Teorema 3.1 *Sia* $f(n)$ *una funzione non decrescente e siano* α, β, n_0, c_0 *e* c *delle costanti tali che* $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$ *e* $n_0, c_0, c > 0$, *per la relazione di ricorrenza*

$$T(n) \leq \begin{cases} c_0 & \textit{se } n \leq n_0 \\ \alpha T(n/\beta) + cf(n) & \textit{altrimenti} \end{cases} \tag{3.2}$$

(dove n/β *va interpretato come* $\lfloor n/\beta \rfloor$ *o* $\lceil n/\beta \rceil$*). Se esistono due costanti positive* γ e n'_0 tali che $\alpha f(n/\beta) \leq \gamma f(n)$ *per ogni* $n \geq n'_0$, *allora la relazione di ricorrenza ha i seguenti limiti superiori:*

1. $T(n) = O(f(n))$ *se* $\gamma < 1$;
2. $T(n) = O(f(n) \log_\beta n)$ *se* $\gamma = 1$;
3. $T(n) = O(n^{\log_\beta \alpha})$ *se* $\gamma > 1$ e $\alpha > 1$.

$\log_\beta \alpha$ ← moltiplicazione tra matrici

$\alpha = 8$, $\beta = 2$, $f(n) = n^2$: $\alpha f(n/\beta) = 8\left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq \gamma n^2 \Rightarrow \gamma = 2$

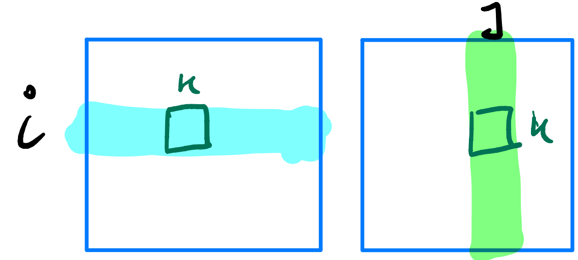
$\alpha = 7$ " " " " " " " "

MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI

a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}

A, B = matrici $n \times n$ $\rightarrow$ $C = A \times B$ = matrice $n \times n$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$



costo $c_{ij} = \Theta(n)$ tempo

costo $C = \Theta(n^3)$ tempo

COMPLESSITÀ del PROBLEMA

NOTA: $N = n^2$ = dim

- limite inferiore: fooling argument $\Omega(n^2)$ tempo
- limite superiore ? Congettura: $\Theta(n^{\omega})$ dove $2 < \omega < 3$ (oggi)

Facile per la somma: $\Theta(n^2)$ tempo

Solovay-Strassen: anni '70

DIVIDE et IMPERA (n è una potenza del 2 : WLOG)

CASO BASE : $n = 1$ IMMEDIATO
prodotto tra due scalari

PASSO INDUTTIVO: $n \geq 2$

1 somma 2 molt. $n/2 \times n/2$

$$\underbrace{\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} n/2 & n/2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n/2 \\ n/2 \end{array} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{array}}_{A} \times \underbrace{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{ae + bg} & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}}_{C}$$

a, b, c, d, e, f, g, h
matrici $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

$$T(n) \leq \underset{\alpha}{8}\, T\left(\frac{n}{2_\beta}\right) + \underbrace{c\, n^2}_{f(n)} \Rightarrow O\left(n^{\log_2 8}\right) = O(n^3)$$

Solovay-Strassen: bastano 7 moltiplicazioni $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ $(\alpha = 7)$

$$
\begin{aligned}
v_0 &= (b-d)(g+h) & v_4 &= a(f-h) \\
v_1 &= (a+d)(e+h) & v_5 &= d(g-e) \\
v_2 &= (a-c)(e+f) & v_6 &= (c+d)e \\
v_3 &= (a+b)h & &
\end{aligned}
$$

$\cancel{ah} + bh + af - \cancel{ah}$

$(a+b)h + a(f-h)$

$$
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 + v_1 - v_3 + v_5 & v_3 + v_4 \\ v_5 + v_6 & v_1 - v_2 + v_4 - v_6 \end{bmatrix}
$$

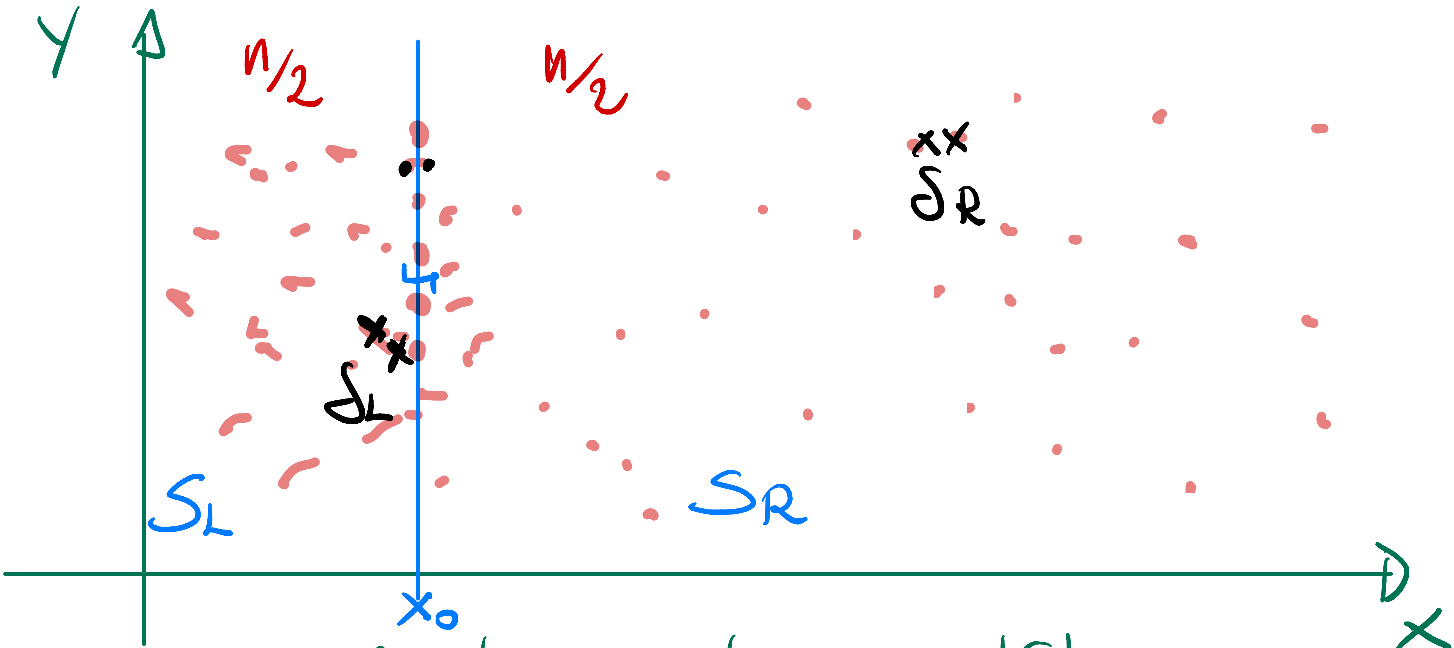
A B C

$T(n) \leq 7\,T(n/2) + c' n^2 \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_2 7})$

$\log_2 7 < 3$

Nearest Neighbor (NN)

Dimensione $d=2$, piano cartesiano, distanza euclidea $d(x,y)$



S = insieme di punti nel piano cartesiano, $n=|S|$

Coppia più vicina (closest pair): $x,y \in S$, $x \neq y$ t.c. $\forall x', y', x' \neq y'$: $d(x,y) \leq d(x',y')$

$U = \{ \underset{0}{mi}, \underset{1}{illumino}, \underset{2}{di}, \underset{3}{immenso} \}$

$D =$ mi mi di $\rightsquigarrow V_D = 1010$ $\quad\quad V_D = 2010$

$|V_D| = |U|$

Information retrieval

Vector space model

BASELINE: considera tutte le $\binom{n}{2}$ coppie, calcola $d(x,y)$ per ciascuna coppia $x,y \in S$, e restituisci la minima

$O(n^2)$ tempo

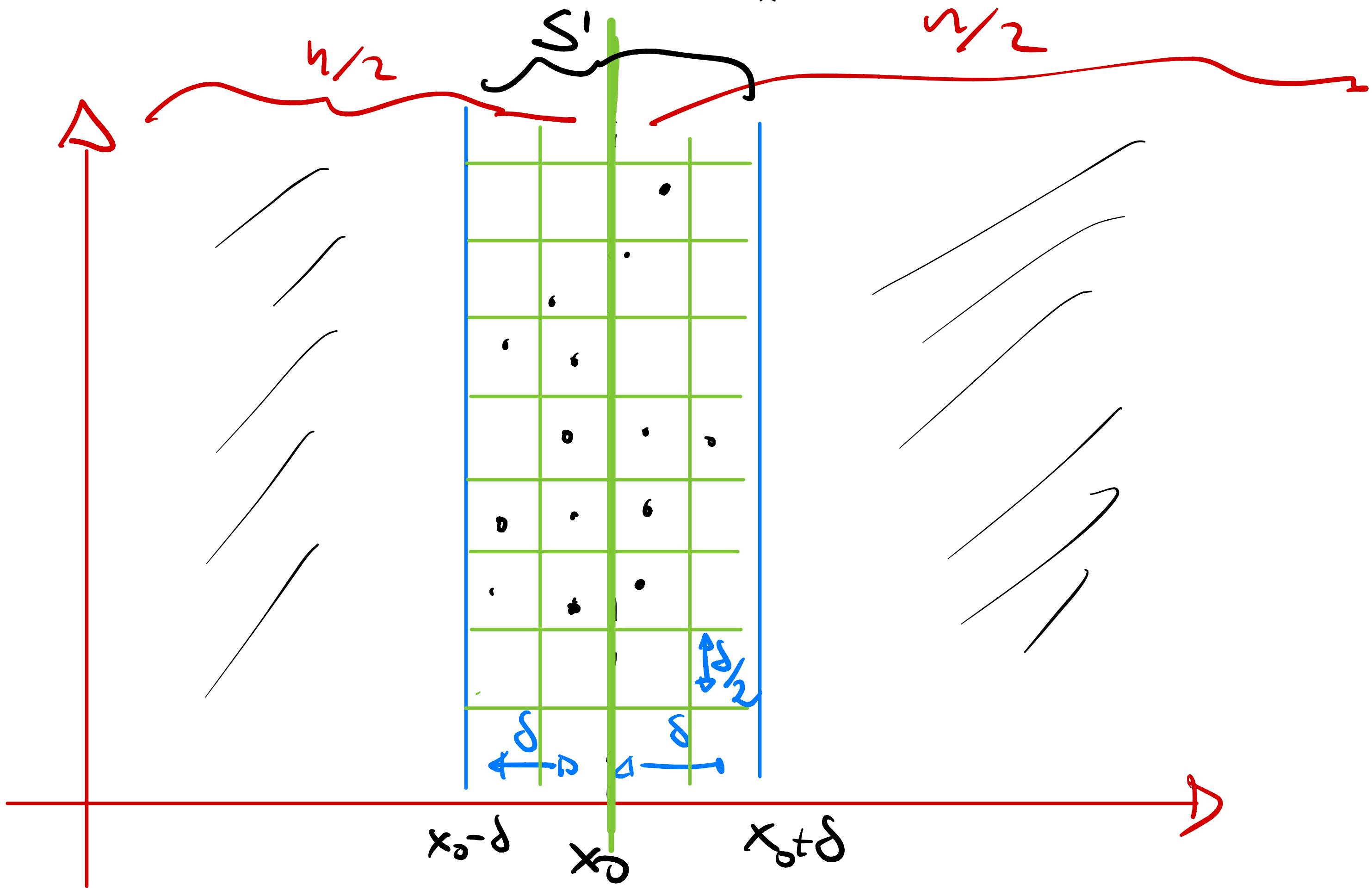
DIVIDE-et-IMPERA

- CASO BASE = $\left.\begin{array}{l} n=2 \\ n=3 \end{array}\right\}$ per ispezione diretta, restituisci la coppia più vicina

- $\left.\begin{array}{l} \delta_L \to \text{coppia più vicina in } S_L \\ \delta_R \to \text{" " " " } S_R \end{array}\right\}$ $\delta = \min\{\delta_L, \delta_R\}$

  $\hat{\delta} \to$ coppia x, y più vicina t.c. $x \in S_L$ e $y \in S_R$ $< \delta$ (altrimenti non ci interessa)

COSA NON FUNZIONA: non prendiamo tutte le scelte x, y suddette perché alcune possono escluse a priori



n/2
S'
n/2
δ/2
δ
δ
x₀-δ
x₀
x₀+δ

1. Seleziona $S' \subseteq S$ t.c. le ascisse dei punti in S' appartengono all'intervallo $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ $O(n)$

2. Ordina i punti in S' in base alla loro ordinata ~~$n \lg n$~~

3. Scandisci i punti in S' secondo l'ordine (2) e per ogni punto $p \in S'$ confrontalo con i successivi 10 punti $O(n)$

$$T(n) \le 2T(n/2) + \underbrace{c\, \cancel{n \lg n}}_{c\,n}$$

basta ordinare S all'inizio