

Introduzione agli insiemi simpliciali e la loro teoria omotopica

Seminario per il corso di Topologia Algebrica A

Nota. Per motivi che saranno chiari in seguito l' n -simpleso standard verrà indicato con $|\Delta^n|$.

Verso gli insiemi simpliciali

Una tra le prime classi di spazi topologici considerate in topologia algebrica sono i complessi simpliciali. La loro costruzione e formulazione combinatoria è molto chiara, ma triangolare uno spazio topologico è spesso complicato. Ad esempio il minimo numero di triangoli necessari per triangolare il toro è 14!

Definizione. Un complesso simpliciale è una coppia (X, Σ) dove X è un insieme e Σ è un sottoinsieme delle parti finite di X che soddisfa le seguenti condizioni:

- Ogni singolo elemento di X appartiene a Σ ;
- Se $\sigma \subset X$ finito appartiene a Σ allora ogni sottoinsieme di σ appartiene a Σ .

Un morfismo di complessi simpliciali $f : (X, \Sigma_X) \rightarrow (Y, \Sigma_Y)$ è una funzione insiemistica $f : X \rightarrow Y$ tale che per ogni $\sigma \in \Sigma_X$ vale $f(\sigma) \in \Sigma_Y$. L' n -scheletro di X è l'insieme degli elementi di Σ di cardinalità n .

Definizione. Dato un complesso simpliciale astratto (X, Σ_X) poniamo sugli scheletri la topologia discreta. Definiamo la realizzazione geometrica dell' n -scheletro induttivamente: per $n = 0$ poniamo $|X_0| = X_0$, per il passo induttivo si consideri la mappa

$$\varphi : X_n \times \partial |\Delta^n| \rightarrow |X_{n-1}|$$

dove per ogni elemento $\sigma \in X_n$ la mappa $\{\sigma\} \times \partial |\Delta^n| \rightarrow |X_{n-1}|$ è definita sui vertici associando i vertici di $|\Delta^n|$ ai punti corrispondenti agli elementi di σ , sul resto del bordo è definita come l'unica estensione affine. Poniamo

$$|X_n| := X_n \times |\Delta^n| \cup_{\varphi} |X_{n-1}|.$$

Equivalentemente, $|X_n|$ è il cono della mappa φ . Infine poniamo

$$|X| := \operatorname{colim}_n |X_n|.$$

Uno dei problemi dei complessi simpliciali è l'impossibilità di effettuare incollamenti. Questo problema viene risolto dai Δ -complessi, vedremo però che questa generalizzazione porta con se un problema non indifferente. D'ora in poi sarà necessario considerare un ordinamento sulle facce dei semplici.

Definizione. Gli operatori geometrici di faccia sono le mappe affini definite da

$$d^i : |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^{n+1}|$$
$$e_j \mapsto \begin{cases} e_j & \text{per } j < i \\ e_{j+1} & \text{per } j \geq i \end{cases}$$

Gli operatori geometrici di degenerazione sono le mappe affini definite da

$$s^i : |\Delta^n| \rightarrow |\Delta^{n-1}|$$

$$e_j \mapsto \begin{cases} e_j & \text{per } j \leq i \\ e_{j-1} & \text{per } j > i \end{cases}$$

Osservazione. Per ogni $i < j$ vale la relazione $d^j d^i = d^i d^{j-1}$.

Definizione. Un Δ -complesso è il dato di una successione $(X_n)_{n \geq 0}$ di insiemi e di mappe

$$d_i : X_n \rightarrow X_{n-1} \text{ dove } i = 0, \dots, n$$

tali che $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ per ogni $i < j$. Un morfismo di Δ -complessi $f : X \rightarrow Y$ è il dato di funzioni $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ che commutano con le mappe d_i .

Moralmente X_n rappresenta l'insieme degli n -simplessi di X e le mappe d_i definiscono gli attaccamenti. Vediamo ora una definizione categorica alternativa.

Definizione. La categoria $\hat{\Delta}$ ha come oggetti gli ordinali finiti

$$[n] = \{0, \dots, n\}$$

e come morfismi le funzioni insiemistiche *strettamente* crescenti. Gli operatori di faccia sono definiti come

$$d^i : [n] \rightarrow [n+1]$$

$$(0, \dots, n) \mapsto (0, \dots, \hat{i}, \dots, n)$$

Osservazione. La categoria dei Δ -complessi è equivalente alla categoria $\text{Set}^{\hat{\Delta}^{\text{op}}}$, inoltre ogni morfismo in $\hat{\Delta}$ è composizione di operatori di faccia.

Definizione. La realizzazione geometrica di un Δ -complesso X è definita nel seguente modo: su X_n si pone la topologia discreta e

$$|X| := \left(\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

dove $(x, d^i(p)) \sim (d_i(x), p)$. Qui $d_i(x)$ indica la mappa presente nella definizione di Δ -complesso e $d^i(p)$ l'operatore geometrico di faccia.

Esempio. Costruiamo il toro come Δ -complesso. Definiamo:

$$X_2 = \{A, B\}$$

$$X_1 = \{a, b, c\}$$

$$X_0 = \{x\}$$

Gli unici bordi non banali sono quelli da X_2 a X_1 . Poniamo:

$$d_0(A) = b \quad d_0(B) = a$$

$$d_1(A) = c \quad d_1(B) = c$$

$$d_2(A) = a \quad d_2(B) = b$$

Il problema dei Δ -complessi è a livello di morfismi. Infatti, come il seguente esempio mostra, morfismi «naturali» come i collassamenti non sono possibili tra Δ -complessi.

Esempio. Non esistono morfismi di Δ -complessi da Δ^2 in Δ^1 : questo perchè il 2-scheletro di Δ^1 è vuoto.

Concludiamo notando che i Δ -complessi forniscono un'utile teoria omologica:

Definizione. Sia X un Δ -complesso, definiamo il complesso di catene simpliciale come

$$C_n^{\text{simp}}(X) := \bigoplus_{X_n} \mathbb{Z}$$

con i differenziali $d\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i \sigma$.

Teorema. L'omologia simpliciale è isomorfa all'omologia singolare.

Dimostrazione. Consideriamo la filtrazione su $C_*(|X|)$ data da

$$0 \subset C_*(|X_0|) \subset C_*(|X_1|) \subset \dots$$

La filtrazione è esaustiva: per compattezza ogni simpleso singolare di $|X|$ è contenuto in qualche $|X_n|$. La successione spettrale associata

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(|X_p|, |X_{p-1}|)$$

nella prima pagina è non banale solo per $q = 0$ ($|X_p| / |X_{p-1}|$ è omeomorfo a un wedge di sfere). Il differenziale

$$H_p(|X_p|, |X_{p-1}|) \rightarrow H_{p-1}(|X_{p-1}|, |X_{p-2}|)$$

è indotto dalla tripla $(|X_p|, |X_{p-1}|, |X_{p-2}|)$. Una caccia al diagramma mostra che coincide col differenziale simpliciale. La successione spettrale collassa a E^2 , la tesi segue dal fatto che $E^\infty = H_*(|X|)$. \square

Categoria Sset

La differenza tra Δ -complessi e insiemi simpliciali non è geometrica, l'idea è di ammettere semplici degeneri negli scheletri. Questo permette di avere una nozione soddisfacente di morfismi e di poter utilizzare l'utile macchinario categorico.

Definizione. La categoria simpleso Δ ha come oggetti gli ordinali finiti

$$[n] := \{0, \dots, n\}$$

e come morfismi le funzioni insiemistiche *debolmente* crescenti.

Gli operatori faccia sono i morfismi

$$\begin{aligned} d^i &: [n-1] \rightarrow [n] \\ (0, \dots, n-1) &\mapsto (0, \dots, \hat{i}, \dots, n) \end{aligned}$$

Gli operatori di degenerazione sono

$$\begin{aligned} s^i &: [n] \rightarrow [n-1] \\ (0, \dots, n) &\mapsto (0, \dots, i, i, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Fatto. Ogni morfismo in Δ si ottiene componendo gli operatori definiti sopra.

Definizione. La categoria degli insiemi simpliciali è $\text{Sset} := \text{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$. L' n -esimo simpleso standard è il funtore

$$\Delta^n := \text{Hom}_\Delta(-, [n])$$

Notazione. Se X è un insieme simpliciale indicheremo le immagini degli operatori d^i e s^i come $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ e $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$.

Definizione. Il bordo del simpleso standard $\partial\Delta^n$ è l'insieme simpliciale generato dalle facce $d_i\Delta^n$, al variare di $i = 0, \dots, n$. Definiamo invece il k -esimo horn Λ_k^n di Δ^n come l'insieme simpliciale generato da $d_i\Delta^n$ al variare di $i = 0, \dots, \hat{k}, \dots, n$. Qui con generato si intende applicando gli operatori d_i e s_i fino ad ottenere un sottoscheletro chiuso per queste operazioni.

Esempio. Lo zero-simpleso Δ^0 associa a ogni ordinale l'unica funzione costante verso $[0]$, è l'oggetto terminale in Sset.

Definizione. L' n -scheletro di un insieme simpliciale X è definito come $X_n := X([n])$. Si osservi che per Yoneda vale

$$\text{Hom}_{\text{Sset}}(\Delta^n, X) = \text{Hom}_{\text{Sset}}(\text{Hom}_{\Delta}(-, [n]), X) \cong X([n]) = X_n.$$

Notiamo subito che Sset ha ottime proprietà categoriche:

Fatto. Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} categorie con \mathcal{C} (co)completa. Allora $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$ è (co)completa e i (co)limiti si calcolano puntualmente:

$$\left((\text{co}) \lim_J F \right) (X) = (\text{co}) \lim_J F(X)$$

Corollario. La categoria Sset è completa e cocompleta.

Esempio. I prodotti di insiemi simpliciali si calcolano puntualmente:

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$$

$$d_i(x, y) = (d_i x, d_i y)$$

$$s_i(x, y) = (s_i x, s_i y)$$

Verifichiamo che $|\Delta^1 \times \Delta^1| \cong I^2$:

- $(\Delta^1 \times \Delta^1)_0 = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$
- Gli 1-simplessi non degeneri sono dati da

$$\{[(0, 0), (0, 1)], [(0, 0), (1, 0)], [(1, 0), (1, 1)], [(0, 1), (1, 1)], [(0, 0), (1, 1)]\}$$

- I 2-simplessi non degeneri sono:

$$\{[(0, 0), (1, 0), (1, 1)], [(0, 0), (0, 1), (1, 1)]\}$$

Tutto ciò si assembla a:

$$\begin{array}{ccc} (0, 1) & \longrightarrow & (1, 1) \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ (0, 0) & \longrightarrow & (1, 0) \end{array}$$

Il prossimo risultato, molto tecnico, semplificherà notevolmente la dimostrazione del Teorema alla fine della sezione.

Proposizione. (Densità dei funtori rappresentabili) Sia \mathcal{C} una categoria, ogni elemento di $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ è colimite di funtori rappresentabili.

Dimostrazione. Sia $F : \mathcal{C}^{\text{op}}$, consideriamo la categoria degli elementi

$$\int F = \{(A, x) \mid A \in \mathcal{C}, x \in F(A)\}.$$

Consideriamo il funtore

$$J : \int F \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$$

$$(A, x) \mapsto \text{Hom}(-, A)$$

allora una verifica mostra

$$\text{colim } J \cong F.$$

□

Definizione. (Realizzazione geometrica) Sia $X \in \text{Sset}$, poniamo sugli scheletri la topologia discreta e definiamo

$$|X| := \left(\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

dove $(x, d_i(p)) \sim (d_i(x), p)$ e $(x, s_i(p)) \sim (s_i(x), p)$. Questo produce un funtore

$$|\cdot| : \text{Sset} \rightarrow \text{Top}$$

Fatto. La realizzazzione geometrica di un insieme simpliciale è un CW complesso.

Fatto. Il funtore $|\cdot|$ è compatibile coi prodotto nel seguente modo. Come per i CW complessi in generale non è vero che $|X \times Y| \cong |X| \times |Y|$. Questa relazione diventa vera se si considera il prodotto nella cateogria degli spazi compattamente generati (weak) Hausdorff, cioè la k -ificazione della topologia prodotto. Nel caso in cui uno dei due insiemi simpliciali è finito (cioè ha solo finiti simplessi non degeneri) allora la relazione $|X \times Y| \cong |X| \times |Y|$ è vera in Top.

Fatto. Se consideriamo il funtore $|\cdot|$ a valori in \mathcal{CGHaus} allora preserva sia prodotti finiti che equalizzatori finiti. Questo in particolare implica che preserva tutti i limiti finiti.

Esempio. La realizzazione geometrica di Δ^0 è un punto: sappiamo che $(\Delta^0)_n = \{*\}$ per ogni n . Quindi da definizione

$$|\Delta^0| = \left(\bigsqcup_{n \geq 0} |\Delta^n| \right) / \sim$$

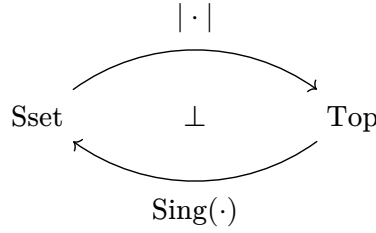
ma ogni simpleso degenera: sia $s : |\Delta|^n \rightarrow |\Delta^0|$ la mappa indotta dagli operatori di degenerazione, per ogni punto $p \in |\Delta^n|$ si ha $p \sim s(p)$. In definitiva tutto collassa a un punto. Si verifica facilmente che la realizzazione geometrica di Δ^n è l' n -esimo simpleso standard topologico (dimostrazione per notazione?).

Definizione. (Funtore singolare) Costruiamo un funtore

$$\text{Sing}(\cdot) : \text{Top} \rightarrow \text{Sset}$$

che associa a uno spazio topologico X i suoi simplessi singolari visti come insieme simpliciale. Esplicitamente, $\text{Sing}(X)_n := \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^n|, X)$. Le operazioni di faccia e degenerazione sono definite per naturalità a partire da quelle geometriche.

Teorema. I funtori $|\cdot|$ e $\text{Sing}(\cdot)$ sono aggiunti:



Dimostrazione. Sia $J : \int X \rightarrow \text{Sset}$ il funtore che definisce il diagramma della proposizione sulla densità dei funtori rappresentabili. I funtori rappresentabili in Sset sono per definizione i semplici, quindi

$$\begin{aligned} \text{Hom}(X, \text{Sing}(Y)) &= \text{Hom}(\text{colim}_J \Delta^n, \text{Sing}(Y)) = \lim_{(\text{Hom}(-, \text{Sing}(Y))) \circ J} \text{Hom}(\Delta^n, \text{Sing}(Y)) \cong \\ &\cong \lim_{\text{Hom}(-, Y) \circ |\cdot| \circ J} \text{Hom}(|\Delta^n|, Y) = \text{Hom}(\text{colim}_{|\cdot| \circ J} |\Delta^n|, Y) = \text{Hom}(|X|, Y) \end{aligned}$$

dove stiamo usando che l'espressione esplicita dell'ultimo colimite corrisponde esattamente alla realizzazione geometrica. \square

Osservazione. La formula esplicita della realizzazione geometrica della precedente dimostrazione è

$$|X| = \text{coeq} \left(\bigsqcup_{[m] \rightarrow [n]} X_n \times |\Delta^m| \rightrightarrows \bigsqcup_{[n]} X_n \times |\Delta^n| \right).$$

Le due mappe sono definite nel seguente modo: ogni elemento di $\int X$ porta con se la sua posizione in X . Precisamente: ogni Δ^m a sinistra porta con se un elemento $x \in X_m$, dunque la prima delle due mappe parallele semplicemente mappa Δ^m nella sua copia canonica a destra. Invece la seconda freccia mappa Δ^m prima in Δ^n attraverso la mappa $[m] \rightarrow [n]$ e poi nella sua copia canonica a destra.

Complessi di Kan

Definizione. Un complesso di Kan è un insieme simpliciale tale che ogni mappa da un horn verso tale insieme si estende a una mappa sull'intero semplice. Esplicitamente, X è di Kan se il seguente diagramma si completa:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ \Delta^n & & \end{array}$$

Osservazione. I semplici standard Δ^n non soddisfano la condizione di Kan per $n \geq 1$. Analizziamo il caso $n = 1$, osserviamo che Λ_0^2 si può scrivere come coprodotto fibrato:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 & \longrightarrow & \Lambda_0^2 \\ d_0 \uparrow & & \uparrow \\ \Delta^0 & \longrightarrow & \Delta^1 \\ & d_1 & \end{array}$$

Quindi dare un morfismo da Λ_0^2 equivale a dare due lati che coincidono sul vertice comune. Mandiamo $[0, 2]$ in $[0]$ e $[0, 1]$ in $[0, 1]$. Notiamo poi che

$$\text{Hom}_{\text{Sset}}(\Delta^2, \Delta^1) \underset{\text{Yoneda}}{\cong} \text{Hom}_{\Delta}([2], [1])$$

e nessuno dei 3 operatori di degenerazione estende la mappa scelta.

Proposizione. Sia X uno spazio topologico, allora $\text{Sing}(X)$ soddisfa la condizione di Kan.

Dimostrazione. Basta osservare che $|\Delta^n|$ si retraino per deformazione su $|\Lambda_k^n|$. □

Teoria omotopica su Sset

Da un punto di vista moderno una «teoria omotopica» è il dato di 3 classi di morfismi: fibrazioni, cofibrazioni e equivalenze deboli. Le definizioni nel caso di Sset sono guidate dall'intuito geometrico, con un po' di fatica si può mostrare che Sset soddisfa la definizione di categoria modello.

Definizione. Una *cofibrato* in Sset è un monomorfismo. Una *fibrato* è un morfismo $f : X \rightarrow Y$ tale per cui il seguente problema di sollevamento ha sempre una soluzione:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Definizione. Un mappa di complessi di Kan $f : X \rightarrow Y$ si dice *equivalenza debole* se induce isomorfismi su tutti i gruppi di omotopia simpliciali (di cui non parleremo) rispetto a tutti i punti base.

Osservazione. La coppia $(|\Delta^n|, |\Lambda_k^n|)$ è omeomorfa a (I^n, I^{n-1}) .

Osservazione. Un insieme simpliciale X è di Kan se e solo se la mappa terminale $X \rightarrow \Delta^0$ è una fibrazione.

D'ora in poi si considera il seguente modello omotopico su Top:

- le equivalenze deboli sono le equivalenze omotopiche deboli;
- le fibrazioni sono le fibrazioni di Serre;
- le cofibrazioni sono le mappe che possiedono la proprietà di sollevamento rispetto a tutte le fibrazioni banali (cioè le fibrazioni che sono anche equivalenze deboli);

Osservazione. Usando il fatto che una fibrazione banale $p : E \rightarrow B$ in Top induce isomorfismi $p_* : \pi_i(E, *) \rightarrow \pi_i(B, *)$, con un po' di fatica si riesce a mostrare che le inclusioni $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ sono cofibrazioni. È facile verificare che la classe delle cofibrazioni è invariante per pushout, dunque ogni inclusione di un sottocomplesso CW è una cofibrato (per il caso infinito occorre un argomento di (co)limite).

Proposizione. Il funtore $|\cdot|$ preserva le cofibrazioni.

Dimostrazione. Se $X \hookrightarrow Y$ è un monomorfismo in Sset allora $|X| \hookrightarrow |Y|$ è una inclusione di un sottocomplesso CW, quindi è una cofibrato. □

Proposizione. Il funtore Sing preserva le fibrazioni.

Dimostrazione. Sia $p : E \rightarrow B$ una fibrazione, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \text{Sing}(E) \\ \downarrow & & \downarrow p_* \\ \Delta^n & \longrightarrow & \text{Sing}(B) \end{array}$$

per aggiunta è equivalente a

$$\begin{array}{ccc}
 |\Lambda_k^n| & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 |\Delta^n| & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

e il problema di sollevamento si risolve per definizione di fibrazione di Serre. □

Il seguente teorema è fondamentale per la teoria ma omettiamo la dimostrazione in quanto estremamente tecnica e lunga.

Teorema. (Quillen) Il funtore $|\cdot|$ preserva le fibrazioni.

Il Teorema di Milnor

Questo Teorema, apparso per la prima volta in [-], è fondamentale per lo sviluppo della teoria degli insiemi simpliciali. Moralmente ha come conseguenza che la teoria degli insiemi simpliciali è sufficiente a studiare le proprietà omotopiche di ogni spazio. Il vantaggio del formalismo moderno introdotto prima è che semplifica notevolmente la dimostrazione originale di Milnor.

Lemma. Sia X uno spazio contraibile, allora $|\text{Sing}(X)|$ è contraibile.

Dimostrazione. Sia $F : X \times I \rightarrow X$ omotopia tra l'identità e la mappa costante, applichiamo Sing :

$$\text{Sing}(X) \times \text{Sing}(I) \rightarrow \text{Sing}(X)$$

dove usiamo che Sing in quanto aggiunto destro preserva i limiti. C'è un morfismo canonico da Δ^1 in $\text{Sing}(I)$:

$$\text{Hom}(\Delta^1, \text{Sing}(I)) \cong \text{Hom}(|\Delta^1|, I)$$

basta scegliere l'omeomorfismo ovvio. Per funtorialità di Sing , notando che $F \circ i_0 = \text{id}$ e $F \circ i_1 = *$, vale che

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & * & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 & & & & & & \\
 \text{Sing}(X) & \xrightarrow{i_1} & \text{Sing}(X) \times \Delta^1 & \longrightarrow & \text{Sing}(X) \times \text{Sing}(I) & \longrightarrow & \text{Sing}(X) \\
 & \xleftarrow{i_0} & & & & & \\
 & & & & \curvearrowleft & & \\
 & & & & \text{id} & &
 \end{array}$$

Sapendo che Δ^1 è finito, possiamo applicare $|\cdot|$:

$$|\text{Sing}(X)| \times |\Delta^1| \rightarrow |\text{Sing}(X)|$$

di nuovo per funtorialità questa mappa è un'omotopia tra l'identità su $|\text{Sing}(X)|$ e la mappa costante. □

Teorema. (Milnor, "58) La counità $\varepsilon_X : |\text{Sing}(X)| \rightarrow X$ è una equivalenza omotopica debole.

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su n che

$$\varepsilon_X : \pi_n(|\text{Sing}(X)|, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

è un isomorfismo per ogni spazio X e per ogni punto base. Il caso base $n = 0$ è ovvio. Consideriamo la fibrazione

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \hookrightarrow & PX \\ & & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

dato che i funtori $|\cdot|$ e $\text{Sing}(\cdot)$ preservano le fibrazioni, anche

$$\begin{array}{ccc} |\text{Sing}(\Omega X)| & \hookrightarrow & |\text{Sing}(PX)| \\ & & \downarrow \\ & & |\text{Sing}(X)| \end{array}$$

è una fibrazione. Per giustificare che la fibra rimanga $|\text{Sing}(\Omega X)|$ osserviamo che Sing preserva la fibra (un semplice singolare in PX costante in X equivale a un semplice singolare nella fibra del punto base). Oppure si può osservare che la fibra su un punto è un pullback e che $\text{Sing}(\cdot)$ in quanto aggiunto destro, preserva i limiti. Invece il fatto che $|\cdot|$ preservi le fibre dei morfismi è abbastanza chiaro dalla definizione. Oppure si può usare il fatto che $|\cdot|$ preserva i limiti finiti. Per naturalità di ε si ha un morfismo di fibrazioni. Dalla successione esatta lunga di omotopia e dal Lemma precedente segue che

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_{n+1}(|\text{Sing}(X)|) & \xrightarrow{\sim} & \pi_n(|\text{Sing}(\Omega X)|) & \longrightarrow & 0 \\ & & \varepsilon_X \downarrow & & \downarrow \varepsilon_{\Omega X} & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi_{n+1}(X) & \xrightarrow{\sim} & \pi_n(\Omega X) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

si conclude osservando che la mappa a destra è isomorfismo per ipotesi induttiva. □

Osservazione. La filosofia secondo la quale la costruzione $X \mapsto |\text{Sing}(X)|$ trasforma informazioni singolari in informazioni simpliciali è espressa molto bene dall'omologia. Infatti, in maniera praticamente tautologica, il complesso di catene simpliciale associato a $\text{Sing}(X)$ coincide con quello singolare di X .

Equivalenza di teorie omotopiche

Fatto. La dimostrazione del Teorema precedente può essere copiata, con gli strumenti simpliciali, per dimostrare che l'unità $\eta_X : X \rightarrow \text{Sing}(|X|)$ è una equivalenza debole per ogni complesso di Kan X .

Proposizione. I funtori $|\cdot|$ e $\text{Sing}(\cdot)$ preservano le equivalenze deboli.

Dimostrazione. Sia $X \in \text{Sset}$ di Kan, dobbiamo mostrare che c'è un isomorfismo naturale $\pi_i(X, *) \cong \pi_i(|X|, *)$. A meno di equivalenza debole possiamo sostituire X con $\text{Sing}(|X|)$. A questo punto ogni mappa $\Delta^n \rightarrow \text{Sing}(|X|)$ per aggiunzione corrisponde a una mappa $|\Delta^n| \rightarrow |X|$. Un'analisi dei diagrammi mostra che questo produce l'isomorfismo voluto. Il caso di $\text{Sing}(\cdot)$ è analogo rimpiazzando uno spazio X con $|\text{Sing}(X)|$. □

Osservazione. Per essere completamente formali dobbiamo definire il concetto di equivalenza debole tra insiemi simpliciali qualsiasi (non necessariamente di Kan). Alla luce della proposizione precedente possiamo dire che $f : X \rightarrow Y$ morfismo in Sset è equivalenza debole se la mappa $f : |X| \rightarrow |Y|$ è una

equivalenza debole in Top. La proposizione dice sostanzialmente che nel caso di complessi di Kan le due definizioni date sono equivalenti. Si noti come ogni insieme simpliciale è equivalente a un complesso di Kan tramite unità:

$$|X| \xrightarrow{|\eta_X|} |\text{Sing}(|X|)| \xrightarrow{\varepsilon_{|X|}} |X|$$

la composizione è l'identità (per la teoria generale delle aggiunzioni), $\varepsilon_{|X|}$ è una equivalenza per il Teorema di Milnor. Dunque lo è anche $|\eta_X|$ e per definizione η_X è equivalenza debole tra insiemi simpliciali.

Affinchè la seguente definizione sia ben posta bisognerebbe verificare che le equivalenze deboli formano un sistema moltiplicativo categorico. Ci fidiamo che qualcuno l'abbia già fatto.

Definizione. Indichiamo con \mathbf{W} la classe delle equivalenze deboli in Sset. La categoria omotopica di Sset è definita come

$$\text{Ho}(\text{Sset}) := \mathbf{W}^{-1} \text{Sset}$$

Analogamente si definisce la categoria omotopica $\text{Ho}(\text{Top})$.

Ricordiamo la proprietà universale della localizzazione:

Fatto. Sia \mathcal{C} una categoria e S una classe di morfismi chiusa per composizione e che contiene le identità degli oggetti. Allora $S^{-1}\mathcal{C}$ è caratterizzata dalla seguente proprietà universale: per ogni categoria \mathcal{D} e ogni funtore $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, il seguente diagramma si completa se e solo se F mappa elementi di S in isomorfismi:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow & \nearrow & \\ S^{-1}\mathcal{C} & & \end{array}$$

Teorema. (Quillen) I funtori $|\cdot|$ e $\text{Sing}(\cdot)$ scendono alle categorie omotopiche e producono un'equivalenza di categorie:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sset} & \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|} \\ \xrightarrow{\perp} \\ \xrightarrow{\text{Sing}(\cdot)} \end{array} & \text{Top} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ho}(\text{Sset}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|} \\ \xrightarrow{\cong} \\ \xrightarrow{\text{Sing}(\cdot)} \end{array} & \text{Ho}(\text{Top}) \end{array}$$

Dimostrazione. I funtori scendono alle localizzazioni perchè preservano le equivalenze deboli. Dato che

$$\begin{aligned} \eta_X &: X \rightarrow \text{Sing}(|X|) \\ \varepsilon_X &: |\text{Sing}(X)| \rightarrow X \end{aligned}$$

sono equivalenze deboli nelle localizzazioni diventano isomorfismi. Una verifica mostra che η e ε continuano a essere trasformazioni naturali che definiscono un'aggiunzione tra $|\cdot|$ e $\text{Sing}(\cdot)$ nelle categorie omotopiche. In particolare si hanno isomorfismi naturali:

$$\eta : \text{Id}_{\text{Ho}(\text{SSet})} \xrightarrow{\cong} \text{Sing}(|\cdot|)$$
$$\varepsilon : |\text{Sing}(\cdot)| \xrightarrow{\cong} \text{Id}_{\text{Ho}(\text{Top})}$$

cioè i due funtori inducono un'equivalenza categorica. □