

Nodi fortemente +-anfichirali e concordanza algebrica

SIMONE CAPPELLINI

<http://poisson.phc.dm.unipi.it/~cappellini>

21 aprile 2020

Introduzione

Lo scopo di questo seminario sarà dimostrare due teoremi riguardanti i nodi fortemente +-anfichirali: il primo, dovuto a Hartley e Kawauchi, dà informazioni sui polinomi di Alexander di tale classe di nodi; il secondo, dovuto a Long, invece afferma la nullità di questi nodi in $\mathcal{G}^{\mathbb{Z}}$, il gruppo di concordanza algebrico.

Il teorema di Long verrà dimostrato in due modi diversi: una delle due dimostrazioni risulterà essere un corollario del teorema di Hartley-Kawauchi insieme con una formula che indica come cambia la classe di Witt cambiando un incrocio; l'altra dimostrazione utilizzerà invece solamente la costruzione effettuata all'interno della dimostrazione del Teorema di Hartley-Kawauchi.

Tutto il seminario si basa su un articolo di Se-Goo Kim e Charles Livingston [1].

1 Preliminari

In questa sezione andremo a richiamare brevemente alcune nozioni che ci saranno utili insieme a risultati che non dimostreremo.

Ricordiamo alcune definizioni:

Definizione 1.1. Sia L un link orientato. Scelta una sua superficie di Seifert F e una base per $H_1(F)$ sia $V(L)$ la relativa matrice di Seifert di ordine $r \times r$. Il polinomio di Alexander (normalizzato) $\Delta_L(t)$ è definito ponendo $V_t(L) = (1-t)V(L) + (1-\bar{t})V(L)^t$ e

$$\Delta_L(t) = \frac{1}{z^r} \det(V_t(L))$$

dove $\bar{t} := t^{-1}$ e $z := t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$. Osserviamo che $z^2 = -(1-t) - (1-\bar{t})$, da cui se r è pari (come ad esempio per L un nodo) il polinomio di Alexander appartiene all'anello $\mathbb{Z}[t, \bar{t}]$ e la definizione può essere riscritta nel modo più classico $\Delta_L(t) = t^{-\frac{r}{2}} \det(V(L) - tV(L)^t)$.

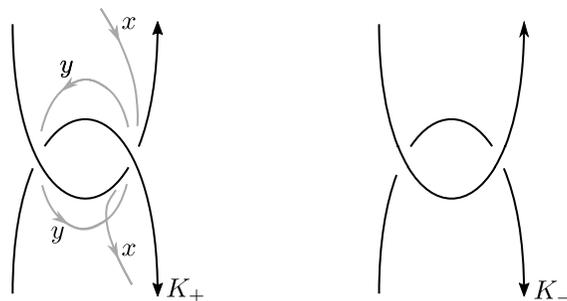
Definizione 1.2. Sia $\mathbb{Q}(t)$ il campo delle funzioni razionali in t a coefficienti in \mathbb{Q} e consideriamo su di esso l'involutione indotta da $t \mapsto \bar{t}$. Il gruppo di Witt $W(\mathbb{Q}(t))$ è l'insieme delle classi di equivalenza di matrici hermitiane non singolari con operazione la somma diretta e la relazione di equivalenza generata dall'essere congruente ad una matrice metabolica.

Un importante fatto che verrà utilizzato in seguito è il seguente:

Proposizione 1.3. L'applicazione $\mathcal{G}^{\mathbb{Z}} \rightarrow W(\mathbb{Q}(t))$ definita da $[V] \rightarrow [V_t]$ dove $V_t = (1-t)V + (1-\bar{t})V^t$ è iniettiva.

Alla luce di questa Proposizione dunque, la strategia nel dimostrare che due nodi siano algebricamente concordanti sarà quella di provare che le rispettive matrici di Seifert hermitianizzate stanno nella stessa classe di Witt.

Consideriamo adesso i seguenti diagrammi locali per due nodi K_+ e K_- , che sono uguali al di fuori di un incrocio: osserviamo che nel secondo caso una mossa di Reidemeister II permette di semplificare il diagramma.



Utilizzando l'algoritmo di Seifert per produrre delle superfici di Seifert per i diversi diagrammi, chiamiamo F_0 la superficie ottenuta dal diagramma semplificato per K_- e A la relativa matrice di Seifert secondo una base simplettica. Le superfici di Seifert dall'algoritmo per i diagrammi K_+ e K_- si trovano aggiungendo due bande twisted. Da queste, se scegliamo di completare la base di $H_1(F_0)$ ad una simplettica con due lacci x e y come ad esempio quelli segnati in grigio nella figura sopra, abbiamo le matrici di Seifert $V(K_{\pm})$ di ordine $(r+2) \times (r+2)$ della forma

$$V(K_{\pm}) = \begin{pmatrix} & & & a_1 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_r & 0 \\ a_1 & \dots & a_r & b & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

dove $\varepsilon = -1$ per K_+ e $\varepsilon = 0$ per K_- .

Essendo A_t non singolare, attraverso una congruenza è possibile rendere uguali a zero tutte le entrate corrispondenti agli a_i in $V_t(K_\pm)$ e ottenere dunque la matrice

$$W_t(K_\pm) = \begin{pmatrix} A_t & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c(t) & 1-t \\ 0 & \dots & 0 & 1-\bar{t} & \varepsilon(1-t)(1-\bar{t}) \end{pmatrix}.$$

Conti analoghi a quelli fatti qui sopra serviranno all'interno della dimostrazione del Teorema 2.1, da cui questo richiamo permette anche di alleggerire il carico della dimostrazione.

Ciò che possiamo dire dal calcolo precedente è che, posta $C_\varepsilon = \begin{pmatrix} c(t) & 1-t \\ 1-\bar{t} & \varepsilon(1-t)(1-\bar{t}) \end{pmatrix}$,

possiamo identificare il quoziente $\Delta_{K_+}(t)/\Delta_{K_-}(t)$ con $c(t) + 1$.

Nel calcolare la classe di Witt della differenza $W_t(K_+) - W_t(K_-)$ osserviamo infine che, tralasciando gli addendi metabolici, una matrice che rappresenta la classe è C_{-1} . Si riesce allora (diagonalizzando, identificando $c(t) + 1$ con il quoziente dei polinomi di Alexander e moltiplicando un elemento della base per $\Delta_{K_-}(t)$) a dimostrare una formula per la classe di Witt nel caso di un crossing change come segue:

Teorema 1.4. *La classe $W_t(K_+) - W_t(K_-)$ è rappresentata dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} \Delta_{K_+}(t)\Delta_{K_-}(t) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e dunque la differenza è determinata dai polinomi di Alexander dei nodi.

Nell'articolo [1] questa formula per i crossing change è usata, insieme all'invarianza dei polinomi di Alexander per mutazioni, per dimostrare che la classe di concordanza algebrica è invariante per mutazioni.

Lo scopo del seminario sarà invece la dimostrazione di risultati riguardo i nodi fortemente +-anfichirali.

Definizione 1.5. Un nodo K si dice *fortemente +-anfichirale* se esiste una involuzione τ di S^3 orientation-reversing tale che $\tau(K) = K$ e l'orientazione di K sia preservata.

Equivalentemente, K è *fortemente +-anfichirale* se, quando visto in \mathbb{R}^3 , è isotopo ad un nodo K' invariante per l'involuzione $\tau(x) = -x$.

Esempio 1.6. Dato un nodo K , la somma connessa $K\#mK$ è fortemente +-anfichirale ed è semplice trovare un diagramma invariante per l'involuzione $\tau = -id$.

Dimostreremo adesso due teoremi, il primo dei quali andiamo immediatamente ad enunciare.

2 Il Teorema di Hartley-Kawauchi

Teorema 2.1 (Hartley, Kawauchi). *Se K è un nodo fortemente +-anfichirale, allora il suo polinomio di Alexander soddisfa $\Delta_K(t) = (F(t))^2$, dove $F(t)$ è un polinomio simmetrico.*

La dimostrazione, che rispetto a quella originale di Hartley e Kawauchi [2] non fa uso dei moduli di Alexander ma è più combinatorica e geometrica, si svilupperà attraverso dei lemmi preliminari.

Dato un nodo K fortemente +-anfichirale, sia τ l'involutione negativa di \mathbb{R}^3 che lo preserva. Sia F una superficie di Seifert per K costruita tramite l'algoritmo di Seifert. Tale superficie sarà dunque invariante per τ . Inoltre, poiché l'orientazione di K rimane la stessa, $\tau|_F$ è orientation preserving. Ciò che non viene preservata è la normale positiva uscente dalla superficie, dato che l'orientazione ambiente viene cambiata. Abbiamo perciò il seguente:

Lemma 2.2. *Sia K un diagramma di un nodo fortemente +-anfichirale invariante per l'involutione τ . Allora è possibile costruire una superficie F di Seifert per K che sia invariante per τ e la cui forma di Seifert θ soddisfi*

$$\theta(\tau u, \tau v) = -\theta(v, u)$$

per ogni $u, v \in H_1(F)$.

Dimostrazione. La dimostrazione è già pressoché conclusa. Per verificare la relazione è sufficiente usare la definizione di θ :

$$\theta(\tau u, \tau v) = \text{lk}((\tau u)^+, \tau v) = \text{lk}(\tau(u^-), \tau v) = -\text{lk}(u^-, v) = -\theta(v, u).$$

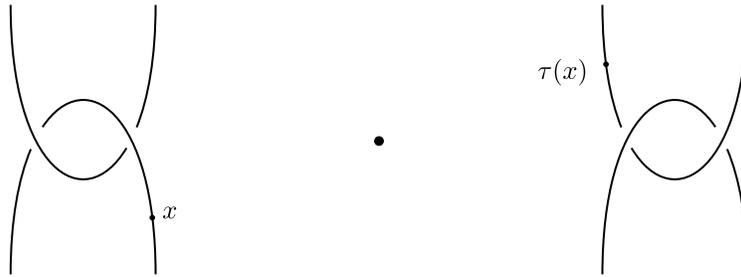
□

Osserviamo che per un (diagramma di un) nodo fortemente +-anfichirale invariante per τ , si ha in modo naturale un accoppiamento degli incroci di un diagramma per K (anch'esso invariante per l'involutione τ). Essendo τ orientation reversing, in ogni coppia di incroci ce ne sarà uno positivo e uno negativo. Scelta una coppia di crossings, chiamiamo allora K_{+-} il nodo originale e K_{-+} il risultato del *paired crossing change* in cui cambiamo contemporaneamente entrambi i crossings.

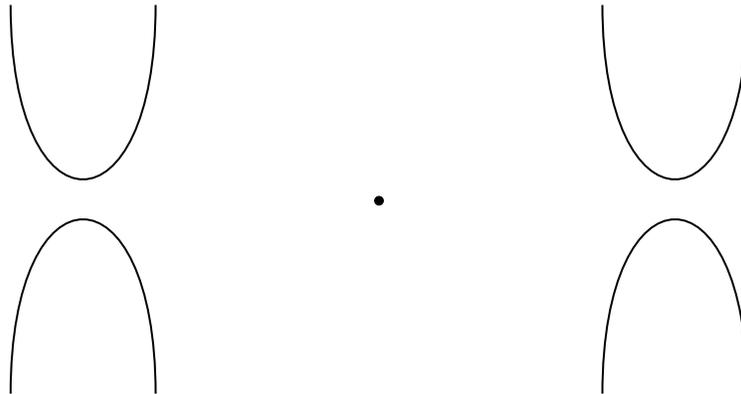
Lemma 2.3. *Esiste una sequenza di paired crossing changes che modifica un nodo fortemente +-anfichirale nel nodo banale.*

Dimostrazione. Poiché nessuna involuzione di S^1 può avere esattamente un punto fisso, K non contiene l'origine di \mathbb{R}^3 e possiamo dunque proiettare K ad un nodo \overline{K} in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \tau = \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}$. Il laccio \overline{K} si solleva ad una sola componente, quindi è omotopo al generatore standard di $\pi_1(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R})$, il cui sollevamento è il nodo banale. Questa omotopia può essere ottenuta effettuando dei crossing changes nel quoziente, che corrispondono a dei paired crossing changes in \mathbb{R}^3 , come voluto. \square

Consideriamo adesso un diagramma di K invariante per τ l'applicazione antipodale che, in una palla centrata nell'origine, abbia il seguente aspetto:



Scegliamo una delle due coppie di crossing τ -invarianti visibili in figura e rietichettiamo in maniera più comoda il nodo K come K_{+-} . Effettuando il paired crossing change corrispondente il nodo si modifica in K_{-+} , isotopo al nodo K' seguente:



Sotto tali considerazioni, possiamo allora enunciare il seguente Lemma che permette di giungere alla tesi del Teorema 2.1:

Lemma 2.4. *Sia K_{+-} come sopra e sia K_{-+} il risultato del paired crossing change. Allora i polinomi di Alexander soddisfano la relazione $\Delta_{K_{+-}}(t) = (F(t))^2 \Delta_{K_{-+}}(t)$ dove $F(t)$ è un polinomio simmetrico.*

Dimostrazione. Sia F_0 una superficie di Seifert per K' invariante ottenuta tramite l'algoritmo di Seifert e sia $\{w_1, \dots, w_r\}$ una base simplettica di $H_1(F_0)$. Una superficie di Seifert F equivariante per $K_{\pm\mp}$ si ottiene aggiungendo 4 bande a F_0 . La base per $H_1(F_0)$ può essere estesa in modo naturale ad una base $\{w_1, \dots, w_r, x, y, \tau x, \tau y\}$ simplettica per $H_1(F)$ e tale che $\theta(w_i, y) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$ e che $\theta(y, \tau x) = 0$. Ad esempio, scegliendo x e y in modo analogo a quanto fatto nella sezione precedente si ottiene quanto voluto.

Sia A la matrice di Seifert di F_0 rispetto alla base $\{w_1, \dots, w_r\}$ e chiamiamo T la matrice che rappresenta l'azione di τ su $H_1(F_0)$ secondo questa base. Allora il Lemma 2.2 applicato a F_0 si può enunciare in termini matriciali come

$$T^t A T = -A^t.$$

Tale relazione implica che, prendendo la matrice hermitiana A_t e considerandone l'inversa, vale

$$T(A_t)^{-1} T^t = -(A_t^t)^{-1} = -\overline{(A_t)^{-1}}.$$

Per calcolare la matrice di Seifert per F rispetto alla base precedente, osserviamo alcune simmetrie e semplificazioni nella sua scrittura:

- Per come è stata scelta la base la matrice si scrive come somma di una matrice simmetrica A_0 e di una Q tale che $Q_{2i-1, 2i} = 1$ per $1 \leq i \leq \frac{r}{2}$ e $Q_{j,k} = 0$ altrimenti. Ci basterà dunque calcolare soltanto alcuni degli accoppiamenti di Seifert, e gli altri si ottengono per simmetria;
- $\theta(x, \tau x) = \theta(\tau \tau x, \tau x) = -\theta(x, \tau x)$ da cui $\theta(\tau x, x) = 0$; un conto analogo mostra che anche $\theta(y, \tau y) = 0$;
- Per come erano stati scelti x e y ricordiamo che si ha $\theta(w_i, y) = \theta(\tau x, y) = 0$ per ogni i , da cui anche $\theta(x, \tau y) = 0$;

• Sia $a = \begin{pmatrix} \theta(w_1, x) \\ \vdots \\ \theta(w_r, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(x, w_1) \\ \vdots \\ \theta(x, w_r) \end{pmatrix}$. Allora

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta(w_1, \tau x) \\ \vdots \\ \theta(w_r, \tau x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\theta(x, \tau w_1) \\ \vdots \\ -\theta(x, \tau w_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_j T_{j,1} \theta(x, w_j) \\ \vdots \\ -\sum_j T_{j,r} \theta(x, w_j) \end{pmatrix} = \\ &= -T^t \begin{pmatrix} \theta(x, w_1) \\ \vdots \\ \theta(x, w_r) \end{pmatrix} = -T^t a. \end{aligned}$$

Con un conto analogo, sapendo che $\theta(w_i, y) = 0$ per ogni i , otteniamo che anche $\theta(w_i, \tau y) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, r$;

- Sia poi $\theta(x, x) = b$. Scegliendo in modo analogo a quanto fatto nella sezione 1 x e y otteniamo infine $\theta(x, y) = 1$, $\theta(y, x) = 0$ e $\theta(y, y) = \varepsilon$ con $\varepsilon = -1$ per K_{+-} e $\varepsilon = 0$ per K_{-+} .

Segue allora che la matrice di Seifert per K_{+-} è la matrice $(r+4) \times (r+4)$

$$V^\varepsilon = \begin{pmatrix} A & a & 0 & -T^t a & 0 \\ a^t & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ -a^t T & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\varepsilon \end{pmatrix},$$

dove $\varepsilon = -1$. La matrice di Seifert (data dall'algorithm) per il nodo K_{-+} si otterrà allo stesso modo, ma ponendo $\varepsilon = 0$.

Consideriamo adesso la matrice Hermitiana data da V^ε :

$$V_t^\varepsilon = \begin{pmatrix} A_t & -z^2 a & 0 & z^2 T^t a & 0 \\ -z^2 a^t & -z^2 b & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-\bar{t} & -z^2 \varepsilon & 0 & 0 \\ z^2 a^t T & 0 & 0 & z^2 b & -(1-\bar{t}) \\ 0 & 0 & 0 & -(1-t) & z^2 \varepsilon \end{pmatrix},$$

con $z = t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$. Sia inoltre P la seguente matrice di cambio base:

$$P = \begin{pmatrix} I & z^2(A_t)^{-1}a & 0 & -z^2(A_t)^{-1}T^t a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cambiando per congruenza la matrice V_t^ε otteniamo $W_t^\varepsilon = \overline{P}^t V_t^\varepsilon P$ con

$$W_t^\varepsilon = \begin{pmatrix} A_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z^2 b - z^4 a^t (A_t)^{-1} a & 1-t & z^4 a^t (A_t)^{-1} T^t a & 0 \\ 0 & 1-\bar{t} & -z^2 \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & z^4 a^t T (A_t)^{-1} a & 0 & z^2 b - z^4 a^t T (A_t)^{-1} T^t a & -(1-\bar{t}) \\ 0 & 0 & 0 & -(1-t) & z^2 \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Sia adesso $c(t) = -z^2 b - z^4 a^t (A_t)^{-1} a$. Essendo W_t^ε hermitiana, vale che $c(t) = \overline{c(\bar{t})}$, da cui si può riscrivere anche

$$(W_t^\varepsilon)_{4,4} = z^2 b - z^4 a^t (T(A_t)^{-1} T^t) a = \overline{z^2 b + z^4 a^t (A_t)^{-1} a} = \overline{-c(\bar{t})} = -c(t).$$

Consideriamo inoltre l'entrata di W_t^ε nel posto (2, 4): essendo un numero esso è uguale al suo trasposto, per cui

$$z^4 a^t (A_t)^{-1} T^t a = z^4 a^t T (A_t^t)^{-1} a = z^4 a^t T (-T (A_t)^{-1} T^t) a = -z^4 a^t (A_t)^{-1} T^t a$$

e dunque $(W_t^\varepsilon)_{2,4} = 0$. Ovviamente per hermitianità allora anche $(W_t^\varepsilon)_{4,2} = 0$. Di conseguenza si può riscrivere W_t^ε come

$$W_t^\varepsilon = \begin{pmatrix} A_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(t) & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-\bar{t} & -z^2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c(t) & -(1-\bar{t}) \\ 0 & 0 & 0 & -(1-t) & z^2\varepsilon \end{pmatrix} = A_t \oplus C_\varepsilon \oplus -C_\varepsilon^t$$

dove $C_\varepsilon = \begin{pmatrix} c(t) & 1-t \\ 1-\bar{t} & -z^2\varepsilon \end{pmatrix}$. Poiché $\det(P) = 1$, otteniamo infine

$$\Delta_{K_{+-}} = (c(t) + 1)^2 \frac{1^r}{z} \det(A_t) = (c(t) + 1)^2 \Delta_{K_{-+}}.$$

Essendo $c(t) = c(\bar{t})$ come osservato sopra, abbiamo la tesi. \square

La dimostrazione del Teorema 2.1 è a questo punto una immediata conseguenza dei Lemmi precedenti: essendo il polinomio di Alexander dell'unknot U banale, tramite una successione di paired crossing changes possiamo modificare il nodo K in U , e per l'ultimo Lemma sappiamo scrivere $\Delta_K(t)$ come un prodotto di quadrati di polinomi simmetrici, che fornisce quanto voluto.

3 Il Teorema di Long

Alla luce del risultato precedente, è chiaro che i nodi fortemente +-anfichirali godano di una certa regolarità. È abbastanza spontaneo chiedersi quindi se i nodi fortemente +-anfichirali siano o meno algebricamente slice. Il seguente risultato di Long risponde affermativamente alla questione:

Teorema 3.1 (Long). *Se K è fortemente +-anfichirale allora K è algebricamente slice.*

Dimostrazione. Grazie alla dimostrazione del Teorema 2.1 fornita sopra la dimostrazione sarà breve e diretta.

Riprendendo le notazioni ed i calcoli precedenti si ha $V_t(K_{+-}) = V_t^\varepsilon$ con $\varepsilon = -1$ che, come visto, è congruente alla matrice $A_t \oplus C_{-1} \oplus -C_{-1}^t$, mentre $V_t(K_{-+}) = V_t^\varepsilon$ con $\varepsilon = 0$.

Nella prima sezione abbiamo enunciato nella Proposizione 1.3 che l'applicazione $\mathcal{G}^{\mathbb{Z}} \rightarrow W(\mathbb{Q}(t))$ è iniettiva, da cui per la dimostrazione è sufficiente mostrare che le matrici

$V_t(K_{+-})$ e $V_t(K_{-+})$ sono Witt-equivalenti. Infatti, grazie ancora al Lemma 2.3 otteniamo una sequenza di nodi algebricamente concordanti che collegano K al nodo banale U .

Osserviamo innanzitutto che la matrice $C_0 = \begin{pmatrix} c(t) & 1-t \\ 1-\bar{t} & 0 \end{pmatrix}$ è chiaramente metabolica, da cui la classe di Witt di $V_t(K_{-+})$ è la stessa di quella di A_t . La tesi è quindi raggiunta una volta provato che la matrice $C_{-1} \oplus -C_{-1}^t$ è metabolica: essendo $A_t \oplus C_{-1} \oplus -C_{-1}^t$ hermitiana, lo stesso vale per C_{-1} , da cui esiste una Q unitaria che la diagonalizza in una matrice $D = \bar{Q}^t C Q$. Ma allora cambiando $C_{-1} \oplus -C_{-1}^t$ per congruenza tramite $Q \oplus \bar{Q}$ otteniamo la matrice $D \oplus -D$ che è chiaramente Witt-banale. \square

Osserviamo che la precedente dimostrazione non utilizza il Teorema di Hartley-Kawauchi, ma soltanto la costruzione all'interno di questa sua dimostrazione. Ricaviamo adesso una dimostrazione alternativa del Teorema 3.1 a partire dalla relazione sulle classi di Witt per crossing changes del Teorema 1.4.

Dimostrazione. Come anche in precedenza, è sufficiente mostrare che $W_t(K_{+-}) - W_t(K_{-+})$ rappresenta la classe banale in $W(\mathbb{Q}(t))$. Lavorando con le classi di Witt possiamo scrivere

$$W_t(K_{+-}) - W_t(K_{-+}) = (W_t(K_{+-}) - W_t(K_{--})) - (W_t(K_{-+}) - W_t(K_{--})).$$

Applicando il Teorema 1.4, si ha che questa è rappresentata dalla differenza

$$\begin{pmatrix} \Delta_{K_{+-}}(t) \Delta_{K_{--}}(t) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus - \begin{pmatrix} \Delta_{K_{-+}}(t) \Delta_{K_{--}}(t) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Applicando il Teorema di Hartley-Kawauchi scriviamo $\Delta_{K_{+-}}(t) = F(t)^2$ e $\Delta_{K_{-+}}(t) = G(t)^2$, e cancellando i (-1) dalle somme (perché ovviamente Witt-banali) arriviamo alla differenza

$$\begin{pmatrix} F(t)^2 \Delta_{K_{--}}(t) & 0 \\ 0 & -G(t)^2 \Delta_{K_{--}}(t) \end{pmatrix}.$$

Questa forma ha un metabolizzatore generato dal vettore $(G(t), F(t)) \in \mathbb{Q}(t)^2$ e dunque è Witt-banale, come volevasi dimostrare. \square

Riferimenti bibliografici

- [1] Se-Goo Kim and Charles Livingston. Knot mutation: 4-genus of knots and algebraic concordance, 2003.
- [2] Richard Hartley and Akio Kawauchi. Polynomials of amphicheiral knots. *Mathematische Annalen*, 243(1):63–70, February 1979.