Se $x \neq 0$ allora $x^2 \neq 0$, quindi possiamo definire l'applicazione $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ tale che $f(x) = \frac{x^2}{\|x^2\|}$. Poiché $f(x) = f(-x)$ per ogni x , questa mappa ne induce una al quoziente $\bar{f}: \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow S^{n-1}$.

\bar{f} è iniettiva: se $f(x) = f(y)$ allora $x^2 = a^2 y^2$ con $a = \sqrt{\frac{\|x^2\|}{\|y^2\|}} \geq 0$. Quindi $x^2 - a^2 y^2 = (x - ay)(x + ay) = 0$. Non essendoci divisori di zero si ha $x = \pm ay$; dato che $x, y \in S^{n-1}$, si ha $\|x\| = \|y\| = 1$ e quindi $a = \pm 1$, ovvero $[x] = [y]$ in $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

Essendo \mathbb{P}^{n-1} compatto e S^{n-1} uno spazio T_2 , \bar{f} è un omeomorfismo sull'immagine. Se $n \neq 1$, S^{n-1} è connesso e $\bar{f}(\mathbb{P}^{n-1})$ è aperto e chiuso (e connesso) per il teorema di invarianza del dominio (lo spazio proiettivo è localmente euclideo).

Ma allora \bar{f} è un omeomorfismo tra $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ e S^{n-1} , che è falso per $n \neq 2$ (hanno omologie differenti). \square

PROPOSIZIONE: Sia $f: S^n \rightarrow S^n$ una applicazione dispari. Allora $\deg_{\mathbb{Z}}(f)$ è dispari.

Dimostrazione. Lavoriamo a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Sia $p: S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ il rivestimento doppio. Consideriamo la successione esatta corta di complessi

$$0 \longrightarrow C_i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\tau} C_i(S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\bar{p}} C_i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

in cui \bar{p} è surgettiva grazie all'esistenza di sollevamenti delle applicazioni $\sigma: \Delta^i \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e τ è definita nel modo seguente:

ogni σ ha 2 sollevamenti $\tilde{\sigma}_1$ e $\tilde{\sigma}_2$, e $\text{Ker}(\bar{p})$ è generato dai $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$; quindi si definisce $\tau(\sigma) = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$.

Passando alla successione esatta lunga in omologia

$$0 \longrightarrow H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{\tau_*} H_n(S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{\bar{p}_*} H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{\tau_*} H_{n-1}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Se $f: S^n \rightarrow S^n$ è dispari, allora induce una mappa $\bar{f}: \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Nel diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bar{p}} & C_i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ 0 & \longrightarrow & C_i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau} & C_i(S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bar{p}} & C_i(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

i quadrati commutano, dunque si ha un morfismo di complessi che induce un morfismo di successioni lunghe

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau_*} & H_n(S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bar{p}_*} & H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau_*} & H_n(S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bar{p}_*} & H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

da cui si ricava per induzione, con passo base in dimensione zero (in cui \bar{p}_* è isomorfismo), che \bar{f}_* e f_* sono isomorfismi (per ogni quadrato, per ipotesi induttiva, si hanno 3 isomorfismi, dunque anche il quarto lo è). Quindi $f_*: H_n(S^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è un isomorfismo, che implica $\deg_{\mathbb{Z}}(f)$ dispari. \square

TEOREMA (DI BORSUK-ULAM): Per ogni funzione continua $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ esiste un $x \in S^n$ tale che $g(x) = g(-x)$.

Dimostrazione. Definiamo la funzione f tale che $f(x) = g(x) - g(-x)$. Se per assurdo $f(x) \neq 0 \forall x \in S^n$ posso definire $\bar{f}: S^n \rightarrow S^{n-1} \subseteq S^n$ tale che $\bar{f}(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$. \bar{f} è dispari (perché f lo è) e non surgettiva (su S^n). Ma allora $\deg(\bar{f}) = 0$ e dispari, che è assurdo. \square

2.9 Lezione 18 - 28/11

Oltre ai modelli di omologia presentati finora, in base agli assiomi possiamo definirne altri, cui accenniamo brevemente.

2.9.1 Omologia Singolare Cubica

DEFINIZIONE: Dato uno spazio topologico X , una applicazione $\sigma: I^n \rightarrow X$ si dice n -cubo singolare.

Sia $\tilde{C}_n(X)$ lo \mathbb{Z} -modulo generato dagli n -cubi singolari in X : sia inoltre $D_n(X)$ lo \mathbb{Z} -modulo generato dagli n -cubi degeneri, ovvero dalle applicazioni $\sigma: I^n \rightarrow X$ che non dipendono da una o più componenti. Sia infine il modulo $C_n(X) := \tilde{C}_n(X)/D_n(X)$. Definiamo adesso la mappa di bordo $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$: siano al variare di i

$$A_i^n := \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid x_i \in [0, 1] \forall i\}$$

$$B_i^n := \{(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid x_i \in [0, 1] \forall i\}$$

le facce dell' n -cubo; dato un n -cubo singolare σ si pone $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=1}^n (\sigma|_{A_i^n} - \sigma|_{B_i^n})$.

Si verifica che $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ e dunque che $\{(C_n(X), \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è un complesso di \mathbb{Z} -moduli, su cui possiamo calcolare l'omologia.

I vantaggi dell'omologia singolare cubica stanno nell'immediatezza della verifica degli assiomi di omotopia (per cui non c'è bisogno di triangolazioni) e di escissione (in particolare nel lemma sui semplici \mathcal{U} -piccoli).

Osservazione. È fondamentale quotizzare i moduli generati dagli n -cubi per quelli degeneri, perché lavorando direttamente con i $\tilde{C}_n(X)$ non sarebbe verificato l'assioma di dimensione. Infatti $\tilde{C}_n(\{\text{pt}\}) = \{k\sigma_n \mid k \in \mathbb{Z}, \sigma_n: I^n \rightarrow \{\text{pt}\}\} \cong \mathbb{Z}$ per ogni $n \geq 0$, e $\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n (\sigma_{n-1} - \sigma_{n-1}) = 0$, ovvero $\partial_n \equiv 0$. Ma allora si ha $H_n(\{\text{pt}\}) \cong \mathbb{Z}$ per ogni $n \geq 0$.

2.9.2 Omologia Singolare Geometrica

DEFINIZIONE: Un poliedro compatto P si dice di dimensione pura n se per ogni $x \in P$ esiste un sistema fondamentale di intorni PL di dimensione n .

DEFINIZIONE: Un punto $x \in P$ si dice regolare (punto di varietà PL) se esiste un intorno poliedrale (W, x) di x in P tale che (W, x) è isomorfo (tramite una applicazione PL) a (Δ^n, b) con b il baricentro di Δ^n . I punti non regolari si dicono singolari e l'insieme dei punti singolari si denota con $S(P)$.

DEFINIZIONE: Un n -ciclo geometrico è un poliedro P (compatto) senza bordo di dimensione pura n tale che $S(P)$ è un sotto-poliedro tale che $\text{codim}(S(P)) = \dim(P) - \dim(S(P)) \geq 2$.

DEFINIZIONE: Una coppia di poliedri $(P, \partial P)$ è un n -ciclo geometrico con bordo se:

- $S(P) = \partial P \cup Z$ con Z un sotto-poliedro di P tale che $\text{codim}(Z) \geq 2$;
- ∂P è un $(n - 1)$ -ciclo geometrico;
- $\forall x \in \partial P \setminus S(\partial P)$ esiste una coppia di intorni poliedrali $(U, W) \subseteq (P, \partial P)$ di x tali che $(U, W, x) \underset{\text{PL}}{\cong} (\Delta^n, \Delta^{n-1}, b)$ con b il baricentro di Δ^{n-1} .

Osservazione. Il caso assoluto rientra in quello relativo con (P, \emptyset) . Infatti se P è un n -ciclo geometrico allora $\partial P = \emptyset$.

PROPOSIZIONE: $(P, \partial P)$ è un n -ciclo geometrico con bordo se esiste una triangolazione $(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ di $(P, \partial P)$ tale che

- Ogni $(n - 1)$ -simplesso di $\mathcal{K} \setminus \mathcal{H}$ è faccia di esattamente 2 n -simplessi;
- Ogni $(n - 1)$ -simplesso di \mathcal{H} è faccia di esattamente 1 n -simplesso.

In tal caso, ciò è vero per ogni triangolazione.

DEFINIZIONE: Sia P un poliedro compatto connesso e sia \mathcal{K} una sua triangolazione. Un'orientazione di P è un'orientazione su \mathcal{K} $\varepsilon: \{n\text{-simplessi di } \mathcal{K}\} \rightarrow \{\pm 1\}$ tale che per ogni coppia di n -simplessi con una $(n - 1)$ -faccia comune τ , le orientazioni di τ indotte come bordo siano opposte l'una all'altra.

Osservazione. Si ha che $H_n^\Delta(P) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \\ 0 \end{cases}$ quindi un'orientazione su P è la scelta di un generatore.

In modo analogo si definisce l'orientazione nel caso relativo $(P, \partial P)$.

DEFINIZIONE: Sia X uno spazio topologico. Un n -ciclo orientato geometrico in X è (P^n, ω, f) dove $f: (P^n, \omega) \rightarrow X$ è continua e (P^n, ω) è un n -ciclo geometrico orientato.

DEFINIZIONE: Sia X uno spazio topologico. Un n -bordo orientato geometrico in X è (P^n, ω, f) dove $f: (P^n, \omega) \rightarrow X$ è continua, (P^n, ω) è un n -ciclo geometrico orientato ed esistono $(W^{n+1}, \partial W^{n+1}, \omega_W)$ un $(n + 1)$ -ciclo orientato con bordo, $\varphi: (\partial W^{n+1}, \omega_W) \rightarrow (P^n, \omega)$ isomorfismo PL e $F: W^{n+1} \rightarrow X$ tale che $F|_{\partial W^{n+1}} = f \circ \varphi$.

Introduciamo una relazione di equivalenza:

DEFINIZIONE: Dati due n -cicli orientati geometrici in X , si dice che essi sono bordanti se $(P_1, f_1, \omega_1) \sqcup (P_2, f_2, -\omega_2)$ è un n -bordo geometrico.

Osservazione. Il bordismo è una relazione di equivalenza: è riflessiva, in quanto $F: W = P \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che $F(x, t) = f(x)$ è tale che $(P, f, \omega) \sqcup (P, f, -\omega)$ sia bordo, osservando

che se P è un n -ciclo allora $P \times I$ è un $(n+1)$ -ciclo con bordo $\partial(P \times I) = P \times \{0\} \cup P \times \{1\}$; è banalmente simmetrica (è sufficiente cambiare l'orientazione sul W trovato); è transitiva poiché incollando lungo un bordo comune due $(n+1)$ -cicli si ottiene un $(n+1)$ ciclo la cui orientazione è ben definita.

Dunque possiamo definire un'operazione sul quoziente dei moduli degli n -cicli su quello degli n -bordi $Z_n^G(X)/B_n^G(X)$ come $[P_1, f_1, \omega_1] + [P_2, f_2, \omega_2] := [(P_1, f_1, \omega_1) \sqcup (P_2, f_2, \omega_2)]$.

DEFINIZIONE: $H_n^G(X) := Z_n^G(X)/B_n^G(X)$ è detto n -esimo gruppo di omologia geometrica orientata.

Possiamo definire tutto più in generale in versione relativa:

DEFINIZIONE: $(P, \partial P, \omega) \xrightarrow{f} (X, A)$ è un n -ciclo geometrico relativo (orientato) in X se $(P, \partial P, \omega)$ è un n -ciclo geometrico con bordo orientato.

DEFINIZIONE: $(P, \partial P, \omega) \xrightarrow{f} (X, A)$ è un n -bordo geometrico relativo (orientato) in X se esistono $(W, \partial W, \omega_W)$ un $(n+1)$ -ciclo geometrico con bordo (orientato) e $F: (W, \partial W) \rightarrow (X, A)$ tali che $\partial W \supseteq P$, si ha $F|_P = f$ e $\partial \omega_W|_P = \omega$.

In modo analogo si definisce la relazione di bordismo e dunque l'omologia geometrica $H_n^G(X, A)$.

PROPOSIZIONE: Questo modello verifica tutti gli assiomi di omologia.

Dimostrazione. • **Funtorialità:** Data una $g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e un ciclo $f: (P, \partial P) \rightarrow (X, A)$ si ha che $g_*([P, \partial P, f]) = [P, \partial P, g \circ f]$;

- **Omotopia:** segue facilmente dalla proprietà del "prodotto per I ";
- **Dimensione:** per ogni $n \geq 1$, dato un n -ciclo P^n si ha che il cono \mathcal{C}_{P^n} è un $(n+1)$ -ciclo, dunque P^n è un bordo e $H_k^G(\{\text{pt}\}) = 0 \forall k \geq 1$. Inoltre esiste un unico 0-ciclo che non è bordo, quello costante, per cui $H_0^G(\{\text{pt}\}) \cong \mathbb{Z}$;
- **Successione esatta lunga in Omologia:** la sequenza di inclusioni $A \hookrightarrow X \hookrightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ induce assieme alla mappa naturale $\delta: H_n^G(X, A) \rightarrow H_{n-1}^G(A)$ tale che $\delta([P, \partial P, f]) = [\partial P, f|_{\partial P}]$ una successione esatta lunga in omologia;
- **Escissione:** la dimostrazione è delicata, per cui viene lasciata.

□

Osservazione. Il modello dell'omologia singolare geometrica non orientata verifica tutti gli assiomi ma $H_0^{GN}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, quindi esso è un modello dell'omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Osservazione. Con costruzioni analoghe a queste, è possibile costruire modelli di "teorie omologiche generalizzate" in cui non sono verificati uno o più assiomi. Ad esempio, restringendo la trattazione dell'omologia singolare geometrica ai poliedri compatti senza punti singolari, continuano a valere tutti gli assiomi tranne la proprietà di "cono", e dunque l'assioma di dimensione.

PROPOSIZIONE: Per ogni spazio topologico X , $H_n^G(X) \cong H_n(X)$.

Capitolo 3

Coomologia e Dualità di Poincaré

3.1 Lezione 19 - 01/12

Dato un anello R commutativo con unità e G un R -modulo, possiamo considerare il funtore controvariante dalla categoria degli R -moduli in sé $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{G})$, tale che $A \mapsto \mathbf{Hom}(A, G)$ e $(A \xrightarrow{f} B) \mapsto \left(\mathbf{Hom}(B, G) \xrightarrow{{}^t f} \mathbf{Hom}(A, G) \right)$ con ${}^t f(\psi) = \psi \circ f$.

Osservazione. Se f è un isomorfismo allora anche ${}^t f$ lo è.

Osservazione. $f \equiv 0 \Rightarrow {}^t f \equiv 0$.

Osservazione. Se $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ è una successione esatta (a destra) allora $0 \rightarrow \mathbf{Hom}(C, G) \xrightarrow{{}^t g} \mathbf{Hom}(B, G) \xrightarrow{{}^t f} \mathbf{Hom}(A, G)$ è una successione esatta (a sinistra). Infatti:

essendo g surgettiva, ${}^t g(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = 0$, ovvero ${}^t g$ è iniettiva; $g \circ f = 0 \Rightarrow {}^t f \circ {}^t g = 0$, cioè $\text{Im}({}^t g) \subseteq \text{Ker}({}^t f)$; infine, se $\psi \in \text{Ker}({}^t f)$, allora $\psi \circ f = 0$, cioè $\text{Ker}(\psi) \supseteq \text{Im}(f)$. Dunque le frecce del seguente diagramma commutano:

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xleftarrow{\psi} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 & \swarrow \psi' & \downarrow \pi & \searrow g' & \\
 & & B/f(A) & &
 \end{array}$$

Definendo $\phi := \psi' \circ (g')^{-1}$ si ha che ${}^t g(\phi) = \psi$.

Osservazione. In generale l'esattezza a sinistra non viene mandata dal funtore $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{G})$ in esattezza a destra. Ad esempio prendendo la successione esatta $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$, si ha che ${}^t f$ non è surgettiva: infatti $\forall \psi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, ${}^t f(\psi)$ ha immagine soltanto in $2\mathbb{Z}$.

Osservazione. Se $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ è una successione esatta e la successione spezza (ad esempio ciò è verificato se C è libero) allora il funtore $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{G})$ manda tale successione esatta corta in una successione esatta corta che spezza anch'essa.

Infatti, poiché esiste $\pi: B \rightarrow A$ tale che $\pi \circ f = id_A$ si verifica che ${}^t \pi$ è una sezione che spezza la successione duale.

3.1.1 Coomologia di un Complesso a coefficienti in G

Sia $\mathcal{C} = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un complesso di R -moduli. Applicando il funtore $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{G})$ otteniamo un nuovo complesso di R -moduli $\hat{\mathcal{C}}_G = \{(\mathbf{Hom}(C_n, G), {}^t\partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{(C^n(\mathcal{C}; G), \delta_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

DEFINIZIONE: Per ogni n definiamo $H^n(\mathcal{C}; G) := \text{Ker}(\delta_n) / \text{Im}(\delta_{n-1}) = H_n(\hat{\mathcal{C}}_G)$, detta coomologia di \mathcal{C} a coefficienti in G , come l'omologia di $\hat{\mathcal{C}}_G$.

Se $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ è un morfismo di complessi, allora ${}^t f: \hat{\mathcal{C}}'_G \rightarrow \hat{\mathcal{C}}_G$ è un morfismo di complessi e induce $\forall n$ un'applicazione $f_n^*: H^n(\mathcal{C}'; G) \rightarrow H^n(\mathcal{C}; G)$. Questo determina dunque una famiglia di funtori controvarianti dalla categoria dei complessi di R -moduli nella categoria degli R -moduli tali che $\mathcal{C} \mapsto \{H^n(\mathcal{C}; G)\}$ e $f \mapsto \{f_n^*\}$.

Osservazione. Se s è una omotopia tra f e g morfismi di complessi allora ${}^t s$ è omotopia tra ${}^t f$ e ${}^t g$, quindi $f_n^* = g_n^* \forall n$.

Osservazione. Se $0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}'' \rightarrow 0$ è una successione esatta corta di complessi di R -moduli che spezza allora essa induce una successione esatta corta che spezza $0 \rightarrow \hat{\mathcal{C}}''_G \rightarrow \hat{\mathcal{C}}'_G \rightarrow \hat{\mathcal{C}}_G \rightarrow 0$ che a sua volta induce una successione esatta lunga in coomologia.

Restringiamoci allo studio di complessi di moduli liberi e supponiamo che R sia un PID.

DEFINIZIONE: Dato C , una successione esatta corta $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ è una risoluzione libera di C se A e B sono liberi.

Nelle ipotesi di cui sopra, $\forall C$ esiste una risoluzione libera canonica

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1(C) & \xleftarrow{i} & F_0(C) & \xrightarrow{\varphi} & C \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \\ & & \text{Ker}(\varphi) & & & & \end{array}$$

con $F_0(C)$ il modulo libero generato dall'insieme C .

LEMMA: Dati due R -moduli C e C' , una applicazione $\gamma: C \rightarrow C'$ e due risoluzioni libere di C e di C' , allora esistono α, β tali che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\phi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\phi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dimostrazione. Fissiamo una base \mathcal{B} di B . Definiamo $\beta(b) \forall b \in \mathcal{B}$ ponendolo uguale ad un qualsiasi elemento di $(\psi')^{-1}\gamma\psi(b)$ che esiste essendo ψ' surgettiva. È banale verificare che $\beta(\text{Im}(\phi)) \subseteq \text{Im}(\phi')$. Poiché ϕ' è iniettiva, segue che β induce una applicazione $\alpha: A \rightarrow A'$ come richiesto. \square

PROPOSIZIONE: Sia R un PID. Siano $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ complessi di R -moduli liberi. Data $\gamma = \{\gamma_n: H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_n(\mathcal{C}')\}_n$, allora esiste un morfismo di complessi $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ che induce γ .

Dimostrazione. Chiamiamo per ogni n :

Z_n i cicli e B_n i bordi di \mathcal{C} e Z'_n i cicli e B'_n i bordi di \mathcal{C}' . Per ogni n abbiamo dunque il seguente diagramma in cui le righe sono successioni esatte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow \gamma_n \\ 0 & \longrightarrow & B'_n & \longrightarrow & Z'_n & \longrightarrow & H_n(\mathcal{C}') \longrightarrow 0 \end{array}$$

Usando il lemma precedente completiamo il diagramma con α, β . Consideriamo adesso il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & B_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta_n & & & & \downarrow \alpha_{n-1} \\ 0 & \longrightarrow & Z'_n & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & B'_{n-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Essendo B_{n-1} e B'_{n-1} moduli liberi, le successioni riga spezzano, quindi $C_n = Z_n \oplus U_n$, $C'_n = Z'_n \oplus U'_n$ con $\partial_n: U_n \rightarrow B_{n-1}$ e $\partial'_n: U'_n \rightarrow B'_{n-1}$ isomorfismi. Poniamo dunque $\phi_n: C_n \rightarrow C'_n$ tale che $\phi(z, u) = (\beta_n(z), (\partial'_n)^{-1}\alpha_{n-1}\partial_n(u))$. Questa era l'applicazione cercata. \square

LEMMA: Sia R un PID. Siano \mathcal{C}, \mathcal{F} complessi di moduli liberi tali che $C_n = F_n = 0 \forall n < 0$ e $H_n(\mathcal{F}) = 0 \forall n > 0$. Siano $f, g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}$ morfismi di complessi tali che $f_0 = g_0$. Allora f e g sono omotope (come morfismi di complessi).

Dimostrazione. Costruiamo una omotopia D per induzione sulla dimensione.

Poniamo $D_0: C_0 \rightarrow F_1$ la funzione nulla. Essa verifica la relazione per le omotopie essendo $0 = f_0 - g_0 = \partial'_1 D_0 + D_0 \partial_0$, perché $\partial_0 = D_0 = 0$.

Supponiamo di aver definito D fino a $D_{n-1}: C_{n-1} \rightarrow F_n$ e fissiamo una base \mathcal{B} di C_n . $\forall b \in \mathcal{B}$ poniamo $F_n \ni c(b) := g_n(b) - f_n(b) - D_{n-1}(\partial_n b)$. Osserviamo che $\partial'_n(c(b)) = 0$: infatti $\partial'_n(c(b)) = \partial'_n g_n(b) - \partial'_n f_n(b) - \partial'_n D_{n-1}(\partial_n b) = g_{n-1}(\partial_n b) - f_{n-1}(\partial_n b) - \partial'_n D_{n-1}(\partial_n b) = D_{n-2}(\partial_{n-1} \partial_n b) = 0$ per la relazione sulle omotopie al livello $n-1$.

Essendo $H_n(\mathcal{F}) = \text{Ker}(\partial'_n) / \text{Im}(\partial'_{n+1}) = 0$, si ha che esiste $e \in F_{n+1}$ tale che $c(b) = \partial'_{n+1}(e)$. Dunque definisco $D_n(b) = e$. La tesi è verificata grazie alla definizione di $c(b)$. \square

Osservazione. Oltre al funtore $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{G})$, possiamo definire, fissato un R -modulo A , il funtore $\mathbf{Hom}(\mathbf{A}, -)$ che risulta essere un funtore covariante. Dunque, date $A' \xrightarrow{f} A$ e $G \xrightarrow{g} G'$, applicando rispettivamente i funtori controvariante e covariante possiamo effettuare la composizione ottenendo una applicazione $\text{hom}(f, g): \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Hom}(A', G')$ tale che $\text{hom}(f, g)(\psi) = g \circ \psi \circ f$.

3.1.2 Funtore Ext

Sia R un PID, A un R -modulo e $0 \rightarrow F_1(A) \xrightarrow{i} F_0(A) \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$ la sua risoluzione libera canonica.

Fissiamo B un R -modulo e applichiamo il funtore $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{B})$, completando la successione ottenuta ad una successione esatta:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, B) \xrightarrow{t\varphi} \text{Hom}(F_0(A), B) \xrightarrow{ti} \text{Hom}(F_1(A), B) \xrightarrow{\pi} \underbrace{\text{Hom}(F_1(A), B) / \text{Im}(ti)}_{\parallel} \rightarrow 0$$

$\text{Coker}(ti)$

DEFINIZIONE: $\text{Ext}(A, B) := \text{Coker}({}^t i)$.

Volendo però potremmo considerare una arbitraria risoluzione libera $0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\Phi} F \longrightarrow A \longrightarrow 0$ di A . Effettuando la stessa costruzione si può completare la successione con $\text{Coker}({}^t \Phi)$.

Lo scopo dunque è dimostrare che $\text{Coker}({}^t \Phi) \cong \text{Ext}(A, B)$.

LEMMA: Considerato il seguente diagramma, dove le righe sono risoluzioni libere di A e A' , e le mappe α, β, γ rendono commutativo il tutto:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{\Phi} & F & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}' & \xrightarrow{\Phi'} & F' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e data $\delta: B' \longrightarrow B$, allora esiste una unica mappa $\varepsilon: \text{Coker}({}^t \Phi') \longrightarrow \text{Coker}({}^t \Phi)$ che renda il seguente diagramma commutativo e che non dipende dalla scelta di α e β :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(F, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{R}, B) & \longrightarrow & \text{Coker}({}^t \Phi) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \text{hom}(\gamma, \delta) & & \uparrow \text{hom}(\beta, \delta) & & \uparrow \text{hom}(\alpha, \delta) & & \uparrow \varepsilon & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(A', B') & \longrightarrow & \text{Hom}(F', B') & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{R}', B') & \longrightarrow & \text{Coker}({}^t \Phi') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dimostrazione. Per funtorialità i due quadrati di sinistra commutano e quindi $\text{hom}(\alpha, \delta)$ induce un morfismo ε tra i conuclei.

Dimostriamo che ε non dipende da α e β .

Le righe possono essere viste come complessi $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ indicizzando i moduli in modo che A e A' siano in dimensione 0. Siano (α, β, γ) e $(\alpha', \beta', \gamma')$ 2 morfismi di complessi. L'omologia dei complessi \mathcal{A} e \mathcal{A}' è banale poiché le successioni sono esatte. Dualizzando tramite $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{B})$ e $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{B}')$ si ha che $\text{Coker}({}^t \Phi) = H^2(\mathcal{A}; B)$ e $\text{Coker}({}^t \Phi') = H^2(\mathcal{A}'; B')$. Il morfismo ε è quello indotto in coomologia da (α, β, γ) . Osserviamo che valgono le ipotesi del lemma precedente, quindi $(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha', \beta', \gamma')$, e dunque inducono lo stesso ε . \square

Osservazione. $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \delta)$, ovvero dipende dalla scelta di γ e di δ . Valgono inoltre le seguenti proprietà di funtorialità:

- $\varepsilon(\gamma' \circ \gamma, \delta \circ \delta') = \varepsilon(\gamma, \delta) \circ \varepsilon(\gamma', \delta')$;
- $\varepsilon(\text{id}_A, \text{id}_B)$ è un isomorfismo.

COROLLARIO: Per ogni risoluzione libera $0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\Phi} F \longrightarrow A \longrightarrow 0$ di A , per ogni B , si ha $\text{Coker}({}^t \Phi) \cong \text{Ext}(A, B)$.

Dunque possiamo definire il funtore $\mathbf{Ext}(-, -)$ che risulta essere, come $\mathbf{Hom}(-, -)$, controvariante sulla prima componente e covariante sulla seconda.

$$\begin{array}{ccc} (A, B) & \rightsquigarrow & \text{Ext}(A, B) \\ \gamma \downarrow \uparrow \delta & & \uparrow \text{Ext}(\gamma, \delta) \\ (A', B') & \rightsquigarrow & \text{Ext}(A', B') \end{array}$$

PROPOSIZIONE: Fissato B un R -modulo e fissata una risoluzione libera $0 \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{\Phi} F \xrightarrow{\Psi} A \longrightarrow 0$ di A , ad essa è associata la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(A, B) \xrightarrow{t\Psi} \text{Hom}(F, B) \xrightarrow{t\Phi} \text{Hom}(\mathcal{R}, B) \xrightarrow{\pi} \text{Ext}(A, B) \longrightarrow 0$$

in modo naturale "nel senso delle trasformazioni naturali di funtori", ovvero:

Per ogni morfismo di risoluzioni libere (α, β, γ) , per ogni $\delta: B' \longrightarrow B$ morfismo tra R -moduli possiamo definire un morfismo canonico di successioni esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(F, B) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{R}, B) & \longrightarrow & \text{Ext}(A, B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \text{hom}(\gamma, \delta) & & \uparrow \text{hom}(\beta, \delta) & & \uparrow \text{hom}(\alpha, \delta) & & \uparrow \text{Ext}(\gamma, \delta) & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(A', B') & \longrightarrow & \text{Hom}(F', B') & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{R}', B') & \longrightarrow & \text{Ext}(A', B') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dimostrazione. Preso il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & \longrightarrow & F_1(A) & \xrightarrow{\Phi_1} & F_0(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \text{id}_A & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{\Phi_2} & F & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}' & \xrightarrow{\Phi_3} & F' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 & & \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \text{id}_{A'} & & \\ & & 0 & \longrightarrow & F_1(A') & \xrightarrow{\Phi_4} & F_0(A') & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

si ha, ponendo $\text{Coker}(t\Phi_4) \xrightarrow{\varepsilon_3} \text{Coker}(t\Phi_3) \xrightarrow{\varepsilon_2} \text{Coker}(t\Phi_2) \xrightarrow{\varepsilon_1} \text{Coker}(t\Phi_1)$, che ε_3 e ε_1 sono isomorfismi, essendo $\varepsilon_3 = \varepsilon(\text{id}_{A'}, \text{id}_{B'})$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon(\text{id}_A, \text{id}_B)$, e che $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 \circ \varepsilon_3$ è indotto per funtorialità da (γ, δ) dato che $\varepsilon_2 = \varepsilon(\gamma, \delta)$.

Dunque il quadrato seguente commuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathcal{R}, B) & \longrightarrow & \text{Coker}(t\Phi_2) \xrightarrow{\varepsilon_1} \text{Ext}(A, B) \\ \uparrow \text{hom}(\alpha, \delta) & & \uparrow \text{Ext}(\gamma, \delta) \\ \text{Hom}(\mathcal{R}', B') & \longrightarrow & \text{Coker}(t\Phi_3) \xleftarrow{\varepsilon_3} \text{Ext}(A', B') \end{array}$$

e poiché gli altri quadrati commutano per funtorialità di $\mathbf{Hom}(-, -)$ si giunge alla tesi. \square

Osservazione. Proprietà di $\mathbf{Ext}(-, -)$:

- $\text{Ext}(\bigoplus_{\alpha} A_{\alpha}, B) \cong \prod_{\alpha} \text{Ext}(A_{\alpha}, B)$;
- $\text{Ext}(A, \prod_{\alpha} B_{\alpha}) \cong \prod_{\alpha} \text{Ext}(A, B_{\alpha})$;
- Se A è libero allora $\text{Ext}(A, B) = 0$ per ogni B ;
- Se $R = \mathbb{Z}$ e G è ciclico, allora $\text{Ext}(\mathbb{Z}, G) = 0$ e $\text{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) = \text{Coker}(G \xrightarrow{m} G)$.

3.2 Lezione 20 - 12/12

3.2.1 Teorema dei Coefficienti Universali in Coomologia

LEMMA: Sia R un PID, \mathcal{C} un complesso di R -moduli liberi e G un R -modulo. Allora esiste un morfismo naturale surgettivo $h: H^n(\mathcal{C}; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(\mathcal{C}), G)$.

Dimostrazione. Sia $[\psi] \in H^n(\mathcal{C}; G)$ un cociclo. $\psi: C_n \rightarrow G$ è tale che $\delta\psi = {}^t\partial\psi = \psi \circ \partial = 0$, ovvero $\text{Im}(\partial_{n+1}) = B_n \subseteq \text{Ker}(\psi)$.

Restringendo ψ otteniamo una $\psi_0: Z_n \rightarrow G$ che induce una $\text{Hom}(H_n(\mathcal{C}), G) \ni \bar{\psi}_0: Z_n/B_n \rightarrow G$.

Se $\psi = \delta\varphi = {}^t\partial\varphi = \varphi \circ \partial$ è un cobordo allora $Z_n \subseteq \text{Ker}(\psi)$, dunque $[\bar{\psi}_0] = 0$.

Abbiamo quindi definito la mappa $h: [\psi] \mapsto [\bar{\psi}_0]$. Verifichiamo adesso che tale mappa sia surgettiva.

Consideriamo la successione esatta corta $0 \rightarrow Z_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \rightarrow 0$ che spezza, essendo B_{n-1} libero, e la proiezione $p: C_n \rightarrow Z_n$ tale che $p \circ i = \text{id}_{Z_n}$. Se $\psi_0: Z_n \rightarrow G$ annulla B_n , allora $\psi_0 \circ p: C_n \rightarrow G$ continua ad annullarsi su B_n . Dunque

$$\text{Hom}(H_n(\mathcal{C}), G) \xrightarrow{{}^t p} \text{Ker}({}^t \partial_{n+1}) \xrightarrow{\pi} H^n(\mathcal{C}; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(\mathcal{C}), G)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{id} \nearrow$

Quindi h è surgettiva. □

Osservazione. Abbiamo anche dimostrato che la successione

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(h) \longrightarrow H^n(\mathcal{C}; G) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(\mathcal{C}), G) \longrightarrow 0$$

spezza (anche se in modo non canonico), poiché $\pi \circ {}^t p$ è una sezione.

PROPOSIZIONE: $\text{Ker}(h) \cong \text{Ext}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G)$.

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z_{n+1} & \longleftarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & B_n \longrightarrow 0 \\ \partial_{n+1}|_{Z_{n+1}} \equiv 0 & & \downarrow & & \partial_{n+1} \downarrow & & \partial_n|_{B_n} \equiv 0 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z_n & \longleftarrow & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & B_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

e interpretiamo le colonne come 3 complessi di R -moduli liberi $\mathcal{Z}, \mathcal{C}, \mathcal{B}$. Tutto il diagramma risulta essere una successione esatta corta di complessi.

Applichiamo il funtore $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{G})$ e otteniamo una successione esatta corta dei complessi duali che induce la successione esatta lunga in coomologia

$$\dots \leftarrow H^{n+1}(\mathcal{B}; G) \xleftarrow{\beta^n} H^n(\mathcal{Z}; G) \leftarrow H^n(\mathcal{C}; G) \leftarrow H^n(\mathcal{B}; G) \xleftarrow{\beta^{n-1}} H^{n-1}(\mathcal{Z}; G) \leftarrow \dots$$

con β il morfismo di connessione. Tutti gli operatori di bordo per i complessi \mathcal{B} e \mathcal{Z} sono nulli (e di conseguenza lo sono anche quelli dei rispettivi complessi duali), dunque $\forall n$ si ha

$H^n(\mathcal{Z}; G) \cong \text{Hom}(Z_n, G)$ e $H^{n+1}(\mathcal{B}; G) \cong \text{Hom}(B_n, G)$. Perciò, chiamando $i_n: B_n \hookrightarrow Z_n$ si ha che $\beta_n = {}^t i_n$.

Una successione esatta lunga può sempre essere spezzata in tante successioni esatte corte, e da quella sopra consideriamo $0 \longleftarrow \text{Ker}({}^t i_n) \xleftarrow{g} H^n(\mathcal{C}; G) \longleftarrow \text{Coker}({}^t i_{n-1}) \longleftarrow 0$. Poiché gli elementi di $\text{Ker}({}^t i_n)$ sono omomorfismi da Z_n in G che si annullano su B_n , possono essere identificati con gli omomorfismi $Z_n/B_n \longrightarrow G$, ovvero $\text{Ker}({}^t i_n) \cong \text{Hom}(H_n(\mathcal{C}), G)$. Quindi la mappa g viene identificata con la mappa h definita in precedenza.

Essendo infine $0 \longrightarrow B_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$ una risoluzione libera di $H_{n-1}(\mathcal{C})$ si ha che $\text{Ker}(h) \cong \text{Coker}({}^t i_{n-1}) \cong \text{Ext}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G)$. \square

COROLLARIO: Esiste un isomorfismo $H^n(\mathcal{C}; G) \cong \text{Hom}(H_n(\mathcal{C}), G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G)$ (non canonico).

COROLLARIO: $H_n(\mathcal{C}; \mathbb{Z})$ è finitamente generato per ogni n . Inoltre, se $H_n(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) \cong F_n \oplus T_n \cong \mathbb{Z}^{r_n} \oplus T_n$ con T_n il sottomodulo di torsione, allora $H^n(\mathcal{C}; \mathbb{Z}) \cong F_n \oplus T_{n-1}$.

3.2.2 Funtore Tor

Sia R un PID e G un R -modulo fissato. Allora possiamo definire il funtore covariante $-\otimes G$ tale che $A \longmapsto A \otimes G$ e $f \longmapsto f \otimes id_G$.

Dato inoltre A un R -modulo, applicando il funtore $-\otimes G$ alla sua risoluzione libera canonica si ottiene, aggiungendo in testa un termine per rendere la successione esatta:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(i \otimes id_G) \longrightarrow F_1 \otimes G \xrightarrow{i \otimes id_G} F_0 \otimes G \xrightarrow{\pi \otimes id_G} A \otimes G \longrightarrow 0$$

DEFINIZIONE: $\text{Tor}(A, G) := \text{Ker}(i \otimes id_G)$.

LEMMA: A meno di isomorfismi, $\text{Tor}(A, G)$ non dipende dalla scelta di una risoluzione libera di A .

Preso un complesso \mathcal{C} di R -moduli liberi, possiamo definire funtorialmente il complesso $\mathcal{C} \otimes G := \{(C_n \otimes G, \partial_n \otimes id_G)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, da cui si ottiene l'omologia di \mathcal{C} a coefficienti in G .

Abbiamo già detto che esiste un omomorfismo naturale iniettivo $\alpha: H_n(\mathcal{C}; R) \otimes G \longrightarrow H_n(\mathcal{C}; G)$. Dunque la successione

$$0 \longrightarrow H_n(\mathcal{C}; R) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(\mathcal{C}; G) \longrightarrow \text{Coker}(\alpha) \longrightarrow 0$$

è esatta.

PROPOSIZIONE: $\text{Coker}(\alpha) \cong \text{Tor}(H_{n-1}(\mathcal{C}; R), G)$.

Osservazione. Proprietà di $\text{Tor}(-, -)$:

- $\text{Tor}(A, B) \cong \text{Tor}(B, A)$ in modo canonico;
- Se almeno uno tra A e B è libero allora $\text{Tor}(A, B) = 0$;
- $\text{Tor}(\bigoplus_{\alpha} A_{\alpha}, B) \cong \bigoplus_{\alpha} \text{Tor}(A_{\alpha}, B)$;
- $\text{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ con $d = \text{gcd}(m, n)$.

3.2.3 Coomologia Singolare, Simpliciale e Cellulare

Sia R un PID e X uno spazio topologico. Fissato G un R -modulo, applicando il funtore $\mathbf{Hom}(-, \mathbf{G})$ al complesso delle catene singolari $\{(C_n(X, R), \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ si ottiene il complesso duale $\{(C^n(X, G), \delta_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ delle cocatene singolari a coefficienti in G , da cui possiamo passare alla coomologia $H^n(X; G)$ di X a coefficienti in G .

Osservazione. Per la coomologia singolare valgono le seguenti proprietà:

- Esiste una versione relativa che generalizza la teoria assoluta: è sufficiente considerare il complesso di catene singolari relative e poi passare in coomologia;
- Vale la funtorialità (controvariante);
- Vale l'assioma della dimensione: $H^n(\{\text{pt}\}; G) = \begin{cases} G & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- Vale la successione esatta lunga in coomologia (già visto nella parte puramente algebrica);
- Vale l'assioma di omotopia;
- Vale l'assioma di escissione;

Data (X, A) una coppia di Δ -complessi, passando attraverso il complesso delle catene simpliciali possiamo definire la coomologia simpliciale $H_{\Delta}^n(X, A; G)$ a coefficienti in G .

TEOREMA: $\forall n$ si ha $H_{\Delta}^n(X, A; G) \cong H^n(X, A; G)$.

Inoltre, dato X un CW-complesso possiamo definire ripercorrendo la costruzione per l'omologia il complesso delle cocatene cellulari $\{(H^n(X^n, X^{n-1}; G), d_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e di conseguenza la coomologia cellulare $H_{CW}^n(X; G)$ a coefficienti in G .

TEOREMA: $\forall n$ si ha $H_{CW}^n(X; G) \cong H^n(X; G)$.

3.2.4 Struttura Moltiplicativa su H^n

Lavoriamo a coefficienti in R dominio a ideali principali, e per snellire le notazioni sottintendiamo i coefficienti.

Consideriamo dapprima X e Y CW-complessi finiti $X = \{e_{\alpha}^{k_{\alpha}}\}$ e $Y = \{e_{\beta}^{h_{\beta}}\}$. Quindi $X \times Y = \{e_{\alpha}^{k_{\alpha}} \times e_{\beta}^{h_{\beta}}\}$.

Lavoriamo con le cocatene cellulari: dati $\varphi \in C_{CW}^k(X)$ e $\psi \in C_{CW}^h(Y)$ definiamo

$$\begin{cases} (\varphi \times \psi)(e_{\alpha}^k \times e_{\beta}^h) = \varphi(e_{\alpha}^k) \psi(e_{\beta}^h) \\ (\varphi \times \psi)(c) = 0 \end{cases} \quad \text{se } c \text{ è una } k+h \text{ catena non prodotto del tipo sopra}$$

In questo modo possiamo definire il prodotto "cross"

$$\begin{aligned} \times : \quad C_{CW}^k(X) \times C_{CW}^h(Y) &\longrightarrow C_{CW}^{k+h}(X \times Y) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \varphi \times \psi \end{aligned}$$

Si verifica che $\delta(\varphi \times \psi) = (\delta\varphi) \times \psi + (-1)^k \varphi \times (\delta\psi)$, dunque il prodotto \times passa al quoziente e possiamo definire $\times: H^k(X) \times H^h(Y) \rightarrow H^{k+h}(X \times Y)$.

Poniamo adesso $X = Y$: vorremmo definire un prodotto interno a partire da \times e per fare ciò occorre trovare una mappa da $H^{k+h}(X \times X)$ in $H^{k+h}(X)$

$$\begin{array}{ccc} H^k(X) \times H^h(X) & \xrightarrow{\times} & H^{k+h}(X \times X) \\ & \searrow \smile & \downarrow \text{---} \\ & & H^{k+h}(X) \end{array}$$

Definendo la diagonale $\Delta: X \rightarrow X \times X$ tale che $\Delta(x) = (x, x)$ tale mappa cercata è Δ^* , e dunque possiamo definire il prodotto "cup": $a \smile b := \Delta^*(a \times b)$.

Tale prodotto è commutativo?

Sia $T: X \times X \rightarrow X \times X$ tale che $T(x, y) = (y, x)$. Grazie a risultati più avanzati (Teorema di Eilenberg-Zilber) si ha $T^*(a \times b) = (-1)^{kh}(b \times a)$.

Dunque, poiché $T\Delta = \Delta$, si ha che $a \smile b = (-1)^{kh}(b \smile a)$.

Inoltre, ponendo $p_1, p_2: X \times X \rightarrow X$ le proiezioni sulle componenti, si deduce che $a \times b = p_1^*(a) \times p_2^*(b)$. Infatti:

$$\begin{array}{ccc} H^k(X) \times H^h(X) & \xrightarrow{\times} & H^{k+h}(X \times X) \\ p_1^* \downarrow & & \downarrow p_2^* \\ H^k(X \times X) \times H^h(X \times X) & \xrightarrow{\times} & H^{k+h}((X \times X) \times (X \times X)) \end{array}$$

$\xrightarrow{\smile}$ (dashed arrow from top-right to bottom-left) $\uparrow \Delta^*$ (vertical arrow from bottom-right to top-right)

Abbiamo quindi dotato $H^*(X; R) = \bigoplus_n H^n(X; R)$ di una struttura di R -algebra graduata.

Lavoriamo adesso al livello più generale delle cocatene singolari di un qualsiasi spazio topologico X e ricostruiamo gli stessi risultati.

DEFINIZIONE: Definiamo il prodotto "cup" $\smile: C^k(X) \times C^h(X) \rightarrow C^{k+h}(X)$ sui generatori $\sigma: \Delta^{k+h} \rightarrow X$ nel modo seguente: usando la notazione $\Delta^{k+h} = \Delta[v_0, \dots, v_{k+h}]$, ponendo $\tau: \Delta^k \rightarrow \Delta[v_0, \dots, v_k]$ e $\tau': \Delta^h \rightarrow \Delta[v_k, \dots, v_{k+h}]$ le parametrizzazioni standard di facce di Δ^{k+h} sia $(\varphi \smile \psi)(\sigma) := \varphi(\sigma \circ \tau)\psi(\sigma \circ \tau')$.

Osservazione. Useremo la notazione $\sigma \circ \tau = \sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}$ e $\sigma \circ \tau' = \sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+h}]}$.

LEMMA: $\delta(\varphi \smile \psi) = (\delta\varphi) \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile (\delta\psi)$.

Dimostrazione. Dato $\sigma: \Delta^{k+h+1} \rightarrow X$ si ha

$$\begin{aligned} (\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{k+1} \left((-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]}) \psi(\sigma|_{[v_{k+1}, \dots, v_{k+h+1}]) \right) \\ (-1)^k (\varphi \smile \delta\psi)(\sigma) &= \sum_{i=k}^{k+h+1} \left((-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+h+1}]) \right) \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

COROLLARIO:

- Se $\delta\varphi = \delta\psi = 0$ allora $\delta(\varphi \smile \psi) = 0$;
- Se $\delta\varphi = 0$ e $\psi = \delta\rho$ allora $\varphi \smile \psi = \pm\delta(\varphi \smile \rho)$ e $\psi \smile \varphi = \pm\delta(\rho \smile \varphi)$;
- Ponendo $C^*(X) = \bigoplus_n C^n(X)$, \smile è un prodotto bilineare associativo graduato che rende $C^*(X)$ un anello. I cocicli $Z^*(X)$ formano un sottoanello e i cobordi B^* formano un ideale bilatero. Il tutto passa al quoziente, per cui $H^*(X) = \bigoplus_n H^n(X)$ ha la struttura di anello graduato (R -algebra).

LEMMA: Se $f: X \rightarrow Y$ è una mappa continua e $f^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$ è la mappa indotta in coomologia, allora per ogni α, β si ha $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$.

DEFINIZIONE: Possiamo dunque definire il prodotto "cross" tale che $a \times b := p_1^*(a) \smile p_2^*(b)$ con $p_i: X \times X \rightarrow X$ per $i = 1, 2$ le proiezioni sulla i -esima coordinata.

Osservazione. A posteriori si ritrova dunque anche la relazione $\Delta^*(a \times b) = a \smile b$.

PROPOSIZIONE: $a \smile b = (-1)^{kh}(b \smile a)$.

Osservazione. Nel caso di X un CW-complesso finito le 2 definizioni coincidono.

3.3 Lezione 21 - 15/12

3.3.1 Prodotto "cap"

DEFINIZIONE: Dato X uno spazio topologico, R un PID e G un R -modulo, possiamo definire il prodotto "cap" $\frown: C_{p+q}(X; G) \times C^p(X; G) \rightarrow C_q(X; G)$ tale che $z \frown c$ è l'unica q -catena tale che per ogni q -cocatena d si ha $d(z \frown c) = (c \smile d)(z)$.

Esplicitamente: dato $\sigma: \Delta^{p+q} \rightarrow X$, $\sigma \frown c = c(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]})\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]}$.

LEMMA: $\partial(z \frown c) = (-1)^p((\partial z) \frown c - z \frown (\delta c))$.

Dunque il prodotto "cap" passa ai quozienti $\frown: H_{p+q}(X; G) \times H^p(X; G) \rightarrow H_q(X; G)$.

3.3.2 Dualità di Poincaré

La dualità di Poincaré (DP) riguarda le relazioni tra omologia e coomologia singolare nel caso di varietà topologiche, differenziabili o poliedrali.

La trattazione più elementare di DP riguarda le n -varietà PL compatte connesse.

DEFINIZIONE: M è una n -varietà compatta PL se è un poliedro compatto tale che $\forall x \in M$ esiste un intorno poliedrale W di x in M tale che $x \in \underset{PL}{\dot{W}}$ e $W \cong \Delta^n$.

Osservazione. M è una n -varietà PL compatta connessa se M è un n -ciclo geometrico con $S(M) = \emptyset$.

Sia \mathcal{K} una triangolazione di M , cioè un complesso simpliciale finito tale che $|\mathcal{K}| = M$.

Dunque $H^*(M; G) \cong H^*_\Delta(\mathcal{K}; G)$ e $H_*(M; G) \cong H^*_\Delta(\mathcal{K}; G)$.

Consideriamo dunque (con M di dimensione n) $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong H_n^\Delta(\mathcal{K}; \mathbb{Z})$. Poiché M è una n -varietà, $\forall \sigma$ ($n-1$)-simplexso di \mathcal{K} esistono esattamente 2 n -simplexsi τ_1, τ_2 tali che σ è faccia comune di entrambi.

DEFINIZIONE: Se esiste $\varepsilon: (\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_{n-1}) \longrightarrow \{\pm 1\}$ tale che $z = \sum_{\sigma \in (\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_{n-1})} (\varepsilon(\sigma)\sigma) \in Z_n(M; \mathbb{Z})$ allora si dice che M è \mathbb{Z} -orientabile e la scelta di un tale ciclo è una orientazione di M .

DEFINIZIONE: Se non esiste una ε di cui sopra allora si dice che M non è \mathbb{Z} -orientabile.

DEFINIZIONE: $(M, [z])$ varietà orientata. $[M] := [z]$ si dice classe fondamentale della varietà orientata.

Osservazione. La scelta di ε non dipende dalla suddivisione. Ogni scelta di segni su \mathcal{K} induce una scelta di segni coerente con la suddivisione e viceversa.

Osservazione. Si ha $H_n^\Delta(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ se M è orientabile e $H_n^\Delta(M; \mathbb{Z}) = 0$ altrimenti. A coefficienti in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ogni varietà è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orientabile e $H_n^\Delta(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. In generale denotiamo con $[M]_G$ la classe fondamentale di M a coefficienti in G .

Da ora in poi sia $R = \mathbb{Z}$ o $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lo scopo delle prossime lezioni sarà quello arrivare a dimostrare che:

TEOREMA (DP-PL-PRIMA VERSIONE): Sia M una n -varietà PL compatta, connessa e R -orientabile. Allora $H^p(M; R) \cong H_{n-p}(M; R)$.

TEOREMA (DP-PL-SECONDA VERSIONE): Sia M una n -varietà PL compatta, connessa, R -orientata con relativa classe fondamentale $[M]_R$. Allora $[M]_R \frown: H^p(M; R) \longrightarrow H_{n-p}(M; R)$ è un isomorfismo.

Osservazione. Se M è orientabile, $R = G = \mathbb{Z}$, se $H^p(M; \mathbb{Z}) \cong F^p \oplus T^p$ e $H_{n-p}(M; \mathbb{Z}) \cong F_{n-p} \oplus T_{n-p}$ con F la parte libera e T il modulo di torsione, allora:

$$\left. \begin{array}{l} \text{TCU} \Rightarrow F^p \oplus T^p \cong F_p \oplus T_{p-1} \\ \text{DP} \Rightarrow F^p \oplus T^p \cong F_{n-p} \oplus T_{n-p} \end{array} \right\} \Rightarrow F_p \cong F_{n-p} \wedge T_{p-1} \cong T_{n-p}$$

ovvero il teorema diventa puramente algebrico.

Osservazione. Se $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ invece, si ha un isomorfismo $H^p(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_{n-p}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ come spazi vettoriali, e dunque il teorema si traduce in una uguaglianza tra le dimensioni degli spazi vettoriali. Inoltre, per il teorema dei coefficienti universali si ha $H^j(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_j(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{j-1}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_j(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong (H_j(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))^*$ (essendo $H_{j-1}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ uno spazio vettoriale, in particolare è libero), ovvero $\dim(H^j(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \dim(H_j(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$. Dunque, analizzando la caratteristica

di Eulero-Poincaré, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(M) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim(H_j(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim(H^j(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \\
&= \sum_{j=0}^n (-1)^j \dim(H_{n-j}(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \dim(H_i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = \\
&= (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim(H_i(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = (-1)^n \mathcal{X}(M)
\end{aligned}$$

Ne segue che se n è dispari $\mathcal{X}(M) = 0$.

PROPOSIZIONE: Supponiamo che N sia una n -varietà compatta connessa con n pari e tale che $N = \partial W$ con W varietà compatta connessa di dimensione $n + 1$. Allora $\mathcal{X}(N) \equiv 0 \pmod{2}$.

Dimostrazione. Sia M la $(n + 1)$ -varietà costruita incollando due copie di W lungo il bordo N , in modo tale che M risulti essere senza bordo. Essendo $n + 1$ dispari, si ha che $\mathcal{X}(M) = 0 = 2\mathcal{X}(W) - \mathcal{X}(N)$. \square

Osservazione. $\mathcal{X}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è bordo di una varietà.

3.3.3 Varietà PL

Sia \mathcal{K} un complesso simpliciale finito, $X = |\mathcal{K}|$ e $\sigma \in \mathcal{K}$.

Richiamiamo una definizione già data in precedenza:

DEFINIZIONE: Si definisce stella chiusa di σ in \mathcal{K} l'insieme $\text{St}(\sigma) := \bigcup_{\tau \in \mathcal{K}, \tau \triangleright \sigma} |\tau|$. Definiamo inoltre la stella aperta $\text{st}(\sigma) := \bigcup_{\tau \in \mathcal{K}, \tau \triangleright \sigma} (|\tau| \setminus \partial|\tau|)$.

DEFINIZIONE: Si definisce link di σ in \mathcal{K} l'insieme $\text{Lk}(\sigma)$ dei supporti dei semplici di \mathcal{K} contenuti in $\text{St}(\sigma)$ disgiunti da σ .

PROPOSIZIONE: $\text{St}(\sigma)$ e $\text{Lk}(\sigma)$ sono supporti di sottocomplessi di \mathcal{K} . In particolare $\text{St}(\sigma)$ è il supporto del sottocomplesso generato dai $\tau \in \mathcal{K}$ tali che $\sigma \triangleleft \tau$, mentre $\text{Lk}(\sigma)$ come sottocomplesso è generato dai $\tau \in \text{St}(\sigma)$ disgiunti da σ .

Osservazione. Nella trattazione in futuro confonderemo le nozioni di semplice e supporto del semplice.

DEFINIZIONE: Siano σ, τ semplici di \mathcal{K} , $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ e $\tau = [w_0, \dots, w_h]$ disgiunti. Se $[v_0, \dots, v_k, w_0, \dots, w_h]$ è un semplice di \mathcal{K} (anche con un altro ordinamento) allora si definisce $\sigma * \tau := [v_0, \dots, v_k, w_0, \dots, w_h]$ detto join di σ e τ .

Più in generale, se \mathcal{H} e \mathcal{L} sono sottocomplessi disgiunti di \mathcal{K} tali che per ogni coppia di semplici si può definire il join e l'unione risultante è un sottocomplesso \mathcal{T} di \mathcal{K} , allora si definisce $\mathcal{T} := \mathcal{H} * \mathcal{L}$.

LEMMA: Sia $\sigma \in \mathcal{K}$. Allora:

- $\text{St}(\sigma) = \sigma * \text{Lk}(\sigma)$;

- $\text{St}(\sigma) \setminus \text{st}(\sigma) = \partial\sigma * \text{Lk}(\sigma)$;
- $\text{st}(\sigma) = \bigcap_{v \in \sigma} \text{st}(v)$ con v vertice.

LEMMA: X poliedro compatto, $x \in X$. Allora:

1. Esiste una triangolazione \mathcal{K} di X tale che x è vertice di \mathcal{K} ;
2. $\forall x \in X$, $\forall \mathcal{K}$ triangolazione di X tale che x è vertice di \mathcal{K} , la coppia di poliedri $(\text{St}(x), \text{Lk}(x))$ a meno di omeomorfismo PL non dipende dalla scelta di \mathcal{K} .

Dimostrazione. 1.

Sia \mathcal{H} una qualsiasi triangolazione di X . x appartiene alla parte interna di un unico $\sigma \in \mathcal{H}$. Se σ è un vertice allora $\sigma = x$ e \mathcal{H} è la triangolazione cercata. Altrimenti è sufficiente definire la suddivisione \mathcal{K} di \mathcal{H} in cui σ è stato suddiviso aggiungendo x come vertice e suddividendo tutti i semplici τ tali che $\sigma \triangleleft \tau$ senza aggiungere ulteriori vertici. \square

Dimostrazione. 2.

Poiché x è un vertice, $\text{St}(x)$ è il cono finito di centro x su $\text{Lk}(x)$. Basta dimostrare che $\text{Lk}(x)$ è PL-invariante. Poiché ogni coppia di triangolazioni ha una suddivisione comune, è sufficiente verificare l'invarianza su una suddivisione. In questo caso la dimostrazione è banale utilizzando come isomorfismo PL una proiezione "pseudoradiale" rispetto a x , ovvero radiale sui vertici e completata linearmente sui semplici). \square

Osservazione. Una definizione equivalente di varietà poliedrale è: M è una n -varietà se $\forall x \in M$, a meno di isomorfismi PL, $\text{Lk}(x)$ è PL-isomorfo a $\partial\Delta^n$.

Sia M una n -varietà PL compatta e connessa. Sia \mathcal{K} una triangolazione di M e $\mathcal{K}^{(1)}$ la prima suddivisione baricentrica di \mathcal{K} . Possiamo produrre una decomposizione regolare in celle di M "duale" a \mathcal{K} :

per ogni semplice $\sigma \in \mathcal{K}$ sia $\hat{\sigma}$ il baricentro di σ e definiamo il blocco duale $D(\sigma)$ come l'unione dei semplici di $\mathcal{K}^{(1)}$ che hanno $\hat{\sigma}$ come vertice iniziale.

In modo analogo alle stelle definiamo $\mathring{D}(\sigma)$ come l'unione delle parti interne dei supporti dei semplici di $\mathcal{K}^{(1)}$ aventi $\hat{\sigma}$ come vertice iniziale, e $\partial D(\sigma) := D(\sigma) \setminus \mathring{D}(\sigma)$.

PROPOSIZIONE: Valgono i seguenti fatti:

- $\forall \sigma \in \mathcal{K}$ il blocco duale $D(\sigma)$ è un sottocomplesso di $\mathcal{K}^{(1)}$;
- Se $|\mathcal{K}| = M$ con M una n -varietà PL compatta connessa allora, $\forall \sigma$ p -simpleso di \mathcal{K} , $D(\sigma)$ è PL-isomorfo a D^{n-p} ;
- $\forall \sigma \in \mathcal{K}$, $\partial D(\sigma)$ è unione di blocchi duali dei semplici di \mathcal{K} di cui σ è faccia propria ed è un sottocomplesso di $\mathcal{K}^{(1)}$;
- Se $|\mathcal{K}| = M$ con M una n -varietà PL compatta connessa allora, $\forall \sigma$ p -simpleso di \mathcal{K} , $\partial D(\sigma)$ è PL-isomorfo a S^{n-p-1} ;
- $|\sigma| \cap D(\sigma) = \{\hat{\sigma}\}$;
- $\{\mathring{D}(\sigma)\}_{\sigma \in \mathcal{K}}$ fornisce una partizione di M ;
- $D(\sigma) = \hat{\sigma} * \partial D(\sigma)$.

DEFINIZIONE: $\hat{\mathcal{K}} := \{D(\sigma)\}_{\sigma \in \mathcal{K}}$.

3.4 Lezione 22 - 19/12

3.4.1 DP-PL-Prima Versione

Se M è una n -varietà PL, nella suddivisione baricentrica $\mathcal{K}^{(1)}$ di una sua triangolazione $\forall \sigma \in \mathcal{K}$ p -simpleso $\text{St}(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma} * \text{Lk}(\hat{\sigma}) \underset{PL}{\cong} \Delta^n \cong D^n$ mentre $\text{Lk}(\hat{\sigma}) \cong \partial\Delta^n \cong S^{n-1}$.

Usando la definizione dei blocchi duali si ha $\text{Lk}(\hat{\sigma}) = \partial D(\sigma) * (\partial\sigma)^{(1)}$, da cui si ricava che $\partial D(\sigma) \underset{PL}{\cong} S^{n-p-1}$ e dunque $D(\sigma) \underset{PL}{\cong} D^{n-p}$.

Dunque, definita $\hat{\mathcal{K}}$ la decomposizione cellulare duale di \mathcal{K} , vogliamo calcolare la coomologia di M attraverso $H_{\Delta}^p(\mathcal{K}; R)$ e l'omologia di M attraverso $H_{n-p}^{CW}(\hat{\mathcal{K}}; R)$.

I simplessi di \mathcal{K} hanno vertici ordinati e sono orientabili di conseguenza. Il modulo $C_{\Delta}^p(\mathcal{K}; R)$ ha come base duale $\{\sigma^*\}_{\sigma \in (\mathcal{K}_p \setminus \mathcal{K}_{p-1})}$ (con i σ ordinati).

Per fissare una base $\{D(\sigma)\}_{\sigma \in (\mathcal{K}_p \setminus \mathcal{K}_{p-1})}$ di $C_{n-p}^{CW}(\hat{\mathcal{K}}; R)$ con $R = \mathbb{Z}$ dobbiamo specificare per ogni σ una orientazione di $D(\sigma)$.

Poiché

$$R \cong H_{n-p}(D(\sigma), \partial D(\sigma); R) \cong H_{n-p}^{CW}(D(\sigma), \partial D(\sigma); R) \cong H_{n-p}^{\Delta}(\mathcal{K}^{(1)}|_{D(\sigma)}, \mathcal{K}^{(1)}|_{\partial D(\sigma)}; R)$$

una orientazione di $(D(\sigma), \partial D(\sigma))$ è un ciclo simpliciale relativo $\sum_{\tau \in \Lambda} \varepsilon(\tau)\tau$ con Λ l'insieme degli $(n-p)$ -simplessi su $\mathcal{K}^{(1)}|_{D(\sigma)}$ e $\varepsilon(\tau) = \pm 1$.

Per ogni p esiste una corrispondenza biunivoca insiemistica tra σ^* e $D(\sigma)$ con σ un p -simpleso; tale corrispondenza tra le basi dei moduli $C_{\Delta}^p(\mathcal{K}; R)$ e $C_{n-p}^{CW}(\hat{\mathcal{K}}; R)$ si estende dunque ad un isomorfismo di R -moduli liberi φ_p .

Dunque, dato il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_{\Delta}^p(\mathcal{K}; R) & \xrightarrow{\delta} & C_{\Delta}^{p+1}(\mathcal{K}; R) & \longrightarrow & \dots \\ & & \cong \downarrow \varphi_p & & \cong \downarrow \varphi_{p+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{n-p}^{CW}(\hat{\mathcal{K}}; R) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-p-1}^{CW}(\hat{\mathcal{K}}; R) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

se tutti i quadrati di questo tipo commutano allora vale $H_{\Delta}^p(\mathcal{K}; R) \cong H_{n-p}^{CW}(\hat{\mathcal{K}}; R)$.

Osservazione. Se $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ allora non ci sono scelte da fare per definire φ e i quadrati commutano automaticamente per verifica diretta. Dunque DP-PL-Prima Versione vale se $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Se $R = \mathbb{Z}$ esistono varie scelte possibili per le orientazioni dei blocchi duali $D(\sigma)$. Cerchiamo un modo coerente di fissare questo sistema di orientazioni. Per fare ciò useremo che M è \mathbb{Z} orientabile.

Fissiamo una orientazione con relativa classe fondamentale $[M]_{\mathcal{K}} = [z]$ simpliciale rispetto a \mathcal{K} , ovvero $z = \sum_{\sigma \in (\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_{n-1})} \varepsilon(\sigma)\sigma$ con $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$.

Prendiamo come base di $C_{\Delta}^n(\mathcal{K}; \mathbb{Z})$ l'insieme $\{\varepsilon(\sigma)\sigma^*\}_{\sigma \in (\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_{n-1})}$ e definiamo sui generatori $\varphi_n(\varepsilon(\sigma)\sigma^*) = \hat{\sigma}$.

Per ogni $0 \leq p < n$ sui p -simplessi manteniamo l'orientazione combinatoria originaria data dalla triangolazione, ovvero consideriamo $\{\sigma^*\}_{\sigma \in (\mathcal{K}_p \setminus \mathcal{K}_{p-1})}$ come base di $C_\Delta^p(\mathcal{K}; \mathbb{Z})$.

A questo punto resta da definire φ_p , ovvero l'orientazione di $D(\sigma)$ per far sì che i quadrati commutino. Qualitativamente, immergendo la varietà in \mathbb{R}^n , poiché σ e $D(\sigma)$ sono trasversali e sono in codimensione opportuna, $\sigma \oplus D(\sigma) = \mathbb{R}^n$, e dunque esiste un'unica orientazione $\omega(D(\sigma))$ tale che $\omega(\sigma) \oplus \omega(D(\sigma)) = \omega(\mathbb{R}^n)$.

Per formalizzare questo ragionamento consideriamo per ogni p -simpleso σ orientato, $\sigma^{(1)} \in \mathcal{K}^{(1)}$ con l'orientazione propagata da σ . Dunque $\text{St}(\hat{\sigma}, \sigma^{(1)})$ è orientata.

Ogni n -simpleso di $\text{St}(\hat{\sigma}, \mathcal{K}^{(1)}) \underset{PL}{\cong} D^n$ è il join $\tau * \tau'$ con τ un p -simpleso orientato di $\text{St}(\hat{\sigma}, \sigma^{(1)})$ e τ' un $(n-p-1)$ -simpleso di $\mathcal{K}^{(1)}|_{\partial D(\sigma)}$.

Ogni p -simpleso di $\text{St}(\hat{\sigma}, \sigma^{(1)})$ è orientato, quindi τ è orientato; allora esiste un'unica orientazione di τ' tale che $\tau * \tau'$ abbia l'orientazione già assegnata come n -simpleso di $\text{St}(\hat{\sigma}, \mathcal{K}^{(1)})$.

Non è difficile verificare che tale procedura assegna una orientazione su ogni $\partial D(\sigma)$, ovvero: abbiamo assegnato una orientazione a ogni $(n-p-1)$ -simpleso di $\partial D(\sigma)$, cioè un segno ± 1 rispetto alla sua orientazione come simpleso di $\mathcal{K}^{(1)}$. Così facendo abbiamo definito un ciclo di $H_{n-p-1}^\Delta(\mathcal{K}^{(1)}|_{\partial D(\sigma)}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, che dunque ne è un generatore. Utilizzando la successione esatta lunga per la coppia possiamo rimontare tale generatore a uno di $H_{n-p}(D(\sigma), \partial D(\sigma); \mathbb{Z})$.

Con queste scelte si definisce φ_p e tramite verifica diretta si ottiene la commutatività dei quadrati, da cui la tesi di DP-PL-Prima Versione.

3.4.2 DP-PL-Seconda Versione

È fissata una orientazione $[M]_{\mathcal{K}} = [\sum_{\sigma \in (\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{K}_{n-1})} \varepsilon(\sigma)\sigma]$ generatore di $H_n^\Delta(\mathcal{K}; R) \cong R$.

Vogliamo costruire delle ψ_p che facciano commutare i quadrati del diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C_\Delta^p(\mathcal{K}; R) & \xrightarrow{\delta} & C_\Delta^{p+1}(\mathcal{K}; R) & \longrightarrow & \dots \\ & & \cong \downarrow \psi_p & & \cong \downarrow \psi_{p+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & C_{n-p}^{CW}(\hat{\mathcal{K}}; R) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-p-1}^{CW}(\hat{\mathcal{K}}; R) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Consideriamo su $\mathcal{K}^{(1)}$ l'orientazione ottenuta propagando quella su \mathcal{K} .

Sia $D_{n-p}^\Delta(\mathcal{K}^{(1)}; R)$ il sottomodulo di $C_{n-p}^\Delta(\mathcal{K}^{(1)}; R)$ generato dalle $(n-p)$ -catene simpliciali c tali che $\partial c \subseteq \bigcup_\sigma \partial D(\sigma)$ al variare dei σ p -simplessi.

Definiamo una $g: |\mathcal{K}^{(1)}| \rightarrow |\mathcal{K}|$ simpliciale e omotopa a id_M per induzione sugli scheletri: se $\hat{\sigma}$ vertice di $\mathcal{K}^{(1)}$ è anche un vertice di \mathcal{K} poniamo $g(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$; se invece è il baricentro di un 1-simpleso $\Delta[v_0, v_1]$ possiamo definire $g(\hat{\sigma}) = v_0$ oppure $g(\hat{\sigma}) = v_1$. La definizione di g sui simplessi di dimensione più alta segue automaticamente da queste scelte.

Per costruzione, g ha la proprietà che $\forall \sigma \in \mathcal{K}$ un p -simpleso $\exists!$ τ p -simpleso di $\mathcal{K}^{(1)}$

tale che $g|_\tau$ è un isomorfismo lineare tra τ e $\pm\sigma$. Tutti gli altri p -simplessi la cui immagine tramite g è contenuta in σ degenerano su facce proprie.

Definisco infine $\gamma_p := g^* : C_\Delta^p(\mathcal{K}; R) \longrightarrow C_\Delta^p(\mathcal{K}^{(1)}; R)$.

Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} C_\Delta^p(\mathcal{K}; R) & \overset{\psi_p}{\dashrightarrow} & D_{n-p}^\Delta(\mathcal{K}^{(1)}; R) \\ \gamma_p \downarrow & \searrow \rho & \downarrow j_{n-p} \\ C_\Delta^p(\mathcal{K}^{(1)}; R) & \xrightarrow{[M]_{\mathcal{K}^{(1)}}} & C_{n-p}^\Delta(\mathcal{K}^{(1)}; R) \end{array}$$

PROPOSIZIONE: Valgono i seguenti risultati:

1. ρ è iniettivo e ha come immagine $D_{n-p}^\Delta(\mathcal{K}^{(1)}; R)$. Quindi esiste un unico isomorfismo ψ_p che fa commutare il quadrato;
2. $\forall \sigma$ p -simpleso orientato (secondo $[M]_{\mathcal{K}}$) di \mathcal{K} , $\psi_p(\sigma^*)$ è una orientazione di $D(\sigma)$;
3. I quadrati commutano (a meno di un segno).

Da qui, passando alle omologie e osservando che γ e j inducono isomorfismi, si ottiene la tesi di DP-PL-Seconda Versione.

3.5 Lezione 23 - 22/12

DEFINIZIONE: Sia X una varietà topologica compatta (T_2 e N_2). X è triangolabile se esiste un omeomorfismo $f: M \longrightarrow X$ dove M è una varietà PL.

DEFINIZIONE: X è triangolabile in modo orientato se M è PL-orientata.

Osservazione. DP vale per X su \mathbb{Z} e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ con X triangolabile.

ESEMPIO: Se X è una varietà differenziabile allora è triangolabile tramite mappe che sono diffeomorfismi a tratti. Inoltre, si può trattare l'orientabilità con nozioni di differenziabilità e dimostrare DP con strumenti "differenziali" senza passare alle triangolazioni (Teoria di Morse).

PROPOSIZIONE: Per $n \geq 4$ esistono n -varietà topologiche non triangolabili.

Sia M varietà topologica connessa non necessariamente compatta. $\forall x \in M$ esiste un intorno U di x in M omeomorfo a \mathbb{R}^n . Da ora in poi identificheremo impropriamente U con \mathbb{R}^n . Abbiamo che:

$$H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R) \cong H_{n-1}(S^{n-1}; R) \cong R$$

DEFINIZIONE: Una orientazione locale di M in x è un generatore μ_x di $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$.

Osservazione. Dato $x \in B \subseteq \mathbb{R}^n \subseteq M$ con B aperto limitato, si ha che $\forall y \in B$ $H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong H_n(M, M \setminus B; R) \cong H_n(M, M \setminus \{y\}; R)$. Dunque $\forall y \in B$ abbiamo un'orientazione $\mu_y = i_*(\mu_B)$ con μ_B il generatore di $H_n(M, M \setminus B; R)$.

Quindi la definizione è locale e non puntuale come sembrerebbe evincersi dalla definizione.

DEFINIZIONE: Una orientazione globale su M è una famiglia di orientazioni locali $\{\mu_x\}_{x \in M}$ localmente coerenti.

DEFINIZIONE: M è R -orientabile se ammette una R -orientazione.

Osservazione. Se $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ allora M è automaticamente R -orientabile.

Sia $R = \mathbb{Z}$. Consideriamo $\widetilde{M} := \{\mu_x \mid x \in M\}$ l'insieme delle orientazioni definibili su ogni punto di M . Sia inoltre $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ tale che $\pi(\mu_x) = x$. Tale applicazione ha tutte le fibre di cardinalità 2. Mettiamo una topologia su \widetilde{M} in modo tale che \widetilde{M} sia orientata e π sia un rivestimento doppio.

Dato $B \subseteq \mathbb{R}^n \subseteq M$, sia $U(\mu_B) := \{\mu_x \in \widetilde{M} \mid x \in B \wedge \mu_x = i_*(\mu_B)\}$. La famiglia degli insiemi di questo tipo forniscono una base di aperti per una topologia su \widetilde{M} e con questa topologia π risulta essere un rivestimento doppio.

Osservazione. Da ora in avanti useremo la notazione $H_n(M|A; R) = H_n(M, M \setminus A; R)$.

Osservazione. $\forall \mu_x \in \widetilde{M}, x \in B$ si ha che $H_n(\widetilde{M}|\mu_x; R) \cong H_n(U(\mu_B)|\mu_x; R) \cong H_n(B|x; R)$. Quindi possiamo scegliere come orientazione locale μ_{μ_x} quella che corrisponde a μ_x tramite tali isomorfismi. Per costruzione tali orientazioni sono localmente coerenti, dunque \widetilde{M} è orientabile.

ESEMPIO: Se n è pari, per $S^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si ha che S^n è orientabile mentre il proiettivo no.

PROPOSIZIONE: \widetilde{M} è connesso se e solo se M è non orientabile. Se M è orientabile $\widetilde{M} \cong M \sqcup (-M)$.

COROLLARIO: Ogni varietà M tale che $\pi_1(M)$ non ha sottogruppi di indice 2 è orientabile.

LEMMA: Sia M una n -varietà topologica connessa (non necessariamente compatta) e sia $A \subseteq M$ un sottoinsieme compatto. Supponiamo che M sia \mathbb{Z} -orientata tramite $\{\mu_x\}_{x \in M}$. Allora:

1. Esiste una unica classe $\alpha_A \in H_n(M|A; \mathbb{Z})$ tale che $\forall x \in A$ si ha $\mu_x = i_x(\alpha_A)$ dove $i: (M, M \setminus A) \hookrightarrow (M, M \setminus \{x\})$;
2. $\forall i > n$ si ha $H_i(M|A) = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che, dati A, B compatti in M tali che le tesi del lemma valgono per A, B e $A \cap B$, allora il lemma vale anche per $A \cup B$.

Analizzando la successione di Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{n+1}(M|A \cap B; R) & \rightarrow & H_n(M|A \cup B; R) & \xrightarrow{\phi} & H_n(M|A; R) \oplus H_n(M|B; R) & \xrightarrow{\psi} & H_n(M|A \cap B) \rightarrow \dots \\
 \parallel & & & & & & \\
 0 & & \alpha & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & (\alpha, -\alpha) & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & (\alpha, \beta) \xrightarrow{\quad \quad \quad} \alpha + \beta
 \end{array}$$

$\forall i > n$ si ha che $H_i(M|A \cup B; R) = 0$ poiché per ipotesi sono nulli i gruppi di omologia per $A, B, A \cap B$. Inoltre esistono unici $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_{A \cap B}$ che inducono tramite l'inclusione i μ_x . Dato che α_A e α_B coincidono su $A \cap B$ si ha che $\psi(\alpha_A, -\alpha_B) = 0$. Per esattezza della successione dunque esiste unico $\alpha_{A \cup B}$ tale che $\phi(\alpha_{A \cup B}) = (\alpha_A, -\alpha_B)$. Ma allora $\alpha_{A \cup B}$ coincide con α_A su A e con α_B su B , come voluto.

Riconduciamoci adesso al caso $M = \mathbb{R}^n$. Ricopriamo $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ con A_i compatto in una carta \mathbb{R}^n dentro M . Per induzione sul numero di compatti, l'osservazione precedente ci permette di supporre $m = 1$. Infatti una volta verificato il passo base, per ipotesi induttiva si ha che $A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}, A_m, (A_1 \cap A_m) \cup \dots \cup (A_{m-1} \cap A_m)$ verificano la tesi del lemma, e dunque anche A la verifica. Quindi considerando $A \subseteq \mathbb{R}^n \subseteq M$ per escissione $H_n(M|A; R) \cong H_n(\mathbb{R}^n|A; R)$.

Dimostriamo ora che la tesi vale per A un complesso simpliciale finito per induzione sul numero di semplici. Poiché intersezione di semplici è un semplice, è sufficiente dimostrare il lemma per Δ^k con $k \in \mathbb{N}$. Per esso la tesi del lemma è ovvia essendo connesso, compatto e contrattile.

Infine, dato un arbitrario A compatto in \mathbb{R}^n , sia $\alpha = [z] \in H_i(\mathbb{R}^n|A; R)$. L'unione C delle immagini dei semplici di ∂z in $\mathbb{R}^n \setminus A$ è un compatto e dunque ha distanza positiva da A . Quindi preso un Δ^n ad immagine contenente A , esiste una sua suddivisione tale che ogni suo semplice non intersechi contemporaneamente A e C . Detta \mathcal{K} l'unione dei semplici di tale suddivisione che intersecano A , la tesi del lemma vale per \mathcal{K} per quanto visto sopra.

Chiamando $\alpha_{\mathcal{K}} = [z] \in H_i(\mathbb{R}^n|\mathcal{K}; R)$ si ha dunque $\alpha_k = 0$ per $i > n$, e perciò essendo $i_*(\alpha_{\mathcal{K}}) = \alpha$ anche $\alpha = 0$.

Adesso, data una famiglia $\{\mu_x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ di orientazioni localmente coerenti sicuramente esiste un $\alpha_A \in H_n(\mathbb{R}^n|A; R)$ che le induce (è sufficiente prendere una palla contenente A). Per l'unicità, supponiamo esistano α_A, α'_A tali che $i_*(\alpha_A - \alpha'_A) = 0 \in H_n(\mathbb{R}^n|x; R) \forall x \in A$: la stessa relazione vale su ogni semplice di \mathcal{K} perché si ha $H_n(\mathbb{R}^n|\sigma; R) \cong H_n(\mathbb{R}^n|x; R)$ dove $x \in A$ e $x \in \sigma$. Ma allora $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha'_A$ e quindi $i_*(\alpha_{\mathcal{K}}) = \alpha_A = \alpha'_A = i_*(\alpha'_A)$. \square

COROLLARIO: Se M è compatta, potendo scegliere $A = M$ nel lemma si ottiene $H_i(M) = 0 \forall i > n$ e possiamo definire la classe fondamentale di M rispetto all'orientazione $[M] := \alpha_M$.

3.5.1 Coomologia a Supporto Compatto

Sia X uno spazio topologico T_2 .

DEFINIZIONE: Una cocatena $\varphi \in C^i(X; R)$ è detta a supporto compatto se esiste un compatto $K \subseteq X$ tale che $\varphi(c) = 0 \forall c$ i -catena a valori in $X \setminus K$.

L'insieme delle i -cocatene a supporto compatto si indica $C_c^i(X; R)$.

$(C_c^i(X; R), \delta)$ è un sottocomplesso di moduli liberi di $(C^i(X; R), \delta)$ invariante per i bordi, quindi possiamo parlare di $H_c^i(X; R)$.

Per descrivere gli $H_c^i(X; R)$ consideriamo una generica famiglia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di R -moduli. Sia (I, \leq) parzialmente ordinato e diretto, cioè tale che per ogni $i, j \in I$ esiste $\alpha \in I$ tale che $\alpha \geq i, \alpha \geq j$.

Sia inoltre $\{f_{\alpha\beta}: G_\alpha \rightarrow G_\beta\}_{\alpha \leq \beta}$ morfismi di R -moduli tali che $\forall \alpha f_{\alpha\alpha} = id_{G_\alpha}$ e $\forall \alpha \leq \beta \leq \gamma f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}$.

DEFINIZIONE: Si dice limite diretto $\varinjlim G_\beta = \bigsqcup_\alpha G_\alpha / \sim$ dove: $G_\alpha \ni a \sim b \in G_\beta$ se e solo se $f_{\alpha\gamma}(a) = f_{\beta\gamma}(b)$ per un certo $\gamma \in I$ con l'operazione indotta dai G_α .

Osservazione. Se $J \subseteq I$ tale che $\forall \alpha \in I$ esiste $\beta \in J$ tale che $\alpha \leq \beta$ allora $\varinjlim_{\alpha \in I} G_\alpha = \varinjlim_{\beta \in J} G_\beta$.

Sia X una varietà e $I = \{K \subseteq X \mid K \text{ compatto in } X\}$ ordinato con l'inclusione. Se considero le mappe $i_{KL}^*: H^p(X|K; R) \rightarrow H^p(X|L; R)$ con $K \leq L$ si ha che $\varinjlim H^p(X|K; R) \cong H_c^p(X; R)$.

Osservazione. Se X è compatto allora $H_c^p(X; R) \cong H^p(X; R)$.

Vogliamo definire adesso l'applicazione di dualità $H_c^p(X; R) \rightarrow H_{n-p}(X; R)$.

Osservazione. La teoria coomologica a supporto compatto è ben definita considerando le applicazioni proprie.

Dati due compatti $K \subseteq L \subseteq X$, per ogni orientazione globale $\{\mu_x\}_{x \in X}$ su X esistono unici α_L, α_K che inducono puntualmente tale orientazione ($i_*(\alpha_L) = \alpha_K$).

Si può verificare che il prodotto \frown commuta nel senso che $i_*(\alpha_L) \frown \alpha = \alpha_L \frown i^*(\alpha)$; perciò gli omomorfismi $H^p(X|K; R) \rightarrow H_{n-p}(X; R)$ tali che $\alpha \mapsto \alpha_K \frown \alpha$ passano al limite diretto.

TEOREMA (DP-TOP.): Sia M varietà topologica connessa e R -orientata con classe fondamentale $[M]$. Allora $\forall p$ l'applicazione $[M] \frown : H_c^p(M; R) \rightarrow H_{n-p}(M; R)$ è un isomorfismo (con $R = \mathbb{Z}$ o $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).