# Formule di Plücker, punti di Weierstrass e automorfismi di Superfici di Riemann

Simone Cappellini
http://poisson.phc.dm.unipi.it/~cappellini

*21 aprile 2020*

## Introduzione

Lo scopo di questo seminario è quello di introdurre degli invarianti *estrinseci* di una curva proiettiva, vale a dire degli invarianti che dipendano dall'inclusione della varietà, detti formule di Plücker. Utilizzeremo poi tali formule per ottenere informazioni *intrinseche* della curva quali il numero di punti di Weierstrass, ovvero di punti in cui si perde l'omogeneità della varietà complessa. Infine mostreremo come sia possibile applicare quanto fatto in precedenza per dimostrare la finitezza degli automorfismi di Superfici di Riemann.

## 1 Formule di Plücker

Sia $f\colon S \longrightarrow \mathbb{PC}^n$ con $S$ superficie di Riemann. Localmente è sempre possibile sollevare $f$ in $\mathbb{C}^{n+1}$, ovvero intorno ad ogni punto $p \in S$ esiste una applicazione olomorfa $v$ a valori in $\mathbb{C}^{n+1}$ tale che $f(z) = [v_0(z), \ldots, v_n(z)]$. Viceversa, data una $v\colon S \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, è possibile definire $f(z) := [v_0(z), \ldots, v_n(z)]$ anche nel caso in cui $v$ si annulli in punti isolati. Infatti, prendendo coordinate locali $z$ intorno ad uno zero $p \in S$ di $v$, se $k = \min_i(\mathrm{ord}_p v_i)$ allora $\widetilde{f}(z) := [z^{-k}v_0(z), \ldots, z^{-k}v_n(z)]$ è ben definita ed estende $f$.

**Definizione 1.1.** Sia $S$ una superficie di Riemann compatta e sia $f\colon S \longrightarrow \mathbb{PC}^n$ una mappa non degenere data localmente dalla funzione vettoriale $v$. Definiamo la $k$-esima curva associata ad $f$ come

$$f_k\colon S \longrightarrow G(k+1, n+1) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})$$

data da $f_k(z) = [v(z) \wedge v'(z) \wedge \ldots \wedge v^{(k)}(z)]$.

**Osservazione 1.2.** L'inclusione della Grassmanniana in uno spazio proiettivo è data dalla cosiddetta immersione di Plücker, che manda il piano $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_j)$ in $[v_1 \wedge \ldots \wedge v_j] \in \mathbb{P}(\Lambda^j \mathbb{C}^m)$. Scelta una base di $\mathbb{C}^m$, essa induce un isomorfismo di $\mathbb{P}(\Lambda^j \mathbb{C}^m)$ con $\mathbb{PC}^N$, dove $N = \binom{m}{j}$ le cui coordinate sono dette coordinate di Plücker e sono i determinanti dei minori $j \times j$ della matrice $j \times m$ avente come righe $v_1, \ldots, v_j$.

**Proposizione 1.3.** *$f_k$ è ben definita, ovvero:*

1. *la quantità $v(z) \wedge v'(z) \wedge \ldots \wedge v^{(k)}(z)$ non può essere identicamente nulla;*
2. *la definizione è indipendente dalla scelta del sollevamento $v$;*
3. *la definizione è indipendente dalla scelta delle coordinate locali $z$.*

*Dimostrazione.* 1. Se per un certo $k$ vale $v(z) \wedge v'(z) \wedge \ldots \wedge v^{(k)}(z) \equiv 0$ ma $v(z) \wedge v'(z) \wedge \ldots \wedge v^{(k-1)}(z) \not\equiv 0$, allora si ha che $v^{(k)}(z)$ è linearmente dipendente con le prime $(k-1)$ derivate di $v$. Ma allora

$$\Big(v(z) \wedge \ldots \wedge v^{(k-1)}(z)\Big)' = v(z) \wedge \ldots \wedge v^{(k-2)}(z) \wedge v^{(k)}(z) = \\ = \lambda(z) \cdot v(z) \wedge \ldots \wedge v^{(k-1)}(z)$$

da cui $f_{k-1}$ dovrebbe essere costante, cioè $f(S)$ sarebbe contenuto in un $(k-1)$-piano in $\mathbb{PC}^n$, che è assurdo per via delle ipotesi su $f$. □

*Dimostrazione.* 2. Sia $\widetilde{v}(z) = \rho(z) \cdot v(z)$ un altro sollevamento di $f$. Allora

$$\widetilde{v} \wedge \widetilde{v}' = \rho \cdot v \wedge (\rho' \cdot v + \rho \cdot v') = \rho^2 \cdot (v \wedge v')$$

e in generale

$$\widetilde{v} \wedge \ldots \wedge \widetilde{v}(k) = \rho^{k+1} \cdot (v \wedge \ldots \wedge v^{(k)}).$$

□

*Dimostrazione.* 3. In modo simile al punto precedente, se $w$ è un altro sistema di coordinate locali su $S$, vale $\frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial z}$, da cui

$$v \wedge \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial w} \left( v \wedge \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

e in generale

$$v \wedge \ldots \wedge \frac{\partial^k v}{\partial w^k} = \left( \frac{\partial z}{\partial w} \right)^{\frac{k(k+1)}{2}} \left( v \wedge \ldots \wedge \frac{\partial^k v}{\partial z^k} \right).$$

□

**Definizione 1.4.** Siano $f_1(z), \dots, f_n(z)$ coordinate Euclidee per $f$ intorno ad un punto $f(z_0)$. Definiamo l'indice di ramificazione $\beta(z_0)$ di $f$ in $z_0$ come l'ordine di annullamento del Jacobiano $(\frac{\partial f_1}{\partial z}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial z})$, cioè

$$\beta(z_0) = \min\left(\mathrm{ord}_{z_0}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\right)\right).$$

Analogamente definiamo $\beta_k(z_0)$ come l'indice di ramificazione di $f_k$ in $z_0$ e la ramificazione totale $\beta_k = \sum_{z_0 \in S} \beta_k(z_0)$ per ogni $k$.

Per rendere calcolabili gli indici $\beta_k(z_0)$ sarà utile mettere la curva in *forma normale* nel punto $z_0$. Consideriamo innanzitutto un sollevamento $v$ di $f(z) = [v(z)] = [v_0(z), \dots, v_n(z)]$ con $v(z_0) \neq 0$.
A meno di un cambio lineare di coordinate in $\mathbb{C}^{n+1}$ possiamo supporre che $v(z_0) = (1, 0, \dots, 0)$.
Scriviamo adesso

$$(v_1(z), \dots, v_n(z)) = (z - z_0)^{\alpha_1 + 1}(v_1^1(z), \dots, v_n^1(z))$$

con $(v_1^1(z_0), \dots, v_n^1(z_0)) \neq 0$. Cambiando ancora una volta le ultime $n$ coordinate di $\mathbb{C}^{n+1}$ in modo lineare possiamo supporre $(v_1^1(z_0), \dots, v_n^1(z_0)) = (1, 0, \dots, 0)$.
Come in precedenza, scriviamo

$$(v_2^1(z), \dots, v_n^1(z)) = (z - z_0)^{\alpha_2 + 1}(v_2^2(z), \dots, v_n^2(z))$$

con $(v_2^2(z_0), \dots, v_n^2(z_0)) \neq 0$. Continuando allo stesso modo otteniamo un sistema di coordinate per $\mathbb{C}^{n+1}$ nel quale

$$v(z) = (1 + \dots, (z - z_0)^{\alpha_1 + 1} + \dots, (z - z_0)^{\alpha_1 + \alpha_2 + 2} + \dots, \dots, (z - z_0)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n} + \dots).$$

Questa è chiamata *forma normale* della curva $f$ intorno a $z_0$. In pratica, mettere una curva in forma normale significa scegliere una base $\{e_0, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{C}^{n+1}$ tale per cui $f_k(z_0)$ è generato da $\{e_0, \dots, e_k\}$.

Calcoliamo adesso gli indici di ramificazione $\beta_k(z_0)$ in termini degli esponenti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ che appaiono nella forma normale: supponiamo per semplicità $z_0 = 0$ e normalizziamo il sollevamento $v$ in modo da avere la prima componente costantemente 1. Abbiamo allora

$$v(z) = (1, z^{\alpha_1 + 1} + \dots, z^{\alpha_1 + \alpha_2 + 2} + \dots, \dots, z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n} + \dots).$$

Volendo scrivere $f_k(z)$ in coordinate, dobbiamo calcolare i determinanti dei minori $(k+1) \times (k+1)$ della matrice

$$\begin{pmatrix} v(z) \\ v'(z) \\ \vdots \\ v^{(k)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z^{\alpha_1+1} + \dots & \dots & z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + n} + \dots \\ 0 & (1+\alpha_1) z^{\alpha_1} + \dots & \dots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Il minore il cui determinante ha ordine di annullamento minore in 0 è quello più a sinistra, che chiamiamo $\Lambda_{I_0}$ dove $I_0 = \{1, \dots, k+1\}$, e perciò possiamo prendere come coordinate Euclidee di $f_k(S)$ intorno a $z_0 = 0$ i quozienti $\{|\Lambda_I|/|\Lambda_{I_0}|\}_I$. Il minore con ordine di annullamento minore oltre a $\Lambda_{I_0}$ è $\Lambda_J$ dove $J = \{1, \dots, k, k+2\}$, da cui l'indice di ramificazione di $f_k$ in $z_0 = 0$ è l'ordine di annullamento di

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{|\Lambda_J|}{|\Lambda_{I_0}|}\right).$$

Si dimostra per induzione (sviluppando con Laplace per l'ultima riga) che vale

$$|\Lambda_{I_0}| = z^{k\alpha_1 + \ldots + 2\alpha_{k-1} + \alpha_k} \cdot D(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \ldots$$

dove

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \begin{vmatrix} \alpha_1 + 1 & \ldots & \alpha_1 + \ldots + \alpha_k + k \\ \alpha_1(\alpha_1+1) & & \vdots \\ \vdots & \ldots & \end{vmatrix}$$

e in modo analogo che

$$|\Lambda_J| = z^{k\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + \alpha_{k+1} + 1} \cdot D(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k + \alpha_{k+1} + 1) + \ldots$$

Poiché i due coefficienti che appaiono sono entrambi non nulli (iterativamente raccogliendo ed effettuando operazioni per colonne si riesce a scrivere il determinante come prodotto di fattori non nulli), si ottiene che

$$\beta_k(z_0) = \mathrm{ord}_{z_0}\left(\frac{|\Lambda_J|}{|\Lambda_{I_0}|}\right) - 1 = \alpha_{k+1}.$$

Il nostro scopo adesso è quello di collegare due invarianti legati a $f$ e alle sue curve associate: il grado $d_k$ di $f_k$ e la ramificazione totale $\beta_k$ di $f_k$. Per fare ciò consideriamo il pullback $f_k^*(ds^2)$ della metrica di Fubini-Study di $\mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1})$. Lontano dai punti singolari questa è una metrica anche su $S$, mentre su di essi è un prodotto scalare degenere; quindi possiamo sperare di ottenere una scrittura dell'integrale della forma di curvatura su $S$ come funzione del genere di $S$ e di $\beta_k$; d'altro canto possiamo calcolare esplicitamente questa forma di curvatura e collegarla con i gradi $d_k$ delle curve associate.

In generale, si dice *pseudo-metrica* un prodotto scalare $\varphi$ semidefinito positivo sul fibrato tangente di una superficie Riemanniana se è definito localmente intorno a $p$ come $\varphi = h(z) \cdot dz \otimes d\bar{z}$, dove $h(z) = |z|^{2\nu} h_0(z)$ e $h_0(z) > 0$. Diciamo che $\varphi$ ha uno zero di ordine $\nu$ in $z = 0$ e scriviamo $\mathrm{ord}_p(\varphi) = \nu$; il divisore

$$D_\varphi = \sum_{p \in S} \mathrm{ord}_p(\varphi) \cdot p$$

è detto *divisore singolare* della pseudo-metrica $\varphi$. Si ottiene dunque una vera e propria metrica sul line bundle $T' \otimes [D_\varphi]$: se identifichiamo le sezioni di tale fibrato con i campi vettoriali meromorfi $\theta = f(z) \cdot (\partial/\partial z)$ aventi poli di ordine al più $\mathrm{ord}_p(\varphi)$ in $p$, allora il prodotto scalare $(\theta_1, \theta_2) = |f_1(z) f_2(z)| h(z)$ definisce una metrica. Adesso, la forma di curvatura $\Theta$ di questa metrica rispetto alla connessione di Chern è data da $\Theta = -\partial\bar{\partial} \log h(z)$ (vedi [4]), e perciò identificando la prima classe di Chern con un numero intero si ottiene (vedi [1], pag.141)

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \int_S \Theta &= c_1(T' \otimes [D_\varphi]) \\ &= \chi(S) + \deg(D_\varphi). \end{aligned}$$

Nel nostro caso dunque, prendendo $\varphi = f_k^*(ds^2)$ il pullback della metrica di Fubini-Study, si ha che $D_\varphi = \sum_{p \in S} \beta_k(p) \cdot p$ da cui

$$\frac{i}{2\pi} \int_S \Theta = 2 - 2g + \beta_k.$$

Resta adesso da calcolare esplicitamente la forma di curvatura per giungere alle formule di Plücker.

Sia $\omega$ la $(1,1)$-forma associata alla metrica di Fubini-Study su $\mathbb{PC}^n$ e sia come in precedenza $v(z)$ un sollevamento di $f$. Denotiamo inoltre $\Lambda_k(z) = v(z) \wedge \ldots \wedge v^{(k)}(z) \in \Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1}$. Allora vale che:

**Lemma 1.5.**

$$f_k^*(\omega) = \frac{\|\Lambda_{k-1}\|^2 \cdot \|\Lambda_{k+1}\|^2}{\|\Lambda_k\|^4} \cdot \frac{i}{2\pi} dz \wedge d\bar{z}.$$

*Dimostrazione.* La prima osservazione da fare è che la quantità al membro destro dell'uguaglianza effettivamente non dipende dalla scelta del sollevamento $v$. Prendendo $\widetilde{v} = \rho v$ e calcolando le sue derivate, possiamo inoltre vedere che è sempre possibile scegliere un sollevamento tale che $v^{(k+1)}(z_0)$ è ortogonale a $v(z_0), \ldots, v^{(k)}(z_0)$. Scelto $z_0$ per cui $\Lambda_{k+1}(z_0) \neq 0$ considereremo allora un tale sollevamento.

Calcoliamo adesso

$$\begin{aligned} f_k^*(\omega) &= \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \|\Lambda_k\|^2 \\ &= \frac{i}{2\pi} \partial \left( \frac{(\Lambda_k, \Lambda_k')}{(\Lambda_k, \Lambda_k)} d\bar{z} \right) \\ &= \left( \frac{(\Lambda_k, \Lambda_k)(\Lambda_k', \Lambda_k') - (\Lambda_k, \Lambda_k')(\Lambda_k', \Lambda_k)}{(\Lambda_k, \Lambda_k)^2} \right) \cdot \frac{i}{2\pi} dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

dove $\Lambda_k' = v \wedge v' \wedge \ldots \wedge v^{(k-1)} \wedge v^{(k+1)}$.

Ma con la scelta di sollevamento fatta in precedenza e il prodotto scalare indotto sullo spazio $\Lambda^{k+1}\mathbb{C}^{n+1}$ si ha

$$(\Lambda_k(z_0), \Lambda_k'(z_0)) = 0,$$

$$(\Lambda_k'(z_0), \Lambda_k'(z_0)) = \|\Lambda_{k-1}(z_0)\|^2 \cdot \|v^{(k+1)}(z_0)\|^2$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}(\Lambda_k(z_0), \Lambda_k(z_0))(\Lambda_k'(z_0), \Lambda_k'(z_0)) &= \|\Lambda_{k-1}(z_0)\|^2 \cdot \|v^{(k+1)}(z_0)\|^2 \cdot \|\Lambda_k(z_0)\|^2 \\ &= \|\Lambda_{k-1}(z_0)\|^2 \cdot \|\Lambda_{k+1}(z_0)\|^2.\end{aligned}$$

In tal modo il lemma è dimostrato. □

Dunque rimettendo i pezzi insieme si ha che $\varphi = f_k^*(ds^2)$, con $h = \frac{\|\Lambda_{k-1}\|^2 \cdot \|\Lambda_{k+1}\|^2}{\|\Lambda_k\|^4 \cdot \pi}$ e $\Theta = -\partial\bar{\partial} \log h$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned}\frac{i}{2\pi}\Theta &= -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{\|\Lambda_{k-1}\|^2 \cdot \|\Lambda_{k+1}\|^2}{\|\Lambda_k\|^4 \cdot \pi}\right) \\ &= -f_{k-1}^*(\omega) + 2f_k^*(\omega) - f_{k+1}^*(\omega)\end{aligned}$$

che porta, integrando, a

$$\frac{i}{2\pi}\int_S \Theta = -d_{k-1} + 2d_k - d_{k+1}.$$

Confrontando infine i due calcoli svolti per integrare la forma di curvatura si ottiene finalmente quanto desiderato:

$$d_{k-1} - 2d_k + d_{k+1} = 2g - 2 - \beta_k.$$

# 2 Punti di Weierstrass e Automorfismi di Superfici di Riemann

Le formule di Plücker, come abbiamo visto, riguardano la superficie di Riemann esclusivamente in relazione al suo posizionamento in $\mathbb{PC}^n$. In questa sezione però vedremo come sia possibile applicare tali formule per arrivare a risultati intrinseci delle superfici.

Data una superficie di Riemann $S$ di genere $g$ e un suo punto $p \in S$, una versione del Teorema di Riemann-Roch (che dice $h^0(kp) - h^0(K - kp) = k - g + 1$) implica che $h^0(kp) = \dim(H^0(S, \mathcal{O}([kp]))) = k - g + 1$ per $k \geq 2g - 1$ e in generale

$$h^0(kp) = \begin{cases} h^0((k-1)p) + 1 & \text{se esiste } f \in \mathfrak{M}(S) \text{ tale che } (f)_\infty = kp, \\ h^0((k-1)p) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Da ciò segue che esistono esattamente $g$ interi positivi $a_1 < \ldots < a_g$ tali per cui non esiste una funzione meromorfa $f$ su $S$ con $(f)_\infty = a_i p$. Questi interi sono detti *gap values* del punto $p \in S$.

**Definizione 2.1.** Un punto $p \in S$ si dice regolare se i suoi gap values sono $a_i = i$ per ogni $i = 1, \ldots, g$. Un punto irregolare viene detto *punto di Weierstrass*. In altre parole, un punto di Weierstrass è un punto per cui esiste una funzione $f$ olomorfa su $S \setminus \{p\}$ e con un polo di ordine al più $g$ in $p$.
Definiamo inoltre il peso del punto di Weierstrass $p$ come

$$W(p) = \sum_{i=1}^{g} (a_i - i),$$

dove gli $a_i$ sono i suoi gap values.

Vediamo dunque adesso come collegare le formule di Plücker con quanto appena definito. Sia $S$ superficie di Riemann di genere $g \geq 2$ e $K$ il suo fibrato canonico. Usando ancora Riemann-Roch, si può verificare che il sistema lineare dato da $K$ ha *base locus* vuoto, da cui è ben definita la seguente curva:

**Definizione 2.2.** Si definisce curva canonica di $S$ la curva data da

$$\begin{array}{rccc} i_K\colon & S & \longrightarrow & \mathbb{PC}^{g-1} \\ & p & \longmapsto & [\sigma_1(p), \ldots, \sigma_g(p)] \end{array}$$

dove le $\sigma_i$ sono una base di $H^0(S, \mathcal{O}(K))$.

Da ora in avanti, sarà necessario distinguere le superfici con cui lavoreremo in due classi: quelle iperellittiche e quelle non.

**Definizione 2.3.** Una superficie di Riemann $S$ si dice iperellittica se esiste un rivestimento doppio ramificato da essa su $\mathbb{PC}^1$.

**Osservazione 2.4.** È semplice verificare (usando Riemann-Roch) che ogni superficie di genere 2 è iperellittica. In genere superiore vale che $i_K$ è un embedding quando $S$ è non iperellittica, e 2:1 altrimenti (e $i_K$ si fattorizza tramite $\mathbb{PC}^1$). Inoltre, vale che il rivestimento doppio è unico a meno di automorfismi di $\mathbb{PC}^1$ e chiamiamo *involuzione iperellittica* l'unico automorfismo di rivestimento diverso dall'identità.

Ipotizziamo da qui in avanti che $S$ sia non iperellittica e perciò che $i_K$ sia un embedding. Di conseguenza $i_K$ non ha punti singolari. Ci chiediamo chi sono (nel caso ci siano) i punti singolari per le sue curve associate. Una versione del Teorema di Riemann-Roch, detta versione *geometrica*, dice che, se $D = \sum p_i$ è un divisore sulla curva canonica $i_K(S)$, allora

$$\dim \operatorname{Span} \bar{D} = \deg D - h^0(D)$$

dove con $\bar{D}$ intendiamo l'insieme dei punti $p_i$ sulla curva canonica (e nel caso di punti multipli li consideriamo con le loro derivate).
Dunque un punto $p$ ha $h^0(gp) > 1$, e cioè è di Weierstrass, se e solo se $p$ con le sue $g - 1$

derivate genera un sottospazio proprio di $\mathbb{PC}^{g-1}$, ovvero è un punto singolare per una delle curve associate a $i_K$.
Per contare i gap values conviene però considerare una definizione equivalente ma duale a quella data: utilizzando la formula di Riemann-Roch si osserva che $a_i$ è un gap value se e solo se $h^0(K-(a_i-1)p) \neq h^0(K-a_ip)$. In tal modo si riesce a costruire una base per $H^0(M, \mathcal{O}(K))$ che rispetti la filtrazione decrescente data dai divisori $K, K-p, \dots, K-np, \dots$.
Questo permette di leggere i gap values direttamente nella scrittura in forma normale di $i_K$, aumentando di 1 tutti gli ordini di annullamento delle componenti. Perciò se la mappa canonica $i_K$ si scrive in coordinate centrate intorno a $p$ come

$$i_K(z) = [1, z^{\alpha_1+1} + \dots, z^{\alpha_1+\alpha_2+2} + \dots, \dots, z^{\alpha_1+\dots+\alpha_{g-1}+g-1} + \dots],$$

allora i gap values di $p$ sono

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_2 &= 2 + \alpha_1, \\
a_3 &= 3 + \alpha_1 + \alpha_2, \\
&\vdots \\
a_g &= g + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{g-1}
\end{aligned}$$

e il peso di $p$ è

$$W(p) = \sum_{k=1}^{g-1} (g-k)\alpha_k = \sum_{k=0}^{g-2} (g-k-1)\beta_k(p).$$

Possiamo quindi contare il peso totale dei punti di Weierstrass su $S$ applicando le formule di Plücker: consideriamo una combinazione lineare delle varie formule per togliere la dipendenza da $d_k$ per $k > 0$ e otteniamo

$$\sum_{k=0}^{g-2}(g-k-1)(d_{k-1} - 2d_k + d_{k+1}) = \sum_{k=0}^{g-2}(g-k-1)(2g-2-\beta_k)$$

da cui

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in S} W(p) = \sum_{k=0}^{g-2}(g-k-1)\beta_k &= gd + \sum_{k=0}^{g-2}(g-k-1)(2g-2) \\
&= g(2g-2) + (g-1)g(g-1) \\
&= (g-1)g(g+1)
\end{aligned}$$

Grazie a questo conteggio possiamo dimostrare il seguente Teorema:

**Teorema 2.5.** *Ogni superficie di Riemann $S$ di genere $g \geq 2$ ha un numero finito di automorfismi.*

*Dimostrazione.* Ogni automorfismo di $S$ deve permutare i suoi punti di Weierstrass. Essendo questi in numero finito, è sufficiente considerare gli automorfismi di $S$ che fissano tali punti.
Ipotizziamo per il momento che $S$ sia non iperellittica (da cui anche che $g > 2$). Allora vale il conteggio precedente sul peso totale dei punti di Weierstrass e il seguente teorema con una disuguaglianza stretta:

**Teorema 2.6** (Clifford)**.** *Sia $D \neq 0, K$ un divisore* speciale*, ovvero un divisore effettivo tale che $h^0(K - D) \neq 0$. Allora, se $S$ è non iperellittica,*

$$h^0(D) < \frac{\deg D}{2} + 1$$

Nella nostra situazione otteniamo dunque $h^0(kp) < \frac{k}{2} + 1$, da cui immediatamente $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e in generale $h^0((2i-2)p) < i$ che implica $a_i \leq 2i - 2$ per ogni $i \geq 2$ (siamo saliti in $2i - 2$ passi dal valore 1 al massimo al valore $i - 1$).
Di conseguenza abbiamo un bound sul peso di Weierstrass

$$W(p) = \sum_{i=1}^{g} (a_i - i) \leq \sum_{i=3}^{g} (i - 2) \leq \frac{(g-1)(g-2)}{2}$$

il quale ci porta ad avere un bound direttamente sui punti di Weierstrass, che risultano essere almeno

$$\frac{(g-1)g(g+1)}{\frac{1}{2}(g-1)(g-2)} = \frac{2g(g+1)}{g-2} \geq 2g + 6.$$

Sia adesso $C$ la curva canonica di $S$. Vale che ogni automorfismo di $C$ è indotto da un automorfismo di $\mathbb{PC}^{g-1}$ per restrizione (questo perché il fibrato canonico è intrinseco, vedi [2]); sia dunque $\tau \colon \mathbb{PC}^{g-1} \longrightarrow \mathbb{PC}^{g-1}$ un automorfismo che preserva $C$ e fissa ogni punto di Weierstrass. Da ciò segue che $\tau$ preserva tutti i piani osculatori per ogni punto di Weierstrass. Sia allora $V = (i_K)_{g-3}(p)$ con $p$ di Weierstrass e $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{PC}^1}$ l'insieme degli iperpiani contenenti $V$, anch'esso preservato da $\tau$. Se $V$ interseca $C$ in $k$ punti diversi da $p$ (che è un punto di intersezione con molteplicità $g - 2$), l'iperpiano $H_\lambda$ ha al più $2g - 2 - (k + g - 2) = g - k$ intersezioni con la curva fuori da $V$. Poiché ci sono almeno $2g + 6 - (k + 1) = 2g - k + 5$ punti di Weierstrass fuori da $V$, ne segue che almeno 3 di questi iperpiani contengono un punto di Weierstrass fuori da $V$, e sono fissati da $\tau$.
Di conseguenza $\tau$ fissa tutti gli iperpiani $H_\lambda$ e necessariamente ha ordine finito (le intersezioni di $H_\lambda$ con $C$ hanno un bound finito, per cui si trova una potenza sufficientemente grande che fissa ogni punto di $C$).
Per concludere, sia $m$ l'ordine di $\tau$ e sia $S' = S/\langle\tau\rangle$ una superficie di genere $g'$. La proiezione al quoziente risulta essere un rivestimento a $m$ fogli ramificato sui punti di Weierstrass (i quali hanno indice di ramificazione $m$): utilizzando la formula di Riemann-Hurwitz allora otteniamo

$$\begin{aligned} 2g - 2 &\geq m(2g' - 2) + (m - 1)(2g + 6) \\ 0 &\geq (m - 2)(2g - 2) + 2mg' + 6m - 8 \end{aligned}$$

che vale soltanto per $m = 1$, cioè $\tau = id$. Abbiamo perciò dimostrato che se $S$ è non iperellittica ogni automorfismo che fissa i suoi punti di Weierstrass è l'identità.
Sistemare anche il caso in cui $S$ è iperellittica è semplice: la curva canonica si fattorizza tramite $\mathbb{PC}^1$ ed è una curva razionale; a meno dell'involuzione iperellittica, ogni automorfismo di $S$ è dato da un automorfismo di $C \subseteq \mathbb{PC}^{g-1}$. Inoltre usando la formula di Riemann-Hurwitz si ottiene che i punti di Weierstrass di $S$ sono $2g + 2$ e poiché un automorfismo di $C$ (o equivalentemente di $\mathbb{PC}^1$) che fissa più di 3 punti è l'identità si ottiene la tesi anche in questo caso. $\square$

## Riferimenti bibliografici


[1] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley, 1994.

[2] R. Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces.* American Mathematical Society, Providence, R.I, 1995.

[3] E. Ballico and L. Gatto. Weierstrass points on singular curves. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 55(2):145–170, 1997.

[4] Chern Connections and Chern Curvatures. `https://ncatlab.org/nlab/files/ChernConnections.pdf`.

[5] Lezioni sulle Superfici di Riemann. `http://www-dimat.unipv.it/cornalba/dispense/LezSupRiemann.pdf`.