

Decomposizione di Lefschetz

(e applicazioni)

Seminario per il corso di Geometria Algebrica Complessa

Gli operatori in gioco

M sarà sempre una varietà compatta e Kähler, sia ω la forma simpletta su M . Ricordiamo che abbiamo l'operatore

$$L : \mathcal{A}^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}^{p+1,q+1}$$
$$\eta \mapsto \eta \wedge \omega$$

e indichiamo con $\Lambda := L^*$ il suo aggiunto. Sia poi $\Pi^r : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^r$ la proiezione, definiamo

$$H := \sum_{r=0}^{2r} (n-r) \Pi^r.$$

Si è visto durante il corso che $[\Lambda, L] = (n-p-q) \text{id}_{\mathcal{A}^{p,q}}$ e che L, Λ, H commutano con Δ_d . Consideriamo l'anello di coomologia $H^*(M; \mathbb{C})$ visto come spazio vettoriale, equivalentemente si possono considerare le forme armoniche $\mathcal{H}^*(M) = \bigoplus_r \mathcal{H}^r(M)$. Possiamo fare agire gli operatori L, Λ, H su questo spazio vettoriale. Studiamo i commutatori: si è già visto che $[\Lambda, L] = H$.

Lemma. Valgono le seguenti relazioni:

- $[H, L] = -2L$
- $[H, \Lambda] = 2\Lambda$

Dimostrazione. Sia $\eta \in \mathcal{A}^{p,q}$:

$$\begin{aligned} [H, L]\eta &= HL\eta - LH\eta = H(\eta \wedge \omega) - (H\eta) \wedge \omega = \\ &= (n - (p+1) - (q+1))\eta \wedge \omega - (n - q - q)\eta \wedge \omega = -2\eta \wedge \omega = -2L\eta \end{aligned}$$

Essendo H, L, Λ endomorfismi di $H^*(M; \mathbb{C})$ (ricnotrollare), per verificare la seconda condizione basta verificare che

$$[H, \Lambda]^* = 2\Lambda^* = 2L.$$

Per costruzione del prodotto hermitiano sulla somma diretta $\mathcal{H}^*(M) = \bigoplus_r \mathcal{H}^r(M)$ è immediato osservare che H è autoaggiunto. Dunque:

$$[H, \Lambda]^* = \Lambda^* H - H \Lambda^* = LH - HL = -[H, L] = 2L.$$

□

L'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2)$

Definizione. L'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2)$ è definita come le matrici complesse 2×2 a traccia nulla, il bracket è definito come il commutatore. Una base è data da

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con relazioni

$$[X, Y] = Z, [Z, X] = 2X, [Z, Y] = -2Y$$

Teorema. Ogni rappresentazione V di $\mathfrak{sl}(2)$ è completamente riducibile. Inoltre per ogni intero $n > 0$ esiste un'unica rappresentazione irriducibile $V(n)$.

Fatto. Una costruzione di $V(n)$ è data da $V = \text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$, cioè i polinomi omogenei in due variabili di grado $n - 1$, con l'azione

$$\begin{aligned} X &= x\partial_y \\ Y &= y\partial_x \\ H &= [X, Y] = x\partial_x - y\partial_y. \end{aligned}$$

Scomponendo $\text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$ come

$$\text{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2) = \bigoplus_{p+q=n-1} \text{span}_{\mathbb{C}}\{x^p y^q\}$$

si ha che ogni fattore è unidimensionale ed è un autospazio di H : $H(x^p y^q) = (p - q)x^p y^q$. Si deduce che H è diagonalizzabile con autovalori simmetrici rispetto a 0 e a distanza 2 l'uno dall'altro, l'autovalore di modulo massimo è $n - 1$. Indichiamo con V_i l'autospazio associato all'autovalore i e sia m l'autovalore massimo, allora la decomposizione in autospazi diventa:

$$V(n) = V_{-n+1} \oplus V_{-n+3} \oplus \dots \oplus V_{n-3} \oplus V_{n-1}.$$

L'azione di X e Y sulla decomposizione è facile da dedurre: entrambi provocano shift a sinistra o a destra degli autospazi. In particolare:

$$\begin{aligned} X &: V_i \xrightarrow{\sim} V_{i+2} \\ Y &: V_i \xrightarrow{\sim} V_{i-2} \end{aligned}$$

Graficamente:

$$\begin{array}{ccccccc} V_{-n+1} & \xrightarrow{X} & V_{-n+3} & \xrightarrow{X} & \dots & \xrightarrow{X} & V_{n-3} & \xrightarrow{X} & V_{n-1} \\ & \xleftarrow{Y} & & \xleftarrow{Y} & & \xleftarrow{Y} & & \xleftarrow{Y} & \end{array}$$

Hard Lefschetz e Teorema di decomposizione

Osservazione. Dai risultati della prima sezione si deduce che si ha una rappresentazione di $\mathfrak{sl}(2)$ sullo spazio delle forme armoniche. Tale rappresentazione è definita come

$$\begin{aligned} X &\mapsto \Lambda \\ Y &\mapsto L \\ Z &\mapsto H \end{aligned}$$

Possiamo quindi applicare la classificazione delle rappresentazioni di $\mathfrak{sl}(2)$ per dedurre i seguenti due risultati:

Teorema. (Hard Lefschetz) Si ha un isomorfismo

$$L^k : H^{n-k}(M; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{n+k}(M; \mathbb{C})$$

compatibile con la decomposizione di Hodge, nel senso che si hanno isomorfismi

$$L^k : H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) \xrightarrow{\sim} H_{\bar{\partial}}^{n-p, n-q}(M), \quad p, q \leq n$$

Dimostrazione. Dalla classificazione delle rappresentazioni di $\mathfrak{sl}(2)$ si deduce che lo spazio delle forme armoniche si decompone in $\mathfrak{sl}(2)$ -moduli irriducibili:

$$\mathcal{H}^*(M) = \bigoplus_{i \in I} V(n_i)$$

e ci sono le ulteriori decomposizioni in autospazi di H :

$$V(n_i) = V_{-n_i+1} \oplus V_{-n_i+3} \oplus \dots \oplus V_{n_i-3} \oplus V_{n_i-1}$$

Si ha l'isomorfismo $L^k : V_k \xrightarrow{\sim} V_{-k}$ su ogni rappresentazione irriducibile, che dunque si estende a

$$L^k : \bigoplus_{i \in I} V(n_i)_k \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} V(n_i)_{-k}$$

dove alcuni degli autospazi potrebbero essere nulli. Ma per definizione di H è immediato osservare che i suoi autospazi sono dati dalle forme armoniche di fissato grado. Dunque i due termini della precedente mappa corrispondono a $\mathcal{H}^{n-k}(M)$ e $\mathcal{H}^{n+k}(M)$ e questo dimostra la prima parte del Teorema. Per la seconda basta che se $V(n_i)_{-n_i+1} \subset \mathcal{H}^{p,q}(M)$, allora

$$L^j(V(n_i)_{-n_i+1}) = V(n_i)_{-n_i+1+2j} \subset \mathcal{H}^{p+j, q+j}(M)$$

□

Definizione. La coomologia primitiva di M in grado $n - k$ è

$$P^{n-k}(M) := \text{Ker}(L^{k+1} : H^{n-k}(M; \mathbb{C}) \rightarrow H^{n+k+2}(M; \mathbb{C}))$$

Osservazione. Sia $L : V \rightarrow W$ una applicazione lineare suriettiva tra spazi vettoriali e supponiamo esista $U \subset V$ sottospazio tale che $L|_U$ è un isomorfismo. Allora $V = U \oplus \text{Ker } L$.

Teorema. (Decomposizione di Lefschetz) Per $i \leq n$ vale la seguente decomposizione:

$$H^i(M; \mathbb{C}) = \bigoplus_{k \geq 0} L^k P^{i-2k}(M)$$

vale inoltre la decomposizione analoga per la coomologia di Dolbeault.

Dimostrazione. Per Hard Lefschetz si ha che $L^{k+1} : L(H^{n-k-2}(M; \mathbb{C})) \rightarrow H^{n+k+2}(M; \mathbb{C})$ è un isomorfismo, la tesi segue per induzione. □

Osservazione. La decomposizione di Lefschetz dipende solo dalla forma simplettica ω : questo implica che due strutture complesse diverse ma con stessa forma simpletta indurranno la stessa decomposizione di Lefschetz. Invece la decomposizione di Hodge può cambiare dato che i gruppi di coomologia di Dolbeault dipendono dalla struttura complessa.

Vediamo qualche conseguenza immediata:

Proposizione. Valgono le seguenti disuguaglianze per i numeri di Betti:

$$\begin{aligned} b_0 &\leq b_2 \leq \dots \leq b_m \leq \dots \\ b_1 &\leq b_3 \leq \dots \leq b_r \leq \dots \end{aligned}$$

dove $m, r \leq n$.

Dimostrazione. Sappiamo che $L^k : H^{n-k}(M; \mathbb{C}) \rightarrow H^{n+k}(M; \mathbb{C})$ è un isomorfismo, dunque

$$L : H^{n-k}(M; \mathbb{C}) \rightarrow H^{n-k+2}(M; \mathbb{C})$$

è iniettiva. □

Esempio. Sia Σ_g una superficie di Riemann di genere $g \geq 0$, allora il diamante di Hodge assume la forma

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ & \bullet & \\ \mathbb{C}^g & & \mathbb{C}^g \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Deduciamo che la coomologia di Σ_g si spezza in una rappresentazione $V(2)$ e $2g$ rappresentazioni $V(1)$. In particolare la decomposizione di Lefschetz è banale.

Vediamo ora un esempio più elaborato, prima però abbiamo bisogno di calcolare la coomologia dei Tori complessi.

Lemma. Sia

$$\eta = \eta_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \in \mathcal{A}^{p,q}(\mathbb{C}^n)$$

dove su $\mathbb{C}^n$ si considera la forma hermitiana standard. Allora

$$\Delta_d \eta = (\Delta \eta_{IJ}) dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

dove Δ è il laplaciano euclideo classico, cioè:

$$\Delta = - \sum_j \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right)$$

Dimostrazione. Consideriamo i seguenti operatori:

- $\partial_k : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial z_k}$
- $\bar{\partial}_k : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}$
- $e_k : f \mapsto f \wedge dz_k$
- i_k : l'aggiunto di e_k

Allora si mostra che

$$\begin{aligned} \partial &= \sum_k \partial_k e_k \\ \partial^* &= - \sum_k \bar{\partial}_k i_k \\ e_j i_k + i_k e_j &= 2\delta_{jk} \end{aligned}$$

A questo punto:

$$\Delta = \partial \partial^* + \partial^* \partial = - \left(\sum_{j,k} \partial_j \bar{\partial}_k e_j i_k + \sum_{j,k} \bar{\partial}_j \partial_k i_k e_k \right)$$

usando il fatto che le derivate parziali commutano:

$$-\sum_{j,k} \partial_j \bar{\partial}_k (e_j i_k + i_k e_j) = -2 \sum_k \partial_k \bar{\partial}_k$$

Un calcolo mostra che

$$\partial_k \bar{\partial}_k = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}$$

Dunque $\Delta_\partial = \frac{1}{2} \Delta$, si conclude usando il fatto che $\Delta_d = 2\Delta_\partial$. $\square$

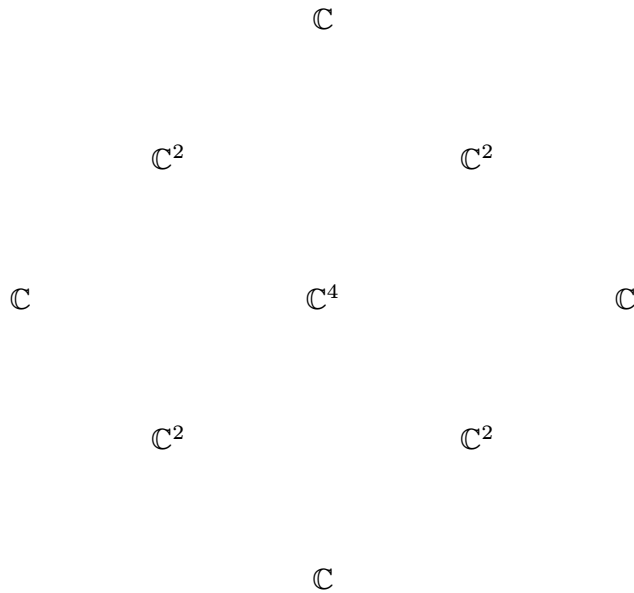
Proposizione. Sia $T = \mathbb{C}^n / \Gamma$ un toro complesso, allora vale $h^{p,q} = \binom{n}{p} \binom{n}{q}$.

Dimostrazione. Attraverso il pullback è facile vedere che una (p, q) -forma su T equivale a una (p, q) -forma su $\mathbb{C}^n$ invariante per l'azione di Γ . Per il risultato visto prima, una forma armonica sul toro deve essere combinazione lineare di funzioni armoniche su $\mathbb{C}^n$. Ma una funzione armonica sul toro, per il principio del massimo, è costante. Dunque

$$\mathcal{H}^{p,q}(T) = \text{span}_{\mathbb{C}} \{ dz_I \wedge d\bar{z}_J, |I| = p, |J| = q \}.$$

$\square$

Esempio. Il diamante di Hodge per un 2-toro (dimensione complessa 2) è:



Dalla struttura è chiaro che contiene quattro rappresentazioni $V(2)$, cinque rappresentazioni $V(1)$ e una rappresentazione $V(3)$. Le coomologie primitive sono:

$$\begin{aligned}
 \dim P^{0,0} &= 1 \\
 \dim P^{1,0} &= \dim P^{0,1} = 2 \\
 \dim P^{2,0} &= \dim P^{0,2} = 1 \\
 \dim P^{1,1} &= 3
 \end{aligned}$$

Calcoliamo esplicitamente una base di $P^{1,1}$: sia $\eta = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j \in P^{1,1}$, si ha che

$$\eta \wedge \omega = \left(\frac{i}{2} \right) (\lambda_{11} + \lambda_{22}) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 = 0$$

Dunque

$$P^{1,1} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{dz_1 \wedge d\bar{z}_2, dz_2 \wedge d\bar{z}_1, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 - dz_2 \wedge d\bar{z}_2\}$$

$$LP^{0,0} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2\} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\omega\}$$

Il Teorema dell'indice

Definizione. Si consideri la seguente forma bilineare $Q : H^{n-k}(M; \mathbb{C}) \otimes H^{n-k}(M; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ definita come

$$Q(\xi, \eta) := \int_M \xi \wedge \eta \wedge \omega^k$$

Osservazione. La forma Q è L -invariante, nel senso che per definizione di L vale

$$Q(L^i \eta, L^i \xi) = Q(\eta, \xi).$$

Inoltre, essendo ω una forma reale, Q si restringe a una forma bilineare simmetrica

$$Q : H^{n-k}(M; \mathbb{R}) \otimes H^{n-k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Osservazione. La decomposizione di Lefschetz è Q -ortogonale:

$$H^{n-k}(M; \mathbb{C}) = \bigoplus_j L^j P^{n-k-2j}$$

Siano $\eta_1 \in L^{j_1} P^{n-k-2j_1}, \eta_2 \in L^{j_2} P^{n-k-2j_2}$ e assumiamo $j_1 > j_2$. Allora

$$Q(\eta_1, \eta_2) = \int_M \xi_1 \wedge \omega^{j_1} \wedge \xi_2 \wedge \omega^{j_2} \wedge \omega^k = \int_M \xi_1 \wedge \omega^{j_1-1} \wedge \xi_2 \wedge \omega^{k+j_2+1}$$

ma per definizione di P^{n-k-2j_2} si ha $\xi_2 \wedge \omega^{k+j_2+1} = 0$.

Proposizione. Siano $0 \leq p \leq n$ e $\xi \in H^{p,0}(M)$ non nulla. Allora $i^{p^2} Q(\xi, \bar{\xi}) > 0$. Analogamente se $\xi \in H^{0,p}(M)$ non nulla allora $i^{-p^2} Q(\xi, \bar{\xi}) > 0$.

Dimostrazione. Sia $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ un frame ortonormale, si ha che

$$\omega = \left(\frac{i}{2}\right) \sum_j \varphi_j \wedge \bar{\varphi}_j$$

Sia $\eta = \sum_{|I|=p} \eta_I \varphi_I \neq 0$, allora

$$\eta \wedge \bar{\eta} = |\eta_I|^2 \varphi_I \wedge \bar{\varphi}_I = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} |\eta_I|^2 \varphi_{i_1} \wedge \bar{\varphi}_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p} \wedge \bar{\varphi}_{i_p}$$

dunque

$$\eta \wedge \bar{\eta} \wedge \omega^k = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} k! \left(\frac{i}{2}\right)^k |\eta_I|^2 \varphi_1 \wedge \bar{\varphi}_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \bar{\varphi}_n.$$

Ricordando che vale

$$\omega^n = n! \left(\frac{i}{2}\right)^n \varphi_1 \wedge \bar{\varphi}_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \bar{\varphi}_n.$$

$$\Phi = \frac{\omega^n}{n!}$$

Dunque

$$\varphi_1 \wedge \overline{\varphi_1} \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \overline{\varphi_n} = \left(\frac{i}{2}\right)^{-n} \Phi$$

$$\eta \wedge \overline{\eta} \wedge \omega^k = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} k! \left(\frac{2}{i}\right)^{n-k} |\eta_I|^2 \Phi = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} k! \left(\frac{2}{i}\right)^p |\eta_I|^2 \Phi = (n-p)! 2^p i^{p^2-2p} |\eta_I|^2 \Phi$$

La tesi seguen dal fatto che $p^2 - 2p \equiv -p^2 \pmod{4}$. $\square$

Osservazione. Per studiare Q ristretta a $H^{p,q}(M)$ è sufficiente studiare il comportamento sulle coomologie primitive. Infatti

$$H^{p,q}(M) = \bigoplus_k L^k P^{p-2k, q-2k}$$

e abbiamo osservato che Q è L -invariante e che la decomposizione è Q -ortogonale.

Lemma. Se Q è definita positiva o negativa ristretta alle forme reali di $H^{p,p}(M)$ (cioè $\xi = \overline{\xi}$), allora è definita positiva o negativa su tutte le forme di $H^{p,p}(M)$.

Dimostrazione. Sia η una forma qualunque, scriviamo $\eta = \alpha + i\beta$ con α, β forme reali. Allora:

$$Q(\eta, \overline{\eta}) = Q(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta) = Q(\alpha, \alpha) + Q(\beta, \beta)$$

dove si usa il fatto che $\alpha \wedge \beta = (-1)^{(2p)^2} \beta \wedge \alpha = \beta \wedge \alpha$. $\square$

Proposizione. Sia M una superficie e sia $\xi \in H^{1,1}(M)$, con $\xi \neq 0$, allora $Q(\xi, \overline{\xi}) < 0$.

Dimostrazione. Sia φ_1, φ_2 un frame unitario e sia

$$\xi = \sum_{i,j} \xi_{i,j} \varphi_i \wedge \overline{\varphi_j}$$

una forma reale primitiva. Dato che

$$\overline{\xi} = \sum_{i,j} \overline{\xi_{i,j}} \overline{\varphi_i} \wedge \varphi_j$$

si deduce che $\xi_{i,j} = -\overline{\xi_{i,j}}$. Dato che

$$\omega = \frac{i}{2}(\varphi_1 \wedge \overline{\varphi_1} + \varphi_2 \wedge \overline{\varphi_2})$$

$$\eta \wedge \omega = \frac{i}{2}(\xi_{1,1} + \xi_{2,2})(\varphi_1 \wedge \overline{\varphi_1} + \varphi_2 \wedge \overline{\varphi_2})$$

Dato che η è primitiva deduciamo che $\xi_{1,1} = -\xi_{2,2}$. Ora:

$$Q(\xi, \overline{\xi}) = \int_M (-\xi_{1,1} \overline{\xi_{2,2}} + 2 |\xi_{1,2}|^2 - \xi_{2,2} \xi_{1,1}) \varphi_1 \wedge \overline{\varphi_1} \wedge \varphi_2 \wedge \overline{\varphi_2}$$

Ricordando che la forma di volume è data da $\Phi = \frac{\omega^n}{n!}$, si ha:

$$Q(\xi, \overline{\xi}) = \left(\frac{2}{i}\right)^2 \int_M 2(|\xi_{1,1}|^2 + |\xi_{1,2}|^2) \Phi < 0$$

$\square$

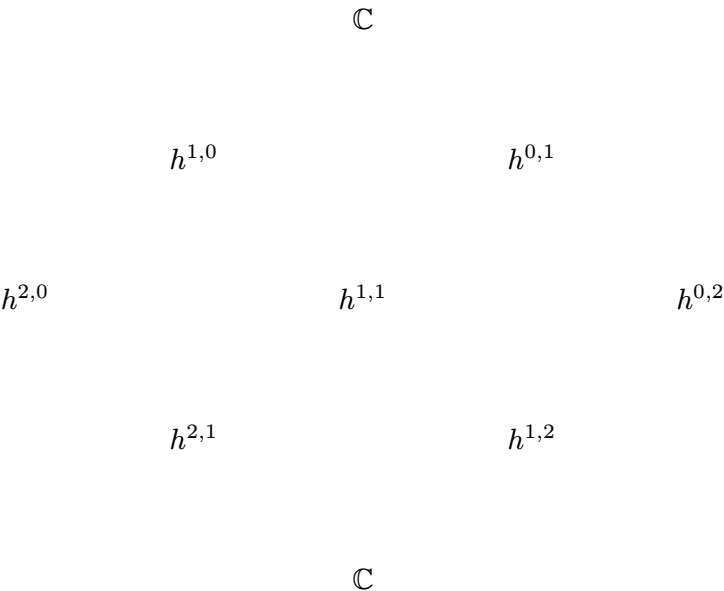
Ricordiamo ora una definizione fondamentale per lo studio delle varietà reali di dimensione pari:

Definizione. Sia M una varietà reale chiusa e orientabile di dimensione $2n$, si definisce la seguente forma bilineare

$$\begin{aligned}
 Q : H^n(M; \mathbb{R}) \otimes H^n(M; \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (\eta, \xi) &\mapsto \int_M \eta \wedge \xi
 \end{aligned}$$

Teorema. (dell'indice di Hodge) Sia M una superficie complessa, allora la forma di intersezione ristretta a $H^{1,1}(M; \mathbb{R})$ ha un solo autovalore positivo.

Dimostrazione. Il diamante di Hodge di una superficie ha al forma seguente:



Da cui si osserva che nella decomposizione in $\mathfrak{sl}(2)$ -moduli irriducibili c'è uno e un solo modulo $V(3)$. Allora $\dim P^{1,1} = h^{1,1} - 1$ e $\dim P^{0,0} = 1$. Dai precedenti risultati Q ristretta a $LP^{0,0}$ è definita positiva mentre ristretta a $P^{1,1}$ è definita negativa. □

Bibliografia