Classificazione di fibrati vettoriali e K-teoria topologica

Simone Cappellini
http://poisson.phc.dm.unipi.it/~cappellini

28 novembre 2018

Introduzione

Scopo di questo seminario sarà caratterizzare i fibrati vettoriali (casi particolari e più rigidi di fibrazioni di Serre, e, nel nostro caso, anche di Hurewicz) reali e complessi su spazi paracompatti (le varietà sono gli esempi più regolari e studiati di spazi topologici paracompatti). Analizzeremo dapprima il caso particolare delle sfere, ottenendo una interpretazione molto geometrica dell'insieme $\mathrm{Vect}^n(S^k)$, per poi generalizzare la stessa relazione a spazi X qualsiasi (paracompatti).
Applicheremo i risultati, assieme a tecniche basilari di Topologia Algebrica, per studiare alcuni semplicissimi esempi. In generale però un calcolo esplicito non è possibile, per cui occorre cercare una caratterizzazione più grossolana utilizzando una relazione di equivalenza più debole rispetto alla nozione naturale di isomorfismo di fibrati vettoriali.
Questo approccio dà vita alla K-teoria topologica (su spazi compatti), una teoria coomologica generalizzata di più facile studio grazie anche a risultati come la periodicità di Bott.

1 Richiami Preliminari

Definizione 1.1. Un fibrato vettoriale n-dimensionale reale (complesso) su uno spazio topologico B è una mappa $p\colon E \longrightarrow B$ tale che per ogni $b \in B$ la fibra $p^{-1}(b)$ abbia la struttura di spazio vettoriale ed esista un intorno $U \ni b$ banalizzante, ossia per cui $p^{-1}(U)$ sia omeomorfo a $U \times \mathbb{R}^n$ (oppure $\mathbb{C}^n$ nel caso complesso) tramite un omeomorfismo h che porta $p^{-1}(c)$ in $\{c\} \times \mathbb{R}^n$ (rispettivamente $\{c\} \times \mathbb{C}^n$) tramite un isomorfismo lineare per ogni $c \in U$.

Definizione 1.2. Un morfismo di fibrati vettoriali sulla stessa base è una applicazione continua che preserva le fibre tramite applicazioni lineari.

Definizione 1.3. Dati due fibrati vettoriali $p_1\colon E_1 \longrightarrow B$ e $p_2\colon E_2 \longrightarrow B$, possiamo definire il fibrato $p\colon E_1 \oplus E_2 \longrightarrow B$ con spazio totale il pullback di un fibrato tramite l'altro e proiezione ovvia.

Definizione 1.4. Dati due fibrati vettoriali $p_1\colon E_1 \longrightarrow B$ e $p_2\colon E_2 \longrightarrow B$, possiamo definire il fibrato $p\colon E_1 \otimes E_2 \longrightarrow B$ con spazio totale $\bigsqcup_{b\in B} p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$ con struttura topologica che rende le banalizzazioni indotte degli omeomorfismi e proiezione ovvia. In altre parole, se $h_i\colon p_i^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{n_i}$ sono banalizzazioni per i fibrati, esse inducono una bigezione $\bigsqcup_{x\in U} p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x) \longrightarrow U \times (\mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2})$; la topologia da mettere su $E_1 \otimes E_2$ è quella che rende tali bigezioni omeomorfismi.

Citiamo infine un risultato che sarà particolarmente utile quando introdurremo la K-teoria:

Proposizione 1.5. *Se la base B è uno spazio paracompatto, E ammette un prodotto scalare, ovvero una applicazione $E \oplus E \longrightarrow \mathbb{R}$ che si restringe ad una forma bilineare simmetrica definita positiva su ogni fibra.*
Inoltre, se B è compatto, per ogni fibrato vettoriale E ne esiste uno E' tale che $E \oplus E' \cong B \times \mathbb{R}^n$ per un certo n.

2 Caratterizzazione dei fibrati vettoriali

Denotiamo con $\mathrm{Vect}^n(B)$ (rispettivamente $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(B)$) l'insieme dei fibrati vettoriali reali (complessi) n-dimensionali su B a meno di isomorfismo. Quando sarà ininfluente la dimensione o il campo degli scalari scriveremo soltanto $\mathrm{Vect}(B)$.
Osserviamo innanzitutto che, data una $f\colon A \longrightarrow B$, essa induce una $f^*\colon \mathrm{Vect}(B) \longrightarrow \mathrm{Vect}(A)$, per cui possiamo vedere $\mathrm{Vect}(\cdot)$ come un funtore controvariante dalla categoria degli spazi topologici in quella degli insiemi:

Proposizione 2.1. *Data una $f\colon A \longrightarrow B$ e un fibrato vettoriale $p\colon E \longrightarrow B$, esiste un fibrato vettoriale $p'\colon E' \longrightarrow A$ e una applicazione $f'\colon E' \longrightarrow E$ che manda per ogni $a \in A$ la fibra $p'^{-1}(a)$ nella fibra $p^{-1}(f(a))$ tramite isomorfismo lineare, e inoltre tale E' è unico a meno di isomorfismo.*

Dimostrazione. Consideriamo come E' il pullback $f^*(E) = \{(a,v) \in A \times E \mid f(a) = p(e)\}$ con p' la proiezione sulla prima componente e f' quella sulla seconda. Dimostriamo che $p'\colon f^*(E) \longrightarrow A$ è un fibrato vettoriale:
Sia $\Gamma_f \subseteq A \times B$ il grafico di f, e fattorizziamo p' tramite Γ_f nel seguente modo:

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "p'"] & \Gamma_f \arrow[r] & A \\
(a,v) \arrow[r, mapsto] & (a,p(v)) = (a,f(a)) \arrow[r, mapsto] & a.
\end{tikzcd}$$

La prima delle due mappe è la restrizione del fibrato vettoriale $id \times p\colon A \times E \longrightarrow A \times B$ sul grafico Γ_f, dunque è un fibrato vettoriale; la seconda è un omeomorfismo, quindi anche la loro composizione p' è un fibrato vettoriale. Infine, la mappa f' preserva banalmente le fibre. Per quanto riguarda l'unicità, dato un qualsiasi fibrato $p'\colon E' \longrightarrow A$ che soddisfi le condizioni richieste (con annessa mappa $f'\colon E' \longrightarrow E$) costruiamo l'isomorfismo $\varphi\colon E' \longrightarrow f^*(E)$ tale che $\varphi(v') = (p'(v'), f'(v'))$. L'applicazione φ manda ogni fibra in quella giusta tramite isomorfismi lineari, dunque è un isomorfismo di fibrati. □

Corollario 2.2. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) $(fg)^*(E) \cong g^*(f^*(E))$;

(ii) $id^*(E) \cong E$;

(iii) $f^*(E_1 \oplus E_2) \cong f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$;

(iv) $f^*(E_1 \otimes E_2) \cong f^*(E_1) \otimes f^*(E_2)$.

Lo step successivo nello studio dei fibrati vettoriali consiste nel capire come cambiano i pullback modificando per omotopia la funzione $f\colon A \longrightarrow B$. A tal proposito consideriamo il seguente lemma:

Lemma 2.3. *Se X è paracompatto le restrizioni di un fibrato vettoriale $E \longrightarrow X \times I$ su $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$ sono isomorfe.*

Dimostrazione. Diamo un accenno della dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che se le restrizioni di un fibrato $E \longrightarrow X \times [a, b]$ su $X \times [a, c]$ e $X \times [c, b]$ sono entrambe banali, allora tutto il fibrato è banale. Una banalizzazione globale si trova facendo l'unione delle due banalizzazioni dopo averne eventualmente modificata una per farle combaciare sulla fibra di intersezione (è sufficiente comporre su ogni fibra la banalizzazione con un fissato isomorfismo di $\mathbb{K}^n$). Inoltre, grazie alla compattezza di I, è possibile trovare un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di X tale che il fibrato sia banale su ogni $U_\alpha \times I$.
Per giungere alla tesi è necessario considerare adesso una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ subordinata al ricoprimento e costruire induttivamente isomorfismi di fibrati $E|_{X_i} \longrightarrow E|_{X_{i-1}}$ indotti dagli omeomorfismi $X_i \longrightarrow X_{i-1}$, dove $X_i = \Gamma(\sum_{\alpha \leq i} \rho_\alpha)$ è il grafico della somma parziale delle ρ_α. Componendo questi (possibilmente infiniti) isomorfismi si ottiene un isomorfismo tra $E|_{X \times \{1\}}$ e $E|_{X \times \{0\}}$. □

Grazie al lemma precedente concludiamo che:

Teorema 2.4. *Dato un fibrato vettoriale $p\colon E \longrightarrow B$ e due applicazioni omotope $f_0, f_1\colon A \longrightarrow B$, se A è paracompatto allora i pullback $f_0^*(E)$ e $f_1^*(E)$ sono isomorfi.*

Corollario 2.5. *Un'equivalenza omotopica $f\colon A \longrightarrow B$ tra spazi paracompatti induce una bigezione $f^*\colon \mathrm{Vect}(B) \longrightarrow \mathrm{Vect}(A)$. In particolare, ogni fibrato vettoriale su una base contraibile paracompatta è banale.*

2.1 Fibrati su sfere

Descriviamo adesso un modo esplicito per costruire fibrati vettoriali $E \longrightarrow S^k$ con spazio base una sfera. Scriviamo S^k come unione dei suoi emisferi superiore e inferiore D^k_+ e D^k_- con $D^k_+ \cap D^k_- = S^{k-1}$. Data una mappa $f\colon S^{k-1} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, sia $E_f := \left(D^k_+ \times \mathbb{R}^n \sqcup D^k_- \times \mathbb{R}^n\right) / \sim$ con l'identificazione $\partial D^k_+ \times \mathbb{R}^n \ni (x,v) \sim (x, f(x)(v)) \in \partial D^k_- \times \mathbb{R}^n$. Abbiamo allora una naturale proiezione $E_f \longrightarrow S^k$ che risulta essere un fibrato vettoriale n-dimensionale (per vedere più facilmente gli aperti banalizzanti basta modificare leggermente la definizione identificando un intorno dell'equatore). La f scelta viene detta *clucthing function* per E_f. Una argomentazione completamente analoga vale anche nel caso complesso, dunque una mappa $f\colon S^{k-1} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ dà luogo ad un fibrato vettoriale complesso $E_f \longrightarrow S^k$.
Osserviamo che tale costruzione dipende soltanto dalla classe di omotopia della clutching function: infatti, se abbiamo una omotopia $F\colon S^{k-1} \times I \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ tra f e g, attraverso lo stesso tipo di costruzione otteniamo un fibrato vettoriale $E_F \longrightarrow S^k \times I$ che si restringe a E_f sopra a $S^k \times \{0\}$ e a E_g sopra a $S^k \times \{1\}$. Per il Lemma 2.3 questo implica che i fibrati E_f ed E_g sono isomorfi.

È perciò ben definita la mappa $\Phi\colon \left[S^{k-1}, GL_n(\mathbb{R})\right] \longrightarrow \mathrm{Vect}^n(S^k)$ e l'analoga nel caso complesso. Quest'ultima ha un comportamento decisamente migliore grazie alla connessione per archi di $GL_n(\mathbb{C})$ (cosa che non si ha per $GL_n(\mathbb{R})$), che porta al seguente risultato:

Teorema 2.6. *La mappa $\Phi\colon \left[S^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})\right] \longrightarrow \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^k)$ che manda una clutching function f nel fibrato vettoriale E_f è una bigezione.*

Dimostrazione. Costruiamo una inversa Ψ di Φ. Dato un fibrato vettoriale n-dimensionale $p\colon E \longrightarrow S^k$, consideriamo le sue restrizioni E_+ e E_- sopra gli emisferi D^k_+ e D^k_- che sono banali per il Corollario 2.5. Prendiamo due banalizzazioni $h_\pm\colon E_\pm \longrightarrow D^k_\pm \times \mathbb{C}^n$. Allora il cambio di carta $h_+h_-^{-1}|_{\partial D^k_- \times \mathbb{C}^n}$ definisce una mappa $S^{k-1} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, la cui classe di omotopia è per definizione $\Psi(E)$. Per vedere che Ψ è ben definita, osserviamo che le banalizzazioni $h_\pm$ sono uniche a meno di omotopia (questo implica che anche $h_+h_-^{-1}$ lo è): due diverse scelte di $h_\pm$ differiscono per una applicazione $D^k_\pm \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$. Il disco è contraibile, dunque questa applicazione è omotopa a costante. Essendo $GL_n(\mathbb{C})$ connesso per archi, abbiamo l'unicità voluta. La prova che Ψ e Φ siano una l'inversa dell'altra è ovvia. □

Purtroppo la dimostrazione precedente fallisce nel caso reale essendo $GL_n(\mathbb{R})$ sconnesso per archi (esso ha due diverse componenti connesse). La stessa dimostrazione può essere adattata però se restringiamo la nostra attenzione ai fibrati vettoriali reali orientati. Una orientazione di un fibrato vettoriale $p\colon E \longrightarrow B$ è la scelta di una orientazione per ogni fibra in modo tale che intorno ad ogni punto di B esista una banalizzazione che trasformi le orientazioni delle fibre nelle orientazioni canoniche di $\mathbb{R}^n$. Non tutti i fibrati vettoriali

sono orientabili (ad esempio la striscia di Moebius).
Chiamiamo dunque $\mathrm{Vect}^n_+(B)$ l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali reali n-dimensionali orientati, dove gli isomorfismi presi in considerazione sono quelli che preservano l'orientazione. Vale allora che:

Teorema 2.7. *La mappa* $\Phi\colon \left[S^{k-1}, GL_n^+(\mathbb{R})\right] \longrightarrow \mathrm{Vect}^n_+(S^k)$ *è una bigezione.*

Osservazione 2.8. I risultati precedenti possono essere visti anche passando attraverso le equivalenze omotopiche $GL_n(\mathbb{C}) \sim U(n)$ e $GL_n^+(\mathbb{R}) \sim SO(n)$ e l'indipendenza dei gruppi di omotopia dal punto base (vista la connessione per archi) ottenendo (insiemisticamente) $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^k) = \pi_{k-1}(U(n))$ e $\mathrm{Vect}^n_+(S^k) = \pi_{k-1}(SO(n))$.

Nonostante non si abbiano risultati come quelli precedenti per l'insieme $\mathrm{Vect}^n(S^k)$, un suo studio quantitativo è ancora possibile. Introduciamo un oggetto ibrido, $\mathrm{Vect}^n_0(S^k)$, definito come l'insieme dei fibrati vettoriali n-dimensionali con una data orientazione su un punto $x_0 \in S^{k-1} \subseteq S^k$ (a meno di isomorfismi che siano positivi sulla fibra di x_0), e prendiamo banalizzazioni $h_\pm$ sopra a $D^k_\pm$ che portino questa orientazione in quella canonica di $\mathbb{R}^n$. Come prima, $h_\pm$ sono uniche a meno di omotopia, dunque otteniamo la bigezione $\mathrm{Vect}^n_0(S^k) = [(S^{k-1}, x_0), (GL_n(\mathbb{R}), GL_n^+(\mathbb{R}))]$.
L'applicazione $\mathrm{Vect}^n_0(S^k) \longrightarrow \mathrm{Vect}^n(S^k)$ che dimentica l'orientazione sulla fibra sopra a x_0 è surgettiva ed è 2-a-1 ovunque tranne sui fibrati che possiedono un automorfismo che inverte l'orientazione sopra a x_0, su cui è 1-a-1.
Nel caso $k = 1$ ci sono soltanto due classi di omotopia di mappe da S^0 in $GL_n(\mathbb{R})$ che mandano x_0 in $GL_n^+(\mathbb{R})$. I fibrati corrispondenti alle due classi sono quello banale e la somma diretta di un Moebius con un fibrato banale. Tutti questi hanno automorfismi che scambiano l'orientazione su una fibra, da cui $\mathrm{Vect}^n_0(S^1)$ (così come $\mathrm{Vect}^n(S^1)$) ha due elementi per ogni $n \geq 1$, uno orientabile e uno no. Quando $k > 1$ la sfera S^{k-1} è connessa, per cui una mappa $(S^{k-1}, x_0) \longrightarrow (GL_n(\mathbb{R}), GL_n^+(\mathbb{R}))$ manda tutto S^{k-1} in $GL_n^+(\mathbb{R})$. Di conseguenza si ha la bigezione $\mathrm{Vect}^n_0(S^k) = \mathrm{Vect}^n_+(S^k)$, e ogni fibrato su S^k risulta essere orientabile (con le due possibili orientazioni determinate da quelle sulla fibra di x_0). Di conseguenza l'applicazione $\mathrm{Vect}^n_+(S^k) \longrightarrow \mathrm{Vect}^n(S^k)$ è surgettiva e al più 2-a-1 (è 1-a-1 su fibrati che ammettono un automorfismo *orientation reversing*).

Esempio 2.9. Sapendo che $SO(1) = \{1\}$, $SO(2) \cong U(1) \cong S^1$ e che $\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ per $n \geq 3$ e $\pi_1(U(n)) \cong \mathbb{Z}$ per ogni n (utilizzando la successione lunga di omotopia per le fibrazioni $SO(n-1) \hookrightarrow SO(n) \twoheadrightarrow S^{n-1}$ e $U(n-1) \hookrightarrow U(n) \twoheadrightarrow S^{2n-1}$), gli esempi più immediati sono:

- $\mathrm{Vect}^n_+(S^1) = \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^1) = \{*\}$ per ogni n;
- $\mathrm{Vect}^2_+(S^2) = \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^2) = \mathbb{Z}$ per ogni n;
- $\mathrm{Vect}^n_+(S^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ per ogni $n \geq 3$;

- Poiché per ogni $n > 2$ vale

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_3(S^{2n-1}) & \longrightarrow & \pi_2(U(n-1)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_2(U(n)) & \longrightarrow & \pi_2(S^{2n-1}) \\ \| & & & & & & \| \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

  e $\pi_2(U(2)) = 0$, otteniamo che ogni fibrato vettoriale complesso su S^3 è banale, cioè $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^3) = \{*\}$;

- Considerando la fibrazione $SO(n-1) \hookrightarrow SO(n) \twoheadrightarrow S^{n-1}$, la successione esatta lunga di gruppi di omotopia per $n = 3$ fornisce

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi_2(SO(2)) & \longrightarrow & \pi_2(SO(3)) & \xrightarrow{0} & \pi_2(S^2) & \xhookrightarrow{\cdot 2} & \pi_1(SO(2)) & \twoheadrightarrow & \pi_1(SO(3)) & \longrightarrow & \pi_1(S^2) \\ \| & & & & \| & & \| & & \| & & \| \\ 0 & & & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & 0 \end{array}$$

  da cui si deduce per induzione che $\pi_2(SO(n)) = 0$ per ogni $n \geq 3$ (per $n = 1, 2$ vale allo stesso modo). Dunque otteniamo che tutti i fibrati vettoriali orientati su S^3 sono banali, ovvero $\mathrm{Vect}^n_+(S^3) = \{*\}$;

- Riutilizzando la successione esatta lunga per l'omotopia della fibrazione del gruppo unitario complesso sulla sfera, abbiamo $\pi_3(U(n)) \cong \pi_3(U(2))$ per ogni $n \geq 3$. Essendo inoltre $U(1) \cong S^1$ e osservando che

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_3(U(1)) & \longrightarrow & \pi_3(U(2)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_3(S^3) & \longrightarrow & \pi_2(U(1)) \\ \| & & & & \wr\| & & \| \\ 0 & & & & \mathbb{Z} & & 0 \end{array}$$

  si conclude che $\mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(S^4) = \mathbb{Z}$ per $n \geq 2$;

- Per contare i fibrati vettoriali orientati su S^4 è necessario calcolare il terzo gruppo di omotopia di $SO(n)$. Attraverso la medesima fibrazione studiata per vari n si ottiene $\pi_3(SO(2)) = 0$, $\pi_3(SO(3)) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_3(SO(4)) \cong \mathbb{Z}^2$ e $\pi_3(SO(n)) \cong \mathbb{Z}^\varepsilon$ con $\varepsilon = 1$ o 2 e $n \geq 5$. Di conseguenza abbiamo sicuramente l'esistenza di infiniti fibrati vettoriali (orientati) non banali di ogni dimensione su S^4, a differenza di quanto accade per S^3;

- Poiché per ogni $n \geq 2$ vale $\pi_n(SO(3)) = \pi_n(\mathbb{RP}^3) \cong \pi_n(S^3)$, grazie al Teorema di finitezza di Serre riguardo i gruppi di omotopia delle sfere si ha che $\mathrm{Vect}^3_+(S^k)$ è un insieme finito per ogni k (i casi $k = 1, 2$ erano stati analizzati in precedenza).

2.2 Caso generale, fibrato universale

Abbiamo fino ad ora classificato i fibrati vettoriali nel caso particolare delle sfere. Per generalizzare lo studio quello che faremo è cercare un oggetto e un fibrato universale da

cui poter ricavare ogni altro fibrato.
Per fare ciò definiamo la varietà Grassmanniana $G_n(\mathbb{R}^k)$ per $0 \leq n \leq k$ (una costruzione completamente analoga vale anche nel caso complesso).

Definizione 2.10. Definiamo lo *spazio di Stiefel* $V_n(\mathbb{R}^k)$ per $0 \leq n \leq k$ come l'insieme degli n-frames ortonormali di $\mathbb{R}^k$, ovvero n-uple di vettori di $\mathbb{R}^k$ ortonormali. Questo è un sottospazio del prodotto di n copie della sfera S^{k-1}. Mettiamo su di esso la topologia di sottospazio. Inoltre, poiché la condizione di ortogonalità è algebrica, tale sottospazio è chiuso (e quindi compatto).

Definizione 2.11. Si dice *Grassmaniana* $G_n(\mathbb{R}^k)$ l'insieme di tutti i sottospazi vettoriali n-dimensionali di $\mathbb{R}^k$. Grazie alla suriezione $V_n(\mathbb{R}^k) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^k)$ che manda una n-upla ortonormale nel sottospazio generato, mettiamo su $G_n(\mathbb{R}^k)$ la topologia quoziente (che rende tale spazio compatto).

Definizione 2.12. Grazie alle inclusioni $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^{k+1} \subseteq \dots$ abbiamo anche $G_n(\mathbb{R}^k) \subseteq G_n(\mathbb{R}^{k+1}) \subseteq \dots$ che permette di definire lo spazio topologico $G_n(\mathbb{R}^\infty) := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_n(\mathbb{R}^k)$ dotato della topologia del limite diretto.

Le Grassmanniane dello spazio $\mathbb{R}^\infty$ saranno gli spazi universali da cui ricavare ogni fibrato vettoriale reale di ogni spazio topologico paracompatto. Definiamo adesso un fibrato vettoriale su questo:

Lemma 2.13. *Definendo per k finito lo spazio* $E_n(\mathbb{R}^k) := \left\{(\ell, v) \in G_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \;\middle|\; v \in \ell\right\}$ *e* $E_n(\mathbb{R}^\infty) := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_n(\mathbb{R}^k)$*, la proiezione sulla prima componente* $p\colon E_n(\mathbb{R}^k) \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^k)$ *è un fibrato vettoriale per k sia finito che infinito.*

Dopo aver definito questo fibrato universale, arriviamo alla classificazione seguente:

Teorema 2.14. *Se X è uno spazio topologico paracompatto, la mappa*

$$\begin{array}{ccc} [X, G_n(\mathbb{R}^\infty)] & \longrightarrow & \mathrm{Vect}^n(X) \\ [f] & \longmapsto & f^*(E_n(\mathbb{R}^\infty)) \end{array}$$

è una bigezione. $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ è perciò detto spazio classificante per i fibrati vettoriali n-dimensionali reali.

Dimostrazione. L'osservazione chiave è la seguente: per un fibrato vettoriale n-dimensionale $p\colon E \longrightarrow X$, l'esistenza di un isomorfismo $E \cong f^*(E_n(\mathbb{R}^\infty))$ è equivalente a quella di una applicazione $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ che sia lineare ed iniettiva su ogni fibra. Per mostrare questo, supponiamo innanzitutto di avere una $f\colon X \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ ed un isomorfismo

$E \cong f^*(E_n(\mathbb{R}^\infty))$. Allora si ha un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rrrr, bend left, "g"] \arrow[drr, "p"'] & \cong & f^*(E_n(\mathbb{R}^\infty)) \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] & E_n(\mathbb{R}^\infty) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathbb{R}^\infty \\
& & X \arrow[r, "f"] & G_n(\mathbb{R}^\infty) &
\end{tikzcd}$$

in cui $\pi(\ell, v) = v$. Definendo g come nel diagramma si ha quanto voluto, dato che sia $\widetilde{f}$ che π sono iniettive lineari sulle fibre delle relative proiezioni. Viceversa, data una g con la proprietà suddetta, definiamo $f\colon X \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$ ponendo $f(x) = g(p^{-1}(x))$. Vale allora che $E \cong f^*(E_n(\mathbb{R}^\infty)) = \{(x, f(x), y) \in X \times G_n(\mathbb{R}^\infty) \times \mathbb{R}^\infty \mid y \in f(x)\}$ tramite l'applicazione $v \longmapsto (p(v), f(p(v)), g(v))$. Questa infatti preserva banalmente le fibre ed è un isomorfismo lineare su ognuna (grazie alle proprietà di g).
Passiamo adesso a dimostrare la bigettività della mappa in questione: per la surgettività, dato un fibrato $E \xrightarrow{p} X$ consideriamo un ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ di X fatto di aperti banalizzanti e una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ subordinata ad esso. Siano $g_\alpha\colon p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ le composizioni delle banalizzazioni con la proiezione su $\mathbb{R}^n$. Definiamo infine $g\colon E \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^\infty = \mathbb{R}^\infty$ che ha come componenti $(\rho_\alpha \circ p) \cdot g_\alpha$ estese a zero fuori da $p^{-1}(U_\alpha)$.
Per quanto riguarda l'iniettività, se $E \cong f_0^*(E_n(\mathbb{R}^\infty)) \cong f_1^*(E_n(\mathbb{R}^\infty))$ per due applicazioni $f_0, f_1\colon X \longrightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty)$, siano g_0, g_1 le relative funzioni ottenute come osservato in precedenza. Dimostriamo che esse sono omotope tramite delle g_t che sono iniettive lineari su ogni fibra, in modo tale che f_0, f_1 siano omotope tramite $f_t(x) = g_t(p^{-1}(x))$.
Per costruire l'omotopia cercata componiamo innanzitutto g_0 con l'omotopia $L_t\colon \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ data da $L_t(x_1, x_2, \dots) = (1-t)(x_1, x_2, \dots) + t(x_1, 0, x_2, 0, \dots)$. Per ogni tempo t, l'applicazione L_t è lineare ed iniettiva, dunque le proprietà di g_0 si mantengono. Allo stesso modo componiamo g_1 con l'omotopia che sposta l'immagine di g_1 sulle coordinate pari. Continuando a chiamare con un po' di abuso di notazione le nuove applicazioni g_0 e g_1, definiamo $g_t = (1-t)g_0 + tg_1$, che ha le proprietà cercate. $\square$

Lo stesso enunciato è valido anche nel caso complesso, per cui si ha $[X, G_n(\mathbb{C}^\infty)] = \mathrm{Vect}^n_{\mathbb{C}}(X)$. Infine, definendo lo spazio $\widetilde{G}_n(\mathbb{R}^\infty)$ degli n-piani orientati, e in modo completamente analogo il fibrato $\widetilde{E}_n(\mathbb{R}^\infty)$, una dimostrazione molto simile a quella precedente mostra che $\mathrm{Vect}^n_+(X) = [X, \widetilde{G}_n(\mathbb{R}^\infty)]$.

Esempio 2.15. I fibrati in rette reali e complesse, grazie a questa caratterizzazione, sono classificati dai primi gruppi di coomologia. Infatti, se X ha il tipo di omotopia di un CW-complesso:

$$\mathrm{Vect}^1(X) = [X, \mathbb{RP}^\infty] = [X, K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)] = H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

$$\mathrm{Vect}^1_{\mathbb{C}}(X) = [X, \mathbb{CP}^\infty] = [X, K(\mathbb{Z}, 2)] = H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Esempio 2.16. Nel caso $X = S^k$, le due caratterizzazioni trovate coincidono. Questo perché si hanno fibrazioni $U(n) \hookrightarrow V_n(\mathbb{C}^\infty) \twoheadrightarrow G_n(\mathbb{C}^\infty)$ per ogni n e lo spazio di Stiefel è contraibile, da cui $[S^k, G_n(\mathbb{C}^\infty)] = \pi_k(G_n(\mathbb{C}^\infty)) \cong \pi_{k-1}(U(n)) = [S^{k-1}, GL_n(\mathbb{C})]$. Analogo è il caso reale.

3 K-teoria topologica

Finora abbiamo sempre considerato gli insiemi $\mathrm{Vect}^n(X)$ singolarmente, senza considerare le operazioni di somma diretta e prodotto tensore di fibrati su una stessa base e le relazioni che possono scaturire da queste strutture aggiuntive. Consideriamo quindi adesso due diverse relazioni di equivalenza, ognuna che dà uno step di generalizzazione in più rispetto alla precedente. Usiamo la notazione $\varepsilon^n \longrightarrow X$ per indicare il fibrato banale n-dimensionale e diciamo che due fibrati E_1 e E_2 sullo spazio base X sono *stabilmente isomorfi* (e scriviamo $E_1 \approx_s E_2$) se esiste un n tale che $E_1 \oplus \varepsilon^n \cong E_2 \oplus \varepsilon^n$. La seconda relazione di equivalenza che introduciamo permette ai due fibrati banali di avere rango diverso, ovvero $E_1 \sim E_2$ se esistono n, m tali che $E_1 \oplus \varepsilon^n \cong E_2 \oplus \varepsilon^m$.
È facile provare che entrambe sono delle relazioni di equivalenza, e che sulle classi di equivalenza (rispetto ad entrambe) è ben definita l'operazione di somma diretta. L'elemento neutro rispetto a tale operazione è il fibrato ε^0.

Proposizione 3.1. *Se X è uno spazio topologico compatto di Hausdorff, allora l'insieme delle classi di $\sim$-equivalenza di fibrati vettoriali su X forma un gruppo abeliano rispetto all'operazione $\oplus$, che chiamiamo $\widetilde{K}(X)$ nel caso complesso e $\widetilde{KO}(X)$ nel caso reale.*

Per quanto riguarda l'operazione di somma diretta sulle classi di $\approx_s$-equivalenza, soltanto l'elemento ε^0 è invertibile (se $E \oplus E' \approx_s \varepsilon^0$ allora per un certo n vale $E \oplus E' \oplus \varepsilon^n \cong \varepsilon^n$, da cui E e E' devono avere rango zero). Nonostante ciò, la regola di cancellazione nel caso di spazio base compatto di Hausdorff vale comunque, cioè se $E_1 \oplus E_2 \approx_s E_1 \oplus E_3$ allora $E_2 \approx_s E_3$. Questo perché esiste un fibrato E_1' tale che $E_1 \oplus E_1' \cong \varepsilon^n$.
Quindi nel caso di X compatto di Hausdorff possiamo definire il gruppo abeliano $K(X)$ (o $KO(X)$ nel caso reale) costituito dalle differenze formali $E - E'$ di fibrati vettoriali su X, con la relazione di equivalenza $E_1 - E_1' = E_2 - E_2'$ se e solo se $E_1 \oplus E_2' \approx_s E_2 \oplus E_1'$. La regola di cancellazione è necessaria per la transitività della relazione introdotta, da cui l'ipotesi di compattezza per X.

Osservazione 3.2. Ogni elemento di $K(X)$ può essere rappresentato come una differenza $E - \varepsilon^n$, dato che partendo da un generico $E - E'$ otteniamo quanto cercato aggiungendo ad entrambi un certo E'' tale che $E' \oplus E'' \cong \varepsilon^n$ per un certo n.

Proposizione 3.3. *L'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \longrightarrow & \widetilde{K}(X) \\ E - \varepsilon^n & \longmapsto & [E]_\sim \end{array}$$

è ben definita, surgettiva e il suo kernel è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione. La buona definizione deriva dal fatto che se $E - \varepsilon^n = E' - \varepsilon^m$ in $K(X)$, allora $E \oplus \varepsilon^m \approx_s E' \oplus \varepsilon^n$, da cui $E \sim E'$.
La surgettività è ovvia, mentre il kernel è costituito dagli elementi $E - \varepsilon^n$ tali che $E \sim \varepsilon^0$, da cui $E \approx_s \varepsilon^m$ per un certo m. Quindi il kernel dell'applicazione è l'insieme $\{\varepsilon^m - \varepsilon^n\}_{m,n}$ che è semplice dimostrare essere isomorfo a $\mathbb{Z}$. □

Poiché scelto un punto base $x_0 \in X$ si ha anche una sezione $K(X) \longrightarrow K(x_0) \cong \mathbb{Z}$, vale il seguente:

Corollario 3.4. *Dato X spazio compatto di Hausdorff, $K(X) \cong \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$. Da questo isomorfismo, il gruppo $\widetilde{K}(X)$ è spesso chiamato K-teoria* ridotta.

4 Cenni sulla struttura di anello e Periodicità di Bott

In ambito di K-teoria, ogni spazio X che trattiamo è compatto e di Hausdorff.

Oltre alla struttura additiva in $K(X)$ è possibile dare una struttura di anello utilizzando l'operazione di prodotto tensore $\otimes$ tra fibrati vettoriali. Tale operazione rende $K(X)$ un anello commutativo con unità ε^1.
Scegliendo un generico punto base $x_0 \in X$, la mappa $K(X) \longrightarrow K(x_0)$ ottenuta a partire dalla restrizione dei fibrati sulla fibra sopra a x_0 è un omomorfismo di anelli, il cui nucleo può essere identificato con $\widetilde{K}(X)$. Di conseguenza esso è un ideale di $K(X)$, che eredita in modo naturale la struttura di anello (seppur senza identità).

Come nel caso degli insiemi $\mathrm{Vect}^n(X)$, anche $K(\cdot)$ può essere visto come un funtore controvariante dalla categoria degli spazi topologici compatti di Hausdorff in quella degli anelli commutativi con unità. Poiché invece abbiamo definito la moltiplicazione in $\widetilde{K}(X)$ utilizzando un punto base, esso può essere visto come funtore controvariante dalla categoria degli spazi topologici compatti di Hausdorff puntati (con mappe puntate) in quella degli anelli commutativi

Definizione 4.1. Può essere definito un prodotto esterno $\mu\colon K(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K(X \times Y)$ ponendo $\mu(a \otimes b) = p_1^*(a)p_2^*(b)$ dove p_1 e p_2 sono le proiezioni di $X \times Y$ sui fattori, che risulta essere un omomorfismo di anelli.

Nel caso in cui $Y = S^2$ si ottiene un risultato fondamentale in quella che poi prende il nome di periodicità di Bott:

Teorema 4.2 (Fundamental Product Theorem)**.** *L'omomorfismo*

$$\mu\colon K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \longrightarrow K(X \times S^2)$$

è un isomorfismo di anelli, con H il line bundle canonico su $\mathbb{CP}^1 = S^2$.

Consideriamo adesso un sottospazio chiuso $A \subseteq X$ e la naturale successione esatta $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{q}{\twoheadrightarrow} X/A$. Vale che:

Proposizione 4.3. $\widetilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(A)$ *è esatta.*

La successione può essere estesa utilizzando la successione di cofibrazione per $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ e utilizzando che A contraibile implica $X \sim X/A$ (da cui $\mathrm{Vect}^n(X/A) = \mathrm{Vect}^n(X)$):

Proposizione 4.4. *La successione di cofibrazione*

$$\begin{array}{ccccccccc} A \overset{i}{\hookrightarrow} X & \longrightarrow & X \cup CA & \longrightarrow & (X \cup CA) \cup CX & \longrightarrow & ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) & \longrightarrow & \dots \\ & & \wr & & \wr & & \wr & & \\ & & X/A & & SA & & SX & & \end{array}$$

induce una successione esatta lunga di gruppi abeliani

$$\dots \longrightarrow \widetilde{K}(SX) \longrightarrow \widetilde{K}(SA) \longrightarrow \widetilde{K}(X/A) \longrightarrow \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(A).$$

Corollario 4.5. *Considerando $A \hookrightarrow X = A \vee B$, la successione esatta di $\widetilde{K}$-gruppi si rompe in successioni esatte corte che spezzano, da cui $\widetilde{K}(A \vee B) \cong \widetilde{K}(A) \oplus \widetilde{K}(B)$.*

Analizzando la successione esatta lunga per l'inclusione $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$, passando tramite l'isomorfismo appena enunciato, si trova una sezione $\widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X \times Y)$ definita come $(a, b) \longmapsto p_1^*(a) + p_2^*(b)$. Allo stesso modo, ne esiste una al livello delle sospensioni, che implica che l'applicazione $\widetilde{K}(X \wedge Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X \times Y)$ è iniettiva. Di conseguenza si ha $\widetilde{K}(X \times Y) \cong \widetilde{K}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y)$.
In questo modo, tale isomorfismo ci permette di definire una versione ridotta del prodotto esterno $\widetilde{\mu} \colon \widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X \wedge Y)$.

Ciò porta ad un notevole risultato di periodicità per i gruppi di K-teoria ridotta rispetto alle sospensioni iterate: infatti vale che

Teorema 4.6 (Periodicità di Bott complessa)**.** *L'omomorfismo $\beta \colon \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$ dato da $\beta(a) = \mu((H-1) \otimes a)$ è un isomorfismo di anelli.*

Corollario 4.7. $\widetilde{K}(S^{2n+1}) = 0$ *e* $\widetilde{K}(S^{2n}) \cong \mathbb{Z}$.