Kleinian Groups Aritmetici e Algebre di Quaternioni

Simone Cappellini
http://poisson.phc.dm.unipi.it/~cappellini

24 luglio 2020

Introduzione

Per lo spazio iperbolico 3-dimensionale $\mathbb{H}^3$, usando come modello quello del semispazio, si ha l'isomorfismo $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong PSL(2,\mathbb{C})$ che ci permette di ridefinire più concretamente i reticoli aritmetici e dà un modo più algebrico di studiare più in generale tutti i gruppi discreti in $PSL(2,\mathbb{C})$.

1 Preliminari Algebrici

Iniziamo dando un po' di notazioni e di risultati di algebra (teoria algebrica dei numeri e istituzioni di algebra) che daremo per buoni e che utilizzeremo proseguendo con il seminario. Il primo concetto da richiamare è quello di campo di numeri:

Definizione 1.1. Un campo di numeri k è una estensione finita di $\mathbb{Q}$.

Poiché la caratteristica del campo $\mathbb{Q}$ è 0, le estensioni finite sono automaticamente separabili e dunque per il Teorema dell'elemento primitivo esiste sempre un $t \in k$ tale che $k = \mathbb{Q}(t)$. Sia dunque f il polinomio minimo di t su $\mathbb{Q}$: esso avrà r_1 radici reali e $2r_2$ radici complesse coniugate a due a due.

Definizione 1.2. Nelle notazioni precedenti, si dice che k ha r_1 *real places* e r_2 *complex places*.

Denotiamo poi con R_k l'anello degli interi algebrici di k, che è un dominio di Dedekind (ovvero un anello Noetheriano integralmente chiuso e di dimensione 1) con la proprietà aggiuntiva che ogni ideale non nullo ha indice finito (e tale indice è detto *norma dell'ideale*).

La definizione precedente di *places* si inserisce in una più ampia trattazione che dovrebbe riguardare le possibili *valutazioni* e di conseguenza i completamenti di un campo di numeri.

Ci limiteremo a riportare qualche rapida informazione per dare un quadro generale, ma che non sarà esplicitamente necessaria nel prosieguo del seminario.

Definizione 1.3. Una valutazione su un campo F è una applicazione $v\colon F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tale che $v^{-1}(0) = \{0\}$, moltiplicativa e subadditiva.

Tralasciando la valutazione banale $v(x) = 1$ per ogni $x \neq 0$, e accorpando tutte le possibili valutazioni in classi di equivalenza rispetto a $v(x) \sim (v(x))^a$ per $a \in \mathbb{R}_{>0}$ possiamo classificare tutte le valutazioni esistenti per un campo di numeri k:

Proposizione 1.4. *Ogni valutazione su un campo di numeri k è equivalente ad una di queste:*

- *Se $\sigma\colon k \longrightarrow \mathbb{C}$ è un embedding di Galois, v_σ è la valutazione definita come $v_\sigma(x) = |\sigma(x)|$ o $v_\sigma(x) = |\sigma(x)|^2$;*
- *Se $\mathcal{P}$ è un ideale primo in R_k, $v_\mathcal{P}$ è la valutazione definita come $v_\mathcal{P}(x) = N(\mathcal{P})^{-n_\mathcal{P}(x)}$, dove $N(\mathcal{P})$ è la norma di $\mathcal{P}$, ovvero l'indice di $\mathcal{P}$ in R_k, e $n_\mathcal{P}(x)$ è il più grande m tale che $x \in \mathcal{P}^m$.*

Una classe di equivalenza di valutazioni è detta, in modo coerente alle notazioni precedenti, un place*.*

Osservando che ogni valutazione rende k uno spazio metrico con la distanza $d(x, y) = v(x - y)$, possiamo definire il completamento metrico di k rispetto alla valutazione v come k_v. Nel caso delle valutazioni v_σ, vale sempre che $k_v = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Negli altri casi invece, il completamento dà luogo ad un campo p-adico.

Come sappiamo, per definire una varietà iperbolica abbiamo bisogno di un sottogruppo delle isometrie dello spazio iperbolico che sia discreto e senza torsione. Di seguito al posto di "discreto" utilizzeremo prevalentemente l'aggettivo *Kleinian*:

Definizione 1.5. Un *Kleinian group* è un sottogruppo discreto $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$.

Due invarianti (per commensurabilità) possono essere definiti a partire da un Kleinian group Γ di covolume finito: un campo, detto *campo invariante delle tracce*, e un'*algebra di quaternioni invariante*. Prima di definire questi invarianti ricordiamo brevemente alcuni risultati a proposito delle algebre di quaternioni.

Definizione 1.6. Una algebra di quaternioni A sul campo F è un F-spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{1, i, j, k\}$ con moltiplicazione interna data dall'avere come elemento neutro 1 e dalle relazioni

$$i^2 = a\ 1, \qquad j^2 = b\ 1, \qquad ij = -ji = k$$

con $a, b \in F^*$. Per ogni elemento $x \in A$ è possibile definire la traccia e la norma ponendo rispettivamente $tr(x) := x + \overline{x}$ e $n(x) := x\overline{x}$, dove $\overline{x}$ è il coniugato di x, la anti-involuzione definita a partire da $\overline{1} := 1$, $\overline{i} := -i$, $\overline{j} := -j$, $\overline{k} := -k$.

Per il Teorema di Wedderburn sulle algebre centrali semplici, si ha la seguente caratterizzazione delle algebre di quaternioni:

Teorema 1.7. *Se A è un'algebra di quaternioni su F allora A è un anello di divisione oppure A è isomorfa a $M_2(F)$.*

Servirà inoltre la nozione di *order* all'interno di un'algebra di quaternioni:

Definizione 1.8. Sia A una algebra di quaternioni su k. Un *order* $\mathcal{O}$ in A è un R_k-reticolo completo, ovvero un R_k-modulo in A finitamente generato tale che $\mathcal{O} \otimes_{R_k} k \cong A$, che è anche un anello con 1.
Definiamo inoltre $\mathcal{O}^1 := \{\alpha \in \mathcal{O} \mid n(\alpha) = 1\}$, dove $n(x)$ è la norma di x in A.

Sia adesso σ un embedding di Galois per k. σ può essere reale (se $\sigma(k) \subseteq \mathbb{R}$) o complesso, e in base a questi embedding possiamo estendere l'algebra di quaternioni A su k ad un'algebra su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$ rispettivamente. Nel secondo caso avremo sempre $A \otimes_\sigma \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$ per via della chiusura algebrica di $\mathbb{C}$. Nel caso reale invece ci sono due comportamenti possibili:

Definizione 1.9. Se $\sigma\colon k \longrightarrow \mathbb{R}$ è un embedding (di Galois) reale del campo di numeri k. L'algebra di quaternioni A su k si dice *ramificata in* σ se $A \otimes_\sigma \mathbb{R} \cong \mathcal{H}$ l'algebra di quaternioni standard (ovvero con $a = b = -1$). Allo stesso modo più in generale dato un *place* v, diciamo che A è ramificata in v se $A \otimes_k k_v$ è (l'unica) algebra di divisione su k_v.

Grazie al teorema di Hasse-Minkowski sulle forme quadratiche isotrope che dà una dualità di tipo locale-globale, vedendo le algebre di quaternioni come spazi quadratici con la loro norma enunciamo il seguente risultato:

Teorema 1.10. *Sia A una algebra di quaternioni su un campo di numeri k. Allora $A \cong M_2(k)$ se e solo se $A \otimes_k k_v \cong M_2(k_v)$ per ogni* place *v (ovvero non ramifica, e diciamo che A* splitta *su k_v).*

Torniamo quindi a parlare degli invarianti che si possono definire a partire da un Kleinian group di covolume finito:

Definizione 1.11. Sia Γ un Kleinian group di covolume finito e sia $\Gamma^{(2)} = \langle \gamma^2 \mid \gamma \in \Gamma \rangle$. Si definisce il campo invariante delle tracce $k\Gamma := \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma^{(2)}) = \mathbb{Q}(\mathrm{tr}\gamma \ : \ \gamma \in \Gamma^{(2)})$.

Si dimostra che questo campo è sempre una estensione non reale di $\mathbb{Q}$ e che è un invariante per commensurabilità (larga), mentre non lo è il campo delle tracce $\mathbb{Q}(\mathrm{tr}\Gamma)$, nonostante sia comunque un invariante topologico (per il Teorema di rigidità di Mostow) della varietà $\mathbb{H}^3/\Gamma$.

Sulla stessa scia, definiamo l'algebra di quaternioni invariante.

Definizione 1.12. Sia Γ un Kleinian group di covolume finito e sia $\Gamma^{(2)}$ come sopra. Si definisce l'algebra di quaternioni invariante come

$$A\Gamma := k\Gamma[\Gamma^{(2)}] = \left\{ \sum_i a_i \gamma_i \,\middle|\, a_i \in k\Gamma,\ \gamma_i \in \Gamma^{(2)} \right\}.$$

Anche in questo caso, si dimostra l'invarianza per commensurabilità (larga) di tale algebra e che effettivamente si tratti di un'algebra centrale semplice 4-dimensionale, che può essere generata a partire da una coppia qualsiasi di elementi $g, h \in \Gamma^{(2)}$ tali che $\langle g, h \rangle$ sia irriducibile. Infatti, una proprietà fondamentale dei Kleinian groups di covolume finito, e più in generale di quelli irriducibili (ovvero senza punti fissi comuni su $\overline{\mathbb{H}}^3$) è la seguente:

Lemma 1.13. *Siano $g, h \in PSL(2, \mathbb{C})$. Vale allora che $\langle g, h \rangle$ è irriducibile se e solo se I, g, h, gh sono linearmente indipendenti in $M_2(\mathbb{C})$.*

Ci sarà infine utile nel corso di alcune dimostrazioni il seguente risultato, che limita i possibili automorfismi di un'algebra di quaternioni ai soli automorfismi interni:

Teorema 1.14 (Skolem-Noether)**.** *Siano $\phi, \psi \colon B \longrightarrow A$ omomorfismi di algebre, con A e B algebre semplici finito-dimensionali su un campo F e A centrale. Esiste allora un $c \in A^*$ tale che $\phi(b) = c^{-1}\psi(b)c$ per ogni $b \in B$.*
In particolare, ogni endomorfismo non nullo di un'algebra di quaternioni è un automorfismo interno.

2 Arithmetic Kleinian Groups

Quando a lezione sono stati definiti i gruppi e reticoli aritmetici il tutto è stato trattato in modo generale partendo da gruppi di Lie. In questo caso specifico, con la teoria delle algebre di quaternioni e trattando esplicitamente di sottogruppi di matrici in $PSL(2, \mathbb{C})$, diamo una definizione diversa ma comunque equivalente a quella già conosciuta.

Definizione 2.1. Sia k un campo di numeri con esattamente un complex place e sia $\rho\colon A \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ un k-embedding di un'algebra di quaternioni su k ramificata in tutti i real places. Sia inoltre $\mathcal{O}$ un order di A. Un sottogruppo $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ si dice un *arithmetic Kleinian group* se è commensurabile ad un certo $P\rho(\mathcal{O}^1)$.

Useremo la notazione che Γ è aritmetico *relativamente a* $(A, k, \mathcal{O}, \rho)$ per dire che è commensurabile a $P\rho(\mathcal{O}^1)$.

La prima domanda che sorge spontanea è come mai abbiamo la necessità di imporre quelle ipotesi così apparentemente specifiche all'interno della definizione. La risposta è contenuta nella seguente Proposizione, la cui dimostrazione molto algebrica non è riportata, poiché porterebbe il seminario oltre i suoi obiettivi.

Proposizione 2.2. *Sia A un'algebra di quaternioni su un campo k con r_1 real places e r_2 complex places. Se A è ramificata in s_1 real places vale allora*

$$A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong s_1 \mathcal{H} \oplus (r_1 - s_1) M_2(\mathbb{R}) \oplus r_2 M_2(\mathbb{C}),$$

con l'isomorfismo indotto dagli embedding di Galois di k in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Supponiamo inoltre che $r_1 - s_1 + r_2 > 0$, e cioè che esista almeno un embedding di Galois in cui A splitta (tale condizione è detta condizione di Eichler*). Se $\mathcal{O}$ è un order di A e $\psi \colon A \longrightarrow (r_1 - s_1) M_2(\mathbb{R}) \oplus r_2 M_2(\mathbb{C})$ è l'embedding dato dalla composizione di $A \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ con la proiezione sui fattori considerati, vale allora che $\psi(\mathcal{O}^1)$ è discreto e di covolume finito in $G^1 = (r_1 - s_1) SL(2, \mathbb{R}) \oplus r_2 SL(2, \mathbb{C})$.*
In più, se A è un'algebra di divisione, si ha anche che $\psi(\mathcal{O}^1)$ è cocompatto.
Infine, se $G' = \bigoplus SL(2, k_v)$ è un fattore di G^1 con $1 \neq G' \neq G^1$, allora la proiezione di $\psi(\mathcal{O}^1)$ in G' è densa in G'.

Dunque abbiamo immediatamente che se $r_2 = 1$ e $s_1 = r_1$, $\psi(\mathcal{O}^1)$ è discreto e di covolume finito in $SL(2, \mathbb{C})$. La Proposizione precedente in realtà dice di più: le condizioni imposte sono anche necessarie, come vediamo dal prossimo Teorema.

Teorema 2.3. *Sia k un campo di numeri con almeno un embedding complesso σ e sia A un'algebra di quaternioni su k. Sia ρ un embedding di A in $M_2(\mathbb{C})$ tale che $\rho|_{Z(A)} = \sigma$ e sia $\mathcal{O}$ un R_k-order di A. Allora $P\rho(\mathcal{O}^1)$ è un Kleinian group di covolume finito se e solo se k ha esattamente un complex place e A è ramificata in tutti i μ reali.*

Dimostrazione. Se k avesse più di un embedding complesso, allora necessariamente l'algebra di quaternioni splitterebbe in almeno due places e per la Proposizione precedente si otterrebbe un embedding di $\mathcal{O}^1$ con immagine densa in $SL(2, \mathbb{C})$, in contrasto con l'ipotesi di diescretezza. Allo stesso modo, se esistesse un place reale in cui A splitta, come sopra si giungerebbe ad un sottogruppo denso. □

Osserviamo adesso che il ruolo dell'order $\mathcal{O}$ nella definizione non è imprescindibile:

Osservazione 2.4. Siano $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ orders in A. La loro intersezione $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ è ancora un order (per piattezza di k come R_k-modulo), e i corrispondenti gruppi discreti sono tutti di covolume finito per quanto appena detto. Quindi sono tutti commensurabili tra di loro e nella Definizione 2.1 l'aritmeticità di Γ è indipendente dalla scelta dell'order nell'algebra di quaternioni.

Dunque per ogni campo di numeri con $r_2 = 1$ e per ogni algebra di quaternioni ramificata in ogni σ_i reale di quel campo otteniamo una classe di commensurabilità (larga) di Kleinian groups di covolume finito.
Per il Teorema 1.10 abbiamo però anche che $A \cong M_2(k)$ se e solo se il suo luogo di ramificazione è vuoto. Quindi nelle ipotesi sopra deve necessariamente essere $[k : \mathbb{Q}] = 2$. Questi casi speciali meritano di essere analizzati a parte:

Teorema 2.5. *Sia* Γ *un Kleinian group aritmetico e siano* A, k *e* $\mathcal{O}$ *rispettivamente l'algebra di quaternioni, il campo di numeri e l'order che definiscono la classe di commensurabilità di* Γ *(e cioè* Γ *è aritmetico relativamente a* $(A, k, \mathcal{O}, \rho)$*). I seguenti fatti sono allora equivalenti:*

1. Γ *non è cocompatto;*
2. $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ *per un* d *positivo square-free e* $A = M_2(k)$*;*
3. Γ *è commensurabile in senso largo con un gruppo di Bianchi,* $PSL_2(O_d)$*.*

Dimostrazione. Se Γ è non cocompatto, la stessa cosa deve valere anche per $P\rho(\mathcal{O}^1)$. Di conseguenza per la Proposizione 2.2 A non può essere un'algebra di divisione, da cui $A \cong M_2(k)$. Se $\deg_{k/\mathbb{Q}} \geq 3$ esisterebbe necessariamente un *place* reale in cui A ramifica. Ma ciò è in contraddizione con il Teorema 1.10. Dunque $[k : \mathbb{Q}] = 2$, ovvero $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ con d positivo e square-free.
Sia adesso $M_2(\mathcal{O}_d)$. È chiaramente un order in $M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$, per cui Γ è commensurabile a $P\rho(SL(2, \mathcal{O}_d))$ che a sua volta per il Teorema di rigidità di Mostow altro non è che un coniugato di $PSL(2, \mathcal{O}_d)$.
Infine, ogni gruppo di Bianchi contiene elementi parabolici, e se Γ è commensurabile ad uno di questi, anche Γ ne conterrà. Di conseguenza Γ è non cocompatto. $\square$

3 Il Teorema di Identificazione

Vogliamo adesso collegare in qualche modo gli invarianti $k\Gamma$ e $A\Gamma$ definiti a partire da un Kleinian group aritmetico e la quadrupla $(A, k, \mathcal{O}, \rho)$ che definiscono la sua aritmeticità.
Come detto all'inizio del seminario a Γ possiamo associare un campo $k\Gamma$ detto campo invariante delle tracce e l'algebra di quaternioni invariante $A\Gamma$ che sono invarianti per la commensurabilità in senso largo.
Se Γ è aritmetico relativamente a $(A, k, \mathcal{O}, \rho)$, allora k ha esattamente un complex place. Per l'invarianza per commensurabilità vale l'uguaglianza tra i campi $k\Gamma = k\rho(\mathcal{O}^1)$.
Osserviamo inoltre che se $\gamma \in \mathcal{O}$ allora si ha $\mathrm{tr}\gamma \in R_k$: infatti, essendo $R_k[\gamma]$ un sottomodulo di $\mathcal{O}$ (che è un R_k-modulo finitamente generato Noetheriano), è anch'esso finitamente generato, da cui γ è intero su R_k e di conseguenza $\mathrm{tr}\gamma \in R_k$ (ogni elemento di $A\Gamma$ soddisfa una relazione quadratica con traccia e determinante).
Dunque vale il contenimento $k\Gamma = k\rho(\mathcal{O}^1) \subseteq k$. Dato che $k\Gamma$ è un campo non reale e k ha un solo complex place, ne risulta che $k\Gamma = k$ (questo perché tutti i sottocampi propri di k sono totalmente reali).
Se scegliamo $g, h \in \Gamma^{(2)} \cap \rho(\mathcal{O}^1)$ tali che $\langle g, h\rangle$ sia un sottogruppo irriducibile, possiamo utilizzare allora $1, g, h, gh$ come generatori dell'algebra di quaternioni invariante e ottenere così

$$A\Gamma = k\Gamma[1, g, h, gh] \subseteq k\rho(\mathcal{O}^1) \subseteq \rho(A).$$

Essendo però $A\Gamma$ e $\rho(A)$ entrambe delle algebre di quaternioni su k, devono per forza coincidere.

Abbiamo dunque dimostrato che

Teorema 3.1. *Se Γ è un Kleinian group aritmetico relativamente a $(A, k, \mathcal{O}, \rho)$, allora $k\Gamma = k$ e $A\Gamma = \rho(A)$.*

Osserviamo che il risultato appena provato impone immediatamente due condizioni necessarie su Γ per la sua aritmeticità. Vale a dire che il suo campo invariante delle tracce deve avere esattamente un complex place e che la sua algebra di quaternioni invariante sia ramificata in tutti gli embedding di Galois reali.
Aggiungiamo adesso una ulteriore condizione. Se Γ è commensurabile con $\rho(\mathcal{O}^1)$ e $\gamma \in \Gamma$, allora vale che $\gamma^n \in \rho(\mathcal{O}^1)$ per un qualche $n \in \mathbb{Z}$. Consideriamo la traccia di tale elemento (in realtà sarebbe la traccia di un suo sollevato in $SL(2, \mathbb{C})$, ma con abuso di notazione lavoreremo direttamente in $PSL(2, \mathbb{C})$): vale che

Lemma 3.2. *$\mathrm{tr}\gamma^n$ è un polinomio monico in $\mathrm{tr}\gamma$ a coefficienti interi.*

Dimostrazione. Poiché $\det \gamma = 1$, vale la relazione $\gamma^2 = (\mathrm{tr}\gamma)\gamma - I$, che usata ripetutamente porta alla relazione

$$\gamma^n = p_n(\mathrm{tr}\gamma)\gamma - q_n(\mathrm{tr}\gamma)I$$

con p_n e q_n polinomi monici a coefficienti interi di grado rispettivamente $n-1$ e $n-2$. Passando infine alle tracce otteniamo la tesi. □

Osserviamo inoltre che per la stessa motivazione fatta in precedenza $\mathrm{tr}\gamma^n \in R_k$. Dunque abbiamo che $\mathrm{tr}\gamma$ è un intero algebrico (non sta necessariamente in $k\Gamma$, dato che non è un elemento dell'algebra).

Possiamo allora enunciare e dimostrare la seguente caratterizzazione dei Kleinian groups aritmetici di covolume finito:

Teorema 3.3. *Sia Γ un Kleinian group di covolume finito. Allora Γ è aritmetico se e solo se valgono le seguenti tre condizioni:*

1. *$k\Gamma$ è un campo di numeri con esattamente un complex place;*
2. *$\mathrm{tr}\gamma$ è un intero algebrico per ogni $\gamma \in \Gamma$;*
3. *$A\Gamma$ è ramificata in tutti gli embedding reali di $k\Gamma$.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che le tre condizioni sono necessarie. Vediamo che sono anche sufficienti.
Supponiamo quindi che Γ soddisfi le tre ipotesi: poniamo

$$\mathcal{O}\Gamma = \left\{ \sum x_i \gamma_i \;\middle|\; x_i \in R_{k\Gamma}, \gamma_i \in \Gamma^{(2)} \right\}.$$

Per dimostrare che $\mathcal{O}\Gamma$ è un order di $A\Gamma$ l'unica cosa da provare è che sia un $R_{k\Gamma}$-modulo finitamente generato. Per fare ciò prendiamo $g, h \in \Gamma^{(2)}$ tali che $\langle g, h\rangle$ sia irriducibile, e siano $\{I^*, g^*, h^*, (gh)^*\}$ la relativa base duale rispetto alla forma bilineare definita sulle matrici 2×2 a coefficienti complessi $T(a, b) = \mathrm{tr}(ab)$. Possiamo quindi scrivere ogni $\gamma \in \Gamma^{(2)}$ come

$$\gamma = x_0 I^* + x_1 g^* + x_2 h^* + x_3 (gh)^*, \qquad x_i \in k\Gamma.$$

Per definizione di base duale, se $\gamma_i \in \{I, g, h, gh\}$ si ha $T(\gamma, \gamma_i) = \mathrm{tr}(\gamma\gamma_i) = x_j$ per un certo j. Per ipotesi però abbiamo anche che $\mathrm{tr}(\gamma\gamma_i)$ è un intero algebrico, da cui si ottiene che $x_j \in R_k$. Abbiamo mostrato perciò che

$$\mathcal{O}\Gamma \subseteq R_{k\Gamma}[I^*, g^*, h^*, (gh)^*] =: M.$$

Scrivendo ogni elemento della base duale come combinazione lineare di $\{I, g, h, gh\}$ a coefficienti in $k\Gamma$ e prendendo il minimo comune multiplo dei denominatori otteniamo un intero m tale che $mM \subseteq \mathcal{O}\Gamma$.
Osservando infine che M/mM è finito e che mM è un $R_{k\Gamma}$-modulo finitamente generato otteniamo quanto volevamo.

A questo punto la tesi segue facilmente, avendo $A\Gamma \subseteq M_2(\mathbb{C})$ e $\Gamma^{(2)} \subseteq P(\mathcal{O}\Gamma)^1$. Infatti, per la Proposizione 2.2 $P(\mathcal{O}\Gamma)^1$ ha covolume finito in $PSL(2, \mathbb{C})$ così come $\Gamma^{(2)}$ (perché ha indice finito in Γ), da cui otteniamo finalmente che Γ è commensurabile con $P(\mathcal{O}\Gamma)^1$ con sottogruppo di indice finito comune $\Gamma^{(2)}$. $\square$

4 Invarianti Completi di Commensurabilità

Ricapitolando, dato un Kleinian group di covolume finito possiamo definire gli invarienti $k\Gamma$ e $A\Gamma$. Abbiamo visto come invertire questo procedimento per definire Γ a partire da un campo e da un'algebra e quali proprietà aggiuntive assicurano (senza perdere di generalità) che Γ sia aritmetico.
L'ultima domanda a cui rispondere è se $k\Gamma$ e $A\Gamma$ siano o meno invarianti completi per commensurabilità. La risposta è negativa in generale, ma affermativa per Γ aritmetico, come vediamo infatti nel prossimo enunciato:

Teorema 4.1. *Siano Γ_1 e Γ_2 due sottogruppi di $PSL_2(\mathbb{C})$ discreti e aritmetici. Allora Γ_1 e Γ_2 sono commensurabili in senso largo in $PSL_2(\mathbb{C})$ se e solo se $k\Gamma_1 = k\Gamma_2$ ed esiste un isomorfismo di $k\Gamma_1$-algebre $\phi\colon A\Gamma_1 \longrightarrow A\Gamma_2$.*

Dimostrazione. Per quanto detto all'inizio del seminario, il campo invariante delle tracce e l'algebra di quaternioni invariante sono due invarianti di commensurabilità (anche in senso largo), da cui gruppi commensurabili producono lo stesso campo e la stessa algebra.

Viceversa, supponiamo che $\phi\colon A\Gamma_1 \longrightarrow A\Gamma_2$ sia un isomorfismo di $k\Gamma_1$-algebre con $k\Gamma_1 = k\Gamma_2$. Allora per il Teorema di Skolem-Noether esiste un $g \in A\Gamma_2^*$ tale che $\phi(\alpha) = g\alpha g^{-1}$ per ogni $\alpha \in A\Gamma_1$. Considerando adesso l'order $\phi(\mathcal{O}\Gamma_1)$ in $A\Gamma_2$, e ricordando che due order in un'algebra sono commensurabili, otteniamo che $g\Gamma_1 g^{-1}$ è commensurabile con Γ_2. $\square$