Il Teorema di Sárközy-Fürstenberg: una dimostrazione ergodica

Alex Cardelli

Università di Pisa

Tesi di Laurea Triennale in Matematica

24 Luglio 2009

Definizioni preliminari

Dato $E \subset \mathbb{Z}$:

Definizione (Densità asintotica superiore)

$$\bar{d}(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|E \cap \{-n, -n+1, ..., n-1, n\}|}{2n+1}$$

Definizione (Densità superiore di Banach)

$$d^*(E) = \limsup_{N-M\to\infty} \frac{|E \cap \{M, M+1, ..., N-1\}|}{N-M}.$$

Teorema Szemerédi

Teorema

Ogni $E \subset \mathbb{Z}$ *con densità superiore di Banach positiva contiene progressioni aritmetiche di lunghezza arbitraria.*

Teorema di Sárközy-Fürstenberg

Dimostreremo il seguente risultato:

Teorema

Sia $E \subset \mathbb{Z}$ con densità superiore di Banach positiva e $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con $p(0) = 0$. Allora $(E - E) \cap \{p(n) : n \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$.

Principio di Corrispondenza di Fürstenberg

Definizione

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ è sistema che conserva la misura se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ è sp. probabilizzato e $T : X \to X$ è invertibile μ-invariante.

Teorema

Sia $E \subset \mathbb{Z}$ tale che $d^*(E) > 0$, allora esiste un sistema che conserva la misura $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ed esiste $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = d^*(E)$ tale che $\forall F \in Fin(\mathbb{Z})$ (sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Z}$) vale:

$$d^*(\bigcap_{n \in F}(E - n)) \geq \mu(\bigcap_{n \in F} T^{-n}A).$$

Principio di Corrispondenza di Fürstenberg

Costruiamo un sistema che conserva la misura:

- $(X, \tau(\mathcal{C}))$ dove $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{C} = \{C(n_i, \epsilon_i) \,:\, C(n_i, \epsilon_i) \subset X\}$ con $C(n_i, \epsilon_i) = \{x \in X \,:\, x(n_i) = \epsilon_i,\, 1 \leq i \leq t\}$
- $A = \{x \in X \,:\, x(0) = 1\} \in \mathcal{C}$
- $T \,:\, Tx(n) = x(n+1)$
- $\exists \{I_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$d^*(E) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{|I_t|} \sum_{n \in I_t} \chi_E(n) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{|I_t|} \sum_{n \in I_t} 1_A(T^n \chi_E)$$

- $p : \mathcal{C} \to [0,1]$

$$p(C(n_i, \epsilon_i)) = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{|I_{t_s}|} \sum_{n \in I_{t_s}} 1_{C(n_i, \epsilon_i)}(T^n \chi_E)$$

dove $\{I_{t_s}\} \subset \{I_t\}$ opportuna.

$$d^*(E) = p(A).$$

Principio di Corrispondenza di Fürstenberg

Costruiamo un sistema che conserva la misura:

- $(X, \tau(\mathcal{C}))$ dove $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{C} = \{C(n_i, \epsilon_i) \,:\, C(n_i, \epsilon_i) \subset X\}$ con $C(n_i, \epsilon_i) = \{x \in X \,:\, x(n_i) = \epsilon_i,\, 1 \leq i \leq t\}$
- $A = \{x \in X \,:\, x(0) = 1\} \in \mathcal{C}$
- $T \,:\, Tx(n) = x(n+1)$
- $\exists \{I_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$d^*(E) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{|I_t|} \sum_{n \in I_t} \chi_E(n) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{|I_t|} \sum_{n \in I_t} 1_A(T^n \chi_E)$$

- $p : \mathcal{C} \to [0,1]$

$$p(C(n_i, \epsilon_i)) = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{|I_{t_s}|} \sum_{n \in I_{t_s}} 1_{C(n_i, \epsilon_i)}(T^n \chi_E)$$

dove $\{I_{t_s}\} \subset \{I_t\}$ opportuna.

$$d^*(E) = p(A).$$

Principio di Corrispondenza di Fürstenberg

Costruiamo un sistema che conserva la misura:

- $(X, \tau(\mathcal{C}))$ dove $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{C} = \{C(n_i, \epsilon_i) \, : \, C(n_i, \epsilon_i) \subset X\}$ con $C(n_i, \epsilon_i) = \{x \in X \, : \, x(n_i) = \epsilon_i, \, 1 \le i \le t\}$
- $A = \{x \in X \, : \, x(0) = 1\} \in \mathcal{C}$
- $T \, : \, Tx(n) = x(n+1)$
- $\exists \{I_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$d^*(E) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{|I_t|} \sum_{n \in I_t} \chi_E(n) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{|I_t|} \sum_{n \in I_t} 1_A(T^n \chi_E)$$

- $p : \mathcal{C} \to [0,1]$

$$p(C(n_i, \epsilon_i)) = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{|I_{t_s}|} \sum_{n \in I_{t_s}} 1_{C(n_i, \epsilon_i)}(T^n \chi_E)$$

dove $\{I_{t_s}\} \subset \{I_t\}$ opportuna.

$$d^*(E) = p(A).$$

Principio di Corrispondenza di Fürstenberg

Costruiamo un sistema che conserva la misura:

- $(X, \tau(\mathcal{C}))$ dove $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{C} = \{C(n_i, \epsilon_i) \,:\, C(n_i, \epsilon_i) \subset X\}$ con $C(n_i, \epsilon_i) = \{x \in X \,:\, x(n_i) = \epsilon_i,\, 1 \le i \le t\}$
- $A = \{x \in X \,:\, x(0) = 1\} \in \mathcal{C}$
- $T \,:\, Tx(n) = x(n+1)$
- $\exists \{I_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$d^*(E) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|I_t|} \sum_{n \in I_t} \chi_E(n) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|I_t|} \sum_{n \in I_t} 1_A(T^n \chi_E)$$

- $p : \mathcal{C} \to [0,1]$

$$p(C(n_i, \epsilon_i)) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{|I_{t_s}|} \sum_{n \in I_{t_s}} 1_{C(n_i, \epsilon_i)}(T^n \chi_E)$$

dove $\{I_{t_s}\} \subset \{I_t\}$ opportuna.

$$d^*(E) = p(A).$$

Principio di Corrispondenza di Fürstenberg

- p T-invariante e additiva
- si estende a μ misura di probabilità su X
- μ è T-invariante

$F = \{n_1, ..., n_k\}$ sottoinsieme finito di $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\mu(T^{-n_1}A \cap ... \cap T^{-n_k}A) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|I_{t_s}|} \sum_{n\in I_{t_s}} 1_{(T^{-n_1}A\cap...\cap T^{-n_k}A)}(T^n \chi_E) \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|I_{t_s}|} \sum_{n\in I_{t_s}} \chi_{(E-n_1)\cap...\cap(E-n_k)}(n) \\ &\leq d^*((E-n_1)\cap ... \cap (E-n_k))\end{aligned}$$

Principio di Corrispondenza di Fürstenberg

- p T-invariante e additiva
- si estende a μ misura di probabilità su X
- μ è T-invariante

$F = \{n_1, ..., n_k\}$ sottoinsieme finito di $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-n_1}A \cap ... \cap T^{-n_k}A) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|I_{t_s}|} \sum_{n \in I_{t_s}} 1_{(T^{-n_1}A\cap ...\cap T^{-n_k}A)}(T^n \chi_E) \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{|I_{t_s}|} \sum_{n \in I_{t_s}} \chi_{(E-n_1)\cap...\cap(E-n_k)}(n) \\
&\leq d^*((E-n_1) \cap ... \cap (E-n_k))
\end{aligned}$$

Sárközy-Fürstenberg versione ergodica

Sono equivalenti:

Teorema (Sárközy-Fürstenberg versione combinatoria)

Dato $E \subset \mathbb{Z}$ *con* $d^*(E) > 0$ *e* $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *con* $p(0) = 0$. *Allora*

$$(E - E) \cap \{p(n) \ : \ n \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset.$$

Teorema (Sárközy-Fürstenberg versione ergodica)

Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *con* $p(0) = 0$ *allora per ogni* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *sistema che conserva la misura*

$$\{p(n) \ : \ n \in \mathbb{Z}\} \cap \{n \ : \ \mu(A \cap T^{-n}A) > 0\} \neq \emptyset.$$

Equivalenza dei due risultati

Proposizione

Sia $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *sistema che conserva la misura e* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *successione di elementi di* $\mathcal{A}$ *tali che* $\mu(A_n) = a > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$, *allora esiste* $\Gamma = \{n_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *sottoinsieme di indici tale che* $\bar{d}(\Gamma) \geq a$ *e per ogni* $F = \{n_{i_1}, ..., n_{i_k}\}$ *sottoinsieme finito di indici in* Γ *vale*

$$\mu\Big(\bigcap_{n_{i_j}\in F} A_{n_{i_j}}\Big) > 0.$$

Teorema (Sárközy-Fürstenberg versione combinatoria)
Dato $E \subset \mathbb{Z}$ *con* $d^*(E) > 0$ *e* $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *con* $p(0) = 0$. *Allora*

$$(E - E) \cap \{p(n) \, : \, n \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset.$$

Teorema (Sárközy-Fürstenberg versione ergodica)
Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *con* $p(0) = 0$ *allora per ogni* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *sistema che conserva la misura*

$$\{p(n) \, : \, n \in \mathbb{Z}\} \cap \{n \, : \, \mu(A \cap T^{-n}A) > 0\} \neq \emptyset.$$

Equivalenza dei due risultati

- *versione ergodica* $\Rightarrow$ *versione combinatoria*
  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ e A come nelle ipotesi $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ t.c. $\mu(A \cap T^{-p(n)}A) > 0$. Ponendo $F = \{0, p(n)\}$ otteniamo che

$$d^*(E \cap (E - p(n))) \geq \mu(A \cap T^{-p(n)}A) > 0$$

- *versione combinatoria* $\Rightarrow$ *versione ergodica*
  $\{T^n A \mid n \in \mathbb{Z}\}$ verifica la Prop. $\Rightarrow \exists \Gamma = \{n_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ con $\overline{d}(\Gamma) > 0$. Poniamo $E = \Gamma \Rightarrow \exists n_i, n_j \in \Gamma$ t.c. $n_i - n_j = p(\bar{n})$ con $\bar{n} \in \mathbb{Z}$, quindi

$$\mu(T^{-p(\bar{n})}A \cap A) = \mu(A \cap T^{n_i - n_j}A) = \mu(T^{n_j}A \cap T^{n_i}A) > 0.$$

Equivalenza dei due risultati

- *versione ergodica* $\Rightarrow$ *versione combinatoria*
  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ e A come nelle ipotesi $\Rightarrow$ $\exists n \in \mathbb{Z}$ t.c. $\mu(A \cap T^{-p(n)}A) > 0$. Ponendo $F = \{0, p(n)\}$ otteniamo che
  $$d^*(E \cap (E - p(n))) \geq \mu(A \cap T^{-p(n)}A) > 0$$
- *versione combinatoria* $\Rightarrow$ *versione ergodica*
  $\{T^n A \mid n \in \mathbb{Z}\}$ verifica la Prop. $\Rightarrow \exists \Gamma = \{n_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ con $\overline{d}(\Gamma) > 0$. Poniamo $E = \Gamma$ $\Rightarrow$ $\exists n_i, n_j \in \Gamma$ t.c. $n_i - n_j = p(\bar{n})$ con $\bar{n} \in \mathbb{Z}$, quindi
  $$\mu(T^{-p(\bar{n})}A \cap A) = \mu(A \cap T^{n_i - n_j}A) = \mu(T^{n_j}A \cap T^{n_i}A) > 0.$$

Strumenti

- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio probabilizzato allora

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to (-\infty, +\infty)\ ,\ \int f^2 d\mu < \infty\}$$

è uno spazio di Hilbert, con $\langle f, g\rangle = \int f \cdot g \; d\mu$.

- $\mathcal{H}$ sp. di Hilbert e $\mathcal{M}$ sottospazio lineare chiuso.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}.$$

Strumenti

- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio probabilizzato allora

$$L^2(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to (-\infty, +\infty)\ ,\ \int f^2 d\mu < \infty\}$$

  è uno spazio di Hilbert, con $\langle f, g \rangle = \int f \cdot g \; d\mu$.

- $\mathcal{H}$ sp. di Hilbert e $\mathcal{M}$ sottospazio lineare chiuso.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}.$$

Strumenti

Dato $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ U t.c. $Uf(x) = f(Tx) \quad \forall f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ è op. unitario indotto da T.

Teorema (teorema della media ergodica)

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ e U op. unitario su $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ indotto da T

$$\Rightarrow \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^n f = Pf \qquad \forall f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu).$$

Dove P è la proiezione sullo spazio delle funzioni U-invarianti.

Teorema (Sárközy-Fürstenberg versione ergodica)

Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *con* $p(0) = 0$ *allora per ogni* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *sistema che conserva la misura*

$$\{p(n) \,:\, n \in \mathbb{Z}\} \cap \{n \,:\, \mu(A \cap T^{-n}A) > 0\} \neq \emptyset.$$

Dimostrazione

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ sistema che conserva la misura

- U indotto da T,

$$\mathcal{H}_{rat} = \overline{\{f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \,:\, U^k f = f \textit{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}},$$

$\mathcal{H}_{rat}$ è sottosp. lineare chiuso di $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

- $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad 1_A = g + h$ con $g = P_{\mathcal{H}_{rat}} 1_A$.

Quindi possiamo trattare separatamente le due componenti di 1_A.

Dimostrazione

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ sistema che conserva la misura

- U indotto da T,

$$\mathcal{H}_{rat} = \overline{\{f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \,:\, U^k f = f \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}},$$

  $\mathcal{H}_{rat}$ è sottosp. lineare chiuso di $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

- $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad 1_A = g + h$ con $g = P_{\mathcal{H}_{rat}} 1_A$.

Quindi possiamo trattare separatamente le due componenti di 1_A.

Dimostrazione

- Fissato $\epsilon > 0$ $\exists\, f, k$ tali che $U^{p(kn)}f = U^k f = f \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ e $\|f - g\| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|U^{p(kn)}g - g\| < 2\epsilon$ Perciò $\forall N \geq 1$

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{p(kn)}g - g \right\| < 2\epsilon.$$

- (Van der Corput trick) $\mathcal{H}$ sp. di Hilbert reale, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ successione limitata di vettori.

$$\forall h \in \mathbb{Z},\ h \neq 0 \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \right\| = 0$$

Dimostrazione

- Fissato $\epsilon > 0$ $\exists f, k$ tali che $U^{p(kn)} f = U^k f = f \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ e $\|f - g\| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|U^{p(kn)} g - g\| < 2\epsilon$ Perciò $\forall N \geq 1$

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{p(kn)} g - g \right\| < 2\epsilon.$$

- (Van der Corput trick) $\mathcal{H}$ sp. di Hilbert reale, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ successione limitata di vettori.

$$\forall h \in \mathbb{Z},\ h \neq 0 \quad \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{N \to \infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \right\| = 0$$

Dimostrazione

D'altra parte per induzione su $\deg(p)$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{p(kn)} h \right\| = 0$$

- (Caso base $p = an$) teorema della media ergodica

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{an} h = P_a h = 0$$

- (Caso induttivo) Van der Corput trick ($x_n = U^{p(kn)} h$)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, x_{n+r} \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle U^{p(kn)} h, U^{p(kn+kr)} h \rangle$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \|h\| \cdot \| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{p(kn+kr)-p(kn)-p(kr)} h \| = 0.$$

Dimostrazione

D'altra parte per induzione su $\deg(p)$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{p(kn)} h \right\| = 0$$

- (Caso base $p = an$) teorema della media ergodica

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{an} h = P_a h = 0$$

- (Caso induttivo) Van der Corput trick ($x_n = U^{p(kn)} h$)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, x_{n+r} \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle U^{p(kn)} h, U^{p(kn+kr)} h \rangle$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \|h\| \cdot \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{p(kn+kr)-p(kn)-p(kr)} h \right\| = 0.$$

Dimostrazione

D'altra parte per induzione su $\deg(p)$

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{p(kn)} h \right\| = 0$$

- (Caso base $p = an$) teorema della media ergodica

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{an} h = P_a h = 0$$

- (Caso induttivo) Van der Corput trick ($x_n = U^{p(kn)} h$)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, x_{n+r} \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \langle U^{p(kn)} h, U^{p(kn+kr)} h \rangle$$

$$\leq \lim_{N\to\infty} \|h\| \cdot \| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{p(kn+kr)-p(kn)-p(kr)} h \| = 0.$$

Dimostrazione

Per N abbastanza grande

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U^{p(kn)} 1_A - g \right\| < 3\epsilon$$

Quindi

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\langle U^{p(kn)} 1_A, 1_A \rangle - \langle g, 1_A \rangle \right) \right| < 3\epsilon.$$

Perciò $\exists \bar{n}$ tale che $|\langle U^{p(k\bar{n})} 1_A, 1_A \rangle - \langle g, 1_A \rangle| < 3\epsilon$.

$$\mu(A \cap T^{-p(k\bar{n})} A) = \langle U^{p(k\bar{n})} 1_A, 1_A \rangle > \langle g, 1_A \rangle - 3\epsilon$$

e $\langle g, 1_A \rangle \geq \mu(A)^2$.

Dimostrazione

Per N abbastanza grande

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U^{p(kn)}1_A - g\right\| < 3\epsilon$$

Quindi

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\langle U^{p(kn)}1_A, 1_A\rangle - \langle g, 1_A\rangle)\right| < 3\epsilon.$$

Perciò $\exists \bar{n}$ tale che $|\langle U^{p(k\bar{n})}1_A, 1_A\rangle - \langle g, 1_A\rangle| < 3\epsilon$.

$$\mu(A \cap T^{-p(k\bar{n})}A) = \langle U^{p(k\bar{n})}1_A, 1_A\rangle > \langle g, 1_A\rangle - 3\epsilon$$

e $\langle g, 1_A\rangle \geq \mu(A)^2$.